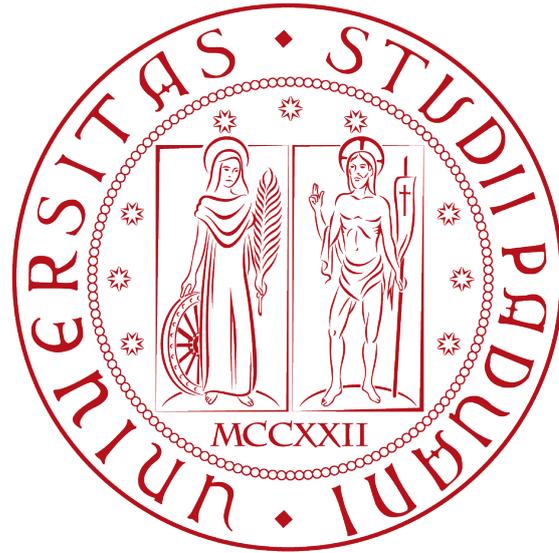


**Università degli Studi di Padova**

DIPARTIMENTO DI FISICA E ASTRONOMIA  
"GALILEO GALILEI"

CORSO DI LAUREA IN FISICA



## **Alternative Cosmologiche alla Materia Oscura**

LAUREANDA  
*Benedetta Spina*

RELATORE  
*Prof. Michele Liguori*

---

ANNO ACCADEMICO 2017/2018



## Sommario

In questa trattazione si sono considerate due delle principali teorie alternative all'ipotesi di Materia Oscura: i modelli MOND e TeVeS.

Dopo una prima introduzione alla cosmologia, si sono analizzate le evidenze che più hanno suggerito la presenza di grandi quantità di materia nascosta nell'Universo: partendo dalle considerazioni di Zwicky sull'ammasso della Chioma di Berenice, si è passati allo studio delle curve di rotazione delle galassie a spirale e alla composizione delle stesse, fino alla formulazione del modello  $\Lambda$ CDM. Si sono visti i successi dello stesso in larga scala.

Si è poi proceduto a esaminare i problemi legati al modello su scala ridotta, inerenti la distribuzione di massa negli aloni galattici e nella galassie nane e alla fenomenologia dello stesso; si sono considerate la relazione di Tully-Fischer e le evidenze derivanti le galassie a bassa densità, ipotizzando le caratteristiche dei possibili candidati di materia oscura.

Nel Capitolo 3 si è formulata la teoria MOND, basata su una modifica della gravità e non sull'introduzione di materia non visibile; si sono analizzati i successi su scala ridotta e le predizioni generali della teoria, come la relazione di Tully-Fischer e il ruolo unificatore della costante  $a_0$ . Si è arrivati allo studio di MOND su larga scala e sulle problematiche che lascia aperte in ambito relativistico.

Infine, si è generalizzata MOND a TeVeS, in grado di recuperare la Relatività Generale e le evidenze su larga scala e ridotta. Tuttavia la teoria, sebbene relativistica, non è in grado di conciliare le osservazioni sulla CMB e sulle oscillazioni acustiche dei barioni.



# Indice

<b>1</b>	<b>Introduzione alla Cosmologia</b>	<b>1</b>
1.1	Principio cosmologico . . . . .	1
1.2	Espansione dell'Universo . . . . .	1
1.3	Equazioni di Friedmann . . . . .	2
1.3.1	Equazione di Friedmann . . . . .	3
1.3.2	Equazione di continuità . . . . .	4
1.3.3	Equazione di accelerazione . . . . .	4
1.4	Geometria dell'Universo . . . . .	5
1.5	Legge di Hubble e Redshift . . . . .	6
1.6	Risoluzione equazione di stato . . . . .	7
1.6.1	Materia . . . . .	7
1.6.2	Radiazione . . . . .	8
1.6.3	Fluido a più componenti . . . . .	8
1.7	Curvatura ed evoluzione dell'Universo . . . . .	9
1.8	Parametro di densità . . . . .	9
1.9	Costante cosmologica . . . . .	10
<b>2</b>	<b>Materia Oscura nell'Universo</b>	<b>13</b>
2.1	Il problema della massa mancante . . . . .	13
2.1.1	Peso dell'Universo: stelle e nucleosintesi . . . . .	13
2.1.2	Prime evidenze: curve di rotazione delle galassie . . . . .	14
2.1.3	Moto e formazione dei dischi galattici . . . . .	17
2.1.4	Composizione e moto dei cluster di galassie . . . . .	17
2.2	Modello di Dark Matter . . . . .	19
2.2.1	Modello a sfera isoterma . . . . .	19
2.2.2	Modello ad aloni NFW . . . . .	20
2.2.3	Modello $\Lambda$ CDM . . . . .	21
2.3	Problemi legati al modello: distribuzione di massa . . . . .	24
2.3.1	Problema della cuspidale degli aloni galattici . . . . .	25
2.3.2	Problema delle galassie nane . . . . .	25
2.3.3	Too big to fail problem . . . . .	26
2.3.4	Soluzione in fisica barionica . . . . .	26
2.3.5	Soluzione con materia oscura . . . . .	27

2.4	Problemi legati al modello: fenomenologia . . . . .	29
2.4.1	Galassie a bassa luminosità (LSB) . . . . .	29
2.4.2	Relazione Barionica di Tully-Fischer . . . . .	30
2.5	Possibili candidati . . . . .	30
<b>3</b>	<b>Modified Newtonian Dynamics</b>	<b>33</b>
3.1	Teoria MOND . . . . .	33
3.2	MOND e curve di rotazione . . . . .	34
3.3	Predizioni generali della teoria MOND . . . . .	38
3.3.1	Luminosità superficiale critica . . . . .	38
3.3.2	Legge di Freeman . . . . .	39
3.3.3	Relazione di Faber-Jackson . . . . .	40
3.3.4	Relazione di Tully-Fischer Barionica . . . . .	40
3.3.5	Effetto di campo esterno . . . . .	42
3.3.6	Ruolo di $a_0$ . . . . .	43
3.4	Ammassi di Galassie . . . . .	44
3.5	MOND come modifica alla legge di inerzia . . . . .	46
3.6	MOND come modifica della gravità . . . . .	47
<b>4</b>	<b>TeVés</b>	<b>49</b>
4.1	Basi per una teoria relativistica MOND . . . . .	49
4.2	Formulazione di TeVeS . . . . .	50
4.3	Limite relativistico in sistemi quasistatici localizzati . . . . .	53
4.4	Limite non relativistico . . . . .	54
4.4.1	MOND in simmetria sferica . . . . .	55
4.5	Lensing gravitazionale con TeVeS . . . . .	56
4.6	Oscillazioni acustiche dei barioni . . . . .	58
4.7	Conclusione . . . . .	61
	<b>Bibliografia</b>	<b>63</b>

# Capitolo 1

## Introduzione alla Cosmologia

In questa sezione si vogliono andare ad introdurre i concetti e le idee più rilevanti dal punto di vista cosmologico che verranno poi approfonditi e utilizzati nelle sezioni successive.

### 1.1 Principio cosmologico

La pietra miliare della cosmologia moderna è l'idea che il posto da noi occupato nell'Universo non abbia niente di speciale, conosciuta come **principio cosmologico**. Una riformulazione più generale di questo principio asserisce che l'Universo appaia sempre lo stesso da qualunque punto nel tempo e nello spazio esso venga osservato. Tale principio non è esatto: l'approssimazione è tanto più accurata quanto più si amplia la scala di osservazione considerata; è dunque una proprietà globale dell'Universo, che si indebolisce nell'osservazione di fenomeni locali.

Il principio cosmologico è sostenuto dall'evidenza che l'Universo sia regolare su larga scala; in questa visione, l'Universo possiede due importanti proprietà: **omogeneità** e **isotropia**. Rispettivamente, esso appare lo stesso da ogni punto e in ogni direzione lo si osservi.

### 1.2 Espansione dell'Universo

Le evidenze sperimentali raccolte dall'osservazione degli oggetti cosmologici hanno permesso di evidenziare il fatto che ogni oggetto nell'Universo sembrerebbe allontanarsi da noi, con velocità tanto maggiore quanto più l'oggetto è distante.

La velocità di recessione è misurata mediante lo studio del **redshift**, in breve il corrispettivo dell'effetto Doppler per le onde luminose. Le galassie vengono infatti classificate a partire da linee di emissione e assorbimento caratteristiche che compongono lo spettro; se la galassia si sta allontanando, le linee caratteristiche tendono a spostarsi verso la parte rossa dello spettro, dando luogo a questo fenomeno.

Quasi tutte le galassie appaiono allontanarsi, ed è quindi possibile definire il redshift come

$$z = \frac{\lambda_{obs} - \lambda_{em}}{\lambda_{em}}, \quad (1.1)$$

dove  $\lambda_{em}$  e  $\lambda_{obs}$  corrispondono alle lunghezze d'onda rispettivamente del punto di emissione e del punto di osservazione. Se un oggetto si sta allontanando ad una velocità  $v$ , il corrispondente redshift è dato dalla relazione<sup>1</sup>

$$z = \frac{v}{c}. \quad (1.2)$$

Dalle osservazioni compiute sulle velocità di recessione, E. Hubble estrapolò una relazione tra la velocità dell'oggetto  $\vec{v}$  e la sua distanza dall'osservatore  $\vec{r}$ , ottenendo la **legge di Hubble**

$$\vec{v} = H_0 \vec{r}, \quad (1.3)$$

dove  $H_0$  è la costante di Hubble<sup>2</sup>.

Come il principio cosmologico, la legge di Hubble non è del tutto esatta a livello locale; tuttavia descrive molto bene il comportamento generale delle galassie a livello globale.

È necessario sottolineare che tutti gli osservatori vedono tutti gli oggetti allontanarsi con velocità proporzionale alla distanza: nuovamente, non vi è un osservatore (e quindi un punto nell'Universo) privilegiato, ma il principio cosmologico continua a essere valido.

### 1.3 Equazioni di Friedmann

Lo studio del comportamento delle galassie e quindi dell'espansione dell'Universo può essere effettuato anche senza utilizzare le equazioni di Relatività Generale di Einstein. L'**equazione di Friedmann**, cruciale all'interno di questa trattazione, può essere ricavata a partire dalla semplice gravità Newtoniana. Per fare questo, è necessario utilizzare un particolare risultato dovuto a Newton, che non verrà dimostrato in questa trattazione: in una distribuzione a simmetria sferica di materia, una particella non risente dalla forza esercitata dalla massa esterna al raggio individuato dalla posizione della stessa e la massa presente all'interno di questo stesso raggio può essere pensata come concentrata nel punto centrale. Questa particolare proprietà è dovuta alla dipendenza quadratica inversa della forza di attrazione gravitazionale  $F = \frac{GMm}{r^2}$  rispetto al raggio  $r$ .

---

<sup>1</sup>Nella relazione non si tiene conto delle necessarie correzioni relativistiche se la velocità  $v$  risulta essere paragonabile alla velocità della luce  $c$ . Tuttavia nell'ambito delle osservazioni di oggetti lontani, vi sono altre considerazioni che devono essere poste in evidenza, come il tempo di propagazione della luce e il cambiamento della velocità relativa associata.

<sup>2</sup>In realtà, il valore di  $H_0$  è costante in ogni istante in ogni punto dell'Universo a causa del principio cosmologico, ma non è costante nel tempo, come si vedrà successivamente.

### 1.3.1 Equazione di Friedmann

È possibile ora ricavare l'equazione di Friedmann, calcolando l'energia potenziale gravitazionale e l'energia cinetica di una particella di prova e utilizzando successivamente la conservazione dell'energia.

Si consideri una distribuzione di massa a simmetria sferica con densità  $\rho$  e una particella a distanza  $r$  dal centro di tale distribuzione, di massa  $m$ . Grazie a quanto visto per distribuzioni di questo tipo, la particella di prova risentirà della forza esercitata solo dalla massa contenuta all'interno della sfera di raggio  $r$ , ovvero  $M = \frac{4}{3}\pi\rho r^3$ , di contributo

$$F = \frac{GMm}{r^2} = \frac{4\pi G\rho r m}{3}. \quad (1.4)$$

L'energia potenziale gravitazionale associata vale

$$V = -\frac{GMm}{r} = -\frac{4\pi G\rho r^2 m}{3}. \quad (1.5)$$

Mentre l'energia cinetica è data dalla relazione

$$T = \frac{1}{2}m\dot{r}^2. \quad (1.6)$$

L'utilizzo della conservazione dell'energia fornisce la seguente equazione

$$\begin{aligned} U = V + T &= \\ &= \frac{1}{2}m\dot{r}^2 - \frac{4\pi G\rho r^2 m}{3}, \end{aligned} \quad (1.7)$$

che rappresenta l'evoluzione della separazione  $r$  tra due particelle. Ora, essendo l'Universo omogeneo, tale equazione è valida per qualsiasi coppia di particelle; è possibile quindi cambiare il sistema di coordinate passando a **coordinate comoventi**<sup>3</sup>. A causa dell'espansione uniforme dell'Universo è possibile individuare una relazione tra la distanza reale  $\vec{r}$  e la distanza comovente  $\vec{x}$ , come

$$\vec{r} = a(t) \cdot \vec{x}, \quad (1.8)$$

con  $a(t)$  dipendente solo dal tempo, quantità conosciuta come **fattore di scala dell'Universo** in quanto indice della velocità di espansione dell'Universo stesso.

In questo particolare sistema di riferimento  $\dot{x} = 0$ . Sostituendo la relazione (1.8) nell'equazione (1.7), si ottiene

$$U = \frac{1}{2}m\dot{a}^2 x^2 - \frac{4\pi}{3}G\rho a^2 x^2 m. \quad (1.9)$$

Ponendo  $kc^2 = -\frac{2U}{m\dot{a}^2 x^2}$  e moltiplicando per  $\frac{2}{m\dot{a}^2 x^2}$  si ottiene

$$\left(\frac{\dot{a}}{a}\right)^2 = \frac{8\pi G}{3}\rho - \frac{kc^2}{a^2}, \quad (1.10)$$

forma standard dell'**equazione di Friedmann**<sup>4</sup>.

<sup>3</sup>In questo tipo di coordinate, le galassie mantengono fissa la propria posizione: tale accorgimento è particolarmente rilevante in quanto permetterà di porre  $\dot{x} = 0$  successivamente.

<sup>4</sup>La forma usualmente utilizzata si ottiene ponendo convenzionalmente  $c = 1$ .

### 1.3.2 Equazione di continuità

Oltre all'equazione di Friedmann (1.10) è necessario formulare un'equazione che descriva l'evoluzione della densità  $\rho$  di materia nel tempo, alla quale si associa la **pressione**  $p$  della materia stessa. La relazione tra queste quantità è detta **equazione di continuità**. Ai diversi tipi di materiale presenti nell'Universo, sono associate diverse pressioni e quindi diverse possibili evoluzioni temporali della densità.

Per una certa distribuzione di massa, l'energia relativa è data da  $E = mc^2$ , da cui, utilizzando l'espressione per il volume in coordinate comoventi, risulta

$$E = \frac{4\pi}{3} a^3 \rho c^2. \quad (1.11)$$

La derivata temporale dell'energia è

$$\frac{dE}{dt} = 4\pi a^2 \rho c^2 \frac{da}{dt} + \frac{4\pi}{3} a^3 \frac{d\rho}{dt} c^2. \quad (1.12)$$

Mentre la derivata temporale del volume è data da

$$\frac{dV}{dt} = 4\pi a^2 \frac{da}{dt}. \quad (1.13)$$

Considerando ora la prima legge della termodinamica

$$dE + pdV = TdS, \quad (1.14)$$

assumendo un'espansione reversibile<sup>5</sup>  $dS = 0$  e sostituendovi le espressioni ottenute in (1.12) e (1.13), si ottiene

$$\dot{\rho} + 3\frac{\dot{a}}{a} \left( \rho + \frac{p}{c^2} \right) = 0, \quad (1.15)$$

ovvero l'espressione per l'**equazione di continuità**, dove è possibile osservare la presenza di due termini responsabili del cambiamento della densità.

È possibile trovare una soluzione all'equazione (1.15) solo facendo determinate ipotesi sul legame tra pressione e densità. Solitamente, si assume che ci sia un'unica pressione associata a ogni densità (determinata dal tipo di materiale presente nell'Universo), tale che  $p \equiv p(\rho)$ : questo tipo di relazione è detta **equazione di stato**.

### 1.3.3 Equazione di accelerazione

Combinando l'equazione di Friedmann (1.10) e l'equazione di continuità (1.15) è possibile ottenere una terza equazione che descrive l'accelerazione del fattore di scala.

Differenziando l'equazione (1.10) rispetto al tempo, si ha

$$2\frac{\dot{a}}{a} \frac{a\ddot{a} - \dot{a}^2}{a^2} = \frac{8\pi G}{3} \dot{\rho} + 2\frac{kc^2\dot{a}}{a^3}. \quad (1.16)$$

---

<sup>5</sup>In analogia a quanto avviene per un gas isotropo all'interno di un pistone.

Sostituendovi l'equazione (1.15) e semplificando, si ottiene l'**equazione di accelerazione**

$$\frac{\ddot{a}}{a} = -\frac{4\pi G}{3} \left( \rho + \frac{3p}{c^2} \right). \quad (1.17)$$

Si nota che se un certo materiale ha una qualsiasi pressione, questa aumenta la forza gravitazionale che porta a una decelerazione dell'espansione.

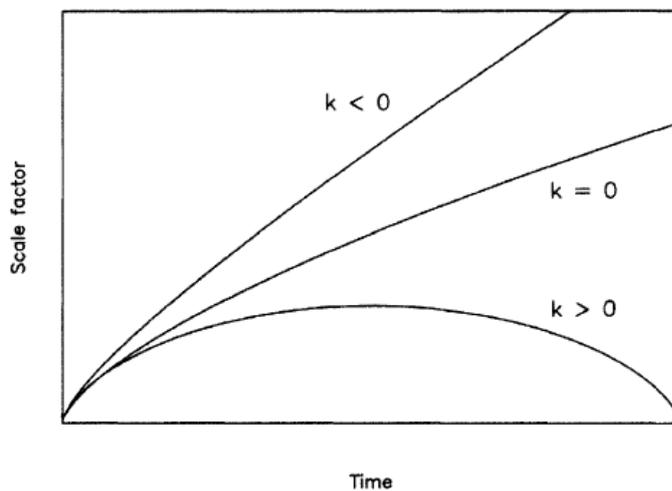
## 1.4 Geometria dell'Universo

Una volta ottenuta l'equazione di Friedmann (1.10), è possibile fare alcune considerazioni sul reale significato della costante  $k$ : all'interno del contesto della relatività generale, essa misura la curvatura dello spazio.

All'inizio di questa trattazione, si è richiesto che il modello di Universo fosse sia omogeneo che isotropo; il più semplice tipo di geometria che soddisfa queste proprietà è una **geometria piana**, dove valgono i postulati di Euclide. Ci sono tuttavia altre possibili geometrie che prevedano le proprietà richieste, stabilite in base al valore di  $k$ , visibili in Tabella 1.1 e in Figura 1.1.

Curvatura	Geometria	Tipo di Universo
$k > 0$	Sferica	Chiuso
$k = 0$	Piana	Piatto
$k < 0$	Iperbolica	Aperto

**Tabella 1.1:** Possibili geometrie per Universo omogeneo e isotropo



**Figura 1.1:** Rappresentazione schematica delle tre possibili evoluzioni dell'Universo, corrispondenti ad valori di  $k$ . Inizialmente le tre linee sono molto vicine, rendendo più difficoltosa l'identificazione dell'espansione attuale. Da [13].

In seguito verrà stabilito un legame tra la curvatura dell'Universo e l'espansione dello stesso.

Per semplicità, è possibile riscrivere il fattore  $k$ : la prima e la terza tipologia di curvatura diventano quindi  $k = \pm 1$ .

## 1.5 Legge di Hubble e Redshift

La velocità di recessione delle galassie in una stessa direzione è data da

$$\vec{v} = \frac{d\vec{r}}{dt} = \frac{|\dot{\vec{r}}|}{|\vec{r}|} \vec{r} = \frac{\dot{a}}{a} \vec{r}. \quad (1.18)$$

La legge di Hubble asserisce che la costante di proporzionalità<sup>6</sup>  $H$  sia identificata con

$$H = \frac{\dot{a}}{a}. \quad (1.19)$$

Essendo tale valore positivo, si è stabilito che l'Universo si stia espandendo e non contraendo. È importante sottolineare che  $H$  non è in realtà una vera e propria costante: grazie al principio cosmologico, essa è sicuramente costante nello spazio, ma non vi sono ragioni per cui lo debba essere anche nel tempo; mediante l'equazione di Friedmann (1.10) è possibile scrivere l'evoluzione temporale di  $H(t)$

$$H^2 = \frac{8\pi G}{3} \rho - \frac{k}{a^2}. \quad (1.20)$$

Tale valore, pur restando sempre positivo, decresce con il tempo, pertanto l'espansione dell'Universo rallenta a causa dell'attrazione gravitazionale della materia presente in esso.

La costante di Hubble è usualmente parametrizzata con

$$H_0 = 100 h \frac{\text{km}}{\text{s Mpc}}, \quad (1.21)$$

e mediante le misure effettuate da Hubble Space Telescope Key Project si ha

$$h = 0.72 \pm 0.08. \quad (1.22)$$

È possibile stabilire una relazione tra il redshift osservato e il fattore di scala. Si prendano in considerazione due oggetti molto vicini (separazione  $dr$ ) tra cui passa un fascio luminoso. La loro velocità relativa è data dalla legge di Hubble

$$dv = H dr = \frac{\dot{a}}{a} dr. \quad (1.23)$$

---

<sup>6</sup>Il valore attuale è indicato con  $H_0$

Essendo i due punti vicini, è possibile applicare la legge di Doppler, definendo  $d\lambda = \lambda_{rec} - \lambda_{em}$  la differenza tra le lunghezze d'onda osservata ed emessa, positiva visto che la lunghezza d'onda aumenta

$$\frac{d\lambda}{\lambda_{em}} = \frac{dv}{c}. \quad (1.24)$$

Il tempo trascorso tra emissione e ricezione è dato da  $dt = \frac{dr}{c}$ , che fornisce

$$\frac{d\lambda}{\lambda_{em}} = \frac{\dot{a}}{a} \frac{dr}{c} = \frac{\dot{a}}{a} dt = \frac{da}{a}. \quad (1.25)$$

Risolvendo l'equazione, si trova che  $\lambda \propto a$ .

Questo tipo di derivazione può essere esteso al caso generale e indica che all'espandersi dello spazio le lunghezze d'onda si allungano: dal cambiamento di queste è possibile fare delle opportune considerazioni su quanto l'Universo si sia espanso dall'emissione del fascio di luce iniziale.

Il redshift definito nell'equazione (1.1) è legato al fattore di scala come

$$1 + z = \frac{\lambda_{rec}}{\lambda_{em}} = \frac{a(t_{rec})}{a(t_{em})}. \quad (1.26)$$

## 1.6 Risoluzione equazione di stato

Per risolvere l'**equazione di stato** (1.15) con l'ipotesi che la pressione dipenda dalla densità delle diverse tipologie di materiali presenti nell'Universo, è necessario considerare diverse possibilità sulla composizione dello stesso:

- **Materia:** in riferimento alle particelle non relativistiche, che contribuiscono con un termine di pressione nullo  $p = 0$ . Un Universo senza pressione è una buona approssimazione per lo studio degli atomi presenti una volta che questo si è raffreddato.
- **Radiazione:** in riferimento a particelle relativistiche; la loro energia cinetica comporta una forza di pressione (pressione di radiazione) che si dimostra essere  $p = \frac{\rho c^2}{3}$ .

Si vuole risolvere in particolare il caso in cui  $k = 0$ , corrispondente ad una geometria piana.

### 1.6.1 Materia

Si risolve l'equazione di continuità, con la condizione  $p = 0$ :

$$\dot{\rho} + 3\frac{\dot{a}}{a}\rho = 0 \quad \rightarrow \quad \frac{1}{a^3} \frac{d}{dt}(\rho a^3) = 0 \quad \rightarrow \quad \frac{d}{dt}(\rho a^3) = 0, \quad (1.27)$$

che ha per soluzione

$$\rho \propto \frac{1}{a^3}. \quad (1.28)$$

La densità quindi decresce al crescere del volume dell'Universo. È possibile riscrivere  $a(t)$  di un fattore arbitrario a causa della forma delle equazioni che si stanno risolvendo; sia  $\rho_0$  la densità attuale, si ottiene

$$\rho = \frac{\rho_0}{a^3}. \quad (1.29)$$

Risolvendo l'equazione di Friedmann associata, è possibile determinare la variazione di  $a$  e  $\rho$  nel tempo e in particolare una relazione per l'espansione di  $H(t)$ :

$$a(t) = \left(\frac{t}{t_0}\right)^{\frac{2}{3}}; \quad \rho(t) = \frac{\rho_0 t_0^2}{t^2}; \quad H(t) \equiv \frac{\dot{a}}{a} = \frac{2}{3t}; \quad (1.30)$$

che come si può osservare, diventa tanto minore tanto più l'Universo invecchia; nonostante il contributo della gravità, la materia nell'Universo non collassa, ma si espande all'infinito.

### 1.6.2 Radiazione

Per quanto riguarda la radiazione, si ha  $p = \frac{\rho c^2}{3}$ . L'equazione di continuità assume la forma

$$\dot{\rho} + 4\frac{\dot{a}}{a}\rho = 0, \quad (1.31)$$

che ha soluzione

$$\rho \propto \frac{1}{a^4}. \quad (1.32)$$

Risolvendo l'equazione di Friedmann associata, è possibile determinare la variazione di  $a$  e  $\rho$  nel tempo e in particolare una relazione per l'espansione di  $H(t)$ :

$$a(t) = \left(\frac{t}{t_0}\right)^{\frac{1}{2}}; \quad \rho(t) = \frac{\rho_0 t_0^2}{t^2}; \quad H(t) \equiv \frac{\dot{a}}{a} = \frac{1}{2t}. \quad (1.33)$$

L'Universo si espande quindi più lentamente se domina la radiazione rispetto alla materia, come conseguenza della maggiore decelerazione dovuta alla presenza di pressione.

### 1.6.3 Fluido a più componenti

Una situazione più generale è data dalla presenza di materia e radiazione insieme: la densità nell'equazione di Friedmann è ora

$$\rho = \rho_{mat} + \rho_{rad}. \quad (1.34)$$

La soluzione analitica del fattore di scala è complicata e poco utile ai fini questa trattazione: è però interessante analizzare le due casistiche in cui sia un tipo o l'altro di densità a dominare

- Radiazione dominante:

$$a(t) \propto t^{\frac{1}{2}}; \quad \rho_{rad} \propto \frac{1}{t^2}; \quad \rho_{mat} \propto \frac{1}{a^3} \propto \frac{1}{t^{\frac{3}{2}}}. \quad (1.35)$$

La densità di materia decresce più lentamente della densità di radiazione; per quanto piccolo inizialmente, il contributo della densità di materia alla fine sarà dominante; un Universo dominato da radiazione è instabile.

- Materia dominante:

$$a(t) \propto t^{\frac{2}{3}}; \quad \rho_{mat} \propto \frac{1}{t^2}; \quad \rho_{rad} \propto \frac{1}{a^4} \propto \frac{1}{t^{\frac{8}{3}}}. \quad (1.36)$$

Questa configurazione è stabile; la materia è dominante rispetto alla radiazione.

## 1.7 Curvatura ed evoluzione dell'Universo

Si è visto il caso di espansione dell'Universo corrispondente ad un valore di  $k$  nullo. Si vogliono ora analizzare le casistiche  $k = \pm 1$  e in particolare se è possibile fermare l'espansione dell'Universo ( $H = 0$ ).

Riprendendo l'equazione di Friedmann

$$H^2 = \frac{8\pi G}{3}\rho - \frac{k}{a^2}, \quad (1.37)$$

si osserva che una soluzione con  $k < 0$  rende  $H^2$  positivo, escludendo la soluzione  $H = 0$ : in questo caso l'Universo continuerà ad espandersi e il secondo termine sarà quello dominante, ottenendo

$$\left(\frac{\dot{a}}{a}\right)^2 = -\frac{k}{a^2}. \quad (1.38)$$

La soluzione sarà  $a \propto t$ : al passare del tempo, l'espansione diventerà ancora più veloce, dando luogo ad un'**espansione libera**.

Se invece  $k > 0$ , è possibile ottenere la soluzione  $H = 0$ : il contributo del termine in  $k$  e quindi la densità di materie diventerà dominante e con essa l'attrazione gravitazionale, portando all'inevitabile collasso dell'Universo, denominato **Big Crunch**.

## 1.8 Parametro di densità

Nell'ambito dell'equazione di Friedmann, è possibile individuare un particolare valore della densità che rende la geometria dell'Universo piana, denominata **densità critica**  $\rho_c$ , di equazione

$$\rho_c(t) = \frac{3H(t)^2}{8\pi G}. \quad (1.39)$$

Utilizzando il valore attuale della costante di Hubble (ovvero calcolando la densità a  $t_0$ ), si ottiene

$$\rho_c(t_0) = 1.88 h^2 \cdot 10^{-26} \frac{\text{kg}}{\text{m}^3} = 2.78 h^{-1} \cdot 10^{11} \frac{M_\odot h^3}{\text{Mpc}^3}. \quad (1.40)$$

É possibile definire il **parametro di densità**  $\Omega$

$$\Omega(t) \equiv \frac{\rho}{\rho_0}. \quad (1.41)$$

L'equazione di Friedmann può essere riscritta tenendo conto del nuovo parametro introdotto

$$\Omega - 1 = \frac{k}{a^2 H^2}, \quad (1.42)$$

da cui si nota la particolare rilevanza data al caso  $\Omega = 1$ , che corrisponde alla condizione  $k = 1$ , denominata **densità critica dell'Universo**. Infine, si può definire allo stesso modo un parametro di densità associato al termine di curvatura

$$\Omega_k = -\frac{k}{a^2 H^2}, \quad (1.43)$$

che permette di riscrivere l'equazione di Friedmann come

$$\Omega + \Omega_k = 1. \quad (1.44)$$

## 1.9 Costante cosmologica

Nella formulazione della teoria di Relatività Generale, in Einstein era forte la convinzione che l'Universo fosse statico: tuttavia la teoria da lui proposta non poteva contemplare un Universo di questo tipo a causa dell'attrazione gravitazionale della materia stessa, escludendo le possibili soluzioni con  $a$  costante. Per ottenere un Universo statico, egli introdusse una nuova grandezza, la **costante cosmologica**  $\Lambda$ , che appare quindi all'interno dell'equazione di Friedmann come termine aggiuntivo

$$H^2 = \frac{8\pi G}{3} \rho - \frac{k}{a^2} + \frac{\Lambda}{3}. \quad (1.45)$$

L'idea di Einstein consisteva nel pensare  $\Lambda$  come un bilanciamento della curvatura, in modo da ottenere la soluzione  $H(t) = 0$  e un Universo statico. L'equazione di accelerazione diventa:

$$\frac{\ddot{a}}{a} = -\frac{4\pi G}{3} \left( \rho + \frac{3p}{c^2} \right) + \frac{\Lambda}{3}. \quad (1.46)$$

La costante cosmologica, se positiva, agisce come una forza repulsiva: se sufficientemente grande, può superare l'attrazione gravitazionale.

É possibile definire

$$\Omega_\Lambda = \frac{\Lambda}{3 H^2}, \quad (1.47)$$

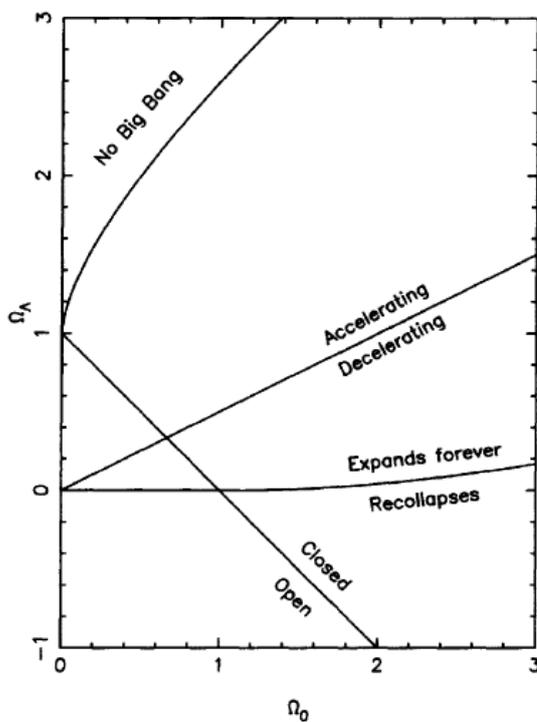
e in analogia con l'equazione (1.42)

$$\Omega + \Omega_\Lambda - 1 = \frac{k}{a^2 H^2}. \quad (1.48)$$

La relazione tra parametro di densità e geometria dell'Universo è riassunta in Tabella 1.2.

Parametro di densità	Tipo di Universo
$0 < \Omega + \Omega_\Lambda < 1$	Aperto
$\Omega + \Omega_\Lambda = 1$	Piatto
$\Omega + \Omega_\Lambda > 1$	Chiuso

**Tabella 1.2:** Relazione tra parametro di densità e geometria dell'Universo



**Figura 1.2:** Diversi modelli possono essere identificati a partire dalla densità di materia e da  $\Lambda$ . La figura indica le diverse proprietà nelle diverse regioni, a seconda della configurazione ottenuta. Da [13].

La descrizione convenzionale di  $\Lambda$ , consiste nel pensarla come un fluido con densità  $\rho_\Lambda$  e pressione  $p_\Lambda$ . L'equazione (1.45) diventa

$$\rho_\Lambda \equiv \frac{\Lambda}{8\pi G} \quad \rightarrow \quad H^2 = \frac{8\pi G}{3}(\rho + \rho_\Lambda) - \frac{k}{a^2}. \quad (1.49)$$

La risoluzione dell'equazione di continuità in queste condizioni, porge la relazione

$$p_\Lambda = -\rho_\Lambda c^2, \quad (1.50)$$

dove si osserva che la costante cosmologica sia associata a un effetto di pressione negativa, quasi come se  $\Lambda$  fosse una sorta di densità di energia dello spazio vuoto.

L'introduzione di questa nuova costante, ha risolto sui modelli cosmologici presi in considerazione precedentemente. In base alla densità di materia e alla densità di  $\Lambda$ , si hanno diverse possibili configurazioni di Universo aperto, piatto o chiuso: i diversi modelli possono essere identificati nel piano  $\Omega_0 - \Omega_\Lambda$ , come mostrato in Figura 1.2.

La linea  $\Omega_0 + \Omega_\Lambda = 1$  è relativa ad un Universo piatto e divide il piano in nelle due diverse cosmologie, aperta e chiusa. Le evidenze sperimentali derivanti dall'osservazione di supernovae distanti di tipo Ia indicano al momento un Universo in accelerazione.

## Capitolo 2

# Materia Oscura nell'Universo

In questo capitolo si vogliono presentare le evidenze sperimentali che hanno portato alla formulazione dell'ipotesi di Materia Oscura nell'Universo e l'evoluzione di questa stessa ipotesi nei vari modelli che si sono conseguiti storicamente. Si tratteranno in particolare le problematiche che il modello attuale non risolve, ma che anzi lasciano aperte possibilità diametralmente opposte alla teoria di Materia Oscura.

### 2.1 Il problema della massa mancante

#### 2.1.1 Peso dell'Universo: stelle e nucleosintesi

Nel Capitolo 1, si è andati ad analizzare alcune delle quantità e delle costanti fondamentali alla descrizione dell'Universo; tra queste si è individuato il valore della **densità critica**  $\rho_c$ , il cui valore è riportato in (1.39). L'incertezza sul valore di  $h$  non permette di confrontare adeguatamente la densità effettiva e la densità critica: tuttavia, una prima stima può essere effettuata sommando la densità di materia ed energia presente nell'Universo, determinata grazie alla sonda spaziale **WMAP**<sup>1</sup>, da cui risulta che la densità effettiva dell'Universo non è molto distante dalla densità critica.

Si voglio ora andare ad analizzare le possibili componenti dell'Universo che contribuiscono a tale densità.

Innanzitutto, è possibile osservare le stelle all'interno di una regione sufficientemente grande: basandosi sulla temperatura e sulla luminosità di queste è possibile ottenere una buona stima della massa associata. Se la regione considerata è abbastanza grande, è immediato stimare la densità associata al materiale stellare

$$\Omega_{stars} \equiv \frac{\rho_{stars}}{\rho_c} \simeq 0.005 \rightarrow 0.01. \quad (2.1)$$

---

<sup>1</sup>Il **Wilkinson Microwave Anisotropy Probe** è stato lanciato nel 2001, con lo scopo di compiere precise misure sulla radiazione cosmica di fondo, di cui si discuterà in seguito. Tali misure, in accordo con il modello  $\Lambda$ CDM di cui si discuterà a breve, hanno permesso di stabilire la densità di materia nell'Universo.

In secondo luogo, è necessario tener conto di tutto quel materiale presente nell'Universo non visibile sotto forma stellare: all'interno delle galassie si trova una grande quantità di gas molto caldo che emette radiazioni  $X$ . Allo stesso modo, molto materiale risiede in stelle di massa ridotta estremamente difficili da rivelare: un esempio sono le nane brune, stelle con materiale insufficiente da instaurare una reazione nucleare, che se fossero presenti in grandi quantità potrebbero apportare un contributo sostanziale alla densità totale senza esser state osservate.

Infine, vi sono forti ragioni per sostenere che la materia convenzionale non possa contribuire totalmente alla densità critica a partire dalla teoria della **teoria di nucleosintesi**<sup>2</sup>: questa teoria può spiegare l'abbondanza di elementi osservati se la quantità di materia barionica ha una densità di

$$0.016 \leq \Omega_B h^2 \leq 0.024. \quad (2.2)$$

Anche se è presente una certa indeterminazione dovuta alla presenza del fattore  $h^2$ , questa non è tale da giustificare una densità critica interamente composta da materia barionica, sebbene la si possa osservare sotto forma di stelle luminose, nane brune e gas interstellare.

La teoria della nucleosintesi fornisce una stima inferiore al valore di  $\Omega_B$ , suggerendo la presenza di maggiore materia barionica nell'Universo rispetto a quella visibile nelle stelle.

### 2.1.2 Prime evidenze: curve di rotazione delle galassie

Lo studio delle prime evidenze legate alla presenza di Materia Oscura dell'Universo si deve all'astronomo svizzero F. Zwicky, che nel 1933 analizzò mediante la legge di Hubble la velocità radiale di molte delle galassie presenti nell'ammasso della Chioma di Berenice: il redshift dovuto alla recessione delle galassie presentava notevoli variazioni a seconda dei diversi componenti del cluster; egli stimò la massa totale del sistema sommando il materiale galattico luminoso, accorgendosi che la velocità di fuga di ogni elemento risultava sempre superiore a quella totale dell'ammasso, fenomeno che avrebbe dovuto portare alla dispersione dell'ammasso stesso.

In particolare, utilizzando il teorema del viriale e le misure di velocità effettuate, ottenne una stima della massa del cluster di circa  $3 \cdot 10^{14} M_\odot$ ; la massa osservata venne stimata sommando le masse di ogni singola galassia, dell'ordine di  $10^{12} M_\odot$ : per ottenere questo valore, Zwicky scelse di considerare unitario il rapporto tra la massa di un corpo e la sua luminosità  $\Upsilon$ , infatti stelle molto più massive del Sole hanno un'elevata luminosità e un  $\Upsilon < 0.001$ , stelle meno massive del Sole  $\Upsilon > 1$  e generalmente non si raggiungono valori di  $\Upsilon > 10$ .

---

<sup>2</sup>Con nucleosintesi si intende il processo di produzione degli elementi durante le prime fasi dell'Universo; essa è responsabile della formazione di idrogeno, deuterio, isotopi dell'elio e del litio. Il processo di formazione è durato circa 3 minuti, con temperature molto elevate, presente in ogni punto dell'Universo.

Negli stessi anni delle osservazioni di Zwicky, gli astronomi J. Oort e H. Babcock osservarono la dinamica della materia luminosa della Via Lattea e di Andromeda: nuovamente vennero osservate delle discrepanze tra i valori di velocità attesi e misurati e inoltre un valore molto elevato di  $\Upsilon$  per la galassia di Andromeda ( $\Upsilon > 20$ ), valutato a partire dalla **curva di rotazione** della galassia stessa.

Le osservazioni compiute da Zwicky, Oort e Babcock, su diverse scale, suggerirono l'idea della presenza nell'Universo di materia non visibile (non rivelabile e per questo denominata *oscura*). Tuttavia, l'evidenza più chiara a sostegno di questa teoria risiede proprio nello studio delle curve di rotazione delle galassie a spirale, sviluppatosi maggiormente dopo l'introduzione della radioastronomia, diffusa grazie alla scoperta della riga a 21cm dell'idrogeno neutro: mediante l'analisi di tale riga, divenne possibile costruire le curve di rotazione ben oltre il limite ottico, ottenendo risultati più precisi e accurati.

La **curva di rotazione** della galassia non è altro che il grafico della velocità rotazionale delle stelle o del gas contenuti al suo interno, in funzione della distanza radiale dal centro della stessa. L'orbita delle singole stelle è data dalla legge di Keplero: in via del tutto qualitativa si consideri una galassia con bulbo galattico sferico e massa  $M$  concentrata nel bulbo, tale per cui la massa presente nel disco risulti trascurabile.

Sia  $R$  il raggio del bulbo,  $M(r)$  la sua massa e  $\rho$  la sua densità di massa costante. Per una particella di prova in moto circolare a distanza  $r$ , l'equivalenza tra forza centrifuga e forza gravitazionale pone la relazione

$$\frac{v^2}{r} = \frac{G M(r)}{r^2} \quad \rightarrow \quad v = \sqrt{\frac{G M(r)}{r}}. \quad (2.3)$$

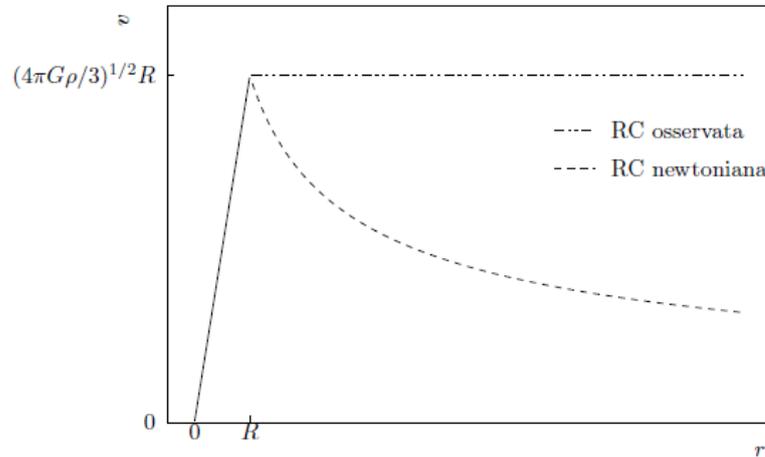
Per quanto visto in Sezione 1.3 infatti, per una distribuzione di massa sferica a densità costante  $\rho$ , l'attrazione gravitazionale non dipende dalla massa presente all'esterno della sfera di raggio  $r$ , ma solo da quella al suo interno,  $M(r)$ . In particolare, si hanno diversi andamenti a seconda che la particella di prova sia trovi a una posizione radiale maggiore o minore di  $R$ :

$$v = \begin{cases} \sqrt{\frac{4\pi G \rho}{3}} r & \propto r & \text{se } r < R \\ \sqrt{\frac{4\pi G \rho R^3}{3}} \frac{1}{\sqrt{r}} & \propto \frac{1}{\sqrt{r}} & \text{se } r > R. \end{cases} \quad (2.4)$$

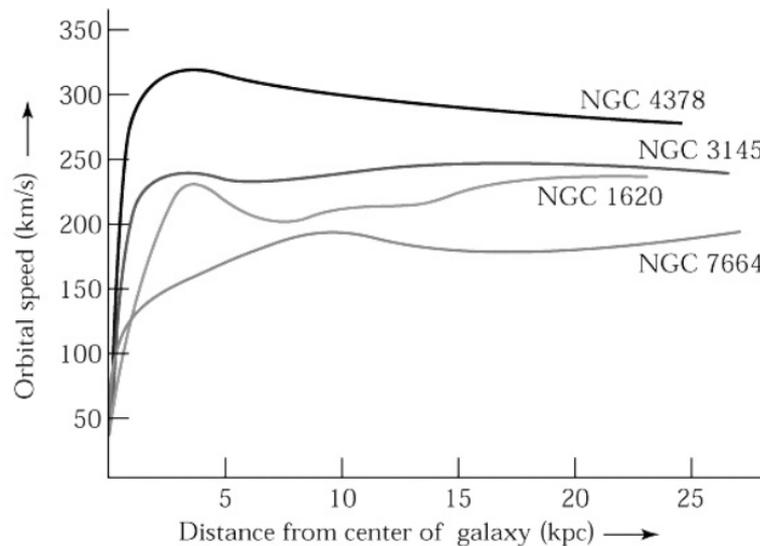
In breve, la curva di rotazione di una galassia dovrebbe avere un andamento ben preciso: crescere linearmente con  $r$  fino al limite del bulbo e poi decrescere come  $\frac{1}{\sqrt{r}}$ .

Lo studio della curva di rotazione della galassia di Andromeda portò alla pubblicazione nel 1957 da parte degli scienziati H. van de Hulst, E. Raimond e H. van Woerden, di un grafico notevolmente diverso da quanto aspettato: se nel limite ottico l'andamento osservato coincideva bene con quello previsto, lo stesso non accadeva per le regioni individuate dallo studio della riga a 21cm dell'idrogeno, in cui non era presente un andamento decrescente, bensì un trend costante. Si riportano in Figura 2.1 gli andamenti

qualitativi delle curve attese (descritte da (2.4)) e osservata; in Figura 2.2 sono presenti le curve di rotazioni di alcune galassie osservate.



**Figura 2.1:** Andamento qualitativo delle curve di rotazione attese e osservate. Si nota in particolare il gap tra le stesse quando la distanza dal centro supera il raggio del disco interno. Da [15].



**Figura 2.2:** Andamento delle curve di rotazione per alcune galassie a disco. Si nota molto bene il disaccordo con le previsioni Kepleriane. Da [12].

Una discrepanza così elevata tra le due velocità venne spiegata con la presenza di una grande quantità di massa al di fuori del bulbo, nel così detto **alone**, che porta ad effetti gravitazionali non spiegabili altrimenti classicamente. Le misure standard suggeriscono

attualmente

$$\Omega_{halo} \simeq 0.1. \quad (2.5)$$

Si assume solitamente che non sia presente per la materia oscura alcun tipo di meccanismo in grado di concentrare questa in strutture simili a quelle delle stelle: in questo caso, la materia oscura si dovrebbe trovare sotto forma di alone sferico, ovvero una sferica solida ad alta densità centrale che diminuisce all'aumentare della distanza.

### 2.1.3 Moto e formazione dei dischi galattici

All'inizio degli anni '60, gli scienziati J. Ostriker e J. Peebles mediante simulazioni a N-corpi compirono studi sul moto delle galassie e sulla loro formazione: essi osservarono che un sistema a simmetria sferica che contrasta l'attrazione gravitazionale con la sola forza centrifuga non rimane stabile nel tempo, ma si schiaccia e si scalda; non è la rotazione a bilanciare la gravità, ma la pressione. Se le galassie sono sistemi dinamici sostenuti dalla sola rotazione, allora devono essere instabili. Anche in questo caso, la spiegazione che venne fornita riguarda la presenza di ulteriore materia nell'Universo, responsabile della stabilità delle galassie stesse.

Nelle simulazioni compiute, veniva introdotto un meccanismo di raffreddamento in grado di ridurre l'energia del sistema di un certo fattore del tutto arbitrario: responsabile di tale meccanismo era il gas, che non essendo distribuito uniformemente, poteva dar luogo a distribuzioni in grado di collidere tra di loro e dissipare in questo modo energia. Anche sotto queste ipotesi, la galassia rimaneva comunque instabile.

Nuovamente, per spiegare il fenomeno venne introdotta una nuova componente materiale per rendere stabili le galassie: questa doveva essere sostenuta dalla pressione e formare un alone sferoidale attorno alla galassia; l'impossibilità di rivelarla implica un  $\Upsilon$  molto elevato, dunque materia di tipo *oscura*.

### 2.1.4 Composizione e moto dei cluster di galassie

I cluster di galassie sono i più grandi oggetti legati gravitazionalmente presenti nell'Universo e come tali risultano la prova ideale della diversità di tipologia di materia contenuta: grazie alla loro dimensione, non vi sono ragioni per cui non contengano campioni di ogni diversa materia, né che motivino la separazione di queste tipologie a causa dell'attrazione gravitazionale.

Oltre alle stelle presenti nelle singole galassie, è diffuso del gas molto caldo che emette radiazione X, riscaldato dalla caduta nelle buche di potenziale gravitazionale presenti nell'ammasso, che risulta essere dominante rispetto alla materia contenuta nelle stelle.

La formazione di ammassi di galassie è un processo continuo, in cui gli ammassi non ancora formati andranno ad assomigliare a quelli già presenti. In questa teoria, l'assunzione più semplice consiste nell'ipotizzare una considerevole quantità di gas freddo<sup>3</sup> tra le galassie, che verrà riscaldato se queste venissero incorporate nell'ammasso.

---

<sup>3</sup>E pertanto non ancora rivelabile dalla tecnologie attuali

Le osservazioni sperimentali suggeriscono che la quantità relativa a stelle e gas caldo nei clusters è in ottimo accordo con il confronto tra la densità di stelle osservata e la densità totale barionica suggerita dalla nucleosintesi.

Il gas caldo presente può essere usato per stimare la quantità di materia oscura nell'ammasso stesso: la temperatura elevata conferisce al gas una pressione considerevole, sebbene questo rimanga confinato nel cluster grazie all'attrazione gravitazionale, che tuttavia non risulta essere sufficiente per la quantità di materia presente. Ulteriore attrazione che permette l'esistenza del cluster si ipotizza essere data dalla presenza di materia oscura, di densità molto maggiore rispetto a quella barionica fornita dalla nucleosintesi<sup>4</sup>

$$\frac{\Omega_B}{\Omega_0} \simeq 0.065 h^{-\frac{3}{2}}, \quad (2.6)$$

da cui sostituendo l'equazione (2.2) si ottiene

$$\Omega_0 \simeq 0.3 h^{-\frac{1}{2}} \simeq 0.35. \quad (2.7)$$

Risulta evidente che la densità di materia sia dominata dalla materia oscura, ma questa risulta insufficiente al raggiungimento della densità critica.

Un'altra evidenza di materia oscura è osservabile dal modo relativo di una galassia dall'altra: come per le curve di rotazione, la forza gravitazionale esercitata sulla galassia da quelle circostanti dipende dalla massa totale in gioco. Lo studio del moto relativo, assumendo che questo sia determinato dall'interazione gravitazionale, permette quindi di stimare la massa nelle galassie.

Un'analisi di questo tipo fornisce un valore per la densità totale di materia nell'Universo di

$$\Omega_0 \geq 0.2, \quad (2.8)$$

molto maggiore del valore permesso dalla nucleosintesi nell'equazione (2.2).

Infine, anche lo studio dell'origine delle strutture nell'Universo e dell'irregolarità della radiazione cosmica di fondo (**CMB**) fornisce interessanti risultati nell'ambito della materia oscura: tali risultati verranno analizzati con maggiori approfondimenti nelle sezioni successive.

L'attuale visione dell'origine delle strutture, prevede la formazione di queste da piccole irregolarità iniziali dovute all'attrazione gravitazionale: proprio questa dipendenza, permette di studiare la formazione delle strutture nell'ottica di calcolare la densità di materia totale presente.

I risultati ottenuti evidenziano l'impossibilità da parte della sola materia barionica a spiegare l'attrazione gravitazionale necessaria alla formazione delle attuali strutture osservabili. Nuovamente, il problema viene risolto con l'introduzione di materia oscura

---

<sup>4</sup>Stima fornita dal telescopio orbitale a raggi X *Chandra X-ray Observatory*, portato nello spazio nel 1999.

non barionica, in grado di fornire la forza gravitazionale necessaria alla formazione delle attuali strutture senza l'inibizione di effetti di pressione. La condizione necessaria è nuovamente  $\Omega_0 \geq 0.2$ .

Sempre inerente la formazione delle strutture, è possibile vedere come della materia non barionica sia richiesta: le condizioni iniziali stabilite per la CMB porgono un plasma caldo inizialmente omogeneo per una parte su  $10^5$ ; da questo punto di partenza, l'Universo diede origine alla grande diversità di strutture su larga scala, dalla galassie individuali e loro contenuti, agli ammassi di galassie. Anche se l'enormità di queste strutture appare inizialmente sorprendente, è il risultato della crescita gravitazionale delle oscillazioni di densità iniziali. Il problema risiede nell'ampiezza di tali oscillazioni: i barioni si accoppiarono al campo dei fotoni nei primi istanti e possono crescere fino a circa  $10^3$  nel tempo di Hubble.

Quello di cui si necessita è una forma di materia che non si accoppi con i fotoni in modo da formare le strutture precedentemente e che possiede già una considerevole ampiezza durante la ricombinazione, senza lasciare un'impronta nella CMB: della materia non barionica e dinamicamente fredda fitta molto bene il problema. Tale evidenza verrà approfondita nei capitoli successivi.

## 2.2 Modello di Dark Matter

Le evidenze sperimentali susseguitesì nel corso dello studio dell'Universo, hanno portato alla formulazione di una teoria che vede centrare il ruolo di massa non rivelabile, responsabile dei fenomeni gravitazionali presi in analisi: la particolare forma delle curve di rotazione delle galassie, la stabilità di queste, la composizione e il modo di clusters di galassie ne sono solo alcune.

Si presentano ora i diversi modelli che si sono susseguiti nel tentativo di dare spiegazione ai fenomeni gravitazionali osservati e alle ipotesi formulate in tal senso.

### 2.2.1 Modello a sfera isoterma

Durante gli anni '70 venne formulato un primo modello a sostegno dell'ipotesi di materia oscura, denominato **modello di sfera isoterma**.

In particolare gli scienziati si focalizzarono sul problema posto dalle discrepanze tra curve di rotazione predette e osservate: a grandi distanze dal centro della galassia, la velocità di rotazione  $v$  assumeva un andamento quasi costante in netta contrapposizione con l'andamento newtoniano tendente a zero.

Tale fenomeno implica che nella regione esterna della galassia il valore di  $\Upsilon$  debba essere particolarmente elevato, favorendo l'abbondanza di materia oscura.

## Luminosità superficiale e curve di rotazione

Nel 1970, l'astronomo K. Freeman condusse un'analisi quantitativa della distribuzione di luce nei dischi delle galassie a spirale, osservando un particolare andamento per la luminosità superficiale.

Si definisce come **luminosità superficiale**  $\Sigma$  il flusso emesso da un corpo irradiante direttamente alla sorgente; non varia con la distanza a cui viene misurata e costituisce una proprietà intrinseca del corpo. Tale grandezza è strettamente legata al valore di  $\Upsilon$ , poiché è facile passare dall'una all'altra senza perdita di generalità.

L'andamento evidenziato da Freeman era del tipo

$$\Sigma = \Sigma_0 e^{-\frac{r}{h}}, \quad (2.9)$$

con  $\Sigma_0$  luminosità superficiale centrale costante per ogni galassia analizzata,  $h$  una scala di lunghezza caratteristica che dipende da galassia a galassia e  $r$  distanza del centro.

La luminosità decresce esponenzialmente andando ad annullarsi in brevi distanze, pertanto nel disco deve essere presente un altro tipo di materia che spieghi l'andamento delle curve di rotazione: in particolare la distribuzione di massa di questa deve essere proporzionale alla distanza  $M(r) \propto r$  per spiegare una velocità costante nell'equazione (2.3). Tale massa oscura costituisce quindi un alone esterno al nucleo della galassia.

Anche l'osservazione della luminosità superficiale sembrava quindi confermare la presenza di un alone oscuro di grandi dimensioni attorno alla galassia, introdotto da Ostriker e Peebles; risultava quindi possibile colmare la discrepanza osservata nelle curve di rotazione.

Perché questo avvenga compatibilmente con i dati osservati, è tuttavia necessario porre una condizione sulle curve di rotazione: la densità di massa dell'alone  $\rho$  deve avere un andamento del tipo

$$\rho \propto \frac{1}{r^2}; \quad (2.10)$$

in questo modo è verificato  $M(r) \propto r$  e si ottiene

$$\rho \propto \frac{M(r)}{r^3} \propto \frac{1}{r^2}. \quad (2.11)$$

Tale comportamento è ben approssimabile al di fuori del limite ottico della galassia da un alone sferico con caratteristiche simili a una sfera isoterma.

Il modello presenta tuttavia delle problematiche che verranno analizzate più in dettaglio nelle Sezioni successive.

### 2.2.2 Modello ad alone NFW

La presenza di materia oscura è necessaria nello stabilizzare l'Universo in espansione e, come si è visto nella Sezione 2.1.3 permettere la formazione di galassie che non collassino su se stesse. Durante gli anni '90 si cominciarono a compiere studi e simulazioni in tal senso con l'idea di riuscire a verificare il modello a sfera isoterma; in particolare furono

cruciali le osservazioni compiute dagli scienziati J. Navarro, C. Frenk e S. White: per tutti gli aloni considerati dai tre scienziati su diverse scale (piccole galassie e ammassi di galassie) essi evidenziarono una particolare distribuzione di massa, non corrispondente al modello a sfera isoterma ipotizzato.

Sia  $R$  il raggio del disco centrale; la distribuzione di massa denominata **NFW** è data da

$$\rho = \frac{\rho_0}{\frac{r}{R_S} \left(1 + \frac{r}{R_S}\right)^2} \propto \begin{cases} r^{-1} & \text{per } r \ll R \\ r^{-3} & \text{per } r \gg R \end{cases} \quad \begin{matrix} \neq r^0 \\ \neq r^{-2} \end{matrix} \quad (2.12)$$

sostanzialmente differente da quanto ipotizzato inizialmente, ora caratteristica di tutti i modelli di Materia Oscura, dove  $\rho_0$  e  $R_S$  sono parametri varianti da alone ad alone.

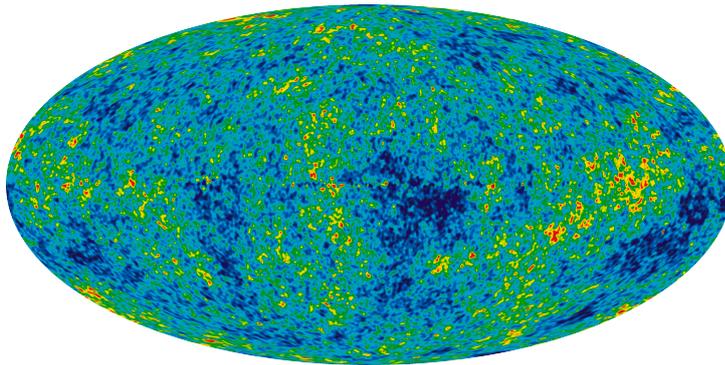
Tale modello interpola bene le evidenze osservate, ma vi sono tre parametri liberi (velocità asintotica dell'alone, dimensioni del nucleo interno a densità costante e valore  $\Upsilon$  del disco visibile) che possono essere adeguatamente aggiustati per riprodurre in modo ottimale i fenomeni osservati. Purtroppo, anche questo modello presenta delle problematiche non trascurabili nella descrizioni di fenomeni galattici.

### 2.2.3 Modello $\Lambda$ CDM

Una delle più importanti osservazioni compiute negli ultimi anni in merito al modello di materia oscura, riguarda lo studio della geometria dell'Universo utilizzando le strutture nella CMB.

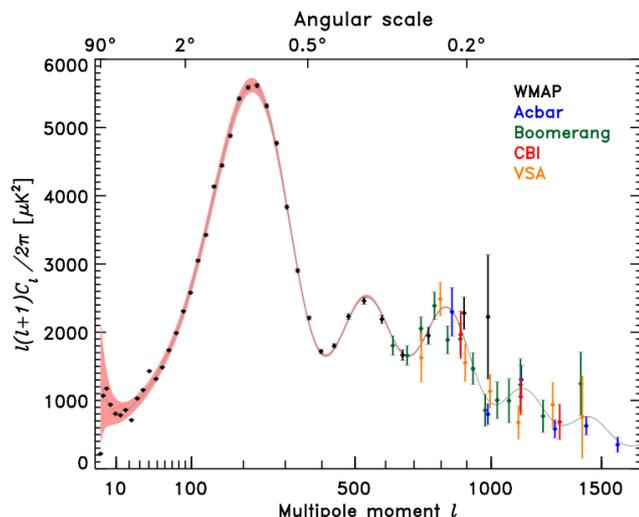
#### Radiazione cosmica di fondo (CMB)

Nelle prime fasi dell'Universo, materia e radiazione erano accoppiate nella formazione di un solo fluido primordiale e nelle regioni casualmente connesse erano presenti fluttuazioni sotto forma di onde sonore che si propagavano nel fluido. Nel momento in cui materia e radiazione si sono disaccoppiate, è rimasta traccia di tali onde nel pattern di fluttuazioni termiche della CMB, in Figura 2.3.



**Figura 2.3:** Mappa della radiazione cosmica di fondo, stimata attraverso le misurazioni della sonda spaziale WMAP.

L'elevata omogeneità del plasma primordiale è causa di un'elevata isotropia della CMB che presenta delle fluttuazioni termiche date dalle anisotropie presenti; si evidenziano comportamenti opposti all'interno del plasma: i barioni tendono ad attrarsi gravitazionalmente formando delle strutture, mentre i fotoni tendono a cancellarle. Questo andamento causa le oscillazioni acustiche presenti sotto forma di picchi nella CMB, in Figura 2.4.



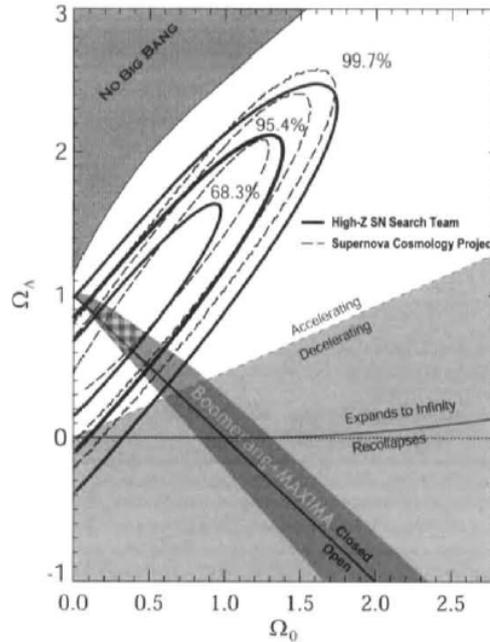
**Figura 2.4:** Spettro di potenza delle anisotropie di temperatura della CMB in termini di scala angolare (o momenti di multipolo). La linea continua mostra l'andamento teorico mentre i punti rappresentano i dati sperimentali. I dati provengono dalle sonde WMAP (2006), Acbar (2004) Boomerang (2005), CBI (2004), e VSA (2004).

## Nascita e successi del modello $\Lambda$ CDM

Analizzando inoltre i dati relativi allo studio delle supernovae di tipo Ia, è possibile rappresentare i due diversi andamenti in un grafico simile a quello ottenuto un Sezione 1.9, nel piano  $\Omega_0 - \Omega_\Lambda$ .

Come si può vedere dalla Figura 2.5, i dati relativi alla CMB e quelli relativi alle supernovae Ia forniscono delle regioni molto strette che si incrociano quasi allo stesso angolo; i dati estrapolati dall'intersezione delle due sono estremamente precisi e vengono fittati con ottimo successo dal modello  $\Lambda$ CDM.

L'ipotesi di materia oscura fredda (**CDM**), ovvero che la materia oscura sia costituita da particelle che interagiscono debolmente la cui velocità di dispersione all'inizio dell'Universo era troppo piccola per formare strutture nella scala galattica e sub-galattica, emerse durante gli anni '80, supportata dagli studi di diversi scienziati in vari campi: centrali furono gli articoli di Peeles sulle anisotropie della CMB (1982), Blumenthal et al. sulla formazione di galassie con CDM (1984) e di Davis et al. di simulazione numerica sui cluster di galassie (1985).



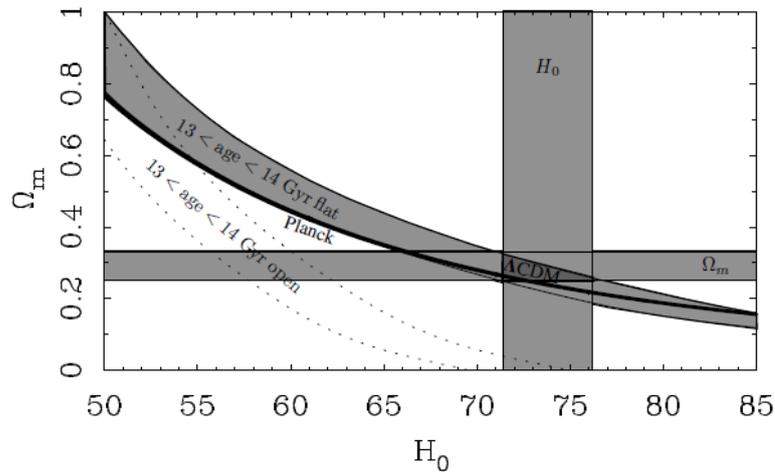
**Figura 2.5:** Sono visibili le evidenze osservative dal digramma luminosità-redshift delle supernovae, come introdotto nella Sezione 1.9. L'intersezione tra questi e i dati dalla CMB forniscono una regione limitata del grafico, con  $\Omega_0 \sim 0.3$  e  $\Omega_\Lambda \sim 0.7$ . Da [13]

Nel corso degli anni successivi, grazie soprattutto all'implementazione tecnologica, si riuscì ad osservare con maggiore precisione fenomeni già noti e a scoprirne degli altri in grado di mettere in discussione il modello. Vennero proposte diverse varianti al modello più semplice di CDM; grazie alla combinazione di dati provenienti dalla CMB per un Universo stazionario e dallo studio delle supernovae per l'accelerazione gravitazionale, risultò predominante il modello  $\Lambda$ CDM: tale modello incorpora l'ipotesi di materia oscura fredda, la costante cosmologia  $\Lambda$  e condizione iniziali inflazionarie. La differenza da quanto assunto precedentemente consiste nell'introduzione della costante cosmologica  $\Lambda$ , descritta all'interno della Sezione 1.9, che può essere interpretata come uno speciale fluido omogeneo a pressione negativa, che non si diluisce mentre l'Universo si espande, ma mantiene una densità costante.

Attualmente, tale modello è supportato da numerose evidenze sperimentali, come lo studio della CMB, della Foresta Lyman- $\alpha$ <sup>5</sup>, dei cluster di galassie e del lensing debole gravitazionale; nonostante questo, sono comunque presenti numerose problematiche inerenti il suo funzionamento su scale ridotte. In particolare, tale modello fornisce una stima della composizione dell'Universo, nelle seguenti percentuali approssimative:

- 5% contributo della materia luminosa barionica;

<sup>5</sup>La **Foresta Lyman- $\alpha$**  è la somma delle linee spettrali d'assorbimento che sorge dalla transizione Lyman alfa dell'idrogeno neutro nella luce di quasar o galassie particolarmente lontane.



**Figura 2.6:** Densità di massa  $\Omega_m$  e parametro di espansione  $H_0$ . I vincoli sui parametri sono mostrati come bande grigie. Sia il tasso di espansione che la densità di materia sono stati misurati più volte nel corso degli anni. Le linee tratteggiate rappresentano le aspettative per un Universo aperto con bassa densità, mentre quelle più marcate un Universo piatto con  $\Omega_m + \Omega_\Lambda = 1$ . Le evidenze suggeriscono la regione più scura, risolta in modo ottimale dal modello  $\Lambda$ CDM. Da [1]

- 25% contributo della materia oscura;
- 70% contributo del termine cosmologico.

## 2.3 Problemi legati al modello: distribuzione di massa

Si vogliono ora prendere in considerazione i vari problemi legati al modello di Materia Oscura.

All'interno dello stesso modello a sfera isoterma si evidenziano alcuni problemi legati alla massa dell'alone stesso, come per altro avviene per l'alone NFW.

Innanzitutto, dovendo valere la relazione  $M(r) \propto r$ , la massa dell'alone stesso dovrebbe crescere costantemente fino ad arrivare a un valore infinito: è necessario che a una certa distanza molto maggiore del limite ottico, l'alone venga troncato e con esso la sua massa.

In secondo luogo, si è visto che a partire dalle curve di rotazione vicino al centro della galassia, è necessario supporre una distribuzione costante di materia oscura, perché la materia luminosa mantenga un andamento di tipo lineare crescente: in questa regione, la distribuzione di materia oscura non può crescere come  $r^{-2}$ , come sarebbe previsto dal modello a sfera isoterma, o come  $r^{-1}$  come previsto dal modello di alone NFW.

### 2.3.1 Problema della cuspidi degli aloni galattici

Le simulazioni effettuate a partire dalla seconda metà degli anni '90 suggeriscono che il modello CDM presenti nelle regioni centrali delle galassie una distribuzione di materia oscura a cuspidi (quello che viene chiamato **cusp-core problem**, ovvero *problema della cuspidi degli aloni galattici*), con andamento  $r^{-\beta}$  e  $\beta \sim 1 - 1.5$ . Mentre simulazioni con aloni isoterme di materia oscura a densità centrale costante interpolano molto bene il modello, simulazioni con aloni NFW sovrastimano inizialmente la velocità della curva di rotazione.

La maggior parte delle curve di rotazione delle galassie sono interpolate con maggior successo con profili centrali di materia oscura, che non con il modello NFW; in aggiunta, alcune galassie note non possono essere interpolate con questo modello.

### 2.3.2 Problema delle galassie nane

Le simulazioni di aloni mostrano inoltre la presenza di una considerevole quantità di sub-strutture formatesi inizialmente nei collassi su scala ridotta, predicendo un considerevole numero di sub-aloni in contrasto con i circa 10 satelliti classici della Via Lattea.

Dato che il modello CDM preserva le fluttuazioni primordiali in scale molto basse, si riscontra negli aloni la presenza di sub-aloni collassati nei primi istanti dell'Universo che preservano la loro identità dopo esser stati inglobati in sistemi più grandi.

Prima del 2000, si conoscevano solo 9 galassie nane satelliti all'interno di un raggio di 250 kpc dell'alone della Via Lattea. Durante il 1999 Klypin et al. e Moore et al. predissero un fattore di 5 – 20 sub-aloni superiore alle osservazioni nello stesso raggio: in ogni caso, la popolazione di satelliti prevista eccede di gran lunga quella osservata (quello che viene chiamato *missing satellites problem*).

Fortunatamente, il problema sembra possa essere risolto anche con il solo utilizzo della fisica barionica: la velocità limite a cui il computo di sub-aloni e galassie nane diverge è vicino a  $30 \text{ km s}^{-1}$ , valore al quale il riscaldamento del gas intergalattico attraverso la foto-ionizzazione ultravioletta di background dovrebbe sopprimere l'accelerazione del gas in aloni, che potrebbe far sì che questi aloni rimangano oscuri. In alternativa, il vento di stelle e supernovae della prima generazione di stelle potrebbe portare il rimanente gas fuori dalle buche di potenziale superficiali di questi aloni poco massivi.

Con l'utilizzo dello *Sloan Digital Sky Survey* la situazione si complica ulteriormente, in quanto cominciano ad essere rivelati anche satelliti con luminosità molto minore; l'estrapolazione dei dati, suggerisce la presenza di molti centinaia di satelliti ultra leggeri nella Via Lattea. La funzione di luminosità tra nane leggere e ultra leggere può essere spiegata con metodi semi analitici che coinvolgono la foto-ionizzazione e il feedback stellare, anche se l'efficienza nel convertire barioni in stelle rimane sorprendentemente bassa, ben al di sopra della soglia di fotoionizzazione, ed è poco chiaro se alcune delle nane ultra leggere possano essere o meno fossili risalenti a prima dell'epoca di reionizzazione. Nonostante tutto, sembra opportuno al momento considerare la relazione tra la bassa

massa dei sub-aloni e nane ultra leggere come un problema legato alla formazione di galassie e non una contraddizione al modello CDM.

### 2.3.3 Too big to fail problem

Le osservazioni compiute su satelliti più luminosi hanno invece posto in evidenza un ulteriore problema: considerando ad esempio la Via Lattea, le simulazioni stabiliscono una massa nella regione centrale dei sub-aloni presenti eccedente la massa dedotta dalla dinamica stellare delle nane osservate di un fattore  $\sim 5$ . Mentre è possibile che questi sub-aloni massivi siano oscuri e che le nane osservate risiedano in alcuni di questi meno massivi, risulta tuttavia improbabile fisicamente (viene denominato *too big to fail problem*). Galassie più piccole della Via Lattea risultano avere molta meno materia oscura al loro interno di quanta non ve ne sia in questa.

Sebbene l'entità del problema vari a seconda della struttura e della massa dell'alone, la discrepanza risulta troppo elevata per essere una semplice fluttuazione statistica. Mentre il problema della mancanza di satelliti in sub-aloni poco massivi può essere spiegata per via di effetti barionici, tale problema sorge in sistemi più massivi in cui il potenziale gravitazionale è dominato dalla materia oscura.

É possibile trovare un accostamento tra questo problema e quello della cuspidale degli aloni galattici: le simulazioni numeriche della formazione di strutture CDM prevede troppa massa nelle regioni centrali di aloni e sub-aloni.

### 2.3.4 Soluzione in fisica barionica

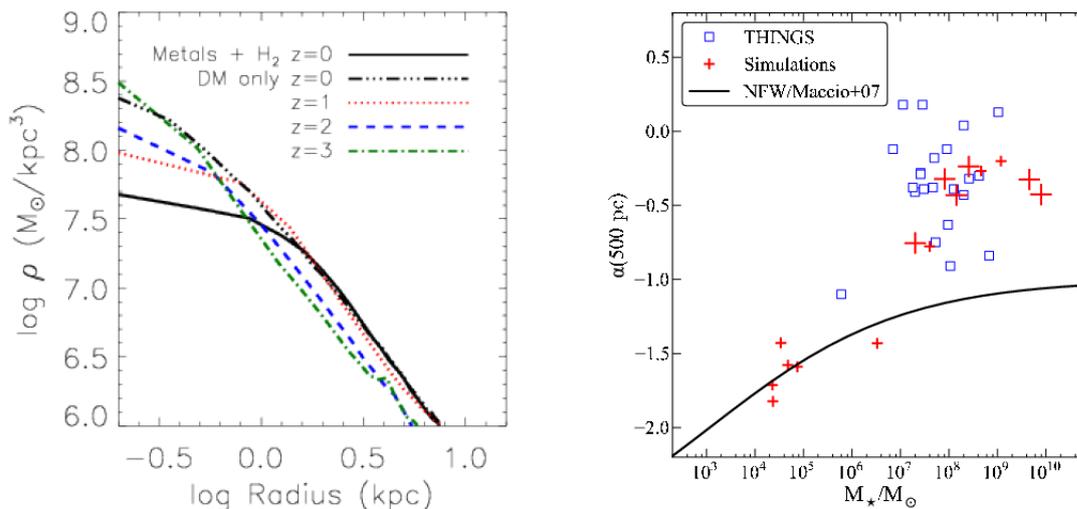
Inizialmente, si pensava che l'inclusione della fisica barionica nella soluzione dei problemi presentati avrebbe solo complicato la situazione, contraendo adiabaticamente la distribuzione di densità di materia oscura. Nel 1996, Navarro, Eke e Frenk proposero un modello estremo per l'epoca: essi supposero che per produrre la distribuzione centrale di materia oscura prevista dai modelli, barioni liberi si avvicinarono all'orbita di materia oscura adiabaticamente con una lenta dipendenza dal potenziale gravitazionale, per poi essere rilasciati immediatamente quando l'esplosione di una supernova avesse espulso una frazione considerevole di materiale barionico, lasciando l'alone di materia oscura meno concentrato di come sarebbe stato senza barioni.

Con la combinazione di una elevata soglia di densità di gas per la formazione di stelle e un feedback efficiente, le simulazioni riproducono con successo le frazioni di gas freddo e stellare osservate nelle galassie del campo. L'espulsione di gas a basso momento angolare gioca un ruolo fondamentale nel sopprimere la formazione del bulge centrale nelle galassie nane, altro problema che si presentava nelle simulazioni precedenti. Le occasionali fuoriuscite di gas producono anche rapide fluttuazioni del potenziale gravitazionale, in contrasto con la crescita costante assunta nei modelli di contrazione adiabatica.

Le simulazioni mostrano che con il passare del tempo la densità centrale di materia oscura decresce e il profilo a cuspidale si trasforma in uno con densità centrale costante. La rapida fluttuazione nel potenziale centrale fornisce energia nell'orbita delle particelle

di materia oscura, così che queste non penetrano maggiormente nel centro dell'alone. Si veda Figura 2.7.

Recenti simulazioni interpolano molto bene i profili dell'alone per galassie con massa stellare  $M_* > 10^7 M_\odot$ , mentre per galassie  $M_* < 10^7 M_\odot$  le così poche stelle non forniscono abbastanza energia nell'alone per creare una distribuzione centrale di materia oscura dell'ordine di  $\sim 1$  kpc. In generale, l'energia richiesta per risolvere il problema *too big to fail* eccede quella disponibile dalle supernovae in galassie con  $M_* < 10^7 M_\odot$ . Il problema pertanto rimane aperto.



**Figura 2.7:** Effetti barionici su profili di alone CDM in simulazioni cosmologiche.

A sinistra, la curva più alta mostra la densità di profilo a cuspidi per una simulazione senza collisione a N-corpi. Le altre curve mostrano l'evoluzione del profilo di materia oscura in simulazioni con le stesse condizioni iniziali, ma che includono la dinamica dei gas, la formazione di stelle, ecc. La curva solida mostra come il profilo centrali tenda a diventare costante.

A destra, scala logaritmica del profilo di materia oscura  $\alpha$  in funzione della massa stellare della galassia. Le croci derivano da simulazioni idrodinamiche, i quadrati misure da curve di rotazione osservate. La curva mostra la simulazione di aspettazione per sola materia oscura con profilo NFW. Da [2].

### 2.3.5 Soluzione con materia oscura

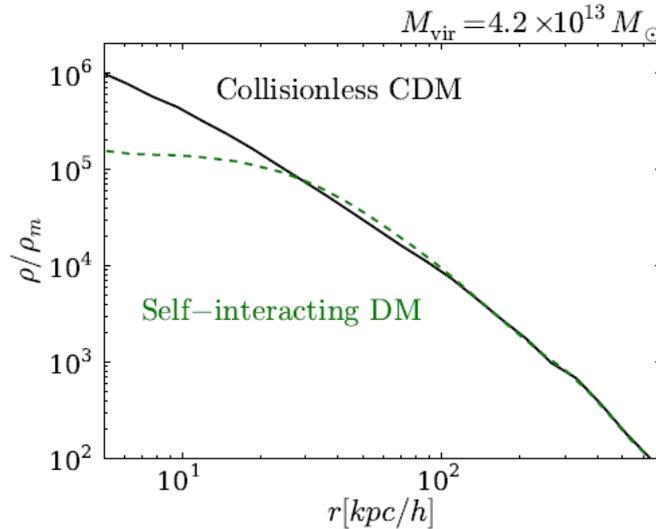
Invece di essere spiegati con complessi effetti barionici, i problemi esposti potrebbero indicare un fallimento dell'ipotesi CDM. Una delle possibili soluzioni prevede la presenza di materia oscura *calda* (modello indicato con la sigla **WDM**, ovvero *Warm Dark Matter*), tale che la velocità di trasmissione primordiale sia abbastanza elevata da cancellare le fluttuazioni primordiali in scala sub galattica. Mentre il collasso senza collisioni di materia oscura calda porta ancora ad un profilo a cuspidi dell'alone, la concentrazione centrale è inferiore a quella degli aloni CDM quando la massa è vicina al cutoff dello

spettro, consentendo così un fit migliore delle osservazioni delle curve di rotazione delle galassie e delle dinamiche delle galassie nane.

L'ipotesi di materia oscura calda è una soluzione approssimativa dei problemi posti dal modello CDM, che richiede una particella massiva bilanciata appositamente sulla particolare scala degli aloni delle galassie nane. Purtroppo anche questo modello presenta numerosi problemi: cancellare le fluttuazioni primordiali in scala ridotta altera la struttura predetta dalla Foresta Lyman- $\alpha$  per quasar con redshift elevato. Recenti studi in questi senso hanno posto un limite inferiore alla massa delle particelle di materia oscura dell'ordine di molti keV, abbastanza elevato perché questa sia effettivamente fredda dal punto di vista del problema della cuspidi degli aloni galattici. Anche tralasciando questi problemi, WDM non è in grado di interpolare al meglio le curve di rotazione dove si osservano problematiche con il modello CDM.

Sebbene rimangano incertezze nelle simulazioni numeriche e nei dati osservati, il modello WDM non è in grado di risolvere il problema della cuspidi degli aloni galattici e delle galassie nane rimanendo allo stesso tempo consistente con la Foresta Lyman- $\alpha$  e le osservazioni sulle sub strutture.

Un'idea alternativa (sostenuta da Spergel e Steinhardt nel 2000) consiste nell'ipotizzare la materia oscura fredda con interazione debole con i barioni ma forte con se stessa; in questo caso le simulazioni indicano che il modello **SIDM** (*Self-Interacting Dark Matter*) possa effettivamente riprodurre la distribuzione centrale di materia oscura rimanendo consistente con le osservazioni sperimentali e lasciare abbastanza sub-aloni da ospitare i satelliti presenti nella Via Lattea (a differenza di quanto avviene nella WDM), come si osserva in Figura 2.8.



**Figura 2.8:** Si confrontano in figura le densità di profilo utilizzando il modello CDM e il modello SIDM, mostrando il nucleo prodotto con scattering elastico. Si sono riscontrati andamenti simili per aloni con massa differente. Da [2].

## 2.4 Problemi legati al modello: fenomenologia

Vi sono altri due problemi legati al modello a sfera isoterma: la *cospirazione disco-alone* e la *relazione di Tully-Fischer*.

La **cospirazione disco-alone** indica la particolare combinazione che materia luminosa e materia oscura assumono all'interno di tutte le galassie osservate: nelle curve di rotazione, allontanandosi dal disco galattico, la prima decresce mentre la seconda cresce, in modo da dare sempre una curva di rotazione piatta; nel contesto della meccanica newtoniana non vi è spiegazione per questo fenomeno, perché i due tipi di materia si accoppino sempre in queste configurazione.

Inoltre, all'interno di una stessa galassia, materia oscura e materia luminosa sono collegate dalla **relazione di Tully-Fischer**: negli anni '70, i due scienziati compirono numerose osservazioni sulle velocità di rotazione  $v$  caratteristiche delle galassie e sulla luminosità intrinseca  $L$  delle stesse. Quest'ultima rappresenta la quantità di energia emessa dalla stella nell'unità di tempo e può essere misurata a partire dalla luminosità apparente se è nota la distanza della galassia.

Essi scoprirono una particolare e ben definita relazione tra le due quantità osservate

$$L \propto v^\alpha. \quad (2.13)$$

Mentre la luminosità del disco è data dalla massa stellare dello stesso (e dunque dalla materia luminosa), l'ampiezza della curva di rotazione è diretta conseguenza della quantità di materia oscura presente.

Nuovamente, si evidenzia una particolare combinazione tra le due quantità, perfettamente bilanciate per dare origine ai fenomeni osservati. Per capire come questo sia possibile, è necessario studiare il processo di formazione delle galassie.

### 2.4.1 Galassie a bassa luminosità (LSB)

Con l'avanzamento tecnologico, durante gli anni '90 divenne possibile compiere osservazioni più accurate: in particolare, vennero scoperte numerose galassie a bassa luminosità superficiale **LSB**, con caratteristiche intrinseche notevolmente differenti rispetto alle galassie ad alta luminosità superficiale **HSB** studiate fino a quel momento.

La legge di Freeman si rivelò dunque essere ristretta solo alle galassie del secondo tipo, ponendo un limite superiore, ma non inferiore, alla luminosità superficiale centrale delle galassie  $\Sigma_0$  non più costante. In particolare si osservò che le galassie LSB contenevano una maggior quantità di materia oscura rispetto alle galassie HSB, con curve di rotazione differenti: nelle vicinanze del centro galattico si osservò per le prima una salita molto ripida, quasi come se al loro interno non fosse presente materia luminosa; lo stesso modello NFW non interpola correttamente tali curva. Sembrerebbe quasi che la discrepanza tra materia oscura e luminosa nelle galassie dipenda dalla luminosità di queste e non dalla loro dimensione, come si potrebbe intuitivamente immaginare.

## 2.4.2 Relazione Barionica di Tully-Fischer

Il problema maggiore nel modello ad alone NFW si riscontra però nell'ambito della *relazione di Tully-Fischer* descritta nell'equazione (2.13). Sempre durante gli anni '90, lo studio delle galassie LSB portò alla determinazione di  $\alpha = 4$ , estendendo la relazione a galassie con diverse velocità di rotazione. Una relazione ancora più generale si ottiene se si considera la massa barionica  $M$  totale della galassia (che comprende quindi anche il gas presente in essa)

$$M \propto v^\alpha, \quad (2.14)$$

denominata **Baryonic Tully-Fisher Relation**.

Se si utilizza il modello di Materia Oscura, si ottiene un diverso valore di  $\alpha$ : le osservazioni sperimentali fornirono infatti la relazione  $M \propto V^3$  con  $V$  dispersione di velocità della materia nell'alone; la stessa velocità di rotazione del disco galattico osservata (pertanto fornita dalla materia barionica presente) è proporzionale a  $V$  e si ottiene infine  $L \propto v^3$ , che fornisce un valore di  $\alpha = 3$  in contraddizione con quanto osservato empiricamente.

## 2.5 Possibili candidati

Una volta individuata la possibile distribuzione di massa della materia oscura, si cominciò a studiare le caratteristiche di questa e dunque individuare i possibili candidati.

Partendo dalla materia fin'ora nota, si hanno diverse possibilità: come si è già visto, una prima differenziazione consiste nella velocità delle particelle stesse, che possono essere definite *calde* se raggiungono velocità prossime a quella della luce, o *fredde* se invece mantengono velocità non relativistiche. Inoltre, la materia oscura deve possedere le seguenti caratteristiche:

1. Elettricamente neutra;
2. Stabile;
3. Di massa non nulla.

In particolare, per quanto riguarda le *particelle* costituenti la materia:

- **Neutrini.** I neutrini sono particelle di massa molto piccola<sup>6</sup> che se presenti in grande abbondanza nell'Universo potrebbero fornire una densità tale da spiegare un Universo chiuso; essi sono presenti in più stati, in quanto è possibile osservare neutrini legati sia a elettroni, muoni e tau. Essi sono particelle relativistiche: la loro velocità prossima a  $c$  costituisce un problema nella formazione delle strutture, che risulterebbero formate in anticipo rispetto a quanto suggerito dalle evidenze sperimentali.

---

<sup>6</sup>I recenti esperimenti hanno posto un limite superiore alla massa del neutrino, pari a 2.2eV; ad oggi, non si hanno evidenze di limiti inferiori.

- **Elettroni e protoni.** Non sono elettricamente neutri, pertanto non rispettano la condizione 1.
- **Neutrone, tau, muone, Higgs, W e Z.** Non sono particelle stabili, pertanto non soddisfano la condizione 2.
- **Fotone e gravitone.** Sono particelle con massa nulla, pertanto non rispettano al condizione 3.

Mentre, per quanto riguarda le particelle che dovrebbero esistere secondo le teorie attuali, si hanno:

- **Particelle Supersimmetriche.** Sono i partner delle particelle note teorizzati dalla teoria della *Super Simmetria*; la più leggera particella supersimmetrica rappresenterebbe un ottimo candidato di materia oscura fredda. Il problema della teoria è che ancora non si è osservata nessuna delle particelle teorizzate<sup>7</sup>.
- **WIMP.** L'acronimo sta per *Weakly Interacting Massive Particle* (particelle massive debolmente interagenti) e indica un'ipotetica particella dotata di massa che interagisce debolmente con la materia normale solo tramite la gravità e la forza nucleare debole.
- **Assioni.** È un'ipotetica particella elementare, implicitamente ipotizzata dalla teoria di Peccei-Quinn per spiegare la non violazione della simmetria CP nell'interazione forte.

Invece, nell'ipotesi che la materia oscura sia costituita da *oggetti compatti*, i possibili candidati risultano essere:

- **Buchi neri.** Una quantità di buchi neri formata all'inizio della storia dell'Universo e non in seguito alla morte di una stella, potrebbe agire come materia oscura fredda. Tuttavia, se questi fossero fatti di barioni, si sarebbero dovuti formare prima della nucleosintesi, per evitare il limite imposto dalla relazione (2.2). In questo caso i barioni già presenti non possono essere computati nel conto dei barioni in quanti non partecipano alla formazione di nuclei.
- **MACHOs.** L'acronimo sta per *MAssive Compact Halo Object*. Sono gli unici candidati di materia oscura che siano stati rivelati fin'ora. Generalmente il termine MACHOs indica oggetti compatti con masse non troppo distanti da quella delle stelle, sia barionici che non barionici (un esempio di MACHOs barionici sono le nane brune).  
Questi oggetti sono stati rivelati attraverso il fenomeno delle *lenti gravitazionali* nella Nube di Magellano: se ci sono oggetti massivi invisibili nell'alone che passano molto vicino a una delle stelle presenti, il campo gravitazionale di questo può curvare e rifocalizzare la luce della stella, dando vita al fenomeno citato. Purtroppo la frequenza di avvenimenti di questo tipo è molto ridotta e pertanto difficile da rivelare.

---

<sup>7</sup>A voler essere ottimisti, si potrebbe dire che se ne sono osservate la metà.



## Capitolo 3

# Modified Newtonian Dynamics

Nei precedenti capitoli si sono analizzate le prove a sostegno dell'ipotesi di Materia Oscura: partendo dalle evidenze relative alla nascita di tale modello, si è proseguito studiando l'evoluzione dello stesso, fino a giungere al paradigma  $\Lambda$ CDM. In questa visione si è rivalutato il ruolo della costante cosmologica  $\Lambda$ , che assume ora un carattere predominante all'interno della composizione dell'Universo stesso; il contributo della materia e della costante cosmologica alla densità dell'Universo risultano rispettivamente  $\Omega_0 \sim 0.3$  e  $\Omega_\Lambda \sim 0.7$ .

Si vuole ora prendere in analisi una delle teorie che nel corso degli ultimi decenni ha cercato di fornire una spiegazione del tutto diversa ai fenomeni osservati, la teoria **MOND**. Nel seguente capitolo si prenderanno in considerazione gli sviluppi e i successi di tale modello rispetto alla teoria  $\Lambda$ CDM.

### 3.1 Teoria MOND

Durante i primi anni '80, si cominciò a pensare a una possibile spiegazione dei fenomeni galattici osservati modificando le leggi della fisica, senza ipotizzare una considerevole quantità di materia non visibile nell'Universo. La prima grande differenza tra i due modelli sta proprio nelle assunzioni di partenza: mentre l'ipotesi di Materia Oscura non modifica le leggi della fisica conosciute stabilendo la presenza di materia non visibile per spiegare i fenomeni gravitazionali, la teoria MOND modifica invece le leggi note in modo tale da non dover ricorrere a un tale espediente.

Tale teoria è dovuta al fisico M. Milgrom, che nel 1983 pubblicò tre articoli proponendo una modifica della dinamica newtoniana basata su una scala di accelerazione, esplorando le conseguenze per i sistemi galattici e i sistemi di galassie. Egli rimane particolarmente colpito dalle curve di rotazione delle galassie, all'epoca note con estrema precisione, descritte all'interno della Sezione 2.1.2, e della loro piattezza asintotica a grandi distanze. Ipotizzò quindi che i parametri dei sistemi galattici, essendo di svariati ordini di grandezza maggiori rispetto a quelli degli oggetti testati in laboratorio, potessero essere descritti da una modifica della legge di inerzia, che dovesse rispettare le seguenti quattro ipotesi:

1. La forza di inerzia è proporzionale alla massa;
2. L'accelerazione di un oggetto dipende dalla forza nella posizione in cui si trova, forza dedotta dalla distribuzione delle sorgenti massive;
3. La forza d'inerzia è diretta come l'accelerazione;
4. Nel limite di piccole accelerazioni, l'inerzia diventa quadratica nell'accelerazione (in questo modo è spiegata la piatezza asintotica delle curve di rotazione).

Milgrom introdusse una costante  $a_0$  con le dimensioni di un'accelerazione e propose di sostituire la seconda legge di Newton con l'equazione (3.1)

$$\vec{F} = m \mu \left( \frac{a}{a_0} \right) \vec{a}. \quad (3.1)$$

Dove  $m$  è la massa gravitazionale<sup>1</sup>,  $\vec{F}$  è la forza agente sul corpo con accelerazione  $\vec{a}$  e  $\mu(x)$  è la **funzione di interpolazione**:

$$\mu(x) = \begin{cases} 1 & \text{se } |x| \gg 1 \\ x & \text{se } |x| \ll 1. \end{cases} \quad (3.2)$$

Il caso  $a \gg a_0$  fornisce la seconda legge di Newton, mentre il caso  $a \ll a_0$  definisce la modificazione della dinamica.

Altri scienziati proposero diverse idee inerenti la forma analitica di  $\mu(x)$ , proponendo delle modificazioni non sulla scala delle accelerazioni, ma su quella delle lunghezze: la versione di Sanders (1984) ad esempio prevedeva una modificazione del potenziale Newtoniano grazie all'inclusione di un termine repulsivo alla Yukawa ( $\frac{e^{-\frac{r}{r_0}}}{r}$ ) che avrebbe fornito una velocità di rotazione costante dopo qualche intervallo di  $r$ .

Tutte queste modificazioni inerenti la scala di lunghezza hanno una cosa in comune: uguagliare l'accelerazione centripeta a quella gravitazionale nel limite  $r > r_0$  porta ad una relazione per la velocità del tipo  $v^2 = \frac{GM}{r_0}$ ; Milgrom si rese conto che questo sarebbe risultato incompatibile con altre evidenze sperimentali, come la relazione di Tully-Fisher e le osservazioni compiute sulle galassie LSB.

Una modificazione della gravità relativa invece all'accelerazione fornì risultati sorprendentemente vicini alle evidenze sperimentali non spiegate dalla teoria di Materia Oscura.

## 3.2 MOND e curve di rotazione

Si vuole ora dimostrare come questa rivisitazione della seconda legge di Newton possa spiegare l'andamento asintoticamente piatto delle curve di rotazione a grandi distanze.

---

<sup>1</sup>Viene assunta l'equivalenza tra massa inerziale e massa gravitazionale.

L'accelerazione di una particella di prova immersa in un campo gravitazionale è fornita dalla seguente relazione:

$$\mu\left(\frac{a}{a_0}\right)\vec{a} = g_N\vec{N}, \quad (3.3)$$

dove  $g_N$  corrisponde all'accelerazione gravitazionale newtoniana della particella nel punto in cui si trova.

Si supponga ora di trovarsi a grandi distanze in un regime di teoria MOND ( $a \ll a_0$ ) e che la particella di prova compia un moto circolare, con  $a = \frac{v^2}{r}$ ; se il campo gravitazionale è dato da

$$g_N = G \frac{M}{r^2}, \quad (3.4)$$

sostituendo all'interno dell'equazione (3.3) si ottiene in modulo

$$\frac{a^2}{a_0} = g_N \quad \rightarrow \quad \frac{v^4}{r^2 \cdot a_0} = G \frac{M}{r^2} \quad (3.5)$$

$$\rightarrow \quad v_\infty^4 = M G a_0 = \text{cost}, \quad (3.6)$$

che rappresenta la velocità a grandi distanze dal centro galattico.

Per soddisfare la l'ipotesi nr. 4, è necessario che la velocità<sup>2</sup>  $v_\infty$  non solo sia costante, ma che porga una curva di rotazione asintoticamente piatta. In seguito a considerazioni sulla dinamica delle galassie a spirale, è possibile giungere a una famiglia di funzioni in grado di rispettare tali condizioni; il confronto poi con le osservazioni sperimentali, permette di fissare tale funzione e fornire una prima stima della costante  $a_0$ ; ad esempio è possibile scegliere

$$\mu(x) = \frac{x}{\sqrt{1+x^2}}. \quad (3.7)$$

Considerazioni poi sull'andamento delle curve portano a un valore di circa  $a_0 \sim 10^{-10} \frac{\text{m}}{\text{s}^2}$ : Milgrom propose quindi una modifica della dinamica newtoniana per accelerazioni di circa undici ordini di grandezza inferiori rispetto all'accelerazione di gravità terrestre.

Attualmente, il valore di  $a_0$  risulta essere

$$a_0 \simeq 1.2 \cdot 10^{-10} \frac{\text{m}}{\text{s}^2}. \quad (3.8)$$

É interessante la seguente relazione, che lega la costante teorizzata con il modello MOND alle quantità utilizzate nell'ambito del modello  $\Lambda$ CDM, dove si è visto il ruolo centrale della costante  $\Lambda$  nella stima della densità di materia dell'Universo:

$$\bar{a}_0 \equiv 2\pi a_0 \approx cH_0 \approx c^2 \sqrt{\frac{\Lambda}{3}}. \quad (3.9)$$

---

<sup>2</sup>Il pedice vuole indicare proprio l'andamento della velocità nel limite per grandi distanze dal centro galattico, dove la quantità di materia  $M$  sarà costante, essendo questa concentrata interamente nel centro della galassia.

La formula (3.6) prevede quindi curve di accelerazioni asintoticamente piatte e una relazione tra massa e luminosità del tipo  $M \propto v^4$ : questi aspetti sono stati fondamentali nello sviluppo della teoria ed è pertanto errato pensare che siano delle predizioni della teoria stessa. In ogni caso, nel contesto MOND, l'aspetto della piatezza asintotica delle curve di rotazione è assoluto, lasciando davvero piccolo spazio di manovra: l'idea è che il principio sia falsificabile, o almeno è molto più di quanto non sia l'ipotesi di Materia Oscura; esempi di curve di rotazione che a grandi distanze siano rappresentate dalla usuale legge di Keplero falsificherebbero tale idea.

Se ne parlerà in modo più approfondito successivamente, ma anche la relazione di Tully-Fischer trova conferma nella teoria MOND e di certo la relazione (3.9) potrebbe essere non solo una coincidenza cosmica, ma anche suggerire che la teoria MOND rifletta gli effetti della cosmologia nella dinamica locale delle galassie.

Un altro pregio della teoria MOND riguarda il numero di parametri liberi utilizzati per la stima delle curve di rotazione: mentre il modello CDM necessita di ben tre parametri liberi, la teoria MOND ne ha uno solo, il rapporto massa-luce  $\Upsilon$ , risultando molto più vincolata.

In generale, la determinazione della curva di rotazione delle galassie a spirale ha i seguenti step: si osserva la distribuzione di materia visibile, si calcola l'accelerazione di velocità radiale  $g_N$  tramite la formula di Poisson classica valida in regime Newtoniano, essendo

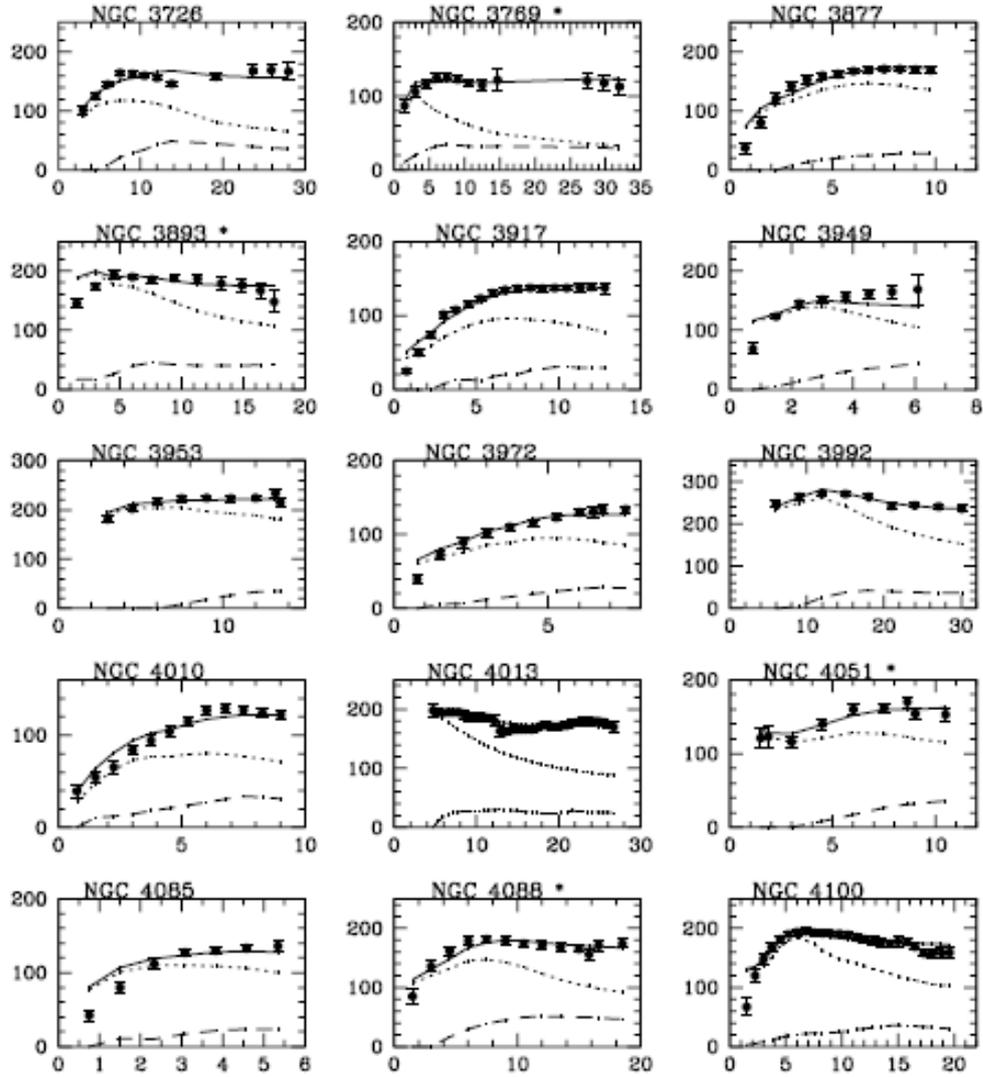
$$g_N = -\frac{\partial\phi}{\partial R} \quad \nabla^2\phi = 4\pi G\rho, \quad (3.10)$$

o qualsiasi altra ipotesi alternativa, per esempio

$$\vec{\nabla} \cdot \left[ \mu \left( \frac{|\nabla\phi|}{a_0} \right) \vec{\nabla}\phi \right] = 4\pi G\rho, \quad (3.11)$$

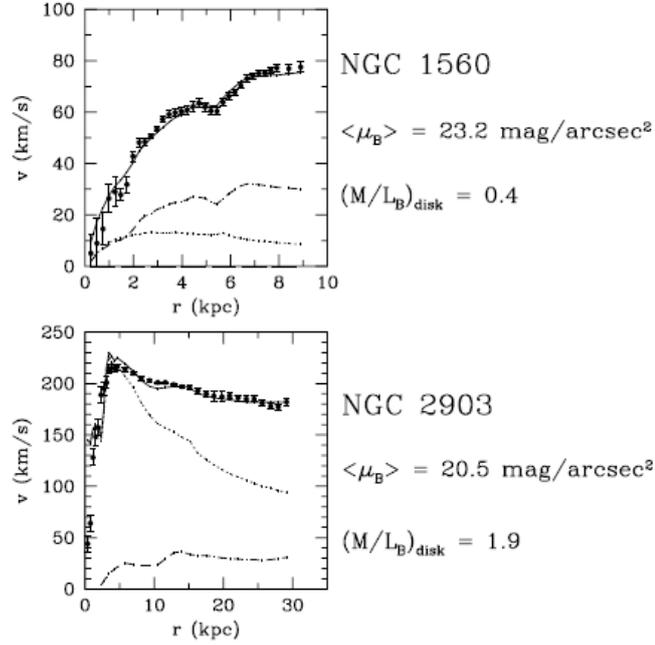
si ricava l'accelerazione effettiva predetta da MOND secondo la relazione (3.3) con  $a_0$  fissato e si aggiusta il valore di  $\Upsilon$  finchè non si è ottenuta una buona interpolazione dei dati. Ovviamente è necessario scegliere un'espressione analitica per  $\mu(x)$  che ad oggi non è ancora stata ricavata per via teoria: i dati permettono di avere una visione migliore dell'effettiva espressione di  $\mu(x)$ , senza tuttavia riuscire a determinarla all'interno di uno stesso range compatibile con i dati sperimentali.

Tutte le curve di rotazione ricavate a partire dalla teoria MOND hanno sempre fornito ottimi risultati, senza mai invalidare la teoria stessa. A partire dai fit, è possibile inoltre ricavare il valore di  $\Upsilon$  caratteristico e verificare se questo sia o meno compatibile con quanto determinato a partire dai modelli di formazione delle popolazioni stellari, sviluppatasi separatamente e precedentemente dalla teoria MOND. Nuovamente, i due valori di  $\Upsilon$  associati alla curva di rotazione sono risultati compatibili. Sono visibili alcuni esempi nelle figure 3.1 e 3.2.



**Figura 3.1:** Interpolazione di curve di rotazione secondo il modello MOND delle galassie dell'Orsa Maggiore. La distanza (asse ascisse) è espressa in kpc e le velocità di rotazione (asse ordinate) in  $\frac{\text{km}}{\text{s}}$ .

Le linee puntata e tratteggiata sono le curve di rotazione Newtoniane delle componenti visibili e gassose del disco, la linea continua è invece la curva di rotazione MOND. L'unico parametro libero è il rapporto  $\Upsilon$  delle componenti visibili. Da [5].



**Figura 3.2:** I punti mostrano le curve di rotazione di una galassia LSB (NGC 1650) e di una galassia HSB (NGC 2903).

Non solo MOND predice il trend generale per le galassie LSB e HSB, ma predice anche le curve di rotazione osservate nel dettaglio partendo dalla distribuzione di materia visibile. Da [5].

### 3.3 Predizioni generali della teoria MOND

Ci sono molte altre dirette conseguenze visibili della dinamica modificata espone negli articoli di Milgrom, che possono essere considerate delle predizioni della teoria MOND in quanto non facenti parte delle basi della teoria stessa.

#### 3.3.1 Luminosità superficiale critica

É presente un valore critico della luminosità superficiale

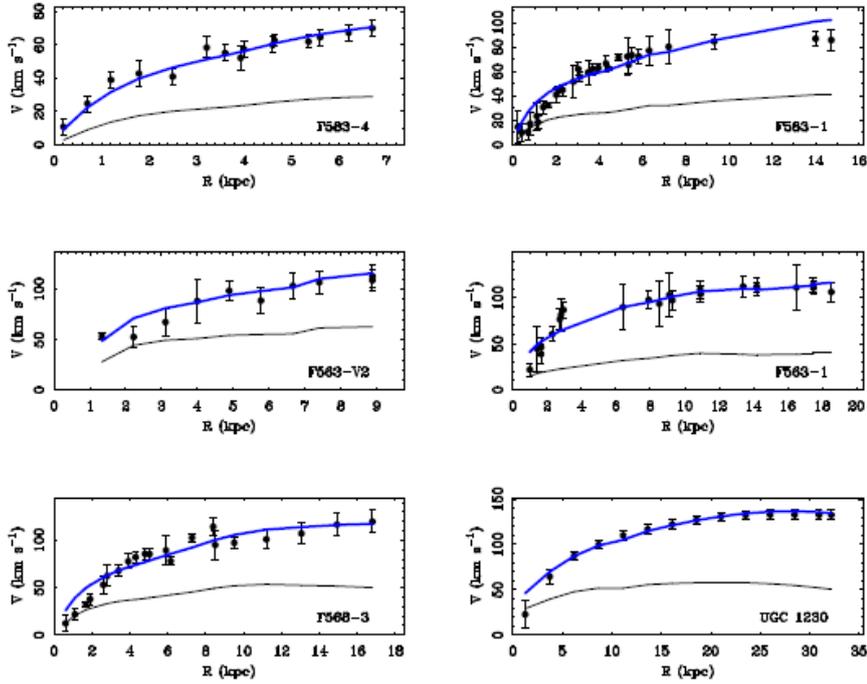
$$\Sigma_m \approx \frac{a_0}{G} \simeq 1.8 \frac{\text{kg}}{\text{m}^2}. \quad (3.12)$$

A partire dal valore di  $\Sigma$  di un certo sistema rispetto al valore critico  $\Sigma_m$ , è possibile stabilire il comportamento dello stesso.

- $\Sigma > \Sigma_m$ . Se un sistema, come ad esempio una galassia a spirale, ha una densità di luminosità superficiale maggiore di  $\Sigma_m$ , allora l'accelerazione interna è maggiore di  $a_0$ , quindi il sistema è in regime newtoniano: le discrepanze tra massa visibile e massa classica imposta dalla dinamica newtoniana nel disco ottico dovrebbero essere minime. É il caso delle galassie HSB.

- $\Sigma \ll \Sigma_m$ . Se invece il sistema presenta un valore della luminosità superficiale molto inferiore a quello critico ( $\Sigma \ll \Sigma_m$ ), allora ci si dovrebbe trovare nel regime MOND, pertanto l'analisi eseguita con il modello CDM dovrebbe presentare quelle evidenze presentate nel capitolo precedente. L'accelerazione interna è molto bassa, quindi la discrepanza osservata dovrebbe essere molto maggiore. È il caso delle galassie LSB.

Prima ancora della scoperta delle galassie LSB, Milgrom predisse che ci sarebbe dovuta essere una considerevole discrepanza tra massa osservabile e dinamica in sistema di questo tipo. Tale predizione è stata confermata nel 1998, dai lavori di McGaugh e de Blok. Un esempio di curve di rotazione per galassie LSB è riportato in Figura 3.3.



**Figura 3.3:** Interpolazione di curve di rotazione secondo il modello MOND per galassie con bassa luminosità superficiale. Tali galassie sono importanti nel test di MOND in quanto la loro bassa luminosità superficiale le rende ben caratterizzabili in tale contesto. Da [4].

### 3.3.2 Legge di Freeman

Come evidenziato nella Sezione 2.1.3, sistemi sostenuti da una dinamica di rotazione Newtoniana tendono ad essere instabili, portando alla formazione della barra nella galassie e a un rapido surriscaldamento del sistema. Nel contesto delle teorie MOND, sono questi i sistemi con  $\Sigma > \Sigma_m$ :  $\Sigma_m$  sembra essere un limite superiore alla densità di luminosità superficiale che supporta gravitazionalmente tali sistemi; tale limite superiore

empirico è conosciuto come **legge di Freeman**. L'esistenza di una densità di luminosità superficiale massima è naturale nel contesto MOND, mentre deve essere inserita appositamente nelle teorie di Materia Oscura.

Si è visto che una galassia con un elevato  $\Sigma_m$  non è stabile; nel modello CDM la stabilità è data dalla presenza dell'alone di materia oscura e non vi è pertanto ragione che vi sia un tale limite: maggiore materia barionica dovrebbe implicare maggiore materia oscura, ma tale relazione non avviene. La teoria MOND invece prevede l'instabilità per galassie con  $\Sigma > \Sigma_0$ , non essendoci materia oscura che la garantisca.

### 3.3.3 Relazione di Faber-Jackson

Nella dinamica newtoniana, i sistemi sostenuti dalla presenza di pressione sono quasi del tutto isotermi in approssimazione di massa infinita. Tuttavia, nel contesto delle teorie MOND, è immediato dimostrare che tali sistemi isotermi abbiano una massa finita, con densità a grandi distanze di andamento  $\propto \frac{1}{r^4}$ . Per un sistema isotropico e isoterma, l'equazione di equilibrio idrostatico vale

$$\sigma_r^2 \frac{d\rho}{dr} = -\rho g, \quad (3.13)$$

nel limite di basse accelerazioni  $g = \frac{\sqrt{GM_r a_0}}{r}$ , con  $\sigma_r$  velocità di dispersione radiale; da cui segue

$$\sigma_r^4 = GM a_0 \left( \frac{d \ln(\rho)}{d \ln(r)} \right)^{-2}. \quad (3.14)$$

Da questa si giunge ad una relazione tra massa e velocità di dispersione, della forma  $M \propto \sigma_r^4$ . In particolare, si ottiene che una sfera isoterma in regime MOND con velocità di dispersione tra i  $100 \frac{\text{km}}{\text{s}}$  e i  $300 \frac{\text{km}}{\text{s}}$  avrà sempre una massa galattica.

Il raggio effettivo per tale tipo di sistema è  $r_e \approx \sqrt{\frac{GM}{a_0}}$ ; questo significa che  $a_0$  appare come una accelerazione caratteristica di questi sistemi e  $\Sigma_m$  sia una densità superficiale caratteristica, o quanto meno un limite superiore.

Le relazioni viste sono alla base della relazione di Faber-Jackson per le galassie ellittiche, che tuttavia non risulta essere predetta così bene dalla teoria MOND come accade invece per la relazione di Tully-Fischer: per le galassie ellittiche infatti, quest'ultima relazione non può valere, in quanto non sono sostenute dal moto rotazionale dei corpi al loro interno, ma dalla pressione causata dal moto degli stessi. Si definisce quindi la **relazione di Faber-Jackson**, analoga alla BTFR, utilizzando non la velocità di rotazione, ma la velocità di dispersione

$$L \propto \sigma_r^4. \quad (3.15)$$

### 3.3.4 Relazione di Tully-Fischer Barionica

In Sezione 2.4.2 si erano discusse l'importanza e le problematiche derivanti dalla relazione di Tully-Fischer Barionica. Tale relazione dovrebbe essere la stessa per differenti

classi di galassie, indipendentemente dalla scala di lunghezze e luminosità superficiale, con pendenza logaritmica pari a 4. In particolare, la relazione lega la massa barionica di una galassia con la velocità rotazionale asintoticamente piatta che viene assunta a grandi distanze.

Per esteso, la relazione può essere riscritta come

$$\log M = \alpha \log v - \log \beta, \quad (3.16)$$

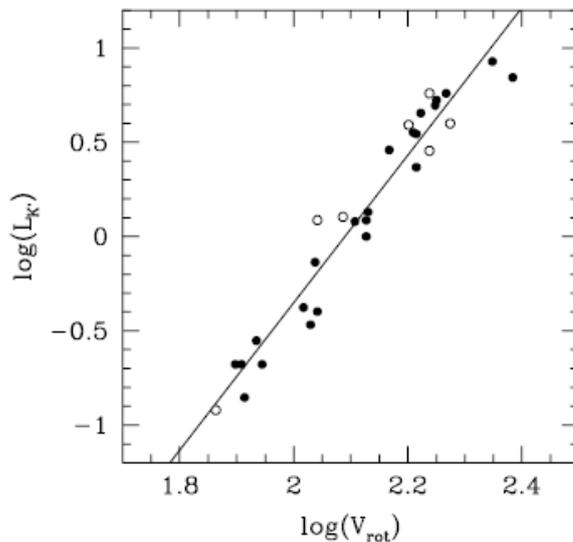
dove appunto  $M$  indica la massa barionica presente,  $v$  la velocità asintotica di rotazione e  $\alpha$  e  $\beta$  sono dei parametri di fit; le evidenze sperimentali suggeriscono  $\alpha = 4$  con ottima precisione, mentre la teoria di Materia Oscura non è in grado di andare oltre il valore  $\alpha = 3$ .

Nel caso della teoria MOND, la relazione di Tully-Fischer barionica appare come una naturale conseguenza dell'equazione (3.6), infatti applicando la funzione logaritmo a entrambi i membri è immediato ottenere

$$\log M = 4 \log v_\infty - \log(Ga_0). \quad (3.17)$$

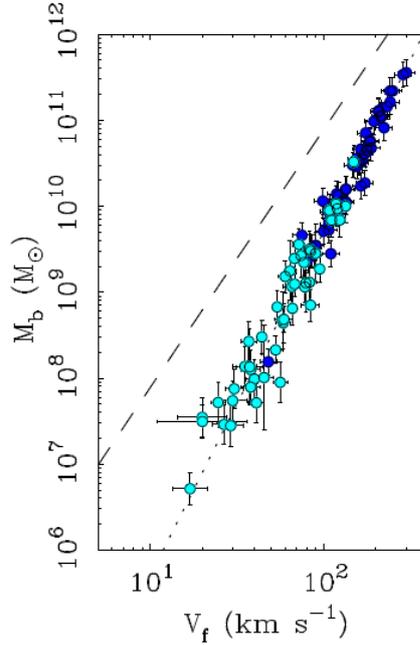
Non solo il valore di  $\alpha$  è naturalmente predetto dalla teoria MOND, ma il valore dell'intercetta  $\beta = Ga_0$  è consistente con i dati sperimentali.

In Figura 3.4 e in Figura 3.5 è possibile osservare degli esempi di interpolazione con la teoria MOND di misure inerenti la legge di Tully-Fischer.



**Figura 3.4:** La relazione di Tully-Fischer delle spirali dell'Orsa Maggiore vicina all'infrarosso. La velocità di rotazione è asintoticamente costante. La velocità è misurata in  $\frac{\text{km}}{\text{s}}$ , mentre la luminosità in  $10^{10}L_\odot$ .

I punti non anneriti sono galassie con disturbi della cinematica. La linea interpolante ha un ottimo accordo con i dati e presenta un pendenza di  $3.9 \pm 0.2$ , come previsto.



**Figura 3.5:** Relazione di Tully-Fischer per galassie con ben determinata velocità di fuga, in analogia alle galassie rappresentate in Fig. 3.3. La massa barionica è somma della massa visibile e del gas presente. La linea puntata ha una pendenza corrispondente a  $\alpha = 4$ , secondo la teoria MOND; la linea tratteggiata invece ha pendenza  $\alpha = 3$ , interpolata utilizzando il modello  $\Lambda$ CDM. È evidente come sia correlazione tra massa barionica e velocità asintotica, con previsione di tipo MOND. Da [4]. Da [5].

È necessario sottolineare come gran parte delle predizioni della teoria MOND si siano verificate con ottima precisione, pur essendo state formulate ben prima che l'avanzamento tecnologico permettesse di scoprire le galassie LSB, ad esempio.

La teoria è in oltre in grado di dare spiegazione ad alcuni di quegli aspetti problematici analizzati in Sezione 2.3 e 2.4, che il modello  $\Lambda$ CDM non è in grado di risolvere.

### 3.3.5 Effetto di campo esterno

L'*effetto di campo esterno* non è una predizione, ma una richiesta fenomenologica della teoria con forti implicazioni per i sistemi non isolati. Negli articoli del 1983, Milgrom pose in risalto il fatto che clusters aperti nelle galassie non mostravano evidenze di discrepanza di massa sebbene l'accelerazione interna fosse minore di  $a_0$ . Egli quindi postulò che l'accelerazione esterna del campo della galassia dovesse avere effetti sulla dinamica interna dell'ammasso di stelle, e che in generale, la dinamica di ogni sottosistema fosse influenzata dal campo esterno in cui il sistema è posto.

Tale supposizione implica che il modello su cui è basata la teoria MOND non rispetta il principio di equivalenza di Einstein nella forma forte: tale principio infatti sostiene

che in un intorno di un punto dello spazio tempo, è possibile trovare un sistema di riferimento localmente inerziale in cui gli effetti della gravità diventano irrilevanti ed è possibile applicare le leggi della Relatività Speciale.

Milgrom propose l'approssimazione della non linearità della teoria MOND con l'inclusione di un termine di accelerazione del campo esterno,  $g_e$  all'interno dell'equazione (3.3):

$$\mu\left(\frac{|g_e + g_i|}{a_0}\right) g_i = g_{n_i}, \quad (3.18)$$

dove  $g_i$  è il campo gravitazionale interno del sotto sistema,  $g_{n_i}$  il campo newtoniano dell'alone del sotto sistema. Si presentano quindi tre casi di interesse:

- $g_i < a_0 < g_e$ : accelerazione interna minore di  $a_0$  e accelerazione esterna maggiore; dinamica di tipo newtoniano;
- $g_i < g_e < a_0$ : dinamica del sotto sistema newtoniana, ma con una costante di gravità effettiva maggiore, pari a  $G \mu^{-1} \left(\frac{g_e}{a_0}\right)$ ;
- $g_e < g_i < a_0$ : dinamica di tipo MOND con massima discrepanza data da  $\mu^{-1} \left(\frac{g_e}{a_0}\right)$ .

La dinamica Newtoniana non necessita di tali distinzioni essendo lineare: la dinamica interna di un sistema è disaccoppiata dal campo esterno costante in cui si trova. Per le teorie MOND non è più così.

L'effetto di campo esterno ha numerose conseguenze, ad esempio sulle dinamiche interne dei clusters sferici e sulle galassie nane nella Via Lattea.

### 3.3.6 Ruolo di $a_0$

Lo sviluppo della teoria MOND ha portato all'introduzione della costante  $a_0$ , in grado di spiegare i diversi fenomeni visti nelle sezioni precedenti. In particolare, essa permette di:

1. Spiegare l'andamento asintoticamente piatto delle curve di rotazione;
2. Definire il punto zero della relazione barionica di Tully-Fischer;
3. Definire il punto zero della relazione di Faber-Jackson;
4. Definire la discrepanza tra massa aspettata e osservata;
5. Spiegare il limite di Freeman nell'ambito della densità superficiale critica.

È necessario sottolineare l'indipendenza delle grandezze fisiche e dei fenomeni coinvolti, che ad oggi non risultano essere collegati. In questo senso, è possibile rivedere in  $a_0$  il ruolo di costante unificatrice dei fenomeni gravitazionali in quest'ambito.

### 3.4 Ammassi di Galassie

Nel Capitolo 2 si sono viste le prime evidenze di presenza di materia oscura nell'Ammasso della Chioma di Berenice. Lo studio di sistemi di tale grandezza con l'utilizzo della teoria  $\Lambda$ CDM ha prodotto ottimi risultati; la teoria MOND tuttavia, pur spiegando con ottimo accordo i fenomeni a livello galattico, non è in grado di spiegare in modo ugualmente esatto la dinamica dei corpi presenti nei clusters di galassie. Anche con l'utilizzo della teoria MOND, è necessario ipotizzare un considerevole quantitativo di materia oscura, compromesso inaccettabile per la teoria stessa.

L'idea portata avanti inizialmente prevedeva la crescita di quantità di materia oscura con l'aumentare della scala di riferimento: un fattore dieci per la discrepanza di massa nella galassie, centinaia negli ammassi e via dicendo. Con l'avvento della radioastronomia, le rilevazioni evidenziarono all'interno dei clusters il quantitativo di materia barionica in forma di gas caldo, quasi nella sua totalità: tali sistemi sono quindi dominati dalla materia barionica, che comunque da sola non è in grado di spiegare la dinamica presente. Quello che sembrerebbe essere una conferma della teoria MOND in favore del modello  $\Lambda$ CDM, risulta essere in realtà l'opposto: l'analisi delle evidenze sperimentali infatti risulta in netto contrasto con le predizioni della teoria MOND, rendendo comunque necessaria la presenza di materia aggiuntiva.

Per sistemi come i clusters di galassie, dove appunto la componente barionica costituita da gas caldo è dominante, è possibile ricavare una relazione simile a quella di Tully-Fisher, tra temperatura del gas e massa barionica del tipo  $M \propto T^2$ .

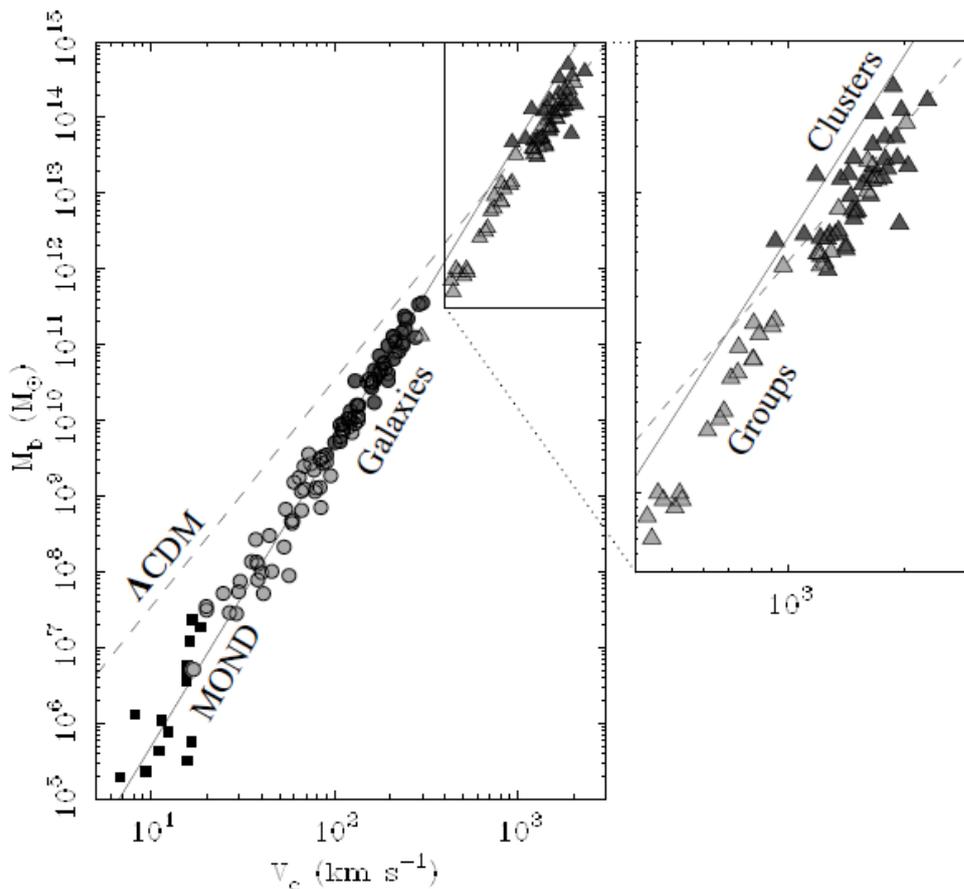
Mentre la teoria MOND prevede la stessa pendenza, ma con un diverso offset, il modello  $\Lambda$ CDM prevede una relazione del tipo  $M \propto T^{\frac{3}{2}}$ , con la corretta intercetta, come è possibile osservare in Figura 3.6. I dati suggeriscono comunque la presenza di massa mancante rispetto alle previsioni della teoria MOND. Tale conclusione, raggiunta grazie all'applicazione dell'equazione di equilibrio idrostatico al profilo di temperatura dei raggi X emessi da tali oggetti, è stata anche raggiunta per gruppi poco massivi emettenti raggi X. Questo accade essenzialmente perchè, al contrario del caso delle galassie, è empiricamente necessaria della massa nascosta nelle regioni centrali dell'ammasso: la previsione MOND non è sufficiente a supplire tale mancanza, sebbene riesca comunque a ridurre la quantità di materia nascosta necessaria a spiegare la dinamica; nel caso galattico invece, la teoria MOND riesce a eliminarla completamente.

La materia mancante che la teoria MOND è costretta a prevedere nella spiegazioni dei fenomeni su larga scala potrebbe essere costituita dalle particelle presenti nel Modello Standard, a differenza del modello  $\Lambda$ CDM: neutrini pesanti sterili con massa di circa 2 GeV<sup>3</sup> potrebbero essere dei validi candidati, sebbene le stime sulla massa superiore del neutrino abbiano già escluso valori così elevati.

---

<sup>3</sup>Doverosa la nota: il riferimento non è ai neutrini comunemente accettati nel Modello Standard, ma ad altri tipi di neutrini, molto poco interagenti, la cui massa risulta tutt'ora sconosciuta.

L'introduzione di materia aggiuntiva nel modello, nonostante sia in aperta contraddizione con la filosofia del modello di Milgram, renderebbe i dati consistenti con i risultati della CMB.



**Figura 3.6:** Massa barionica in funzione della velocità di rotazione per sistemi da nane sferiche a galassia a spirale dominate da gas o stelle, a gruppi e clusters. La predizione di MOND è la linea continua, mentre l'interpolazione  $\Lambda$ CDM è tratteggiata. É ben visibile in corrispondenza dei gruppi e ammassi di galassie il diverso andamento dei due modelli: mentre MOND risulta parallelo a quanto osservato,  $\Lambda$ CDM ha invece la corretta intercetta. Da [1].

Lo studio delle lenti gravitazionali è una tecnica complementare all'equilibrio idrostatico del gas emettente raggi X per indagare la distribuzione di massa di un cluster di galassie. Dato che gli ammassi sono le più recenti strutture formate, potrebbero essere leggermente fuori equilibrio, rendendo il fenomeno di lensing gravitazionale estremamente interessante.

Un esempio particolarmente famoso a tal proposito riguarda il cluster *1E0657-56*, conosciuto anche come l'*ammasso del Proiettile*: esso si è formato a partire dalla col-

lisione di due clusters a velocità molto elevata (maggiore di  $3100 \frac{\text{km}}{\text{s}}$ ). Nella collisione, il gas caldo dissipato emettente raggi  $X$ , che dominava la materia barionica, è stato separato dalle galassie e dalla presunta materia oscura, trovandosi ora in due luoghi ben definiti e distanti nello spazio. Studiando l'effetto di lente gravitazionale causato da questo ammasso, è possibile osservare che la luce proveniente dalle galassie sullo sfondo è deflessa attorno a due regioni che non coincidono con quelle in cui è presente il gas. Il modello  $\Lambda$ CDM prevede che proprio in queste regioni si trovi la materia oscura separata inizialmente, riuscendo in questo modo a spiegare perfettamente l'effetto di lente gravitazionale osservato.

Tale evidenza è in completa contraddizione rispetto alle teorie MOND, tanto che l'ammasso del Proiettile viene visto dai più come una prova dell'erroneità della teoria MOND; tuttavia, le altre prove a sostegno di tale teoria non permettono di falsificare completamente il modello: al più, si può riconoscere che questo sia incompleto. Nuovamente, una soluzione al problema rimanendo all'interno di tale paradigma, potrebbe essere la presenza di massa nascosta.

Recentemente inoltre, sono stati studiati altri clusters simili a quello del Proiettile, come il cluster *A520*, in cui le parti con materia oscura e le galassie sono in rotta di collisione. Come nell'Ammasso del Proiettile, si osserva netta separazione tra le regioni in cui sono maggiormente concentrate le galassie e i gasi intergalattici ad alte temperature. Vi sono tuttavia delle differenze importanti: la distribuzione di materia oscura appare più concentrata in aree meno popolate da galassie, senza essersi separata in modo così distinto dal gas.

Nuovamente quindi sono presenti delle contraddizioni all'interno del modello  $\Lambda$ CDM.

Pertanto, per quanto riguarda le evidenze derivanti dagli ammassi di galassie, è necessario sottolineare che non vi è prova all'interno dei dati che la massa nascosta richiesta sia proprio la massa non barionica di tipo CDM. Come si è obbligati ad accettare la presenza sia di barioni oscuri sia di non barioni CDM nella teoria  $\Lambda$ CDM, allo stesso modo in MOND si è obbligati ad accettare barioni oscuri nei clusters, o qualche altra forma esotica di massa nascosta, come neutrini pesanti normali o sterili.

### 3.5 MOND come modifica alla legge di inerzia

Secondo un differente approccio portato avanti sempre da Milgrom negli anni successivi la pubblicazione dei suoi articoli, MOND potrebbe essere vista come una modificazione del principio di inerzia. In queste teoria non relativistiche, tale principio viene sostituito da un oggetto matematico più complicato  $A_m S[\vec{r}(t), a_0]$ , dove  $A_m$  dipende dal corpo e può essere identificato come la massa,  $S$  è una funzione della traiettoria del corpo ( $\vec{r}(t)$ ) caratterizzato dal parametro  $a_0$ . In questa forma, viene garantito il principio di equivalenza in forma debole, a differenza di quanto assunto inizialmente.

Milgrom provò che tale modificazione dovesse essere invariante per le trasformazioni di Galileo, avere comportamento Newtoniano per grandi accelerazioni e MONDiano per piccole accelerazioni, ed essere strettamente non locale; in questo modo la teoria non

soffre di quell'instabilità tipica delle altre teorie. Tuttavia, poichè non locale, l'accelerazione del centro di massa di un corpo composto emerge come un fattore rilevante nella determinazione della sua dinamica (sia essa Newtoniana o MONDina) rispetto alle accelerazioni delle singole componenti.

Sebbene tali risultati sulla natura della generalizzazione del principio di azione sia di considerevole interesse, ciò non definisce ancora una teoria MOND come di modificazione del principio di inerzia; la coincidenza dei valori di  $a_0$  e  $cH_0$  vista nella relazione (3.9), suggerisce che MOND sia una effettiva teoria; in ogni caso, la cosmologia non inferisce necessariamente il moto delle particelle, mentre una costante cosmologica ad esempio, potrebbe influenzare sia la cosmologia che la dinamica.

Per approfondire questo tipo di ragionamenti è necessario considerare una teoria di inerzia derivante dall'interazione con il vuoto, in analogia all'introduzione della gravità in cui la curvatura dello spazio tempo modifica il comportamento del vuoto.

Ad ogni modo, la relazione (3.9) è il miglior indizio di un possibile collegamento tra MOND e cosmologia, perchè indica che potrebbe esserci una forte correlazione tra i parametri che descrivono l'Universo in espansione e la dinamica locale di piccoli sistemi.

### 3.6 MOND come modifica della gravità

Oltre a quanto visto nel paragrafo precedente, l'approccio più affermato nello studio delle teorie MOND riguarda la modifica della gravità. Sebbene MOND riesca a descrivere molti dei fenomeni galattici presi in esame, essa non può essere considerata una vera e propria teoria fisica in quanto non soddisfa le usuali leggi di conservazione; da qui, l'idea di una modifica della gravità.

Si considerino quindi corpi con massa unitaria. In termini del potenziale newtoniano  $\Phi_N$  è possibile riscrivere l'equazione (3.3) come

$$\mu\left(\frac{a}{a_0}\right)\vec{a} = -\vec{\nabla}\Phi_N. \quad (3.19)$$

Si trova dunque una lagrangiana che non dipenda dal tempo e dalle coordinate e che ammetta l'equazione (3.19) come equazione del moto. Si consideri la densità di lagrangiana della gravità newtoniana

$$\mathcal{L} = -\frac{|\vec{\nabla}\Phi_N|^2}{8\pi G} - \rho\Phi_N, \quad (3.20)$$

dove  $\rho$  denota la densità totale di massa e  $\Phi$  è ovviamente il potenziale gravitazionale che governa il moto con  $\vec{a} = -\vec{\nabla}\Phi$ . L'equazione di campo associata è l'equazione di Poisson

$$\nabla^2\Phi_N = 4\pi G\rho. \quad (3.21)$$

Una modificazione opportuna della lagrangiana, generalizzandola senza imporre la linearità, è data dalla seguente relazione:

$$\mathcal{L} = -\frac{a_0^2}{8\pi G}f\left(\frac{|\vec{\nabla}\Phi|^2}{a_0^2}\right) - \rho\Phi. \quad (3.22)$$

Il solo fatto che la formulazione sia basata su una lagrangiana rimuove automaticamente il problema delle leggi di conservazione. Derivando l'equazione rispetto a  $\Phi$  si ottiene:

$$\vec{\nabla} \cdot \left[ \mu \left( \frac{|\vec{\nabla}\Phi|}{a_0} \right) \vec{\nabla}\Phi \right] = 4\pi G\rho \quad (3.23)$$

$$\mu(\sqrt{y}) \equiv \frac{df(y)}{dy}. \quad (3.24)$$

Confrontando poi l'equazione (3.23) con l'equazione di Poisson (3.21), è immediato vedere che

$$\mu \left( \frac{|\vec{\nabla}\Phi|}{a_0} \right) \vec{\nabla}\Phi = \vec{\nabla}\Phi_N - \vec{\nabla} \times \vec{h}, \quad (3.25)$$

con  $\vec{h}$  campo vettoriale che assicura che entrambi i lati dell'equazione (3.23) abbiano la stessa forma non nulla. Sostituendo  $\vec{\nabla}\Phi \rightarrow -\vec{a}$ , si ha l'equazione di **AQUAL**

$$\mu \left( \frac{a}{a_0} \right) \vec{a} = -\vec{\nabla}\Phi_N + \vec{\nabla} \times \vec{h}. \quad (3.26)$$

Per sistemi a simmetria sferica, applicando il teorema di Gauss, si ottiene che  $\vec{\nabla} \times \vec{h}$  debba essere identicamente nullo, quindi dall'equazione (3.26) si ottiene l'equazione iniziale (3.19). Per sistemi con simmetria non sferica, tale equazione non è del tutto valida, anche se costituisce una buona approssimazione.

Dato che l'equazione (3.22) è una lagrangiana quadratica, la teoria è appunto chiamata **AQUAL** (*A QUAdratic Lagrangian*). Pur non essendo una teoria relativistica, rispetto alla teoria MOND vista precedentemente garantisce la conservazione del principio di equivalenza in forma debole.

Lo sviluppo della teoria AQUAL permise di risolvere alcune delle problematiche presenti nel modello MOND, in primis la non conservazione delle usuali quantità fisiche. Inoltre, le simulazioni permisero uno studio più approfondito sulla stabilità delle strutture e sul moto in scala galattica. In particolare, le simulazioni compiute sulla stabilità e l'unione di galassie sembrano essere consistenti con le osservazioni sperimentali: l'unione di due galassie con AQUAL produce la stessa distribuzione stellare ottenuta nel contesto newtoniano con materia oscura. La stessa stabilità galattica sembra essere garantita con i risultati di AQUAL.

# Capitolo 4

## TeVes

Alla fine del precedente capitolo, si è visto un primo tentativo di generalizzazione di MOND attraverso la teoria AQUAL, che garantisce la conservazione del principio di equivalenza in forma debole. Per spiegare invece il fenomeno di lensing gravitazionale e la cosmologia in generale senza l'introduzione di materia oscura, è necessaria l'introduzione di una teoria MOND relativistica; si prenderà in analisi la teoria **TeVes** formulata da J. Bekenstein nel 2004.

Senza alcuna pretesa di completezza, questo capitolo vuole presentare il nuovo modello e le equazioni su cui si fonda, calcolando poi i limiti relativistici e non e confrontandoli con la teoria MOND.

### 4.1 Basi per una teoria relativistica MOND

Si considerino ora i principi su cui una teoria MOND relativistica debba basarsi.

**Principio di Azione** La teoria deve essere derivabile da un principio di azione; questo è l'unico modo per garantire automaticamente la necessaria conservazione di energia, momento angolare e lineare. Semplicemente, si può considerare l'azione come l'integrale della densità lagrangiana locale; se così non fosse la teoria fallirebbe nell'ambito del lensing gravitazionale.

**Invarianza relativistica** Dovendo valere la relatività speciale, l'azione deve essere uno scalare relativistico in modo che le equazioni della teoria siano invarianti relativisticamente.

**Principio di equivalenza** Esperimenti sempre più accurati hanno verificato il principio di equivalenza. Pertanto il moto delle particelle deve seguire le geodetiche ricavate con un metrica curva: tutte le leggi della fisica non gravitazionali come l'elettromagnetismo, devono essere espresse nel s.d.r. del laboratorio con tale metrica, in sostituzione di quella di Lorentz.

**Casualità** Per non violare la casualità e compromettere la consistenza logica della teoria, le equazioni derivate dall'azione non possono permettere velocità superluminali di propagazione di un qualsiasi campo o energia o momento angolare e lineare.

**Energia positiva** I campi nella teoria non possono portare energie negative. Da un punto di vista quantistico, questa è una precauzione contro l'instabilità del vuoto. In generale, la densità di energia di ogni campo dovrebbe essere non negativa per ogni evento.

**Consistenza del limite Newtoniano** La teoria dovrebbe proporre una scala di accelerazione sotto la quale ritrovare il limite newtoniano e risultare consistente con i risultati ricavati da MOND.

Da un punto di vista fenomenologico, la teoria deve predire un certo numero di fenomeni noti. Se ne riporta un breve elenco.

**Accordo con la fenomenologia extra galattica** Il limite non relativistico della teoria dovrebbe fare predizioni in accordo con le equazioni di AQUAL (viste in Sezione 3.6).

**Accordo con la fenomenologia delle lenti gravitazionali** La teoria dovrebbe prevedere correttamente il lensing di radiazione elettromagnetica di strutture extra galattiche responsabili per il fenomeno di lente gravitazionale; in particolare deve essere simile a quanto prevede la Relatività Generale nel paradigma di materia oscura.

**Accordo con il sistema solare** La teoria deve essere consistente con i test di relatività forniti dallo studio del sistema solare: deflessione della luce, ritardo temporale, precessione del perielio, assenza di effetto Nordtvedt nell'orbita lunare, ecc.

**Armonia con le evidenze cosmologiche** È necessario un accordo tra le evidenze empiriche cosmologiche, come l'espansione di Hubble, la scala temporale per le varie ere, la CMB, ecc.

## 4.2 Formulazione di TeVeS

Un primo tentativo di formulazione di una teoria relativistica, consiste nella generalizzazione di AQUAL (trattata in Sezione 3.6): in particolare, è possibile definire una seconda metrica con accoppiamento conforme alla metrica di Einstein  $g_{\alpha\beta}$ , ovvero  $\tilde{g}_{\alpha\beta} = e^{2\psi} g_{\alpha\beta}$ , con  $\psi$  un campo scalare reale.

Procedendo con la definizione della nuova lagrangiana e dell'azione  $S_m$  relativa alla massa, ci si accorge però che tale teoria presenta delle criticità: in primo luogo, le onde  $\psi$  risultavano propagarsi con velocità superluminali; in secondo luogo, la stessa relazione conforme  $\tilde{g}_{\alpha\beta} = e^{2\psi} g_{\alpha\beta}$  risultava problematica. La luce infatti si propaga nei coni di luce della metrica fisica e con la relazione conforme queste coincidono con i coni di luce della metrica di Einstein. Quest'ultima è calcolata dalle equazioni di Einstein con la materia

visibile e il campo  $\psi$  come sorgente: fintanto che il campo contribuisce relativamente poco al tensore energia impulso, questo non può pregiudicare la deflessione della luce, che sarà dovuta alla sola materia visibile. Tuttavia, nelle galassie e nei clusters, la deflessione della luce osservata è maggiore di quanto non sarebbe data dalla sola materia visibile: essendo l'elettromagnetismo di Maxwell invariante per trasformazioni conformi, un accoppiamento conforme produrrebbe in TeVeS lo stesso lensing che si ha in Relatività Generale senza materia oscura e dunque una deflessione non compatibile con i dati sperimentali; con un accoppiamento conforme, i fotoni sarebbero insensibili agli effetti del campo  $\psi$ .

Per risolvere tali problemi si è quindi introdotto un accoppiamento disforme tra il campo scalare e la metrica di Einstein.

La formulazione di TeVeS si basa su tre campi gravitazionali dinamici:

- una metrica einsteiniana  $g_{\mu\nu}$ , con inversa  $g^{\mu\nu}$ ,
- un campo quadrivettoriale di tipo tempo  $A_\mu$  tale per cui

$$g^{\alpha\beta} A_\alpha A_\beta = -1, \quad (4.1)$$

$$A^\alpha = g^{\alpha\beta} A_\beta. \quad (4.2)$$

- un campo scalare  $\phi$ .

É presente inoltre un campo scalare statico  $\sigma$ .

**Metrica fisica in TeVeS** La metrica fisica in TeVeS si ottiene allungando la metrica di Einstein nelle direzioni spazio temporali ortogonali a  $A^\alpha$  di un fattore  $e^{2\phi}$  e contraendola di uno stesso fattore in direzione parallela a  $A^\alpha$ :

$$\begin{aligned} \tilde{g}_{\alpha\beta} &= e^{2\phi}(g_{\alpha\beta} + A_\alpha A_\beta) - e^{2\phi} A_\alpha A_\beta = \\ &= e^{2\phi} g_{\alpha\beta} - 2A_\alpha A_\beta \sinh(2\phi). \end{aligned} \quad (4.3)$$

É immediato verificare che l'inversa della metrica fisica (4.3) sia

$$\tilde{g}^{\alpha\beta} = e^{2\phi} g^{\alpha\beta} + 2A^\alpha A^\beta \sinh(2\phi). \quad (4.4)$$

Si vuole evidenziare come la metrica  $\tilde{g}_{\alpha\beta}$  sia denominata *fisica* in quanto è la metrica rispetto alla quale la materia obbedisce al principio di equivalenza in forma debole: le geodetiche delle particelle di prova in caduta libera sono calcolate rispetto a tale metrica. Sia TeVeS che MOND non rispettano il principio di equivalenza forte.

**Azione  $S$**  A questo punto è possibile calcolare l'azione  $S$  da cui derivare le equazioni del moto, sommando i contributi relativi alla parte geometrica, scalare, vettoriale e materiale

$$S = S_g + S_s + S_v + S_m. \quad (4.5)$$

$S_g$  La parte geometrica è analoga a quanto si ha in Relatività Generale:

$$S_g = \frac{1}{16\pi G} \int g^{\alpha\beta} R_{\alpha\beta} (-g)^{\frac{1}{2}} d^4x. \quad (4.6)$$

Con  $R_{\alpha\beta}$  tensore di Ricci per la metrica  $g_{\alpha\beta}$  e  $G$  una certa costante analoga alla costante gravitazionale di Newton, ma che, come si vedrà in seguito, differisce da quest'ultima a causa delle correzioni apportate da TeVeS.

$S_s$  La parte legata ai campi scalari necessita l'introduzione di due costanti positive  $k$  e  $l$  ed è data dalla seguente relazione

$$S_s = -\frac{1}{2} \int [\sigma^2 h^{\alpha\beta} \phi_{,\alpha} \phi_{,\beta} + \frac{1}{2} G l^{-2} \sigma^4 F(kG\sigma^2)] (-g)^{\frac{1}{2}} d^4x \quad (4.7)$$

con

- $h^{\alpha\beta} = g^{\alpha\beta} - A^\alpha A^\beta$ ,
- $\phi_{,\alpha} = \partial_\alpha \phi$ ,
- $F$  una qualche funzione che permette di recuperare MOND nel limite non relativistico,
- $\phi$  adimensionale,
- $\sigma^2$  con le dimensioni di  $G^{-1}$ ,
- $k$  adimensionale,
- $l$  con le dimensioni di una lunghezza.

$S_v$  L'azione del quadrivettore può essere scritta come

$$S_v = -\frac{K}{32\pi G} \int [g^{\alpha\beta} g^{\mu\nu} A_{[\alpha,\mu]} A_{[\beta,\nu]} - 2 \frac{\lambda}{K} (g^{\mu\nu} A^\mu A^\nu + 1)] (-g)^{\frac{1}{2}} d^4x \quad (4.8)$$

con

- $A_{[\mu} B_{\nu]} = A_\mu B_\nu - A_\nu B_\mu$ ,
- $\lambda$  parametro lagrangiano sulla natura temporale del quadri vettore  $A_\mu$ ,
- $K$  costante adimensionale.

$S_m$  Dovendo essere rispettato il principio di equivalenza in forma debole per la metrica fisica, l'azione materiale assume la seguente forma

$$S_m = \int \mathcal{L}(\tilde{g}_{\mu\nu}, f^\alpha, f_{|\mu}^\alpha, \dots) (-\tilde{g})^{\frac{1}{2}} d^4x, \quad (4.9)$$

con

- $f^\alpha$  campi generici,
- $f_{|\mu}^\alpha$  derivate covarianti rispetto alla metrica fisica,
- $(-\tilde{g})^{\frac{1}{2}} = e^{-2\phi} (-g)^{\frac{1}{2}}$ .

**Equazioni di TeVeS** Variando l'azione totale  $E$  rispetto ai quattro campi considerati, si giunge alle equazioni fondamentali di TeVeS. Si riportano quindi i principali risultati a cui si è giunti, senza svolgere in modo completo i calcoli, ma indicando sommariamente il procedimento seguito.

**Variazione rispetto  $g^{\alpha\beta}$**  Si ottengono le equazioni di Einstein modificate:

$$G_{\alpha\beta} = 8\pi G \left[ \tilde{T}_{\alpha\beta} + (1 - e^{-4\phi}) A^\mu \tilde{T}_{\mu(\alpha} A_{\beta)} + \tau_{\alpha\beta} \right] + \Theta_{\alpha\beta}. \quad (4.10)$$

Con  $\tilde{T}_{\alpha\beta}$  tensore energia impulso calcolato nella nuova metrica,  $\tau_{\alpha\beta}$  e  $\Theta_{\alpha\beta}$  funzioni dei campi e dei parametri considerati.

**Variazione rispetto  $\sigma$**  Si ottiene:

$$-kG\sigma^2 F(kG\sigma^2) - \frac{1}{2}(kG\sigma^2)^2 F' = kl^2 h^{\alpha\beta} \phi_{,\alpha} \phi_{,\beta}. \quad (4.11)$$

**Variazione rispetto  $\phi$**  Rivisitando l'equazione (4.11) e definendo

$$-\zeta F(\zeta) - \frac{1}{2}\zeta^2 F'(\zeta) = y, \quad (4.12)$$

si ottiene

$$[\zeta(kl^2 h^{\mu\nu} \phi_{,\mu} \phi_{,\nu}) h^{\alpha\beta} \phi_{,\alpha} ]_{;\beta} = kG[g^{\alpha\beta} + (1 + e^{-4\phi}) A^\alpha A^\beta] \tilde{T}_{\alpha\beta}, \quad (4.13)$$

dove  $;$  indica la derivata covariante nella metrica einsteiniana.

**Variazione rispetto  $A_\alpha$**  Variando  $S$  e ricavando il parametro  $\lambda$  si ricava

$$\begin{aligned} K(A_{;\beta}^{[\alpha;\beta]} + A^\alpha A_\gamma A_{;\beta}^{[\gamma;\beta]}) + 8\pi G\sigma^2 [A^\beta \phi_{,\beta} g^{\alpha\gamma} \phi_{,\gamma} + A^\alpha (A^\beta \phi_{,\beta})^2] = \\ = 8\pi G(1 - e^{-4\phi}) [g^{\alpha\mu} A^\beta \tilde{T}_{\mu\beta} + A^\alpha A^\beta A^\gamma \tilde{T}_{\gamma\beta}]. \end{aligned} \quad (4.14)$$

### 4.3 Limite relativistico in sistemi quasistatici localizzati

Le condizioni in cui viene recuperata la Relatività Generale corrispondono alle seguenti relazioni tra i parametri:

$$\begin{aligned} k &\rightarrow 0, \\ l &\propto k^{-\frac{3}{2}}, \\ K &\propto k. \end{aligned} \quad (4.15)$$

In questo modo TeVeS recupera GR in sistemi quasistatici localizzati, come il sistema solare, in cui lo spazio tempo può essere pensato come piatto. In particolare, approssimando le sostanze materiali a fluidi ideali e riscrivendo il tensore energia impulso, è possibile ottenere da (4.13) una forma semplificata:

$$[\zeta(kl^2 h^{\mu\nu} \phi_{,\mu} \phi_{,\nu}) h^{\alpha\beta} \phi_{,\alpha} ]_{;\beta} = kG(\tilde{\rho} + 3\tilde{p})e^{-2\phi}, \quad (4.16)$$

dove  $\tilde{\rho}$  e  $\tilde{p}$  sono la densità di energia e la pressione proprie del fluido materiale.

Per sistemi come il sistema solare, è possibile considerare una metrica statica del tipo:

$$g_{\alpha\beta}dx^\alpha dx^\beta = g_{tt}(x^k)dt^2 + g_{ij}(x^k)dx^i dx^j, \quad (4.17)$$

dove con il termine **quasistatico** si intende la condizione in cui è possibile trascurare le derivate temporali rispetto a quello spaziali, senza flussi di energia.

Si cercano quindi le soluzioni alle equazioni scalari e vettoriali con condizioni all'infinito spaziale del modello cosmologico in cui si considera il sistema:  $\phi \rightarrow \text{cost.}$  e  $A^\alpha \rightarrow \delta_t^\alpha$ .

Sia  $\xi^\alpha = \delta_t^\alpha$  il vettore di Killing associato alla metrica (4.17); si può dimostrare che  $A^\alpha = N\xi^\alpha$  è soluzione. Si consideri (4.14) e il termine  $g^{\alpha\mu}A^\beta\tilde{T}_{\mu\beta} + A^\alpha A^\beta A^\gamma\tilde{T}_{\gamma\beta}$ : la componente  $\alpha = t$  si annulla identicamente con la scelta fatta di  $A^\alpha$ , mentre le componenti spaziali sono proporzionali a  $\tilde{T}_{jt}$ , annullandosi non essendoci flussi energetici. D'altra parte, anche le componenti spaziali e temporali del membro a sinistra si annullano per la scelta del vettore  $A^\alpha$ .

Considerando (4.16) e ponendo le condizioni (4.15) si ottiene

$$\int \zeta g^{\alpha\beta} \phi_{,\alpha} \phi_{,\beta} (-g)^{\frac{1}{2}} d^3x = 0, \quad (4.18)$$

che risulta valida nel limite  $\phi \rightarrow 0$  ovunque.

Da questi risultati, passando alle equazioni gravitazionali, è possibile dimostrare che TeVeS recuperi la Relatività Generale in tale limite, permettendo di scrivere

$$\tilde{g}_{\alpha\beta} = 8\pi G\tilde{T}_{\alpha\beta} + \mathcal{O}(k) + \mathcal{O}(K). \quad (4.19)$$

## 4.4 Limite non relativistico

Lo studio del limite non relativistico necessita di espressioni esplicite per  $F(\zeta)$  e  $y(\zeta)$  in (4.12). Bekenstein scelse

$$y = \frac{3}{4} \frac{\zeta^2(\zeta - 2)^2}{1 - \zeta}, \quad (4.20)$$

da cui è possibile ricavare

$$F(\zeta) = \frac{3}{8} \frac{\zeta(4 + 2\zeta - 4\zeta^2 + \zeta^3) + 2\ln(1 - \zeta)^2}{\zeta^2}, \quad (4.21)$$

trascurando la costante di integrazione.

Si consideri nuovamente un sistema quasistatico, ma in regime di potenziale debole così da studiarne il limite non relativistico:  $g_{\alpha\beta}$  è una metrica piatta in prima approssimazione e  $|\phi| \ll 1$ .

Sia  $V$  il potenziale newtoniano del membro di destra di (4.10), la linearizzazione al primo ordine delle equazioni gravitazionali porge

$$g_{tt} = -(1 + 2V), \quad (4.22)$$

e nella metrica considerata,

$$\tilde{g}_{tt} = -(1 + 2V + 2\phi). \quad (4.23)$$

È importante notare che il potenziale totale  $\Phi$  che governa il moto non relativistico in TeVeS sia dato da

$$\Phi = V + \phi, \quad (4.24)$$

e che nei punti in cui  $\phi \rightarrow 0$  la metrica fisica corrisponde alla metrica di Minkowski.

Senza svolgere nel dettaglio i passaggi, è possibile ricavare una relazione tra  $V$  e  $\Phi_N$ , dove quest'ultimo indica il potenziale newtoniano generato dalla densità di massa  $\tilde{\rho}$  secondo un'equazione di Poisson analoga a (3.21), e da questa ottenere il potenziale che governa il moto in campo debole come:

$$\Phi = \Xi\Phi_N + \phi, \quad (4.25)$$

a meno di correzioni di ordine superiore, con  $\Xi = 1 + K/2 - 2\phi_c$ .

Disponendo ora di una relazione che quantifica la differenza tra TeVeS e Relatività Generale in un regime non relativistico, è possibile analizzare situazioni in cui vengono recuperate le dinamiche di Milgrom e di Newton.

#### 4.4.1 MOND in simmetria sferica

Sia  $\tilde{\rho}$  la densità di massa generante il potenziale gravitazionale in condizioni di simmetria sferica. Si nota che

$$\vec{\nabla}\phi = \frac{k}{4\pi\zeta}\vec{\nabla}\Phi_N. \quad (4.26)$$

Utilizzando (4.25), si ottiene

$$\mu\vec{\nabla}\Phi = \vec{\nabla}\Phi_N, \quad (4.27)$$

$$\mu = \left(\Xi + \frac{k}{4\pi\zeta}\right)^{-1}, \quad (4.28)$$

che nell'approssimazione di  $\zeta \ll 1$  con le opportune modificazioni porge

$$\vec{\nabla}\phi = \frac{k}{4\pi\zeta} \left[\Xi + \frac{k}{4\pi\zeta}\right]^{-1} \vec{\nabla}\Phi. \quad (4.29)$$

Definendo poi una scala di accelerazione

$$a_0 = \frac{\sqrt{3}kc^2}{4\pi\Xi l}, \quad (4.30)$$

la soluzione è data da

$$\zeta = \frac{k}{8\pi\Xi} \left(-1 + \sqrt{1 + 4\frac{|\vec{\nabla}\Phi|}{a_0}}\right) \quad (4.31)$$

che se sostituita in (4.28) porge

$$\mu = \frac{1}{\Xi} \frac{-1 + \sqrt{1 + 4 \frac{|\vec{\nabla}\Phi|}{a_0}}}{1 + \sqrt{1 + 4 \frac{|\vec{\nabla}\Phi|}{a_0}}}. \quad (4.32)$$

Tale funzione può essere identificata con la funzione  $\mu$  della teoria MOND 4.28, essendo approssimabile a

$$\mu = \frac{|\vec{\nabla}\Phi|}{a_0}, \quad (4.33)$$

mostrando il comportamento richiesto da Milgrom per la funzione di interpolazione.

In conclusione, nel limite di simmetria sferica, TeVeS recupera la dinamica modificata di Milgrom e il suo successo a livello galattico ed extragalattico, fornendo un'espressione esplicita di  $\mu$ , che tuttavia non è fondamentale nel predire nel dettaglio le curve di rotazione.

Allo stesso modo, è possibile confrontare i risultati di TeVeS con i sistemi in regime newtoniano. In particolare è possibile stabilire una relazione tra la costante di gravitazione universale  $G_N$  e la costante  $G$  utilizzata nel corso della trattazione, ottenendo

$$G_N = \left( \Xi + \frac{k}{4\pi} \right) G; \quad (4.34)$$

in regime non relativistico, TeVeS recupera la dinamica newtoniana riscaldando la costante di gravitazione universale di Newton; inoltre, essa porge un risultato esplicito per la funzione  $\mu$ :

$$\mu \approx \frac{G}{G_N} \left( + \frac{16\pi^3}{k^3} \frac{a_0^2}{|\vec{\nabla}\Phi|^2} \right). \quad (4.35)$$

Il termine tra parentesi non è altro che la correzione derivanti da TeVeS in tale regime, troppo deboli, nel sistema solare, per essere misurate sperimentalmente: per pianeti più distanti, come ad esempio Saturno, la correzioni diventa più significativa e lo studio delle anomalie registrate nelle sonde *Pioneer 10* e *11* potrebbe fornire importanti informazioni sulla forma delle funzioni  $y(\zeta)$  e  $F(\zeta)$ .

## 4.5 Lensing gravitazionale con TeVeS

Si è visto nel capitolo precedente il problema sollevato da MOND nello studio del fenomeno di lensing gravitazionale: la differenza tra le deflessioni osservate e quelle attese in base alla materia visibile è stata uno dei problemi che più ha favorito l'ipotesi di materia oscura.

Mentre MOND non è in grado di spiegare correttamente il lensing gravitazionale (a meno di introdurre dell'altra materia non visibile), TeVeS risulta essere in grado di

farlo. Si analizzeranno per sommi capi i traguardi raggiunti da quest'ultima teoria nelle distribuzioni di massa a simmetria sferica. Bekenstein dimostrò successivamente come tali risultati possano essere generalizzati a distribuzioni asimmetriche.

Ponendosi in coordinate polari, si riscrive la metrica  $g_{\alpha\beta}$  come:

$$g_{\alpha\beta}dx^\alpha dx^\beta = -e^\nu dt^2 + e^\zeta [d\varrho^2 + \varrho^2(d\theta^2 + \sin^2\theta d^2\varphi)], \quad (4.36)$$

con  $\nu = \nu(\varrho)$  e  $\zeta = \zeta(\varrho)$ . Essendo la metrica statica, ne segue  $A^\alpha = N\xi^\alpha = (e^{\zeta/2}, 0, 0, 0)$ . Conseguentemente, da un calcolo diretto della metrica fisica, si ritrova che questa si ottiene da quella einsteiniana sostituendo  $e^\nu \mapsto e^{\nu+2\phi}$  e  $e^\zeta \mapsto e^{\zeta-2\phi}$ .

Si consideri il moto radiale di un raggio luminoso, con  $\theta = \frac{\pi}{2}$  e  $d\theta = 0$ : la quadrivelocità del raggio luminoso soddisfa la relazione

$$-e^{\nu+2\phi}\dot{t}^2 + e^{\zeta-2\phi}(\dot{\varrho}^2 + \varrho^2\dot{\varphi}^2) = 0. \quad (4.37)$$

Il moto del raggio è dato dalle due leggi di conservazione seguenti:

$$e^{\nu+2\phi}\dot{t} = E, \quad (4.38)$$

$$e^{\zeta-2\phi}\varrho^2\dot{\varphi} = L, \quad (4.39)$$

con  $E$  e  $L$  costanti del raggio. Con le opportune sostituzioni, si ottiene

$$-e^{-\nu-2\phi} + \left(\frac{b}{\varrho}\right)^2 e^{-\xi+2\phi} \left[ \varrho^{-2} \left(\frac{d\varrho}{d\varphi}\right)^2 + 1 \right] = 0, \quad (4.40)$$

definendo  $b \equiv \frac{L}{E}$ , parametro d'urto del raggio rispetto al centro della distribuzione di massa. Risolvendo rispetto a  $\varphi$  (4.40), si ottiene:

$$\varphi = \int_{-\infty}^{\varrho} \left[ e^{\zeta-\nu-4\phi} \left(\frac{\varrho}{b}\right)^2 - 1 \right]^{-\frac{1}{2}} \frac{d\varrho}{\varrho}. \quad (4.41)$$

In seguito a considerazioni di carattere puramente geometrico, è possibile individuare la deflessione  $\Delta\varphi$  come:

$$\Delta\varphi = 2 \int_b^{\infty} \left[ e^{\zeta-\nu-4\phi} \left(\frac{\varrho}{b}\right)^2 - 1 \right]^{-\frac{1}{2}} \frac{d\varrho}{\varrho} - \pi. \quad (4.42)$$

Sfruttando la debolezza del campo extragalattico, sviluppando l'esponenziale al primo ordine e in seguito in serie di Taylor, e integrando per parti nel limite  $\varrho \rightarrow \infty$ , si ottiene:

$$\Delta\phi = \frac{b}{2} \int_{-\infty}^{+\infty} \frac{\nu' - \zeta' + 4\phi'}{\varrho} dx, \quad (4.43)$$

dove si sono introdotte le coordinate cartesiane  $x = \pm\sqrt{\varrho^2 - b^2}$  e con l'apice ' si è indicata la derivata fatta rispetto a  $\varrho$ .

In Relatività Generale per calcolare il lensing si pone  $\phi = 0$  e si calcola  $\nu$  e  $\zeta$  dalle equazioni di Einstein, includendo la materia oscura come sorgente. In TeVeS al contrario, si procede senza annullare  $\phi$  e si calcolano  $\nu$  e  $\zeta$  a partire dalla materia visibile. I due diversi procedimenti portano però allo stesso risultato.

Semplificando l'integrale con (4.10), utilizzando la metrica sferica e tenendo conto dei risultati ottenuti nel limite non relativistico, risulta possibile giungere ad una forma approssimativa per la deflessione della luce, data da una relazione del tipo:

$$\Delta\varphi = 2b[1 + \mathcal{O}(\tilde{\mu}v^2)] \int_{-\infty}^{\infty} \frac{\Phi'}{\varrho} dx. \quad (4.44)$$

Il lensing risulta determinato unicamente da  $\Phi$ , il potenziale che governa il modo non relativistico. In GR, la formula (4.44) è valida da meno di ordini  $\mathcal{O}(v^2)$  essendo  $\mu = 1$  e  $\Phi = \Phi_N$ , assumendo l'esistenza di materia oscura nel computo di  $\Phi_N$ .

In TeVeS,  $\Phi$  governa il moto non relativistico attraverso MOND, senza la necessità di introdurre dell'ulteriore materia: il successo di TeVeS in quest'ambito è legato al successo di MOND su scale galattiche. Nonostante le evidenze sperimentali siano in buon accordo con TeVeS, la teoria presenta evidenti problemi quando la deflessione è causata da ammassi di galassie, portando alla necessità di introduzione di materia nascosta barionica o sotto forma di neutrini.

## 4.6 Oscillazioni acustiche dei barioni

Si è visto come TeVeS sia in grado di generalizzare correttamente MOND proponendo una teoria covariante, che ritrovi sia MOND sia la dinamica newtoniana, e dia allo stesso tempo spiegazione a quei fenomeni relativistici che potevano essere risolti in MOND solo con l'introduzione di ulteriore materia nascosta, in netto contrasto con la filosofia originaria del paradigma.

Mentre MOND e TeVeS raggiungono risultati importanti su scale galattiche, minori, il modello  $\Lambda$ CDM spiega molto bene quanto avviene a livello di clusters di galassie, senza apportare modificazioni alle leggi della fisica comunemente accettate.

Vi è tuttavia un'altra evidenza da tenere in considerazione, inerente la formazione dell'Universo e i picchi dello spettro di potenza osservati nella CMB.

Considerazioni sulla cosmologia nel contesto MOND e TeVeS potrebbero sembrare affrettate, tuttavia ci sono alcune affermazioni generali che possono essere fatte in merito.

Per prima cosa, il successo della teoria di Big Bang rispetto alla previsione dello spettro termico e dell'isotropia dello sfondo di microonde cosmico, nonché delle osservazioni sulle abbondanze degli isotopi più leggeri, implica fortemente che la teoria MOND debba preservare il Modello Standard, almeno per quanto inerente l'evoluzione dell'Universo caldo primordiale.

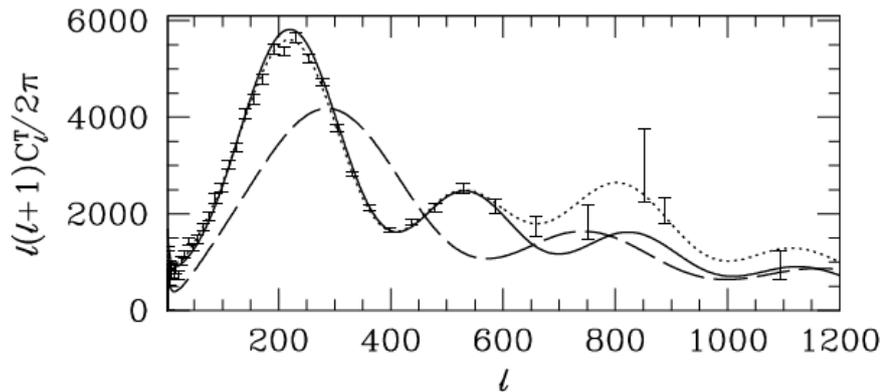
In secondo luogo, sarebbe contrario allo spirito della teoria MOND se ci fossero cosmologicamente significative quantità di materia oscura fredda non barionica ( $\Omega_{cdm} \ll 1$ ), ad esempio materia oscura presente sulla scala galattica. Questo non implica che

non possa esistere materia oscura: il fatto che la materia luminosa sia sostanzialmente inferiore a quella barionica, come si può ricavare dalla nucleosintesi primordiale, significa che comunque siano presenti barioni non rivelati. Inoltre, particelle di materia oscura esistono anche sotto forma di neutrini. É chiaro dai rilevamenti dell'oscillazione di neutrini che come minimo alcuni sapori del neutrino abbiano una massa, che costituisce il limite superiore alla densità di materia luminosa stimata.

Nell'Universo primordiale, prima delle ricombinazione, sia i neutrini che la materia oscura non interagivano con fotoni e barioni gravitazionalmente, mentre questi ultimi erano strettamente accoppiati via scattering Compton. Nello stesso periodo, l'Universo era permeato da una radiazione uniforme in stretta interazione con il plasma formato da materia barionica. L'uniformità della radiazione presentava tuttavia delle piccole asintropie, associabili a buche di potenziale, in cui la materia per effetto gravitazionale, tendeva ad accumularsi e collassare.

Mentre la materia oscura (assumendo vero il modello  $\Lambda$ CDM), non interagendo con la materia barionica, potevano collassare senza interferenze, i barioni che allo stesso modo tendevano a cadere all'interno della buca erano ostacolati dalla pressione esercitata dalla radiazione dei fotoni, impedendo loro di collassare. Le oscillazioni compiute da barioni e fotoni nella buca di potenziale erano di tipo acustico, rappresentate da un modello di oscillatore armonico.

Con l'espansione dell'Universo e la diminuzione della sua temperatura, sia il plasma che la radiazione cominciarono a raffreddarsi, fino a raggiungere una temperatura a cui l'energia dei fotoni non era più in grado di impedire la formazione di atomi stabili: attorno a queste asintropie quindi la materia barionica cominciò a collassare per attrazione gravitazionale, permettendo la formazione di corpi massivi; l'Universo diventò trasparente alla radiazione e i fotoni cominciarono a propagarsi diventando più energetici.

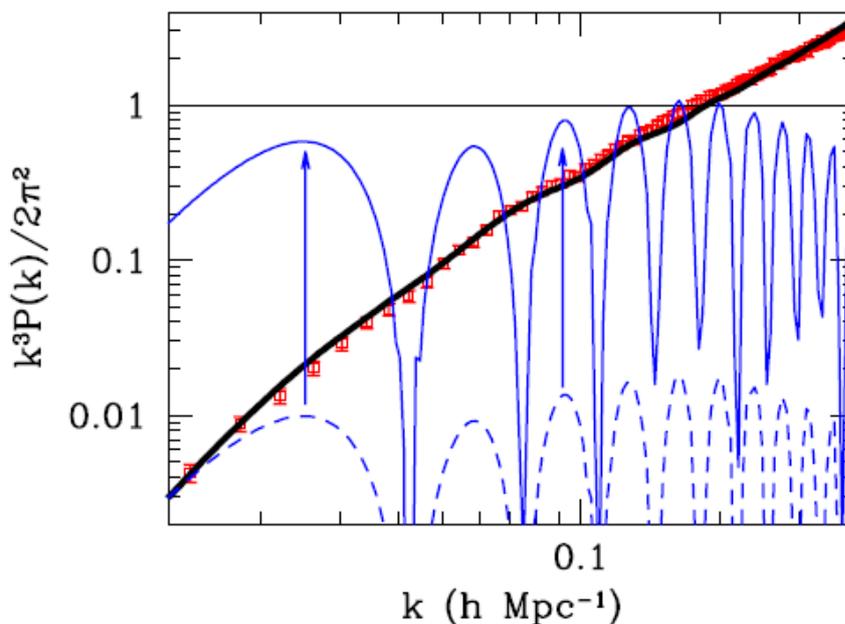


**Figura 4.1:** Spettro angolare di potenza della CMB (punti con le barre di errore) e andamenti previsti dai diversi modelli. Modello  $\Lambda$ CDM in linea punteggiata, modello TeVeS con linea tratteggiata, modello TeVeS con neutrini di massa 2GeV in linea continua. Il problema principale di TeVeS risiede nel terzo picco, i cui dati suggeriscono un ottimo accordo con la teoria  $\Lambda$ CDM. Da [5].

Sia che sia presente materia oscura, sia che invece questa non ci sia, comunque queste oscillazioni si sono formate e possono essere analizzate attraverso lo spettro di potenza, fornendo importanti informazioni sulla natura della materia coinvolta: se non dovesse essere materia oscura, non sarebbe neanche presente un termine forzante e quindi ogni oscillazione risulterebbe più bassa della precedente.

Come si può osservare in Figura 4.1, il secondo picco è nettamente più basso del primo e i dati sono in accordo con una teoria no-CDM; lo stesso non vale per il terzo picco, che ha quasi la stessa altezza del secondo; la naturale conseguenza di CDM non barionica è un termine forzante che distorce le oscillazioni dal semplice smorzamento dello spettro, come osservato.

Mentre è possibile per il modello  $\Lambda$ CDM riuscire ad interpolare correttamente i dati relativi allo spettro di potenza, i modelli MOND e TeVeS non ne sono assolutamente in grado.



**Figura 4.2:** Spettro di potenza della materia. I punti rossi con barre d'errore rappresentano i dati raccolti; la curva nera si ottiene interpolando il modello  $\Lambda$ CDM (Relatività Generale e dominanza di materia oscura sulla materia barionica); la curva blu tratteggiata è di un modello senza materia oscura, con solo materia barionica, combinata con la costante cosmologica per avere un universo piatto. Il modello prevede che le disomogeneità su tutte le scale siano meno dell'unità (linea nera orizzontale), quindi l'Universo non è mai stato non lineare e nessuna struttura si sarebbe formata. TeVeS in linea blu continua risolve il problema della struttura senza modificare la gravità, migliorando le perturbazioni (freccette blu verticali). Mentre l'ampiezza può superare l'unità, lo spettro ha prodotto oscillazioni acustiche dei barioni, in forte disaccordo con i dati. Da [8].

## 4.7 Conclusione

Durante il lavoro di tesi è stato possibile analizzare i successi e le problematiche legati ai modelli con o senza l'introduzione di materia oscura. Le due teorie maggiormente affermate, rispettivamente  $\Lambda$ CDM e MOND/TeVeS non sono in grado di spiegare in modo completo le evidenze cosmologiche, ma anzi sembrano completarsi a vicenda anche se diametralmente opposte: mentre  $\Lambda$ CDM ipotizza grandi quantità di materia nascosta dell'Universo per spiegare gli effetti gravitazionali osservati (come l'asintoticità a grandi distanze delle curve di rotazione delle galassie e il lensing gravitazionale), MOND cambia profondamente l'idea stessa della gravità e la seconda legge di Newton, suggerendo modifiche sulla scala di accelerazione; se  $\Lambda$ CDM è in grado di spiegare con ottimo accordo i fenomeni su larga scala, trova invece delle difficoltà nell'analisi delle galassie a bassa luminosità e nel ricavare la relazione di Tully-Fischer, il contrario avviene in MOND, dove le curve di rotazione delle galassie vengono perfettamente interpolate, ma non quelle dei cluster di galassie.

Purtroppo nessuna delle evidenze è in grado di escludere o confermare pienamente l'uno o l'altro modello, che risultano tutt'ora incompleti. Tuttavia, l'analisi della CMB e dello spettro di potenza relativo, sembrano essere un successo per il modello  $\Lambda$ CDM, in quanto MOND non risulta minimamente in grado di dare spiegazioni al terzo picco osservato nelle oscillazioni acustiche dei barioni, compromettendo la formazione delle strutture in tale paradigma.

Il problema rimane dunque aperto: sebbene da un punto di vista puramente matematico TeVeS sia perfettamente consistente, non si è ancora in grado di dare una spiegazione fisica ai campi che essa introduce e risulta quindi mancante la connessione alla natura fisica del problema che è invece presente in  $\Lambda$ CDM. Allo stesso tempo, non è ancora in grado di stabilire da cosa sia effettivamente composta la materia oscura: nessuno dei candidati attuali sembra essere quello giusto, mancando un'effettiva evidenza sperimentale della loro esistenza.



# Bibliografia

- [1] McGaugh, Stacy S. «A tale of two paradigms: the mutual incommensurability of  $\Lambda$ CDM and MOND». In: *Canadian Journal of Physics* 93 (2015). arXiv:1404.7525, pp. 250-259.
- [2] Weinberg, David H. et al. «Cold dark matter: controversies on small scales». In: *Proceedings of the National Academy of Science* 112 (2015). arXiv:1306.0913, pp. 12249-12255.
- [3] Bekenstein, Jacob D. «Modified gravity vs dark matter: Relativistic theory for MOND». In: *Proceeding of Science JHW2004* (2005). arXiv:astro-ph/0412652, pp. 012.
- [4] Famaey, B. and McGaugh, Stacy S. «Modified Newtonian Dynamics (MOND): Observational Phenomenology and Relativistic Extensions». In: *Living Reviews in Relativity* 15 (2012). arXiv:1112.3960, pp. 10.
- [5] Sanders, Robert H. and McGaugh, Stacy S. «Modified Newtonian Dynamics as an Alternative to Dark Matter». In: *Annual Review of Astronomy and Astrophysics* 40 (2002). arXiv:astro-ph/0204521, pp. 263-317.
- [6] Bekenstein, J. D. «Relativistic gravitation theory for the modified Newtonian dynamics paradigm». In: *Particle Dark Matter: Observations, Models and Searches*. A cura di Bertone, G. arXiv:1001.3876. Cambridge University Press, 2010. Cap. 6, pp. 95-114.
- [7] McGaugh, Stacy S. and De Blok, W. J. G. «Testing the Hypothesis of Modified Dynamics with Low Surface Brightness Galaxies and Other Evidence». In: *Astrophysical Journal* 499 (1998). arXiv:astro-ph/9801102, pp. 66-81.
- [8] Dodelson, S. «The Real Problem with MOND». In: *International Journal of Modern Physics D* 20 (2011). arXiv:1112.1320, pp. 2749-2753.
- [9] Milgrom, Mordehai. «A modification of the Newtonian dynamics as a possible alternative to the hidden mass hypothesis». In: *Astrophysical Journal* 270 (1983). doi:10.1086/161130, pp. 365–370.

- [10] Milgrom, Mordehai. «A modification of the Newtonian dynamics: Implications for galaxies». In: *Astrophysical Journal* 270 (1983). doi:10.1086/161131, pp. 371–383.
- [11] Milgrom, Mordehai. «A modification of the Newtonian dynamics: Implications for galaxy systems». In: *Astrophysical Journal* 270 (1983). doi:10.1086/161132, pp. 384–389.
- [12] Favalli, T. «Aloni di Materia Oscura nelle Galassie Nane», Tesi di Laurea. Università degli Studi di Firenze. A.A. 2011-2012.
- [13] Liddle, A. «An Introduction to Modern Cosmology» (2003).
- [14] Bonaldo, L. «Le oscillazioni acustiche nello spettro di potenza angolare della radiazione cosmica di fondo», Tesi di Laurea. Università degli Studi di Padova. A.A. 2014-2015.
- [15] Broccoli, M. «MOND e TeVeS. Teorie alternative all'ipotesi di materia oscura», Tesi di Laurea. Università degli Studi di Bologna. A.A. 2015-2016.