UNIVERSITÀ DEGLI STUDI DI PADOVA

DIPARTIMENTO DI MATEMATICA
"TULLIO LEVI–CIVITA"

CORSO DI LAUREA MAGISTRALE IN MATEMATICA

FIBRATI, CONNESSIONI E CURVATURA

DALLA GEOMETRIA ALLA FISICA

RELATORE
PROF. FRANCESCO BOTTACIN

LAUREANDO
DAVIDE PALMA
1137629

28 SETTEMBRE 2018

ANNO ACCADEMICO 2017/2018

Alla mia famiglia

INDICE

INTRODUZIONE

Felix qui potuit rerum cognoscere causas.

Virgilio, *Georgiche*; II, 490.

Nella tesi che presentiamo si vuole condurre uno studio puntuale e contenuto degli spazi fibrati: si partirà dalla nozione più generale di fibrato per porre maggiore attenzione al caso dei fibrati principali, mettendo in risalto in qualche occasione i legami con il caso notevole e più familiare dei fibrati vettoriali. Contestualmente, ad ognuna di queste diverse situazioni, verrà adattata opportunamente la teoria delle connessioni e si riformulerà in maniera conveniente la definizione di curvatura. Gli argomenti trattati sono essenzialmente di carattere teorico; ciononostante, essi trovano una fortunata applicazione nell'ambito delle teorie di gauge in Fisica: il linguaggio della Geometria differenziale sottostante a fibrati e connessioni risulta infatti particolarmente idoneo ed esaustivo per interpretare, descrivere e formulare in chiave moderna le forze fondamentali della natura. In particolare si darà enfasi all'interpretazione geometrica dell'Elettromagnetismo, mentre verrà fornito solo qualche cenno al caso dell'interazione nucleare forte.

⋆ ⋆ ⋆

Alle spalle della nascita e dell'evoluzione del concetto di connessione vi sono ovviamente l'opera iniziale di Gauss (1877–1855), volta a definire strumenti e metodi dello studio di curve e superfici immerse nello spazio euclideo ordinario, e la generalizzazione di questi concetti a n dimensioni elaborata dal suo allievo Bernhard Riemann (1826–1866), il quale pose così le fondamenta teoriche della Geometria differenziale.

I primi scritti teorici che riguardano la teoria delle connessioni fecero la loro comparsa intorno alla seconda metà dell'Ottocento. È del 1869 un testo pubblicato da Bruno Christoffel (1829–1900) nel quale, studiando alcuni tipi di trasformazioni, introdusse per la prima volta i simboli omonimi Γ^k_{ij}, nella notazione originale indicati con $\left\{ {k \atop ij} \right\}$; è opportuno notare tuttavia che questi n^3 simboli non vennero in un primo momento riconosciuti come coefficienti che determinano una connessione. Il grande passo nella direzione di una definizione rigorosa di questi concetti è senz'altro rappresentato dall'opera della scuola padovana di Gregorio Ricci–Curbastro (1853–1925), il quale ebbe il merito di comprendere che i simboli di Christoffel potessero essere utilizzati per sviluppare un calcolo differenziale indipendente dal sistema di coordinate in uso: nacque così il cosiddetto *calcolo differenziale assoluto*, elaborato tra il 1884 e il 1900. Nel 1893 vi fu una prima memoria di Ricci–Curbastro; i principi completi e rigorosi della teoria e dei metodi della nuova disciplina furono organizzati definitivamente nel ben noto articolo del 1901, *Méthodes de calcul différentiel absolu et leurs applications*[1], scritto in collaborazione con il suo allievo Tullio Levi–Civita (1873–1941).

Il contributo ulteriore di Levi–Civita alla disciplina fu l'elaborazione del concetto di *trasporto parallelo*[2], la soluzione al problema — all'epoca non ancora risolto — di trovare una generalizzazione conveniente della nozione euclidea di parallelismo in Geometria differenziale. Legata a questo studio è anche l'individuazione di una connessione — in seguito denominata *di Levi–Civita* — che presenta specifiche proprietà di simmetria (torsione nulla) e di compatibilità con la metrica. Rimasto inizialmente nell'ombra, fu con l'avvento della teoria della Relatività generale (1916) che il grande lavoro dei due matematici italiani — fino ad allora sviluppato formalmente senza una evidente interpretazione geometrica — mostrò tutta la sua potenza espressiva, imponendosi come strumento non solo utile ma indispensabile tanto alla Matematica quanto alla Fisica[3].

A questo punto la teoria delle connessioni poteva dunque dirsi pressocché affermata nella comunità matematica dell'epoca e nello stesso periodo per la prima volta fece la sua comparsa il termine *connessione* in *Reine Infinitesimal Geometrie*, pubblicato da Hermann Weyl (1885–1955) nel 1918. Da qui in poi si aprì una nuova fase per la disciplina, volta a generalizzare le strutture che si erano venute fino ad allora a definire; fecondo, a questo proposito, risultò l'incontro della Geometria differenziale con la teoria dei gruppi di Lie, elaborata da Sophus Lie (1842–1899), avvenuto contemporaneamente ai lavori di Felix Klein (1849–1925) di riorganizzazione delle conoscenze geometriche sulla base del suo ben noto *programma di Erlangen*, nel quale pure la teoria dei gruppi assunse un ruolo fondamentale. Spiccano in questo contesto gli studi sulla ricerca di una soddisfacente estensione della teoria delle connessioni, condotti indipendentemente da Weyl e

1 Mathematische Annalen; vol. 54, 1–2, pp. 125–201; 1901.

2 *Nozione di parallelismo in una varietà qualunque e conseguente specificazione geometrica della curvatura riemanniana*, Rendiconti del Circolo Matematico di Palermo; vol. 42, pp. 173–205; 1917.

3 A tal proposito, ad una conferenza del 1949, Weyl sottolineò che se la Relatività ristretta suscitò forte impressione tra i fisici e meno tra i matematici la teoria della Relatività generale provocò invece la reazione opposta.

da Élie Cartan (1869–1951), i quali furono motivati anche dagli spunti loro offerti dalla nuova teoria di Einstein (1879–1955); il secondo, in particolare, si occupò anche di adeguare al nuovo quadro teorico il concetto di curvatura.

La lacuna teorica per raggiungere questa generalizzazione fu tuttavia colmata solo intorno alla metà del secolo scorso, con l'introduzione degli *spazi fibrati* (o fibrati generali) da parte di Charles Erhesmann (1905–1979) e di Jean–Louis Koszul (1921–2018)[4]: in questo modo il primo, allievo di Cartan, diede una definizione rigorosa dei cosiddetti *spazi generalizzati* già elaborati dal suo maestro. È in questi lavori, risalenti agli anni tra il 1941 e il 1944, che viene per la prima volta definito un fibrato principale[5]. L'estensione della teoria delle connessioni fu presentata nel 1951, quando Ehresmann pubblicò *Les connexions infinitésimales dans un espace fibré différentiable*; in questo lavoro egli definisce le cosiddette connessioni infinitesimali, poi affermatesi in letteratura con il nome più comune di *connessioni di Ehresmann*; a questi sottospazi, nel caso si consideri un fibrato principale, egli impose l'ulteriore condizione di essere invarianti sotto l'azione del gruppo.

Nel secondo dopoguerra furono molti a occuparsi di porre in forma organica tutti i risultati conseguiti, tra cui Chern (1911-2004) e Steenrod (1910–1971), il quale oltre a chiarire i fondamenti topologici della teoria dei fibrati, ha dato importanti contributi alla loro classificazione: da allora è questo il quadro teorico standard di riferimento, relativamente a questi argomenti, della moderna Geometria differenziale.

⋆ ⋆ ⋆

Il contenuto del presente lavoro è suddiviso in due parti principali, la prima (CAPITOLI 1–3) di carattere teorico e matematico, la seconda (CAPITOLI 4–5) di natura applicativa e di argomento fisico.

Lo scopo della prima parte dell'elaborato è di entrare nel dettaglio dello studio di fibrati, connessioni e curvatura e, ovviamente, di presentare gli oggetti matematici protagonisti della seconda parte della tesi.

La peculiarità del CAPITOLO 1 consiste nel costituire una premessa indispensabile ai successivi due capitoli, in particolare il terzo. Trovano qui luogo, infatti, gli elementi essenziali della teoria dei gruppi di Lie, una particolare tipologia di gruppi che presentano una duplice anima, algebrica in quanto gruppi e geometrica in quanto varietà differenziabili. Si presenterà la nozione di algebra di Lie e si vedrà che

4 Se ne occuparono contemporaneamente anche Whitney, Hopf, Stiefel e Pontrjagin.
5 Fu sempre Ehresmann nel 1943 a dare per la prima volta, in *Sur les éspaces fibrés associés à une variété différentiable*, la definizione (attuale) di varietà differenziabile attraverso la struttura di un atlante di carte locali.

ad un gruppo di Lie resta associata naturalmente la sua algebra di Lie, identificabile con lo spazio tangente al gruppo (inteso come varietà) nel suo elemento neutro. Essa viene tuttavia definita a partire dai campi vettoriali del gruppo, come l'insieme dei campi dotati di una particolare proprietà di invarianza: questa definizione permette di ricavare una serie di importanti risultati che mostrano come gruppo e relativa algebra siano due concetti strettamente collegati tra loro.

A partire dal CAPITOLO 2 si entra negli argomenti che sono l'oggetto del presente lavoro. Qui trova spazio la generalizzazione delle nozioni di *fibrato*, di *connessione* e di *curvatura* rispetto alle classiche definizioni che si danno nel caso dei fibrati vettoriali. I fibrati generali estendono i fibrati vettoriali nel senso che la fibra tipica non è più uno spazio vettoriale fissato ma sarà in generale una varietà differenziabile. Più delicato risulta estendere la teoria delle connessioni: partendo dal fibrato tangente al fibrato in questione è sempre possibile definire in modo canonico un suo sottofibrato — la collezione degli spazi tangenti alle fibre —. Una *connessione di Ehresmann* consiste nella scelta di un sottofibrato complementare al primo: essa è dunque una distribuzione sul fibrato tangente del fibrato considerato. È conveniente avere, inoltre, una definizione alternativa ed equivalente che si ottiene ricorrendo al linguaggio delle forme differenziali a valori vettoriali. Conseguentemente si procede a generalizzare la nozione di curvatura; la definizione che verrà data metterà in relazione tale concetto con la proprietà di involuzione della connessione, intesa come distribuzione.

L'ambiente fin qui presentato si arricchisce ulteriormente considerando un gruppo di Lie che agisca su ciascuna fibra tipica del fibrato (CAPITOLO 3). Se si richiede, in più, che la stessa fibra sia una copia del gruppo di Lie in questione (nel qual caso si parla di fibrato in gruppi) allora si ottiene quello che viene chiamato un *fibrato principale*. La più generale definizione di connessione Ehresmann viene adattata al contesto in esame specificando il comportamento dei sottospazi della distribuzione sotto l'azione del gruppo di Lie (*connessione principale*); analogamente a quanto fatto nel precedente capitolo, verrà data una seconda definizione di connessione come forma differenziale, qui utilizzata in maniera sistematica. Anche la definizione di curvatura verrà modificata di conseguenza ricorrendo alle forme pseudotensoriali e alla derivata covariante esterna: centrali — anche per il contenuto della seconda parte — sono l'equazione di struttura di Cartan, che fornisce l'espressione della forma di curvatura, e l'identità di Bianchi. Si concluderà l'argomento dando una descrizione di come sia possibile, dato un fibrato principale, associare a questo un fibrato generale e come si possa su quest'ultimo definire una connessione a partire dalla connessione, eventualmente presente, sul fibrato principale di partenza. Un caso notevole, ad esempio per questioni fisiche, è quello di un fibrato vettoriale associato ad un fibrato principale; se si parte invece da un fibrato vettoriale si vedrà come è ad esso canonicamente associato un determinato fibrato principale, il fibrato dei riferimenti.

Nella seconda parte della tesi trova luogo l'applicazione di alcune nozioni esaminate in quella precedente nell'ambito della Fisica teorica, in particolare alla descrizione attraverso le *teorie di gauge* delle forze fondamentali presenti in natura. In questa parte, i cui contenuti andremo a dettagliare di seguito dando contemporaneamente una breve idea della teoria sottostante, l'enfasi è data all'interpretazione matematica, soffermando l'attenzione precipuamente sugli aspetti geometrici degli argomenti trattati, talvolta a scapito del rigore fisico che — nei limiti della nostra sensibilità — si è tuttavia cercato di preservare.

Per descrivere lo stato di un fotone non è sufficiente indicarne le sole coordinate spaziotemporali $(t, \vec{x})$: occorre assegnare anche un angolo che esprima la polarizzazione del campo elettromagnetico; è quindi necessario associare ad ogni punto dello spaziotempo una copia della circonferenza unitaria $S^1 \cong U_1(\mathbb{C})$. La collezione di queste copie (le fibre) del gruppo $U_1(\mathbb{C})$ non è altro che un fibrato principale. I campi fisici vengono di conseguenza reinterpretati in quest'ottica come sezioni di un fibrato vettoriale — nel caso specifico di rango unitario — associato al fibrato principale. Dal momento che le leggi della Fisica coinvolgono anche derivate si rivela poi indispensabile trovare un'opportuna nozione di derivazione: per questo motivo verrà introdotta una 1-forma di connessione (a valori nell'algebra di Lie di $U_1(\mathbb{C})$) attraverso cui sarà possibile derivare in un senso che in Fisica viene detto *covariante*, ossia in grado di preservare l'invarianza delle leggi fisiche nella loro forma. In termini un po' iconici si potrebbe affermare che la presenza di un campo produce, per così dire, una distorsione nell'allineamento relativo delle fibre; l'oggetto matematico in grado di misurare tale distorsione è la forma (o tensore) di curvatura associata alla connessione introdotta: per questo motivo si può concludere che *la curvatura* — oggetto teorico introdotto dalla Matematica, pertanto non direttamente visibile — *si manifesta a noi fisicamente assumendo le sembianze di un campo di forze*. Per quanto l'idea di fondo sia simile a quanto accade in Relatività generale, bisogna tuttavia notare che nella teoria di Einstein la forza del campo gravitazionale si manifesta come curvatura dello spaziotempo stesso, mentre nel caso della teoria di gauge qui presa come esempio è la distorsione dello spazio degli stati (le diverse fibre) a dare origine al campo: nonostante ogni fibra sia associata ad un punto dello spaziotempo, questo può comunque restare piatto (può avere cioè curvatura nulla).

Nel caso in cui l'azione sia esercitata dal gruppo di Lie (abeliano) $U_1(\mathbb{C})$, la teoria di gauge che si produce è abeliana e, opportunamente interpretata, fornisce la descrizione dell'*interazione elettromagnetica*: questa analisi è condotta entro il CAPITOLO 4. Se il gruppo di gauge è $SU_2(\mathbb{C})$ si ottiene una teoria di gauge non abeliana che, nelle intenzioni originali della sua elaborazione, aveva la speranza di descrivere l'*interazione nucleare forte*, pretesa ormai superata con la moderna teoria di gauge di gruppo $SU_3(\mathbb{C})$, ove la scelta del gruppo è motivata dalla scoperta delle particelle subnucleari denominate quark: un breve cenno a queste due teorie e alla nascita del cosiddetto *Modello standard* è dato nel CAPITOLO 5, a chiusura della tesi.

NOTAZIONI

Riportiamo qui alcune precisazioni in merito alla notazione e alla simbologia utilizzate. Siano, nel seguito, M una varietà differenziabile e K un campo.

S^n	sfera n-dimensionale unitaria ($\mathrm{S}^n \subset \mathbb{R}^{n+1}$)
$\mathbb{I}_n$	matrice identità di ordine n
A^H	trasposta coniugata della matrice A
$\mathrm{M}_n(K)$	anello delle matrici di ordine n a coefficienti in K
$\mathrm{GL}_n(K), \mathfrak{gl}_n(K)$	gruppo lineare di ordine n a coefficienti in K e relativa algebra di Lie
$\mathrm{SL}_n(K), \mathfrak{sl}_n(K)$	gruppo lineare speciale di ordine n a coefficienti in K e relativa algebra di Lie
$\mathrm{U}_n(K), \mathfrak{u}_n(K)$	gruppo unitario di ordine n a coefficienti in K e relativa algebra di Lie
$\mathrm{SU}_n(K), \mathfrak{su}_n(K)$	gruppo unitario speciale di ordine n a coefficienti in K e relativa algebra di Lie
$\mathcal{E}(M)$	sezioni del fibrato E su M
$\mathfrak{X}(M)$	spazio dei campi vettoriali su M
$\mathfrak{X}_D$	spazio delle sezioni locali della distribuzione D
$\Omega^k(M)$	spazio delle k-forme differenziali su M
$\Omega^k(M;E)$	spazio delle k-forme differenziali su M a valori vettoriali nel fibrato E
$C^\infty(M)$	(salvo diverso avviso denoterà) $C^\infty(M;\mathbb{R})$.

1

ELEMENTI DI TEORIA DEI GRUPPI DI LIE

In questo Capitolo iniziale si vogliono introdurre i fondamentali della teoria dei gruppi di Lie, strumento indispensabile per trattare la struttura — più specifica, nell'ambito degli spazi fibrati — dei fibrati principali, a loro volta essenziali nella descrizione delle applicazioni alla Fisica proposte nella seconda parte del presente lavoro. Nel dettaglio, si vedrà la definizione di gruppo di Lie, passando in rassegna, successivamente, il concetto di algebra di Lie e una serie di risultati che evidenziano il legame profondo che vige tra un gruppo di Lie e la propria algebra di Lie. La stesura del Capitolo è finalizzata a fornire un elenco completo — seppur minimale — degli strumenti annunciati: non troveranno luogo, di conseguenza, le dimostrazioni di tutti i risultati proposti; per quelle omesse è comunque esplicitamente indicato il relativo riferimento bibliografico.

1.1 GRUPPI DI LIE

Iniziamo col presentare i gruppi di Lie, particolari gruppi che, alla loro natura algebrica coniugano un'essenza geometrica data dalla struttura di varietà differenziabile. Verrà chiarita la terminologia che si usa nell'ambito di un'azione, da parte di un gruppo di Lie, su una varietà.

1.1.1 *Definizioni ed esempi*

Definizione 1.1. Un *gruppo di Lie* G è un gruppo dotato di una struttura di varietà differenziabile tale per cui le operazioni di gruppo — prodotto $G \times G \to G$ e inverso $G \to G$ — siano funzioni differenziabili o, equivalentemente, sia di classe C^∞ la mappa

$$\begin{aligned} G \times G &\to G \\ (g, h) &\mapsto gh^{-1}. \end{aligned}$$

Di seguito alcuni esempi classici di gruppi di Lie.

Esempio 1.2. $\mathbb{R}^n$ inteso come gruppo additivo, il gruppo moltiplicativo $\mathbb{R}^\times$ e ogni spazio vettoriale finito dimensionale, con la struttura differenziabile data dalla scelta di una base, sono tutti gruppi di Lie.

Esempio 1.3. Si consideri il gruppo unitario $U_1(\mathbb{C})$, costituito dai complessi di modulo unitario:

$$\begin{aligned} U_1(\mathbb{C}) &= \{z \in \mathbb{C} \mid |z| = 1\} = \{(a,b) \in \mathbb{R}^2 \mid a^2 + b^2 = 1\} \\ &= \{e^{i\phi} \mid \phi \in \mathbb{R}\} = S^1. \end{aligned}$$

Da qui la duplice natura di $U_1(\mathbb{C})$: algebrica in quanto gruppo e geometrica in quanto identificato con la varietà S^1 (la circonferenza unitaria in $\mathbb{R}^2$): i complessi di modulo 1 formano dunque un gruppo di Lie, essendo le operazioni di gruppo di classe C^∞.

Analogamente, si possono considerare i quaternioni di modulo unitario: ricordando che questi costituiscono un gruppo (moltiplicativo) isomorfo[1] a $SU_2(\mathbb{C})$, si ha

$$\begin{aligned} SU_2(\mathbb{C}) &\cong \{z \in \mathbb{H} \mid |z|^2 = 1\} \\ &= \{(a,b,c,d) \in \mathbb{R}^4 \mid a^2 + b^2 + c^2 + d^2 = 1\} = S^3. \end{aligned}$$

Il gruppo (algebrico) dei quaternioni unitari eredita quindi dalla sfera tridimensionale una struttura (geometrica) di varietà e, al contempo, la sfera acquista struttura di gruppo non abeliano; anche $SU_2(\mathbb{C})$ è pertanto un gruppo di Lie (non commutativo).

Esempio 1.4. Anche $GL_n(\mathbb{R})$ è, per ogni intero $n \geq 1$, un gruppo di Lie: è infatti sia varietà di dimensione n^2 sia gruppo (non abeliano), inoltre prodotto e inverso, coinvolgendo solo le operazioni elementari, sono funzioni differenziabili.

Definizione 1.5. Siano G, H gruppi di Lie. Un *omomorfismo di gruppi di Lie* è un'applicazione differenziabile $f : G \to H$ che sia un omomorfismo di gruppi; se f è diffeomorfismo e isomorfismo di gruppi allora è un *isomorfismo di gruppi di Lie*. Un isomorfismo di un gruppo di Lie in sé è detto *automorfismo*.

Definizione 1.6. Sia G un gruppo di Lie e sia $h \in G$. Si definiscono *traslazione sinistra* e *traslazione destra* rispettivamente le mappe

$$\begin{aligned} L_h : G &\to G & \qquad R_h : G &\to G \\ g &\mapsto L_h(g) = hg & g &\mapsto R_h(g) = gh, \end{aligned}$$

mentre il *coniugio* è la mappa $C_h : G \to G$ definita da $C_h(g) = hgh^{-1}$, per ogni $g \in G$.

Osservazione 1.7. Si noti che pur essendo diffeomorfismi, le traslazioni destra e sinistra non sono isomorfismi di gruppi di Lie in quanto non

1 I quaternioni ammettono una rappresentazione matriciale data da

$$\mathbb{H} \ni z = a + bi + cj + dk \leftrightarrow \begin{bmatrix} a+ib & c+id \\ -c+id & a-ib \end{bmatrix} = A_z \in M_2(\mathbb{C}),$$

e si può facilmente verificare la relazione $\det A_z = |z|^2$, da cui segue immediatamente l'isomorfismo in questione.

sono morfismi di gruppo; il coniugio è invece automorfismo di G. Si osservi anche che $R_g \circ L_h = L_h \circ R_g$, mentre $C_g = R_{g^{-1}} \circ L_g = L_g \circ R_{g^{-1}}$ e $C_{gh} = C_g \circ C_h$, per ogni $g, h \in G$.

Definizione 1.8. Sia G un gruppo di Lie e sia $H \leqslant G$ un suo sottogruppo in senso algebrico. Se H è anche sottovarietà (embedded) di G allora si dirà che H è *sottogruppo di Lie regolare* di G; se H ha struttura di sottovarietà immersa rispetto alla quale è un gruppo di Lie (ovvero rispetto a cui il prodotto e l'inverso in H siano differenziabili), allora si dirà che H è *sottogruppo di Lie* di G.

Osservazione 1.9. Se H è sottogruppo di Lie regolare di G allora automaticamente le operazioni di gruppo sono differenziabili anche su H, quindi H con la sua struttura di varietà è a sua volta un gruppo di Lie.

Esempio 1.10. Dal momento che $\det : \mathrm{GL}_n(\mathbb{R}) \to \mathbb{R}$ non ha punti critici, $\mathrm{SL}_n(\mathbb{R}) = \det^{-1}(\{1\})$ è sottovarietà (embedded) di $\mathrm{GL}_n(\mathbb{R})$ di dimensione $n^2 - 1$. Essendo poi $\mathrm{SL}_n(\mathbb{R}) = \ker(\det) \trianglelefteq \mathrm{GL}_n(\mathbb{R})$, segue che il gruppo lineare speciale è sottogruppo di Lie regolare di $\mathrm{GL}_n(\mathbb{R})$.

1.1.2 *Azioni di gruppi di Lie su varietà*

Definizione 1.11. Siano G un gruppo di Lie e M una varietà. Un'*azione (differenziabile) sinistra* di G su M è un'applicazione $\vartheta : G \times M \to M$ di classe C^∞ tale che

$$\vartheta\left(g_1, \vartheta(g_2, p)\right) = \vartheta(g_1 g_2, p), \qquad \vartheta(e, p) = p, \tag{1.1}$$

per ogni $g_1, g_2 \in G$ e per ogni $p \in M$, e essendo l'elemento neutro del gruppo G. Analogamente, un'*azione (differenziabile) destra* di G su M è un'applicazione $\varrho : M \times G \to M$ di classe C^∞ tale che

$$\varrho\left(\varrho(p, g_1), g_2\right) = \varrho(p, g_1 g_2), \qquad \varrho(p, e) = p,$$

per ogni $g_1, g_2 \in G$ e per ogni $p \in M$. Si definiscono anche le mappe $\vartheta_g : M \to M$ e $\varrho_g : M \to M$ rispettivamente con le posizioni $\vartheta_g(p) = \vartheta(g, p)$ e $\varrho_g(p) = \varrho(p, g)$.

Un *G-spazio* è una varietà su cui agisce il gruppo di Lie G (da sinistra o da destra).

Osservazione 1.12. È facile verificare che se $\varrho : M \times G \to M$ è un'azione destra, allora $\vartheta : G \times M \to M$ ottenuta ponendo $\vartheta(g, p) = \varrho(p, g^{-1})$ è un'azione sinistra, pertanto ogni risultato valido per azioni destre lo è anche per le azioni sinistre e viceversa: in virtù di ciò nel seguito si parlerà di sole azioni sinistre.

Osservazione 1.13. Se $\vartheta : G \times M \to M$ è azione del gruppo di Lie G sulla varietà M le proprietà (1.1) si possono riscrivere come

$$\vartheta_{g_1} \circ \vartheta_{g_2} = \vartheta_{g_1 g_2}, \qquad \vartheta_e = \mathrm{id}_M,$$

da cui segue immediatamente che, per ogni $g \in G$, ϑ_g è diffeomorfismo con inversa $\vartheta_g^{-1} = \vartheta_{g^{-1}}$, e che la mappa $g \mapsto \vartheta_g$ è morfismo del gruppo G nel gruppo $(\mathrm{Diff}(M), \circ)$ dei diffeomorfismi di M in sé.

Definizione 1.14. Sia $\vartheta : G \times M \to M$ un'azione di un gruppo di Lie G su una varietà M. Lo *stabilizzatore* (o *gruppo d'isotropia*) Stab_p di un punto $p \in M$ è il sottogruppo di G costituito dagli elementi di G che fissano p, ossia $\mathrm{Stab}_p = \{g \in G \,|\, \vartheta_g(p) = p\} \leqslant G$. L'*orbita* di un punto $p \in M$ è l'insieme $O(p) = \{\vartheta_g(p) \,|\, g \in G\} \subset M$, dei punti di M raggiunti a partire da p sotto l'azione di G.

Facilmente si verifica che l'appartenenza ad una medesima orbita costituisce una relazione di equivalenza su M e pertanto le orbite (ossia le classi d'equivalenza) determinano una partizione di M; lo spazio quoziente rispetto a tale equivalenza si denota con M/G.

Definizione 1.15. Diremo che l'azione è *transitiva* — o che G agisce *transitivamente* su M — se esiste un'unica orbita, ossia se presi comunque $p, q \in M$, esiste $g \in G$ tale che $\vartheta_g(p) = q$; in tal caso si dirà che M è uno spazio G-*omogeneo*.

L'azione è detta *libera* — o G agisce *liberamente* su M — se per ogni $p \in M$ si ha $\mathrm{Stab}_p = \{e\}$ (o, equivalentemente, $\vartheta_g(p) \neq p$, per ogni $p \in M, g \neq e$).

Un'azione è detta *fedele* — o si dirà che G agisce *fedelmente* su M — se da $\vartheta_{g_1} = \vartheta_{g_2}$ segue $g_1 = g_2$.

Esempio 1.16. Un gruppo di Lie G agisce su se stesso per traslazione sinistra e per coniugio. L'azione per traslazione sinistra è data da $L : G \times G \to G$, $L(g,h) = L_g(h) = gh$, per ogni $g, h \in G$ ed è libera. L'azione per coniugio $C : G \times G \to G$ è data da $C(g,h) = C_g(h) = ghg^{-1}$ per ogni $g, h \in G$, e si ha $\mathrm{Stab}_h = \{g \in G \,|\, gh = hg\}$, per ogni $h \in G$, quindi non è libera.

1.2 ALGEBRE DI LIE

Passiamo a indagare la nozione di algebra di Lie associata ad un gruppo di Lie, una struttura che si identifica con lo spazio tangente al gruppo nel suo elemento neutro. Si vedranno il legame tra particolari sottogruppi di un gruppo di Lie e particolari campi vettoriali su di esso definiti e il ruolo della mappa esponenziale.

1.2.1 *Definizioni ed esempi*

Definizione 1.17. Un'*algebra di Lie* è uno spazio vettoriale V su un campo K dotato di un'operazione binaria $[\cdot,\cdot] : V \times V \to V$ che soddisfa le seguenti proprietà per ogni $u, v, w \in V$ e $\alpha, \beta \in K$:

i. $[v, w] = -[w, v]$ (antisimmetria);

ii. $[\alpha u + \beta v, w] = \alpha[u, w] + \beta[v, w]$ ((bi)linearità);

iii. $[u, [v, w]] + [v, [w, u]] + [w, [u, v]] = 0$ (identità di Jacobi).

Definizione 1.18. Se V, W sono algebre di Lie, un *morfismo di algebre di Lie* è un morfismo di spazi vettoriali $f : V \to W$ compatibile con l'operazione $[\cdot, \cdot]$, ossia tale che $[f(u), f(v)] = f([u, v])$, per ogni $u, v \in V$.

Esempio 1.19. Se A è un'algebra non commutativa su un campo K vi si può porre una struttura di algebra di Lie introducendo il commutatore

$$\begin{aligned} [\cdot, \cdot] : A \times A &\to A \\ (X, Y) &\mapsto [X, Y] = XY - YX, \end{aligned}$$

che soddisfa le tre proprietà della Definizione 1.17. Nel caso $A = \mathrm{M}_n(K)$ l'algebra di Lie ottenuta con questa operazione è denotata con $\mathfrak{gl}_n(K)$.

Esempio 1.20. Lo spazio $\mathfrak{X}(M)$ dei campi vettoriali su una varietà M dotato delle classiche parentesi di Lie è un'algebra di Lie.

Definizione 1.21. Un campo vettoriale $X \in \mathfrak{X}(G)$ su un gruppo di Lie G è detto *invariante a sinistra* se si ha $\mathrm{d}L_h(X) = X$ per ogni $h \in G$, ovvero se per ogni $h, x \in G$ vale $\mathrm{d}(L_h)_x(X_x) = X_{hx} = X_{L_h(x)}$. Analoga definizione per l'invarianza a destra.

Lemma 1.22. *Sia G un gruppo di Lie di elemento neutro $e \in G$. Valgono le seguenti affermazioni:*

(i) *se $X, Y \in \mathfrak{X}(G)$ sono invarianti a sinistra, allora anche $[X, Y]$ lo è;*

(ii) *la mappa $X \mapsto X_e$ è isomorfismo tra il sottospazio di $\mathfrak{X}(G)$ dei campi vettoriali invarianti a sinistra e lo spazio tangente T_eG.*

Dimostrazione. (i) È noto che diffeomorfismi e parentesi di Lie siano compatibili[2], ed essendo L_h diffeomorfismo si ha, per ogni $h \in G$, $\mathrm{d}L_h[X, Y] = [\mathrm{d}L_h(X), \mathrm{d}L_h(Y)] = [X, Y]$, dove l'ultima uguaglianza segue dall'ipotesi di invarianza a sinistra fatta su X, Y. Si noti che se X, Y sono invarianti a sinistra anche $X + Y$ e λX, λ scalare, lo sono per la linearità di $\mathrm{d}L_h$, quindi i campi invarianti a sinistra costituiscono uno spazio vettoriale che, dotato dell'operazione $[\cdot, \cdot]$, presenta una struttura di algebra di Lie.

(ii) Sia $X \in \mathfrak{X}(G)$ invariante a sinistra: per ogni $h, x \in G$ il differenziale $\mathrm{d}(L_h)_x : T_xG \to T_{hx}G$ mappa $X_x \mapsto X_{hx}$. Prendendo $x = e$ si ottiene $X_h = \mathrm{d}(L_h)_e(X_e)$, per ogni $h \in G$, ovvero il valore del campo X è determinato in ogni punto dal valore che assume in e. Se $X_e = 0$, allora $X_h = 0$ per ogni $h \in G$, ossia X è il campo nullo, e questo prova l'iniettività. Per la suriettività, preso $v \in T_eG$, è sufficiente porre

2 Vedi ad esempio [1], p. 160; Lemma 3.4.9.

$X_x = \mathrm{d}(L_x)_e(v)$ per ogni $x \in G$. Un tale campo X vale v in e ed è invariante a sinistra: da $L_{hx} = L_h \circ L_x$ segue $\mathrm{d}(L_{hx})_e = \mathrm{d}(L_h)_x \circ \mathrm{d}(L_x)_e$, e quindi

$$\mathrm{d}(L_h)_x(X_x) = \mathrm{d}(L_h)_x\,(\mathrm{d}(L_x)_e(v)) = \mathrm{d}(L_{hx})_e(v) = X_{hx}$$

e si conclude. $\square$

Definizione 1.23. Sia G un gruppo di Lie con elemento neutro $e \in G$. Per ogni $v \in T_eG$ denotiamo con $X^v \in \mathfrak{X}(G)$ l'unico campo vettoriale invariante a sinistra tale che $X^v(e) = v$. Chiamiamo *algebra di Lie del gruppo di Lie G* — e la indicheremo con $\mathfrak{g}$ — lo spazio vettoriale T_eG dotato dell'operazione $[\cdot,\cdot] : T_eG \times T_eG \to T_eG$ definita da $[v, w] = [X^v, X^w](e)$.

Osservazione 1.24. In particolare si ha $\dim \mathfrak{g} = \dim T_eG = \dim G$.

Definizione 1.25. Una *sottoalgebra* di un'algebra di Lie $\mathfrak{g}$ è un sottospazio vettoriale $\mathfrak{h}$ di $\mathfrak{g}$ chiuso rispetto a $[\cdot,\cdot]$ (ossia $[v, w] \in \mathfrak{h}$, per ogni $v, w \in \mathfrak{h}$).

Esempio 1.26. Dal Lemma 1.22 segue che quella dei campi vettoriali invarianti a sinistra su un gruppo di Lie G è una sottoalgebra di Lie di $\mathfrak{X}(G)$.

Definizione 1.27. Sia G un gruppo di Lie di dimensione n di algebra di Lie $\mathfrak{g}$ e sia $\mathcal{B} = \{v_1, \ldots, v_n\}$ una base di $\mathfrak{g}$ inteso come spazio vettoriale. Allora per ogni $i, j = 1, \ldots, n$ devono esistere dei coefficienti $c_{ij}^k \in \mathbb{R}$ tali che $[v_i, v_j] = c_{ij}^k v_k$, detti *costanti di struttura* di $\mathfrak{g}$ rispetto alla base $\mathcal{B}$.

Lemma 1.28. *Siano G, H gruppi di Lie di algebre di Lie rispettivamente $\mathfrak{g}, \mathfrak{h}$ e sia $F : G \to H$ un omomorfismo di gruppi di Lie. Allora $\mathrm{d}F_e : \mathfrak{g} \to \mathfrak{h}$ è un morfismo di algebre di Lie.*

Dimostrazione. Si veda [1], p. 162; Lemma 3.5.7. $\square$

1.2.2 *Sottogruppi a un parametro e applicazione esponenziale*

Definizione 1.29. Sia G un gruppo di Lie connesso. Un *sottogruppo a un parametro* di G è un'applicazione $\sigma : \mathbb{R} \to G$ di classe C^∞ che sia un omomorfismo del gruppo additivo dei numeri reali nel gruppo G; si avrà pertanto, per ogni $t, s \in \mathbb{R}$,

$$\sigma(0) = e, \qquad \sigma(t + s) = \sigma(t)\sigma(s).$$

Teorema 1.30. *Sia G un gruppo di Lie con algebra di Lie $\mathfrak{g}$ e, dato $\xi \in \mathfrak{g}$, sia $X \in \mathfrak{X}(G)$ il campo vettoriale su G invariante a sinistra tale che $X_e = \xi$; valgono le seguenti affermazioni:*

(i) *la curva integrale di X uscente da e è un sottogruppo a un parametro di G;*

(ii) *se $\sigma : \mathbb{R} \to G$ è un sottogruppo a un parametro di G con $\sigma'(0) = \xi$, allora σ è la curva integrale di X uscente da e.*

Dimostrazione. (i) Preso $\varepsilon > 0$, sia $\sigma : (-\varepsilon, \varepsilon) \to G$ una curva integrale del campo invariante a sinistra $X \in \mathfrak{X}(G)$ uscente da e, e si consideri la curva $\gamma : (-\varepsilon, \varepsilon) \to G$ definita da $\gamma(t) = \sigma(t_0)\sigma(t)$, per ogni $t_0 \in (-\varepsilon, \varepsilon)$ fissato. La tesi segue se si prova che $\gamma(t) = \sigma(t_0 + t)$. Anzitutto si verifica che γ è curva integrale di X: infatti, osservando che $\gamma(t) = \sigma(t_0)\sigma(t) = L_{\sigma(t_0)}(\sigma(t))$, si ha

$$\gamma'(t) = \mathrm{d}(L_{\sigma(t_0)})_{\sigma(t)}(\sigma'(t)) = \mathrm{d}(L_{\sigma(t_0)})_{\sigma(t)}(X_{\sigma(t)}) = X(\gamma(t)),$$

avendo usato nell'ultima uguaglianza l'invarianza a sinistra di X; tale curva è uscente da $\gamma(0) = \sigma(t_0)e = \sigma(t_0)$. Per l'unicità delle curve integrali si conclude quanto si voleva e che quindi $\sigma(t_0 + t) = \sigma(t_0)\sigma(t)$. Si noti che la curva γ estende σ all'intervallo $(-2\varepsilon, 2\varepsilon)$: iterando questo procedimento si riesce così a definire la curva integrale del campo X su tutto $\mathbb{R}$.

(ii) Sia σ un sottogruppo a un parametro di G tangente a $X_e = \xi$ in e quando $t = 0$: si ha quindi $\sigma(t_0 + t) = \sigma(t_0)\sigma(t) = L_{\sigma(t_0)}(\sigma(t))$ e, di conseguenza,

$$\begin{aligned}
\sigma'(t_0) &= \frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}t}(L_{\sigma(t_0)} \circ \sigma)(t)\bigg|_{t=0} \\
&= \mathrm{d}(L_{\sigma(t_0)})_{\sigma(t)}(\sigma'(t))|_{t=0} = \mathrm{d}(L_{\sigma(t_0)})_e(\xi) = X_{\sigma(t_0)},
\end{aligned}$$

di nuovo per l'invarianza di X nell'ultima uguaglianza. Pertanto si conclude che σ è la curva integrale del campo X (uscente da e per definizione). □

In altri termini, i sottogruppi a un parametro di G sono le curve integrali dei campi vettoriali su G invarianti a sinistra: per ogni $\xi \in \mathfrak{g}$ esiste un unico sottogruppo a un parametro $\sigma_\xi : \mathbb{R} \to G$ tale che $\sigma'_\xi(0) = \xi$, che è la curva integrale di X uscente da e.

Definizione 1.31. Sia G un gruppo di Lie. Dato $\xi \in \mathfrak{g}$, la curva integrale $\sigma_\xi : \mathbb{R} \to G$ uscente da e del campo vettoriale $X \in \mathfrak{X}(G)$

invariante a sinistra tale che $X_e = \xi$ è detta *sottogruppo a un parametro generato* da ξ. Si definisce *applicazione esponenziale*[3] di G la mappa

$$\begin{aligned} \exp : \mathfrak{g} &\to G \\ \xi &\mapsto \exp(\xi) := \sigma_\xi(1). \end{aligned}$$

Osservazione 1.32. È facile verificare che, per $s \in \mathbb{R}$ fissato, la posizione $t \mapsto \sigma_\xi(st)$ definisce un sottogruppo a un parametro tangente a $s\xi$ in $t = 0$: si può quindi scrivere $\exp(s\xi) = \sigma_\xi(s)$. Risulta quindi chiaro che tutti i sottogruppi a un parametro di G sono della forma $t \mapsto \sigma_\xi(t) = \exp(t\xi)$, per un opportuno $\xi \in \mathfrak{g}$ e che, viceversa, la curva integrale del campo invariante a sinistra $X \in \mathfrak{X}(G)$ uscente da e ed ivi tangente a $X_e = \xi \in \mathfrak{g}$ è data da $t \mapsto \exp(t\xi)$. In particolare $t \mapsto \exp(t\xi)$ è morfismo di $(\mathbb{R}, +)$ in G.

L'applicazione esponenziale gode di diverse proprietà, delle quali raccogliamo alcune nella seguente

Proposizione 1.33. *Sia G un gruppo di Lie con algebra di Lie $\mathfrak{g}$. Valgono le seguenti proprietà:*

(i) *l'applicazione esponenziale* $\exp : \mathfrak{g} \to G$ *è di classe* C^∞;

(ii) *il differenziale dell'applicazione esponenziale nel vettore nullo*[4] $0_\mathfrak{g}$ *di* $\mathfrak{g}$, $\mathrm{d}\exp_{0_\mathfrak{g}} : \mathfrak{g} \to \mathfrak{g}$, *è l'identità* $\mathrm{id}_\mathfrak{g}$;

(iii) $\exp$ *è un diffeomorfismo tra un intorno di* $0_\mathfrak{g} \in \mathfrak{g}$ *e un intorno di* $e \in G$;

(iv) *se $F : G \to H$ è un omomorfimo di gruppi di Lie e $\mathfrak{h}$ denota l'algebra di Lie di H allora il seguente diagramma*

$$\begin{tikzcd} \mathfrak{g} \arrow[r, "\mathrm{d}F_e"] \arrow[d, "\exp"'] & \mathfrak{h} \arrow[d, "\exp"] \\ G \arrow[r, "F"] & H \end{tikzcd}$$

è commutativo: $\exp \circ \mathrm{d}F_e = F \circ \exp$;

3 Il nome deriva dal caso notevole $G = \mathrm{GL}_n(\mathbb{R})$, gruppo di Lie di algebra di Lie $\mathfrak{g} = \mathfrak{gl}_n(\mathbb{R})$, caso in cui ponendo $\sigma_X(t) = e^{tX}$ si definisce effettivamente un sottogruppo a un parametro tale che $\sigma'_X(0) = X$; l'applicazione esponenziale di $\mathrm{GL}_n(\mathbb{R})$ è, cioè, l'usuale esponenziale di matrici. Analogamente, nel caso $\mathrm{GL}(V)$, con V spazio vettoriale di dimensione finita, l'applicazione esponenziale si definisce attraverso

$$e^A = \sum_{k=0}^{\infty} \frac{1}{k!} A^k,$$

per ogni $A \in \mathfrak{gl}(V) = \mathrm{End}(V)$.

4 Si sono identificati il dominio — lo spazio tangente a $\mathfrak{g}$ in $0_\mathfrak{g}$ — e il codominio — lo spazio tangente a G in $\exp(0_\mathfrak{g}) = \sigma_{0_\mathfrak{g}}(1) = e$ — con la stessa $\mathfrak{g}$.

(v) *il flusso* σ_t *del campo vettoriale* $X \in \mathfrak{X}(G)$ *invariante a sinistra tale che* $X_e = \xi$ *è dato dalla moltiplicazione a destra per* $\exp(t\xi)$, *ossia* $\sigma_t = R_{\exp(t\xi)}$; *in altri termini: se* $\sigma_t(g)$ *denota la curva integrale di* X *uscente da* g, *allora si ha* $\sigma_t(g) = R_{\exp(t\xi)}(g) = g\exp(t\xi)$, *per ogni* $g \in G$.

Dimostrazione. Si veda [1], pp. 166–167; Prop. 3.6.6. □

Osservazione 1.34. Osserviamo che se G è un gruppo di Lie abeliano, allora la sua algebra di Lie $\mathfrak{g}$ è *abeliana* (ossia vale $[\xi, \eta] = 0$, per ogni $\xi, \eta \in \mathfrak{g}$). Infatti, se X, Y sono due campi vettoriali di flussi rispettivamente ϑ_t, ψ_s, è noto che $[X, Y] = 0$ se, e solo se, $\vartheta_t \circ \psi_s = \psi_s \circ \vartheta_t$ per ogni t, s per cui i due flussi sono definiti. Se $X, Y \in \mathfrak{X}(G)$ sono invarianti a sinistra e tali che $X_e = \xi, Y_e = \eta$, per il punto (v) della Proposizione 1.33 sappiamo che $\vartheta_t(g) = g\exp(t\xi)$ e che $\psi_s(h) = h\exp(s\eta)$, per ogni $g, h \in G$. Poiché $\exp(t\xi)\exp(s\eta) = \exp(s\eta)\exp(t\xi)$, si ha quindi per ogni $g \in G$

$$
\begin{aligned}
\vartheta_t(\psi_s(g)) &= \psi_s(g)\exp(t\xi) = g\exp(s\eta)\exp(t\xi) \\
&= g\exp(t\xi)\exp(s\eta) = \vartheta_t(g)\exp(s\eta) = \psi_s(\vartheta_t(g)).
\end{aligned}
$$

Ma allora $[\xi, \eta] = [X, Y](e) = 0$, per ogni $\xi, \eta \in \mathfrak{g}$. In particolare le costanti di struttura di $\mathfrak{g}$ sono nulle.

1.3 ULTERIORI NOZIONI SU GRUPPI E ALGEBRE DI LIE

Concludiamo mostrando alcuni risultati che rivelano l'intimo legame che intercorre tra un gruppo di Lie e la sua algebra di Lie.

Definizione 1.35. Sia $\mathfrak{g}$ un'algebra di Lie. L'*applicazione aggiunta* di $\mathfrak{g}$ è l'applicazione lineare $\mathrm{ad} : \mathfrak{g} \to \mathfrak{gl}(\mathfrak{g})$ che mappa $X \mapsto \mathrm{ad}(X)$ per ogni $X \in \mathfrak{g}$ definendo l'endomorfismo

$$
\begin{aligned}
\mathrm{ad}(X) : \mathfrak{g} &\to \mathfrak{g} \\
Y &\mapsto \mathrm{ad}(X)(Y) := [X, Y].
\end{aligned}
$$

Osservazione 1.36. L'applicazione aggiunta è morfismo di algebre di Lie: per ogni $X, Y \in \mathfrak{g}$ vale $\mathrm{ad}([X, Y]) = [\mathrm{ad}(X), \mathrm{ad}(Y)]$. Infatti, se $Z \in \mathfrak{g}$, si ha

$$
\begin{aligned}
\mathrm{ad}([X, Y])(Z) &= [[X, Y], Z] = -[Z, [X, Y]] \\
&= [X, [Y, Z]] + [Y, [Z, X]] \\
&= [X, [Y, Z]] - [Y, [X, Z]] \\
&= \mathrm{ad}(X)\,(\mathrm{ad}(Y)(Z)) - \mathrm{ad}(Y)\,(\mathrm{ad}(X)(Z)) \\
&= [\mathrm{ad}(X), \mathrm{ad}(Y)](Z),
\end{aligned}
$$

avendo usato nella seconda riga l'identità di Jacobi.

Proposizione 1.37. *Sia $\psi : G \to \tilde{G}$ un morfismo tra i gruppi di Lie G, $\tilde{G}$, di algebre di Lie rispettivamente $\mathfrak{g}$, $\tilde{\mathfrak{g}}$. Allora, per ogni $\xi \in \mathfrak{g}$ si ha*

$$\psi(\exp(\xi)) = \exp(\mathrm{d}\psi_e(\xi)). \tag{1.2}$$

Dimostrazione. Vero per la Proposizione 1.33, punto (iv). □

Definizione 1.38. Sia G un gruppo e V uno spazio vettoriale. Una *rappresentazione* di G su V è un'azione lineare di G su V o, in altri termini, un omomorfismo $\varrho : G \to \mathrm{GL}(V)$ che ad ogni elemento di G assegna un automorfismo di V. Si ha quindi $\varrho(gh) = \varrho(g)\varrho(h)$, per ogni $g, h \in G$ e $\varrho(e) = \mathbb{I}_{\dim V}$, da cui anche $\varrho(g^{-1}) = (\varrho(g))^{-1}$, per ogni $g \in G$.

Definizione 1.39. Sia G un gruppo di Lie. Si definisce *rappresentazione aggiunta* di G l'omomorfismo

$$\begin{aligned} \mathrm{Ad} : G &\to \mathrm{GL}(\mathfrak{g}) \\ g &\mapsto \mathrm{Ad}(g) := \mathrm{d}(C_g)_e. \end{aligned}$$

Resta definita l'*azione aggiunta* di G su $\mathfrak{g}$, ossia l'azione $G \times \mathfrak{g} \to \mathfrak{g}$ data da $(g, \xi) \mapsto \mathrm{Ad}(g)(\xi)$.

Osservazione 1.40. Essendo C_g (auto)morfismo di un gruppo di Lie in sé, segue dalla (1.2) che per ogni $\xi \in \mathfrak{g}$

$$C_g(\exp(\xi)) = \exp(\mathrm{d}(C_g)_e(\xi)) = \exp(\mathrm{Ad}(g)(\xi)). \tag{1.3}$$

Lemma 1.41. *Sia G un gruppo di Lie di algebra di Lie $\mathfrak{g}$ e siano rispettivamente $\mathrm{Ad} : G \to \mathrm{GL}(\mathfrak{g})$ e $\mathrm{ad} : \mathfrak{g} \to \mathfrak{gl}(\mathfrak{g})$ la rappresentazione aggiunta di G e l'applicazione aggiunta di $\mathfrak{g}$. Allora, per ogni $\xi \in \mathfrak{g}$ si ha*

$$\mathrm{d}(\mathrm{Ad})_e(\xi) = \mathrm{ad}(\xi).$$

Dimostrazione. Sapendo che il sottogruppo a un parametro $t \mapsto \exp(t\xi)$ è una curva su G uscente da e e ivi tangente a ξ, per ogni $\xi, \eta \in \mathfrak{g}$ si ha

$$\begin{aligned} \frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}t}\mathrm{Ad}(\exp(t\xi))(\eta)\bigg|_{t=0} &= \mathrm{d}(\mathrm{Ad})_e \frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}t}\exp(t\xi)(\eta)\bigg|_{t=0} \\ &= \mathrm{d}(\mathrm{Ad})_e(\xi)(\eta). \end{aligned} \tag{1.4}$$

Se $Y \in \mathfrak{X}(G)$ è il campo vettoriale su G invariante a sinistra e tale che $Y_e = \eta$, allora segue che[5]

$$\begin{aligned} \mathrm{Ad}(\exp(t\xi))(\eta) &= \mathrm{d}(C_{\exp(t\xi)})_e(\eta) \\ &= \mathrm{d}(R_{\exp(-t\xi)})_{\exp(t\xi)} \circ \mathrm{d}(L_{\exp(t\xi)})_e(Y_e) \\ &= \mathrm{d}(R_{\exp(-t\xi)})_{\exp(t\xi)}(Y_{\exp(t\xi)}), \end{aligned}$$

5 Nel conto che segue si tengano presenti l'Osservazione 1.7 e il fatto che $\exp(t\xi)^{-1} = \exp(-t\xi)$: lo si può vedere da $e = \exp(0) = \exp(t\xi - t\xi) = \exp(t\xi)\exp(-t\xi)$ moltiplicando a destra entrambi i membri per $\exp(t\xi)^{-1}$.

avendo usato nell'ultima uguaglianza proprio l'invarianza a sinistra di Y. La Proposizione 1.33, punto (v), garantisce che il flusso σ_t del campo $X \in \mathfrak{X}(G)$ invariante a sinistra tale che $X_e = \xi$ è dato dalla moltiplicazione destra per $\exp(t\xi)$: si ha cioè $R_{\exp(t\xi)} = \sigma_t$ e quindi $R_{\exp(-t\xi)} = \sigma_{-t}$. La precedente catena di uguaglianze diventa perciò $\mathrm{Ad}(\exp(t\xi))(\eta) = \mathrm{d}(\sigma_{-t})_{\sigma_t(e)}(Y_{\sigma_t(e)})$ e di conseguenza si può dettagliare la (1.4):

$$\begin{aligned}\mathrm{d}(\mathrm{Ad})_e(\xi)(\eta) &= \frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}t}\mathrm{Ad}(\exp(t\xi))(\eta)\Big|_{t=0} = \frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}t}\mathrm{d}(\sigma_{-t})_{\sigma_t(e)}(Y)\Big|_{t=0} \\ &= \mathcal{L}_X Y(e) = [X, Y] = \mathrm{ad}(\xi)(\eta),\end{aligned}$$

per ogni $\eta \in \mathfrak{g}$. Nell'ultima riga si è riconosciuta la definizione della derivata di Lie $\mathcal{L}_X Y(e)$ di Y lungo la direzione di X (vd. [1], p. 158; Def. 3.4.3.). □

2

FIBRATI, CONNESSIONI E CURVATURA GENERALI

Quanto si farà in questo secondo Capitolo è dare la nozione generale di (spazio) fibrato, che estende il più usuale caso particolare di fibrato vettoriale. Si presenterà poi la generalizzazione della teoria delle connessioni, che qui si chiameranno connessioni di Ehresmann; si concluderà con l'estensione del concetto di curvatura, intuendo il diverso significato matematico che essa assume in relazione alla nuova definizione data di connessione su un fibrato generale.

2.1 FIBRATI GENERALI

Partiamo dunque dalla definizione di fibrato generale e vediamo come si includa in essa il caso particolare di un fibrato vettoriale.

Definizione 2.1. Sia S una varietà differenziabile. Un *fibrato* di fibra tipica S su una varietà M è una sommersione suriettiva $\pi : E \to M$ fra una varietà E, detta *spazio totale* del fibrato, e la varietà M, detta *base* del fibrato, tale che per ogni $p \in M$ esistono un intorno aperto $U \subset M$ di p e un diffeomorfismo $\chi : E|_U := \pi^{-1}(U) \to U \times S$, detto *trivializzazione locale* di E, tale che $\mathrm{p}_1 \circ \chi = \pi$, essendo p_1 la proiezione sul primo fattore.

$$\begin{tikzcd} E|_U \arrow[r, "\chi"] \arrow[d, "\pi"'] & U \times S \arrow[dl, "\mathrm{p}_1"] \\ U & \end{tikzcd}$$

Per ogni $p \in M$ l'insieme $E_p := \pi^{-1}(\{p\})$ è detto *fibra* di E in p; considerando la restrizione della trivializzazione locale ad ogni p, $\chi_p : E_p \to \{p\} \times S$, si osserva che E_p è diffeomorfa a S per ogni $p \in M$.

Definizione 2.2. Una collezione $\{(U_\alpha, \chi_\alpha)\}_\alpha$ di trivializzazioni locali tali che $\{U_\alpha\}_\alpha$ sia un ricoprimento aperto di M è detta *atlante* del fibrato. Se p è nell'intersezione $U_\alpha \cap U_\beta \neq \varnothing$ e $s \in S$ si può scrivere $\chi_\alpha \circ \chi_\beta^{-1}(p, s) = (p, \psi_{\alpha\beta}(p)(s))$, ove $\psi_{\alpha\beta}(p) : S \to S$ è, per ogni $p \in M$ e per ogni α, β, un diffeomorfismo detto *funzione di transizione* del fibrato. Tali funzioni soddisfano le seguenti *condizioni di cociclo*:

$$\psi_{\alpha\alpha}(p) = \mathrm{id}_S, \tag{2.1a}$$

$$\psi_{\alpha\beta}(p) \circ \psi_{\beta\gamma}(p) = \psi_{\alpha\gamma}(p), \tag{2.1b}$$

dove la seconda composizione è una funzione definita per $p \in U_\alpha \cap U_\beta \cap U_\gamma$.

Esempio 2.3. Sia $E = M \times S$, dove M ed S sono varietà differenziabili, e sia $\pi : E \to M$ la proiezione sul primo fattore. Questo è un fibrato generale, detto *fibrato triviale*.

Per definizione, come detto, un fibrato è una sommersione suriettiva. Il viceversa vale sotto un'ulteriore ipotesi su π:

Teorema 2.4. *Sia M una varietà connessa. Allora ogni sommersione suriettiva propria $\pi : E \to M$ è un fibrato.*

Dimostrazione. Si veda, ad esempio, [1], p. 185; Prop. 3.9.2. □

La Definizione 2.1 è quella di un fibrato generale. Nel caso particolare in cui la fibra tipica S sia un gruppo, allora si parlerà di *fibrato in gruppi* (è il caso, ad esempio, dei *fibrati principali*, di cui verrà trattato nella Sezione 3); nel caso di uno spazio vettoriale si parlerà di *fibrato vettoriale*: più precisamente si ha che

Definizione 2.5. Un *fibrato vettoriale* (reale) di rango r sulla varietà M è un fibrato di fibra tipica $S = \mathbb{R}^r$: per ogni $p \in M$, la *fibra* $E_p = \pi^{-1}(\{p\})$ è uno spazio vettoriale (reale) di dimensione r e per ogni $p \in M$ esiste un intorno aperto $U \subset M$ di p su cui E si trivializza nel seguente modo

$$\begin{tikzcd} E|_U \arrow[r, "\chi"] \arrow[d, "\pi"'] & U \times \mathbb{R}^r \arrow[dl, "\mathrm{p}_1"] \\ U & \end{tikzcd}$$

ossia $\pi = \chi \circ \mathrm{p}_1$. La trivializzazione locale χ è tale che per ogni $p \in M$ $\chi_p : E_p \to \{p\} \times \mathbb{R}^r$ è isomorfismo di spazi vettoriali.

Richiamiamo due definizioni nel caso specifico dei fibrati vettoriali.

Definizione 2.6. Siano $\pi_E : E \to M$ e $\pi_F : F \to N$ due fibrati vettoriali. Un *omomorfismo di fibrati vettoriali* è una coppia $(f, \bar{f})$ di funzioni differenziabili $f : E \to F$, $\bar{f} : M \to N$ tali che il seguente diagramma sia commutativo

$$\begin{tikzcd} E \arrow[r, "f"] \arrow[d, "\pi_E"'] & F \arrow[d, "\pi_F"] \\ M \arrow[r, "\bar{f}"] & N \end{tikzcd}$$

e tale che f sia lineare sulle fibre, ovvero $f_p : E_p \to F_{\bar{f}(p)}$ è omomorfismo di spazi vettoriali per ogni $p \in M$. Diremo che f ricopre $\bar{f}$ e, se E, F sono fibrati sulla stessa varietà di base M, si sottintende $\bar{f} = \mathrm{id}_M$; un omomorfismo invertibile (cioè se $f, \bar{f}$ sono diffeomorfismi) è detto *isomorfismo di fibrati vettoriali*.

Si osservi che la condizione $\pi_F \circ f = \bar{f} \circ \pi_E$ ci dice che $f(E_p) \subset F_{\bar{f}(p)}$, ossia che un omomorfismo di fibrati vettoriali manda fibre in fibre.

Definizione 2.7. Un *sottofibrato vettoriale* $\pi : F \to M$ di un fibrato vettoriale $\pi : E \to M$ è un fibrato vettoriale dotato di un omomorfismo di fibrati vettoriali $\tau : F \to E$ che ricopre $\bar{\tau} = \mathrm{id}_M$ tale che $\tau_p : F_p \to E_p$ sia un embedding lineare per ogni $p \in M$.

2.2 CONNESSIONE DI EHRESMANN

Passiamo quindi a generalizzare la nozione di connessione; l'estensione avrà due diverse definizioni: una come collezione di spazi tangenti al fibrato (distribuzione) e l'altra come 1-forma differenziale. Vedremo poi come sarà possibile definire anche su un fibrato vettoriale la connessione nella forma di Ehresmann e il legame tra la descrizione locale di questa con l'espressione locale classica.

2.2.1 *Fibrato verticale e fibrato orizzontale*

Ricordiamo anzitutto un risultato che segue dal Teorema della funzione inversa.

Teorema 2.8 (del rango, versione per varietà)**.** *Siano M ed N varietà di dimensione rispettivamente m ed n e sia $F : M \to N$ una funzione differenziabile di rango costante r (ovvero, per ogni $p \in M$, $\mathrm{d}F_p : T_pM \to T_{F(p)}N$ ha rango r). Allora per ogni $p \in M$ esistono carte locali (U, ϕ) per M centrata in p, e (V, ψ) per N centrata in $F(p)$, con $F(U) \subset V$, nelle quali F ha una rappresentazione locale $\tilde{F} = \psi \circ F \circ \phi^{-1}$ della forma*

$$\tilde{F}(x^1, \dots, x^r, x^{r+1}, \dots, x^m) = (x^1, \dots, x^r, 0, \dots, 0).$$

Dimostrazione. Si veda, ad esempio, [1], p. 94; Cor. 2.4.18. □

In particolare, se E ed M sono varietà di dimensione rispettivamente $n + k$ ed n e $\pi : E \to M$ è una sommersione (rango costante $r = n$), allora

$$\tilde{\pi}(x^1, \dots, x^n, y^1, \dots, y^k) = (x^1, \dots, x^n),$$

ossia, per una scelta opportuna delle coordinate, la rappresentazione locale di π è la proiezione canonica di $\mathbb{R}^{n+k}$ su $\mathbb{R}^n$.

Sotto le ipotesi e le notazioni del precedente Teorema possiamo dare la seguente

Definizione 2.9. Sia $\pi : E \to M$ un fibrato. Per ogni $e \in E$ si consideri il sottospazio vettoriale $V_eE \leqslant T_eE$ dello spazio tangente in e alla varietà E definito come il nucleo del differenziale di π in e, $\mathrm{d}\pi_e : T_eE \to T_{\pi(e)}M$:

$$V_eE = \ker(\mathrm{d}\pi_e) = \{w \in T_eE \mid \mathrm{d}\pi_e(w) = 0\}.$$

V_eE è detto *sottospazio verticale* di T_eE in e; gli elementi di V_eE sono detti *verticali*. Al variare di $e \in E$ tali sottospazi costituiscono un sottofibrato di TE di classe C^∞ detto *(sotto)fibrato verticale* di TE e denotato con VE.

Dal momento che il differenziale di π in e è suriettivo per ogni $e \in E$, segue dalla formula delle dimensioni che $\dim V_eE = k$. Operando una scelta delle coordinate locali come detto sopra, si vede come VE sia generato dai campi $\{\partial/\partial y^1, \dots, \partial/\partial y^k\}$ definiti in un intorno di e, ossia che per ogni $e \in E$ si abbia

$$V_eE = \left\langle \left.\frac{\partial}{\partial y^1}\right|_e, \dots, \left.\frac{\partial}{\partial y^k}\right|_e \right\rangle.$$

Dire che VE è di classe C^∞ significa che la dipendenza dei sottospazi vettoriali V_eE dal punto e è tale o, in altri termini, che i campi vettoriali del riferimento locale sono di classe C^∞. Poiché le coordinate $y^1, \dots, y^k$ parametrizzano i punti delle fibre, V_eE può essere visto come lo spazio tangente alla fibra $E_{\pi(e)}$.

Definizione 2.10. Una *connessione di Ehresmann* (o *connessione generale*) sul fibrato $\pi : E \to M$ è un sottofibrato $HE \subset TE$ di classe C^∞ complementare a VE, detto *(sotto)fibrato orizzontale*, costituito da sottospazi vettoriali H_eE complementari a V_eE in T_eE, detti *sottospazi orizzontali*, in modo che $H_eE \oplus V_eE = T_eE$ e che si possa scrivere[1] $TE = VE \oplus HE$. Si diranno *orizzontali* gli elementi di H_eE.

Di conseguenza, per ogni $e \in E$, si avrà $H_eE \cap V_eE = \langle 0 \rangle$ e ogni vettore $w \in T_eE$ tangente alla varietà E si scriverà in modo unico come $w = h + v$, dove $h \in H_eE$ e $v \in V_eE$. La dipendenza di H_eE da e è di classe C^∞. Segue inoltre dalla definizione che $\dim H_eE = \dim T_{\pi(e)}M \, (= n)$, pertanto la restrizione di $d\pi_e$ a $H_eE \leqslant T_eE$ è isomorfismo di spazi vettoriali.

Si osservi anche come, a differenza del fibrato verticale che è canonicamente definito, il fibrato orizzontale non sia invece assegnato in maniera standard.

Osservazione 2.11 (esistenza di una connessione generale). Si noti che un fibrato $\pi : E \to M$ ammette sempre una connessione generale. In quanto varietà differenziabile, infatti, è sempre possibile dotare E di una metrica riemanniana (vd. [1], p. 337; Prop. 6.5.6.), rispetto a cui si può scegliere H_eE, ad esempio, come complementare ortogonale di V_eE in T_eE.

1 E è una varietà, TE è il suo fibrato tangente, ossia un fibrato vettoriale, le cui fibre in ogni punto sono spazi vettoriali: la somma diretta di VE e HE è definita come

$$TE = VE \oplus HE = \bigsqcup_{e \in E} V_eE \oplus H_eE.$$

Esempio 2.12. Date due varietà M ed S, sia $E = M \times S$ il fibrato triviale di fibra tipica S sopra M; si ottiene la decomposizione naturale $TE \cong TM \oplus TS$ del fibrato tangente di E: se $e \in E$ è tale che $\chi(e) = (p, s) \in M \times S$, sotto questa identificazione, i sottospazi verticali sono definiti canonicamente come $V_e E = T_s S$. Allora si può definire sempre una connessione su E, detta *connessione triviale*, in cui i sottospazi orizzontali sono dati da $H_e E = T_p M$.

2.2.2 *Descrizione locale della connessione*

Sia $e \in E$, con $\pi(e) = p \in M$, contenuto in un intorno aperto $U \subset E$ sul quale sia definito il sistema di coordinate $x^1, \ldots, x^n, y^1, \ldots, y^k$: le $x^1, \ldots, x^n$ sono coordinate locali sulla varietà di base M in un intorno aperto di $p \in M$, mentre le $y^1, \ldots, y^k$ sono coordinate che parametrizzano la fibra tipica sopra p, diffeomorfa alla varietà S. I campi vettoriali $\{\partial/\partial x^1, \ldots, \partial/\partial x^n, \partial/\partial y^1, \ldots, \partial/\partial y^k\}$ associati a questo sistema di coordinate costituiscono un riferimento locale, definito in U, dello spazio $T_e E$ tangente ad E in e; per semplicità di notazione denoteremo con ∂_i i campi $\partial/\partial x^i$ per $i = 1, \ldots, n$ e con $\tilde{\partial}_j$ i campi $\partial/\partial y^j$ per $j = 1, \ldots, k$. In particolare, $\{\partial_1, \ldots, \partial_n\}$ è un riferimento locale per $T_p M$, mentre $\{\tilde{\partial}_1, \ldots, \tilde{\partial}_k\}$ è un riferimento locale per lo spazio tangente alla fibra E_p, ossia generano lo spazio $V_e E$.

Dal momento che la restrizione $d\pi_e|_{H_e E} : H_e E \to T_{\pi(e)} M$ è isomorfismo in ogni $e \in E$, una base per $H_e E$ è data da

$$
\begin{aligned}
\partial_1|_e + a_1^j(e)\,\tilde{\partial}_j|_e &= \big(1, 0, \ldots, 0, a_1^1(e), \ldots, a_1^k(e)\big),\\
&\;\;\vdots \\
\partial_n|_e + a_n^j(e)\,\tilde{\partial}_j|_e &= \big(0, 0, \ldots, 1, a_n^1(e), \ldots, a_n^k(e)\big),
\end{aligned}
\tag{2.2}
$$

per opportune funzioni[2] $a_i^j \in C^\infty(U)$, con $j = 1, \ldots, k$ e $i = 1, \ldots, n$. In questo modo, applicando $d\pi|_{H_e E}$ ad un elemento $h_i = \partial_i|_e + a_i^j(e)\tilde{\partial}_j|_e$ di $H_e E$, si ottiene solo la componente $\partial_i|_e \in T_p M$. Essendo n campi di vettori linearmente indipendenti che dipendono in maniera C^∞ dal punto, essi costituiscono un riferimento locale per HE.

2.2.3 *La 1-forma di connessione*

Come detto, diamo qui una seconda definizione, alternativa ed equivalente alla precedente, di connessione generale. Premettiamo la definizione di una forma differenziale a valori in un fibrato.

Definizione 2.13. Sia M una varietà e sia E un fibrato su M. Una *k-forma differenziale a valori in E* è una funzione multilineare alternante $\omega : \Lambda^k(TM) \to E$. Denotiamo con $\Omega^k(M; E)$ lo spazio vettoriale delle k-forme differenziali a valori in E.

2 La buona definizione delle funzioni a_i^j è garantita dal fatto che $d\pi|_{H_e E}$ sia biiettiva.

Definizione 2.14. Dato il fibrato $\pi : E \to M$ e definito il fibrato verticale VE come sopra, una *connessione generale* (o *1-forma di connessione*) su E è una 1-forma differenziale $\Phi \in \Omega^1(E; VE)$ a valori nel fibrato verticale VE tale che $\Phi \circ \Phi = \Phi$ e tale che $\mathrm{Im}\Phi = VE$.

Poiché[3] $\Lambda^1(T^*E) \otimes VE = T^*E \otimes VE \cong \mathrm{Hom}(TE, VE)$, la connessione Φ non è altro che una mappa lineare $\Phi : TE \to VE$ idempotente e suriettiva: è lecito considerarla dunque come la proiezione di TE su VE. In particolare, per ogni $e \in E$, l'epimorfismo idempotente di spazi vettoriali $\Phi_e : T_eE \to V_eE$ è la proiezione di T_eE su V_eE; Φ viene anche detta *proiezione verticale*.

Dal momento che il nucleo di Φ è un sottofibrato vettoriale di TE (vd. [10], p. 78; Lemma p. 52), si definisce il fibrato orizzontale $HE := \ker \Phi$.

Osservazione 2.15 (equivalenza delle due definizioni). La Definizione 2.10 esprime la connessione come la scelta, al variare del punto $e \in E$, di sottospazi H_eE complementari ai V_eE in T_eE, mentre la Definizione 2.14 descrive la connessione come una proiezione di T_eE sul suo sottospazio V_eE; i due diversi approcci alla nozione sono equivalenti nel seguente senso.
Se T è uno spazio vettoriale e V, H sono due suoi sottospazi complementari (ossia $V \oplus H = T$), allora ogni elemento $w \in T$ si scrive in modo unico come $w = v + h$ per opportuni $v \in V, h \in H$: in questo caso è naturalmente definita la proiezione di T su V parallelamente ad H, ossia il morfismo di spazi vettoriali $\pi_V : T \to V$ definito da $T \ni w = v + h \mapsto \pi_V(w) = v$. Seguono subito la suriettività, l'idempotenza e il fatto che $\ker \pi_V = H$.
Viceversa, data una mappa lineare suriettiva e idempotente di spazi vettoriali $\pi_V : T \to V$, con $V \leqslant T$, allora posto $H := \ker \pi_V$ si trova facilmente che $H \cap V = \langle 0 \rangle$ e con un calcolo di dimensioni si deduce $T = V \oplus H$. La decomposizione di ogni elemento $w \in T$ nelle componenti di V e H è unica ed è la seguente: $T \ni w = \pi_V(w) + (w - \pi_V(w))$, essendo $\pi_V(w) \in V$ e $w - \pi_V(w) \in H$.
In altri termini, dati uno spazio vettoriale T ed un suo sottospazio V, la scelta di un sottospazio $H \leqslant T$ complementare in T a V equivale a scegliere la proiezione di T su V parallelamente ad H.

2.2.4 *Connessione di Ehresmann su fibrati vettoriali*

Vogliamo qui infine rendere esplicito, nel caso di un fibrato vettoriale E di rango r sulla varietà M di dimensione n, il collegamento tra la definizione di connessione data sopra come scelta di un sottofi-

3 Includendo il codominio di Φ in TE la si può considerare come un tensore di rango $(1, 1)$, ossia $\Phi \in T^*E \otimes TE$.

brato $HE \subset TE$ e la definizione classica di connessione su un fibrato vettoriale come derivata covariante, ossia una mappa

$$\begin{aligned} \nabla : \mathfrak{X}(M) \times \mathcal{E}(M) &\to \mathcal{E}(M) \\ (X, s) &\mapsto \nabla_X s \end{aligned} \tag{2.3}$$

$C^\infty(M)$-lineare rispetto al campo vettoriale a pedice, $\mathbb{R}$-lineare rispetto alle sezioni di E e che soddisfa $\nabla_X(fs) = X(f)s + f\,\nabla_X s$ (regola di Leibniz), per ogni $f \in C^\infty(M)$. In particolare, si chiarirà la relazione tra le funzioni $a_i^j \in C^\infty(E)$ che compaiono nella scelta del riferimento locale per HE — che determinano univocamente la connessione nella descrizione generale — e i coefficienti $\Gamma^k_{jh} \in C^\infty(M)$ della connessione nella descrizione più familiare.

Anzitutto sappiamo che se (U, ϕ) è una carta locale per M centrata in $p \in M$, di coordinate $\phi = (x^1, \dots, x^n)$, detta χ la trivializzazione di E sull'intorno aperto $U \subset M$ di p, si produce una carta locale $(\pi^{-1}(U), \tilde{\phi})$ per il fibrato vettoriale $\pi : E \to M$ sull'aperto $\pi^{-1}(U) \subset E$, dove $\tilde{\phi} := (\phi, \mathrm{id}) \circ \chi$:

$$\begin{array}{ccccc} E \supset \pi^{-1}(U) & \xrightarrow{\chi} & U \times \mathbb{R}^r & \xrightarrow{(\phi,\mathrm{id})} & \phi(U) \times \mathbb{R}^r \subset \mathbb{R}^n \times \mathbb{R}^r \\ (p, v) & \longmapsto & (p, (y^1, \dots, y^r)) & \longmapsto & (x^1_p, \dots, x^n_p, y^1, \dots, y^r) \end{array}$$

essendo $(y^1, \dots, y^r)$ le coordinate del vettore v in $\mathbb{R}^r$. Un riferimento locale per il fibrato tangente TE sopra $\pi^{-1}(U)$ è quindi dato da

$$\{\partial_1, \dots, \partial_n, \tilde{\partial}_1, \dots, \tilde{\partial}_r\},$$

dove di nuovo abbiamo posto $\partial_h = \partial/\partial x^h$ per $h = 1, \dots, n$ e $\tilde{\partial}_j = \partial/\partial y^j$ per $j = 1, \dots, r$. Si osservi, allora, che $VE = \ker(\mathrm{d}\pi) = \langle \tilde{\partial}_1, \dots, \tilde{\partial}_r \rangle$. Sappiamo inoltre che, localmente ad U, il fibrato E è dotato della base locale $\{e_1, \dots, e_r\}$ associata alla trivializzazione[4] χ, pertanto le sezioni locali di E saranno scritte come $s = s^j e_j$ per opportune $s^j \in C^\infty(U)$.

Siano ora $p \in M$ e $(p, v) \in E$ con $v \in E_p$. Introduciamo l'inclusione canonica j_p e l'identificazione canonica k_v:

$$\begin{aligned} j_p : E_p &\to E \\ v &\mapsto (p, v) \end{aligned} \qquad\qquad \begin{aligned} k_v : E_p &\to T_v E_p \\ w^j e_j(p) &\mapsto w^j \tilde{\partial}_j|_{(p,v)}. \end{aligned}$$

Allora la composizione $\pi \circ j_p$ restituisce identicamente p e di conseguenza $\mathrm{d}\pi \circ \mathrm{d}j_p = 0$. Pertanto si trova che, per ogni $p \in M, v \in E_p$,

$$\mathrm{d}(j_p)_{(p,v)}(T_v E_p) \subset \ker(\mathrm{d}\pi_{(p,v)}) = V_{(p,v)} E,$$

4 Le sezioni $e_j : U \to E|_U$ sono definite dalla posizione $p \mapsto e_j(p) := \chi^{-1}(p, \underline{e}_j)$, per ogni $p \in U$, dove $\underline{e}_j$ è il j-esimo vettore della base canonica di $\mathbb{R}^r$.

ossia che $\mathrm{d}(j_p)_{(p,v)}(T_v E_p) = V_{(p,v)}E$, in quanto entrambi spazi vettoriali r-dimensionali[5]. Si ottiene così un isomorfismo di spazi vettoriali $\iota_{(p,v)} := \mathrm{d}(j_p)_{(p,v)} \circ k_v$

$$\iota_{(p,v)} : E_p \to V_{(p,v)}E$$

che stabilisce un'identificazione tra la fibra E_p e il sottospazio verticale in (p, v) secondo la seguente posizione, per ogni $w \in E_p$:

$$w = w^j e_j(p) \mapsto \iota_{(p,v)}(w^j e_j(p)) = w^j \tilde{\partial}_j|_{(p,v)}.$$

Proposizione 2.16. *Sia $s \in \mathcal{E}(U)$ una sezione locale del fibrato E sull'aperto $U \subset M$. Allora*

$$\mathrm{d}s = \mathrm{d}x^h \otimes (\partial_h + \partial_h s^j \, \tilde{\partial}_j).$$

Dimostrazione. Dal momento che il risultato è di natura locale si può sfruttare la locale trivializzazione di E sull'aperto $U \subset M$ e vedere s come una sezione a valori in $U \times \mathbb{R}^r$:

$$\begin{aligned} s : U &\to E|_U \cong U \times \mathbb{R}^r \\ x &\mapsto \Big(x^i, s^j(x)\Big)_{\substack{i=1,\dots,n \\ j=1,\dots,r}} \end{aligned}$$

dove le funzioni $s^j \in C^\infty(U)$ sono le componenti di s. Volendo guardare a $\mathrm{d}s$ come una 1-forma a valori in $TE \cong TU \oplus T\mathbb{R}^r$, applicando il differenziale a s separatamente sulle funzioni x^i e sulle funzioni s^j si trova rispettivamente

$$\begin{aligned} \mathrm{d}x^i &= \partial_h x^i \, \mathrm{d}x^h \, \partial_i = \delta^i_h \, \mathrm{d}x^h \, \partial_i = \mathrm{d}x^h \, \partial_h, && i, h = 1, \dots, n; \\ \mathrm{d}s^j &= \partial_h s^j \, \mathrm{d}x^h \, \tilde{\partial}_j = \mathrm{d}x^h \, \partial_h s^j \, \tilde{\partial}_j, && j = 1, \dots, r, \end{aligned}$$

avendo utilizzato separatamente sulle due componenti gli opportuni vettori $\{\partial_1, \dots, \partial_n, \tilde{\partial}_1, \dots, \tilde{\partial}_r\}$ del riferimento locale di TE. Sommando

$$\mathrm{d}s = \mathrm{d}x^h \otimes \partial_h + \mathrm{d}x^h \otimes \partial_h s^j \, \tilde{\partial}_j = \mathrm{d}x^h \otimes (\partial_h + \partial_h s^j \, \tilde{\partial}_j)$$

segue la tesi. $\square$

Lemma 2.17. *Sia $\nabla : \mathcal{E}(M) \to \Omega^1(M; E)$ una connessione[6] sul fibrato vettoriale $\pi : E \to M$. Dati $p \in M$ e $v \in E_p$, siano $s, \tilde{s} \in \mathcal{E}(M)$ tali che $s(p) = v = \tilde{s}(p)$. Allora si ha*

$$\mathrm{d}\tilde{s}_p - \iota_{(p,v)} \circ (\nabla \tilde{s})_p = \mathrm{d}s_p - \iota_{(p,v)} \circ (\nabla s)_p.$$

5 $V_{(p,v)}E$ ha dimensione r per costruzione; j_p è iniettiva e lineare, pertanto $\mathrm{d}(j_p)_{(p,v)}(T_v E_p)$ ha la stessa dimensione di $T_v E_p$, uguale a $\dim E_p = r$.

6 In questo caso la connessione sul fibrato vettoriale E è definita come una mappa lineare

$$\begin{aligned} \nabla : \mathcal{E}(M) &\to \Omega^1(M; E) \\ s &\mapsto \nabla s \end{aligned} \tag{2.4}$$

tale che per ogni $f \in C^\infty(M)$ valga $\nabla(fs) = \mathrm{d}f \otimes s + f \, \nabla s$.

Dimostrazione. Consideriamo la differenza $\tilde{s} - s = fs_0$, dove $f \in C^\infty(M)$ è tale che $f(p) = 0$ e $s_0 \in \mathcal{E}(M)$. Si ha perciò

$$\nabla(\tilde{s} - s) = \nabla\tilde{s} - \nabla s = \nabla(fs_0) = \mathrm{d}f \otimes s_0 + f\,\nabla s_0,$$

e valutando in p si ottiene $\nabla\tilde{s}(p) - \nabla s(p) = \mathrm{d}f_p \otimes s_0(p)$. Essendo $s, \tilde{s}$ sezioni, componendo con la proiezione si ottiene l'identità di U; in particolare $\pi \circ (\tilde{s} - s) = \mathrm{id}_U$ e, passando al differenziale, $\mathrm{d}\pi_{(p,v)} \circ (\mathrm{d}\tilde{s}_p - \mathrm{d}s_p) = 0$: segue dunque che l'immagine di $(\mathrm{d}\tilde{s}_p - \mathrm{d}s_p)$ è contenuta in $\ker \mathrm{d}\pi_{(p,v)} = V_{(p,v)}E$. Allora, utilizzando la Proposizione 2.16, possiamo esplicitare in coordinate locali il calcolo di $\mathrm{d}\tilde{s}_p - \mathrm{d}s_p$:

$$\begin{aligned}
\mathrm{d}\tilde{s} - \mathrm{d}s &= \mathrm{d}x^h \otimes (\partial_h + \partial_h \tilde{s}^j\,\tilde{\partial}_j) - \mathrm{d}x^h \otimes (\partial_h + \partial_h s^j\,\tilde{\partial}_j)\\
&= \mathrm{d}x^h \otimes \partial_h(\tilde{s} - s)^j\,\tilde{\partial}_j = \mathrm{d}x^h \otimes \partial_h(fs_0)^j\,\tilde{\partial}_j\\
&= \mathrm{d}x^h \otimes \left[(\partial_h f)s_0^j + f(\partial_h s_0^j)\right]\tilde{\partial}_j\\
&= s_0^j\,(\partial_h f)\,\mathrm{d}x^h \otimes \tilde{\partial}_j + f\,(\partial_h s_0^j)\,\mathrm{d}x^h \otimes \tilde{\partial}_j.
\end{aligned}$$

Valutando in p il secondo addendo scompare perché $f(p) = 0$ e si ottiene

$$(\mathrm{d}\tilde{s} - \mathrm{d}s)_p(w) = \big((\partial_h f)(p)\,\mathrm{d}x_p^h \otimes s_0^j(p)\,\tilde{\partial}_j|_p\big)(w) = \mathrm{d}f_p(w) \otimes s_0(p),$$

per ogni $w \in T_pM$. A rigore, si avrebbe $\mathrm{d}f_p(w)s_0(p) \in E_p$ mentre, come detto prima, l'immagine di $\mathrm{d}\tilde{s} - \mathrm{d}s$ è contenuta in $V_{(p,v)}$: formalmente è quindi corretto comporre sulla sinistra per $\iota_{(p,v)}$, ottenendo di conseguenza

$$\begin{aligned}
(\mathrm{d}\tilde{s} - \mathrm{d}s)_p(w) &= \iota_{(p,v)} \circ \big(\mathrm{d}f_p(w) \otimes s_0(p)\big)\\
&= \iota_{(p,v)} \circ (\nabla\tilde{s}(p) - \nabla s(p))\,(w),
\end{aligned}$$

per ogni $w \in T_pM$, da cui l'asserto da provare. □

Veniamo ora al punto della questione. Sia $\nabla : \mathfrak{X}(M) \times \mathcal{E}(M) \to \mathcal{E}(M)$ una connessione nel senso classico sul fibrato vettoriale $\pi : E \to M$ e definiamo per ogni $(p, v) \in E$ la mappa $\Theta_{(p,v)} : T_pM \to T_{(p,v)}E$ secondo la posizione

$$\Theta_{(p,v)}(X) = \mathrm{d}s_p(X) - \iota_{(p,v)}(\nabla_X s),$$

per ogni $X \in T_pM$, essendo $s \in \mathcal{E}(M)$ una qualsiasi sezione di E tale che $s(p) = v$. Si osservi che, grazie al Lemma 2.17, è garantita l'indipendenza della definizione di Θ dalla scelta della sezione s. Poniamo dunque, per ogni $(p, v) \in E$,

$$H_{(p,v)}E := \Theta_{(p,v)}(T_pM).$$

Troviamo l'espressione esplicita di $\Theta_{(p,v)}$ in coordinate locali. Siano $X = X^h \partial_h \in \mathfrak{X}(M)$ e $s = s^k e_k \in \mathcal{E}(M)$. Il primo termine di $\Theta_{(p,v)}(X)$ in coordinate locali è, grazie alla Proposizione 2.16,

$$\begin{aligned} \mathrm{d}s(X) &= (\mathrm{d}x^h \otimes \partial_h)(X^i \partial_i) + (\mathrm{d}x^h \otimes \partial_h s^j \,\tilde{\partial}_j)(X^i \partial_i) \\ &= X^i \delta_i^h \partial_h + X^i \delta_i^h \partial_h s^j \,\tilde{\partial}_j = X^h (\partial_h + \partial_h s^j \,\tilde{\partial}_j). \end{aligned}$$

Essendo poi

$$\nabla_X s = X^h (\nabla_{\partial_h} s^k e_k) = X^h (\partial_h s^k) e_k + X^h s^k \nabla_{\partial_h} e_k = X^h \left(\partial_h s^j + s^k \,\Gamma^j_{hk} \right) e_j,$$

il secondo termine è semplicemente

$$\iota_{(p,v)}(\nabla_X s) = \iota_{(p,v)} \left[X^h \left(\partial_h s^j + s^k \,\Gamma^j_{hk} \right) e_j \right] = X^h \left(\partial_h s^j + s^k \,\Gamma^j_{hk} \right) \tilde{\partial}_j.$$

La descrizione locale di $\Theta_{(p,v)}$ è così dettagliata: se $\tilde{X}$ è un elemento di $H_{(p,v)}E$ tale che $\tilde{X} = \Theta_{(p,v)}(X)$ per un certo $X \in T_p M$, allora

$$\tilde{X} = \Theta_{(p,v)}(X) = \mathrm{d}s_p(X) - \iota_{(p,v)}(\nabla_X s) = X^h \partial_h - \Gamma^j_{hk} X^h s^k \,\tilde{\partial}_j. \tag{2.5}$$

Si verifica facilmente che HE è un sottofibrato orizzontale: per definizione infatti $HE \subset TE$, in quanto $H_{(p,v)}E \leqslant T_{(p,v)}E$ per ogni $(p,v) \in E$; dalla descrizione in coordinate locali (2.5) segue poi che il rango di HE è n e che se $\tilde{X} \in V_{(p,v)}E \cap H_{(p,v)}E$, allora

$$0 = \mathrm{d}\pi_{(p,v)}(\tilde{X}) = \mathrm{d}\pi_{(p,v)}(X^h \partial_h - \Gamma^j_{hk} X^h s^k \,\tilde{\partial}_j) = X^h \partial_h,$$

ossia segue che $\tilde{X} = 0$. Si conclude quindi $TE = VE \oplus HE$.

In particolare, per $h_i = \partial_i|_{(p,v)} + a_i^j(p)\,\tilde{\partial}_j|_{(p,v)}$ elemento di $H_{(p,v)}E$, diviene esplicita l'espressione delle funzioni a_i^j introdotte in (2.2) in termini dei coefficienti Γ^j_{ik} della connessione:

$$a_i^j(x,y) = -\Gamma^j_{ik}(x)\, y^k(x),$$

se si prende, ad esempio, $s^k = y^k$ per $k = 1, \dots, r$.

2.3 CURVATURA GENERALE

Alla luce della nuova definizione data di connessione su un fibrato generale è necessario modificare quella di curvatura: su tale base essa assumerà un diverso significato matematico che farà riferimento ad una precisa proprietà dei sottospazi del fibrato orizzontale.

Ricordiamo il Teorema di Frobenius in versione locale per una distribuzione liscia D, che sotto la condizione di involuzione (per ogni coppia di sezioni locali $X, Y \in \mathfrak{X}_D$ si ha $[X,Y] \in \mathfrak{X}_D$) garantisce la completa integrabilità, ossia l'esistenza di sottovarietà integrali di dimensione costante per D:

Teorema 2.18 (di Frobenius, versione locale). *Se una distribuzione liscia è involutiva, allora è completamente integrabile*[7].

A ben vedere, una connessione generale $HE \subset TE$ su un fibrato E, intesa come collezione di sottospazi vettoriali $H_eE \leqslant T_eE$ di dimensione n indipendente da $e \in E$, è a tutti gli effetti una distribuzione liscia n-dimensionale sul fibrato TE. Volendo applicare il Teorema di Frobenius alla connessione HE, la proprietà di essere involutiva si traduce nel modo seguente: $[X,Y] \in \mathfrak{X}_{HE}$, per ogni $X,Y \in \mathfrak{X}_{HE}$. Considerando la connessione $\Phi : TE \to VE$ come nella Definizione 2.14, se HE è involutiva, allora deve essere $\Phi([X,Y]) = 0$, perché $[X,Y]$ è campo orizzontale e pertanto viene annullato dalla proiezione su VE.

Proposizione 2.19. *Siano $u, w \in H_eE$ e siano $X, Y \in \mathfrak{X}_{HE}$ tali che $X_e = u$ e $Y_e = w$. Allora $\Phi([X,Y])(e)$ è indipendente dalla scelta di X e Y.*

Dimostrazione. Osserviamo anzitutto che

$$\Phi([fX, gY]) = fg\,\Phi([X,Y]),$$

per ogni $f, g \in C^\infty(E)$ e per ogni $X, Y \in \mathfrak{X}_{HE}$. Infatti:

$$\begin{aligned}
\Phi([fX, gY]) &= \Phi(fg[X,Y] + fX(g)Y - gY(f)X) \\
&= \Phi(fg[X,Y]) + \Phi(fX(g)Y) - \Phi(gY(f)X) \\
&= \Phi(fg[X,Y]) = fg\,\Phi([X,Y])
\end{aligned}$$

(questo perchè $fX(g)Y, gY(f)X$ sono campi orizzontali, mentre nell'ultima uguaglianza si è usata la $C^\infty(E)$-linearità di Φ). Si consideri ora un campo vettoriale $X \in \mathfrak{X}_{HE}$ tale che $X_e = 0$ e, introdotto un sistema di coordinate locali tramite una carta (U, ϕ) con $U \subset E$ intorno aperto di e e $\phi = (x^1, \dots, x^n)$, sia $X = X^i\,\partial_i$ per opportune $X^i \in C^\infty(U)$; allora per quanto provato vale

$$\Phi([X,Y]) = \Phi([X^i \partial_i, Y]) = X^i\,\Phi([\partial_i, Y]).$$

Dal momento che $X_e = 0$ segue che $X^i(e) = 0$ per ogni $i = 1, \dots, n$ e di conseguenza

$$\Phi([X,Y])(e) = X^i(e)\,\Phi([\partial_i, Y])(e) = 0.$$

Risulta chiaro, quindi, che se due campi $X, \tilde{X} \in \mathfrak{X}_{HE}$ sono tali che in e si abbia $X(e) = u = \tilde{X}(e)$, allora la loro differenza è un campo vettoriale in $\mathfrak{X}_{HE}$ che ivi si annulla e, per quanto appena visto, si ha

$$0 = \Phi([X - \tilde{X}, Y])(e) = \Phi([X,Y])(e) - \Phi([\tilde{X}, Y])(e),$$

da cui $\Phi([X,Y])(e) = \Phi([\tilde{X}, Y])(e)$. Analogo argomento per il campo Y. $\square$

7 Per una dimostrazione vd. [1], p. 176; Teor. 3.7.11.

Resta quindi definita per ogni $e \in E$ una mappa bilineare e antisimmetrica

$$\begin{aligned} \Omega_e : H_eE \times H_eE &\to V_eE \\ (u,w) &\mapsto \Omega_e(u,w) := \Phi([X,Y])(e) \end{aligned} \tag{2.6}$$

dove $X, Y \in \mathfrak{X}_{HE}$ sono tali che $X_e = u$ e $Y_e = w$: la Proposizione 2.19 garantisce che la definizione di questa mappa è indipendente dalla scelta di X e Y.

Definizione 2.20. Definiamo *curvatura generale* la 2-forma differenziale $\Omega : HE \times HE \to VE$ a valori nel fibrato VE che in ogni punto $e \in E$ si riduce ad essere la mappa Ω_e definita in (2.6)[8].

Pertanto, se $X, Y \in \mathfrak{X}_{HE}$ e HE è involutiva, allora tale quantità è nulla, mentre se HE non è involutiva, allora $[X, Y]$ è un campo con una componente verticale non banale che viene restituita da Φ. La forma Ω rappresenta la più generale espressione del concetto di curvatura, che in questo modo assume un significato matematico — diverso dal caso di una connessione definita in senso classico su un fibrato vettoriale — ben preciso: essa misura l'integrabilità di HE guardando di quanto si discosta dall'essere involutiva.

8 Ω è anche un tensore antisimmetrico 1-controvariante e 2-covariante: $\Omega \in \mathrm{Hom}(HE \times HE, VE) \cong H^*E \otimes H^*E \otimes VE$; l'antisimmetria è insita nella definizione, in quanto deriva dal carattere antisimmetrico delle parentesi di Lie.

3 CONNESSIONI E CURVATURA SU FIBRATI PRINCIPALI

Nel presente Capitolo si tratterà il caso specifico dei fibrati principali. Anzitutto verrà definito questo particolare tipo di fibrato che presenta come fibra tipica un gruppo di Lie, che esercita un'azione sulla fibra stessa; successivamente si adatteranno le definizioni di connessione e di curvatura a questo nuovo contesto. Concludiamo la trattazione matematica facendo vedere la prassi per associare ad ogni fibrato principale un fibrato generale; in particolare si darà enfasi al caso dei fibrati vettoriali associati. A partire da un fibrato vettoriale è invece possibile associare un particolare fibrato principale, detto fibrato dei riferimenti.

3.1 FIBRATI PRINCIPALI

Introduciamo prima di tutto la nozione di G-struttura, dove G è un gruppo di Lie.

Definizione 3.1. Sia G un gruppo di Lie. Una *G-struttura* su un fibrato $\pi : E \to M$ di fibra tipica S è il dato di un'azione[1] $\vartheta : G \times S \to S$ di G su S, di un atlante di fibrato $\mathcal{A} = \{(U_\alpha, \chi_\alpha)\}_\alpha$ e di una famiglia di mappe differenziabili $\eta_{\alpha\beta} : U_\alpha \cap U_\beta \to G$, dette *funzioni di transizione della G-struttura*[2] rispetto ad $\mathcal{A}$, tali che le funzioni di transizione $\{\psi_{\alpha\beta}\}_{\alpha,\beta}$ di $\mathcal{A}$ siano date dall'azione di G: per ogni $p \in U_\alpha \cap U_\beta$ e $s \in S$ si ha cioè

$$\psi_{\alpha\beta}(p)(s) = \vartheta(\eta_{\alpha\beta}(p), s) = \eta_{\alpha\beta}(p) \cdot s.$$

Un tale atlante $\mathcal{A}$ è detto *G-atlante*; un *G-fibrato* è un fibrato $\pi : E \to M$ di fibra tipica S dotato di una G-struttura.

Si può facilmente verificare che anche le funzioni di transizione della G-struttura soddisfano delle *condizioni di cociclo*

$$\eta_{\alpha\alpha}(p) = e, \tag{3.1a}$$
$$\eta_{\alpha\beta}(p)\,\eta_{\beta\gamma}(p) = \eta_{\alpha\gamma}(p). \tag{3.1b}$$

1 Per semplicità di notazione nel seguito si ricorrerà ad indicare $\vartheta(g,s)$ con $g \cdot s$.

2 Il ruolo delle funzioni $\{\eta_{\alpha\beta}\}_{\alpha\beta}$ consiste nel selezionare, tra tutti i diffeomorfismi $\psi_{\alpha\beta}$ di S in sé, solo quelli indotti dall'azione di G sulla fibra tipica: in questo senso si può considerare G come un sottogruppo di $\mathrm{Diff}(S)$.

Infatti, per quanto riguarda la prima, dalla (2.1a) segue

$$s = \psi_{\alpha\alpha}(p)(s) = \eta_{\alpha\alpha}(p) \cdot s \quad \Leftrightarrow \quad \eta_{\alpha\alpha}(p) = e,$$

dovendo valere per ogni $s \in S$; per quanto riguarda la seconda (nella quale p è preso in $U_\alpha \cap U_\beta \cap U_\gamma$), guardando separatamente i due membri dalla (2.1b), si ha

$$\psi_{\alpha\gamma}(p)(s) = \eta_{\alpha\gamma}(p) \cdot s,$$
$$\psi_{\alpha\beta}(p) \circ \psi_{\beta\gamma}(p)(s) = \psi_{\alpha\beta}(p)(\eta_{\beta\gamma}(p) \cdot s) = \eta_{\alpha\beta}(p) \cdot \eta_{\beta\gamma}(p) \cdot s$$

e, dovendosi eguagliare per ogni $s \in S$, si ricava la (3.1b).

Definizione 3.2. Sia G un gruppo di Lie. Un *fibrato principale di gruppo di struttura G* (o *G-fibrato principale*) è un G-fibrato $\pi : P \to M$ di fibra tipica G tale che

i. l'azione $\varrho : P \times G \to P$ di G su P è destra, libera ed è esercitata — come moltiplicazione destra per g^{-1} — sulle singole fibre nel senso seguente[3]: se $(x, h) \in P$ e $g \in G$,

$$((x, h), g) \mapsto \varrho((x, h), g) = (x, \varrho_g(h)) = (x, hg^{-1});$$

in altri termini, ogni fibra è globalmente fissata dall'azione di G, perché tale azione di G su se stesso è transitiva;

ii. essendo P localmente triviale, per ogni $x \in M$ esistono un intorno aperto $U \subset M$ ed un diffeomorfismo $\chi : P|_U \to U \times G$ tale che $\pi = \mathrm{p}_1 \circ \chi$:

$$\begin{tikzcd} P|_U \arrow[r, "\chi"] \arrow[d, "\pi"'] & U \times G \arrow[dl, "\mathrm{p}_1"] \\ U & \end{tikzcd}$$

essendo $P|_U = \pi^{-1}(U)$. Al solito, $P_x = \pi^{-1}(\{x\})$ denoterà la *fibra* in x e, se $p \in P_x$, allora $p \mapsto \chi(p) = (\pi(p), \phi(p)) = (x, \phi(p))$, dove $\phi : P|_U \to G$ è una mappa differenziabile compatibile con l'azione del gruppo:

$$\phi(\varrho_g(p)) = \varrho_g(\phi(p)),$$

per ogni $p \in P|_U$, $g \in G$.

Osservazione 3.3. Se $\{U_\alpha\}_\alpha$ è il ricoprimento aperto di M, la trivializzazione di P su ogni U_α porge il diffeomorfismo $P|_{U_\alpha} \cong U_\alpha \times G$. Quozientando per G questa relazione si trova facilmente che $P/G \cong M$, ossia che la varietà di base di un fibrato principale è in realtà (diffeomorfa al)lo spazio delle orbite date dall'azione di G.

3 Si sta considerando $P = \bigsqcup_{x \in M} P_x \cong \bigsqcup_{x \in M} \{(x, g) \mid g \in G\}$.

Osservazione 3.4. In particolare, la sommersione $\pi : P \to M \cong P/G$ non è altro che la proiezione canonica sullo spazio delle orbite. Se quindi $x \in M$ e $p \in P_x$, P_x è l'orbita di p sotto l'azione di G e pertanto si avrà

$$P_x = \{\varrho_g(p) \,|\, g \in G\} = \{pg^{-1} \,|\, g \in G\}.$$

Si dirà, allora, che P_x è la *fibra passante* per p. Segue, di conseguenza, che ogni fibra è isomorfa a G sebbene in modo non canonico dal momento che non vi è una scelta privilegiata per il rappresentante p.

Esempio 3.5. Se M è una varietà e G è un gruppo di Lie allora, ponendo $P = M \times G$, $\pi : P \to M$ (proiezione sul primo fattore) è un G-fibrato principale, detto *fibrato principale triviale*, in cui l'azione del gruppo (su se stesso) è la moltiplicazione destra.

3.2 Connessione su un fibrato principale

Per adattare al caso dei fibrati principali la struttura della connessione di Ehresmann è necessario riformulare le definizioni di fibrato verticale e fibrato orizzontale. Anche qui verranno date sia una definizione di connessione che riprende la definizione alla Ehresmann sia una definizione come 1-forma di connessione.

Sia dunque G un gruppo di Lie di algebra di Lie $\mathfrak{g}$ e sia P un G-fibrato principale. Denotiamo[4] con ϱ l'azione di G su P, $(p, g) \mapsto \varrho(p, g) = pg^{-1}$. È noto (vd. Osservazione 1.13) che per ogni $g \in G$ resta definito un diffeomorfismo $\varrho_g : P \to P$ definito da $\varrho_g(p) = pg^{-1}$, per ogni $p \in P$. Allo stesso modo, fissato $\xi \in \mathfrak{g}$, si ottiene il diffeomorfismo $\varrho_{\exp(-t\xi)}$ di P in sé dato dalla posizione $\varrho_{\exp(-t\xi)}(p) = p\exp(t\xi)$, essendo[5] $\exp(-t\xi) \in G$.

3.2.1 *Il fibrato verticale*

Quello che si vuole fare anzitutto è associare ad ogni vettore dell'algebra di Lie $\mathfrak{g}$ un vettore dello spazio T_pP tangente a P in un suo punto $p \in P$.

Osserviamo intanto che, fissato $\xi \in \mathfrak{g}$, resta definita (almeno localmente, diciamo per $|t| < \varepsilon$ avendo fissato un opportuno $\varepsilon > 0$) la curva su G data da $t \mapsto \exp(t\xi)$, passante per e all'istante $t = 0$ e ivi tangente a ξ. Facendo agire i punti di questa curva — elementi di G — su un punto $p \in P$ si ottiene, al variare di $t \in (-\varepsilon, \varepsilon)$, una curva su P data da $t \mapsto p\exp(t\xi) = \varrho_{\exp(-t\xi)}(p)$. Questa curva su P passa per il punto p all'istante $t = 0$ ed è ivi tangente ad un vettore di T_pP.

4 Per denotare l'azione di g su p si adotterà nel seguito la scrittura pg^{-1}, in luogo di $p \cdot g^{-1}$, non potendosi l'azione ϱ confondere con la moltiplicazione a destra per g^{-1}.
5 Vedi nota 5 a p. 18.

Resta dunque naturalmente definita per ogni $p \in P$ l'associazione cercata, ossia la mappa $u_p : \mathfrak{g} \to T_pP$ data da

$$\xi \mapsto u_p(\xi) = \frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}t}\, p \exp(t\xi)\bigg|_{t=0}, \tag{3.2}$$

che ad ogni vettore $\xi \in \mathfrak{g}$ fa corrispondere il vettore tangente alla curva $p \exp(t\xi)$ in p a $t = 0$. L'applicazione u_p è inoltre lineare perché la curva $p \exp(t\xi)$ dipende linearmente dalle condizioni iniziali[6].

Essendo nelle condizioni di un particolare tipo di fibrato generale, è possibile anche in questo caso definire il fibrato verticale come spazio tangente alle fibre di P. Se $p \in P$ corrisponde a $(x, g) \in M \times G$ tramite la trivializzazione, poiché la fibra P_x è diffeomorfa a G, lo spazio V_pP sarà identificabile con lo spazio tangente a G in g e questo, a sua volta, sarà — a meno di comporre con una traslazione[7] — identificabile con $\mathfrak{g}$. Pertanto la componente verticale dello spazio tangente alla varietà P si identifica in ogni punto con l'algebra di Lie $\mathfrak{g}$ del gruppo strutturale G.

Proposizione 3.6. *Siano G un gruppo di Lie, $\mathfrak{g}$ la sua algebra di Lie e $\pi : P \to M$ un G-fibrato principale. Allora la mappa u_p è, per ogni $p \in P$, isomorfismo tra $\mathfrak{g}$ e V_pP.*

Dimostrazione. Si è già detto che u_p è morfismo di spazi vettoriali. Dal fatto che l'azione di G è libera segue che la mappa u_p è iniettiva per ogni $p \in P$. Se, infatti, $\xi \in \ker u_p$ e si suppone $\xi \neq 0$ necessariamente saranno determinati punti di $\exp(t\xi)$ diversi da e e, di conseguenza, l'azione di tali punti su p determinerà un arco di curva su P non costantemente uguale a p: il fatto che l'azione è libera garantisce che solo in $t = 0$ l'elemento e fissi il punto p e che altrimenti si abbia $p \exp(t\xi) \neq p$. Pertanto il vettore $u_p(\xi)$, tangente a tale curva in p all'istante $t = 0$ sarà non nullo, contraddicendo l'appartenenza di ξ al nucleo di u_p. Per quanto riguarda la suriettività, la mappa u_p manda tutti i vettori di $\mathfrak{g}$ in tutti i vettori tangenti alla fibra nel senso seguente: fissato un punto $p \in P$ per vedere tutti gli elementi di V_pP è necessario calcolare la derivata in $t = 0$ di tutte le curve $p \exp(t\xi)$ passanti per p ottenute al variare di tutti i vettori $\xi \in \mathfrak{g}$. Restringendo quindi il codominio di u_p da T_pP a V_pP, essendo u_p lineare e iniettiva, si ottiene una corrispondenza biunivoca tra i vettori di $\mathfrak{g}$ e quelli di V_pP. □

Osservazione 3.7. Per definire una mappa u che non dipenda dal punto p basta far variare p nella definizione (3.2) del morfismo u_p: è sufficiente cioè far corrispondere al campo vettoriale su G — di cui $t \mapsto \exp(t\xi)$ è curva integrale — il campo vettoriale su P la cui curva integrale è $t \mapsto p \exp(t\xi)$; denoteremo con $\xi^* \in \mathfrak{X}(P)$ tale campo

6 O più semplicemente perché $u_p(\xi)$ è la derivata (operatore lineare) della funzione $p \exp(t\xi)$.

7 In effetti, per passare da T_gG a $T_eG = \mathfrak{g}$ basta usare il differenziale di $L_{g^{-1}}$ in g.

vettoriale, detto il *campo vettoriale fondamentale* corrispondente all'elemento $\xi \in \mathfrak{g}$. La mappa (3.2) è quindi la definizione puntuale di una funzione

$$\begin{aligned} u : \mathfrak{g} &\to \mathfrak{X}(P) \\ \xi &\mapsto \xi^* \end{aligned}$$

che ad ogni vettore $\xi \in \mathfrak{g}$ associa il suo campo vettoriale fondamentale ξ^*, il cui valore in ogni punto $p \in P$ è dato dalla mappa u_p. Essa è lineare per la Proposizione 3.6; essendo $\mathfrak{g}$ e $\mathfrak{X}(P)$ due algebre di Lie si può dimostrare (vd. [9], p. 42; Prop. 4.1.) che è anche morfismo di algebre di Lie: in particolare, quindi, per ogni $\xi, \eta \in \mathfrak{g}$ si ha

$$[\xi, \eta]^* = u([\xi, \eta]) = [u(\xi), u(\eta)] = [\xi^*, \eta^*].$$

Osservazione 3.8. Si osservi che il (sotto)fibrato verticale $VP \subset TP$ inteso come collezione dei vari spazi vettoriali V_pP al variare di $p \in P$ è, grazie alla Proposizione 3.6, isomorfo al fibrato (vettoriale) triviale $P \times \mathfrak{g}$:

$$VP = \bigsqcup_{p \in P} V_pP = \bigsqcup_{p \in P} = \{(p, v) \mid v \in V_pP \cong \mathfrak{g}\} \cong P \times \mathfrak{g}.$$

Osservazione 3.9. L'azione di G sulle fibre si riflette su un'azione sullo spazio tangente di ciascuna di esse e, a sua volta, quest'azione sugli spazi V_pP si riflette, stante l'isomorfismo della Proposizione 3.6, nell'azione di G sulla sua algebra di Lie.
Anzitutto, fissato $g \in G$, l'azione $\varrho_g : P \to P$ manda in sé la fibra passante per $p \in P$: se $\chi(p) = (\pi(p), \phi(p)) = (x, h)$ si ha infatti che $\varrho_g(p) = (x, \varrho_g(h)) = (x, hg^{-1})$, che è ancora nella stessa fibra. Passando al differenziale di ϱ_g in p si trova una mappa lineare $\mathrm{d}(\varrho_g)_p : V_pP \to V_{\varrho_g(p)}P$ tra gli spazi tangenti alla fibra in questione: questa è l'azione di G sugli spazi verticali. Si noti che, nonostante siano entrambi identificabili con $\mathfrak{g}$, i due spazi tangenti risultano comunque diversi perché, sotto l'identificazione della fibra con G, il primo corrisponde allo spazio tangente a G in h, mentre il secondo corrisponde allo spazio tangente a G in $hg^{-1} \neq h$.
Per quanto riguarda invece il legame tra l'azione sui V_pP e l'azione su $\mathfrak{g}$, si prenda $v \in V_pP$ e sia $v = u_p(\xi)$, per un opportuno $\xi \in \mathfrak{g}$. Si ottiene quindi

$$\begin{aligned} \mathrm{d}(\varrho_g)_p(u_p(\xi)) &= \mathrm{d}(\varrho_g)_p \left(\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}t}\, p \exp(t\xi) \right) \bigg|_{t=0} \\ &= \frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}t}\, \varrho_g \left(p \exp(t\xi) \right) \bigg|_{t=0}. \end{aligned} \tag{3.3}$$

Dettagliando l'espressione di $\varrho_g\,(p \exp(t\xi))$ si trova

$$\begin{aligned} \varrho_g\,(p \exp(t\xi)) &= p \exp(t\xi)\, g^{-1} = (pg^{-1})(g \exp(t\xi)\, g^{-1}) \\ &= \varrho_g(p)[C_g\,(\exp(t\xi))] = \varrho_g(p) \exp(t\, \mathrm{Ad}(g)(\xi)), \end{aligned}$$

dove nell'ultima uguaglianza si è usata la (1.3). Si può quindi riscrivere la (3.3) nel seguente modo:

$$\begin{aligned} \mathrm{d}(\varrho_g)_p(u_p(\xi)) &= \frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}t} \left[\varrho_g(p) \exp(t \operatorname{Ad}(g)(\xi))\right]\Big|_{t=0} \\ &= u_{\varrho_g(p)}(\operatorname{Ad}(g)(\xi)). \end{aligned} \tag{3.4}$$

Pertanto all'azione di $g \in G$ sui vettori verticali corrisponde l'azione aggiunta di G sulla sua algebra di Lie tramite l'elemento g.

3.2.2 *Connessione principale e 1-forma di connessione*

Anche in questo caso particolare di fibrato è possibile introdurre una connessione di Ehresmann come è stata presentata nella Definizione 2.10, ossia come un sottofibrato complementare a VP in TP, richiedendo in più una compatibilità tra i sottospazi che lo costituiscono e l'azione del gruppo in un senso che andiamo a definire:

Definizione 3.10. Una connessione di Ehresmann su un fibrato principale $\pi : P \to M$, o più semplicemente una *connessione principale*, è un sottofibrato $HP \subset TP$ di classe C^∞ e complementare al fibrato verticale VP i cui sottospazi H_pP soddisfano per ogni $g \in G$ e per ogni $p \in P$ la condizione

$$\mathrm{d}(\varrho_g)_p(H_pP) = H_{\varrho_g(p)}P. \tag{3.5}$$

Al solito si avrà quindi che $TP = VP \oplus HP$ e cioè, per ogni $p \in P$, sarà $T_pP = V_pP \oplus H_pP$ ($H_pP \cap V_pP = \langle 0 \rangle$ e ogni $w \in T_pP$ si scriverà in modo unico come $w = v + h$, con $v \in V_pP$, $h \in H_pP$) e la dipendenza $p \mapsto H_pP$ sarà liscia. La richiesta ulteriore è l'invarianza dei sottospazi H_pP rispetto all'azione del gruppo G.

È poi naturale e conveniente utilizzare anche una rappresentazione della connessione come 1-forma differenziale, adattando al caso di un fibrato principale la Definizione 2.14: anche qui infatti si può introdurre una 1-forma $\Phi : TP \to VP$ a valori in VP, suriettiva e idempotente, tale che per ogni $p \in P$

$$\Phi_p : T_pP \to V_pP$$

sia la proiezione di T_pP su V_pP parallelamente a H_pP, che è l'identità sui vettori verticali e che azzera i vettori orizzontali. In questo caso la condizione di invarianza (3.5) diventa, per ogni $g \in G$, $p \in P$,

$$\mathrm{d}(\varrho_g)_p \circ \Phi_p = \Phi_{\varrho_g(p)} \circ \mathrm{d}(\varrho_g)_p. \tag{3.6}$$

In realtà la composizione nel membro di sinistra è una mappa definita su T_pP, mentre la mappa a destra è definita su V_pP. Per ristabilire l'identità sui domini delle due composizioni si può decidere di estendere la definizione della mappa $\Phi_{\varrho_g(p)} \circ \mathrm{d}(\varrho_g)_p$ su tutto T_pP dichiarando, ad esempio, che la componente orizzontale di ogni $w \in T_pP$ venga annullata[8] da $\mathrm{d}(\varrho_g)_p$.

Definizione 3.11. Sia u_p l'isomorfismo tra l'algebra di Lie $\mathfrak{g}$ e lo spazio V_pP e se ne consideri l'inverso $u_p^{-1} : V_pP \to \mathfrak{g}$. La 1-forma differenziale $\omega : TP \to P \times \mathfrak{g}$ a valori nel fibrato $P \times \mathfrak{g} \cong VP$ definita per ogni $p \in P$ come

$$\omega_p := u_p^{-1} \circ \Phi_p : T_pP \to \mathfrak{g},$$

è detta *1-forma di connessione* del G-fibrato principale[9] $\pi : P \to M$.

Osservazione 3.12. Sia $X = \xi^* \in \mathfrak{X}(P)$ il campo vettoriale fondamentale di $\xi \in \mathfrak{g}$: la sua curva integrale su P uscente da $p \in P$ è quindi $t \mapsto \varrho_{\exp(-t\xi)}(p) = p\exp(t\xi)$. Il vettore tangente a tale curva in p è, per come era stata definita la mappa (3.2),

$$X_p = \frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}t} p\exp(t\xi)\bigg|_{t=0} = u_p(\xi) \in V_pP.$$

Di conseguenza, valutando su tale campo la 1-forma di connessione ω, si trova che essa risulta costante: per ogni $p \in P$ si ha infatti

$$\omega_p(X_p) = (u_p^{-1} \circ \Phi_p)(X_p) = u_p^{-1}\big(\Phi_p(u_p(\xi))\big) = \xi,$$

essendo Φ_p l'identità su $u_p(\xi) \in V_pP$.

Osservazione 3.13. Dal momento che ϱ_g è diffeomorfismo di P in sé è possibile considerare il pull-back della forma ω tramite ϱ_g: se $v \in V_pP$, allora

$$\begin{aligned} \varrho_g^*(\omega)_p(v) &= \omega_{\varrho_g(p)}(\mathrm{d}(\varrho_g)_p(v)) \\ &= u_{\varrho_g(p)}^{-1} \circ \Phi_{\varrho_g(p)} \circ \mathrm{d}(\varrho_g)_p(v) \\ &= u_{\varrho_g(p)}^{-1} \circ \mathrm{d}(\varrho_g)_p \circ \Phi_p(v), \end{aligned}$$

avendo usato nell'ultima uguaglianza la (3.6); interponendo nell'ultima riga l'identità $\mathrm{id}_{V_pP} = u_p \circ u_p^{-1}$ tra $\mathrm{d}(\varrho_g)_p$ e Φ_p si trova poi che

$$\begin{aligned} \varrho_g^*(\omega)_p(v) &= u_{\varrho_g(p)}^{-1} \circ (\mathrm{d}(\varrho_g)_p \circ u_p) \circ (u_p^{-1} \circ \Phi_p)(v) \\ &= \mathrm{Ad}(g)(\omega_p(v)), \end{aligned}$$

come segue utilizzando opportunamente la (3.4). Valendo ciò per ogni $v \in V_pP$ si conclude che

$$\varrho_g^*\omega = \mathrm{Ad}(g)(\omega). \tag{3.7}$$

8 La scelta di mandare la componente orizzontale a zero è la più naturale; andrebbe bene un'altra scelta qualsiasi, dal momento che in ogni caso la successiva composizione con $\Phi_{\varrho_g(p)}$ manderebbe a 0 la parte orizzontale di $\mathrm{d}(\varrho_g)_p(w)$.

9 Si ha cioè $\omega \in \mathrm{Hom}(TP, P \times \mathfrak{g}) \cong \mathrm{Hom}(TP, VP)$ definita da $TP \ni (p, w) \mapsto (p, \omega_p(w))$.

3.3 FORMA DI CURVATURA

In questa Sezione, invece, adattiamo ai fibrati principali la nozione di curvatura utilizzando il linguaggio delle forme pseudotensoriali. Dopo l'equazione di struttura di Cartan daremo la formulazione della curvatura in coordinate locali e proveremo la (seconda) identità di Bianchi.

3.3.1 *Forme pseudotensoriali ed equazione di struttura*

Premettiamo alla trattazione il richiamo alla formula per il calcolo del differenziale esterno di una forma differenziale.

Proposizione 3.14. *Se $\omega \in \Omega^r(M)$ è una r-forma differenziale sulla varietà M, allora*

$$(\mathrm{d}\omega)(X_0, \dots, X_r) = \frac{1}{r+1} \sum_{i=0}^{r} (-1)^i \, X_i(\omega(X_0, \dots, \hat{X}_i, \dots, X_r))$$
$$+ \frac{1}{r+1} \sum_{0 \le i < j \le r} (-1)^{i+j} \, \omega([X_i, X_j], X_0, \dots, \hat{X}_i, \dots, \hat{X}_j, \dots, X_r),$$

dove il simbolo ˆ soprassegna i termini omessi.

Dimostrazione. Riportata in [9], Prop. 3.11., p. 36. □

In particolare, se $\omega \in \Omega^1(M)$, la formula precedente porge

$$\mathrm{d}\omega(X, Y) = \frac{1}{2} \left[X(\omega(Y)) - Y(\omega(X)) - \omega([X, Y]) \right]. \tag{3.8}$$

Sia $\pi : P \to M$ un fibrato principale e sia $\vartheta : G \to GL(V)$ una rappresentazione del gruppo di Lie G in un dato spazio vettoriale V di dimensione finita.

Definizione 3.15. Una *forma pseudotensoriale* di grado r su P di tipo (ϑ, V) è una r-forma $\phi \in \Omega^r(P; V)$ su P a valori in V tale che

$$\varrho_g^* \phi = \vartheta(g) \, \phi,$$

per ogni $g \in G$. Una tale ϕ è poi detta *forma tensoriale* (o *orizzontale*) se $\phi(X_1, \dots, X_r) = 0$ se almeno uno dei vettori tangenti $X_i \in T_pP$ è verticale.

Definizione 3.16. Sia $HP = \{H_pP \mid p \in P\}$ una connessione principale sul fibrato $\pi : P \to M$ e indichiamo con $\mathrm{h} : TP \to HP$ la proiezione orizzontale (ossia $\mathrm{h}_p : T_pP \to H_pP$ è per ogni $p \in P$ la proiezione su H_pP parallelamente a V_pP). Se ϕ è una r-forma pseudotensoriale si dice che la sua *parte orizzontale* è la r-forma ϕ^{h} definita ponendo $\phi^{\mathrm{h}}(X_1, \dots, X_r) := \phi(\mathrm{h}X_1, \dots, \mathrm{h}X_r)$, per ogni $X_1, \dots, X_r \in T_pP$.

Proposizione 3.17. *Sia ϕ una r-forma pseudotensoriale su P di tipo (ϑ, V). Valgono le seguenti proprietà:*

(i) *la forma ϕ^{h} è una r-forma tensoriale di tipo (ϑ, V);*

(ii) $\mathrm{d}\phi$ *è una $(r+1)$-forma pseudotensoriale di tipo (ϑ, V);*

(iii) *la $(r+1)$-forma $D\phi$, definita ponendo $D\phi := (\mathrm{d}\phi)^{\mathrm{h}}$ è una $(r+1)$-forma tensoriale di tipo (ϑ, V).*

Dimostrazione. (i) La proprietà (3.5) fa sì che per ogni $g \in G$ valga $\mathrm{d}\varrho_g \circ \mathrm{h} = \mathrm{h} \circ \mathrm{d}\varrho_g$. Allora per ogni $X_1, \dots, X_r \in T_pP$ si ha

$$\begin{aligned}
(\varrho_g^* \phi^{\mathrm{h}})_p(X_1, \dots, X_r) &= \phi^{\mathrm{h}}_{\varrho_g(p)}(\mathrm{d}(\varrho_g)_p(X_1), \dots, \mathrm{d}(\varrho_g)_p(X_r)) \\
&= \phi_{\varrho_g(p)}(\mathrm{hd}(\varrho_g)_p(X_1), \dots, \mathrm{hd}(\varrho_g)_p(X_r)) \\
&= \phi_{\varrho_g(p)}(\mathrm{d}(\varrho_g)_p(\mathrm{h}X_1), \dots, \mathrm{d}(\varrho_g)_p(\mathrm{h}X_r)) \\
&= (\varrho_g^* \phi)_p(\mathrm{h}X_1, \dots, \mathrm{h}X_r) \\
&= \vartheta(g)\, \phi_p(\mathrm{h}X_1, \dots, \mathrm{h}X_r) \\
&= \vartheta(g)\, ((\phi^{\mathrm{h}})_p(X_1, \dots, X_r)),
\end{aligned}$$

ovvero ϕ^{h} è pseudotensoriale di tipo (ϑ, V). Per la tensorialità basta osservare che se esiste $i \in \{1, \dots, r\}$ tale che X_i sia verticale, allora $\mathrm{h}X_i = 0$ e di conseguenza $\phi^{\mathrm{h}}(X_1, \dots, X_r) = 0$.

(ii) Dal momento che pull-back e differenziale esterno commutano si ha $(\varrho_g^* \mathrm{d}\phi) = \mathrm{d}(\varrho_g^* \phi) = \mathrm{d}(\vartheta(g)\, \phi) = \vartheta(g)\, \mathrm{d}\phi$ e si conclude che $\mathrm{d}\phi$ è pseudotensoriale di tipo (ϑ, V).

(iii) Essendo ϕ pseudotensoriale di tipo (ϑ, V), tale è $\mathrm{d}\phi$ per (ii), mentre da (i) segue la tesi. □

Nel caso in cui G sia un gruppo di Lie e ϑ sia la rappresentazione aggiunta sulla sua algebra di Lie $\mathfrak{g}$, cioè $\vartheta = \mathrm{Ad} : G \to \mathrm{GL}(\mathfrak{g})$ definita da $g \mapsto \mathrm{Ad}(g)$, una forma di tipo $(\vartheta, \mathfrak{g})$ è detta di tipo $\mathrm{Ad}G$. Dalla (3.7) segue quindi che la 1-forma di connessione ω è una forma pseudotensoriale di tipo $\mathrm{Ad}G$; inoltre, per la Proposizione precedente, la forma $D\omega = (\mathrm{d}\omega)^{\mathrm{h}}$ è una 2-forma tensoriale ancora di tipo $\mathrm{Ad}G$.

Definizione 3.18. Sia ϕ una forma (pseudo)tensoriale. La forma $D\phi$ introdotta nella Proposizione 3.17 è detta la *derivata covariante esterna* di ϕ, mentre l'operatore D è detto *derivazione covariante esterna*.

Definizione 3.19. Sia ω la 1-forma di connessione definita sul G-fibrato principale $\pi : P \to M$, G essendo un gruppo di Lie di algebra di Lie $\mathfrak{g}$. La *forma di curvatura* Ω di ω è la 2-forma tensoriale di tipo $\mathrm{Ad}G$ su P e a valori in $\mathfrak{g}$ definita come la derivata covariante esterna di ω, ossia

$$\Omega = D\omega.$$

Il seguente Teorema fornisce la cosiddetta *equazione di struttura* che permette una formula esplicita della forma di curvatura.

Teorema 3.20 (Equazione di struttura[10]). *Sia ω la 1-forma di connessione e sia Ω la sua forma di curvatura. Allora per $p \in P$ e per ogni $X, Y \in T_pP$*

$$d\omega(X,Y) = -\frac{1}{2}\,[\omega(X), \omega(Y)] + \Omega(X,Y). \tag{3.9}$$

Dimostrazione. Stante la decomposizione $T_pP = H_pP \oplus V_pP$ in ogni $p \in P$ ogni vettore tangente a P è scritto in modo unico come somma delle sue componenti verticale e orizzontale; dimostriamo l'asserto nei tre casi seguenti.

(i) *X e Y orizzontali.* In tal caso la definizione di ω fa sì che $\omega(X)$ e $\omega(Y)$ siano nulli, pertanto $\Omega(X,Y) = D\omega(X,Y) = (d\omega)^{\mathrm{h}}(X,Y) = d\omega(\mathrm{h}X, \mathrm{h}Y) = d\omega(X,Y)$.

(ii) *X e Y verticali.* In particolare si può supporre che $X = \xi^*$ e $Y = \eta^*$ siano i campi vettoriali fondamentali corrispondenti a ξ ed η, per opportuni $\xi, \eta \in \mathfrak{g}$. Il primo membro è per (3.8)

$$d\omega(\xi^*, \eta^*) = \frac{1}{2}\left[\xi^*(\omega(\eta^*)) - \eta^*(\omega(\xi^*)) - \omega([\xi^*, \eta^*])\right].$$

L'Osservazione 3.12 tuttavia garantisce che $\omega(\xi^*)$ e $\omega(\eta^*)$ sono costanti, e di conseguenza le derivate $\xi^*(\omega(\eta^*))$ e $\eta^*(\omega(\xi^*))$ sono nulle; essendo poi $\omega([\xi^*, \eta^*]) = \omega([\xi, \eta]^*) = [\xi, \eta]$ (cfr. Osservazione 3.7), segue dunque che

$$d\omega(\xi^*, \eta^*) = -\frac{1}{2}\,[\xi, \eta] = -\frac{1}{2}\,[\omega(\xi^*), \omega(\eta^*)].$$

Al secondo membro invece si ha $\Omega(\xi^*, \eta^*) = 0$ per la tensorialità della forma di curvatura.

(iii) *X orizzontale e Y verticale.* Denotiamo sempre con X l'estensione di X ad un campo orizzontale su P e $Y = \eta^*$ sia il campo vettoriale fondamentale di η per un certo $\eta \in \mathfrak{g}$ (e quindi $\omega(\eta^*)$ costante). Allora $\omega(X) = 0$ perché X è orizzontale e $\Omega(X, \eta^*) = 0$ perché η^* è verticale: il membro a destra dell'equazione è quindi nullo; resta da dimostrare che si annulla anche il membro a sinistra. Si ha:

$$\begin{aligned} d\omega(X, \eta^*) &= \frac{1}{2}\,\left[X(\omega(\eta^*)) - \eta^*(\omega(X)) - \omega([X, \eta^*])\right] \\ &= -\frac{1}{2}\,\omega([X, \eta^*]). \end{aligned}$$

La dimostrazione è conclusa se si prova che $[X, \eta^*]$ è orizzontale; questo in effetti segue dalla definizione di derivata di Lie: se il campo

10 Per semplicità di notazione l'equazione di struttura, detta anche *equazione di Cartan*, è spesso scritta nel modo seguente

$$d\omega = -\frac{1}{2}[\omega, \omega] + \Omega,$$

dove con $[\omega, \omega]$ si intende $[\omega, \omega](X,Y) = [\omega(X), \omega(Y)]$.

η^* è generato dal vettore η, allora η^* è tangente alla curva $\varrho_{\exp(-t\eta)}$, diffeomorfismo di inversa $\varrho_{\exp(t\eta)}$. Di conseguenza

$$[X, \eta^*] = -[\eta^*, X] = -\mathcal{L}_{\eta^*} X = -\lim_{t \to 0} \frac{\mathrm{d}(\varrho_{\exp(t\eta)})(X) - X}{t},$$

essendo $\mathrm{d}(\varrho_{\exp(t\eta)})(X)$ ancora orizzontale, anche la differenza a numeratore resta tale e quindi anche $[X, \eta^*]$. Pertanto si conclude

$$\mathrm{d}\omega(X, \eta^*) = -\frac{1}{2}\,\omega([X, \eta^*]) = 0.$$

Il carattere antisimmetrico e bilineare di entrambi i membri dell'equazione (3.9) permette di estendere la dimostrazione al caso di X e Y generici. □

In particolare si ha quindi la formula esplicita della forma di curvatura:

$$\Omega(X, Y) = \mathrm{d}\omega(X, Y) + \frac{1}{2}\,[\omega(X), \omega(Y)].$$

Dall'equazione di struttura segue anche che

Corollario 3.21. *Se X e Y sono campi di vettori orizzontali su P, allora*

$$\Omega(X, Y) = -\frac{1}{2}\,\omega([X, Y]).$$

Dimostrazione. Siamo nel caso (i) del Teorema precedente:

$$\begin{aligned}\Omega(X, Y) = \mathrm{d}\omega(X, Y) &= \frac{1}{2}\left[X(\omega(Y)) - Y(\omega(X)) - \omega([X, Y])\right] \\ &= -\frac{1}{2}\,\omega([X, Y]),\end{aligned}$$

come volevasi dimostrare. □

Definendo in questo modo la forma di curvatura è possibile recuperare il significato dato in partenza alla curvatura generale. È chiaro infatti che, anche nel caso della connessione su un fibrato principale, se il sottofibrato orizzontale è una distribuzione involutiva — e quindi presi X, Y orizzontali anche $[X, Y]$ lo è — la forma Ω si annulla. Tale quantità, pertanto, dà informazioni sulla natura di HP misurando, in un certo senso, di quanto la distribuzione orizzontale si discosti dall'essere involutiva.

3.3.2 *Descrizione locale e identità di Bianchi*

Concludiamo la trattazione con il calcolo in coordinate locali della forma Ω e con un risultato classico.

Sia $\{v_1, \dots, v_n\}$ una base dell'algebra di Lie $\mathfrak{g}$ e indichiamo con $c^i_{jk} \in \mathbb{R}$ le costanti di struttura, ovvero $[v_j, v_k] = c^i_{jk} v_i$; siano poi $\omega =$

$\omega^i v_i$ e $\Omega = \Omega^i v_i$ per opportune $\omega^i \in \Omega^1(P)$, $\Omega^i \in \Omega^2(P)$. Si avrà allora

$$\begin{aligned} d\omega(X,Y) &= d\omega^i(X,Y)v_i, \\ [\omega(X),\omega(Y)] &= [\omega^j(X)v_j, \omega^k(Y)v_k] = c^i_{jk}\,\omega^j(X)\omega^k(Y)v_i. \end{aligned}$$

Essendo poi per definizione

$$(\omega^j \wedge \omega^k)(X,Y) = \frac{1}{2}\left[\omega^j(X)\omega^k(Y) - \omega^k(X)\omega^j(Y)\right],$$

si ottiene

$$\begin{aligned} c^i_{jk}\,\omega^j \wedge \omega^k(X,Y) &= \frac{1}{2}\left[c^i_{jk}\,\omega^j(X)\omega^k(Y) - c^i_{jk}\,\omega^k(X)\omega^j(Y)\right] \\ &= \frac{1}{2}\left[c^i_{jk}\,\omega^j(X)\omega^k(Y) + c^i_{kj}\,\omega^k(X)\omega^j(Y)\right] \\ &= c^i_{jk}\,\omega^j(X)\omega^k(Y). \end{aligned}$$

Sommando poi la corrispondente componente di Ω, l'equazione di struttura si riscrive come segue, per ogni $i = 1,\dots,r$:

$$d\omega^i = -\frac{1}{2}\,c^i_{jk}\,\omega^j \wedge \omega^k + \Omega^i. \tag{3.10}$$

Teorema 3.22 (Identità di Bianchi)**.** *Sia Ω la forma di curvatura di ω. Allora si ha*

$$D\Omega = 0. \tag{3.11}$$

Dimostrazione. Essendo la forma Ω di tipo (pseudo)tensoriale, per la Proposizione 3.17 la 3-forma $D\Omega$ è orizzontale e di conseguenza $D\Omega(X,Y,Z) = 0$ non appena uno dei tre campi presi in argomento è verticale; resta dunque da provare la tesi nel solo caso di tre campi X, Y, Z orizzontali. Applicando il differenziale esterno alle componenti (3.10) dell'equazione di struttura si trova

$$\begin{aligned} 0 = d(d\omega)^i &= -\frac{1}{2}\,c^i_{jk}\,d(\omega^j \wedge \omega^k) + d\Omega^i \\ &= -\frac{1}{2}\,c^i_{jk}\,d\omega^j \wedge \omega^k + \frac{1}{2}\,c^i_{jk}\,\omega^j \wedge d\omega^k + d\Omega^i; \end{aligned}$$

dal momento che le componenti ω^i sono nulle su ciascuno dei tre campi i primi due addendi si annullano e resta solo il termine $d\Omega^i(X, Y, Z) = 0$, per ogni $i = 1,\dots,r$. Se X, Y, Z sono orizzontali si ha pertanto $D\Omega(X,Y,Z) = (d\Omega)^h(X,Y,Z) = d\Omega(X,Y,Z) = 0$. □

3.4 FIBRATI VETTORIALI ASSOCIATI

Per terminare vediamo, come preannunciato, come associare ad un fibrato principale un fibrato generale, estendendo l'azione del gruppo ad un'azione che coinvolge, oltre alla fibra tipica, anche un'altra varietà. Dopo aver mostrato la connessione che resta definita sul fibrato associato a partire dalla connessione (eventualmente) presente sul fibrato principale ci concentreremo sul caso dei fibrati vettoriali, vedendo inoltre come per questi resti naturalmente definito il proprio fibrato (principale) dei riferimenti. Per concludere, chiariremo, nel caso di un fibrato vettoriale, la relazione tra la 2-forma di curvatura e il tensore di Riemann.

3.4.1 *Fibrati associati*

Sia $\pi : P \to M$ un fibrato principale di gruppo di struttura il gruppo di Lie G e sia F una varietà su cui G agisce da sinistra con regolarità C^∞; denoteremo l'azione come la moltiplicazione a sinistra:

$$\begin{aligned} \vartheta : G \times F &\to F \\ (g, f) &\mapsto \vartheta(g, f) = gf \end{aligned}$$

e al solito indichiamo, per ogni $g \in G$, il diffeomorfismo di F in sé associato $\vartheta_g : F \to F$ definito da $\vartheta_g(f) = \vartheta(g, f) = gf$ per ogni $f \in F$. Si consideri ora l'azione Θ di G sul prodotto $P \times F$ che, per ogni $g \in G$, risulta la combinazione delle due azioni di G su P e F rispettivamente: G agirà con la sua azione sul fibrato principale P per quanto riguarda il primo fattore e con la ϑ_g appena definita su F, ovvero

$$\begin{aligned} \Theta_g : P \times F &\to P \times F \\ (p, f) &\mapsto \Theta_g(p, f) = (\varrho_g(p), \vartheta_g(f)). \end{aligned}$$

Denotiamo con $P \times_G F := (P \times F)/G$ il quoziente del prodotto $P \times F$ sullo spazio delle orbite dell'azione Θ e sia $\tilde{\pi}$ la proiezione canonica su tale spazio, ossia

$$\begin{aligned} \tilde{\pi} : P \times F &\to P \times_G F \\ (p, f) &\mapsto \tilde{\pi}(p, f) := [p, f], \end{aligned}$$

essendo $[p, f] = \{(\varrho_g(p), \vartheta_g(f)) \,|\, g \in G\} = \{(pg^{-1}, gf) \,|\, g \in G\}$ l'orbita di (p, f) sotto l'azione Θ di G. Si osservi che Θ è un'azione libera: per ogni $g \in G$ si ha infatti

$$\Theta_g(p, f) = (\varrho_g(p), \vartheta_g(f)) = (p, f) \quad \Leftrightarrow \quad \begin{cases} \varrho_g(p) = p \\ \vartheta_g(f) = f \end{cases} \quad \Leftrightarrow \quad g = e,$$

essendo libera l'azione ϱ_g su P.

A questo punto, denotando con E lo spazio $P \times_G F$ per semplicità di notazione, si può considerare la proiezione sulla varietà di base M del fibrato principale di partenza, così definita:

$$\begin{aligned} \pi_E : E &\to M \\ [p, f] &\mapsto \pi_E([p, f]) := \pi(p). \end{aligned}$$

La definizione di π_E è ben posta: se $(\varrho_g(p), \vartheta_g(f)) \in [p, f]$ è un altro rappresentante per $[p, f]$ vale

$$\pi_E([\varrho_g(p), \vartheta_g(f)]) = \pi(\varrho_g(p)) = \pi(p) = \pi_E([p, f]),$$

dal momento che π proietta sullo stesso punto sia $p \in M$ (ossia l'orbita) sia $\varrho_g(p)$ per quanto detto all'Osservazione 3.4. Verifichiamo, allora, che $\pi_E : E \to M$ è un fibrato: definita la proiezione π_E resta da vedere che è possibile trivializzare localmente anche E. Se $\{U_\alpha\}_\alpha$ è il ricoprimento aperto di M che trivializza il fibrato principale $\pi : P \to M$, si ha che per ogni $x \in M$ esiste almeno un aperto $U_\alpha \subset M$ ed esiste un diffeomorfismo χ_α che porge l'identificazione $P|_{U_\alpha} \cong U_\alpha \times G$. Di conseguenza, posto $E|_{U_\alpha} = (P \times_G F)|_{U_\alpha} = \pi_E^{-1}(U_\alpha)$, si ha

$$E|_{U_\alpha} = \pi^{-1}(U_\alpha) \times_G F \cong (U_\alpha \times G) \times_G F = (U_\alpha \times G \times F)/G \cong U_\alpha \times F,$$

dove l'ultimo diffeomorfismo $(U_\alpha \times G \times F)/G \to U_\alpha \times F$ è definito dalla posizione $[x, g, f] \mapsto (x, \vartheta_g(f)) = (x, gf)$ e ha inversa data, per ogni $(x, f) \in U_\alpha \times F$, da $(x, f) \mapsto [x, e, f]$. Segue quindi che il ricoprimento $\{U_\alpha\}_\alpha$ trivializza anche E, che la fibra tipica $E_x \cong \{x\} \times F$ è diffeomorfa a F e che E è una varietà.

Definizione 3.23. Siano G un gruppo di Lie e F una varietà; dato il fibrato principale $\pi : P \to M$ con gruppo di struttura il gruppo di Lie G, il fibrato $\pi_E : E = P \times_G F \to M$ della costruzione precedente, di fibra tipica F, gruppo di struttura G e varietà di base M, è detto il *fibrato* (generale) *associato* al fibrato principale tramite l'azione di G su F.

3.4.2 *Connessione sul fibrato associato*

Se il fibrato principale $\pi : P \to M$ è dotato di una connessione $HP = \{H_pP \mid p \in P\}$, questa induce tramite la proiezione sullo spazio delle orbite $\tilde{\pi} : P \times F \to E$ una connessione su E nel modo di seguito illustrato.

Sia $e \in E$ e sia $(p, f) \in P \times F$ tale che $e = [p, f]$; per ogni $f \in F$ si consideri poi la mappa

$$\begin{aligned} \beta_f : P &\to E \\ p &\mapsto \beta_f(p) := [p, f] \end{aligned}$$

di differenziale $\mathrm{d}(\beta_f)_p : T_pP \to T_eE$. Definiamo il sottospazio orizzontale $H_eE \subset T_eE$ in $e \in E$ ponendo

$$H_eE := \mathrm{d}(\beta_f)(H_pP).$$

La definizione è ben posta. Indipendentemente dalla scelta di $(p, f) \in P \times F$, per ogni $g \in G$ e $f \in F$, preso $p \in P$ si ha infatti

$$\beta_f(p) = [p, f] = \{(\varrho_g(p), \vartheta_g(f)) \mid g \in G\} = \beta_{\vartheta_g(f)}(\varrho_g(p)),$$

ossia $\beta_f = \beta_{\vartheta_g(f)} \circ \varrho_g$ e quindi $\beta_{\vartheta_g(f)} = \beta_f \circ \varrho_{g^{-1}}$. Ma allora scegliendo un altro elemento $(\varrho_g(p), \vartheta_g(f)) \in [p, f]$ dall'orbita di (p, f) si ottiene

$$\begin{aligned} \mathrm{d}(\beta_{\vartheta_g(f)})_{\varrho_g(p)}(H_{\varrho_g(p)}P) &= \mathrm{d}(\beta_f \circ \varrho_{g^{-1}})_{\varrho_g(p)}(\mathrm{d}(\varrho_g)_p(H_pP)) \\ &= \mathrm{d}(\beta_f)_p \circ \mathrm{d}(\varrho_{g^{-1}})_{\varrho_g(p)} \circ \mathrm{d}(\varrho_g)_p(H_pP) \\ &= \mathrm{d}(\beta_f)_p(H_pP), \end{aligned}$$

avendo usato nella seconda uguaglianza la condizione di invarianza (3.5) della connessione sul fibrato principale. Si può mostrare[11] che HE, definita come la collezione dei sottospazi H_eE al variare di $e \in E$, costituisce effettivamente una connessione di Ehresmann su $E = P \times_G F$.

3.4.3 *Fibrati vettoriali associati*

Si può ripercorrere la costruzione fatta in 3.4.1 e sostituire la generica varietà F con uno spazio vettoriale V su un campo K, richiedendo in più che l'azione sinistra su V del gruppo di Lie G, gruppo di struttura del fibrato principale $\pi : P \to M$ di partenza, sia lineare. In altri termini richiediamo che la mappa (azione) $\vartheta : G \to \mathrm{GL}_r(V)$ data da $g \mapsto \vartheta_g$ sia una rappresentazione di G in V. Il fibrato $E = P \times_G V$ che ne deriva è un fibrato di gruppo di struttura G, con varietà di base M e fibra tipica V.

Le operazioni di spazio vettoriale sulla fibra tipica vengono definite come segue. Per quanto riguarda la somma, se $x \in M$, presi due elementi $w_1, w_2 \in E_x$ della fibra in x si può scegliere $p \in P_x$ per cui sono determinati $v_1, v_2 \in V$ tali che $w_1 = \tilde{\pi}(p, v_1) = [p, v_1]$ e $w_2 = \tilde{\pi}(p, v_2) = [p, v_2]$. In questo caso si può definire la somma di w_1 e w_2 ponendo

$$w_1 + w_2 := \tilde{\pi}(p, v_1 + v_2) = [p, v_1 + v_2].$$

La definizione è ben posta, grazie alla linearità dell'azione di G su V: se infatti $p' \in P_x$ è tale che, per $v_1', v_2' \in V$, sia $w_1 = \tilde{\pi}(p', v_1') = [p', v_1']$ e $w_2 = \tilde{\pi}(p', v_2') = [p', v_2']$, allora si trova che

$$\begin{aligned} [p, v_1 + v_2] &= \{(\varrho_g(p), \vartheta_g(v_1 + v_2)) \mid g \in G\} \\ &= \{(\varrho_g(p), \vartheta_g(v_1)) \mid g \in G\} + \{(\varrho_g(p), \vartheta_g(v_2)) \mid g \in G\} \\ &= [p, v_1] + [p, v_2] \\ &= [p', v_1'] + [p', v_2'] \\ &= \{(\varrho_g(p'), \vartheta_g(v_1')) \mid g \in G\} + \{(\varrho_g(p'), \vartheta_g(v_2')) \mid g \in G\} \\ &= \{(\varrho_g(p'), \vartheta_g(v_1' + v_2')) \mid g \in G\} \\ &= [p', v_1' + v_2']. \end{aligned}$$

11 Per le verifiche rimandiamo alle bibliografie di [8] e [14].

Per quanto riguarda il prodotto per scalare, se $x \in M$, dato $w \in E_x$, si può scegliere $p \in P_x$ tale che per $v \in V$ sia $w = \tilde{\pi}(p, v) = [p, v]$. Il prodotto di w per uno scalare $\lambda \in K$ è dato dalla posizione

$$\lambda w := \tilde{\pi}(p, \lambda v) = [p, \lambda v];$$

anche in questo caso si verifica la buona definizione dell'operazione: se $p' \in P_x$ è tale che per $v' \in V$ si abbia $w = \tilde{\pi}(p', v') = [p', v']$, allora

$$\begin{aligned}
[p, \lambda v] &= \{(\varrho_g(p), \vartheta_g(\lambda v)) \mid g \in G\} \\
&= \{\lambda(\varrho_g(p), \vartheta_g(v)) \mid g \in G\} \\
&= \{\lambda(\varrho_g(p'), \vartheta_g(v')) \mid g \in G\} \\
&= \{(\varrho_g(p'), \vartheta_g(\lambda v')) \mid g \in G\} = [p', \lambda v'].
\end{aligned}$$

Definizione 3.24. Il fibrato $P \times_G V$ così ottenuto è un fibrato vettoriale detto il *fibrato vettoriale associato* al fibrato principale tramite l'azione di G su V.

Il fibrato dei riferimenti di un fibrato vettoriale

Quanto si vuole fare ora è far vedere come ad un fibrato vettoriale sia naturalmente associato un particolare fibrato principale.

Sia $\pi : E \to M$ un fibrato vettoriale (reale) di rango r sulla varietà M e, preso $p \in M$, si considerino le basi della fibra E_p, che è un $\mathbb{R}$-spazio vettoriale di dimensione r.

Osservazione 3.25. Ricordiamo che le basi di E_p possono essere messe in biiezione con gli isomorfismi di $\mathbb{R}^r$ in E_p. Detta $\mathcal{E}$ la base canonica di $\mathbb{R}^r$, una base $\mathcal{B}$ è infatti univocamente determinata dai vettori immagine — tramite un opportuno isomorfismo $\lambda_{\mathcal{E}\mathcal{B}} : \mathbb{R}^r \to E_p$ — dei vettori di $\mathcal{E}$, i quali costituiscono una base per E_p. In altre parole, fissata la base canonica per $\mathbb{R}^r$, ad ogni base $\mathcal{B}$ di E_p è associato l'isomorfismo $\lambda_{\mathcal{E}\mathcal{B}} : \mathbb{R}^r \to E_p$ che esprime il cambiamento di base da $\mathcal{E}$ a $\mathcal{B}$.

Indicato con $\mathcal{F}_p$ l'insieme di tutte le basi della fibra E_p, si può facilmente vedere come il gruppo $\mathrm{GL}_r(\mathbb{R})$ vi agisca naturalmente da destra per composizione: se infatti $\lambda \in \mathcal{F}_p$ è rappresentato dalla matrice Λ e α è l'automorfismo di $\mathbb{R}^r$ rappresentato dalla matrice $A \in \mathrm{GL}_r(\mathbb{R})$ si avrà

$$\begin{aligned}
\varrho : \mathcal{F}_p \times \mathrm{GL}_r(\mathbb{R}) &\to \mathcal{F}_p \\
(\lambda, A) &\mapsto \varrho(\lambda, A) = \lambda \circ \alpha = \Lambda A.
\end{aligned} \tag{3.12}$$

Tale azione è libera; la transitività segue dal fatto che fissata una base $\mathcal{B}$ di E_p esiste un'unica matrice $A \in \mathrm{GL}_r(\mathbb{R})$ che permette il cambiamento di base.

Definiamo quindi l'insieme $\mathcal{F}(E)$ come l'unione disgiunta di tutti gli insiemi $\mathcal{F}_p$, o meglio delle coppie $(p, \mathcal{F}_p)$

$$\mathcal{F}(E) := \bigsqcup_{p \in M} \{(p, \mathcal{B}) \mid \mathcal{B} \in \mathcal{F}_p\} = \bigsqcup_{p \in M} \{(p, \lambda_{\mathcal{E}\mathcal{B}}) \mid \lambda_{\mathcal{E}\mathcal{B}} : \mathbb{R}^r \xrightarrow{\sim} E_p\}.$$

$\mathcal{F}(E)$ è naturalmente dotato della proiezione $\tilde{\pi}$ su M, definita canonicamente da $(p,\lambda) \mapsto \tilde{\pi}(p,\lambda) = p$: il seguito è dedicato a verificare che $\tilde{\pi} : \mathcal{F}(E) \to M$ è un fibrato principale con gruppo di struttura $\mathrm{GL}_r(\mathbb{R})$, gruppo di Lie per quanto visto nell'Esempio 1.4. Anzitutto $\mathrm{GL}_r(\mathbb{R})$ agisce su $\mathcal{F}(E)$ esercitando la propria azione $\tilde{\varrho}$ sulle singole fibre $\mathcal{F}_p$ come in (3.12):

$$\begin{aligned}\tilde{\varrho} : \mathcal{F}(E) \times \mathrm{GL}_r(\mathbb{R}) &\to \mathcal{F}(E)\\ ((p,\lambda),A) &\mapsto \tilde{\varrho}((p,\lambda),A) = (p,\varrho(\lambda,A)) = (p,\Lambda A);\end{aligned}$$

l'azione è libera e inoltre le orbite coincidono con le fibre (l'azione di $\mathrm{GL}_r(\mathbb{R})$ in sé — moltiplicazione a destra — è transitiva). Resta da vedere che anche $\mathcal{F}(E)$ si trivializza localmente. Sia dunque $\{(U_\alpha,\chi_\alpha)\}_\alpha$ una trivializzazione locale di E: $\{U_\alpha\}_\alpha$ è ricoprimento aperto di M, il diffeomorfismo χ_α porge l'identificazione $E|_{U_\alpha} = \pi^{-1}(U_\alpha) \cong U_\alpha \times \mathbb{R}^r$ per ogni α e la sua restrizione alla fibra E_p, $\chi_{\alpha,p} : E_p \to \{p\} \times \mathbb{R}^r \cong \mathbb{R}^r$, è isomorfismo di spazi vettoriali per ogni $p \in M$. Si può definire la mappa

$$\begin{aligned}\tilde{\chi}_\alpha : \mathcal{F}(E)|_{U_\alpha} = \tilde{\pi}^{-1}(U_\alpha) &\to U_\alpha \times \mathrm{GL}_r(\mathbb{R})\\ (p,\lambda) &\mapsto \tilde{\chi}_\alpha(p,\lambda) := (p,\chi_{\alpha,p}\circ\lambda),\end{aligned}$$

essendo $\chi_{\alpha,p}\circ\lambda : \mathbb{R}^r \to \mathbb{R}^r$ isomorfismo. La mappa $\tilde{\chi}_\alpha$ è invertibile e differenziabile, con inversa differenziabile, quindi è un diffeomorfismo per ogni α: $\{(\tilde{\pi}^{-1}(U_\alpha),\tilde{\chi}_\alpha)\}_\alpha$ è pertanto una trivializzazione locale per $\mathcal{F}(E)$ che rende, per ogni α, il seguente diagramma commutativo:

$$\begin{tikzcd} \mathcal{F}(E)|_{U_\alpha} \arrow[r, "\tilde{\chi}_\alpha"] \arrow[d, "\tilde{\pi}"'] & U_\alpha \times \mathrm{GL}_r(\mathbb{R}) \arrow[dl, "\mathrm{p}_1"] \\ U_\alpha & \end{tikzcd} . \tag{3.13}$$

Siano $p \in M$ e $U \subset M$ è un suo intorno aperto e sia $f \in \mathcal{F}(E)|_U$ tale che $f = (p,\lambda)$ per un certo λ. Nelle notazioni della Definizione 3.2 si ha $\tilde{\chi}(f) = (\tilde{\pi}(f),\phi(f)) = (p,\chi_p\circ\lambda)$, con $\phi : \mathcal{F}(E) \to \mathrm{GL}_r(\mathbb{R})$ funzione differenziabile: anche qui è verificata la compatibilità di ϕ con l'azione del gruppo:

$$\begin{aligned}\phi(\tilde{\varrho}_A(f)) = \phi(\tilde{\varrho}_A(p,\lambda)) &= \phi(p,\varrho(\lambda,A)) = \phi(p,\lambda\circ\alpha)\\ &= (p,\chi_p\circ\lambda\circ\alpha) = (p,\varrho(\chi_p\circ\lambda,A)) = \tilde{\varrho}_A(p,\chi_p\circ\lambda)\\ &= \tilde{\varrho}_A(\phi(p,\lambda)) = \tilde{\varrho}_A(\phi(f)),\end{aligned}$$

essendo $\tilde{\varrho}_A$ il diffeomorfismo di $\mathcal{F}(E)$ in sé dato dall'azione di $A \in \mathrm{GL}_r(\mathbb{R})$ (ossia $\tilde{\varrho}_A(f) = \tilde{\varrho}((p,\lambda),A)$). Com'è già noto, dalla trivializzazione locale (3.13) si ha che $\mathcal{F}(E)/\mathrm{GL}_r(\mathbb{R}) \cong M$ e che $\tilde{\pi}$ è la proiezione sullo spazio delle orbite, pertanto segue anche il fatto che ogni fibra è diffeomorfa a $\mathrm{GL}_r(\mathbb{R})$, sebbene non in modo canonico. Si può pertanto dare la seguente

Definizione 3.26. Il $\mathrm{GL}_r(\mathbb{R})$-fibrato principale $\tilde{\pi} : \mathcal{F}(E) \to M$ costruito sopra è detto il *fibrato dei riferimenti* del fibrato vettoriale $\pi : E \to M$.

3.4.4 *Dalla forma di curvatura al tensore di Riemann*

In quest'ultima parte si vuole mostrare il collegamento tra la forma di curvatura Ω e il tensore di Riemann R, strumento più familiare per parlare di curvatura nel caso del fibrato tangente ad una varietà — esempio più classico di fibrato vettoriale —.

Data una varietà M di dimensione n introduciamo sul suo fibrato tangente TM — fibrato vettoriale di rango n — una connessione (che in tal caso viene detta *lineare*) definendola classicamente come derivata covariante $\nabla : \mathfrak{X}(M) \times \mathfrak{X}(M) \to \mathfrak{X}(M)$ (cfr. (2.3)). Presi $X, Y \in \mathfrak{X}(M)$ e definita la mappa $R_{XY} : \mathfrak{X}(M) \to \mathfrak{X}(M)$ che manda $Z \in \mathfrak{X}(M)$ in $R_{XY}(Z) := \nabla_X \nabla_Y(Z) - \nabla_Y \nabla_X(Z) - \nabla_{[X,Y]}(Z)$ si può facilmente verificare che questa è $C^\infty(M)$-lineare rispetto a X, Y, Z e si può definire il campo tensoriale

$$\begin{aligned} R : \mathfrak{X}(M) \times \mathfrak{X}(M) \times \mathfrak{X}(M) &\to \mathfrak{X}(M) \\ (X, Y, Z) &\mapsto R(X, Y, Z) := R_{XY}(Z). \end{aligned}$$

Il tensore[12] $R \in T^1_3(TM)$ appena definito è detto *tensore di curvatura di Riemann* e la sua espressione in un sistema di coordinate locali $x^1, \ldots, x^n$ su un opportuno aperto $U \subset M$ sarà $R^j_{ilk}\, \mathrm{d}x^i \otimes \mathrm{d}x^l \otimes \mathrm{d}x^k \otimes \partial_j$. Nella connessione lineare introdotta i coefficienti $R^j_{ilk} \in C^\infty(U)$ sono così espressi (per tutti i dettagli, si veda [1], p. 415; Oss. 8.1.6.):

$$R^j_{ilk} = \partial_l \Gamma^j_{ik} - \partial_k \Gamma^j_{il} + \Gamma^h_{il} \Gamma^j_{hk} - \Gamma^h_{il} \Gamma^j_{hk}. \tag{3.14}$$

Oltre che come sottofibrato di TM (definizione alla Ehresmann) e nella forma di derivata covariante, una connessione lineare può essere introdotta anche nella veste di 1-forma di connessione come in (2.4). Il legame tra la definizione come derivata covariante e la definizione come connessione di Ehresmann è stato visto in 2.2.4, mentre la relazione tra la definizione di ∇ e quella di 1-forma di connessione è ben nota: se Γ^k_{ij} sono i coefficienti della connessione (detti *simboli di Christoffel* nel caso di connessione lineare) nella definizione come derivata covariante, allora la forma di connessione è una matrice $\omega = [\omega^j_i]$ in cui le entrate ω^j_i sono 1-forme differenziali definite sulla varietà di base M; un classico esercizio (ad esempio riportato in [1], p. 326) è vedere che tali forme, introdotto un sistema di coordinate locali $x^1, \ldots, x^n$ su un aperto $U \subset M$, si scrivono nella forma

$$\omega^j_i = \Gamma^j_{ik}\, \mathrm{d}x^k, \tag{3.15}$$

12 $R \in \mathrm{Hom}(TM \times TM \times TM, TM) \cong T^*M \otimes T^*M \otimes T^*M \otimes TM = T^1_3(TM)$.

dove i coefficienti $\Gamma^j_{ik} \in C^\infty(U)$ sono esattamente i simboli di Christoffel dedotti dalla definizione di ∇. La 1-forma di connessione ω, per quanto detto prima, può essere vista come una forma differenziale a valori in $\mathrm{M}_n(\mathbb{R})$: per ogni $X \in \mathfrak{X}(M)$, infatti, è $\omega(X) = [\,\omega^j_i(X)\,] \in \mathrm{M}_n(C^\infty(U))$ che, valutata in un punto $p \in M$, restituisce una matrice a coefficienti reali. Fissiamo le definizioni di differenziale esterno e di prodotto esterno di due tali forme ω, η:

$$\begin{aligned} \mathrm{d}\omega = \mathrm{d}[\,\omega^j_i\,] &:= [\,\mathrm{d}\omega^j_i\,], \\ \omega \wedge \eta := [\,(\omega \wedge \eta)^j_i\,] &= [\,\omega^h_i \wedge \eta^j_h\,]. \end{aligned}$$

Rimandiamo a [9], p. 118 per la prova del fatto che, nel caso di una connessione su un fibrato vettoriale, l'equazione di struttura (3.9) si riduce ad essere $\mathrm{d}\omega = -\omega \wedge \omega + \Omega$, da cui l'espressione per la 2-forma di curvatura $\Omega = [\,\Omega^j_i\,]$, anch'essa a valori matriciali:

$$\Omega = \mathrm{d}\omega + \omega \wedge \omega. \tag{3.16}$$

In componenti, la precedente relazione porge $\Omega^j_i = \mathrm{d}\omega^j_i + \omega^h_i \wedge \omega^j_h$, con $\Omega^j_i \in \Omega^2(M)$.

A partire dalla (3.15), dettagliando i termini dell'equazione di struttura per componenti, si trova in particolare che

$$\begin{aligned} \mathrm{d}\omega^j_i &= \left(\partial_l \Gamma^j_{ik}\,\mathrm{d}x^l\right) \wedge \mathrm{d}x^k = \frac{1}{2}\left(\partial_l \Gamma^j_{ik} - \partial_k \Gamma^j_{il}\right) \mathrm{d}x^l \otimes \mathrm{d}x^k, \\ \omega^h_i \wedge \omega^j_h &= \left(\Gamma^h_{il}\,\Gamma^j_{hk}\right) \mathrm{d}x^l \wedge \mathrm{d}x^k = \frac{1}{2}\left(\Gamma^h_{il}\Gamma^j_{hk} - \Gamma^h_{ik}\Gamma^j_{hl}\right) \mathrm{d}x^l \otimes \mathrm{d}x^k, \end{aligned}$$

e quindi

$$\Omega^j_i = \frac{1}{2}\left(\partial_l \Gamma^j_{ik} - \partial_k \Gamma^j_{il} + \Gamma^h_{il}\Gamma^j_{hk} - \Gamma^h_{ik}\Gamma^j_{hl}\right) \mathrm{d}x^l \otimes \mathrm{d}x^k = \Omega^j_{ilk}\,\mathrm{d}x^l \otimes \mathrm{d}x^k.$$

Confrontando questi coefficienti con quelli in (3.14) risulta pertanto chiaro che

$$R^j_{ilk} = 2\,\Omega^j_{ilk}.$$

4 UNA TEORIA DI GAUGE ABELIANA

In questa seconda parte dell'elaborato, composta dal presente Capitolo e dal successivo, si ambienterà in un contesto fisico una fortunata applicazione della teoria dei fibrati e delle connessioni esposta in precedenza: le teorie di gauge. In questo Capitolo, in particolare, si partirà dall'osservare che la lagrangiana di una particella relativistica libera è invariante sotto l'azione globale del gruppo $U_1(\mathbb{C})$; introducendo un fibrato principale con questo gruppo strutturale sulla varietà $\mathbb{R}^4$ — lo spaziotempo — sarà possibile introdurre una derivata covariante (ossia una connessione) che ne salvaguardi la forma anche per un'azione di tipo locale e definirvi, successivamente, una curvatura. In questo modo sarà possibile reinterpretare la forza esercitata dal campo elettromagnetico come la manifestazione fisica di tale curvatura. Precedono la trattazione di questi argomenti dei richiami ad alcuni elementi irrinunciabili di Elettromagnetismo e di Meccanica analitica; chiude il Capitolo la deduzione delle equazioni di Maxwell. Nel seguito, per snellire la notazione, si ometterà di indicare la dipendenza dei campi dal punto: si scriverà ψ per intendere $\psi(\mathbf{x})$.

4.1 ALCUNI FATTI PRELIMINARI

Utilizziamo questa Sezione per analizzare brevemente il caso di un fibrato vettoriale di rango uno e per richiamare alcuni elementi indispensabili di Fisica.

4.1.1 *Connessione su un fibrato in rette*

Sia $\pi : L \to M$ un fibrato in rette complesso (ossia un fibrato di rango uno con fibra diffeomorfa a $\mathbb{C}$) su una varietà di base M e si ponga su L una connessione

$$\nabla : \mathfrak{X}(M) \times L(M) \to L(M).$$

Se $U \subset M$ è un aperto, una qualsiasi sezione locale (di classe C^∞) di L sarà $\ell \in L(U)$ tale che $\pi \circ \ell = \mathrm{id}_U$; in particolare se ℓ non si annulla su U, allora costituisce un riferimento locale per L: per ogni

$p \in U$ si ha $L_p = \langle \ell_p \rangle$, pertanto ogni altra sezione $s \in L(U)$ si scriverà nella forma $s = f\ell$ per un'opportuna $f \in C^\infty(U)$ a valori in $\mathbb{C}$. Se poi identifichiamo U con il dominio di una carta (U, ϕ) che introduce sulla varietà M le coordinate locali $x^1, \dots, x^n$, allora la descrizione locale della connessione sarà

$$\nabla_{\partial_i} \ell = \Gamma^1_{i1} \ell = \Gamma_i \ell, \tag{4.1}$$

omettendo i due indici costantemente uguali a 1. Presi $X = X^j \partial_j \in \mathfrak{X}(U)$ e $s = f\ell \in L(U)$ si trova che

$$\begin{aligned} \nabla_X s = \nabla_X (f\ell) &= X(f)\ell + f\,\nabla_{X^j \partial_j} \ell = X(f)\ell + f(X^j \nabla_{\partial_j} \ell) \\ &= X(f)\ell + f X^j\, \Gamma_j\, \ell = (X(f) + X^j\, \Gamma_j f)\ell \end{aligned}$$

e, omettendo di indicare il riferimento locale ℓ, $\nabla_X f = X(f) + X^j\, \Gamma_j f$; se in più $X = \partial_i$, allora

$$\nabla_{\partial_i} f = \partial_i f + \Gamma_i f. \tag{4.2}$$

Inoltre, se ℓ, ℓ' sono due diversi riferimenti locali di L sull'aperto U e uno è espresso in termini dell'altro come $\ell' = h\ell$ (ovvero $\ell = h^{-1}\ell'$) per un'opportuna funzione $h \in C^\infty(U)$ a valori complessi, allora si avrà $\nabla_{\partial_i} \ell = \Gamma_i \ell$ e $\nabla_{\partial_i} \ell' = \Gamma'_i \ell'$; in particolare i coefficienti della connessione trasformano secondo la legge seguente:

$$\begin{aligned} \nabla_{\partial_i} \ell' = \nabla_{\partial_i} (h\ell) &= (\partial_i h)\ell + h\Gamma_i \ell = (\partial_i h + h\Gamma_i)\ell \\ &= (\partial_i h + h\Gamma_i) h^{-1} \ell' = (\Gamma_i + h^{-1} \partial_i h)\ell', \end{aligned}$$

onde si ricava

$$\Gamma'_i = \Gamma_i + h^{-1} \partial_i h.$$

Per quanto detto in 3.4.4, sappiamo che la 1-forma di connessione è una matrice $\omega = [\,\omega^j_i\,]$ le cui entrate ω^j_i sono 1-forme aventi per coefficienti gli stessi di (4.1). In questo caso ω è una matrice di ordine uno, pertanto sarà

$$\omega = \omega^1_1 = \Gamma^1_{i1} \mathrm{d}x^i = \Gamma_i\, \mathrm{d}x^i.$$

Per quanto riguarda la 2-forma di curvatura $\Omega = \Omega_{ij}\, \mathrm{d}x^i \wedge \mathrm{d}x^j$, ricordando la definizione $\Omega = D\omega$, si ottiene

$$\begin{aligned} \Omega = (\partial_j \Gamma_i\, \mathrm{d}x^j) \wedge \mathrm{d}x^i &= (\partial_j \Gamma_i - \partial_i \Gamma_j)\, \mathrm{d}x^j \wedge \mathrm{d}x^i \\ &= (\partial_i \Gamma_j - \partial_j \Gamma_i)\, \mathrm{d}x^i \wedge \mathrm{d}x^j, \end{aligned}$$

da cui

$$\Omega_{ij} = \partial_i \Gamma_j - \partial_j \Gamma_i. \tag{4.3}$$

4.1.2 *Elementi di Elettromagnetismo*

L'ambiente in cui si tratterà il resto del Capitolo è lo spaziotempo (o *cronotopo*) $\mathbb{R}^4$, inteso come varietà (pseudo)riemanniana dotata della metrica di Minkowski $\eta \in T_2(\mathbb{R}^4)$, il tensore (pseudo)metrico $\eta = [\eta_{\mu\nu}] = [\eta^{\mu\nu}]$ così definito:

$$\eta = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & -1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & -1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & -1 \end{bmatrix}.$$

Indicheremo in neretto i punti dello spaziotempo mentre segneremo con le frecce i vettori nello spazio tridimensionale ordinario. Gli indici greci (come in x^μ) varieranno da 0 a 3, indicando le componenti spaziotemporali e in particolare la variabile $x^0 = ct$ — denotando c la velocità della luce[1] — sarà riservata alla componente temporale; gli indici latini (come in x^i) varieranno da 1 a 3 ad indicare le sole variabili spaziali. Sarà quindi $\mathbf{x} = x^\mu = (x^0, \vec{x}) = (ct, x^1, x^2, x^3)$ per ogni $\mathbf{x} \in \mathbb{R}^4$. Indicheremo nel seguito il campo elettrico e il campo magnetico rispettivamente con $\vec{E} = \vec{E}(t, \vec{x}) = (E^1, E^2, E^3)$ e $\vec{B} = \vec{B}(t, \vec{x}) = (B^1, B^2, B^3)$, mentre $\varrho = \varrho(t, \vec{x})$ e $\vec{\jmath} = \vec{\jmath}(t, \vec{x}) = (j^1, j^2, j^3)$ denoteranno rispettivamente la densità di carica e la densità di corrente, entrambe raccolte nel quadrivettore $\mathbf{j} = j^\mu = (c\varrho, \vec{\jmath})$ (detto *quadrivettore densità di corrente* o *quadricorrente*[2]). Ricordiamo brevemente anche le *equazioni di Maxwell* nella loro forma differenziale classica:

$$\vec{\nabla} \cdot \vec{E} = \frac{\varrho}{\varepsilon_0} \tag{4.4a}$$

$$\vec{\nabla} \cdot \vec{B} = 0 \tag{4.4b}$$

$$\vec{\nabla} \times \vec{E} + \frac{\partial \vec{B}}{\partial t} = 0 \tag{4.4c}$$

$$\vec{\nabla} \times \vec{B} - \frac{1}{c^2} \frac{\partial \vec{E}}{\partial t} = \mu_0 \vec{\jmath}. \tag{4.4d}$$

Nel vuoto la (4.4a) e la (4.4d) hanno il secondo membro nullo.

Ricordiamo infine le identità dell'analisi $\vec{\nabla} \times (\vec{\nabla} F) = 0$ e $\vec{\nabla} \cdot (\vec{\nabla} \times \vec{F}) = 0$, ossia il fatto che il rotore di un gradiente e la divergenza di un rotore sono sempre nulli. La (4.4b) suggerisce di utilizzare la seconda identità e di introdurre quindi un campo vettoriale $\vec{A} = \vec{A}(t, \vec{x}) =$

---

1 Ricordiamo che è $c = 1/\sqrt{\varepsilon_0 \mu_0}$, essendo ε_0 la *costante dielettrica del vuoto* e μ_0 la *permeabilità magnetica del vuoto*.

2 La densità di carica ϱ e la densità di corrente $\vec{\jmath}$ presentano unità di misure diverse:

$$[\varrho] = \frac{\mathrm{C}}{\mathrm{m}^3} = \mathrm{A} \times \mathrm{s} \times \mathrm{m}^{-3}, \qquad [\vec{\jmath}] = \mathrm{A} \times \mathrm{m}^{-2};$$

perché siano le componenti dello stesso quadrivettore è quindi necessario moltiplicare la prima per un fattore c in modo da ottenere $[c\varrho] = \mathrm{A} \times \mathrm{m}^{-2}$.

(A^1, A^2, A^3) tale che $\vec{B} = \vec{\nabla} \times \vec{A}$, detto *potenziale vettore* del campo magnetico; in questo modo si ha

$$\vec{B} = \begin{bmatrix} B^1 \\ B^2 \\ B^3 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \partial_2 A^3 - \partial_3 A^2 \\ \partial_3 A^1 - \partial_1 A^3 \\ \partial_1 A^2 - \partial_2 A^1 \end{bmatrix} = \vec{\nabla} \times \vec{A}. \tag{4.5}$$

Sostituendo nella terza delle (4.4) il campo magnetico espresso tramite il potenziale vettore, otteniamo

$$0 = \vec{\nabla} \times \vec{E} + \frac{\partial \vec{B}}{\partial t} = \vec{\nabla} \times \vec{E} + \frac{\partial}{\partial t}(\vec{\nabla} \times \vec{A}) = \vec{\nabla} \times \left(\vec{E} + \frac{\partial \vec{A}}{\partial t} \right),$$

quindi, utilizzando l'altra identità non ancora usata, deve esistere un campo scalare $\phi = \phi(t, \vec{x})$, detto *potenziale scalare* (e che in situazioni statiche si riduce ad essere il potenziale del campo elettrico) tale che la quantità tra parentesi — di cui il rotore è zero — sia il gradiente di ϕ (a meno del segno): in altri termini si ha

$$\vec{E} = \begin{bmatrix} E^1 \\ E^2 \\ E^3 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} -\partial_t A^1 - \partial_1 \phi \\ -\partial_t A^2 - \partial_2 \phi \\ -\partial_t A^3 - \partial_3 \phi \end{bmatrix} = -\frac{\partial \vec{A}}{\partial t} - \vec{\nabla}\phi. \tag{4.6}$$

Riunendo i potenziali scalare e vettore in un unico *quadrivettore potenziale* del campo elettromagnetico scriveremo[3]

$$\mathbf{A} = A^\mu = (A^0, \vec{A}) = \left(\frac{\phi}{c}, \vec{A} \right).$$

Il quadrivettore potenziale non è univocamente determinato se non a meno del quadrigradiente di una funzione scalare $\Lambda : \mathbb{R}^4 \to \mathbb{R}$; più precisamente si ha invarianza — e la verifica è un semplice calcolo — sotto la seguente trasformazione:

$$\left(\frac{\phi}{c}, \vec{A} \right) \to \left(\frac{\phi'}{c}, \vec{A}' \right) = \left(\frac{\phi}{c} - \frac{1}{c}\frac{\partial \Lambda}{\partial t}, \vec{A} + \vec{\nabla}\Lambda \right).$$

Tale invarianza è detta *invarianza di gauge*, dove la *gauge* consiste nella scelta della funzione Λ. Se la scelta ricade su una Λ tale che $\partial_\mu (A')^\mu = 0$, ossia

$$\vec{\nabla} \cdot \vec{A}' = -\frac{1}{c^2}\frac{\partial \phi'}{\partial t}$$

— scelta detta *gauge di Lorenz* —, le equazioni di Maxwell (nel vuoto) diventano

$$\frac{1}{c^2}\frac{\partial^2 \phi'}{\partial t^2} - \Delta\phi' = \Box\, \phi' = 0,$$
$$\frac{1}{c^2}\frac{\partial^2 \vec{A}'}{\partial t^2} - \Delta\vec{A}' = \Box\, \vec{A}' = 0,$$

3 Il potenziale scalare ϕ e il potenziale vettore $\vec{A}$ presentano unità di misure diverse:

$$[\phi] = \mathrm{V}, \qquad [\vec{A}] = \mathrm{T} \times \mathrm{m} = \mathrm{V} \times \mathrm{s} \times \mathrm{m}^{-1};$$

perché siano le componenti dello stesso quadrivettore è quindi necessario moltiplicare la prima per un fattore $1/c$ in modo da ottenere $[\phi/c] = \mathrm{V} \times \mathrm{s} \times \mathrm{m}^{-1}$.

dove Δ indica il laplaciano nelle componenti spaziali e $\Box$ indica l'operatore dalembertiano[4]: potenziale scalare e potenziale vettore soddisfano, cioè, l'equazione delle onde.

4.1.3 *Elementi di Meccanica analitica*

La dinamica di un punto materiale è descritta in generale dal funzionale d'azione (o semplicemente *azione*)

$$\mathcal{S}[\,\vec{x}(\cdot)\,] = \int_{t_0}^{t_1} L\big(\vec{x}(t), \dot{\vec{x}}(t)\big)\,\mathrm{d}t,$$

dove $L : \mathbb{R}^3 \times \mathbb{R}^3 \to \mathbb{R}$ è un'opportuna funzione *lagrangiana*; la variabile d'integrazione è la variabile temporale che parametrizza la traiettoria e con il puntino si indica la derivata rispetto a tale parametro. La lagrangiana è una funzione che dipende dalla posizione $\vec{x}$ e dalla velocità $\dot{\vec{x}}$ del punto materiale considerato, entrambe calcolate lungo la traiettoria $\vec{x}(t)$ del suo moto.

Esempio 4.1. Nel caso della meccanica classica la lagrangiana si può scrivere come differenza tra energia cinetica ed energia potenziale: se il punto materiale di massa m nel suo moto occupa la posizione $\vec{x}(t)$ e ha velocità $\dot{\vec{x}}(t)$ la sua lagrangiana ha la nota espressione

$$L(\vec{x}, \dot{\vec{x}}) = \frac{1}{2}\, m\, |\,\dot{\vec{x}}\,|^2 - V(\vec{x}),$$

se si assume che la sua energia potenziale V dipenda solo dalla posizione e non dalla velocità.

Il *principio variazionale di Hamilton* afferma che l'evoluzione di un sistema meccanico minimizza l'azione: si ha dunque il seguente problema di minimo

$$\min_{\vec{\omega}\,\in\mathcal{A}} \mathcal{S}[\,\vec{\omega}(\cdot)\,]$$

fatto sull'insieme $\mathcal{A} = \{\vec{\omega} \in C^r([t_0, t_1]; \mathbb{R}^3) \,|\, \vec{\omega}(t_0) = \vec{x}_0, \vec{\omega}(t_1) = \vec{x}_1; r \geq 2\}$ delle possibili traiettorie tra un certo punto iniziale $\vec{x}_0$ e un certo punto finale $\vec{x}_1$. L'azione risulta stazionaria (ovvero minimizzata) purché siano soddisfatte le *equazioni di Eulero–Lagrange* associate alla lagrangiana L:

$$\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}t}\frac{\partial L}{\partial \dot{x}^i} - \frac{\partial L}{\partial x^i} = 0.$$

In questo modo la lagrangiana descrive completamente, attraverso tali equazioni, il moto del sistema.

---

4 L'operatore di D'Alembert, detto anche operatore delle onde, è definito come

$$\Box = \partial_\mu \partial^\mu = \partial_0^2 - \partial_1^2 - \partial_2^2 - \partial_3^2 = \frac{1}{c^2}\frac{\partial^2}{\partial t^2} - \frac{\partial^2}{\partial (x^1)^2} - \frac{\partial^2}{\partial (x^2)^2} - \frac{\partial^2}{\partial (x^3)^2}.$$

Nell'ambito della teoria quantistica dei campi il concetto classico di particella cede il posto alla nozione di *campo*, inteso come una funzione dello spaziotempo a valori (al più) complessi: più precisamente, la particella è espressione di uno stato eccitato del campo fisico sottostante che le corrisponde (ad esempio, la presenza di un elettrone in una determinata posizione e in un determinato istante è la manifestazione del fatto che in quel punto e in quell'istante il campo elettronico presenta uno stato eccitato): questi stati, ossia le particelle, sono definiti *quanti* del campo. Le interazioni tra le particelle sono rappresentate, nella lagrangiana del sistema, da termini di interazione dei rispettivi campi sottostanti. In questo caso, se denotiamo con $\psi_k : \mathbb{R}^4 \to \mathbb{C}$ i campi della teoria, per costruire la lagrangiana L si parte da una *densità di lagrangiana* $\mathcal{L}\big(\psi_k(\mathbf{x}), \partial_\mu \psi_k(\mathbf{x})\big)$ e si definisce

$$L(\mathbf{x}, \dot{\mathbf{x}}) = \int_\Omega \mathcal{L}\big(\psi_k(\mathbf{x}), \partial_\mu \psi_k(\mathbf{x})\big)\, d\mathbf{x},$$

dove il dominio d'integrazione Ω è un opportuno sottoinsieme dello spaziotempo. L'azione è poi definita al solito come l'integrale di L tra l'istante iniziale t_0 e l'istante finale t_1. In maniera analoga a quanto detto sopra, dal principio di minima azione si ricavano le equazioni di Eulero–Lagrange, in questo caso così formulate

$$\partial_\nu \frac{\partial \mathcal{L}}{\partial(\partial_\nu \psi_k)} = \frac{\partial \mathcal{L}}{\partial \psi_k}. \tag{4.7}$$

Ricordiamo infine l'importante teorema dovuto a Emmy Noether, secondo cui

> ad ogni simmetria della lagrangiana — ovvero a ogni trasformazione continua delle coordinate $\mathbf{x}, \dot{\mathbf{x}}$ (ed eventualmente del tempo t) che ne lascia invariata la forma — corrisponde una quantità conservata.

È chiaro, dunque, l'interesse fisico di indagare sulle azioni che rispettano la forma della lagrangiana al fine di dedurre delle leggi di conservazione. Vi possono essere inoltre delle quantità che si conservano grazie a simmetrie interne della lagrangiana, ossia a simmetrie non dipendenti da trasformazioni delle coordinate spaziotemporali, ma dovute a caratteristiche intrinseche delle particelle, ossia dei campi coinvolti[5].

Esempio 4.2. Nel caso di un fotone γ (la particella o quanto del campo elettromagnetico) per specificarne completamente lo stato bisogna assegnare la posizione spaziotemporale (ossia le coordinate $(t, \vec{x})$) e la polarizzazione dell'onda, ossia l'inclinazione del piano di oscillazione

5 Nel seguito, quando verrà introdotto un fibrato sulla varietà $\mathbb{R}^4$ e i campi saranno interpretati come sezioni di tale fibrato, si potrà parlare matematicamente di simmetria interna quando l'azione del gruppo coinvolge i punti della fibra — ossia i valori del campo — e non i punti della varietà di base: l'azione è cioè *interna* alla fibra.

del campo elettrico (la direzione di oscillazione del campo magnetico, essendo perpendicolare a quella di $\vec{E}$ è di conseguenza determinata). Se si ruota la direzione di oscillazione il fotone resta sempre nel punto di coordinate $(t, \vec{x})$: l'azione del gruppo delle rotazioni $U_1(\mathbb{C})$, agendo solo sul piano di polarizzazione e non riguardando la posizione di γ, rappresenta una simmetria interna allo stato del fotone.

4.2 TEORIA DI GAUGE $U_1(\mathbb{C})$

Iniziamo ora a introdurre la teoria di gauge abeliana che ha per gruppo di gauge il gruppo $U_1(\mathbb{C})$ e che descrive — come si capirà *a posteriori* — l'Elettromagnetismo.

Si consideri la densità di lagrangiana[6] $\mathcal{L}$ di una particella relativistica libera, ovvero una particella che non interagisce con altri campi o con altre particelle: nell'interpretazione della teoria quantistica dei campi $\mathcal{L}$ dipenderà dunque dal campo relativo alla particella in questione e dalle sue derivate; se $\psi : \mathbb{R}^4 \to \mathbb{C}$ è il campo scalare complesso coinvolto, detta m la massa della particella, si avrà

$$\mathcal{L}(\psi, \overline{\psi}, \partial_\mu \psi, \partial_\mu \overline{\psi}) = \frac{1}{2}\lambda \left[\eta^{\mu\nu}\,\partial_\mu \psi\,\partial_\nu \overline{\psi} - \frac{m^2c^2}{\hbar^2}\,\psi\overline{\psi}\right], \tag{4.8}$$

dove λ è una costante di dimensioni $[\lambda] = [\mathrm{ML}]/[\mathrm{T}^2]$ e, sotto la scelta di opportune unità di misura — adottate nel seguito —, resa uguale a uno. La formula (4.8) rispecchia la definizione della lagrangiana nel caso della meccanica classica, definita come differenza tra energia cinetica (qui rappresentata dal primo termine tra parentesi) ed energia potenziale (secondo termine tra parentesi)[7]. Si può facilmente verificare che la moltiplicazione per un elemento del gruppo $U_1(\mathbb{C})$ lascia inalterata la forma della lagrangiana $\mathcal{L}$: fissato $\alpha \in \mathbb{R}$, sotto le rotazioni

$$\psi \to \psi' = e^{i\alpha}\,\psi, \qquad \overline{\psi} \to \overline{\psi'} = e^{-i\alpha}\,\overline{\psi}, \tag{4.9}$$

la nuova lagrangiana $\mathcal{L}' = \mathcal{L}(\psi', \overline{\psi'}, \partial_\mu \psi', \partial_\mu \overline{\psi'})$ trasforma come segue

$$\begin{aligned}
\mathcal{L}' &= \frac{1}{2}\left[\eta^{\mu\nu}\,\partial_\mu \psi'\,\partial_\nu \overline{\psi'} - \frac{m^2c^2}{\hbar^2}\psi'\overline{\psi'}\right] \\
&= \frac{1}{2}\left[\eta^{\mu\nu}\,\partial_\mu (e^{i\alpha}\,\psi)\partial_\nu (e^{-i\alpha}\,\overline{\psi}) - \frac{m^2c^2}{\hbar^2}(e^{i\alpha}\,\psi)(e^{-i\alpha}\,\overline{\psi})\right] \\
&= \frac{1}{2}\left[e^{i\alpha}e^{-i\alpha}\,\eta^{\mu\nu}\,\partial_\mu \psi\,\partial_\nu \overline{\psi} - \frac{m^2c^2}{\hbar^2}\psi\overline{\psi}\right] = \mathcal{L}.
\end{aligned}$$

6 D'ora in poi sarà chiamata semplicemente *lagrangiana* con un piccolo abuso di terminologia.

7 Le equazioni di Eulero–Lagrange associate alla lagrangiana in questione producono l'equazione di Klein-Gordon

$$\left(\Box - \frac{m^2c^2}{\hbar^2}\right)\psi = 0.$$

La lagrangiana $\mathcal{L}$ è pertanto invariante in forma per l'azione del gruppo $U_1(\mathbb{C})$ sui complessi — e quindi su ψ —.

A questo punto la difficoltà fisica che sorge è conciliare la situazione qui illustrata con il *principio di località*[8]. Matematicamente, avendo a disposizione il campo ψ e volendo confrontare il suo valore in due punti distinti $\mathbf{x}, \mathbf{y}$ dello spaziotempo, non vi è alcun ostacolo "intellettuale": essendo ψ una funzione è sufficiente valutarla in $\mathbf{x}$ e in $\mathbf{y}$ e confrontare $\psi(\mathbf{x})$ con $\psi(\mathbf{y})$; l'interpretazione fisica di questa procedura risulta più delicata: un confronto coerente dei due valori del campo richiederebbe la simultaneità della valutazione in $\mathbf{x}$ e $\mathbf{y}$, simultaneità non concessa, ad esempio, a grandi distanze (l'informazione viaggia al più alla velocità — seppur elevata comunque limitata — della luce).

4.2.1 *Descrizione matematica del problema*

Da un punto di vista matematico è possibile recuperare l'interpretazione fisica considerando che ad ogni punto $\mathbf{x}$ dello spaziotempo corrisponda una "copia" di $\mathbb{C}$ alla quale appartiene il valore $\psi(\mathbf{x})$ del campo in quel punto. In altri termini questa modellizzazione conduce ad introdurre una struttura di fibrato sulla varietà di base $\mathbb{R}^4$; più precisamente si è portati ad introdurre un fibrato principale $\pi : P \to \mathbb{R}^4$ con gruppo di struttura $U_1(\mathbb{C})$ e a considerare il fibrato vettoriale $\pi_L : L \to \mathbb{R}^4$ associato a P, avendo indicato con L il fibrato $P \times_{U_1(\mathbb{C})} \mathbb{C}$. L è quindi un fibrato vettoriale complesso in rette in cui l'azione di $U_1(\mathbb{C})$ sulla fibra tipica (diffeomorfa a) $\mathbb{C}$ è la classica moltiplicazione per un numero complesso di modulo unitario, la stessa azione che il gruppo esercita sul fibrato principale di partenza. Con questa impostazione diventa naturale quindi reinterpretare il campo ψ a valori in $\mathbb{C}$ come una sezione differenziabile $s = \psi : \mathbb{R}^4 \to L$ del fibrato L: per ogni aperto $U \subset \mathbb{R}^4$ si avrà $s = \psi : U \to L|_U = \pi_L^{-1}(U)$ con $\pi_L \circ s = \mathrm{id}_U$ e, per ogni $\mathbf{x} \in \mathbb{R}^4$,

$$\mathbf{x} \mapsto s(\mathbf{x}) = \big(\mathbf{x}, \psi(\mathbf{x})\big),\ \psi(\mathbf{x}) \in L_{\mathbf{x}} = \pi_L^{-1}\big(\{\mathbf{x}\}\big) \cong \mathbb{C}.$$

Come già visto nella Sottosezione 4.1.1, fissato un riferimento locale $\ell \in L(\mathbb{R}^4)$ per L, la sezione $s = \psi$ sarà scritta come $s = \psi\ell$, dove ψ è un'opportuna funzione di classe $C^\infty(U)$ a valori in $\mathbb{C}$, volutamente indicata con ψ in quanto con tale funzione, trascurando la base, identificheremo nel seguito la sezione s stessa, ossia il campo.

Non volendo perdere in generalità e rimanendo sempre in accordo con il principio di località, è ragionevole supporre che l'azione del

8 Il *principio di località* afferma che un oggetto è direttamente influenzato soltanto dalle sue immediate vicinanze o, equivalentemente, che oggetti distanti non possono avere mutua influenza istantanea; in particolare, la teoria ristretta della Relatività limita la velocità di trasmissione dell'influenza alla velocità della luce. Tale postulato fisico si contrappone alla vecchia concezione dell'*azione* (istantanea) *a distanza*.

gruppo $U_1(\mathbb{C})$ dipenda dal punto in cui viene applicata: sostituiamo pertanto la precedente moltiplicazione (4.9) per $e^{i\alpha}$, che per $\alpha \in \mathbb{R}$ fissato ha un carattere *globale*, con la rotazione $e^{i\alpha(\mathbf{x})}$ di natura *locale*[9], essendo $\alpha : \mathbb{R}^4 \to \mathbb{R}$ dipendente da $\mathbf{x} \in \mathbb{R}^4$; le trasformazioni saranno di conseguenza

$$\psi \to \psi' = e^{i\alpha(\mathbf{x})}\,\psi, \qquad \overline{\psi} \to \overline{\psi'} = e^{-i\alpha(\mathbf{x})}\,\overline{\psi}. \tag{4.10}$$

Ora è necessario verificare se passando dalla precedente azione globale alla nuova azione locale di $U_1(\mathbb{C})$ l'invarianza in forma della lagrangiana venga salvaguardata o meno: è evidente che ciò non accade se si guarda, ad esempio, alle derivate

$$\begin{aligned}\partial_\mu \psi' &= \partial_\mu(e^{i\alpha(\mathbf{x})}\,\psi) = i\,\partial_\mu\alpha(\mathbf{x})e^{i\alpha(\mathbf{x})}\,\psi + e^{i\alpha(\mathbf{x})}\,\partial_\mu\psi,\\ \partial_\mu \overline{\psi'} &= \partial_\mu(e^{-i\alpha(\mathbf{x})}\,\overline{\psi}) = -i\,\partial_\mu\alpha(\mathbf{x})e^{-i\alpha(\mathbf{x})}\,\overline{\psi} + e^{-i\alpha(\mathbf{x})}\,\partial_\mu\overline{\psi};\end{aligned}$$

il prodotto $\partial_\mu\psi'\,\partial_\nu\overline{\psi'}$ che compare nel primo termine della parentesi di $\mathcal{L}'$ non è più uguale a $\partial_\mu\psi\,\partial_\nu\overline{\psi}$ a causa della presenza delle derivate della funzione α e di conseguenza si perde l'invarianza in forma della lagrangiana.

La connessione dell'Elettromagnetismo

A ben vedere, la perdita dell'invarianza di $\mathcal{L}$ sotto l'azione (4.10) è conseguenza del fatto che, essendo una sezione di $L(\mathbb{R}^4)$, non è più definita per ψ la derivata direzionale nel senso classico. La soluzione del problema consiste nell'introduzione di una connessione sul fibrato L, grazie alla quale si può sostituire a ∂_μ la derivata covariante ∇_μ: in questo modo si può derivare correttamente la sezione ψ.

Procediamo dunque con il dotare il fibrato L di una connessione. Anzitutto si introduce un campo, detto *potenziale di gauge*, che trasformi secondo una legge appositamente imposta per salvaguardare l'invarianza della lagrangiana: denotato con $\mathbf{A} = A^\mu$ tale campo e considerati i coefficienti $A_\mu = A^\nu\eta_{\mu\nu}$ della forma differenziale corrispondente[10], la regola di trasformazione cercata è la seguente

$$A_\mu \to A'_\mu = A_\mu - \frac{1}{q}\,\partial_\mu\alpha(\mathbf{x}). \tag{4.11}$$

9 La dipendenza dell'azione dal punto $\mathbf{x} \in \mathbb{R}^4$ è il modo — dal punto di vista matematico — di tener conto del fatto che il valore $\psi(\mathbf{x})$ appartiene alla fibra $L_\mathbf{x}$, ossia alla copia di $\mathbb{C}$ sopra $\mathbf{x}$; il problema accennato sopra di confrontare i valori $\psi(\mathbf{x})$, $\psi(\mathbf{y})$, per $\mathbf{x} \neq \mathbf{y}$, si può superare matematicamente con la nozione di *trasporto parallelo*, una volta definita su L una connessione, che permette di identificare le due fibre $L_\mathbf{x}$, $L_\mathbf{y}$ e rende di conseguenza possibile un confronto tra i valori assunti dal campo.

10 In realtà nel seguito non si useranno i coefficienti del campo bensì i coefficienti della forma differenziale corrispondente tramite l'isomorfismo $\flat : TM \to T^*M$ — qui $M = \mathbb{R}^4$ —, che ai coefficienti X^h di un campo associa i coefficienti $\omega_k = X^h\eta_{hk}$ della forma differenziale corrispondente ottenuti per abbassamento dell'indice tramite la metrica. Con un abuso di terminologia ci riferiremo nel seguito a tale forma differenziale usando comunque il termine campo (volendo si può pensare al termine campo di covettori), nonostante i coefficienti siano indicizzati a pedice.

La costante q, che rappresenta la carica corrispondente alla particella descritta dal campo, a rigore dovrebbe essere divisa per $\hbar$: qui e nel seguito si adotterà la convenzione di porre $\hbar = 1$ per semplificare la notazione[11]. Allora la connessione in questione è una funzione lineare $\nabla : \mathfrak{X}(\mathbb{R}^4) \times L(\mathbb{R}^4) \to L(\mathbb{R}^4)$ che mappa $(\partial_\mu, s) \mapsto \nabla_\mu s$, dove l'operatore ∇_μ è definito dalla posizione

$$\nabla_\mu := \partial_\mu + iq\, A_\mu.$$

Trattandosi del caso di un fibrato vettoriale di rango uno, la connessione ∇_μ dovrà rispecchiare la forma generale vista nella (4.2): confrontando le due definizioni se ne ricava l'espressione dei simboli di Christoffel[12]

$$\Gamma_\mu = iq\, A_\mu$$

o, in altri termini, $\nabla_\mu \ell = \Gamma_\mu \ell = iq\, A_\mu \ell$, essendo $\ell \in L(\mathbb{R}^4)$ la sezione del riferimento locale per L.

A questo punto si può sostituire in $\mathcal{L}$ la dipendenza dalle derivate ∂_μ con quella dalle nuove derivate covarianti ∇_μ, ossia passare da $\mathcal{L}(\psi, \overline{\psi}, \partial_\mu \psi, \partial_\mu \overline{\psi})$ a $\mathcal{L}(\psi, \overline{\psi}, \partial_\mu \psi, \partial_\mu \overline{\psi}, A_\mu) = \mathcal{L}(\psi, \overline{\psi}, \nabla_\mu \psi, \nabla_\mu \overline{\psi})$.

Osservazione 4.3. Si può notare che l'azione (4.10) di $\mathrm{U}_1(\mathbb{C})$ sulla funzione ψ induce un'azione sul riferimento locale ℓ del fibrato L della forma

$$\ell \to \ell' = e^{-i\alpha(\mathbf{x})}\, \ell;$$

se infatti ℓ, ℓ' sono due basi locali di L rispetto cui una generica sezione $s \in L(\mathbb{R}^4)$ si scrive come $s = \psi\ell = \psi'\ell'$, allora si ha

$$\psi\ell = s = \psi'\ell' = e^{i\alpha(\mathbf{x})}\, \psi\ell' \quad \Leftrightarrow \quad \ell = e^{i\alpha(\mathbf{x})}\, \ell',$$

ossia se, e solo se, l'azione indotta sul riferimento locale è della forma detta.

Osservazione 4.4. Il gruppo $\mathrm{U}_1(\mathbb{C})$ agisce anche sul potenziale di gauge. Avendo l'espressione dei simboli di Christoffel della connessione è possibile ritrovare la legge secondo cui trasforma $\mathbf{A}$. Infatti, scrivendo i coefficienti della connessione rispetto alle due basi locali ℓ,

---

11 La (4.11) sarebbe quindi

$$A_\mu \to A'_\mu = A_\mu - \frac{\hbar}{q}\, \partial_\mu \alpha(\mathbf{x}).$$

12 Per quanto detto prima, ripristinando la costante $\hbar$, l'espressione corretta dei simboli di Christoffel sarebbe

$$\Gamma_\mu = \frac{iq}{\hbar}\, A_\mu.$$

$\ell' = e^{-i\alpha(\mathbf{x})}\,\ell$ di L, si ha $\Gamma_\mu = iq\,A_\mu$ e $\Gamma'_\mu = iq\,A'_\mu$. Quanto resta da fare è esplicitare i Γ'_μ in funzione dei Γ_μ:

$$\begin{aligned}
\Gamma'_\mu \ell' &= \nabla_\mu \ell' = \nabla_\mu (e^{-i\alpha(\mathbf{x})}\,\ell) = \partial_\mu (e^{-i\alpha(\mathbf{x})})\,\ell + e^{-i\alpha(\mathbf{x})} \nabla_\mu \ell \\
&= -i\,\partial_\mu \alpha(\mathbf{x}) e^{-i\alpha(\mathbf{x})}\,\ell + e^{-i\alpha(\mathbf{x})}\,\Gamma_\mu \ell \\
&= -i\,\partial_\mu \alpha(\mathbf{x}) e^{-i\alpha(\mathbf{x})} e^{i\alpha(\mathbf{x})}\,\ell' + e^{-i\alpha(\mathbf{x})}\,\Gamma_\mu\, e^{i\alpha(\mathbf{x})}\,\ell' \\
&= \big(\Gamma_\mu - i\,\partial_\mu \alpha(\mathbf{x})\big)\ell',
\end{aligned}$$

da cui $\Gamma'_\mu = \Gamma_\mu - i\,\partial_\mu \alpha(\mathbf{x})$ e, di conseguenza, la (4.11).

Invarianza della lagrangiana

L'aver introdotto un nuovo campo comporta necessariamente una modifica della lagrangiana di partenza: alla $\mathcal{L}$ che dava conto della (sola) presenza del campo ψ bisogna aggiungere un termine $\mathcal{L}_\mathbf{A}$ che rappresenti l'energia intrinseca del potenziale di gauge $\mathbf{A}$ — tale termine non dipenderà quindi da ψ —; sicché la lagrangiana risultante sarà del tipo

$$\mathcal{L}_{\mathrm{ED}}(\psi, \overline{\psi}, \nabla_\mu \psi, \overline{\nabla_\mu \psi}, \mathbf{A}, \partial_\mu \mathbf{A}) = \mathcal{L}(\psi, \overline{\psi}, \nabla_\mu \psi, \overline{\nabla_\mu \psi}) + \mathcal{L}_\mathbf{A}(\mathbf{A}, \partial_\mu \mathbf{A}).$$

Il termine aggiuntivo $\mathcal{L}_\mathbf{A}$ si prende in modo che risulti invariante in forma sotto la trasformazione (4.11) del potenziale di gauge.

Proposizione 4.5. *La lagrangiana $\mathcal{L}_{\mathrm{ED}}$ è invariante in forma per l'azione di* $U_1(\mathbb{C})$*, ovvero sotto le trasformazioni* (4.10) *e* (4.11).

Dimostrazione. Il termine $\mathcal{L}_\mathbf{A}$ è stato scelto appositamente invariante sotto l'azione (4.11), pertanto è sufficiente verificare che il primo termine

$$\mathcal{L}(\psi, \overline{\psi}, \nabla_\mu \psi, \overline{\nabla_\mu \psi}) = \frac{1}{2}\left[\eta^{\mu\nu}\,\nabla_\mu \psi\,\overline{\nabla_\nu \psi} - \frac{m^2c^2}{\hbar^2}\,\psi\overline{\psi}\right]$$

sia invariante sotto la trasformazione (4.10). Per quanto riguarda il termine $\nabla_\mu \psi$ bisogna verificare che esso trasformi — essendo una sezione — secondo la legge (4.10), ossia

$$\nabla_\mu \psi \to \nabla'_\mu \psi' = e^{i\alpha(\mathbf{x})} \nabla_\mu \psi.$$

Si ha

$$\begin{aligned}
\nabla'_\mu \psi' &= (\partial_\mu + iq\,A'_\mu)\psi' = \big(\partial_\mu + iqA_\mu - i\,\partial_\mu \alpha(\mathbf{x})\big)\big(e^{i\alpha(\mathbf{x})}\,\psi\big) \\
&= i\,\partial_\mu \alpha(\mathbf{x}) e^{i\alpha(\mathbf{x})}\,\psi + e^{i\alpha(\mathbf{x})}\,\partial_\mu \psi + iq\,A_\mu e^{i\alpha(\mathbf{x})}\,\psi - i\,\partial_\mu \alpha(\mathbf{x}) e^{i\alpha(\mathbf{x})}\,\psi \\
&= e^{i\alpha(\mathbf{x})}(\partial_\mu + iq\,A_\mu)\psi = e^{i\alpha(\mathbf{x})} \nabla_\mu \psi.
\end{aligned}$$

In modo del tutto analogo si trova che il termine $\overline{\nabla_\mu \psi}$ trasforma secondo la legge

$$\overline{\nabla_\mu \psi} \to \overline{\nabla_{\mu'} \psi'} = e^{-i\alpha(\mathbf{x})}\,\overline{\nabla_\mu \psi}.$$

Di conseguenza nella trasformazione

$$\mathcal{L}(\psi, \overline{\psi}, \nabla_\mu \psi, \overline{\nabla_\mu \psi}) \to \mathcal{L}'(\psi', \overline{\psi'}, \nabla'_\mu \psi', \overline{\nabla'_\mu \psi'}) = \\ = \mathcal{L}(\psi', \overline{\psi'}, \nabla'_\mu \psi', \overline{\nabla'_\mu \psi'})$$

il primo termine $\mathcal{L}$ si comporta come segue

$$\begin{aligned} \mathcal{L}' &= \mathcal{L}(\psi', \overline{\psi'}, \nabla'_\mu \psi', \overline{\nabla'_\mu \psi'}) \\ &= \frac{1}{2}\left[\eta^{\mu\nu}\, \nabla'_\mu \psi' \,\overline{\nabla'_\nu \psi'} - \frac{m^2c^2}{\hbar^2}\, \psi'\overline{\psi'}\right] \\ &= \frac{1}{2}\left[\eta^{\mu\nu}\, (e^{i\alpha(\mathbf{x})}\, \nabla_\mu \psi)(e^{-i\alpha(\mathbf{x})}\, \overline{\nabla_\nu \psi}) - \frac{m^2c^2}{\hbar^2}\, (e^{i\alpha(\mathbf{x})}\, \psi)(e^{-i\alpha(\mathbf{x})}\, \overline{\psi})\right] \\ &= \frac{1}{2}\left[\eta^{\mu\nu}\, \nabla_\mu \psi \overline{\nabla_\nu \psi} - \frac{m^2c^2}{\hbar^2}\, \psi\overline{\psi}\right] = \mathcal{L}, \end{aligned}$$

risultando quindi invariante per la (4.10). Si conclude pertanto l'invarianza in forma della lagrangiana complessiva $\mathcal{L}_{\mathrm{ED}} = \mathcal{L} + \mathcal{L}_{\mathbf{A}}$ sotto l'azione del gruppo $\mathrm{U}_1(\mathbb{C})$. □

4.2.2 *Curvatura e campo elettromagnetico*

Avendo introdotto una connessione è lecito ricavare la corrispondente forma di curvatura $\Omega = \Omega_{\mu\nu}\, \mathrm{d}x^\mu \wedge \mathrm{d}x^\nu$: nel caso di un fibrato complesso in rette abbiamo visto la formula (4.3) che porge immediatamente l'espressione dei coefficienti $\Omega_{\mu\nu}$:

$$\Omega_{\mu\nu} = \partial_\mu(iq\, A_\nu) - \partial_\nu(iq\, A_\mu) = iq\, (\partial_\mu A_\nu - \partial_\nu A_\mu) = iq\, F_{\mu\nu},$$

avendo posto $F_{\mu\nu} := \partial_\mu A_\nu - \partial_\nu A_\mu$. Dal momento che presentano due indici bassi, i termini $F_{\mu\nu}$ sono i coefficienti di un tensore 2-covariante, che è anche antisimmetrico in quanto $F_{\nu\mu} = \partial_\nu A_\mu - \partial_\mu A_\nu = -F_{\mu\nu}$; in altri termini $F = F_{\mu\nu}\, \mathrm{d}x^\mu \wedge \mathrm{d}x^\nu$ è una 2-forma differenziale. La definizione dei coefficienti suggerisce inoltre che F sia una forma esatta: più precisamente, F è il differenziale esterno della 1-forma[13] $A = A_\mu\, \mathrm{d}x^\mu$

$$\begin{aligned} F = \mathrm{d}A &= (\partial_\nu A_\mu\, \mathrm{d}x^\nu) \wedge \mathrm{d}x^\mu \\ &= (\partial_\nu A_\mu - \partial_\mu A_\nu)\, \mathrm{d}x^\nu \wedge \mathrm{d}x^\mu = F_{\mu\nu}\, \mathrm{d}x^\mu \wedge \mathrm{d}x^\nu. \end{aligned}$$

Osservazione 4.6. Anche il tensore F risulta invariante per l'azione (4.11) del gruppo $\mathrm{U}_1(\mathbb{C})$:

$$\begin{aligned} F_{\mu\nu} \to F'_{\mu\nu} &= \partial_\mu A'_\nu - \partial_\nu A'_\mu \\ &= \partial_\mu\left(A_\nu - \frac{1}{q}\, \partial_\nu \alpha(\mathbf{x})\right) - \partial_\nu\left(A_\mu - \frac{1}{q}\, \partial_\mu \alpha(\mathbf{x})\right) \\ &= \partial_\mu A_\nu - \frac{1}{q}\, \partial_\mu\partial_\nu \alpha(\mathbf{x}) - \partial_\nu A_\mu + \frac{1}{q}\, \partial_\nu\partial_\mu \alpha(\mathbf{x}) \\ &= \partial_\mu A_\nu - \partial_\nu A_\mu = F_{\mu\nu}. \end{aligned}$$

13 Vedi nota 10, p. 61.

In quanto 2-forma, il tensore F ammette la seguente rappresentazione matriciale $F = [\, F_{\mu\nu} \,]$, che in forma estesa è

$$F = \begin{bmatrix} F_{00} & F_{01} & F_{02} & F_{03} \\ F_{10} & F_{11} & F_{12} & F_{13} \\ F_{20} & F_{21} & F_{22} & F_{23} \\ F_{30} & F_{31} & F_{32} & F_{33} \end{bmatrix}.$$

A questo punto è chiaro come tutta la trattazione sin qui fatta possa essere tradotta nel linguaggio dell'Elettromagnetismo in maniera naturale; ricordando infatti che la variabile temporale è definita come $x^0 = ct$ e che di conseguenza $\partial_0 = \frac{1}{c}\,\partial_t$, dal confronto con le componenti del campo elettrico (4.6) e del campo magnetico (4.5) si trova che $F_{\mu\mu} = 0$ per ogni μ e che

$$\begin{aligned} F_{01} &= \partial_0 A_1 - \partial_1 A_0 = -\tfrac{1}{c}\,\partial_t A^1 - \partial_1(\tfrac{\phi}{c}) = \tfrac{1}{c}E^1 \\ F_{02} &= \partial_0 A_2 - \partial_2 A_0 = -\tfrac{1}{c}\,\partial_t A^2 - \partial_2(\tfrac{\phi}{c}) = \tfrac{1}{c}E^2 \\ F_{03} &= \partial_0 A_3 - \partial_3 A_0 = -\tfrac{1}{c}\,\partial_t A^3 - \partial_3(\tfrac{\phi}{c}) = \tfrac{1}{c}E^3 \\ F_{12} &= \partial_1 A_2 - \partial_2 A_1 = -\partial_1 A^2 + \partial_2 A^1 = -B^3 \\ F_{13} &= \partial_1 A_3 - \partial_3 A_1 = -\partial_1 A^3 + \partial_3 A^1 = B^2 \\ F_{23} &= \partial_2 A_3 - \partial_3 A_2 = -\partial_2 A^3 + \partial_3 A^2 = -B^1, \end{aligned}$$

avendo riletto le componenti A_μ a partire dalle componenti del quadrivettore potenziale del campo elettromagnetico[14] $\mathbf{A} = A^\mu = (A^0, \vec{A})$ $= (\phi/c, \vec{A})$. In definitiva, completando per antisimmetria, il tensore

$$F = \begin{bmatrix} 0 & E^1/c & E^2/c & E^3/c \\ -E^1/c & 0 & -B^3 & B^2 \\ -E^2/c & B^3 & 0 & -B^1 \\ -E^3/c & -B^2 & B^1 & 0 \end{bmatrix}$$

non è altro che il *tensore del campo elettromagnetico* (o *tensore di Faraday*)[15].

Quanto si conclude è, dunque, che il campo elettromagnetico risulta essere la manifestazione fisica della curvatura associata alla connessione introdotta sul fibrato $\pi_L : L \to \mathbb{R}^4$. La curvatura — costruzione teorica della Matematica e, in quanto tale, non direttamente osservabile — si esprime fisicamente come la forza del campo elettromagnetico.

14 La 1-forma A è definita a partire dal potenziale di gauge $\mathbf{A}$ ponendo $A = \flat(\mathbf{A}) = \flat(A^\mu \partial_\mu) = A^\mu \eta_{\mu\nu} \mathrm{d}x^\nu = A_\nu \mathrm{d}x^\nu$; in particolare $A_0 = A^0 = \phi/c$ e $A_i = -A^i$.

15 Si introduce anche il tensore di componenti $F^{\mu\nu}$, dove $F^{\mu\nu} = \eta^{\mu\alpha}\eta^{\nu\beta}F_{\alpha\beta}$, ossia

$$\begin{bmatrix} 0 & -E^1/c & -E^2/c & -E^3/c \\ E^1/c & 0 & -B^3 & B^2 \\ E^2/c & B^3 & 0 & -B^1 \\ E^3/c & -B^2 & B^1 & 0 \end{bmatrix}.$$

4.2.3 *Analisi dei termini di $\mathcal{L}_{\mathrm{ED}}$ ed equazioni di Maxwell*

In quest'ultima parte si ricaveranno le equazioni di Maxwell a partire da quanto fatto in precedenza. La lagrangiana utilizzata per ricavare tutte le precedenti deduzioni aveva assunto la forma definitiva $\mathcal{L}_{\mathrm{ED}} = \mathcal{L} + \mathcal{L}_{\mathbf{A}}$, dove $\mathcal{L}$ era la lagrangiana (4.8) di partenza, mentre $\mathcal{L}_{\mathbf{A}}$ era il termine aggiunto per tener conto della presenza del campo di gauge $\mathbf{A}$. Sebbene l'espressione del primo termine sia nota, quella del secondo non ha una forma privilegiata; coerentemente al primo addendo esso dovrà essere uno scalare e, per garantire l'invarianza globale di $\mathcal{L}_{\mathrm{ED}}$ come detto nella Proposizione 4.5, dovrà essere invariante in forma sotto l'azione del gruppo $\mathrm{U}_1(\mathbb{C})$. Tali richieste vengono soddisfatte se si sceglie di porre

$$\mathcal{L}_{\mathbf{A}} = -\frac{1}{4}\, F_{\mu\nu}F^{\mu\nu}, \tag{4.12}$$

essendo F invariante sotto l'azione (4.11) per quanto detto nell'Osservazione 4.6. Con questa scelta la lagrangiana finale $\mathcal{L}_E$ ha quindi la seguente espressione:

$$\begin{aligned}
\mathcal{L}_{\mathrm{ED}} = \mathcal{L} + \mathcal{L}_{\mathbf{A}} &= \frac{1}{2}\left[\eta^{\mu\nu}\, \nabla_\mu\psi\overline{\nabla_\nu\psi} - \frac{m^2c^2}{\hbar^2}\,\psi\overline{\psi}\right] - \frac{1}{4}\, F_{\mu\nu}F^{\mu\nu} \\
&= \frac{1}{2}\left[\eta^{\mu\nu}\,(\partial_\mu + iq\,A_\mu)\psi\,(\partial_\nu - iq\,A_\nu)\overline{\psi} - \frac{m^2c^2}{\hbar^2}\,\psi\overline{\psi}\right] - \frac{1}{4}\, F_{\mu\nu}F^{\mu\nu} \\
&= \frac{1}{2}\,\eta^{\mu\nu}\left[\partial_\mu\psi\partial_\nu\overline{\psi}\right] + \frac{1}{2}\,\eta^{\mu\nu}\, iq\left[A_\mu\psi\partial_\nu\overline{\psi} - A_\nu\overline{\psi}\partial_\mu\psi + \right. \\
&\qquad \left. - iq\,A_\mu A_\nu\psi\overline{\psi}\right] - \frac{1}{2}\,\frac{m^2c^2}{\hbar^2}\,\psi\overline{\psi} - \frac{1}{4}\, F_{\mu\nu}F^{\mu\nu}.
\end{aligned}$$

Nella formula finale riconosciamo quattro termini diversi; rispettivamente:

i. il termine $\frac{1}{2}\,\eta^{\mu\nu}\,\partial_\mu\psi\partial_\nu\overline{\psi}$ rappresenta l'energia cinetica della particella associata al campo ψ;

ii. il termine $\frac{1}{2}\,\eta^{\mu\nu}\, iq\left[A_\mu\psi\partial_\nu\overline{\psi} - A_\nu\overline{\psi}\partial_\mu\psi - iq\,A_\mu A_\nu\psi\overline{\psi}\right]$ riunisce gli addendi relativi all'interazione tra la particella descritta dal campo ψ — di cui la costante q rappresenta la carica elettrica[16] — e il campo di gauge dato dal potenziale $\mathbf{A}$, ossia il campo elettromagnetico;

iii. il termine $-\frac{1}{2}\,\frac{m^2c^2}{\hbar^2}\,\psi\overline{\psi}$ costituisce il termine di massa (compreso tra i termini energetici, in accordo con la teoria relativistica) relativo alla particella associata al campo ψ;

iv. il termine $-\frac{1}{4}\, F_{\mu\nu}F^{\mu\nu}$ descrive la componente della lagrangiana relativa al contributo del campo elettromagnetico.

16 Come detto, in realtà la carica q è normalizzata a $q/\hbar$ con $\hbar = 1$.

Equazioni di Maxwell in forma covariante a vista

La scelta (4.12) nella definizione della lagrangiana del solo campo di gauge, oltre a soddisfare l'invarianza sotto l'azione di $U_1(\mathbb{C})$ e a produrre uno scalare, è dettata dal fatto che in questo modo le equazioni di Eulero–Lagrange associate a $\mathcal{L}_{\text{ED}}$ riproducono esattamente le equazioni di Maxwell generali. Nel caso in cui non ci sia la particella descritta dal campo ψ, ad esempio nel caso del vuoto, il termine $\mathcal{L}$ della lagrangiana complessiva scompare e resta solo il termine $\mathcal{L}_{\text{ED}}$: in questo caso più semplice le equazioni di Eulero–Lagrange si riducono alle equazioni di Maxwell nel vuoto, come si vedrà nel seguito.

Anzitutto in questo caso la lagrangiana complessiva si riduce ad essere

$$\begin{aligned}\mathcal{L}_{\text{ED}} = \mathcal{L}_{\mathbf{A}} &= -\frac{1}{4}\,F_{\mu\nu}F^{\mu\nu} = -\frac{1}{4}\,(\partial_\mu A_\nu - \partial_\nu A_\mu)(\partial^\mu A^\nu - \partial^\nu A^\mu)\\ &= -\frac{1}{4}\,(\partial_\mu A_\nu \partial^\mu A^\nu - \partial_\mu A_\nu \partial^\nu A^\mu - \partial_\nu A_\mu \partial^\mu A^\nu + \partial_\nu A_\mu \partial^\nu A^\mu)\\ &= -\frac{1}{2}\,(\partial_\mu A_\nu \partial^\mu A^\nu - \partial_\mu A_\nu \partial^\nu A^\mu).\end{aligned}$$

Le equazioni di Eulero–Lagrange associate a questa lagrangiana si scrivono come le (4.7):

$$\partial_\nu \frac{\partial \mathcal{L}_{\mathbf{A}}}{\partial(\partial_\nu A_\mu)} = \frac{\partial \mathcal{L}_{\mathbf{A}}}{\partial A_\mu}. \tag{4.13}$$

Il secondo membro è nullo, dal momento che la lagrangiana non dipende dalle componenti del potenziale di gauge; per quanto riguarda il primo membro si ha che

$$\frac{\partial \mathcal{L}_{\mathbf{A}}}{\partial(\partial_\nu A_\mu)} = -\frac{1}{2}\,(\partial^\nu A^\mu - \partial^\mu A^\nu) = -\frac{1}{2}\,F^{\nu\mu} = \frac{1}{2}\,F^{\mu\nu},$$

pertanto le equazioni (4.13) risultano essere in definitiva

$$\partial_\nu F^{\mu\nu} = 0. \tag{4.14}$$

Ricordando che per la 2-forma di curvatura $\Omega = iq\,F_{\mu\nu}\,\mathrm{d}x^\mu \wedge \mathrm{d}x^\nu$ vale l'identità di Bianchi (3.11) otteniamo anche la seguente relazione:

$$\begin{aligned}0 = D\Omega = \mathrm{d}\Omega &= (\partial_\alpha \Omega_{\beta\gamma}\,\mathrm{d}x^\alpha) \wedge \mathrm{d}x^\beta \wedge \mathrm{d}x^\gamma\\ &= (\partial_\alpha \Omega_{\beta\gamma} - \partial_\alpha \Omega_{\gamma\beta} + \partial_\beta \Omega_{\gamma\alpha} +\\ &\qquad - \partial_\beta \Omega_{\alpha\gamma} + \partial_\gamma \Omega_{\alpha\beta} - \partial_\gamma \Omega_{\beta\alpha})\,\mathrm{d}x^\alpha \wedge \mathrm{d}x^\beta \wedge \mathrm{d}x^\gamma\\ &= 2\,(\partial_\alpha \Omega_{\beta\gamma} + \partial_\beta \Omega_{\gamma\alpha} + \partial_\gamma \Omega_{\alpha\beta})\,\mathrm{d}x^\alpha \wedge \mathrm{d}x^\beta \wedge \mathrm{d}x^\gamma,\end{aligned}$$

da cui $\partial_\alpha \Omega_{\beta\gamma} + \partial_\beta \Omega_{\gamma\alpha} + \partial_\gamma \Omega_{\alpha\beta} = 0$, ossia

$$\partial_\alpha F_{\beta\gamma} + \partial_\beta F_{\gamma\alpha} + \partial_\gamma F_{\alpha\beta} = 0. \tag{4.15}$$

Le equazioni (4.14) e (4.15) sono la parafrasi covariante delle equazioni di Maxwell (4.4) nel vuoto, come si verifica con la seguente

Proposizione 4.7. *Le equazioni di Maxwell nel vuoto in forma covariante a vista si scrivono*

$$\partial_\nu F^{\mu\nu} = 0,$$
$$\partial_\alpha F_{\beta\gamma} + \partial_\beta F_{\gamma\alpha} + \partial_\gamma F_{\alpha\beta} = 0.$$

Dimostrazione. Dividiamo la verifica distinguendo i casi in cui sia coinvolto l'indice 0 da quelli in cui non lo sia. Si consideri la prima equazione.

(i) $\mu = 0$. In questo caso si ottiene la (4.4a):

$$0 = \partial_\nu F^{0\nu} = \partial_0 F^{00} + \partial_i F^{0i} = -\tfrac{1}{c}\,\partial_i E^i \quad \Leftrightarrow \quad \vec{\nabla}\cdot\vec{E} = 0;$$

(ii) $\mu = i$. Fissando ad esempio $i = 1$, si trova

$$0 = \partial_\nu F^{1\nu} = \partial_0 F^{10} + \partial_j F^{1j} = \tfrac{1}{c^2}\,\partial_t E^1 + \partial_2(-B^3) + \partial_3 B^2,$$

che è equivalente a $\partial_2 B^3 - \partial_3 B^2 - \frac{1}{c^2}\,\partial_t E^1 = 0$ ed è la prima componente dell'equazione vettoriale

$$\vec{\nabla}\times\vec{B} - \frac{1}{c^2}\frac{\partial\vec{E}}{\partial t} = 0;$$

prendendo $i = 2, 3$ si ricavano le altre due componenti e si ottiene completamente la (4.4d).

Per le due equazioni di Maxwell rimanenti si consideri la seconda relazione.

(i) $\alpha\beta\gamma = i\,j\,k$. In questo caso, prendendo ad esempio $\alpha\beta\gamma = 1\,2\,3$, l'equazione porge la (4.4b):

$$0 = \partial_1 F_{23} + \partial_2 F_{31} + \partial_3 F_{12} = \partial_1(-B^1) + \partial_2(-B^2) + \partial_3(-B^3),$$

ossia

$$\vec{\nabla}\cdot\vec{B} = 0;$$

(ii) $\alpha\beta\gamma = 0\,i\,j$. In questo caso, fissando ad esempio $i = 1$ e $j = 2$, si ha

$$0 = \partial_0 F_{12} + \partial_1 F_{20} + \partial_2 F_{01} = \tfrac{1}{c}\,\partial_t(-B^3) + \tfrac{1}{c}\,\partial_1 E^2 + \tfrac{1}{c}\,\partial_2(-E^1),$$

ossia $\partial_1 E^2 - \partial_2 E^1 + \frac{1}{c}\,\partial_t B^3 = 0$, terza componente dell'equazione vettoriale (4.4c); per $\alpha\beta\gamma = 0\,2\,3$ e $\alpha\beta\gamma = 0\,1\,3$ si ottengono rispettivamente la prima e la seconda componente dell'equazione

$$\vec{\nabla}\times\vec{E} + \frac{\partial\vec{B}}{\partial t} = 0.$$

□

5 CENNI A TEORIE DI GAUGE NON ABELIANE

L'ultimo Capitolo della tesi è dedicato a proporre una visione d'insieme al caso delle teorie di gauge non abeliane, nello specifico alle teorie con gruppi $SU_2(\mathbb{C})$ e $SU_3(\mathbb{C})$, dando enfasi agli aspetti geometrici che le caratterizzano e alle differenze tra il caso abeliano e il caso non abeliano. La teoria con gruppo di gauge $SU_2(\mathbb{C})$ — poi corretta con la scelta del gruppo $SU_3(\mathbb{C})$ — descrive, come si vedrà, l'interazione nucleare forte. È con questa modellizzazione, elaborata da Chen Ning Yang (1922) e Robert Mills (1927–1999) negli anni Cinquanta del secolo scorso, che si ebbe il primo passo nella direzione di un quadro teorico unitario delle forze fondamentali della natura, oggi rappresentato dal cosiddetto Modello standard. Anche qui, come nel Capitolo precedente, ometteremo di scrivere, sottintendendola, la dipendenza dei campi dal punto.

5.1 ALCUNI FATTI PRELIMINARI

Premettiamo alcune considerazioni di carattere matematico e di carattere storico–fisico.

5.1.1 *Connessione su un fibrato di rango due*

Se $\pi : E \to M$ è un fibrato vettoriale complesso di fibra tipica $\mathbb{C}^2$ su una varietà di base M, una connessione su E è una mappa lineare ∇ con le proprietà già ricordate in (2.3). Se una base locale di E su un aperto $U \subset M$ è data da $\{e_1, e_2\}$, allora possiamo scrivere ogni sezione $s \in \mathcal{E}(U)$ come $s = s^i e_i$, per opportune funzioni $s^i \in C^\infty(U)$ a valori complessi. Supponendo che U sia inoltre il dominio di una carta locale che ivi introduce le coordinate $x^1, \dots, x^n$, dato un qualsiasi campo vettoriale $\mathfrak{X}(M) \ni X = X^h \partial_h$, la descrizione locale della connessione sarà — trascurando gli elementi della base locale — $\nabla_X s^k = X(s^k) + s^i X^h \Gamma^k_{ih}$ e, per $X = \partial_i$,

$$\nabla_{\partial_i} s^k = \partial_i (s^k) + s^j \Gamma^k_{ij}. \tag{5.1}$$

La forma di connessione associata sarà una matrice $\omega = [\omega^b_a]$ di ordine due, le cui entrate sono le 1-forme differenziali $\omega^b_a = \omega^b_{ac}\, dx^c = \Gamma^b_{ac}\, dx^c$.

5.1.2 *Nucleone di Heisenberg e simmetria globale*

Intorno agli anni Trenta del Novecento gli studi condotti sugli atomi portarono i fisici a porsi una questione molto naturale, ossia la causa della stabilità del nucleo nonostante esso fosse costituito da particelle — protoni e neutroni[1] — dotate di carica dello stesso segno (o neutre) che, sotto l'azione della forza di Coulomb di carattere repulsivo, avrebbero invece dovuto respingersi. Nel 1932 Werner Heisenberg introdusse il concetto di *isospin*[2] o *spin isotopico*: questa grandezza (vettoriale) aveva lo scopo di giustificare la simmetria tra le due particelle: a meno della carica elettrica — positiva per p (protone) e neutra per n (neutrone) — le due particelle, infatti, presentano pressoché la medesima massa. Si fece strada dunque l'idea che esistesse una forza a livello nucleare, che venne chiamata *interazione forte*, tale da contrastare l'interazione elettrostatica tra i protoni e permettere loro di rimanere, insieme ai neutroni, confinati entro il nucleo. La simmetria tra le due particelle condusse Heisenberg a considerare protone e neutrone come due stati diversi di una stessa particella, detta *nucleone*, genericamente data dalla sovrapposizione di uno stato protonico ed uno neutronico. Gli stati che descrivono il protone p e il neutrone n formano una base di uno spazio di dimensione due[3]: per fissare le idee siano

$$\vec{p} = \begin{bmatrix} 1 \\ 0 \end{bmatrix}, \qquad \vec{n} = \begin{bmatrix} 0 \\ 1 \end{bmatrix};$$

il generico stato di nucleone può quindi essere rappresentato da un campo $\psi : \mathbb{R}^4 \to \mathbb{C}^2$ che ad ogni punto $(t, \vec{x})$ dello spaziotempo associa

$$\psi(t, \vec{x}) = \begin{bmatrix} \psi_p(t, \vec{x}) \\ \psi_n(t, \vec{x}) \end{bmatrix} = \psi_p(t, \vec{x})\, \vec{p} + \psi_n(t, \vec{x})\, \vec{n},$$

per opportune ψ_p, $\psi_n \in C^\infty(\mathbb{R}^4)$ a valori complessi. Se un osservatore vede un protone in un certo punto dello spaziotempo, in quella posizione e in quell'istante si ha $\psi_p(t, \vec{x}) = 1$, $\psi_n(t, \vec{x}) = 0$ e quindi $\psi(t, \vec{x}) = \vec{p}$; analogamente[4], nel caso veda un neutrone, si ha $\psi_p = 0$, $\psi_n(t, \vec{x}) = 1$ e quindi $\psi(t, \vec{x}) = \vec{n}$.

Heisenberg richiese inoltre che un tale osservatore fosse libero di operare una trasformazione delle coordinate che lasciasse invariato (costante) il quadrato della norma dello stato del sistema[5]. Le trasformazioni che soddisfano questa richiesta sono ovviamente rappresen-

1 Il neutrone era stato scoperto proprio in quegli anni, nel 1932, da James Chadwick.
2 Il termine fu introdotto successivamente nel 1937 da Eugène Wigner.
3 In Meccanica quantistica ogni stato di un sistema fisico è rappresentato da un elemento di uno spazio di Hilbert.
4 Protone e neutrone sono distinti dal valore assunto da una nuova variabile — l'isospin appunto — a due valori: $1/2$ e $-1/2$.
5 Questa condizione, a meno di una normalizzazione, è motivata dal fatto che in Meccanica quantistica viene dato a queste grandezze un significato probabilistico.

tate da matrici unitarie di ordine due; infatti se la trasformazione è data da

$$\psi \to \psi' := U\psi = \begin{bmatrix} u_{11} & u_{12} \\ u_{21} & u_{22} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \psi_p \\ \psi_n \end{bmatrix},$$

allora dovrà essere

$$\|\psi\|^2 = \|\psi'\|^2 \quad \Leftrightarrow \quad \psi^H \psi = \psi'^H \psi' = (U\psi)^H (U\psi) = \psi^H U^H U \psi,$$

vero se, e solo se, $U^H U = \mathbb{I}_2$, ossia $U \in U_2(\mathbb{C})$. Un postulato della Meccanica quantistica asserisce, tuttavia, che

> in uno spazio di Hilbert due stati v e λv con $\lambda \in \mathbb{C} \setminus \{0\}$ descrivono lo stesso stato; in altri termini, ad ogni stato è associata una direzione.

In base a questo assioma risulta chiaro, quindi, che i termini $[\psi_p, \psi_n]^T$ e $[e^{i\alpha}\psi_p, e^{i\alpha}\psi_n]^T$, per un certo $\alpha \in \mathbb{R}$, descrivono lo stesso stato: è quindi possibile sfruttare questo fatto[6] per ridurre lo spazio delle trasformazioni al gruppo unitario speciale $SU_2(\mathbb{C})$, ossia alle trasformazioni rappresentate da matrici unitarie con determinante uguale a uno. Heisenberg ipotizzò dunque che la lagrangiana

$$\mathcal{L}(\psi, \psi^H, \partial_\mu \psi, \partial_\mu \psi^H) = \frac{1}{2}\left[\eta^{\mu\nu}\, \partial_\mu \psi^H\, \partial_\nu \psi - \frac{m^2 c^2}{\hbar^2}\, \psi^H \psi\right] \tag{5.2}$$

della nuova interazione nucleare forte dovesse essere invariante in forma sotto trasformazioni del tipo

$$\psi \to \tilde{\psi} = U\psi, \qquad\qquad \psi^H \to \tilde{\psi}^H = (U\psi)^H = \psi^H U^H.$$

Difatti è facile osservare che, detta $\tilde{\mathcal{L}} = \mathcal{L}(\tilde{\psi}, \tilde{\psi}^H, \partial_\mu \tilde{\psi}, \partial_\mu \tilde{\psi}^H)$, si ha l'invarianza cercata:

$$\begin{aligned}
\tilde{\mathcal{L}} &= \frac{1}{2}\left[\eta^{\mu\nu}\, \partial_\mu \tilde{\psi}^H\, \partial_\nu \tilde{\psi} - \frac{m^2 c^2}{\hbar^2}\, \tilde{\psi}^H \tilde{\psi}\right] \\
&= \frac{1}{2}\left[\eta^{\mu\nu}\, \partial_\mu (U\psi)^H\, \partial_\nu (U\psi) - \frac{m^2 c^2}{\hbar^2}\, (U\psi)^H (U\psi)\right] \\
&= \frac{1}{2}\left[U^H U\, \eta^{\mu\nu}\, \partial_\mu \psi^H\, \partial_\nu \psi - \frac{m^2 c^2}{\hbar^2}\, \psi^H U^H U \psi\right] \\
&= \frac{1}{2}\left[\eta^{\mu\nu}\, \partial_\mu \psi^H\, \partial_\nu \psi - \frac{m^2 c^2}{\hbar^2}\, \psi^H \psi\right] = \mathcal{L}.
\end{aligned}$$

Tale simmetria, essendo $U \in SU_2(\mathbb{C})$ matrice a coefficienti costanti, è una simmetria di natura *globale*.

5.2 TEORIA DI GAUGE $SU_2(\mathbb{C})$

Ripercorrendo in analogia quanto fatto nella Sezione 4.2, trattiamo quindi — con le dovute modifiche — il caso della teoria non abeliana con gruppo di gauge $SU_2(\mathbb{C})$.

6 In effetti è sufficiente prendere $e^{i\alpha} = \det U$.

5.2.1 *Nucleone di Yang–Mills e simmetria locale*

Qualche anno più tardi, nel 1935, Yukawa introdusse l'ipotesi che l'interazione forte tra i nuclei fosse originata (mediata) dallo scambio di particelle — non ancora osservate all'epoca — che vennero chiamate *mesoni*, alla stregua di quanto accade tra gli elettroni attraverso lo scambio di fotoni. Nel 1954 Yang e Mills proposero di considerare il gruppo delle trasformazioni che lasciano invariante la lagrangiana dell'interazione forte come un gruppo di simmetria *locale*; come nel caso dell'Elettromagnetismo, quindi, si passò alle seguenti regole di trasformazione:

$$\psi \to \tilde{\psi} = U(\mathbf{x})\psi, \qquad \psi^H \to \tilde{\psi}^H = \big(U(\mathbf{x})\psi\big)^H = \psi^H U(\mathbf{x})^H.$$

Per ristabilire l'invarianza della lagrangiana occorre ripercorrere la stessa modellizzazione fatta nel caso dell'Elettromagnetismo. Anzitutto si introduce un fibrato principale $\pi : P \to \mathbb{R}^4$ con gruppo di struttura $\mathrm{SU}_2(\mathbb{C})$, al quale si associa il fibrato vettoriale $E := P \times_{\mathrm{SU}_2(\mathbb{C})} \mathbb{C}^2$, ossia un fibrato vettoriale complesso $\pi_E : E \to \mathbb{R}^4$ di rango due su $\mathbb{R}^4$ in cui l'azione di $\mathrm{SU}_2(\mathbb{C})$ sulla fibra tipica $\mathbb{C}^2$ è la moltiplicazione a destra per una matrice complessa unitaria con determinante uguale a uno. In questo modo si può considerare il campo ψ come una sezione $s = \psi : \mathbb{R}^4 \to E$, di classe C^∞, del fibrato E: per ogni aperto $U \subset \mathbb{R}^4$ si ha quindi $s = \psi : U \to E|_U = \pi_E^{-1}(U)$ con $\pi_E \circ s = \mathrm{id}_U$ e, per ogni $\mathbf{x} \in \mathbb{R}^4$,

$$\mathbf{x} \mapsto s(\mathbf{x}) = \big(\mathbf{x}, \psi(\mathbf{x})\big), \ \psi(\mathbf{x}) \in E_{\mathbf{x}} = \pi_E^{-1}\big(\{\mathbf{x}\}\big) \cong \mathbb{C}^2.$$

L'algebra di Lie di $\mathrm{SU}_2(\mathbb{C})$ è

$$\mathfrak{su}_2(\mathbb{C}) = \{U \in \mathrm{U}_2(\mathbb{C}) \,|\, U^H = -U, \mathrm{Tr}(U) = 0\},$$

algebra costituita da matrici antihermitiane di ordine due con traccia nulla. Ricordiamo che le matrici di Pauli sono le tre matrici hermitiane unitarie

$$\sigma_1 = \begin{bmatrix} 0 & 1 \\ 1 & 0 \end{bmatrix}, \qquad \sigma_2 = \begin{bmatrix} 0 & -i \\ i & 0 \end{bmatrix}, \qquad \sigma_3 = \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 0 & -1 \end{bmatrix},$$

che godono delle seguenti proprietà

$$\begin{gathered} \sigma_1^2 = \sigma_2^2 = \sigma_3^2 = \mathbb{I}_2, \\ \sigma_1\sigma_2 = i\sigma_3, \qquad \sigma_2\sigma_3 = i\sigma_1, \qquad \sigma_3\sigma_1 = i\sigma_2, \\ \sigma_2\sigma_1 = -i\sigma_3, \qquad \sigma_3\sigma_2 = -i\sigma_1, \qquad \sigma_1\sigma_3 = -i\sigma_2. \end{gathered}$$

Una base dell'algebra $\mathfrak{su}_2(\mathbb{C})$, intesa come spazio vettoriale (reale), è allora data dalle matrici di Pauli moltiplicate per i:

$$\mathfrak{su}_2(\mathbb{C}) = \langle i\sigma_1, i\sigma_2, i\sigma_3 \rangle.$$

5.2.2 *Connessione e campi di Yang–Mills*

Il passo successivo è quello di sostituire le derivate ordinarie che compaiono nella lagrangiana con derivate covarianti: lo scopo fisico, al solito, è quello di ristabilire l'invarianza di $\mathcal{L}$ sotto le trasformazioni del gruppo $SU_2(\mathbb{C})$ dipendenti dal punto, invarianza compromessa dal fatto che la trasformazione coinvolge anche le derivate delle matrici, ora non più costanti; la soluzione matematica è quella di introdurre una connessione per derivare in maniera opportuna il campo ψ, non più inteso come funzione ma interpretato ora come sezione del fibrato E.

La connessione che si introduce sul fibrato vettoriale E avrà la forma suggerita dalla (5.1), ossia

$$\nabla_\mu = \partial_\mu \mathbb{I}_2 - iq\, A_\mu, \tag{5.3}$$

scelta operata anche in analogia con il caso dell'Elettromagnetismo; q è la carica associata al campo (di covettori) di componenti A_μ introdotto nella formula ed è detta *carica generalizzata*. La 1-forma di connessione sul fibrato principale P di partenza sarà una matrice $\omega = [\,\omega_a^b\,]$ a valori nell'algebra di Lie $\mathfrak{su}_2(\mathbb{C})$ di $SU_2(\mathbb{C})$; in questo modo riusciamo a specificare meglio chi sia il potenziale di gauge $\mathbf{A} = A_\mu$ di cui compaiono le componenti nella (5.3): ponendo

$$\omega = -iq\,\mathbf{A},$$

si deduce che $-iq\,\mathbf{A} \in \mathfrak{su}_2(\mathbb{C})$ — $\mathbf{A}$ invece è una matrice hermitiana — e che pertanto sarà una combinazione delle tre matrici $i\sigma_1, i\sigma_2, i\sigma_3$ che generano l'algebra di Lie. Definiamo[7] $\mathbf{A}(\partial_\mu) = A_\mu$ tramite la posizione

$$A_\mu := \sigma_a A_\mu^a = \sigma_1 A_\mu^1 + \sigma_2 A_\mu^2 + \sigma_3 A_\mu^3.$$

In questa teoria di gauge con gruppo $SU_2(\mathbb{C})$, per mediare l'interazione forte tra i nucleoni è quindi necessario introdurre non uno, ma ben tre nuovi campi (di covettori) $\mathbf{A}^1, \mathbf{A}^2, \mathbf{A}^3$, detti *campi di Yang–Mills*. Seguendo la notazione precedente si avrà pertanto[8] $\omega(\partial_\mu) = \omega_\mu$, con

$$\omega_\mu = -iq\, A_\mu = -iq\,\sigma_a A_\mu^a = -iq\,(\sigma_1 A_\mu^1 + \sigma_2 A_\mu^2 + \sigma_3 A_\mu^3).$$

Possiamo quindi precisare l'espressione della derivata covariante (5.3): essa sarà $\nabla_\mu \psi = \partial_\mu \psi - iq\,\sigma_a A_\mu^a\,\psi$, essendo sempre $\psi = [\psi_p, \psi_n]^T$.

---

7 Introduciamo qui la seguente notazione che sopprime gli indici di riga e colonna delle singole entrate della matrice: a rigore si dovrebbe scrivere $A_\mu = \mathbf{A}(\partial_\mu) = [\,A_a^b(\partial_\mu)\,]$, ma la notazione risulterebbe decisamente pesante; la stessa convenzione verrà usata con la forma ω.

8 Vedi nota 7.

Invarianza della lagrangiana

L'introduzione del potenziale di gauge $\mathbf{A}$ impone di aggiornare la (5.2) con l'aggiunta di un termine lagrangiano $\mathcal{L}_{\mathbf{A}}$ che tenga conto della presenza del nuovo campo (o meglio dei tre campi di Yang–Mills): la lagrangiana complessiva $\mathcal{L}_{\mathrm{YM}}(\psi, \psi^H, \nabla_\mu \psi, (\nabla_\mu \psi)^H, \mathbf{A}, \partial_\mu \mathbf{A})$ avrà dunque la forma

$$\mathcal{L}_{\mathrm{YM}} = \mathcal{L}(\psi, \psi^H, \nabla_\mu \psi, (\nabla_\mu \psi)^H) + \mathcal{L}_{\mathbf{A}}(\mathbf{A}, \partial_\mu \mathbf{A}). \tag{5.4}$$

A questo punto bisogna dare la legge di trasformazione di $\mathbf{A}$: per ristabilire l'invarianza della lagrangiana, i fisici propongono che essa sia

$$A_\mu \to \tilde{A}_\mu = U(\mathbf{x}) A_\mu U^{-1}(\mathbf{x}) - \frac{i}{q} \left(\partial_\mu U(\mathbf{x})\right) U^{-1}(\mathbf{x}). \tag{5.5}$$

Il termine $\mathcal{L}_{\mathbf{A}}$ viene, anche questa volta, scelto in modo tale da risultare invariante per trasformazioni del tipo (5.5). Sotto queste premesse si può concludere che

Proposizione 5.1. *La lagrangiana $\mathcal{L}_{\mathrm{YM}}$ è invariante in forma sotto l'azione locale del gruppo* $\mathrm{SU}_2(\mathbb{C})$.

Dimostrazione. Come detto, il termine $\mathcal{L}_{\mathbf{A}}$ è già invariante in forma per definizione, quindi basta limitarsi a verificare l'invarianza del termine $\mathcal{L}$. Anzitutto[9]

$$\begin{aligned}
\tilde{\nabla}_\mu \tilde{\psi} &= (\partial_\mu - iq\, \tilde{A}_\mu)(U\psi) \\
&= \partial_\mu (U\psi) - iq \left[U A_\mu U^{-1} (U\psi) - \frac{i}{q} (\partial_\mu U) U^{-1} (U\psi) \right] \\
&= (\partial_\mu U)\psi + U(\partial_\mu \psi) - iq\, U A_\mu \psi - (\partial_\mu U)\psi \\
&= U(\partial_\mu - iq\, A_\mu)\psi = U\, \nabla_\mu \psi,
\end{aligned}$$

quindi si ha correttamente

$$\nabla_\mu \psi \to \tilde{\nabla}_\mu \tilde{\psi} = U(\mathbf{x}) \nabla_\mu \psi,$$

ossia la derivata covariante trasforma come una sezione. Analogamente si trova

$$(\nabla_\mu \psi)^H \to (\tilde{\nabla}_\mu \tilde{\psi})^H = (U(\mathbf{x}) \nabla_\mu \psi)^H = (\nabla_\mu \psi)^H U^H(\mathbf{x}).$$

Nella trasformazione

$$\mathcal{L}(\psi, \psi^H, \nabla_\mu \psi, (\nabla_\mu \psi)^H) \to \tilde{\mathcal{L}}(\tilde{\psi}, \tilde{\psi}^H, \tilde{\nabla}_\mu \tilde{\psi}, (\tilde{\nabla}_\mu \tilde{\psi})^H)$$

9 Nella trasformazione che segue si ometterà, sottintendendola, la dipendenza di U da $\mathbf{x}$ e scriveremo quindi U in luogo di $U(\mathbf{x})$.

avviene, di conseguenza, quanto segue:

$$\begin{aligned}\tilde{\mathcal{L}} &= \mathcal{L}(\tilde{\psi}, \tilde{\psi}^H, \tilde{\nabla}_\mu \tilde{\psi}, (\tilde{\nabla}_\mu \tilde{\psi})^H) \\ &= \frac{1}{2}\left[\eta^{\mu\nu}\,(\tilde{\nabla}_\mu \tilde{\psi})^H\,(\tilde{\nabla}_\nu \tilde{\psi}) - \frac{m^2c^2}{\hbar^2}\,\tilde{\psi}^H \tilde{\psi}\right] \\ &= \frac{1}{2}\left[\eta^{\mu\nu}\,(\nabla_\mu \psi)^H U^H U(\nabla_\nu \psi) - \frac{m^2c^2}{\hbar^2}\,\psi^H U^H U \psi\right] \\ &= \frac{1}{2}\left[\eta^{\mu\nu}\,(\nabla_\mu \psi)^H \nabla_\nu \psi - \frac{m^2c^2}{\hbar^2}\,\psi^H \psi\right] = \mathcal{L}.\end{aligned}$$

Si conclude pertanto l'invarianza in forma di (5.4) sotto l'azione locale del gruppo $SU_2(\mathbb{C})$. □

5.2.3 *Curvatura ed equazioni di Yang–Mills*

Avendo introdotto una forma di connessione se ne può calcolare la corrispondente forma di curvatura. L'equazione di Cartan (3.16) porge $\Omega = d\omega + \omega \wedge \omega$; valutando Ω su $X = \partial_\mu$ e $Y = \partial_\nu$ — ricordiamo che Ω è una matrice di 2-forme — si ottiene

$$\begin{aligned}\Omega_{\mu\nu} = \Omega(\partial_\mu, \partial_\nu) &= d\omega(\partial_\mu, \partial_\nu) + \omega \wedge \omega(\partial_\mu, \partial_\nu) \\ &= \partial_\mu \omega_\nu - \partial_\nu \omega_\mu - \omega\big([\partial_\mu, \partial_\nu]\big) + \omega_\mu \omega_\nu - \omega_\nu \omega_\mu \\ &= \partial_\mu \omega_\nu - \partial_\nu \omega_\mu + [\omega_\mu, \omega_\nu] \\ &= \partial_\mu(-iq\,\mathbf{A}_\nu) - \partial_\nu(-iq\,\mathbf{A}_\mu) + [-iq\,\mathbf{A}_\mu, -iq\,\mathbf{A}_\nu] \\ &= -iq\,\partial_\mu \mathbf{A}_\nu + iq\,\partial_\nu \mathbf{A}_\mu + (iq)^2\,[\mathbf{A}_\mu, \mathbf{A}_\nu] \\ &= -iq\,\big(\partial_\mu \mathbf{A}_\nu - \partial_\nu \mathbf{A}_\mu - iq\,[\mathbf{A}_\mu, \mathbf{A}_\nu]\big) = -iq\,F_{\mu\nu},\end{aligned}$$

avendo posto

$$F_{\mu\nu} = \partial_\mu \mathbf{A}_\nu - \partial_\nu \mathbf{A}_\mu - iq\,[\mathbf{A}_\mu, \mathbf{A}_\nu].$$

I termini $F_{\mu\nu}$, avendo due indici bassi, sono le componenti di un tensore 2-covariante F che è anche antisimmetrico, dal momento che $F_{\nu\mu} = \partial_\nu \mathbf{A}_\mu - \partial_\mu \mathbf{A}_\nu - iq\,[\mathbf{A}_\nu, \mathbf{A}_\mu] = -F_{\mu\nu}$. Il tensore F è chiamato *tensore di Yang–Mills* ed è la rappresentazione algebrica del campo dovuto all'interazione forte: di nuovo, dunque, la curvatura che si deduce dalla connessione introdotta su un fibrato si manifesta fisicamente come un campo di forze, in questo caso il campo delle forze a livello nucleare.

Equazioni di Yang–Mills

Anche in questo caso, avendo a disposizione la lagrangiana $\mathcal{L}_{\mathrm{YM}}$, è possibile descrivere in maniera completa l'evoluzione del sistema fisico in esame. E ancora, come nel caso dell'Elettromagnetismo, il termine lagrangiano $\mathcal{L}_{\mathbf{A}}$ dovuto alla presenza dei campi di Yang–Mills non ha forme privilegiate: le uniche restrizioni sulla scelta di $\mathcal{L}_{\mathbf{A}}$ sono l'invarianza rispetto alle trasformazioni (5.5) del potenziale di gauge

A e il fatto che debba produrre come risultato uno scalare. Concordemente all'analogo termine nel caso dell'Elettromagnetismo, i fisici hanno proposto di porre

$$\mathcal{L}_{\mathbf{A}} = -\frac{1}{4}\operatorname{Tr}(F_{\mu\nu}F^{\mu\nu});$$

questa scelta produce in maniera evidente uno scalare e l'invarianza è salvaguardata, dal momento che il tensore $F_{\mu\nu}$ trasforma secondo la regola $F_{\mu\nu} \to \tilde{F}_{\mu\nu} = U(\mathbf{x})F_{\mu\nu}U^H(\mathbf{x})$. In particolare si può minimizzare il funzionale d'azione (in questo caso detto *funzionale d'azione di Yang–Mills*), che assume la forma[10]

$$\mathcal{S}_{\mathrm{YM}} = -\frac{1}{4}\int_{\Omega}\operatorname{Tr}(F_{\mu\nu}F^{\mu\nu})\,\mathrm{d}\mathbf{x},$$

ove il dominio di integrazione è un opportuno aperto $\Omega \subset \mathbb{R}^4$. Le equazioni del moto che derivano dal problema di minimo su tale azione,

$$\partial_\mu F_{\mu\nu} - iq\,[A_\mu, F_{\mu\nu}] = 0, \tag{5.6}$$

costituiscono insieme all'identità di Bianchi

$$\begin{aligned}\partial_\alpha F_{\beta\gamma} + \partial_\beta F_{\gamma\alpha} + \partial_\gamma F_{\alpha\beta} + {}&\\ - iq\left([A_\alpha, F_{\beta\gamma}] + [A_\beta, F_{\gamma\alpha}] + [A_\gamma, F_{\alpha\beta}]\right) &= 0.\end{aligned} \tag{5.7}$$

le cosiddette *equazioni di Yang–Mills* e descrivono completamente la dinamica dell'interazione nucleare forte.

Confronto con l'Elettromagnetismo

Alla luce di quanto esposto finora è naturale fare alcune considerazioni che scaturiscono dal confronto della teoria dell'Elettromagnetismo con quella dell'interazione forte. La differenza di base è ovviamente la diversa scelta del gruppo di gauge nelle due teorie — $\mathrm{U}_1(\mathbb{C})$ per la prima e $\mathrm{SU}_2(\mathbb{C})$ per la seconda —, differenza che si riduce nei fatti alla proprietà del primo di essere, al contrario del secondo, un gruppo abeliano. Questo produce almeno due comportamenti che risaltano nella loro diversità:

i. mentre con la scelta del gruppo unitario l'ordine nella composizione di due trasformazioni è del tutto irrilevante, nel caso del gruppo $\mathrm{SU}_2(\mathbb{C})$ tale ordine, variando, dà luogo a trasformazioni differenti;

ii. il fatto che l'algebra di Lie di un gruppo di Lie abeliano sia anch'essa abeliana (vd. Osservazione 1.34) si riflette sulla forma di

10 Si osservi che, essendo la traccia invariante per similitudine, la definizione è ben posta.

connessione e, in particolare, sulla forma di curvatura: i coefficienti della 2-forma Ω nel caso della teoria di gauge con gruppo $SU_2(\mathbb{C})$

$$\Omega_{\mu\nu} = -iq\left(\partial_\mu \mathbf{A}_\nu - \partial_\nu \mathbf{A}_\mu - iq\left[\mathbf{A}_\mu, \mathbf{A}_\nu\right]\right)$$

presentano un addendo ulteriore, rispetto a quelli della forma analoga nel caso della teoria di gruppo $U_1(\mathbb{C})$

$$\Omega_{\mu\nu} = iq\left(\partial_\mu \mathbf{A}_\nu - \partial_\nu \mathbf{A}_\mu\right),$$

addendo che coinvolge il commutatore di due elementi dell'algebra di Lie, in questi ultimi assente proprio perché $\mathfrak{u}_1(\mathbb{C})$ è abeliana.

Queste differenze, in particolare l'ultima osservazione, suggeriscono che la seconda teoria costituisca una generalizzazione matematica e fisica della prima, nella quale si ricade prendendo come gruppo di gauge il gruppo abeliano $U_1(\mathbb{C})$. La generalizzazione investe anche le equazioni del moto: le equazioni di Yang–Mills (5.6) e (5.7) presentano infatti dei termini aggiuntivi che, nel caso si prenda $U_1(\mathbb{C})$ come gruppo di gauge, svaniscono restituendo le classiche equazioni di Maxwell del campo elettromagnetico; per dettagli ulteriori si rimanda a [5], pp. 547–548.

5.3 TEORIA DI GAUGE $SU_3(\mathbb{C})$ E MODELLO STANDARD

Diamo qui in chiusura di Capitolo un breve cenno a come siano state aggiornate le idee fin qui esposte e a quale sia l'attuale visione teorica accettata in Fisica.

5.3.1 *Un cenno alla Cromodinamica quantistica*

Il modello dell'interazione nucleare forte finora presentato è da considerarsi oggigiorno superato. All'impostazione che vedeva protone e neutrone come particelle di base della struttura dei nuclei atomici si è sostituita l'idea dei *quark*, particelle subnucleari che, legandosi opportunamente, costituiscono i primi due. Queste nuove particelle esistono in tre diversi stati, detti *carica di colore* e denotati con $\vec{r}$ (*red*), $\vec{b}$ (*blue*), $\vec{g}$ (*green*): un campo che rappresenta un singolo quark è quindi una combinazione lineare delle tre cariche e sarà pertanto una funzione $\psi : \mathbb{R}^4 \to \mathbb{C}^3$ che ad ogni punto $\mathbf{x}$ dello spaziotempo associa il vettore

$$\psi(\mathbf{x}) = \begin{bmatrix} \psi_r(\mathbf{x}) \\ \psi_b(\mathbf{x}) \\ \psi_g(\mathbf{x}) \end{bmatrix} = \psi_r(\mathbf{x})\,\vec{r} + \psi_b(\mathbf{x})\,\vec{b} + \psi_g(\mathbf{x})\,\vec{g},$$

per opportune funzioni ψ_r, ψ_b, $\psi_g \in C^\infty(\mathbb{R}^4)$ a valori complessi, avendo indicato con

$$\vec{r} = \begin{bmatrix} 1 \\ 0 \\ 0 \end{bmatrix}, \qquad \vec{b} = \begin{bmatrix} 0 \\ 1 \\ 0 \end{bmatrix}, \qquad \vec{g} = \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \\ 1 \end{bmatrix},$$

i generatori dello spazio (di Hilbert) tridimensionale degli stati possibili di un quark, ossia le tre cariche di colore. In questo nuovo modello — che va sotto il nome di *Cromodinamica quantistica*[11] — si rende necessario, di conseguenza, sostituire al gruppo di gauge $SU_2(\mathbb{C})$ il gruppo di Lie $SU_3(\mathbb{C})$: la sua algebra di Lie $\mathfrak{su}_3(\mathbb{C})$ è costituita da matrici antihermitiane di ordine tre aventi traccia nulla ed è generata dalle matrici $\{i\lambda_1, \dots, i\lambda_8\}$, essendo le λ_j otto matrici hermitiane dette *matrici di Gell–Mann*[12], $j = 1, \dots, 8$.

Al solito, la costruzione matematica richiede l'introduzione di un fibrato principale P (in questo caso con gruppo di struttura $SU_3(\mathbb{C})$) a cui sia associato un fibrato vettoriale complesso (in questo caso di rango tre); la 1-forma di connessione su P sarà una matrice ω di ordine tre a valori in $\mathfrak{su}_3(\mathbb{C})$ e, in analogia alle teorie precedenti, avrà la forma

$$\omega = -iq\,\mathbf{A} = -iq\,\lambda_a \mathbf{A}^a,$$

con $\omega_\mu = -iq\,A_\mu = -iq\,\lambda_a A^a_\mu$. È qui necessario, pertanto, introdurre ben otto campi $\mathbf{A}^1, \dots, \mathbf{A}^8$ per mediare l'interazione fra i quark; la costante q è detta *costante di accoppiamento*. Agli otto campi sono associate le otto particelle elementari indipendenti che mediano l'interazione forte (i quanti del campo di gauge **A**), dette *gluoni*. Anche la Cromodinamica quantistica è quindi una teoria di gauge non abeliana.

5.3.2 *Il Modello standard, una teoria di gauge*

Nonostante la teoria trattata nella Sezione 5.2 non si adatti a descrivere l'interazione forte, si è scoperto successivamente che poteva

---

11 In inglese *Quantum Chromodynamics*, da cui l'acronimo QCD, in analogia con la Elettrodinamica quantistica, in inglese *Quantum Electrodynamics*, QED.

12 Le matrici di Gell–Mann sono le seguenti:

$$\lambda_1 = \begin{bmatrix} 0 & 1 & 0 \\ 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{bmatrix}, \quad \lambda_2 = \begin{bmatrix} 0 & -i & 0 \\ i & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{bmatrix}, \quad \lambda_3 = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & -1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{bmatrix},$$

$$\lambda_4 = \begin{bmatrix} 0 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 0 \\ 1 & 0 & 0 \end{bmatrix}, \quad \lambda_5 = \begin{bmatrix} 0 & 0 & -i \\ 0 & 0 & 0 \\ i & 0 & 0 \end{bmatrix}, \quad \lambda_6 = \begin{bmatrix} 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & 0 \end{bmatrix},$$

$$\lambda_7 = \begin{bmatrix} 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & -i \\ 0 & i & 0 \end{bmatrix}, \quad \lambda_8 = \frac{1}{\sqrt{3}} \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & -2 \end{bmatrix}.$$

Le prime tre sono le matrici di Pauli bordate con una riga e una colonna ulteriori di zeri.

invece essere utilizzata per trattare con efficacia l'interazione nucleare debole. La possibilità di formalizzare con successo tre delle quattro interazioni fondamentali della natura attraverso il formalismo matematico della teoria dei fibrati e delle connessioni ha portato quindi i fisici ad elaborare il cosiddetto *Modello standard*, una teoria di gauge — non abeliana — che permette di descrivere coralmente la forza elettromagnetica, l'interazione debole e l'interazione forte. Questo quadro teorico, che risulta al giorno d'oggi un riferimento concordemente accettato in Fisica, descrive accuratamente i risultati sperimentali condotti sulle forze fondamentali. Il gruppo di gauge è in questo caso $U_1(\mathbb{C}) \times SU_2(\mathbb{C}) \times SU_3(\mathbb{C})$: il prodotto $U_1(\mathbb{C}) \times SU_2(\mathbb{C})$ descrive l'*interazione elettrodebole*, unificazione della forza elettromagnetica e dell'interazione debole, mentre il fattore $SU_3(\mathbb{C})$ descrive l'interazione nucleare forte.

BIBLIOGRAFIA

[1] Abate, M., Tovena, F., *Geometria Differenziale*, Springer–Verlag Italia; Milano, 2011.

[2] Cabibbo, N., Maiani, L., Benhar, O., *An introduction to Gauge Theories*, CRC Press Taylor & Francis Group; Boca Raton, 2018.

[3] Chern, S. S., Chen, W. H., Lam, K. S., *Lectures on Differential Geometry*, World Scientific Publishing; Singapore, 2000.

[4] Dubrovin, B. A., Fomenko, A. T., Novikov, S. P., *Modern Geometry — Methods and Applications*, Vol. 1, Springer-Verlag; New York, 1984.

[5] Frankel, T., *The geometry of Physics — An introduction*, terza edizione, Cambridge University Press; Cambridge, 2012.

[6] Freeman, K., *A historical overview of connections in geometry*; disponibile in rete all'indirizzo `http://www.math.wichita.edu/~pparker/research/Freeman_Kamielle_SP2011.pdf`, Maggio 2011.

[7] Gasperini, M., *Manuale di Relatività Ristretta*, Springer–Verlag Italia; Milano, 2010.

[8] Goldberg, T. E., *What is a connection, and what is it good for?*, Note del docente; Olivetti Seminar, Cornell University, 1 April 2008.

[9] Kobayashi, S., Nomizu, K., *Foundations of Differential Geometry — volume 1*, John Wiley & Sons; New York, 1963.

[10] Kolář, I., Michor, W., Slovák, J., *Natural Operations in Differential Geometry*, Springer-Verlag; Berlin Heidelberg, 1993.

[11] Lechner, K., *Elettrodinamica classica*, Springer–Verlag Italia; Milano, 2014.

[12] Maltempi, G., Montelucci, G., Perrotti, D., Rico, I., *Fibrati vettoriali e principali*, ; Seminario studenti del corso di Geometria superiore (Laurea Magistrale in Matematica, A. A. 2012–2013), prof. P. Piccinni, Università La Sapienza di Roma; disponibili in rete all'indirizzo `http://www1.mat.uniroma1.it/people/piccinni/geometria-superiore-1213/Esercizi_attachments/fibratiprincipali.pdf`, 23 Maggio 2013.

[13] Nakahara, M., *Geometry, Topology and Physics*, IoP Publishing Ltd; Bristol, 2003.

[14] Sternberg, S., *Curvature in Mathematics and in Physics*, Dover Publications, Inc.; Mineola New York, 2012.

[15] Stoppa, J., *Dalla geometria alla fisica: la curvatura*; Note del docente disponibili in rete all'indirizzo `http://www-dimat.unipv.it/stoppa/research/lezione.pdf`, 13 Giugno 2013.

[16] Trani, P., *Alcuni aspetti dell'evoluzione della Geometria dal secolo XIX alla metà del XX secolo*; Note del docente disponibili in rete all'indirizzo `http://www1.mat.uniroma1.it/people/piccinni/geometria-superiore-1213/Esercizi_attachments/aspetti_evolutivi_geometria.pdf`, 15 Maggio 2013.

[17] Zanghì, N., *Lezioni di Fisica Teorica*; Note del docente disponibili in rete all'indirizzo `http://www.ge.infn.it/~zanghi/FT/ZUM.pdf`.

RINGRAZIAMENTI

Desidero rivolgere al mio relatore, prof. Francesco Bottacin, un sincero omaggio di stima e gratitudine per la sua estrema disponibilità e per avermi concesso tempo e attenzioni oltre ogni mia aspettativa.

Ringrazio ancora una volta la mia famiglia per la fiducia che ha riposto finora nei miei progetti e per il suo sostegno costante, silenzioso e fondamentale, grazie al quale oggi posso festeggiare questo risultato conseguito. Grazie perché, nonostante le mie difficoltà a comunicare sentimenti e paure, è sempre paziente e disposta a tendermi la mano.

Parallelamente, debbo mostrare la mia gratitudine alla mia seconda famiglia: un caloroso pensiero è diretto ai miei amici, ai colleghi di corso, a tutte le persone che mi hanno dimostrato sinceramente la propria vicinanza in questi anni; un grazie è rivolto anche a questa magnifica città, che con la sua accoglienza mi ha fatto sentire a casa e con le sue dinamiche mi ha aiutato a crescere.

Un ultimo ringraziamento particolarmente sentito è riservato a Fiammetta ed Eugenio, la cui lontananza ha confermato il nostro profondo legame e lo ha reso più concreto e vivo; a Stefano ed Elisabetta per aver saputo essere preziosamente vicini quando tutti erano distanti; a Michela, grazie alla quale, in un momento di grande difficoltà, è stato più facile tornare a sorridere.

Padova, 28 Settembre 2018.