



UNIVERSITÀ DEGLI STUDI DI PADOVA

DIPARTIMENTO DI INGEGNERIA INDUSTRIALE

FACOLTÀ DI INGEGNERIA DELL'ENERGIA ELETTRICA

**COMPENSAZIONE DELL'ERRORE DI STIMA DELLA POSIZIONE  
ROTORICA IN MOTORI SINCRONI A RILUTTANZA**

IMPIEGO DI UN MODELLO ANALITICO DELLE INDUTTANZE DIFFERENZIALI  
DERIVATO DALLA MISURA DELLA MAPPA DI FLUSSO

Relatore:  
Prof. Silverio Bolognani

Laureando:  
Stefano Farronato

Anno accademico 2016-2017



# Indice

<b>1. Introduzione</b>	<b>1</b>
<b>2. Motore sincrono a riluttanza</b>	<b>3</b>
2.1 Sistema di riferimento adottato	3
2.2 Caratteristiche generali	4
2.3 Caratteristiche costruttive	5
2.3.1 Rotore	5
2.3.2 Statore	7
2.4 Modello del motore sincrono a riluttanza	7
<b>3. Funzionamento azionamento sensorless impiegato</b>	<b>9</b>
3.1 Definizione e classificazione	9
3.2 Stima della posizione con iniezione di flusso (tensione) pulsante	12
3.3 Funzionamento in presenza di saturazione nel ferro	19
<b>4. Rappresentazione analitica delle mappe di flusso</b>	<b>23</b>
4.1 Interpolazione lineare della funzione flusso	23
4.1.1 Implementazione dell'interpolazione	23
4.1.2 Script Matlab utilizzati	27
4.1.3 Calcolo $\varepsilon$	30
4.2 Interpolazione della funzione flusso usando un polinomio di secondo grado	33
4.2.1 Implementazione dell'interpolazione	33
4.2.2 Script Matlab utilizzati	37
4.2.3 Calcolo $\varepsilon$	41
4.3 Funzione coenergia	42
4.3.1 Considerazioni preliminari	42
4.3.2 Verifica soddisfacimento condizioni	44
4.3.3 Determinazione flussi	48
4.3.4 Script Matlab utilizzati	61
4.3.5 Grafici	66
4.3.6 Calcolo $\varepsilon$	72
<b>5. Conclusioni</b>	<b>73</b>
<b>6. Bibliografia</b>	<b>74</b>



# Capitolo 1

## Introduzione

Negli ultimi anni i sistemi sensorless per l'azionamento di motori a magneti permanenti o a riluttanza sono stati sempre più studiati visti i vantaggi derivanti in termini di affidabilità e risparmio economico che può comportare il loro utilizzo (non sono infatti necessari traduttori di posizione, rimuovendoli oltre a ridurre il costo dell'azionamento si aumenta l'affidabilità perché diminuiscono i componenti e quindi le probabilità che avvenga una rottura). Nel caso dei motori presentanti anisotropia rotorica, sono stati sviluppati degli azionamenti basati sulla sovrapposizione di segnali ad alta frequenza alle normali tensioni di alimentazione del motore. Questi presentano un'ottima capacità di stima della posizione rotorica a basse velocità o a macchina ferma, campo di impiego all'interno del quale con i metodi sensorless che si basano f.e.m. indotta dai magneti non possono operare o non riescono ad ottenere risultati soddisfacenti. Tuttavia è stato sperimentalmente dimostrato che la stima della posizione rotorica prodotta è affetta da un errore che cresce al crescere della corrente di carico e che è imputabile all'esistenza di un'induttanza  $l_{dq}$ . Quest'ultima è una mutua induttanza dovuta alla saturazione di porzioni del circuito magnetico pertinenti ad un asse a causa della corrente dell'altro asse. L'errore di stima compiuto, il cui valore è dato dalla seguente relazione:

$$\varepsilon = \frac{1}{2} \tan^{-1} \left( - \frac{2l_{dq}}{l_q - l_d} \right)$$

dove tutte le induttanze che compaiono sono funzioni delle correnti di statore  $i_d$  e  $i_q$  con cui la macchina si trova ad operare. Quando  $l_{dq}$  assume valori elevati si verificano delle instabilità che compromettono il controllo della macchina. Va da se che ogni modellizzazione rigorosa di questa tipologia di motori deve tenere conto del fenomeno della saturazione. In questo lavoro di tesi si è pertanto cercato di trovare modelli adeguati a descrivere questi comportamenti magnetici a partire da considerazioni teoriche e da misure su macchine reali. Il lavoro è diviso in quattro parti, nella prima vengono descritte le caratteristiche del motore a riluttanza, che è la tipologia di macchina scelta per condurre lo studio, e introdotte le equazioni che ne descrivono il funzionamento, nella seconda si descrive l'azionamento sensorless d'interesse mentre nell'ultima parte vengono descritti i due approcci utilizzati per descrivere il comportamento magnetico della macchina in esame.

Il primo, descritto attraverso le modellizzazioni riportate nei paragrafi 1 e 2 del capitolo 4, punta a ricavare un'interpolazione localizzata dell'andamento dei flussi di asse D e Q. Da questa ricavo delle mappe di corrente associati a diverse condizioni di stress magnetico della macchina che vengono utilizzate per modellizzare il motore.

Con il secondo, descritto attraverso le modellizzazioni riportate nel paragrafo 3 del capitolo 4, a partire dalla definizione di una funzione interpolante per la coenergia si riesce a risalire a delle funzioni che descrivono gli andamenti degli altri parametri di interesse.



## Capitolo 2

# Motore sincrono a riluttanza

## 2.1 Sistema di riferimento adottato

Studieremo il funzionamento della macchina in funzione ad un sistema di riferimento rotante sincrono con il rotore, avente l'asse reale allineato con la direzione di minima riluttanza. Tale sistema di riferimento, indicato come  $D$ - $Q$ , è caratterizzato dalle seguenti trasformazioni, dove con  $g$  si indica una generica grandezza:

$$\bar{g}_{DQ} = \bar{g}_{\alpha\beta} e^{-j\vartheta_{me}}$$

Quindi:

$$(g_D + jg_Q) = (g_\alpha + jg_\beta)(\cos\vartheta_{DQ} - \sin\vartheta_{DQ})$$

$$g_D = g_\alpha \cos\vartheta_{DQ} + g_\beta \sin\vartheta_{DQ}$$

$$g_Q = g_\alpha (-\sin\vartheta_{DQ}) + g_\beta \cos\vartheta_{DQ}$$

Che scritto in forma matriciale:

$$\begin{bmatrix} g_D \\ g_Q \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \cos\vartheta_{DQ} & \sin\vartheta_{DQ} \\ -\sin\vartheta_{DQ} & \cos\vartheta_{DQ} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} g_\alpha \\ g_\beta \end{bmatrix}$$

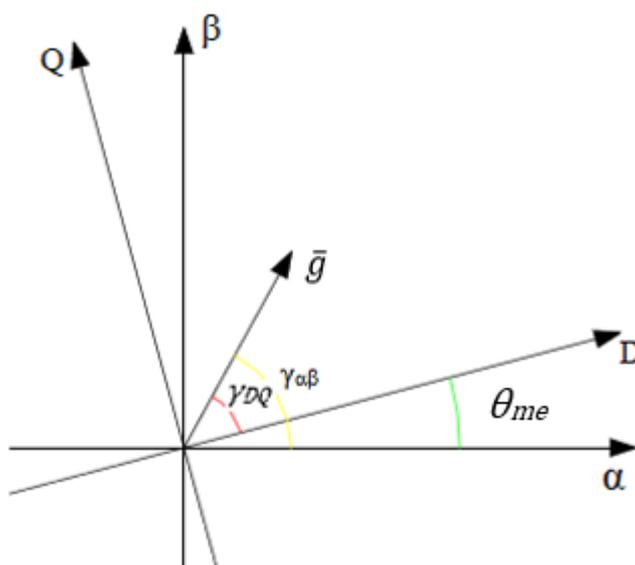


Figura 2.1: vettore spaziale secondo il sistema di riferimento  $D$ - $Q$

Definito il vettore spaziale di corrente secondo il sistema di riferimento D-Q è possibile risalire alla sua espressione secondo i sistemi di riferimento  $\alpha$ - $\beta$  e abc usando le trasformazioni indicate in seguito:

$$\begin{bmatrix} g_\alpha \\ g_\beta \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \cos(\vartheta_{me}) & -\sin(\vartheta_{me}) \\ \sin(\vartheta_{me}) & \cos(\vartheta_{me}) \end{bmatrix} \begin{bmatrix} g_D \\ g_Q \end{bmatrix}$$

$$\begin{bmatrix} g_a \\ g_b \\ g_c \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 1 & 1 \\ -\frac{1}{2} & \frac{\sqrt{3}}{2} \\ -\frac{1}{2} & -\frac{\sqrt{3}}{2} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} g_\alpha \\ g_\beta \end{bmatrix}$$

## 2.2 Caratteristiche generali

La macchina sincrona a riluttanza è costituita da uno statore analogo a quello della macchina asincrona trifase o polifase e da un rotore anisotropo con guide di flusso ossia con canali di minima riluttanza. L'anisotropia è dovuta alle differenti caratteristiche dei percorsi magnetici che si hanno muovendosi rispettivamente lungo l'asse D e lungo l'asse Q. La riluttanza associata al percorso diretto lungo D è minore rispetto a quella associata al percorso diretto lungo l'asse Q, ho quindi:

$$R_Q > R_D \Rightarrow L_D > L_Q$$

Può essere considerato un'estensione del motore sincrono a magnete permanente interno, ottenuta togliendo dal rotore il magnete interno. La macchina presenta un rotore senza avvolgimenti e, di conseguenza le perdite joule sono sostanzialmente limitate agli avvolgimenti di statore facilitando il raffreddamento. Il rotore segue in sincronismo la rotazione del campo magnetico induttore, grazie all'incanalamento preferenziale del flusso nei canali di minima riluttanza. La struttura rotorica è anisotropa, a laminazione convenzionale (ortogonale all'asse di rotore) o a laminazione assiale. Il motore sincrono a riluttanza viene di fatto utilizzato prevalentemente per il funzionamento a coppia costante, proponendosi come alternativa ai motori a magneti permanenti (in corrente continua e sincroni) per la movimentazione di tipo "assi". È poi importante sottolineare che la particolare realizzazione del rotore a laminazione assiale gioca un ruolo essenziale sulle prestazioni del motore, per le seguenti ragioni:

- l'alto valore di  $L_D$  consente di ottenere un flusso elevato anche con una corrente  $i_D$  contenuta;
- il basso valore di  $L_Q$  per mette di regolare la corrente  $i_Q$  cui è legata la coppia con rapidi transitori consentendo buone prestazioni dinamiche;

La sezione di potenza dell'azionamento è costituita, come di consueto, dal raddrizzatore a diodi e da un inverter con tecnica di controllo PWM.

## 2.3 Caratteristiche costruttive

### 2.3.1 Rotore

Per ottenere elevati valori del rapporto di anisotropia sono stati ideati rotori ad anisotropia distribuita. Questi rotori possono essere usati con differenti tipi di avvolgimenti di statore e per differenti tipi di forma d'onda delle correnti di alimentazione, per applicazioni a velocità variabile e per avviamenti in linea, originando un numero elevato di tipologie di motori e di azionamenti.

La distribuzione anisotropa del rotore può ottenersi in due maniere:

- orientando i cristalli del metallo ancora fuso, per mezzo di un campo magnetico
- mediante una tecnica costruttiva, tale da rendere il rotore, nel suo complesso anisotropo.

Più spesso si usano entrambi i metodi per esasperare tali caratteristiche, tutto a vantaggio della coppia di riluttanza. I motori RSM con gabbia rotorica sono usati per tutte le applicazioni ove è richiesta una partenza in linea con tensione e frequenza di alimentazione costanti.

Il rotore presenta una barriera per il flusso di statore realizzata con materiali paramagnetici, disposta trasversalmente alle linee di flusso in maniera da impedirne la penetrazione all'interno. La forma assunta da queste barriere può variare in base alle caratteristiche desiderate. Questo tipo di rotore può avere una laminazione convenzionale o assiale.

#### Rotore a laminazione assiale

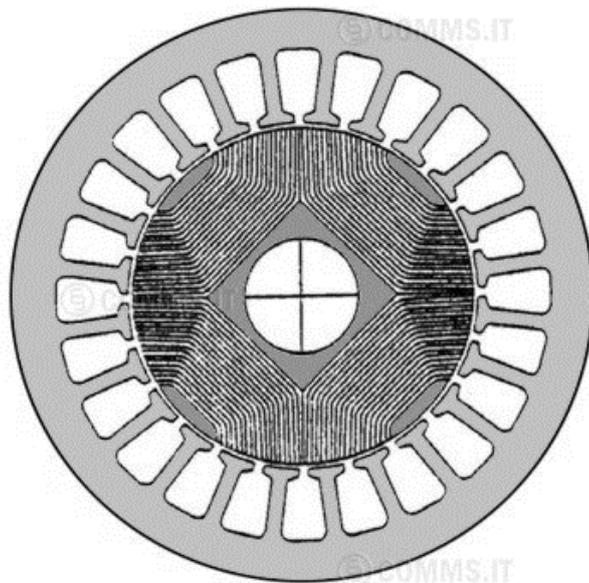
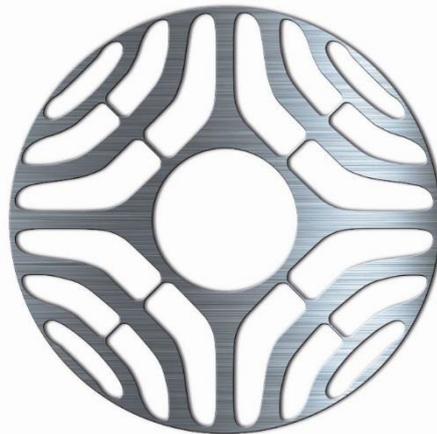


Figura 2.2: Motore a riluttanza con rotore a laminazione assiale

Presenta pacchi di lamierini di materiale ferromagnetico, con interposti fogli di alluminio di spessore variabile fra 1-5 [mm] come materiale paramagnetico di dimensione e forma opportuna, disposti parallelamente all'albero del rotore, e che assolvono alla duplice funzione di barriera di flusso e di gabbia rotorica. Si utilizza l'alluminio perché assolve alla duplice funzione di barriera per il flusso di statore e di conduttore per la realizzazione della gabbia di rotore, qualora si voglia ottenere un motore, alimentato dalla rete a tensione e frequenza costanti, in grado di auto-avviarsi (avviamento asincrono). A seconda di come vengono sagomati i lamierini, si ottengono rotori con un numero diverso di coppie polari  $n_p$ . Con questo rotore il rapporto di anisotropia aumenta al crescere del numero di segmenti. E tanto più questo è alto tanto più la coppia elettromagnetica sviluppata dalla macchina è elevata. Bisogna tuttavia tener presente che, dal punto di vista tecnologico, non è conveniente realizzare rotori a laminazione assiale con un numero di segmenti troppo grande.

### **Rotore a laminazione convenzionale**



*Figura 2.2: Lamierino per motore a riluttanza con rotore a laminazione convenzionale*

E' costituito da lamierini opportunamente isolati fra loro con fogli o, più comunemente, con vernici isolanti, disposti trasversalmente alla lunghezza dell'albero e aventi opportune sagome che permettono l'alloggiamento della barriera di flusso ed eventualmente della gabbia. Il singolo lamierino si ottiene per tranciatura tradizionale, la tenuta meccanica è affidata ai ponticelli disposti al traferro e anche internamente. I ponticelli vengono saturati dalla f.m.m di statore e il flusso che li interessa rappresenta un flusso di dispersione (rotorica).

Questo ha l'effetto di ridurre la coppia e peggiorare il fattore di potenza. Deve quindi essere ridotto al minimo compatibilmente con le esigenze meccaniche. Il numero di segmenti rotorici non può essere elevatissimo; i ponticelli vengono disposti al traferro in modo regolare.

Un vantaggio della laminazione trasversale è di poter dimensionare in modo ottimale le permeanze delle singole barriere di flusso. Si deve fare in modo che l'induzione  $B_g$  abbia un andamento il più sinusoidale possibile.

### 2.3.2 Statore

Lo statore è normalmente costituito da un nucleo ferromagnetico laminato, con cave chiuse o semichiusse uniformemente distribuite. La configurazione con cave aperte è utilizzata solitamente per ospitare un avvolgimento polifase concentrato formato da una matassa per polo e per fase. Le cave aperte permettono facilmente l'inserzione delle matasse e possono essere usate per motori bifase o trifase di piccola potenza, o per motori polifase (cinque, sette o nove fasi) con coppie elevate a bassa velocità. A causa delle cave aperte il flusso al traferro può contenere un numero elevato di armoniche, non tollerabile da alcuni azionamenti a causa delle elevate coppie pulsanti conseguenti. In questi casi si ricorre alle cave chiuse o semichiusse. Per applicazioni in cui sono richieste elevate potenze o coppie, lo statore è realizzato con cave aperte o semichiusse le quali, dopo aver inserito le matasse, vengono chiuse con opportune zeppe. Esistono configurazioni monofase con avvolgimenti che sono in grado di produrre un campo magnetico rotante, e quindi rappresentati per lo più dal tipo a fase ausiliaria e condensatore permanente inserito, ma anche dal tipo a poli schermati.

### 2.4 Modello del motore sincro a riluttanza

Vado ora a sviluppare il modello matematico del motore rispetto ad un sistema di riferimento rotante  $D$ - $Q$ , con asse  $D$  allineato con l'asse a riluttanza minore. Si assume la distribuzione sinusoidale degli avvolgimenti, cioè avvolgimenti disposti in modo da generare f.m.m. sinusoidale al traferro.

Visto quanto detto, le equazioni della tensione risultano:

$$\begin{cases} u_D = Ri_D + \frac{d\lambda_D}{dt} - \omega_{me}\lambda_Q \\ u_Q = Ri_Q + \frac{d\lambda_Q}{dt} + \omega_{me}\lambda_D \end{cases} \quad (2.1)$$

In generale nei motori a riluttanza l'effetto della saturazione magnetica del ferro è più importante che nei motori a magneti permanenti, a causa del maggior sfruttamento magnetico cui vengono sottoposti. Infatti, l'assenza del flusso del magnete, fa sì che per avere coppie paragonabili ad un motore a magneti permanenti, si debba lavorare con correnti più elevate e quindi con maggior probabilità di andare in saturazione.

Visto che parte dei percorsi magnetici è comune sia al flusso di asse diretto che al flusso dell'asse in quadratura, la saturazione di tali porzioni di materiale ferromagnetico, dovuta ad una delle due correnti, provoca variazioni di flusso anche sull'altro asse, anche se la corrente su tale asse è rimasta costante. Tale fenomeno prende il nome di saturazione incrociata (cross-saturation). Detto questo le relazioni flussi-correnti si possono esprimere come segue:

$$\begin{cases} \lambda_D = \lambda_D(i_D, i_Q) \\ \lambda_Q = \lambda_Q(i_D, i_Q) \end{cases}$$

quindi il sistema (1.1) può essere scritto come segue:

$$\begin{cases} u_D = Ri_D + \frac{d\lambda_D(i_D, i_Q)}{dt} - \omega_{me}\lambda_Q(i_D, i_Q) \\ u_Q = Ri_Q + \frac{d\lambda_Q(i_D, i_Q)}{dt} + \omega_{me}\lambda_D(i_D, i_Q) \end{cases}$$

in cui si può sviluppare la derivata dei flussi:

$$\begin{cases} u_D = Ri_D + \frac{\partial\lambda_D(i_D, i_Q)}{\partial i_D} \frac{\partial i_D}{\partial t} + \frac{\partial\lambda_D(i_D, i_Q)}{\partial i_Q} \frac{\partial i_Q}{\partial t} - \omega_{me}\lambda_Q(i_D, i_Q) \\ u_Q = Ri_Q + \frac{\partial\lambda_Q(i_D, i_Q)}{\partial i_D} \frac{\partial i_D}{\partial t} + \frac{\partial\lambda_Q(i_D, i_Q)}{\partial i_Q} \frac{\partial i_Q}{\partial t} + \omega_{me}\lambda_D(i_D, i_Q) \end{cases}$$

Ed infine:

$$\begin{cases} u_D = Ri_D + l_D \frac{\partial i_D}{\partial t} + l_{DQ} \frac{\partial i_Q}{\partial t} - \omega_{me}\lambda_Q(i_D, i_Q) \\ u_Q = Ri_Q + l_{QD} \frac{\partial i_D}{\partial t} + l_Q \frac{\partial i_Q}{\partial t} + \omega_{me}\lambda_D(i_D, i_Q) \end{cases}$$

Dove:

$$l_D = \frac{\partial\lambda_D(i_D, i_Q)}{\partial i_D}$$

$$l_Q = \frac{\partial\lambda_Q(i_D, i_Q)}{\partial i_Q}$$

sono le induttanze differenziali degli assi d e q rispettivamente e

$$l_{DQ} = \frac{\partial\lambda_D(i_D, i_Q)}{\partial i_Q}$$

$$l_{QD} = \frac{\partial\lambda_Q(i_D, i_Q)}{\partial i_D}$$

sono le induttanze mutue differenziali.

# Capitolo 3

## Funzionamento dell'azionamento sensorless impiegato

### 3.1 Definizione e classificazione

L'azionamento con motore sincrono a riluttanza (ma lo stesso è anche per quelli a campo avvolto e comunque per tutti gli azionamenti con motore sincrono) per attuare il controllo di corrente (coppia) necessita della conoscenza della posizione assoluta del rotore ovvero dell'angolo  $\theta_{me}$ . Tale angolo costituisce la posizione dell'asse diretto del sistema di riferimento nel quale sono definite le correnti da imporre allo statore per avere la desiderata coppia. Questa è una caratteristica degli azionamenti con macchina sincrona e consente di ottenere, grazie all'accurato controllo vettoriale di corrente che si può realizzare, prestazioni dinamiche altrimenti non possibili.

Al tempo stesso però la necessità di un trasduttore di posizione assoluta (anche quando non c'è alcun controllo di posizione e magari neanche di velocità) costituisce uno svantaggio in termini di costo, ingombro, affidabilità; la sua eliminazione ricorrendo all'utilizzo di una posizione stimata invece che misurata (appunto: *azionamenti sensorless*) ha quindi assunto un interesse pratico crescente.

La tabella che segue classifica alcune delle principali soluzioni distinguendo fra quelle che sono adatte ai motori con rotore isotropo (p.e. motori SPM) e quelle che richiedono invece un rotore anisotropo (p.e. motori IPM) ed, inoltre, fra quelle che funzionano solo con velocità diversa da zero (medie e alte) e altri che invece possono funzionare anche a velocità nulla (e comunque bassa).

	<i>Velocità bassa o nulla</i>	<i>Velocità media o alta</i>
<i>Motori con rotore isotropo</i>	<ul style="list-style-type: none"><li>In generale non è possibile a meno che non impieghi le stesse <u>soluzioni sensorless</u> delle macchine con rotore anisotropo quando rese praticabili dall'<u>inserimento intenzionale</u> di anisotropie rotoriche.</li></ul>	<ul style="list-style-type: none"><li>Stimatori basati sul <u>riconoscimento della fem</u> dovuta ai flussi dei magneti (o grandezze ad esse collegate). Sfruttano le equazioni fondamentali che <u>descrivono</u> il motore</li></ul>
<i>Motori con rotore anisotropo</i>	<ul style="list-style-type: none"><li>Stima basta sul riconoscimento dell'anisotropia rotorica. Iniezione di tensione o correnti ausiliarie (ad alta frequenza) negli avvolgimenti statorici.</li></ul>	

Come possiamo notare per riuscire a lavorare anche velocità bassa o nulla, cioè quando nessuna f.e.m. è indotta o comunque al di sotto di una certa velocità minima il cui valore dipende dall'accuratezza dell'implementazione, del modello del motore utilizzato (parametri) e delle misure, è possibile sfruttare l'anisotropia del rotore e tramite l'iniezione di segnali addizionali negli avvolgimenti di statore riconoscere la posizione degli assi di anisotropia caratteristici del motore.

Sono normalmente utilizzate una o l'altra delle seguenti modalità di eccitazione:

### ***Eccitazione con un "flusso pulsante"***

Si assuma, per semplicità, la macchina ferma. Si immagini di produrre lungo l'asse  $d^x$  di un arbitrario sistema di riferimento  $d^x-q^x$  (non è nota la posizione del vero sistema di riferimento  $d-q$ ) un flusso "pulsante" cioè rappresentato da un vettore spaziale che ha direzione fissa (sia quella dell'asse  $d^x$ ) e ampiezza variabile con legge sinusoidale (ampiezza negativa equivale ad un'inversione del verso). Tale flusso pulsante potrebbe essere sovrapposto a quello esistente dovuto alle correnti inviate per produrre la necessaria coppia. Nel sistema di riferimento  $d^x-q^x$  il flusso pulsante ha componente (pulsante) solo secondo l'asse  $d^x$ , mentre nel sistema di riferimento  $d-q$  ha, in genere, entrambe le componenti (pulsanti)  $\lambda_d$  e  $\lambda_q$  diverse da zero, come in Figura 6.17.1 (proiezioni a tratteggio). Per sostenere tali componenti di flusso si manifesteranno le correnti pulsanti  $\lambda_d/L_d = i_d$  e  $\lambda_q/L_q = i_q$  rispettivamente. Se  $L_q > L_d$  il rapporto  $i_d/i_q$  sarà, in valore assoluto, maggiore del rapporto  $\lambda_d/\lambda_q$  ovvero il vettore di corrente avrà una direzione di pulsazione che si posiziona fra l'asse  $d^x$  e l'asse  $d$ , come mostra la figura. Sarà pertanto presente una componente pulsante di corrente  $i_q^x$  ogni volta che l'asse  $d^x$  non coincide con l'asse  $d$ . Sarà proprio elaborando tale componente pulsante di corrente che si ricaveranno informazioni per correggere la posizione del sistema di riferimento  $d^x-q^x$  fino a farlo coincidere con  $d-q$ , identificando in tal modo la posizione rotorica. Nel seguito si illustrerà in dettaglio questo metodo di stima, che si può applicare anche se il rotore è in moto, si mostrerà come generare il flusso pulsante, e ricavare ed elaborare la corrente  $i_q^x$  e, infine, si discuterà sulle prestazioni dello stimatore.

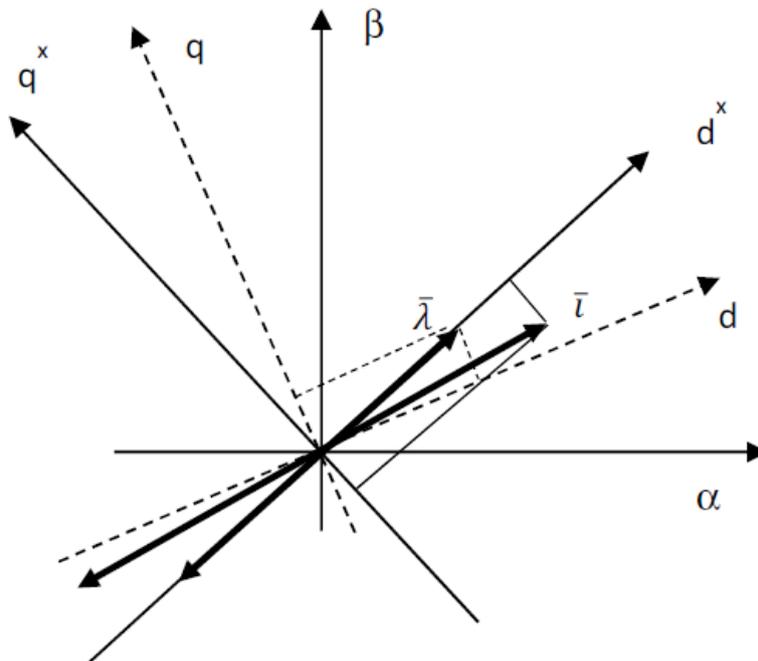
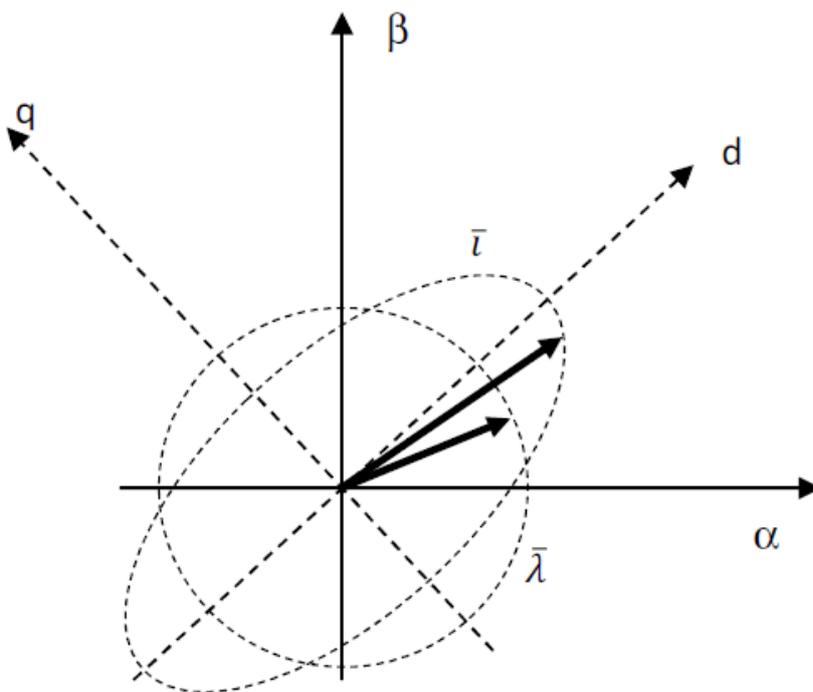


Figura 3.1: Esempificazione della tecnica di stima con flusso pulsante

### *Eccitazione con un “flusso rotante”*

Si assuma, ancora per semplicità, la macchina ferma. Si immagini di produrre un flusso “rotante” cioè rappresentato da un vettore spaziale che ha ampiezza fissa e velocità di rotazione costante. Esso traccia nel piano  $\alpha$ - $\beta$  una circonferenza come indicato in figura 2.2. Tale flusso rotante potrebbe essere sovrapposto a quello esistente dovuto al magnete e alle correnti inviate per produrre la necessaria coppia e sarà da questi distinto per la diversa velocità di rotazione. Nel sistema di riferimento  $d$ - $q$  (di posizione non nota) si ha ancora un vettore di flusso rotante che presenterà componenti (sinusoidali)  $\lambda_d$  e  $\lambda_q$  di uguale ampiezza diversa da zero.

Per sostenere tali componenti di flusso si manifesteranno le correnti  $\lambda_d/L_d=i_d$  e  $\lambda_q/L_q=i_q$  rispettivamente. Se  $L_q>L_d$  il rapporto  $i_d/i_q$  sarà, in valore assoluto, maggiore di uno ovvero il vettore di corrente tratterà un'ellisse il cui asse maggiore è diretto secondo l'asse  $d$ , come mostra la figura. Sarà proprio elaborando tale comportamento della corrente che si ricaveranno le informazioni per identificare la posizione del sistema di riferimento  $d$ - $q$ , identificando in tal modo la posizione rotorica



*Figura 3.2: Esempificazione della tecnica di stima con flusso rotante*

In questo lavoro si è impiegata la prima di queste due tecniche e nel seguito ne verranno approfondite le caratteristiche e discussa l'implementazione con in funzione del sistema di riferimento  $D$ - $Q$  utilizzato per i motori a riluttanza.

### 3.2 Stima della posizione con iniezione di flusso (tensione) pulsante

Si consideri il motore sincrono a riluttanza oggetto dell'analisi, di questo non è nota la posizione  $\theta_{me}$  e lo si descriva con riferimento ad un generico sistema di assi  $D^x-Q^x$  la cui posizione  $\theta_{s_x}$  si vuole far coincidere con  $\theta_{me}$  e pertanto può essere indicata anche con  $\tilde{\vartheta}_{me}$ . Nel sistema di riferimento prescelto, che ruoterà con velocità  $\omega_{s_x}=\tilde{\omega}_{me}$  (che d'ora in avanti indicherò con  $\omega_x$  per semplicità di scrittura) l'equazione vettoriale statorica delle tensioni diventa:

$$\bar{u}_x = R\bar{i}_x + \frac{d\bar{\lambda}_x}{dt} + j\omega_x\bar{\lambda}_x \quad (3.1)$$

Questa è valida anche se siamo in presenza di saturazione del ferro. Ipotizzo però per il momento di considerare una macchina magneticamente lineare, quindi priva di saturazione del ferro, nel sistema di riferimento  $D-Q$  sincrono con il rotore il flusso può essere espresso come segue:

$$\begin{cases} \lambda_D = L_D i_D \\ \lambda_Q = L_Q i_Q \end{cases}$$

o in forma matriciale:

$$[\lambda] = \begin{bmatrix} \lambda_D \\ \lambda_Q \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} L_D & 0 \\ 0 & L_Q \end{bmatrix} \begin{bmatrix} i_D \\ i_Q \end{bmatrix} = [L][i] \quad (3.2)$$

Il vettore flusso concatenato può essere definito nel sistema di riferimento  $D^x-Q^x$  applicando la trasformazione riportata di seguito:

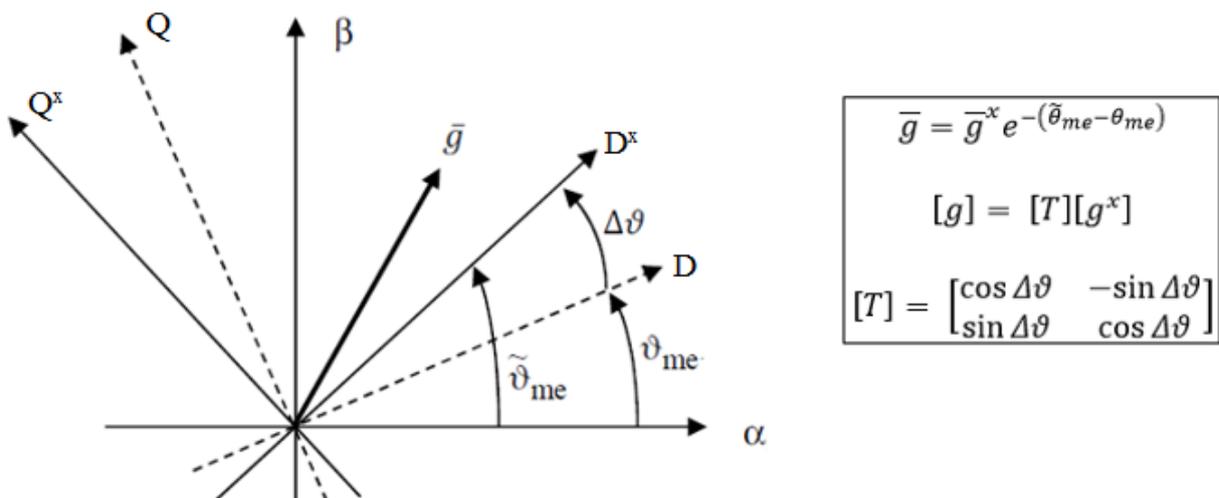


Figura 3.3 – Sistemi di riferimento: stazionario ( $\alpha$ - $\beta$ ), sincrono con il rotore ( $D$ - $Q$ ), riferito alla posizione stimata  $\tilde{\vartheta}_{me}$  ( $D^x$ - $Q^x$ )

Risulta quindi:

$$[T][\lambda^x] = [L][T][i^x]$$

Se poi moltiplico ambo i membri per  $[T]^{-1}$  ricavo:

$$[T]^{-1}[T][\lambda^x] = [T]^{-1}[L][T][i^x]$$

$$[\lambda^x] = ([T]^{-1}[L][T])[i^x] \quad (3.3)$$

nella quale:

$$\begin{aligned} [T]^{-1}[L][T] &= \begin{bmatrix} \cos \Delta\vartheta & \sin \Delta\vartheta \\ -\sin \Delta\vartheta & \cos \Delta\vartheta \end{bmatrix} \begin{bmatrix} L_D & 0 \\ 0 & L_Q \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \cos \Delta\vartheta & -\sin \Delta\vartheta \\ \sin \Delta\vartheta & \cos \Delta\vartheta \end{bmatrix} \\ " &= \begin{bmatrix} L_D \cos \Delta\vartheta \cos \Delta\vartheta + L_Q \sin \Delta\vartheta \sin \Delta\vartheta & L_Q \sin \Delta\vartheta \cos \Delta\vartheta - L_D \cos \Delta\vartheta \sin \Delta\vartheta \\ L_Q \sin \Delta\vartheta \sin \Delta\vartheta - L_D \cos \Delta\vartheta \sin \Delta\vartheta & L_D \sin \Delta\vartheta \sin \Delta\vartheta + L_Q \cos \Delta\vartheta \cos \Delta\vartheta \end{bmatrix} \end{aligned}$$

ricordando che:

$$\begin{aligned} \sin \alpha \sin \beta &= \frac{1}{2} [\cos(\alpha - \beta) - \cos(\alpha + \beta)] \\ \sin \alpha \cos \beta &= \frac{1}{2} [\sin(\alpha + \beta) + \sin(\alpha - \beta)] \\ \cos \alpha \cos \beta &= \frac{1}{2} [\cos(\alpha + \beta) + \cos(\alpha - \beta)] \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} [T]^{-1}[L][T] &= \begin{bmatrix} \frac{L_D}{2} (1 + \cos 2\Delta\vartheta) + \frac{L_Q}{2} (1 - \cos 2\Delta\vartheta) & \frac{L_Q}{2} \sin 2\Delta\vartheta - \frac{L_D}{2} \sin 2\Delta\vartheta \\ \frac{L_Q}{2} \sin 2\Delta\vartheta - \frac{L_D}{2} \sin 2\Delta\vartheta & \frac{L_D}{2} (1 - \cos 2\Delta\vartheta) + \frac{L_Q}{2} (1 + \cos 2\Delta\vartheta) \end{bmatrix} \\ " &= \begin{bmatrix} \frac{L_D}{2} (1 + \cos 2\Delta\vartheta) + \frac{L_Q}{2} (1 - \cos 2\Delta\vartheta) & \frac{L_Q}{2} \sin 2\Delta\vartheta - \frac{L_D}{2} \sin 2\Delta\vartheta \\ \frac{L_Q}{2} \sin 2\Delta\vartheta - \frac{L_D}{2} \sin 2\Delta\vartheta & \frac{L_D}{2} (1 - \cos 2\Delta\vartheta) + \frac{L_Q}{2} (1 + \cos 2\Delta\vartheta) \end{bmatrix} \\ " &= \begin{bmatrix} \frac{L_D+L_Q}{2} + \frac{L_D-L_Q}{2} \cos(2\Delta\vartheta) & \frac{L_Q-L_D}{2} \sin(2\Delta\vartheta) \\ \frac{L_Q-L_D}{2} \sin(2\Delta\vartheta) & \frac{L_D+L_Q}{2} + \frac{L_Q-L_D}{2} \cos(2\Delta\vartheta) \end{bmatrix} \end{aligned}$$

dove:

$$L_\Sigma = \frac{L_D+L_Q}{2} \quad \text{e} \quad L_\Delta = \frac{L_Q-L_D}{2} \quad (3.4)$$

Ordinando e sostituendo nella (3.3)

$$[\lambda^x] = \left\{ L_\Sigma [I] + L_\Delta \begin{bmatrix} -\cos(2\Delta\vartheta) & \sin(2\Delta\vartheta) \\ \sin(2\Delta\vartheta) & \cos(2\Delta\vartheta) \end{bmatrix} \right\} [i^x] = [L^x(2\Delta\vartheta)][i^x] \quad (3.5)$$

Si supponga ora anche alle normali tensioni che alimentano il motore (per es. risultanti dal controllo di corrente) vengano sommate delle tensioni ad alta frequenza angolare  $\omega_h$ , maggiore della massima prevedibile velocità  $\omega_x$ , del tipo:

$$\begin{aligned} u_{hD}^x &= U_{hD} \cos \omega_h t \\ u_{hQ}^x &= U_{hQ} \sin \omega_h t \end{aligned} \quad (3.6)$$

Il cui vettore spaziale traccia un'ellisse nel piano  $D^x$ - $Q^x$ , come indicato nella seguente figura:

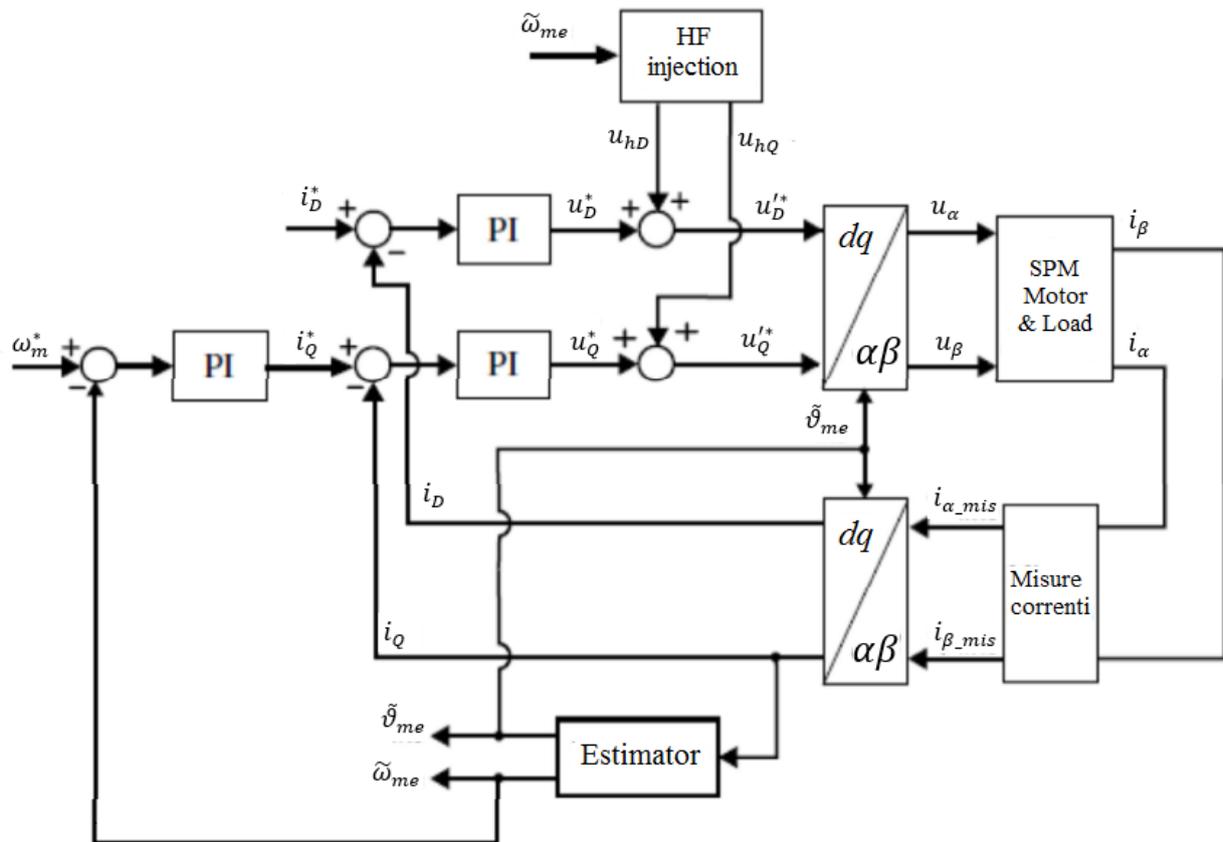


Figura .4: Schema dell'azionamento sensorless con l'iniezione di tensione

Sostituendo le (3.6) nella (3.1) e risolvendo a regime alla pulsazione  $\omega_h$  dopo aver trascurato la caduta di tensione resistiva ottengo le componenti in alta frequenza del flusso secondo  $D^x Q^x$  :

$$\begin{aligned}\lambda_{hD}^x &= \Lambda_{hD} \sin \omega_h t \\ \lambda_{hQ}^x &= \Lambda_{hQ} \cos \omega_h t\end{aligned}\quad (3.7)$$

Trovo i valori di  $\Lambda_{hD}$  e  $\Lambda_{hQ}$  risolvendo l'equazione delle tensioni in  $D^x Q^x$  trascurando la caduta di tensione resistiva, ho che:

$$\begin{cases} \omega_h \Lambda_{hD} \cos \omega_h t - \omega_x \Lambda_{hQ} \cos \omega_h t = U_{hD} \cos \omega_h t \\ \omega_x \Lambda_{hD} \sin \omega_h t - \omega_h \Lambda_{hQ} \sin \omega_h t = U_{hQ} \sin \omega_h t \end{cases}$$

Quindi risolvendo il sistema con Cramer ho che:

$$D = -\omega_h^2 \cos \omega_h t \sin \omega_h t + \omega_x^2 \cos \omega_h t \sin \omega_h t$$

$$'' = (\omega_x^2 - \omega_h^2)(\cos \omega_h t \sin \omega_h t)$$

$$D_{\Lambda_{hD}} = -\omega_h U_{hD} \cos \omega_h t \sin \omega_h t + \omega_x U_{hQ} \cos \omega_h t \sin \omega_h t$$

$$'' = (U_{hQ} \omega_x - U_{hD} \omega_h)(\cos \omega_h t \sin \omega_h t)$$

$$D_{\Lambda_{hQ}} = \omega_h U_{hQ} \cos \omega_h t \sin \omega_h t - \omega_x U_{hD} \cos \omega_h t \sin \omega_h t$$

$$'' = (U_{hQ} \omega_h - U_{hD} \omega_x)(\cos \omega_h t \sin \omega_h t)$$

$$\begin{aligned}\Lambda_{hD} &= \frac{D_{\Lambda_{hD}}}{D} = \frac{(U_{hQ} \omega_x - U_{hD} \omega_h)(\cos \omega_h t \sin \omega_h t)}{(\omega_x^2 - \omega_h^2)(\cos \omega_h t \sin \omega_h t)} = \frac{U_{hD} \omega_h - U_{hQ} \omega_x}{\omega_h^2 - \omega_x^2} \\ \Lambda_{hQ} &= \frac{D_{\Lambda_{hQ}}}{D} = \frac{(U_{hQ} \omega_h - U_{hD} \omega_x)(\cos \omega_h t \sin \omega_h t)}{(\omega_x^2 - \omega_h^2)(\cos \omega_h t \sin \omega_h t)} = \frac{U_{hD} \omega_x - U_{hQ} \omega_h}{\omega_h^2 - \omega_x^2}\end{aligned}\quad (3.7a)$$

Imponendo le tensioni nel rispetto di  $U_{hQ} = U_{hD} \omega_x / \omega_h$  la soluzione si semplifica nella:

$$\begin{aligned}\Lambda_{hD} &= \frac{U_{hD}}{\omega_h} \\ \Lambda_{hQ} &= 0\end{aligned}\quad (3.8)$$

indipendente dalla velocità del  $w_x$  del sistema di riferimento. Si ottiene quindi un vettore di flusso pulsante nella direzione dell'asse  $D^x$ , come desiderato. Sfruttando infine la relazione flussi-correnti data dalla (3.5) si possono calcolare le correnti corrispondenti alle (3.8).

ho che:

$$\begin{bmatrix} \frac{U_{hQ}}{\omega_h} \sin \omega_h t \\ 0 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} L_\Sigma - L_\Delta \cos 2\Delta\vartheta & L_\Delta \sin 2\Delta\vartheta \\ L_\Delta \sin 2\Delta\vartheta & L_\Sigma + L_\Delta \cos 2\Delta\vartheta \end{bmatrix} \begin{bmatrix} i_{hD}^x \\ i_{hQ}^x \end{bmatrix}$$

quindi

$$\begin{bmatrix} i_{hD}^x \\ i_{hQ}^x \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} L_\Sigma - L_\Delta \cos 2\Delta\vartheta & L_\Delta \sin 2\Delta\vartheta \\ L_\Delta \sin 2\Delta\vartheta & L_\Sigma + L_\Delta \cos 2\Delta\vartheta \end{bmatrix}^{-1} \begin{bmatrix} \frac{U_{hQ}}{\omega_h} \sin \omega_h t \\ 0 \end{bmatrix}$$

dove

$$\begin{bmatrix} L_\Sigma - L_\Delta \cos 2\Delta\vartheta & L_\Delta \sin 2\Delta\vartheta \\ L_\Delta \sin 2\Delta\vartheta & L_\Sigma + L_\Delta \cos 2\Delta\vartheta \end{bmatrix}^{-1} = \frac{1}{L_D L_Q} \begin{bmatrix} L_\Sigma + L_\Delta \cos 2\Delta\vartheta & -L_\Delta \sin 2\Delta\vartheta \\ -L_\Delta \sin 2\Delta\vartheta & L_\Sigma - L_\Delta \cos 2\Delta\vartheta \end{bmatrix}$$

per cui:

$$i_{hD}^x = \frac{U_{hD}}{\omega_h L_D L_Q} (L_\Sigma + L_\Delta \cos 2\Delta\vartheta) \sin \omega_h t = I_{hD} \sin \omega_h t \quad (3.9)$$

$$i_{hQ}^x = -\frac{U_{hD}}{\omega_h L_D L_Q} (L_\Delta \sin 2\Delta\vartheta) \sin \omega_h t = I_{hQ} \sin \omega_h t$$

Che rappresentano le componenti di un vettore pulsante nel piano  $D^x Q^x$  :

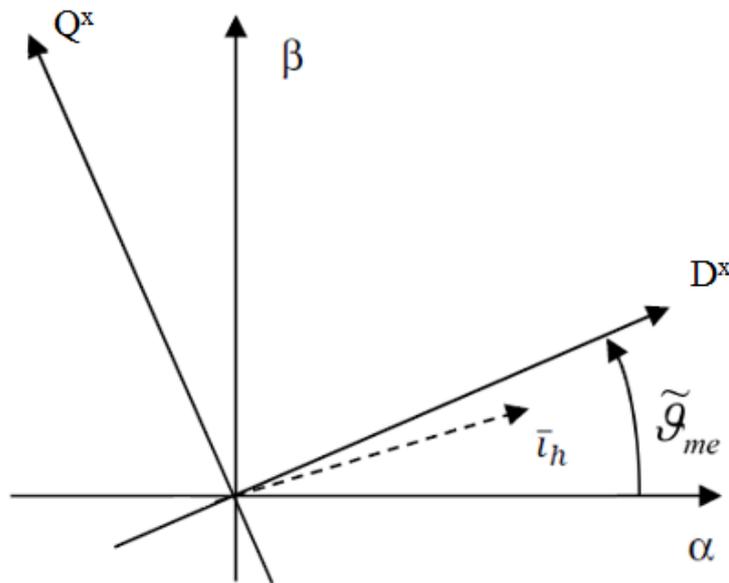


Figura 3.5: Vettore pulsante della corrente ad alta frequenza

Un meccanismo di aggiustamento infine corregge la posizione  $\tilde{\vartheta}_{me}$  fino all'annullamento di  $\Delta\vartheta$ , risultato che si riconosce per l'annullamento della componente in quadratura nella (3.9).

Allo scopo si utilizza un dispositivo realizzato come indicato nel seguente schema a blocchi:

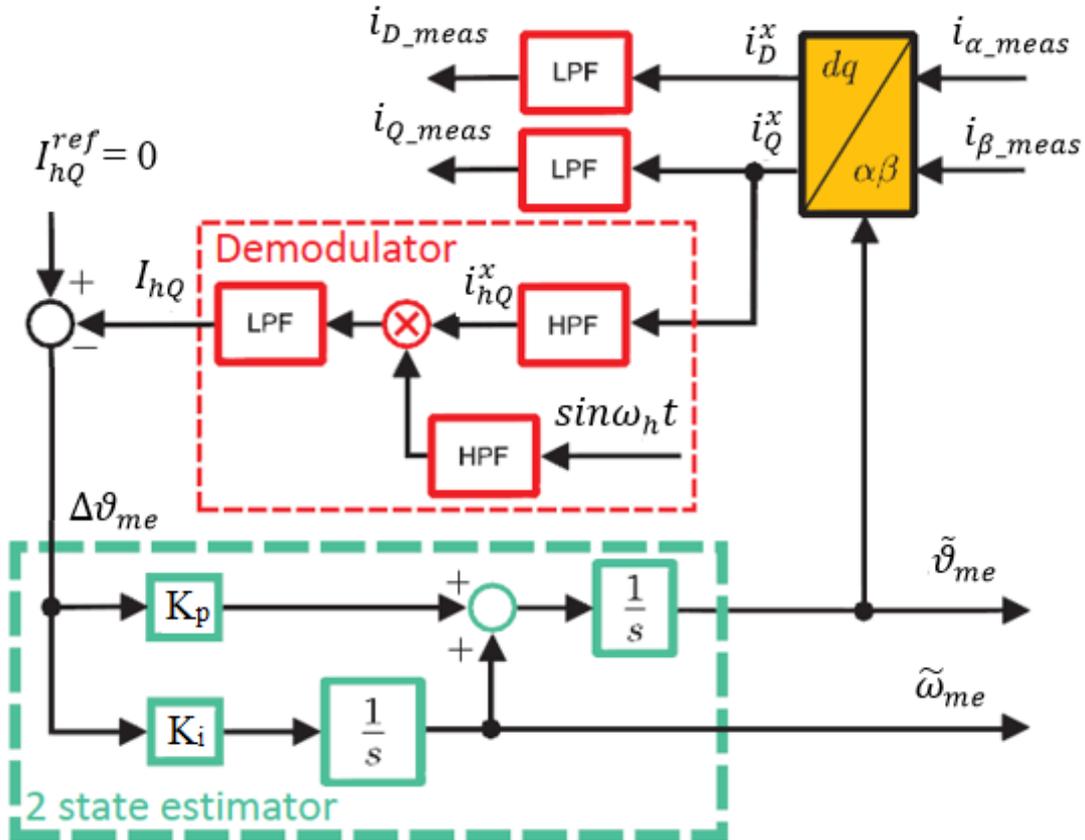


Figura 3.6: Meccanismo di annullamento di  $\Delta\vartheta$

Questo opera trasformando le correnti misurate  $i_\alpha$  e  $i_\beta$  nelle componenti  $i_D^x$  e  $i_Q^x$  mediante la posizione stimata  $\tilde{\vartheta}_{me}$ .

Queste correnti, sia prima che dopo la trasformazione, contengono sia la componente a frequenza bassa o nulla (quella inviata per produrre la coppia) che la componente a pulsazione  $\omega_h$  (ad alta frequenza). Le componenti a bassa frequenza vengono separate mediante due filtri passa basso (low pass filter LPF) e servono per chiudere gli anelli di corrente. La componente ad alta frequenza  $i_{hQ}$  nella corrente  $i_Q^x$  viene estratta con un filtro passa alto (high pass filter HPF). Di questa componente in alta frequenza serve l'ampiezza e questa si ricava, moltiplicandola per la funzione  $\sin \omega_h t$  (la presenza del filtro passa alto su questa funzione ha solo lo scopo di produrre lo stesso sfasamento sui due canali del moltiplicatore).

Quindi, dopo l'HPF mi rimane:

$$i_{hQ}^x = -I_{hQ} \sin 2\Delta\vartheta \sin \omega_h t \quad \text{dove:} \quad I_{hQ} = \frac{U_{hd}}{\omega_h L_d L_q} L_\Delta \quad (3.10)$$

Moltiplicatolo per  $\sin \omega_h t$  ottengo:

$$i_{hQ}^x \sin \omega_h t = -I_{hQ} \sin 2\Delta\vartheta \sin^2(\omega_h t)$$

$$'' = -I_{hQ} \sin 2\Delta\vartheta \frac{1}{2} (\cos(\omega_h t - \omega_h t) - \cos(\omega_h t + \omega_h t))$$

$$'' = -I_{hQ} \sin 2\Delta\vartheta \left( \frac{1}{2} - \frac{1}{2} \cos 2\omega_h t \right)$$

Ho quindi una componente di tensione continua cui è sovrapposta una componente a pulsazione  $2\omega_h$ . A me interessa la componente continua perché contiene l'informazione d'interesse e non oscilla: Quindi prima di entrare nel regolatore uso un LPF ottenendo la sola quantità:

$$Z = -\frac{I_{hQ} \sin 2\Delta\vartheta}{2} = \frac{I_{hQ} \sin(-2\Delta\vartheta)}{2} = \frac{I_{hQ} \sin(2\Delta\vartheta')}{2}$$

Dove:

$$\Delta\vartheta = \tilde{\vartheta}_{me} - \vartheta_{me}$$

$$\Delta\vartheta' = \vartheta_{me} - \tilde{\vartheta}_{me}$$

### **OSSERVAZIONI:**

- La pulsazione  $\omega_h$  va scelta sufficientemente minore della frequenza di commutazione dell'invertitore perché le tensioni iniettate ad alta frequenza devono essere prodotte dall'invertitore stesso. Deve però essere maggiore della velocità meccanica elettrica per evitare singolarità nelle (3.7a). Normalmente la frequenza  $f_h$  è compresa fra 500 e 1000 Hz.

- La (3.10) mostra che per l'applicabilità del metodo deve essere  $L$  diverso da zero, altrimenti la corrente  $i_{hQ}$  è identicamente nulla. Il motore deve avere quindi un rotore con struttura anisotropa.

- Le correnti ad alta frequenza sono causa di maggiori perdite Joule, armoniche di coppia alla stessa frequenza, rumore, e richiedono un sovradimensionamento in corrente dell'invertitore. Le tensioni ad alta frequenza richiedono un sovradimensionamento in tensione dell'invertitore. L'utilizzo di questa tecnica di stima della posizione rotorica ha implicazioni di costo non solo per la maggiore complessità del sistema di controllo, ma anche per il maggior costo dell'elettronica di potenza.

- La (3.10) mostra che la corrente  $i_{hQ}$  è nulla non solo per  $\Delta\vartheta = 0$ , che è la soluzione cercata, ma anche per tutti i valori  $2\Delta\vartheta = k\pi$  ( $k=0,1,2,3,\dots$ ) per i quali si annulla la funzione seno, per cui ci si deve chiedere quale soluzione sarà proposta dallo stimatore.

Si può peraltro verificare che:

- A) La soluzione per  $k=0$  è quella corretta; anche per  $k=4,8,\dots$  le soluzioni sono corrette.
- B) Le soluzioni per  $k$  dispari, quindi  $\Delta\vartheta = \frac{k\pi}{2}$ , sono instabili e quindi non sono soluzioni di convergenza dello stimatore
- C) Le soluzioni per  $k=2,6,10, \dots$  sono possibili soluzioni stabili dello stimatore e corrispondono a  $\Delta\vartheta=k\pi, 3k\pi, \dots$  che corrispondono ad una stima corretta della direzione dell'asse  $d$ , ma con verso invertito. Errore che comunque lavorando con un motore a riluttanza non ha conseguenze.

### 3.3 Funzionamento dell'azionamento in presenza di saturazione del ferro

Qualora non sia possibile trascurare l'induttanza di accoppiamento fra i due assi a causa della presenza di saturazione del ferro la trattazione fatta è ancora valida ma si utilizzano le induttanze differenziali e viene introdotto un errore di stima a causa della presenza dell'induttanza di accoppiamento la cui previsione è oggetto del lavoro di tesi.

Secondo il sistema di riferimento D-Q le equazioni delle tensioni, nell'ipotesi di trascurare le cadute di tensione resistive e che il motore stia lavorando a bassa velocità, possono essere ora scritte come segue:

$$\begin{cases} u_D = l_D \frac{\partial i_D}{\partial t} + l_{DQ} \frac{\partial i_Q}{\partial t} \\ u_Q = l_{DQ} \frac{\partial i_D}{\partial t} + l_Q \frac{\partial i_Q}{\partial t} \end{cases} \quad (3.11)$$

Applico secondo il sistema di riferimento  $D^x-Q^x$  le seguenti tensioni:

$$\begin{cases} u_{hD}^x = U_{hD} \cos \omega_h t \\ u_{hQ}^x = 0 \end{cases}$$

che equivalgono nel sistema di riferimento  $D-Q$  alle tensioni:

$$\begin{cases} u_{hD} = U_{hD} \cos \omega_h t \cos \Delta\vartheta \\ u_{hQ} = U_{hD} \cos \omega_h t \sin \Delta\vartheta \end{cases}$$

La (3.11), posta:

$$U_h = U_{hD} \cos \omega_h t$$

può quindi essere riscritta come segue:

$$\begin{cases} U_h \cos \Delta\vartheta = l_D \frac{\partial i_{hD}}{\partial t} + l_{DQ} \frac{\partial i_{hQ}}{\partial t} \\ U_h \sin \Delta\vartheta = l_{DQ} \frac{\partial i_{hD}}{\partial t} + l_Q \frac{\partial i_{hQ}}{\partial t} \end{cases} \quad (3.12)$$

Dalla seconda equazione ricavo  $\frac{\partial i_{hD}}{\partial t}$  la quale è pari a:

$$\frac{\partial i_{hD}}{\partial t} = \frac{U_h}{l_{DQ}} \sin \Delta\vartheta - \frac{l_Q}{l_{DQ}} \frac{\partial i_{hQ}}{\partial t} \quad (3.13)$$

che sostituita nella prima equazione, dopo alcuni passaggi mi consente di esplicitare  $\frac{\partial i_{hQ}}{\partial t}$ :

$$\begin{aligned} U_h \cos \Delta\vartheta &= \frac{l_D}{l_{DQ}} U_h \sin \Delta\vartheta - \frac{l_D l_Q}{l_{DQ}} \frac{\partial i_{hQ}}{\partial t} + l_{DQ} \frac{\partial i_{hQ}}{\partial t} \\ U_h \left[ \cos \Delta\vartheta - \frac{l_D}{l_{DQ}} \sin \Delta\vartheta \right] &= \left[ l_{DQ} - \frac{l_D l_Q}{l_{DQ}} \right] \frac{\partial i_{hQ}}{\partial t} = \left[ \frac{l_{DQ}^2 - l_D l_Q}{l_{DQ}} \right] \frac{\partial i_{hQ}}{\partial t} \\ \frac{\partial i_{hQ}}{\partial t} &= U_h \left[ \frac{l_{DQ}}{l_{DQ}^2 - l_D l_Q} \cos \Delta\vartheta - \frac{l_D}{l_{DQ}} \frac{l_{DQ}}{l_{DQ}^2 - l_D l_Q} \sin \Delta\vartheta \right] \\ '' &= U_h \left[ \frac{l_{DQ}}{l_{DQ}^2 - l_D l_Q} \cos \Delta\vartheta - \frac{l_D}{l_{DQ}^2 - l_D l_Q} \sin \Delta\vartheta \right] \end{aligned} \quad (3.14)$$

Dall'integrazione della (3.14) ottengo la corrente  $i_{hQ}$ :

$$i_{hQ} = \frac{U_{hD}}{\omega_h} \sin \omega_h t \left[ \frac{l_{DQ}}{l_{DQ}^2 - l_D l_Q} \cos \Delta\vartheta - \frac{l_D}{l_{DQ}^2 - l_D l_Q} \sin \Delta\vartheta \right]$$

Se invece sostituisco la relazione trovata per  $\frac{\partial i_{hQ}}{\partial t}$  nella seconda equazione della (3.12) dopo alcuni passaggi riesco ad esplicitare:

$$\begin{aligned} \frac{\partial i_{hD}}{\partial t} &= \frac{U_h}{l_{DQ}} \sin \Delta\vartheta - \frac{l_Q}{l_{DQ}} \left\{ U_h \left[ \frac{l_{DQ}}{l_{DQ}^2 - l_D l_Q} \cos \Delta\vartheta - \frac{l_D}{l_{DQ}^2 - l_D l_Q} \sin \Delta\vartheta \right] \right\} \\ '' &= \frac{U_h}{l_{DQ}} \sin \Delta\vartheta - \frac{U_h l_Q}{l_{DQ}^2 - l_D l_Q} \cos \Delta\vartheta + \frac{U_h l_D l_Q}{l_{DQ} (l_{DQ}^2 - l_D l_Q)} \sin \Delta\vartheta \end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
'' &= U_h \left[ \frac{1}{l_{DQ}} + \frac{l_D l_Q}{l_{DQ}(l_{DQ}^2 - l_D l_Q)} \right] \sin \Delta\vartheta - \frac{U_h l_Q}{l_{DQ}^2 - l_D l_Q} \cos \Delta\vartheta \\
'' &= U_h \left[ \frac{l_{DQ}^2 - l_D l_Q + l_D l_Q}{l_{DQ}(l_{DQ}^2 - l_D l_Q)} \right] \sin \Delta\vartheta - \frac{U_h l_Q}{l_{DQ}^2 - l_D l_Q} \cos \Delta\vartheta \\
'' &= U_h \left[ \frac{l_{DQ}}{l_{DQ}^2 - l_D l_Q} \sin \Delta\vartheta - \frac{l_Q}{l_{DQ}^2 - l_D l_Q} \cos \Delta\vartheta \right] \tag{3.15}
\end{aligned}$$

Dall'integrazione della (3.15) ottengo poi la corrente  $i_{hD}$ :

$$i_{hD} = \frac{U_{hD}}{\omega_h} \sin \omega_h t \left[ \frac{l_{DQ}}{l_{DQ}^2 - l_D l_Q} \sin \Delta\vartheta - \frac{l_Q}{l_{DQ}^2 - l_D l_Q} \cos \Delta\vartheta \right]$$

Dalle espressioni delle correnti secondo il sistema di riferimento  $D$ - $Q$  posso risalire a quelle espresse rispetto al sistema di riferimento  $D^x$ - $Q^x$  operando un'opportuna trasformazione:

$$\begin{bmatrix} i_{hD}^x \\ i_{hQ}^x \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \cos \Delta\vartheta & \sin \Delta\vartheta \\ -\sin \Delta\vartheta & \cos \Delta\vartheta \end{bmatrix} \begin{bmatrix} i_{hD} \\ i_{hQ} \end{bmatrix}$$

$$i_{hD}^x = i_{hD} \cos \Delta\vartheta + i_{hQ} \sin \Delta\vartheta$$

$$i_{hQ}^x = -i_{hD} \sin \Delta\vartheta + i_{hQ} \cos \Delta\vartheta$$

quindi:

$$\begin{aligned}
i_{hD}^x &= \frac{U_{hD}}{\omega_h} \sin \omega_h t \left[ \frac{l_{DQ}}{l_{DQ}^2 - l_D l_Q} \sin \Delta\vartheta \cos \Delta\vartheta - \frac{l_Q}{l_{DQ}^2 - l_D l_Q} \cos^2(\Delta\vartheta) \right] + \\
&\quad + \frac{U_{hD}}{\omega_h} \sin \omega_h t \left[ \frac{l_{DQ}}{l_{DQ}^2 - l_D l_Q} \cos \Delta\vartheta - \frac{l_D}{l_{DQ}^2 - l_D l_Q} \sin \Delta\vartheta \right] \\
'' &= \frac{U_{hD}}{\omega_h} \sin \omega_h t \left[ \frac{l_{DQ}}{l_{DQ}^2 - l_D l_Q} \sin(2\Delta\vartheta) + \frac{l_D + l_Q}{2} \frac{1}{l_{DQ}^2 - l_D l_Q} - \frac{l_Q - l_D}{2} \cos \Delta\vartheta \right] \\
'' &= \frac{U_{hD}}{\omega_h} \sin \omega_h t \left[ \frac{l_{DQ}}{l_{DQ}^2 - l_D l_Q} \sin(2\Delta\vartheta) - \frac{l_\Sigma}{l_{DQ}^2 - l_D l_Q} - \frac{l_\Delta}{l_{DQ}^2 - l_D l_Q} \cos \Delta\vartheta \right] \\
'' &= \frac{U_{hD}}{\omega_h (l_{DQ}^2 - l_D l_Q)} \sin \omega_h t [l_{DQ} \sin(2\Delta\vartheta) - l_\Sigma - l_\Delta \cos \Delta\vartheta]
\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
i_{hQ}^x &= \frac{U_{hD}}{\omega_h} \sin \omega_h t \left[ -\frac{l_{DQ}}{l_{DQ}^2 - l_D l_Q} \sin^2 \Delta\vartheta + \frac{l_Q}{l_{DQ}^2 - l_D l_Q} \sin \Delta\vartheta \cos \Delta\vartheta \right] + \\
&\quad + \frac{U_{hD}}{\omega_h} \sin \omega_h t \left[ \frac{l_{DQ}}{l_{DQ}^2 - l_D l_Q} \cos^2(\Delta\vartheta) - \frac{l_D}{l_{DQ}^2 - l_D l_Q} \sin \Delta\vartheta \cos \Delta\vartheta \right] \\
'' &= \frac{U_{hD}}{\omega_h} \sin \omega_h t \left[ -\frac{1}{2} \frac{l_{DQ}}{l_{DQ}^2 - l_D l_Q} + \frac{l_{DQ}}{l_{DQ}^2 - l_D l_Q} \frac{\cos 2\Delta\vartheta}{2} + \frac{1}{2} \frac{l_Q}{l_{DQ}^2 - l_D l_Q} \sin 2\Delta\vartheta + \right. \\
&\quad \left. + \frac{1}{2} \frac{l_{DQ}}{l_{DQ}^2 - l_D l_Q} + \frac{l_{DQ}}{l_{DQ}^2 - l_D l_Q} \frac{\cos 2\Delta\vartheta}{2} - \frac{1}{2} \frac{l_D}{l_{DQ}^2 - l_D l_Q} \sin 2\Delta\vartheta \right] \\
'' &= \frac{U_{hD}}{\omega_h} \sin \omega_h t \frac{1}{l_{DQ}^2 - l_D l_Q} [l_{DQ} \cos(2\Delta\vartheta) + l_D \sin(2\Delta\vartheta)]
\end{aligned}$$

Come si nota dall'espressione di  $i_{hQ}^x$ , questa non si annulla per  $\Delta\vartheta=0$ , si finisce quindi per compiere un certo errore nella stima della posizione rotorica dipendente dal punto di lavoro della macchina.

# Capitolo 4

## 4.1 Interpolazione lineare della funzione flusso

### 4.1.1 Implementazione dell'interpolazione

Per interpolare la funzione che descriveva l'andamento dei flussi non si è utilizzato un polinomio definito su tutto il dominio ma dei polinomi a tratti, indicati con  $N_i$ , associati a ciascun nodo. Questi dentro ogni elemento in cui il dominio viene diviso assumono una certa forma polinomiale. Di seguito si utilizzano delle funzioni polinomiali del primo ordine, si è proceduto quindi a suddividere il dominio in  $m$  elementi triangolari facenti capo agli  $n$  nodi rappresentati dagli  $n$  punti di lavoro del motore sul piano  $i_D$ - $i_Q$  in corrispondenza ai quali si è andati a misurare il valore dei flussi  $\lambda_D(i_D, i_Q)$  e  $\lambda_Q(i_D, i_Q)$  che interessavano la macchina. I vari  $N_i$  assumono in corrispondenza al nodo  $i$  un valore pari al flusso misurato, per poi decrescere all'interno degli elementi d'area come un polinomio del primo ordine fino ad annullarsi, in corrispondenza ai punti del lato di questi che non incide sul nodo.

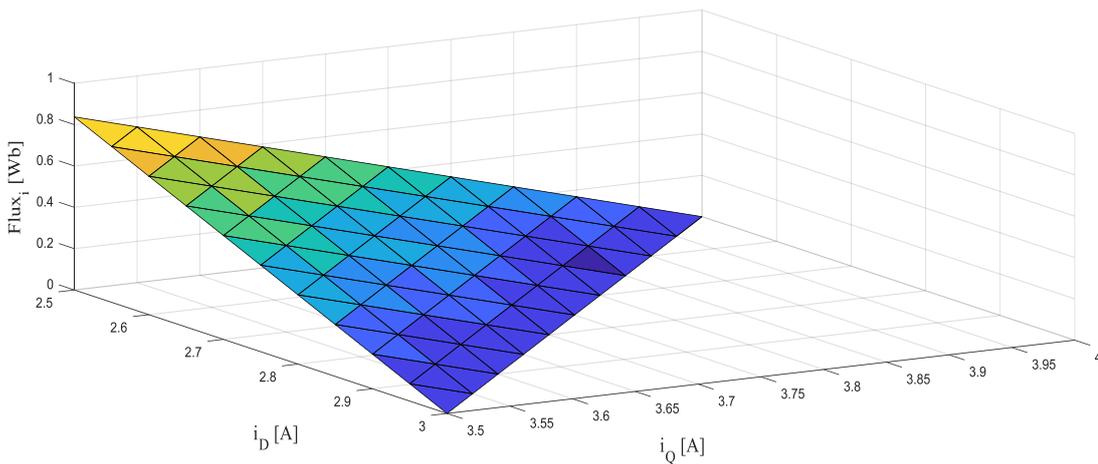


Figura 4.1: Andamento della restrizione del polinomio a tratti associato al nodo  $i$ -esimo individuato dalla coppia di correnti  $i_D=2.5[A]$   $i_Q=3.5[A]$  in un elemento d'area triangolare pertinente al nodo stesso

Nel seguito si indicherà con:

$${}_1N_i^e = a_i^e i_D + b_i^e i_Q + c_i^e$$

la restrizione di  $N_i$  all'interno dell'elemento  $e$ -esimo, il numero in basso a sinistra invece indica il grado della funzione polinomiale usata per l'interpolazione. Queste restrizioni assumeranno quindi all'interno dell'elemento, ipotizzando di stare lavorando con il flusso  $\lambda_D$  (comunque per  $\lambda_Q$  valgono le stesse considerazioni), i seguenti valori:

$$\begin{cases} a_i^e i_{D_i} + b_i^e i_{Q_i} + c_i^e = \lambda_D(i_{D_i}, i_{Q_i}) \\ a_i^e i_{D_j} + b_i^e i_{Q_j} + c_i^e = 0 \\ a_i^e i_{D_k} + b_i^e i_{Q_k} + c_i^e = 0 \end{cases}$$

Dove con i pedici j e k si sono indicate le correnti che individuano i nodi  $N_j$  e  $N_k$ , ovvero gli altri vertici dell'elemento d'area triangolare considerato.

Analoghe equazioni possono essere scritte anche per i nodi  $N_j$  e  $N_k$ :

$$\begin{cases} a_j^e i_{D_i} + b_j^e i_{Q_i} + c_j^e = 0 \\ a_j^e i_{D_j} + b_j^e i_{Q_j} + c_j^e = \lambda_D(i_{D_j}, i_{Q_j}) \\ a_j^e i_{D_k} + b_j^e i_{Q_k} + c_j^e = 0 \end{cases}$$

$$\begin{cases} a_k^e i_{D_i} + b_k^e i_{Q_i} + c_k^e = 0 \\ a_k^e i_{D_j} + b_k^e i_{Q_j} + c_k^e = 0 \\ a_k^e i_{D_k} + b_k^e i_{Q_k} + c_k^e = \lambda_D(i_{D_k}, i_{Q_k}) \end{cases}$$

Essendo nota la coppia di correnti  $i_D$  e  $i_Q$  che individua ciascuno dei nodi che costituiscono i vertici dell'elemento d'area triangolare è possibile risolvere i sistemi formati da queste equazioni ricavando i coefficienti  $a_i, b_i, c_i$ ,  $a_j, b_j, c_j$  e  $a_k, b_k, c_k$ . Utilizzando questi si possono tracciare le restrizioni di  $N_i, N_j$  e  $N_k$  sull'elemento d'area comune ai nodi cui sono associati, ovvero, rifacendosi allo stesso elemento d'area considerato nella precedente figura ho che per  $N_j$  e  $N_k$  l'andamento delle restrizioni è il seguente:

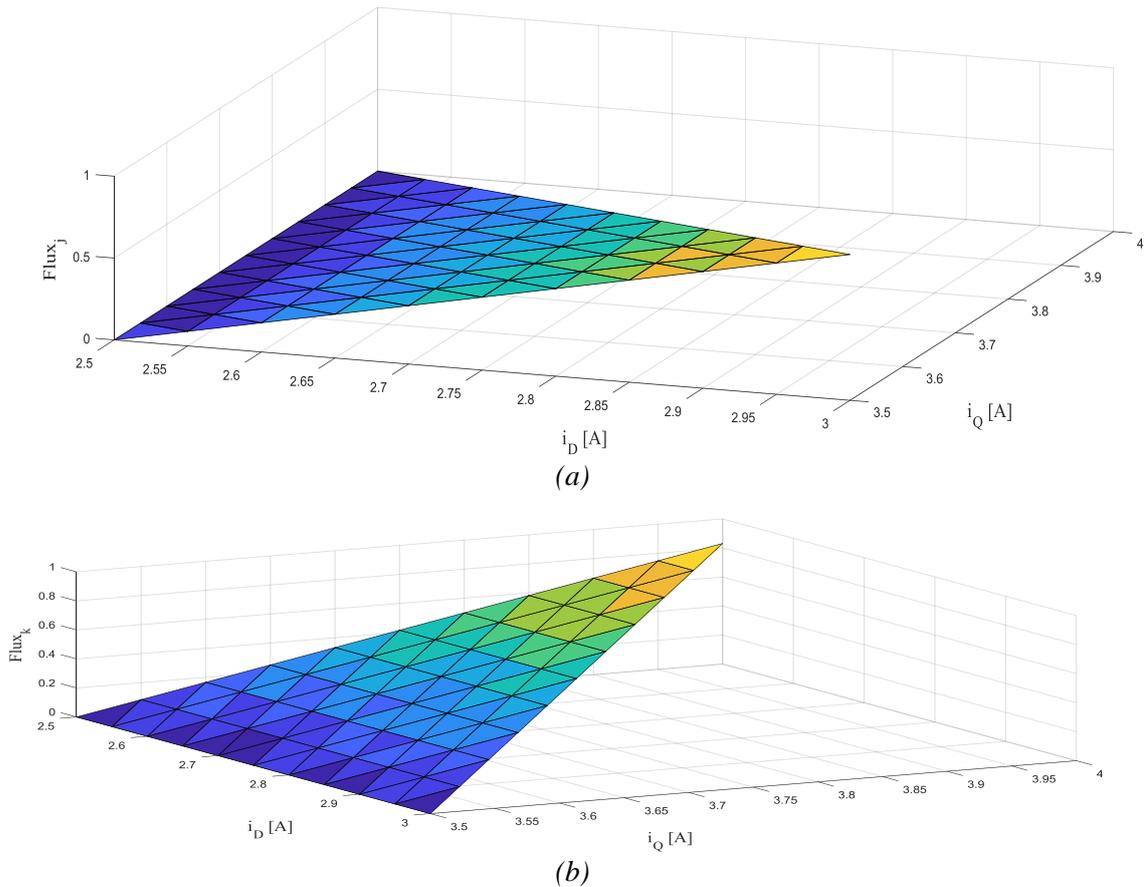


Figura 4.2: Andamento della restrizione del polinomio a tratti associato rispettivamente al nodo j-esimo (a) e k-esimo (b) individuati rispettivamente dalle coppie di correnti  $i_D=3[A]$   $i_Q=3.5[A]$  e  $i_D=2.5[A]$   $i_Q=4[A]$  nello stesso elemento d'area considerato in figura 3.1

L'andamento del flusso all'interno dell'elemento d'area può quindi dato dalla combinazione lineare delle le restrizioni di  $N_i, N_j$  e  $N_k$  nell'elemento stesso, quindi sarà descritto dalla funzione:

$$\lambda_D(i_D, i_Q) = (a_i^e + a_j^e + a_k^e)i_D + (b_i^e + b_j^e + b_k^e)i_Q + (c_i^e + c_j^e + c_k^e)$$

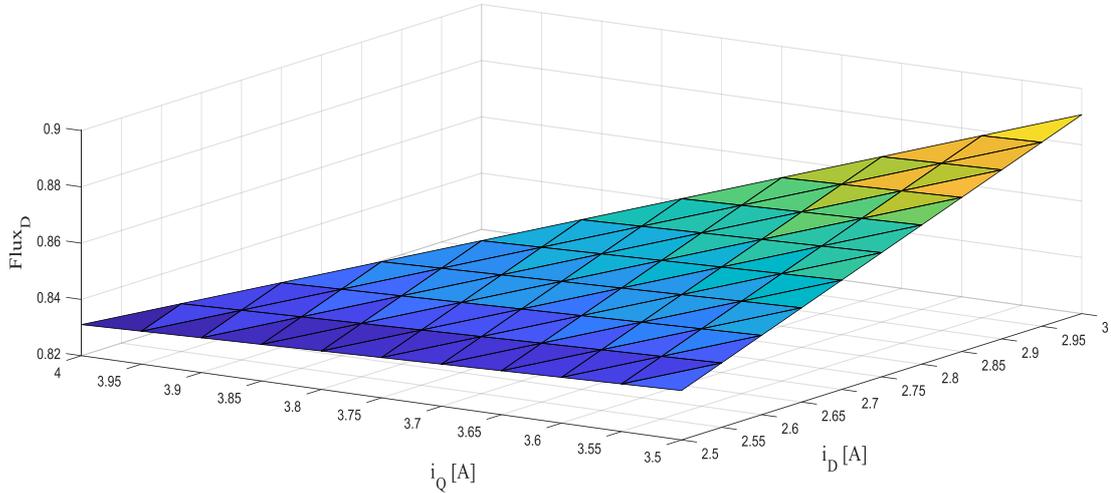


Figura 4.3: Andamento interpolato per il flusso  $\lambda_D$  all'interno dell'elemento d'area considerato in figura 4.1 e 4.2

Questo perché partendo dall'ipotesi di conoscere il valore assunto dal flusso in corrispondenza ai tre nodi di un elemento, cioè  $\lambda_{Di}$ ,  $\lambda_{Dj}$  e  $\lambda_{Dk}$  (considero anche in questo caso a titolo d'esempio  $\lambda_D$ ) ho che la funzione interpolante in corrispondenza ai nodi  $N_i, N_j$  e  $N_k$  dovrà soddisfare le seguenti equazioni:

$$\begin{cases} a^e i_{D_i} + b^e i_{Q_i} + c^e = \lambda_D(i_{D_i}, i_{Q_i}) \\ a^e i_{D_j} + b^e i_{Q_j} + c^e = \lambda_D(i_{D_j}, i_{Q_j}) \\ a^e i_{D_k} + b^e i_{Q_k} + c^e = \lambda_D(i_{D_k}, i_{Q_k}) \end{cases}$$

Utilizzando Cramer per risolvere il sistema ho che:

$$D = \begin{vmatrix} i_{D_i} & i_{Q_i} & 1 \\ i_{D_j} & i_{Q_j} & 1 \\ i_{D_k} & i_{Q_k} & 1 \end{vmatrix} = [i_{D_i}(i_{Q_j} - i_{Q_k}) - i_{Q_i}(i_{D_j} - i_{D_k}) + (i_{D_j}i_{Q_k} - i_{D_k}i_{Q_j})]$$

Nota che l'area dell'm-esimo elemento è pari a:

$$A_m = \frac{1}{2} D$$

$$D_{a^e} = \begin{vmatrix} \lambda_D(i_{D_i}, i_{Q_i}) & i_{Q_i} & 1 \\ \lambda_D(i_{D_j}, i_{Q_j}) & i_{Q_j} & 1 \\ \lambda_D(i_{D_k}, i_{Q_k}) & i_{Q_k} & 1 \end{vmatrix} =$$

$$'' = \lambda_D(i_{D_i}, i_{Q_i})(i_{Q_j} - i_{Q_k}) - i_{Q_i}(\lambda_D(i_{D_j}, i_{Q_j}) - \lambda_D(i_{D_k}, i_{Q_k})) + \lambda_D(i_{D_j}, i_{Q_j})i_{Q_k} - \lambda_D(i_{D_k}, i_{Q_k})i_{Q_j}$$

$$'' = \lambda_D(i_{D_i}, i_{Q_i})(i_{Q_j} - i_{Q_k}) + \lambda_D(i_{D_j}, i_{Q_j})(i_{Q_k} - i_{Q_i}) + \lambda_D(i_{D_k}, i_{Q_k})(i_{Q_i} - i_{Q_j})$$

$$D_{b^e} = \begin{vmatrix} i_{D_i} & \lambda_D(i_{D_i}, i_{Q_i}) & 1 \\ i_{D_j} & \lambda_D(i_{D_j}, i_{Q_j}) & 1 \\ i_{D_k} & \lambda_D(i_{D_k}, i_{Q_k}) & 1 \end{vmatrix} =$$

$$'' = i_{D_i}(\lambda_D(i_{D_j}, i_{Q_j}) - \lambda_D(i_{D_k}, i_{Q_k})) - \lambda_D(i_{D_i}, i_{Q_i})(i_{D_j} - i_{D_k}) + \lambda_D(i_{D_k}, i_{Q_k})i_{D_j} - \lambda_D(i_{D_j}, i_{Q_j})i_{D_k}$$

$$'' = \lambda_D(i_{D_i}, i_{Q_i})(i_{D_k} - i_{D_j}) + \lambda_D(i_{D_j}, i_{Q_j})(i_{D_i} - i_{D_k}) + \lambda_D(i_{D_k}, i_{Q_k})(i_{D_j} - i_{D_i})$$

$$D_{c^e} = \begin{vmatrix} i_{D_i} & i_{Q_i} & \lambda_D(i_{D_i}, i_{Q_i}) \\ i_{D_j} & i_{Q_j} & \lambda_D(i_{D_j}, i_{Q_j}) \\ i_{D_k} & i_{Q_k} & \lambda_D(i_{D_k}, i_{Q_k}) \end{vmatrix} =$$

$$'' = i_{D_i}(i_{Q_j}\lambda_D(i_{D_k}, i_{Q_k}) - i_{Q_k}\lambda_D(i_{D_j}, i_{Q_j})) - i_{Q_i}(i_{D_j}\lambda_D(i_{D_k}, i_{Q_k}) - i_{D_k}\lambda_D(i_{D_j}, i_{Q_j})) +$$

$$+ \lambda_D(i_{D_i}, i_{Q_i})(i_{D_j}i_{Q_k} - i_{D_k}i_{Q_j})$$

$$'' = \lambda_D(i_{D_i}, i_{Q_i})(i_{D_j}i_{Q_k} - i_{D_k}i_{Q_j}) + \lambda_D(i_{D_j}, i_{Q_j})(i_{D_k}i_{Q_i} - i_{D_i}i_{Q_k}) + \lambda_D(i_{D_k}, i_{Q_k})(i_{D_i}i_{Q_j} - i_{D_j}i_{Q_i})$$

da cui ricavo:

$$a^e = \frac{D_{a^e}}{D} = \frac{\lambda_D(i_{D_i}, i_{Q_i})(i_{Q_j} - i_{Q_k}) + \lambda_D(i_{D_j}, i_{Q_j})(i_{Q_k} - i_{Q_i}) + \lambda_D(i_{D_k}, i_{Q_k})(i_{Q_i} - i_{Q_j})}{2A_m}$$

$$b^e = \frac{D_{b^e}}{D} = \frac{\lambda_D(i_{D_i}, i_{Q_i})(i_{D_k} - i_{D_j}) + \lambda_D(i_{D_j}, i_{Q_j})(i_{D_i} - i_{D_k}) + \lambda_D(i_{D_k}, i_{Q_k})(i_{D_j} - i_{D_i})}{2A_m}$$

$$c^e = \frac{D_{c^e}}{D} = \frac{\lambda_D(i_{D_i}, i_{Q_i})(i_{D_j}i_{Q_k} - i_{D_k}i_{Q_j}) + \lambda_D(i_{D_j}, i_{Q_j})(i_{D_k}i_{Q_i} - i_{D_i}i_{Q_k}) + \lambda_D(i_{D_k}, i_{Q_k})(i_{D_i}i_{Q_j} - i_{D_j}i_{Q_i})}{2A_m}$$

ponendo:

$$u_i = i_{Q_j} - i_{Q_k}$$

$$v_i = i_{D_k} - i_{D_j}$$

$$z_i = i_{D_j}i_{Q_k} - i_{D_k}i_{Q_j}$$

$$u_j = i_{Q_k} - i_{Q_i}$$

$$v_j = i_{D_i} - i_{D_k}$$

$$z_j = i_{D_k}i_{Q_i} - i_{D_i}i_{Q_k}$$

$$u_k = i_{Q_i} - i_{Q_j}$$

$$v_k = i_{D_j} - i_{D_i}$$

$$z_k = i_{D_i}i_{Q_j} - i_{D_j}i_{Q_i}$$

ottengo:

$$a^e = \frac{\lambda_D(i_{D_i}, i_{Q_i})u_i + \lambda_D(i_{D_j}, i_{Q_j})u_j + \lambda_D(i_{D_k}, i_{Q_k})u_k}{2A_m}$$

$$b^e = \frac{\lambda_D(i_{D_i}, i_{Q_i})v_i + \lambda_D(i_{D_j}, i_{Q_j})v_j + \lambda_D(i_{D_k}, i_{Q_k})v_k}{2A_m}$$

$$c^e = \frac{\lambda_D(i_{D_i}, i_{Q_i})z_i + \lambda_D(i_{D_j}, i_{Q_j})z_j + \lambda_D(i_{D_k}, i_{Q_k})z_k}{2A_m}$$

L'andamento del flusso all'interno dell'elemento finito triangolare m-esimo è quindi descritto da:

$$\begin{aligned} \lambda_D(i_D, i_Q) &= \left( \frac{1}{2A_m} \sum_{s=1}^3 u_s \lambda_D(i_{D_s}, i_{Q_s}) \right) \cdot i_D + \left( \frac{1}{2A_m} \sum_{s=1}^3 v_s \lambda_D(i_{D_s}, i_{Q_s}) \right) \cdot i_Q + \left( \frac{1}{2A_m} \sum_{s=1}^3 z_s \lambda_D(i_{D_s}, i_{Q_s}) \right) = \\ &= \sum_{s=1}^3 \frac{(u_s i_D + v_s i_Q + z_s)}{2A_m} \cdot \lambda_D(i_{D_s}, i_{Q_s}) \\ &= \sum_{s=1}^3 \frac{r_s(i_D, i_Q)}{2A_m} \cdot \lambda_D(i_{D_s}, i_{Q_s}) \end{aligned}$$

Dove le  $r_s(i_D, i_Q)$  per  $i=1,2,3$  sono le restrizioni di  $N_i, N_j$  e  $N_k$  sull'elemento considerato.

## 4.1.2 Script Matlab usati

```

%***** INIZIALIZZAZIONE*****
clear
clc

%***** CARICAMENTO MISURE E SETTAGGIO GRANDEZZE*****
load('cross_saturation_D-0Q_05_10Q_-0D_05_10D.mat');
load('cross_saturation_Q-0Q_05_10Q_-0D_05_10D.mat');

[r_max,c_max] = size(cross_saturation_D);
iD_wp = cross_saturation_D(1,2:c_max);
iQ_wp = cross_saturation_D(2:r_max,1);
flux_D = cross_saturation_D(2:r_max,2:c_max);
flux_Q = cross_saturation_Q(2:r_max,2:c_max);

%***** INPUT *****
iD_test = 4.7;
iQ_test = 10;

%***** SELEZIONE TRIANGOLO *****

% TRONCAMENTO
iD_ratio = iD_test/0.5;
iQ_ratio = iQ_test/0.5;
iD_pnt = fix(iD_ratio);
iQ_pnt = fix(iQ_ratio);

```

```

% VERTICI
%   v2O-----Ov1
%   |         |
%   |         |
%   v3O-----Ov4

if iD_test==10
    if iQ_test==10
        v1(1,1) = iD_wp(iD_pnt+1);
        v1(1,2) = iQ_wp(iQ_pnt);
        v2(1,1) = iD_wp(iD_pnt);
        v2(1,2) = iQ_wp(iQ_pnt);
        v3(1,1) = iD_wp(iD_pnt);
        v3(1,2) = iQ_wp(iQ_pnt+1);
        v4(1,1) = iD_wp(iD_pnt+1);
        v4(1,2) = iQ_wp(iQ_pnt+1);

    else

        v1(1,1) = iD_wp(iD_pnt+1);
        v1(1,2) = iQ_wp(iQ_pnt+1);
        v2(1,1) = iD_wp(iD_pnt);
        v2(1,2) = iQ_wp(iQ_pnt+1);
        v3(1,1) = iD_wp(iD_pnt);
        v3(1,2) = iQ_wp(iQ_pnt+2);
        v4(1,1) = iD_wp(iD_pnt+1);
        v4(1,2) = iQ_wp(iQ_pnt+2);

    end

else

    if iQ_test==10

        v1(1,1) = iD_wp(iD_pnt+2);
        v1(1,2) = iQ_wp(iQ_pnt);
        v2(1,1) = iD_wp(iD_pnt+1);
        v2(1,2) = iQ_wp(iQ_pnt);
        v3(1,1) = iD_wp(iD_pnt+1);
        v3(1,2) = iQ_wp(iQ_pnt+1);
        v4(1,1) = iD_wp(iD_pnt+2);
        v4(1,2) = iQ_wp(iQ_pnt+1);

    else

        v1(1,1) = iD_wp(iD_pnt+2);
        v1(1,2) = iQ_wp(iQ_pnt+1);
        v2(1,1) = iD_wp(iD_pnt+1);
        v2(1,2) = iQ_wp(iQ_pnt+1);
        v3(1,1) = iD_wp(iD_pnt+1);
        v3(1,2) = iQ_wp(iQ_pnt+2);
        v4(1,1) = iD_wp(iD_pnt+2);
        v4(1,2) = iQ_wp(iQ_pnt+2);

    end

end
end

```

```

% IDENTIFICAZIONE VERTICI TRIANGOLO

dist1=sqrt((iD_test-v2(1,1))^2+(iQ_test-v2(1,2))^2);
dist2=sqrt((iD_test-v4(1,1))^2+(iQ_test-v4(1,2))^2);

if dist1 <= dist2

    V=[v1;v2;v3];
    for i=1:1:3
        iD_pnt=(V(i,1)/0.5)+1;
        iQ_pnt=(V(i,2)/0.5)+1;
        flux_D_v(i)=flux_D(iQ_pnt,iD_pnt);
        flux_Q_v(i)=flux_Q(iQ_pnt,iD_pnt);
    end

else

    V=[v1;v3;v4];
    for i=1:1:3
        iD_pnt=(V(i,1)/0.5)+1;
        iQ_pnt=(V(i,2)/0.5)+1;
        flux_D_v(i)=flux_D(iQ_pnt,iD_pnt);
        flux_Q_v(i)=flux_Q(iQ_pnt,iD_pnt);
    end

end

% COEFFICIENTI DELLE FUNZIONI POLINOMIALI A TRATTI ASSOCIATE AI NODI*****

% FLUSSO D

xyz=zeros(3);
fD=zeros(3,1);
abc_D=zeros(1,3);
ABC_D=zeros(3);

for i=1:1:3

    fD(i)=flux_D_v(i);
    for j=1:1:3
        xyz(j,1)=V(j,1);
        xyz(j,2)=V(j,2);
        xyz(j,3)=1;
    end
    abc_D=xyz\fD;
    ABC_D(i,1)=abc_D(1);
    ABC_D(i,2)=abc_D(2);
    ABC_D(i,3)=abc_D(3);
    fD=zeros(3,1);

end

flux_D_wp=sum(ABC_D*[iD_test;iQ_test;1]);

```

```

% FLUSSO Q
xyz=zeros(3);
fQ=zeros(3,1);
abc_Q=zeros(1,3);
ABC_Q=zeros(3);

for i=1:1:3

    fQ(i)=flux_Q_v(i);
    for j=1:1:3
        xyz(j,1)=V(j,1);
        xyz(j,2)=V(j,2);
        xyz(j,3)=1;
    end
    abc_Q=xyz\fQ;
    ABC_Q(i,1)=abc_Q(1);
    ABC_Q(i,2)=abc_Q(2);
    ABC_Q(i,3)=abc_Q(3);
    fQ=zeros(3,1);

end

flux_Q_wp=sum(ABC_Q*[iD_test;iQ_test;1]);

```

### 4.1.3 Calcolo $\varepsilon$

Con lo script precedente presentato inserito nelle Matlab function rappresentate in figura 3.4 si sono stimate, in funzione dei flussi, le mappe dei valori di  $i_D$  e  $i_Q$  cui si porta a lavorare il motore:

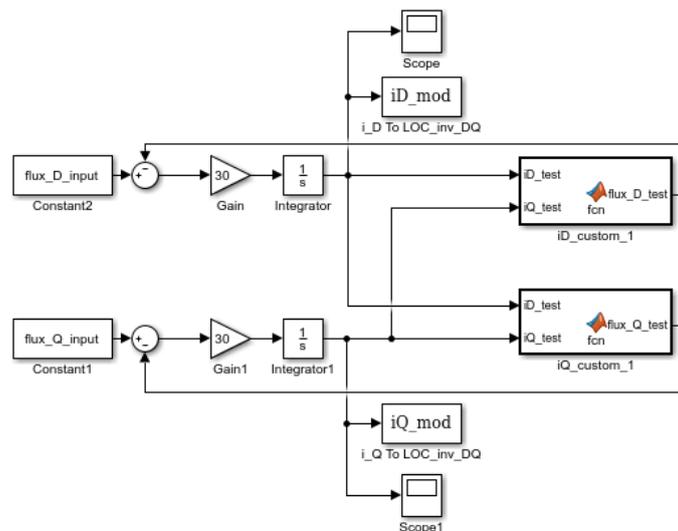


Figura 4.4 Modello simulink utilizzato per ricavare i valori di  $i_D$  e  $i_Q$  necessari per produrre i valori di flusso  $\lambda_D$  e  $\lambda_Q$  forniti in ingresso

Dalle mappe di corrente così ottenute, utilizzando uno script analogo al precedente si è modellizzato il comportamento del motore, riferendosi ovviamente alle equazioni di bilancio delle tensioni espresse rispetto al sistema di riferimento D-Q:

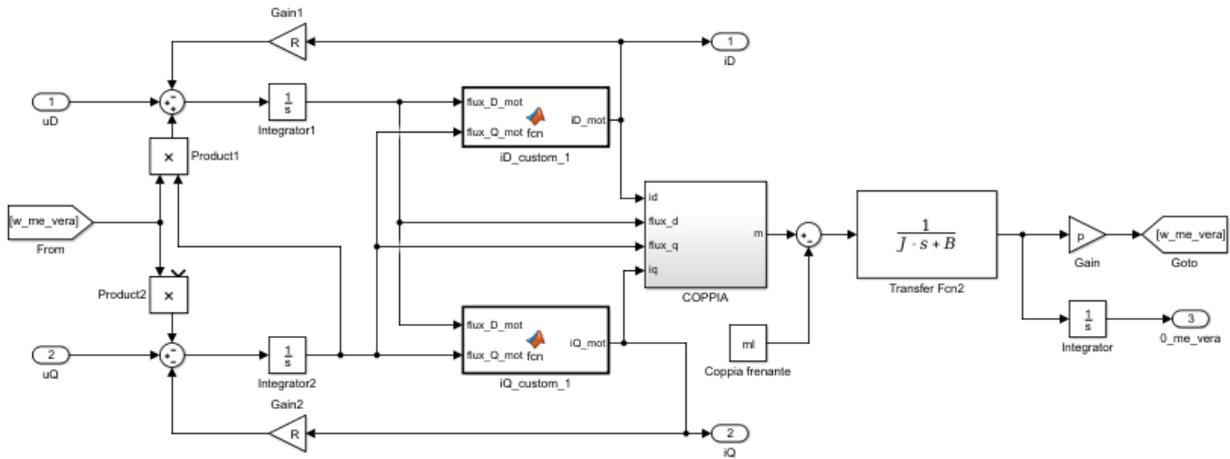


Figura 4.5 Modellizzazione del motore a riluttanza su cui sono state fatte eseguite le misure

Inserito quest'ultimo all'interno del modello dell'azionamento si è provveduto a valutare l'errore di stima della posizione rotorica per diversi punti di lavoro del motore a rotore bloccato e allineato con il sistema di riferimento D-Q confrontando successivamente questi valori con quelli misurati direttamente sul motore. Riporto di seguito i valori trovati. Posso notare come la variazione tendenziale degli errori stimati sia aderente a quella evidenziata dalle misure anche se i valori trovati possono anche essere sensibilmente diversi.

		$i_D [A]$						
		1	2	3	4	5	6	7
$i_Q [A]$	1	-2.4°	-6°	-14°	-58°	-75.5°	-81.5°	-83°
	2	-2.8°	-6.2°	-15°	-32°	-58°	-70°	-75.5°
	3	-2.8°	-8°	-12.4°	-23.5°	-49.5°	-65.5°	-72.5°
	4	-3.8°	-9°	-13.9°	-20°	-36.3°	-54°	-64°
	5	-3.4°	-9.5°	-14.2°	-21°	-38.5°	-53.8°	-64°
	6	-3.5°	-7.8°	-14.1°	-18.8°	-32°	-47°	-58°
	7	-4.1°	-8.5°	-14.8°	-29.8°	-34°	-45°	-57°

Tabella 4.1: Errore di stima della posizione del rotore misurato con l'impiego di LEM esterni

		$i_D [A]$						
		1	2	3	4	5	6	7
$i_Q [A]$	1	-1.1°	-5.5°	-13.3°	-47.9°	-74.1°	-73.9°	-80.9°
	2	-1.2°	-4.7°	-11.7°	-25.8°	-53.6°	-63.1°	-68.5°
	3	-0.8°	-4.9°	-10.4°	-20.1°	-35.3°	-58.9°	-69.1°
	4	-1.3°	-4.8°	-9.7°	-19.8°	-33.6°	-48.9°	-62.4°
	5	-1.4°	-5.8°	-13.5°	-18.7°	-30.8°	-40.6°	-61.6°
	6	-1.5°	-5.4°	-9.3°	-18.4°	-29.8°	-41°	-60°
	7	-1.2°	-5°	-10.5°	-17.6°	-25°	-43.4°	-46.7°

*Tabella 4.2: Errore di stima della posizione del rotore ricavato dalla simulazione che sfrutta una funzione interpolante lineare*

## 4.2 Interpolazione della funzione flusso usando un polinomio di secondo grado

### 4.2.1 Implementazione dell'interpolazione

Si è provato poi ad aumentare l'ordine della funzione interpolante per migliorare la qualità dell'interpolazione. Quando si utilizza una funzione interpolante del primo ordine, come abbiamo visto, i nodi sono i punti di estremo dell'elemento d'area. Quando invece si usa una polinomiale del secondo ordine oltre ai punti di estremo dell'elemento sono necessari degli ulteriori punti, che chiamiamo nodi di metà lato, altrimenti non è possibile risolvere il sistema che porta alla determinazione dei coefficienti. Nel nostro caso avendo a disposizione la stessa quantità di dati utilizzati per ricavare la funzione interpolante lineare, dovrò aumentare l'area dell'elemento in cui divido il dominio, così facendo alcuni dei punti che prima costituivano dei nodi a se stanti diventano dei nodi di metà lato permettendomi così di implementare l'interpolazione.

Nel seguito la restrizione di  $N_i$  all'interno dell'elemento e-esimo verrà indicata con:

$${}_2N_i^e = a_i^e i_D^2 + b_i^e i_Q^2 + c_i^e i_D i_Q + d_i^e i_D + e_i^e i_Q + f_i^e$$

Come nel caso precedente ciascuna restrizione dei polinomi a tratti associati ai vari nodi e nodi di metà lato che incidono sull'elemento assumerà valore pari al flusso associato alla coppia di correnti  $i_D$  e  $i_Q$  che identifica il nodo e poi degraderà fino ad annullarsi spostandosi verso i lati che non incidono sul nodo o nodo di metà lato considerato, la combinazione lineare delle restrizioni mi fornisce poi una funzione che interpola l'andamento del flusso nell'elemento considerato, riporto un esempio dell'andamento delle restrizioni e della loro combinazione lineare di seguito:

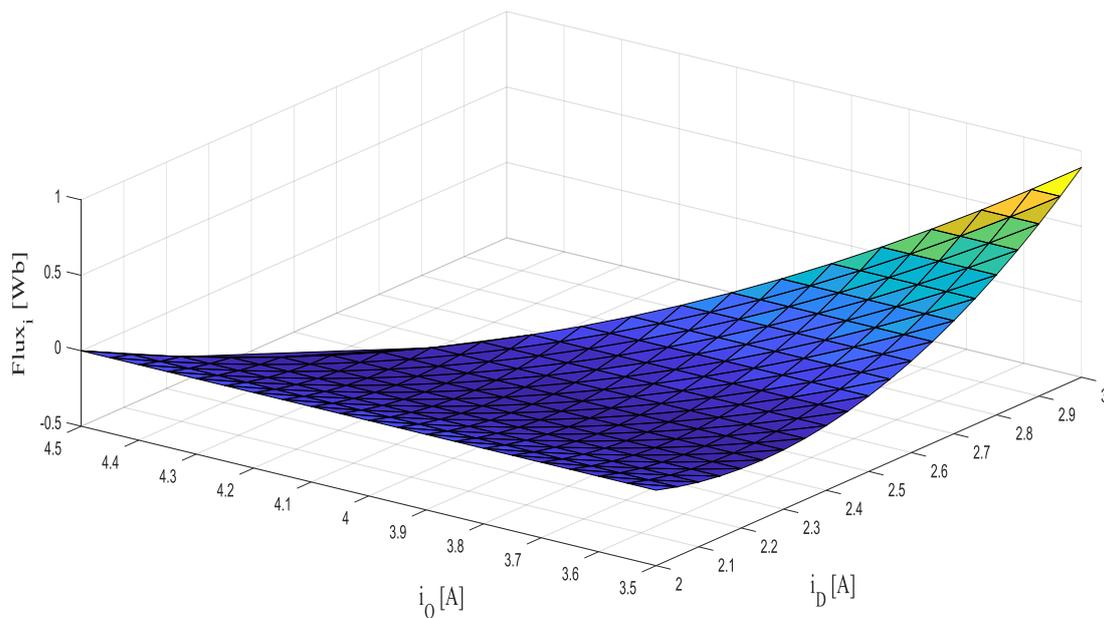


Figura 4.6: Andamento della restrizione del polinomio a tratti associato al nodo  $i$ -esimo individuato dalla coppia di correnti  $i_D=3[A]$   $i_Q=3.5[A]$  in un elemento d'area triangolare pertinente al nodo stesso

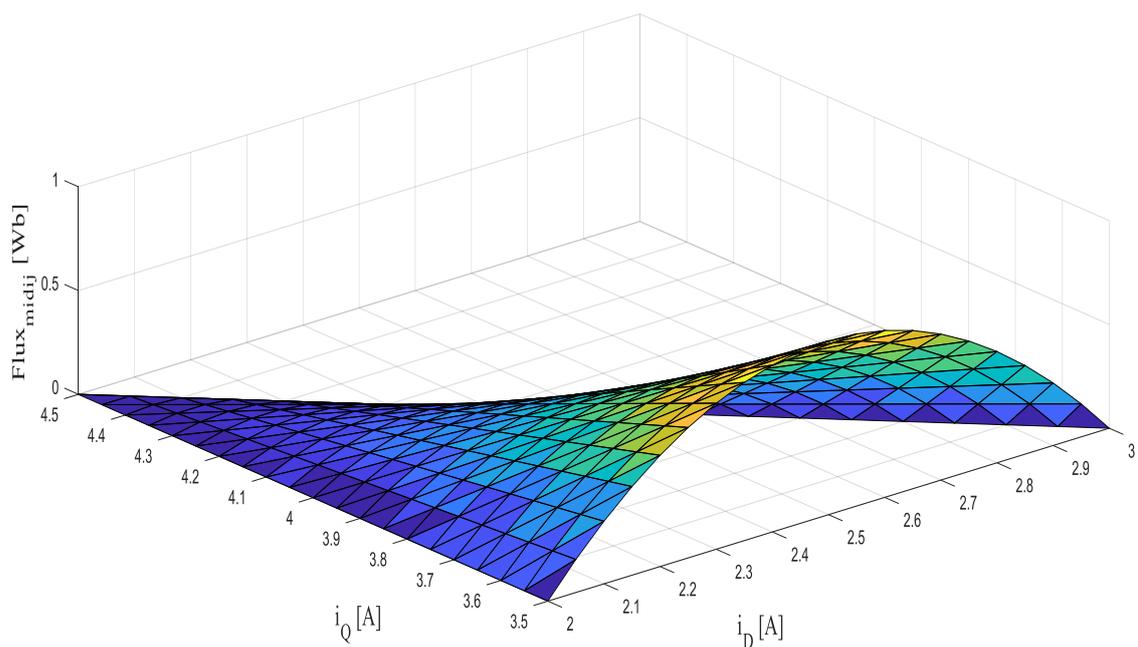


Figura 4.7: Andamento della restrizione del polinomio a tratti associato rispettivamente al nodo di metà lato  $i$ - $j$  individuato dalla coppia di correnti  $i_D=2.5$ [A]  $i_Q=3.5$ [A]

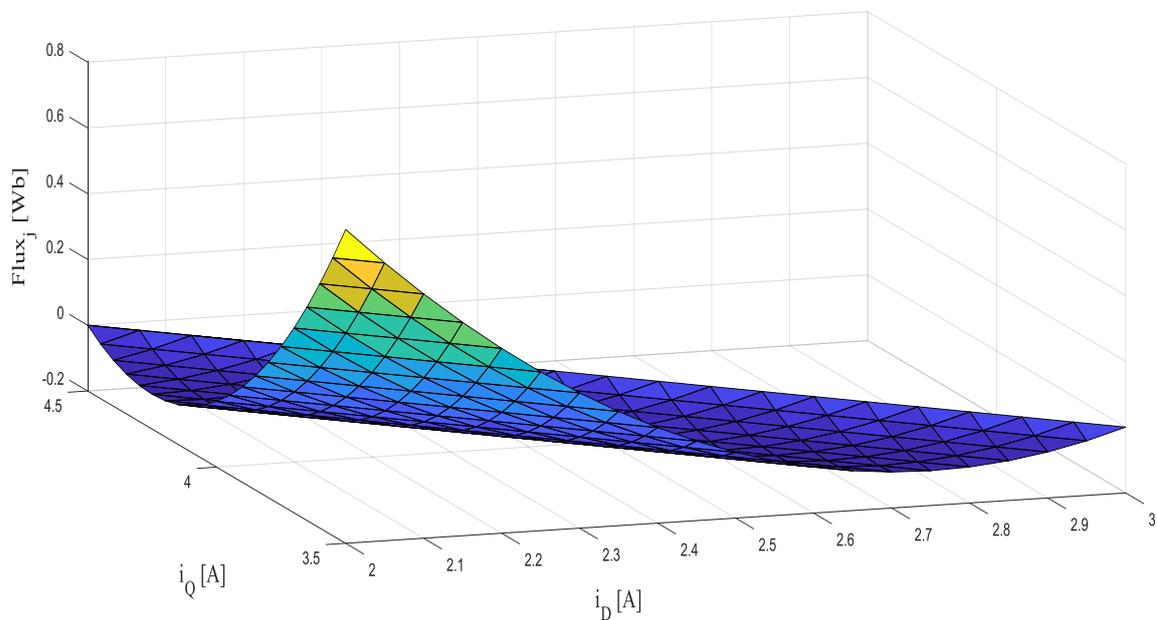


Figura 4.8: Andamento della restrizione del polinomio a tratti associato rispettivamente al nodo  $j$  individuato dalla coppia di correnti  $i_D=2$ [A]  $i_Q=3.5$ [A]

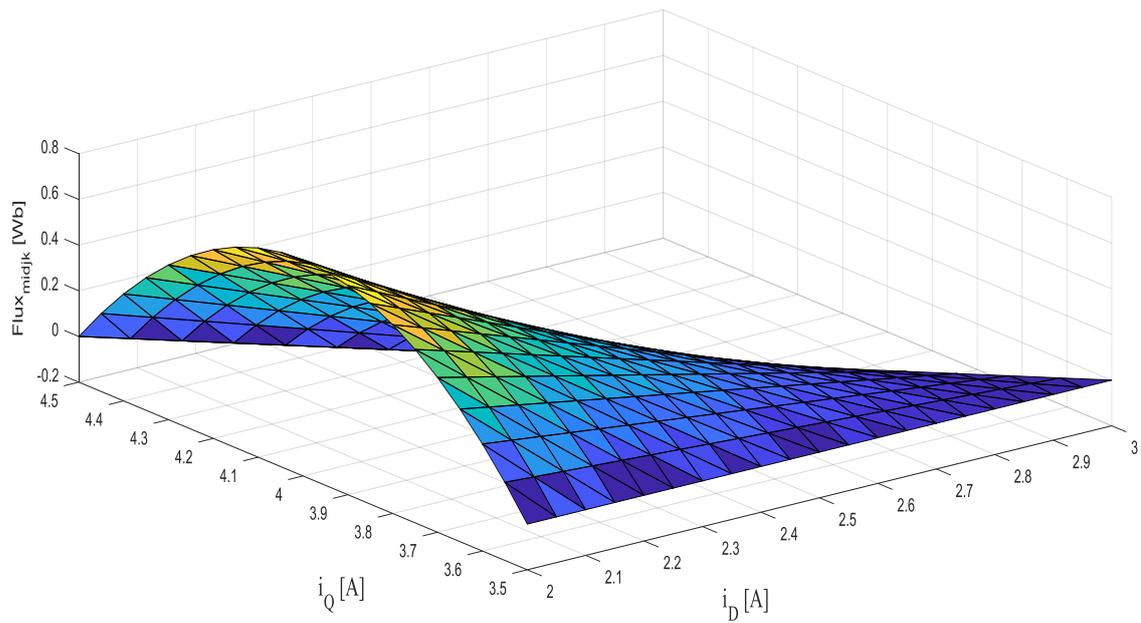


Figura 4.9: Andamento della restrizione del polinomio a tratti associato rispettivamente al nodo di metà lato  $j-k$  individuato dalla coppia di correnti  $i_D=2[A]$   $i_Q=4[A]$

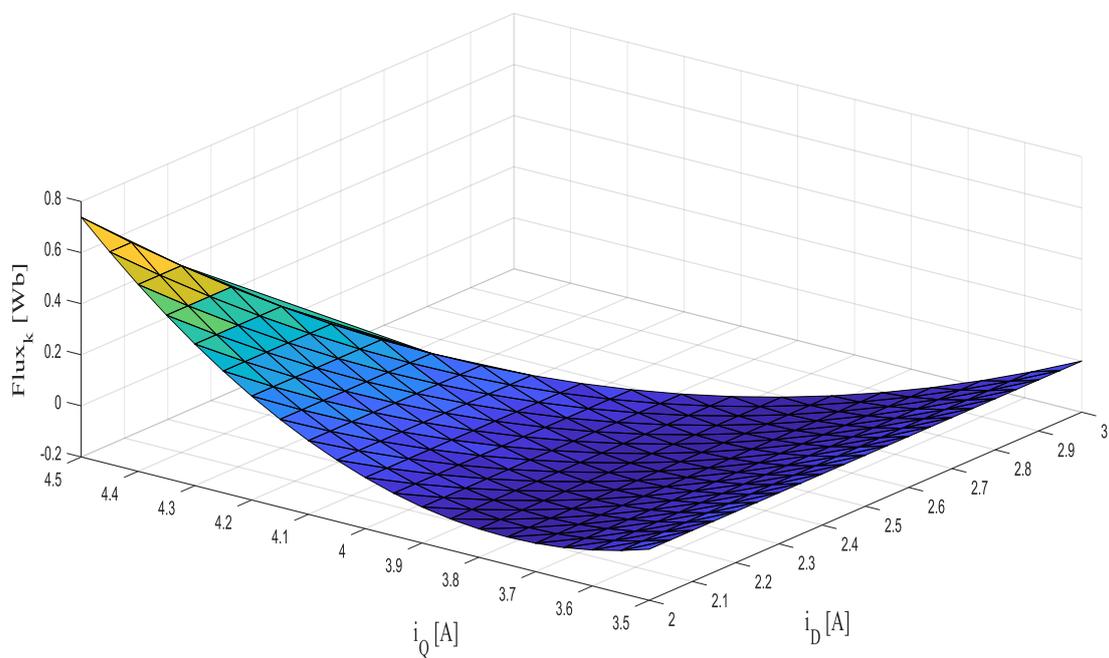


Figura 4.10: Andamento della restrizione del polinomio a tratti associato rispettivamente al nodo  $k$  individuato dalla coppia di correnti  $i_D=2[A]$   $i_Q=4.5[A]$

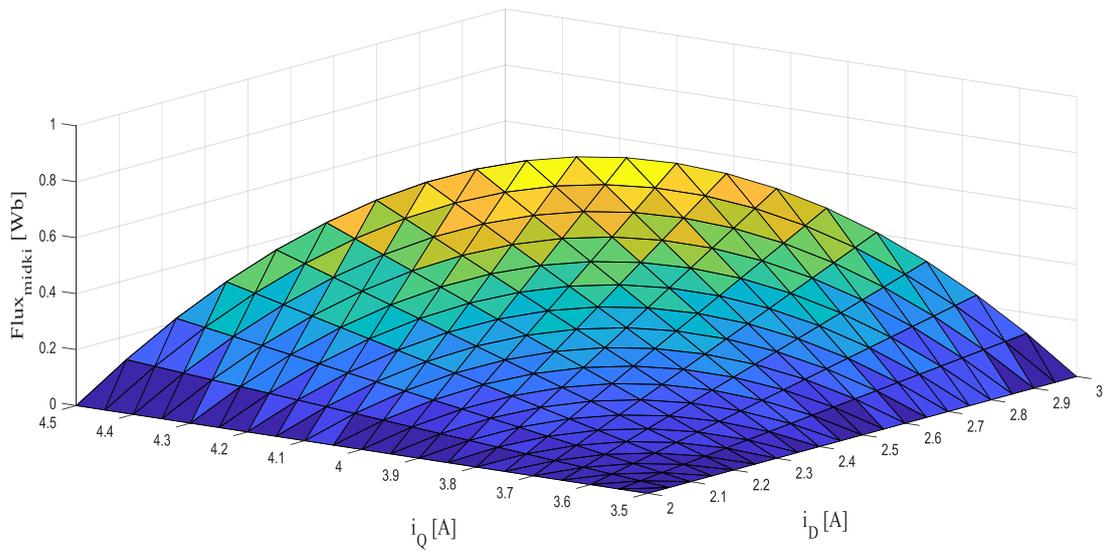


Figura 4.11: Andamento della restrizione del polinomio a tratti associato rispettivamente al nodo  $k$  individuato dalla coppia di correnti  $i_D=2.5[A]$   $i_Q=4[A]$

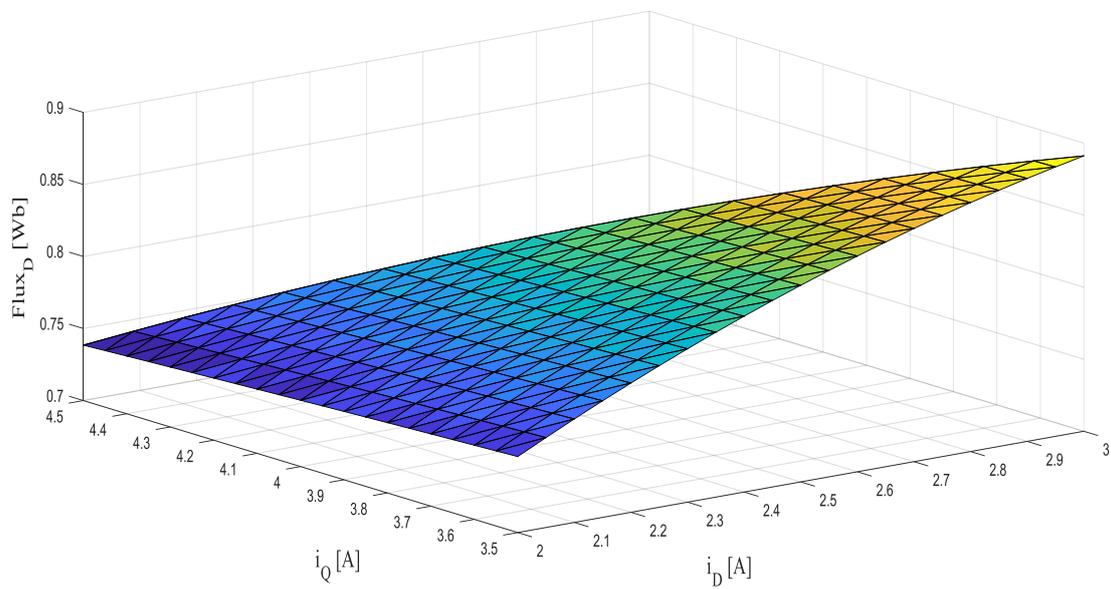


Figura 4.12: Combinazione lineare delle restrizioni dei polinomi a tratti associati ai nodi che individuano l'elemento d'area considerato nell'elemento stesso

## 4.2.2 Script Matlab usati

```
%***** INIZIALIZZAZIONE*****
clear
clc

%***** CARICAMENTO MISURE E SETTAGGIO GRANDEZZE*****
load('cross_saturation_D-0Q_05_10Q_-0D_05_10D.mat');
load('cross_saturation_Q-0Q_05_10Q_-0D_05_10D.mat');

[r_max,c_max] = size(cross_saturation_D);

iD_wp = cross_saturation_D(1,2:c_max);
iQ_wp = cross_saturation_D(2:r_max,1);
flux_D = cross_saturation_D(2:r_max,2:c_max);
flux_Q = cross_saturation_Q(2:r_max,2:c_max);

%***** INPUT *****
iD_test = 0.25;
iQ_test = 0.25;

%***** SELEZIONE TRIANGOLO*****

% TRONCAMENTO

iD_pnt = fix(iD_test);
iQ_pnt = fix(iQ_test);

% VERTICI
%
%          v12
%    v20----o----Ov1
%          |          |
%    v23 o      ov31 o v41
%          |          |
%    v30----o----Ov4
%          v43

if iD_test==10

    if iQ_test==10

        v1(1,1) = iD_wp(2*(iD_pnt)+1);
        v1(1,2) = iQ_wp(2*(iQ_pnt)-1);
        v12(1,1)= iD_wp(2*(iD_pnt));
        v12(1,2)= iQ_wp(2*(iQ_pnt)-1);
        v2(1,1) = iD_wp(2*(iD_pnt)-1);
        v2(1,2) = iQ_wp(2*(iQ_pnt)-1);
        v23(1,1)= iD_wp(2*(iD_pnt)-1);
        v23(1,2)= iQ_wp(2*(iQ_pnt));
        v3(1,1) = iD_wp(2*(iD_pnt)-1);
        v3(1,2) = iQ_wp(2*(iQ_pnt)+1);
        v34(1,1)= iD_wp(2*(iD_pnt));
        v34(1,2)= iQ_wp(2*(iQ_pnt)+1);
        v4(1,1) = iD_wp(2*(iD_pnt)+1);
```

```

v4(1,2) = iQ_wp(2*(iQ_pnt)+1);
v41(1,1)= iD_wp(2*(iD_pnt)+1);
v41(1,2)= iQ_wp(2*(iQ_pnt));
v31(1,1)= iD_wp(2*(iD_pnt));
v31(1,2)= iQ_wp(2*(iQ_pnt));

```

else

```

v1(1,1) = iD_wp(2*(iD_pnt)+1);
v1(1,2) = iQ_wp(2*(iQ_pnt)+1);
v12(1,1)= iD_wp(2*(iD_pnt));
v12(1,2)= iQ_wp(2*(iQ_pnt)+1);
v2(1,1) = iD_wp(2*(iD_pnt)-1);
v2(1,2) = iQ_wp(2*(iQ_pnt)+1);
v23(1,1)= iD_wp(2*(iD_pnt)-1);
v23(1,2)= iQ_wp(2*(iQ_pnt)+2);
v3(1,1) = iD_wp(2*(iD_pnt)-1);
v3(1,2) = iQ_wp(2*(iQ_pnt)+3);
v34(1,1)= iD_wp(2*(iD_pnt));
v34(1,2)= iQ_wp(2*(iQ_pnt)+3);
v4(1,1) = iD_wp(2*(iD_pnt)+1);
v4(1,2) = iQ_wp(2*(iQ_pnt)+3);
v41(1,1)= iD_wp(2*(iD_pnt)+1);
v41(1,2)= iQ_wp(2*(iQ_pnt)+2);
v31(1,1)= iD_wp(2*(iD_pnt));
v31(1,2)= iQ_wp(2*(iQ_pnt)+2);

```

end

else

```

if iQ_test==10

```

```

v1(1,1) = iD_wp(2*(iD_pnt)+3);
v1(1,2) = iQ_wp(2*(iQ_pnt)-1);
v12(1,1)= iD_wp(2*(iD_pnt)+2);
v12(1,2)= iQ_wp(2*(iQ_pnt)-1);
v2(1,1) = iD_wp(2*(iD_pnt)+1);
v2(1,2) = iQ_wp(2*(iQ_pnt)-1);
v23(1,1)= iD_wp(2*(iD_pnt)+1);
v23(1,2)= iQ_wp(2*(iQ_pnt));
v3(1,1) = iD_wp(2*(iD_pnt)+1);
v3(1,2) = iQ_wp(2*(iQ_pnt)+1);
v34(1,1)= iD_wp(2*(iD_pnt)+2);
v34(1,2)= iQ_wp(2*(iQ_pnt)+1);
v4(1,1) = iD_wp(2*(iD_pnt)+3);
v4(1,2) = iQ_wp(2*(iQ_pnt)+1);
v41(1,1)= iD_wp(2*(iD_pnt)+3);
v41(1,2)= iQ_wp(2*(iQ_pnt));
v31(1,1)= iD_wp(2*(iD_pnt)+2);
v31(1,2)= iQ_wp(2*(iQ_pnt));

```

else

```

v1(1,1) = iD_wp(2*(iD_pnt)+3);

```

```

v1(1,2) = iQ_wp(2*(iQ_pnt)+1);
v12(1,1)= iD_wp(2*(iD_pnt)+2);
v12(1,2)= iQ_wp(2*(iQ_pnt)+1);
v2(1,1) = iD_wp(2*(iD_pnt)+1);
v2(1,2) = iQ_wp(2*(iQ_pnt)+1);
v23(1,1)= iD_wp(2*(iD_pnt)+1);
v23(1,2)= iQ_wp(2*(iQ_pnt)+2);
v3(1,1) = iD_wp(2*(iD_pnt)+1);
v3(1,2) = iQ_wp(2*(iQ_pnt)+3);
v34(1,1)= iD_wp(2*(iD_pnt)+2);
v34(1,2)= iQ_wp(2*(iQ_pnt)+3);
v4(1,1) = iD_wp(2*(iD_pnt)+3);
v4(1,2) = iQ_wp(2*(iQ_pnt)+3);
v41(1,1)= iD_wp(2*(iD_pnt)+3);
v41(1,2)= iQ_wp(2*(iQ_pnt)+2);
v31(1,1)= iD_wp(2*(iD_pnt)+2);
v31(1,2)= iQ_wp(2*(iQ_pnt)+2);

```

end

end

% IDENTIFICAZIONE VERTICI TRIANGOLO

```

dist1=sqrt((iD_test-v2(1,1))^2+(iQ_test-v2(1,2))^2);
dist2=sqrt((iD_test-v4(1,1))^2+(iQ_test-v4(1,2))^2);

```

if dist1 <= dist2

```

V=[v1;v12;v2;v23;v3;v31];
for i=1:1:6
    iD_pnt=(V(i,1)/0.5)+1;
    iQ_pnt=(V(i,2)/0.5)+1;
    flux_D_v(i)=flux_D(iQ_pnt,iD_pnt);
    flux_Q_v(i)=flux_Q(iQ_pnt,iD_pnt);
end

```

else

```

V=[v1;v31;v3;v34;v4;v41];
for i=1:1:6
    iD_pnt=(V(i,1)/0.5)+1;
    iQ_pnt=(V(i,2)/0.5)+1;
    flux_D_v(i)=flux_D(iQ_pnt,iD_pnt);
    flux_Q_v(i)=flux_Q(iQ_pnt,iD_pnt);
end

```

end

```

% COEFFICIENTI DELLE FUNZIONI POLINOMIALI A TRATTI ASSOCIATE AI NODI
% FLUSSO D
xyz=zeros(6);
fD=zeros(6,1);
abc_D=zeros(1,6);
ABC_D=zeros(6);
for i=1:1:6
    fD(i)=flux_D_v(i);
    for j=1:1:6
        xyz(j,1)=V(j,1)^2;
        xyz(j,2)=V(j,2)^2;
        xyz(j,3)=V(j,1)*V(j,2);
        xyz(j,4)=V(j,1);
        xyz(j,5)=V(j,2);
        xyz(j,6)=1;
    end
    abc_D=xyz\fD;
    ABC_D(i,1)=abc_D(1);
    ABC_D(i,2)=abc_D(2);
    ABC_D(i,3)=abc_D(3);
    ABC_D(i,4)=abc_D(4);
    ABC_D(i,5)=abc_D(5);
    ABC_D(i,6)=abc_D(6);
    fD=zeros(6,1);
end

flux_D_wp=sum(ABC_D*[iD_test^2;iQ_test^2;iD_test*iQ_test;iD_test;iQ_test;1]);

% FLUSSO Q
xyz=zeros(6);
fQ=zeros(6,1);
abc_Q=zeros(1,6);
ABC_Q=zeros(6);
for i=1:1:6
    fQ(i)=flux_Q_v(i);
    for j=1:1:6
        xyz(j,1)=V(j,1)^2;
        xyz(j,2)=V(j,2)^2;
        xyz(j,3)=V(j,1)*V(j,2);
        xyz(j,4)=V(j,1);
        xyz(j,5)=V(j,2);
        xyz(j,6)=1;
    end
    abc_Q=xyz\fQ;
    ABC_Q(i,1)=abc_Q(1);
    ABC_Q(i,2)=abc_Q(2);
    ABC_Q(i,3)=abc_Q(3);
    ABC_Q(i,4)=abc_Q(4);
    ABC_Q(i,5)=abc_Q(5);
    ABC_Q(i,6)=abc_Q(6);
    fQ=zeros(6,1);
end

flux_Q_wp=sum(ABC_Q*[iD_test^2;iQ_test^2;iD_test*iQ_test;iD_test;iQ_test;1]);

```

### 4.2.3 Calcolo $\varepsilon$

I valori dell'errore compiuto nella stima della posizione rotorica ricavati dalla simulazione con procedura analoga a quanto fatto per il caso lineare sono di seguito riportati e confrontati con l'errore misurato, purtroppo non si nota un miglioramento generalizzato della stima.

		$i_D [A]$						
		1	2	3	4	5	6	7
$i_Q [A]$	1	-2.4°	-6°	-14°	-58°	-75.5°	-81.5°	-83°
	2	-2.8°	-6.2°	-15°	-32°	-58°	-70°	-75.5°
	3	-2.8°	-8°	-12.4°	-23.5°	-49.5°	-65.5°	-72.5°
	4	-3.8°	-9°	-13.9°	-20°	-36.3°	-54°	-64°
	5	-3.4°	-9.5°	-14.2°	-21°	-38.5°	-53.8°	-64°
	6	-3.5°	-7.8°	-14.1°	-18.8°	-32°	-47°	-58°
	7	-4.1°	-8.5°	-14.8°	-29.8°	-34°	-45°	-57°

Tabella 4.3: Errori di stima della posizione del rotore misurato con l'impiego di LEM esterni

		$i_D [A]$						
		1	2	3	4	5	6	7
$i_Q [A]$	1	-2.8°	-6.1°	-19.3°	-44.3°	-69.6°	-75.6°	-81.3°
	2	-0.9°	-5.4°	-12.1°	-25.3°	-47.9°	-66.7°	-73.7°
	3	-0.9°	-5.4°	-11.1°	-23.4°	-40.1°	-55.8°	-67.9°
	4	-0.8°	-5.7°	-11.6°	-20.6°	-32.5°	-45.3°	-66.4°
	5	-1.2°	-5.6°	-8.7°	-18.2°	-31.8°	-44.3°	-57.6°
	6	-1.8°	-5.7°	-10.5°	-22.6°	-30.1°	-46.7°	-55°
	7	-2°	-6°	-11.5°	-15.2°	-24.7°	-43.5°	-51.8°

Tabella 4.4: Errore di stima della posizione del rotore ricavato dalla simulazione che sfrutta una funzione interpolante di secondo grado

		$i_D [A]$						
		1	2	3	4	5	6	7
$i_Q [A]$	1	-1.1°	-5.5°	-13.3°	-47.9°	-74.1°	-73.9°	-80.9°
	2	-1.2°	-4.7°	-11.7°	-25.8°	-53.6°	-63.1°	-68.5°
	3	-0.8°	-4.9°	-10.4°	-20.1°	-35.3°	-58.9°	-69.1°
	4	-1.3°	-4.8°	-9.7°	-19.8°	-33.6°	-48.9°	-62.4°
	5	-1.4°	-5.8°	-13.5°	-18.7°	-30.8°	-40.6°	-61.6°
	6	-1.5°	-5.4°	-9.3°	-18.4°	-29.8°	-41°	-60°
	7	-1.2°	-5°	-10.5°	-17.6°	-25°	-43.4°	-46.7°

Tabella 4.5: Errore di stima della posizione del rotore ricavato dalla simulazione che sfrutta una funzione interpolante lineare

## 4.3 Funzione coenergia

### 4.3.1 Considerazioni preliminari

L'obiettivo è quello di riuscire a trovare una funzioni che mi descrivano l'andamento di  $\lambda_D$  e  $\lambda_Q$  al variare di  $i_D$  e  $i_Q$ , dovrei quindi riuscire a trovare due funzioni:

$$f_1(x_1, x_2)$$

$$f_2(x_1, x_2)$$

per le quali valga:

$$\frac{\partial f_1}{\partial x_1} = \frac{\partial f_2}{\partial x_2}$$

Ancora meglio sarebbe trovare una funzione da cui a cascata poter trovare gli andamenti di tutte le grandezze di interesse, ovvero una funzione:

$$F(x_1, x_2)$$

Tale che:

$$f_1(x_1, x_2) = \frac{\partial F(x_1, x_2)}{\partial x_1}$$

$$f_2(x_1, x_2) = \frac{\partial F(x_1, x_2)}{\partial x_2}$$

Se guardo alla definizione di energia e coenergia magnetica trovo che:

$$\text{ENERGIA MAGNETICA:} \quad w = \int_0^{\lambda'} i d\lambda \Rightarrow \frac{\partial w}{\partial \lambda} = i$$

$$\text{COENERGIA MAGNETICA} \quad w' = \int_0^{i'} \lambda di \Rightarrow \frac{\partial w'}{\partial i} = \lambda$$

Nota che per come è definita la coenergia se riesco a trovare una funzione che ne descriva l'andamento in funzione di  $i_D$  e  $i_Q$  da questa posso ricavare:

$$w'(i_D, i_Q) \Rightarrow \begin{cases} \frac{\partial w'}{\partial i_D} = \lambda_D(i_D, i_Q) \\ \frac{\partial w'}{\partial i_Q} = \lambda_Q(i_D, i_Q) \end{cases}$$

Definisco la coenergia come segue:

$$w' = ai_D^2 + bi_Q^2 + ci_D^4 + di_D^2i_Q^2 + ei_Q^4 + fi_D^6 + gi_D^4i_Q^2 + hi_D^2i_Q^4 + li_Q^6$$

Devo ora controllare che questa funzione, e le funzioni da essa derivate descrivano il comportamento delle grandezze di interesse in maniera corretta assecondandone gli andamenti caratteristici. Ovvero devono essere verificate le seguenti condizioni:

$$1) \lambda_D(i_D, i_Q) = \lambda_D(i_D, -i_Q)$$

$$2) \lambda_Q(i_D, i_Q) = \lambda_Q(-i_D, i_Q)$$

$$3) \lambda_D(i_D, x) = -\lambda_D(-i_D, x).$$

$$4) \lambda_Q(x, i_Q) = -\lambda_Q(x, -i_Q)$$

$$5) l_{DQ}(i_D, 0) = l_{DQ}(0, i_Q)$$

$$6) w'(i_D, i_Q) = w'(i_D, -i_Q) = w'(-i_D, i_Q) = w'(-i_D, -i_Q) \geq 0$$

$$7) l_D(i_D, i_Q) = l_D(i_D, -i_Q) > 0$$

$$8) l_Q(i_D, i_Q) = l_Q(-i_D, i_Q) > 0$$

9) Mi aspetto che le derivate della  $l_D$  seguano l'andamento della concavità dei rispettivi flussi visto che:

$$\frac{\partial l_D}{\partial i_D} = \frac{\partial^2 \lambda_D}{\partial i_D^2}$$

$$\frac{\partial l_Q}{\partial i_Q} = \frac{\partial^2 \lambda_Q}{\partial i_Q^2}$$

$$10) \text{sign}(l_{DQ}) = -\text{sign}(i_D i_Q)$$

### 4.3.2 Verifica soddisfacimento condizioni

• Le prime quattro condizioni vincolano la funzione interpolante che si ricava per i flussi a riprodurre dei comportamenti caratteristici dovuti all'ortogonalità degli assi D e Q, possiamo vedere come queste condizioni siano tutte verificate:

$$1) \lambda_D(i_D, i_Q) = \frac{\partial w'}{\partial i_D} = 2ai_D + 4ci_D^3 + 2di_Di_Q^2 + 6fi_D^5 + 4gi_D^3i_Q^2 + 2hi_Di_Q^4$$

$$\lambda_D(i_D, -i_Q) = 2ai_D + 4ci_D^3 + 2di_D(-i_Q)^2 + 6fi_D^5 + 4gi_D^3(-i_Q)^2 + 2hi_D(-i_Q)^4$$

$$" = 2ai_D + 4ci_D^3 + 2di_Di_Q^2 + 6fi_D^5 + 4gi_D^3i_Q^2 + 2hi_Di_Q^4$$

$$\lambda_D(i_D, i_Q) = \lambda_D(i_D, -i_Q)$$

$$2) \lambda_Q(i_D, i_Q) = \frac{\partial w'}{\partial i_Q} = 2bi_Q + 2di_D^2i_Q + 4ei_Q^3 + 2gi_D^4i_Q + 4hi_D^2i_Q^3 + 6li_Q^5$$

$$\lambda_Q(-i_D, i_Q) = 2bi_Q + 2d(-i_D)^2i_Q + 4ei_Q^3 + 2g(-i_D)^4i_Q + 4h(-i_D)^2i_Q^3 + 6li_Q^5$$

$$" = 2bi_Q + 2di_D^2i_Q + 4ei_Q^3 + 2gi_D^4i_Q + 4hi_D^2i_Q^3 + 6li_Q^5$$

$$\lambda_Q(i_D, i_Q) = \lambda_Q(-i_D, i_Q)$$

$$3) \lambda_D(i_D, x) = 2ai_D + 4ci_D^3 + 2di_Dx^2 + 6fi_D^5 + 4gi_D^3x^2 + 2hi_Dx^4$$

$$\lambda_D(-i_D, x) = -2ai_D - 4ci_D^3 - 2di_Dx^2 - 6fi_D^5 - 4gi_D^3x^2 - 2hi_Dx^4$$

$$-\lambda_D(-i_D, x) = 2ai_D + 4ci_D^3 + 2di_Dx^2 + 6fi_D^5 + 4gi_D^3x^2 + 2hi_Dx^4$$

$$\lambda_D(i_D, x) = -\lambda_D(-i_D, x)$$

$$4) \lambda_Q(x, i_Q) = 2bi_Q + 2dx^2i_Q + 4ei_Q^3 + 2gx^4i_Q + 4hx^2i_Q^3 + 6li_Q^5$$

$$\lambda_Q(x, -i_Q) = -2bi_Q - 2dx^2i_Q - 4ei_Q^3 - 2gx^4i_Q - 4hx^2i_Q^3 - 6li_Q^5$$

$$-\lambda_Q(x, -i_Q) = 2bi_Q + 2dx^2i_Q + 4ei_Q^3 + 2gx^4i_Q + 4hx^2i_Q^3 + 6li_Q^5$$

$$\lambda_Q(x, i_Q) = -\lambda_Q(x, -i_Q)$$

• La condizione di eguaglianza per le induttanze  $l_{DQ}$  e  $l_{QD}$  è una conseguenza del principio di conservazione dell'energia. Se infatti, a rotore bloccato, consideriamo il lavoro elettrico prodotto da una variazione infinitesima del flusso concatenato questo è dato da:

$$dW_e = \frac{3}{2}(i_D d\lambda_D + i_Q d\lambda_Q) =$$

$$'' = \frac{3}{2} \left[ i_D \left( \frac{\partial \lambda_D}{\partial i_D} di_D + \frac{\partial \lambda_D}{\partial i_Q} di_Q \right) + i_Q \left( \frac{\partial \lambda_Q}{\partial i_D} di_D + \frac{\partial \lambda_Q}{\partial i_Q} di_Q \right) \right] \quad (4.1)$$

Il quale è uguale alla variazione di energia magnetica. Essendo poi l'energia magnetica una funzione di stato delle correnti, ovvero  $W_m = W_m(i_D, i_Q)$  si ha che:

$$dW_m = \frac{\partial W_m(i_D, i_Q)}{\partial i_D} di_D + \frac{\partial W_m(i_D, i_Q)}{\partial i_Q} di_Q \quad (4.2)$$

Comparando le equazioni (4.1) e (4.2) visto che  $dW_e = dW_m$  ottengo:

$$\left\{ \begin{array}{l} \frac{\partial W_m}{\partial i_D} = \frac{3}{2} \left( i_D \frac{\partial \lambda_D}{\partial i_D} + i_Q \frac{\partial \lambda_Q}{\partial i_D} \right) \\ \frac{\partial W_m}{\partial i_Q} = \frac{3}{2} \left( i_D \frac{\partial \lambda_D}{\partial i_Q} + i_Q \frac{\partial \lambda_Q}{\partial i_Q} \right) \end{array} \right.$$

Da cui, se andiamo a derivare  $W_m$  in ciascuna equazione anche rispetto all'altra corrente, ottengo:

$$\left\{ \begin{array}{l} \frac{\partial^2 W_m}{\partial i_D \partial i_Q} = \frac{3}{2} \left( i_D \frac{\partial^2 \lambda_D}{\partial i_D \partial i_Q} + i_Q \frac{\partial^2 \lambda_Q}{\partial i_D \partial i_Q} + \frac{\partial \lambda_Q}{\partial i_D} \right) \\ \frac{\partial^2 W_m}{\partial i_Q \partial i_D} = \frac{3}{2} \left( i_Q \frac{\partial^2 \lambda_Q}{\partial i_D \partial i_Q} + i_D \frac{\partial^2 \lambda_D}{\partial i_Q \partial i_D} + \frac{\partial \lambda_D}{\partial i_Q} \right) \end{array} \right.$$

Per il teorema di Schwarz ho che:

$$\frac{\partial^2 W_m}{\partial i_D \partial i_Q} = \frac{\partial^2 W_m}{\partial i_Q \partial i_D}$$

Perciò semplificando i termini che compaiono in ambo i membri ho infine che:

$$l_{DQ}(i_D, i_Q) = l_{QD}(i_D, i_Q)$$

$$5) l_{DQ}(i_D, i_Q) = \frac{\partial \lambda_D}{\partial i_Q} = 4di_D i_Q + 8gi_D^3 i_Q + 8hi_D i_Q^3$$

$$l_{QD}(i_D, i_Q) = \frac{\partial \lambda_Q}{\partial i_D} = 4di_D i_Q + 8gi_D^3 i_Q + 8hi_D i_Q^3$$

$$l_{DQ}(i_D, 0) = 0$$

$$l_{DQ}(0, i_Q) = 0$$

$$l_{DQ}(i_D, 0) = l_{DQ}(0, i_Q)$$

$$6) w'(i_D, i_Q) = ai_D^2 + bi_Q^2 + ci_D^4 + di_D^2 i_Q^2 + ei_Q^4 + fi_D^6 + gi_D^4 i_Q^2 + hi_D^2 i_Q^4 + li_Q^6$$

Noto che tutti gli esponenti delle correnti  $i_D$  e  $i_Q$  sono pari, questo significa che la coenergia sarà sempre positiva, quindi:

$$w'(i_D, i_Q) \geq 0$$

$$w'(-i_D, i_Q) \geq 0$$

$$w'(i_D, -i_Q) \geq 0$$

$$w'(-i_D, -i_Q) \geq 0$$

$$7) l_D(i_D, i_Q) = \frac{\partial^2 w'}{\partial i_D^2} = \frac{\partial \lambda_D}{\partial i_D} = 2a + 12ci_D^2 + 2di_Q^2 + 30fi_D^4 + 12gi_D^2 i_Q^2 + 2hi_Q^4$$

$$l_D(i_D, -i_Q) = 2a + 12ci_D^2 + 2d(-i_Q)^2 + 30fi_D^4 + 12gi_D^2 (-i_Q)^2 + 2h(-i_Q)^4$$

$$" = 2a + 12ci_D^2 + 2di_Q^2 + 30fi_D^4 + 12gi_D^2 i_Q^2 + 2hi_Q^4$$

$$l_D(i_D, i_Q) = l_D(i_D, -i_Q)$$

Non riesco a stabilire se  $l_D(i_D, i_Q) = l_D(i_D, -i_Q) > 0$  devo prima procedere al calcolo dei coefficienti, tutto dipenderà dai segni e dai valori assunti dai coefficienti.

$$8) l_Q(i_D, i_Q) = \frac{\partial^2 w'}{\partial i_Q^2} = \frac{\partial \lambda_Q}{\partial i_Q} = 2b + 2di_D^2 + 12ei_Q^2 + 2gi_D^4 + 12hi_D^2 i_Q^2 + 30li_Q^4$$

$$l_Q(-i_D, i_Q) = 2b + 2d(-i_D)^2 + 12ei_Q^2 + 2g(-i_D)^4 + 12h(-i_D)^2 i_Q^2 + 30li_Q^4$$

$$" = 2b + 2di_D^2 + 12ei_Q^2 + 2gi_D^4 + 12hi_D^2 i_Q^2 + 30li_Q^4$$

$$l_Q(i_D, i_Q) = l_Q(-i_D, i_Q)$$

Anche in questo caso per stabilire se  $l_Q(i_D, i_Q) = l_Q(-i_D, i_Q) > 0$  dovrò prima calcolare i coefficienti.

$$9) \frac{\partial l_D}{\partial i_D} = \frac{\partial^2 l_D}{\partial i_D^2} = 24ci_D + 120fi_D^3 + 24gi_Di_Q^2$$

Per verificare se l'andamento della derivata della  $l_D$  che ottengo segue l'andamento della concavità di  $\lambda_D$  (ovvero positiva per valori di  $i_D$  negativi e viceversa negativa per valori  $i_D$  positivi) devo prima determinare i valori dei coefficienti  $c, f$  e  $g$ .

$$10) \frac{\partial l_Q}{\partial i_Q} = \frac{\partial^2 l_Q}{\partial i_Q^2} = 24ei_Q + 24hi_D^2i_Q + 120li_Q^3$$

Per verificare se l'andamento della derivata della  $l_Q$  che ottengo segue l'andamento della concavità di  $\lambda_Q$  (ovvero positiva per valori di  $i_Q$  negativi e viceversa negativa per valori  $i_Q$  positivi) devo prima determinare i valori dei coefficienti  $e, h$  e  $l$ .

$$11) \text{sign}(l_{DQ}) = -\text{sign}(l_D l_Q)$$

$$\text{sign}(l_{DQ}) = \text{sign}(4di_Di_Q + 8gi_D^3i_Q + 8hi_Di_Q^3)$$

$$\text{sign}(l_D) = \text{sign}(2a + 12ci_D^2 + 2di_Q^2 + 30fi_D^4 + 12gi_D^2i_Q^2 + 2hi_Q^4)$$

$$\text{sign}(l_Q) = \text{sign}(2b + 2di_D^2 + 12ei_Q^2 + 2gi_D^4 + 12hi_D^2i_Q^2 + 30li_Q^4)$$

Anche questa è una condizione che verrà verificata solamente una volta determinati i coefficienti della funzione interpolante.

### 4.3.3 Determinazione dei coefficienti

Si determinano i coefficienti usati nelle funzioni che descrivono gli andamenti delle varie grandezze basandosi su delle misure di flusso di asse D e Q eseguite sulla macchina sulla quale si vuole implementare l'azionamento sensorless. In altre parole utilizzando il metodo dei minimi quadrati ricavo i coefficienti che mi permettono di interpolare l'andamento di  $\lambda_D$  e  $\lambda_Q$  e poi estendo il loro utilizzo anche alle altre funzioni. Impiegare il metodo dei minimi quadrati rispetto ad altri metodi mi permette di evitare che il polinomio approssimante abbia delle oscillazioni che la funzione su cui si lavora non ha, non avrò un polinomio che assume esattamente gli stessi valori dei flussi misurati in corrispondenza alle stesse correnti di lavoro ma questo è ragionevole essendo i dati ottenuti sperimentalmente e quindi affetti da errore.

Sia allora  $m < n$  (m pari al grado del polinomio interpolante, e n pari al numero di misure), con il metodo dei minimi quadrati si determinano i coefficienti del polinomio:

$$p_m(x) = a_0x^m + a_1x^{m-1} + \dots + a_{m-1}x + a_m$$

in modo che risulti minima la norma 2 del vettore degli scarti, cioè:

$$\min_{(a_0, a_1, \dots, a_m)} \|\mathbf{r}\|_2 \quad \text{dove} \quad r_i = f(x_i) - p(x_i), \quad \text{per } i = 0, \dots, n$$

I punti di minimo di  $\|\mathbf{r}\|_2$  e di  $\|\mathbf{r}\|_2^2$  coincidono quindi si preferisce formulare il problema dei minimi quadrati nel modo seguente:

$$\min_{\mathbf{a}} \varphi(\mathbf{a}), \quad \varphi(\mathbf{a}) = \sum_{i=0}^n [f(x_i) - p_m(x_i)]^2 = \sum_{i=0}^n \left[ f(x_i) - \sum_{j=0}^m a_j x_i^{m-j} \right]^2$$

Avendo posto  $\mathbf{a} = [a_0, a_1, \dots, a_m]^T$ . Si può dimostrare che se i nodi sono tutti distinti la funzione  $\varphi(\mathbf{a})$  è convessa. Quindi vi è un unico punto di minimo che si ottiene imponendo la condizione di stazionarietà:

$$\frac{\partial \varphi}{\partial a_k} = -2 \sum_{i=0}^n \left[ f(x_i) - \sum_{j=0}^m a_j x_i^{m-j} \right] x_i^{m-j} = 0, \quad \text{per } k = 0, \dots, m$$

Si risolve quindi il sistema lineare:

$$\sum_{j=0}^m \left[ \sum_{i=0}^n x_i^{2m-j-k} \right] a_j = \sum_{i=0}^n f(x_i) x_i^{m-k} \quad \text{per } k = 0, \dots, m \quad (4.3)$$

Il sistema (3.3), di ordine  $m+1$ , è detto sistema delle *equazioni normali* e ha una sola soluzione. Il polinomio  $p_m$  così ottenuto è chiamato polinomio di *regressione*.

In sistema che devo risolvere per trovare i coefficienti è quindi del tipo:

$$Ax = b$$

Vado ora a ricavarmi la funzione associata a ciascun elemento della matrice A di cui in seguito calcolerò la sommatoria dei valori assunti in corrispondenza a ciascun punto di misura. Per semplicità costruirò due matrici  $A_D$  e  $A_Q$  e due vettori  $b_D$  e  $b_Q$ , affrontando separatamente il problema di interpolazione per i flussi  $\lambda_D$  e  $\lambda_Q$ , dovendo però infine trovare dei coefficienti comuni ad entrambe le funzioni risolverò il sistema imponendo:

$$A = A_D + A_Q$$

$$b = b_D + b_Q$$

Come precedentemente trovato ho che i polinomi di interpolazione dei due flussi sono i seguenti:

$$\lambda_D(i_D, i_Q) = 2ai_D + 4ci_D^3 + 2di_Di_Q^2 + 6fi_D^5 + 4gi_D^3i_Q^2 + 2hi_Di_Q^4$$

$$\lambda_Q(i_D, i_Q) = 2bi_Q + 2di_D^2i_Q + 4ei_Q^3 + 2gi_D^4i_Q + 4hi_D^2i_Q^3 + 6li_Q^5$$

Per cui ho che le derivate delle due funzioni rispetto ai coefficienti sono le seguenti:

$\frac{\partial \lambda_D}{\partial c_k}$	$\frac{\partial \lambda_D}{\partial a} = 2i_D$	$\frac{\partial \lambda_D}{\partial f} = 6i_D^5$
	$\frac{\partial \lambda_D}{\partial b} = 0$	$\frac{\partial \lambda_D}{\partial g} = 4i_D^3i_Q^2$
	$\frac{\partial \lambda_D}{\partial c} = 4i_D^3$	$\frac{\partial \lambda_D}{\partial h} = 2i_Di_Q^4$
	$\frac{\partial \lambda_D}{\partial d} = 2i_Di_Q^2$	$\frac{\partial \lambda_D}{\partial l} = 0$
	$\frac{\partial \lambda_D}{\partial e} = 0$	

$$\begin{array}{l} \frac{\partial \lambda_Q}{\partial c_k} \end{array} \quad \begin{array}{l} \frac{\partial \lambda_Q}{\partial a} = 0 \\ \frac{\partial \lambda_Q}{\partial b} = 2i_Q \\ \frac{\partial \lambda_Q}{\partial c} = 0 \\ \frac{\partial \lambda_Q}{\partial d} = 2i_D^2 i_Q \\ \frac{\partial \lambda_Q}{\partial e} = 4i_Q^3 \end{array} \quad \begin{array}{l} \frac{\partial \lambda_Q}{\partial f} = 0 \\ \frac{\partial \lambda_Q}{\partial g} = 2i_D^4 i_Q \\ \frac{\partial \lambda_Q}{\partial h} = 4i_D^2 i_Q^3 \\ \frac{\partial \lambda_Q}{\partial l} = 6i_Q^5 \end{array}$$

Vado adesso a determinarmi gli elementi delle matrici  $A_D$  e  $A_Q$ :

**$A_D$ )** PRIMA RIGA

$$\begin{array}{l} A_D(1,1) = 2i_D \cdot \frac{\partial \lambda_D}{\partial a} = 4i_D^2 \\ A_D(1,2) = 0 \cdot \frac{\partial \lambda_D}{\partial a} = 0 \\ A_D(1,3) = 4i_D^3 \cdot \frac{\partial \lambda_D}{\partial a} = 8i_D^4 \\ A_D(1,4) = 2i_D i_Q^2 \cdot \frac{\partial \lambda_D}{\partial a} = 4i_D^2 i_Q^2 \\ A_D(1,5) = 0 \cdot \frac{\partial \lambda_D}{\partial a} = 0 \end{array} \quad \begin{array}{l} A_D(1,6) = 6i_D^5 \cdot \frac{\partial \lambda_D}{\partial a} = 12i_D^6 \\ A_D(1,7) = 4i_D^3 i_Q^2 \cdot \frac{\partial \lambda_D}{\partial a} = 8i_D^4 i_Q^2 \\ A_D(1,8) = 2i_D i_Q^4 \cdot \frac{\partial \lambda_D}{\partial a} = 4i_D^2 i_Q^4 \\ A_D(1,9) = 0 \cdot \frac{\partial \lambda_D}{\partial a} = 0 \end{array}$$

SECONDA RIGA

$$\begin{array}{l} A_D(2,1) = 2i_D \cdot \frac{\partial \lambda_D}{\partial b} = 0 \\ A_D(2,2) = 0 \cdot \frac{\partial \lambda_D}{\partial b} = 0 \\ A_D(2,3) = 4i_D^3 \cdot \frac{\partial \lambda_D}{\partial b} = 0 \\ A_D(2,4) = 2i_D i_Q^2 \cdot \frac{\partial \lambda_D}{\partial b} = 0 \\ A_D(2,5) = 0 \cdot \frac{\partial \lambda_D}{\partial b} = 0 \end{array} \quad \begin{array}{l} A_D(2,6) = 6i_D^5 \cdot \frac{\partial \lambda_D}{\partial b} = 0 \\ A_D(2,7) = 4i_D^3 i_Q^2 \cdot \frac{\partial \lambda_D}{\partial b} = 0 \\ A_D(2,8) = 2i_D i_Q^4 \cdot \frac{\partial \lambda_D}{\partial b} = 0 \\ A_D(2,9) = 0 \cdot \frac{\partial \lambda_D}{\partial b} = 0 \end{array}$$

### TERZA RIGA

$$A_D(3,1) = 2i_D \cdot \frac{\partial \lambda_D}{\partial c} = 8i_D^4$$

$$A_D(3,6) = 6i_D^5 \cdot \frac{\partial \lambda_D}{\partial c} = 24i_D^8$$

$$A_D(3,2) = 0 \cdot \frac{\partial \lambda_D}{\partial c} = 0$$

$$A_D(3,7) = 4i_D^3 i_Q^2 \cdot \frac{\partial \lambda_D}{\partial c} = 16i_D^6 i_Q^2$$

$$A_D(3,3) = 4i_D^3 \cdot \frac{\partial \lambda_D}{\partial c} = 16i_D^6$$

$$A_D(3,8) = 2i_D i_Q^4 \cdot \frac{\partial \lambda_D}{\partial c} = 8i_D^4 i_Q^4$$

$$A_D(3,4) = 2i_D i_Q^2 \cdot \frac{\partial \lambda_D}{\partial c} = 8i_D^4 i_Q^2$$

$$A_D(3,9) = 0 \cdot \frac{\partial \lambda_D}{\partial c} = 0$$

$$A_D(3,5) = 0 \cdot \frac{\partial \lambda_D}{\partial c} = 0$$

### QUARTA RIGA

$$A_D(4,1) = 2i_D \cdot \frac{\partial \lambda_D}{\partial d} = 4i_D^2 i_Q^2$$

$$A_D(4,6) = 6i_D^5 \cdot \frac{\partial \lambda_D}{\partial d} = 12i_D^6 i_Q^2$$

$$A_D(4,2) = 0 \cdot \frac{\partial \lambda_D}{\partial d} = 0$$

$$A_D(4,7) = 4i_D^3 i_Q^2 \cdot \frac{\partial \lambda_D}{\partial d} = 8i_D^4 i_Q^4$$

$$A_D(4,3) = 4i_D^3 \cdot \frac{\partial \lambda_D}{\partial d} = 8i_D^4 i_Q^2$$

$$A_D(4,8) = 2i_D i_Q^4 \cdot \frac{\partial \lambda_D}{\partial d} = 4i_D^2 i_Q^6$$

$$A_D(4,4) = 2i_D i_Q^2 \cdot \frac{\partial \lambda_D}{\partial d} = 4i_D^2 i_Q^4$$

$$A_D(4,9) = 0 \cdot \frac{\partial \lambda_D}{\partial d} = 0$$

$$A_D(4,5) = 0 \cdot \frac{\partial \lambda_D}{\partial d} = 0$$

### QUINTA RIGA

$$A_D(5,1) = 2i_D \cdot \frac{\partial \lambda_D}{\partial e} = 0$$

$$A_D(5,6) = 6i_D^5 \cdot \frac{\partial \lambda_D}{\partial e} = 0$$

$$A_D(5,2) = 0 \cdot \frac{\partial \lambda_D}{\partial e} = 0$$

$$A_D(5,7) = 4i_D^3 i_Q^2 \cdot \frac{\partial \lambda_D}{\partial e} = 0$$

$$A_D(5,3) = 4i_D^3 \cdot \frac{\partial \lambda_D}{\partial e} = 0$$

$$A_D(5,8) = 2i_D i_Q^4 \cdot \frac{\partial \lambda_D}{\partial e} = 0$$

$$A_D(5,4) = 2i_D i_Q^2 \cdot \frac{\partial \lambda_D}{\partial e} = 0$$

$$A_D(5,9) = 0 \cdot \frac{\partial \lambda_D}{\partial e} = 0$$

$$A_D(5,5) = 0 \cdot \frac{\partial \lambda_D}{\partial e} = 0$$

SESTA RIGA

$$A_D(6,1) = 2i_D \cdot \frac{\partial \lambda_D}{\partial f} = 12i_D^6$$

$$A_D(6,6) = 6i_D^5 \cdot \frac{\partial \lambda_D}{\partial f} = 36i_D^{10}$$

$$A_D(6,2) = 0 \cdot \frac{\partial \lambda_D}{\partial f} = 0$$

$$A_D(6,7) = 4i_D^3 i_Q^2 \cdot \frac{\partial \lambda_D}{\partial f} = 24i_D^8 i_Q^2$$

$$A_D(6,3) = 4i_D^3 \cdot \frac{\partial \lambda_D}{\partial f} = 24i_D^8$$

$$A_D(6,8) = 2i_D i_Q^4 \cdot \frac{\partial \lambda_D}{\partial f} = 12i_D^6 i_Q^4$$

$$A_D(6,4) = 2i_D i_Q^2 \cdot \frac{\partial \lambda_D}{\partial f} = 12i_D^6 i_Q^2$$

$$A_D(6,9) = 0 \cdot \frac{\partial \lambda_D}{\partial f} = 0$$

$$A_D(6,5) = 0 \cdot \frac{\partial \lambda_D}{\partial f} = 0$$

SETTIMA RIGA

$$A_D(7,1) = 2i_D \cdot \frac{\partial \lambda_D}{\partial g} = 8i_D^4 i_Q^2$$

$$A_D(7,6) = 6i_D^5 \cdot \frac{\partial \lambda_D}{\partial g} = 24i_D^8 i_Q^2$$

$$A_D(7,2) = 0 \cdot \frac{\partial \lambda_D}{\partial g} = 0$$

$$A_D(7,7) = 4i_D^3 i_Q^2 \cdot \frac{\partial \lambda_D}{\partial g} = 16i_D^6 i_Q^4$$

$$A_D(7,3) = 4i_D^3 \cdot \frac{\partial \lambda_D}{\partial g} = 16i_D^6 i_Q^2$$

$$A_D(7,8) = 2i_D i_Q^4 \cdot \frac{\partial \lambda_D}{\partial g} = 8i_D^4 i_Q^6$$

$$A_D(7,4) = 2i_D i_Q^2 \cdot \frac{\partial \lambda_D}{\partial g} = 8i_D^4 i_Q^4$$

$$A_D(7,9) = 0 \cdot \frac{\partial \lambda_D}{\partial g} = 0$$

$$A_D(7,5) = 0 \cdot \frac{\partial \lambda_D}{\partial g} = 0$$

OTTAVA RIGA

$$A_D(8,1) = 2i_D \cdot \frac{\partial \lambda_D}{\partial h} = 4i_D^2 i_Q^4$$

$$A_D(8,6) = 6i_D^5 \cdot \frac{\partial \lambda_D}{\partial h} = 12i_D^6 i_Q^4$$

$$A_D(8,2) = 0 \cdot \frac{\partial \lambda_D}{\partial h} = 0$$

$$A_D(8,7) = 4i_D^3 i_Q^2 \cdot \frac{\partial \lambda_D}{\partial h} = 8i_D^4 i_Q^6$$

$$A_D(8,3) = 4i_D^3 \cdot \frac{\partial \lambda_D}{\partial h} = 8i_D^4 i_Q^4$$

$$A_D(8,8) = 2i_D i_Q^4 \cdot \frac{\partial \lambda_D}{\partial h} = 4i_D^2 i_Q^8$$

$$A_D(8,4) = 2i_D i_Q^2 \cdot \frac{\partial \lambda_D}{\partial h} = 4i_D^2 i_Q^6$$

$$A_D(8,9) = 0 \cdot \frac{\partial \lambda_D}{\partial h} = 0$$

$$A_D(8,5) = 0 \cdot \frac{\partial \lambda_D}{\partial h} = 0$$

NONA RIGA

$$A_D(9,1) = 2i_D \cdot \frac{\partial \lambda_D}{\partial l} = 0$$

$$A_D(9,6) = 6i_D^5 \cdot \frac{\partial \lambda_D}{\partial l} = 0$$

$$A_D(9,2) = 0 \cdot \frac{\partial \lambda_D}{\partial l} = 0$$

$$A_D(9,7) = 4i_D^3 i_Q^2 \cdot \frac{\partial \lambda_D}{\partial l} = 0$$

$$A_D(9,3) = 4i_D^3 \cdot \frac{\partial \lambda_D}{\partial l} = 0$$

$$A_D(9,8) = 2i_D i_Q^4 \cdot \frac{\partial \lambda_D}{\partial l} = 0$$

$$A_D(9,4) = 2i_D i_Q^2 \cdot \frac{\partial \lambda_D}{\partial l} = 0$$

$$A_D(9,9) = 0 \cdot \frac{\partial \lambda_D}{\partial l} = 0$$

$$A_D(9,5) = 0 \cdot \frac{\partial \lambda_D}{\partial l} = 0$$

**A<sub>Q</sub>)** PRIMA RIGA

$$A_Q(1,1) = 0 \cdot \frac{\partial \lambda_Q}{\partial a} = 0$$

$$A_Q(1,6) = 0 \cdot \frac{\partial \lambda_Q}{\partial a} = 0$$

$$A_Q(1,2) = 2i_Q \cdot \frac{\partial \lambda_Q}{\partial a} = 0$$

$$A_Q(1,7) = 2i_D^4 i_Q \cdot \frac{\partial \lambda_Q}{\partial a} = 0$$

$$A_Q(1,3) = 0 \cdot \frac{\partial \lambda_Q}{\partial a} = 0$$

$$A_Q(1,8) = 4i_D^2 i_Q^3 \cdot \frac{\partial \lambda_Q}{\partial a} = 0$$

$$A_Q(1,4) = 2i_D^2 i_Q \cdot \frac{\partial \lambda_Q}{\partial a} = 0$$

$$A_Q(1,9) = 6i_Q^5 \cdot \frac{\partial \lambda_Q}{\partial a} = 0$$

$$A_Q(1,5) = 4i_Q^3 \cdot \frac{\partial \lambda_Q}{\partial a} = 0$$

SECONDA RIGA

$$A_Q(2,1) = 0 \cdot \frac{\partial \lambda_Q}{\partial b} = 0$$

$$A_Q(2,6) = 0 \cdot \frac{\partial \lambda_Q}{\partial b} = 0$$

$$A_Q(2,2) = 2i_Q \cdot \frac{\partial \lambda_Q}{\partial b} = 4i_Q^2$$

$$A_Q(2,7) = 2i_D^4 i_Q \cdot \frac{\partial \lambda_Q}{\partial b} = 4i_D^4 i_Q^2$$

$$A_Q(2,3) = 0 \cdot \frac{\partial \lambda_Q}{\partial b} = 0$$

$$A_Q(2,8) = 4i_D^2 i_Q^3 \cdot \frac{\partial \lambda_Q}{\partial b} = 8i_D^2 i_Q^4$$

$$A_Q(2,4) = 2i_D^2 i_Q \cdot \frac{\partial \lambda_Q}{\partial b} = 4i_D^2 i_Q^2$$

$$A_Q(2,9) = 6i_Q^5 \cdot \frac{\partial \lambda_Q}{\partial b} = 12i_Q^6$$

$$A_Q(2,5) = 4i_Q^3 \cdot \frac{\partial \lambda_Q}{\partial b} = 8i_Q^4$$

TERZA RIGA

$$A_Q(3,1) = 0 \cdot \frac{\partial \lambda_Q}{\partial c} = 0$$

$$A_Q(3,6) = 0 \cdot \frac{\partial \lambda_Q}{\partial c} = 0$$

$$A_Q(3,2) = 2i_Q \cdot \frac{\partial \lambda_Q}{\partial c} = 0$$

$$A_Q(3,7) = 2i_D^4 i_Q \cdot \frac{\partial \lambda_Q}{\partial c} = 0$$

$$A_Q(3,3) = 0 \cdot \frac{\partial \lambda_Q}{\partial c} = 0$$

$$A_Q(3,8) = 4i_D^2 i_Q^3 \cdot \frac{\partial \lambda_Q}{\partial c} = 0$$

$$A_Q(3,4) = 2i_D^2 i_Q \cdot \frac{\partial \lambda_Q}{\partial c} = 0$$

$$A_Q(3,9) = 6i_Q^5 \cdot \frac{\partial \lambda_Q}{\partial c} = 0$$

$$A_Q(3,5) = 4i_Q^3 \cdot \frac{\partial \lambda_Q}{\partial c} = 0$$

QUARTA RIGA

$$A_Q(4,1) = 0 \cdot \frac{\partial \lambda_Q}{\partial d} = 0$$

$$A_Q(4,6) = 0 \cdot \frac{\partial \lambda_Q}{\partial d} = 0$$

$$A_Q(4,2) = 2i_Q \cdot \frac{\partial \lambda_Q}{\partial d} = 4i_D^2 i_Q^2$$

$$A_Q(4,7) = 2i_D^4 i_Q \cdot \frac{\partial \lambda_Q}{\partial d} = 4i_D^6 i_Q^2$$

$$A_Q(4,3) = 0 \cdot \frac{\partial \lambda_Q}{\partial d} = 0$$

$$A_Q(4,8) = 4i_D^2 i_Q^3 \cdot \frac{\partial \lambda_Q}{\partial d} = 8i_D^4 i_Q^4$$

$$A_Q(4,4) = 2i_D^2 i_Q \cdot \frac{\partial \lambda_Q}{\partial d} = 4i_D^4 i_Q^2$$

$$A_Q(4,9) = 6i_Q^5 \cdot \frac{\partial \lambda_Q}{\partial d} = 12i_D^2 i_Q^6$$

$$A_Q(4,5) = 4i_Q^3 \cdot \frac{\partial \lambda_Q}{\partial d} = 8i_D^2 i_Q^4$$

QUINTA RIGA

$$A_Q(5,1) = 0 \cdot \frac{\partial \lambda_Q}{\partial e} = 0$$

$$A_Q(5,6) = 0 \cdot \frac{\partial \lambda_Q}{\partial e} = 0$$

$$A_Q(5,2) = 2i_Q \cdot \frac{\partial \lambda_Q}{\partial e} = 8i_Q^4$$

$$A_Q(5,7) = 2i_D^4 i_Q \cdot \frac{\partial \lambda_Q}{\partial e} = 8i_D^4 i_Q^4$$

$$A_Q(5,3) = 0 \cdot \frac{\partial \lambda_Q}{\partial e} = 0$$

$$A_Q(5,8) = 4i_D^2 i_Q^3 \cdot \frac{\partial \lambda_Q}{\partial e} = 16i_D^2 i_Q^6$$

$$A_Q(5,4) = 2i_D^2 i_Q \cdot \frac{\partial \lambda_Q}{\partial e} = 8i_D^2 i_Q^4$$

$$A_Q(5,9) = 6i_Q^5 \cdot \frac{\partial \lambda_Q}{\partial e} = 24i_Q^8$$

$$A_Q(5,5) = 4i_Q^3 \cdot \frac{\partial \lambda_Q}{\partial e} = 16i_Q^6$$

SESTA RIGA

$$A_Q(6,1) = 0 \cdot \frac{\partial \lambda_Q}{\partial f} = 0$$

$$A_Q(6,6) = 0 \cdot \frac{\partial \lambda_Q}{\partial f} = 0$$

$$A_Q(6,2) = 2i_Q \cdot \frac{\partial \lambda_Q}{\partial f} = 0$$

$$A_Q(6,7) = 2i_D^4 i_Q \cdot \frac{\partial \lambda_Q}{\partial f} = 0$$

$$A_Q(6,3) = 0 \cdot \frac{\partial \lambda_Q}{\partial f} = 0$$

$$A_Q(6,8) = 4i_D^2 i_Q^3 \cdot \frac{\partial \lambda_Q}{\partial f} = 0$$

$$A_Q(6,4) = 2i_D^2 i_Q \cdot \frac{\partial \lambda_Q}{\partial f} = 0$$

$$A_Q(6,9) = 6i_Q^5 \cdot \frac{\partial \lambda_Q}{\partial f} = 0$$

$$A_Q(6,5) = 4i_Q^3 \cdot \frac{\partial \lambda_Q}{\partial f} = 0$$

SETTIMA RIGA

$$A_Q(7,1) = 0 \cdot \frac{\partial \lambda_Q}{\partial g} = 0$$

$$A_Q(7,6) = 0 \cdot \frac{\partial \lambda_Q}{\partial g} = 0$$

$$A_Q(7,2) = 2i_Q \cdot \frac{\partial \lambda_Q}{\partial g} = 4i_D^4 i_Q^2$$

$$A_Q(7,7) = 2i_D^4 i_Q \cdot \frac{\partial \lambda_Q}{\partial g} = 4i_D^8 i_Q^2$$

$$A_Q(7,3) = 0 \cdot \frac{\partial \lambda_Q}{\partial g} = 0$$

$$A_Q(7,8) = 4i_D^2 i_Q^3 \cdot \frac{\partial \lambda_Q}{\partial g} = 8i_D^6 i_Q^4$$

$$A_Q(7,4) = 2i_D^2 i_Q \cdot \frac{\partial \lambda_Q}{\partial g} = 4i_D^6 i_Q^2$$

$$A_Q(7,9) = 6i_Q^5 \cdot \frac{\partial \lambda_Q}{\partial g} = 12i_D^4 i_Q^6$$

$$A_Q(7,5) = 4i_Q^3 \cdot \frac{\partial \lambda_Q}{\partial g} = 8i_D^4 i_Q^4$$

OTTAVA RIGA

$$A_Q(8,1) = 0 \cdot \frac{\partial \lambda_Q}{\partial h} = 0$$

$$A_Q(8,6) = 0 \cdot \frac{\partial \lambda_Q}{\partial h} = 0$$

$$A_Q(8,2) = 2i_Q \cdot \frac{\partial \lambda_Q}{\partial h} = 8i_D^2 i_Q^4$$

$$A_Q(8,7) = 2i_D^4 i_Q \cdot \frac{\partial \lambda_Q}{\partial h} = 8i_D^6 i_Q^4$$

$$A_Q(8,3) = 0 \cdot \frac{\partial \lambda_Q}{\partial h} = 0$$

$$A_Q(8,8) = 4i_D^2 i_Q^3 \cdot \frac{\partial \lambda_Q}{\partial h} = 16i_D^4 i_Q^6$$

$$A_Q(8,4) = 2i_D^2 i_Q \cdot \frac{\partial \lambda_Q}{\partial h} = 8i_D^4 i_Q^4$$

$$A_Q(8,9) = 6i_Q^5 \cdot \frac{\partial \lambda_Q}{\partial h} = 24i_D^2 i_Q^8$$

$$A_Q(8,5) = 4i_Q^3 \cdot \frac{\partial \lambda_Q}{\partial h} = 16i_D^2 i_Q^6$$

NONA RIGA

$$A_Q(9,1) = 0 \cdot \frac{\partial \lambda_Q}{\partial g} = 0$$

$$A_Q(9,6) = 0 \cdot \frac{\partial \lambda_Q}{\partial g} = 0$$

$$A_Q(9,2) = 2i_Q \cdot \frac{\partial \lambda_Q}{\partial g} = 12i_Q^6$$

$$A_Q(9,7) = 2i_D^4 i_Q \cdot \frac{\partial \lambda_Q}{\partial g} = 12i_D^4 i_Q^6$$

$$A_Q(9,3) = 0 \cdot \frac{\partial \lambda_Q}{\partial g} = 0$$

$$A_Q(9,8) = 4i_D^2 i_Q^3 \cdot \frac{\partial \lambda_Q}{\partial g} = 24i_D^2 i_Q^8$$

$$A_Q(9,4) = 2i_D^2 i_Q \cdot \frac{\partial \lambda_Q}{\partial g} = 12i_D^2 i_Q^6$$

$$A_Q(9,9) = 6i_Q^5 \cdot \frac{\partial \lambda_Q}{\partial g} = 36i_Q^{10}$$

$$A_Q(9,5) = 4i_Q^3 \cdot \frac{\partial \lambda_Q}{\partial g} = 24i_Q^8$$

Procedo ora a determinarmi gli elementi dei vettori  $b_D$  e  $b_Q$ :

$$\mathbf{b}_D) \quad b_D(1) = \lambda_D(i_D, i_Q) \cdot \frac{\partial \lambda_Q}{\partial a} = \lambda_D(i_D, i_Q) \cdot 2i_D$$

$$b_D(2) = \lambda_D(i_D, i_Q) \cdot \frac{\partial \lambda_D}{\partial b} = \lambda_D(i_D, i_Q) \cdot 0 = 0$$

$$b_D(3) = \lambda_D(i_D, i_Q) \cdot \frac{\partial \lambda_D}{\partial c} = \lambda_D(i_D, i_Q) \cdot 4i_D^3$$

$$b_D(4) = \lambda_D(i_D, i_Q) \cdot \frac{\partial \lambda_D}{\partial d} = \lambda_D(i_D, i_Q) \cdot 2i_D i_Q^2$$

$$b_D(5) = \lambda_D(i_D, i_Q) \cdot \frac{\partial \lambda_D}{\partial e} = \lambda_D(i_D, i_Q) \cdot 0 = 0$$

$$b_D(6) = \lambda_D(i_D, i_Q) \cdot \frac{\partial \lambda_D}{\partial f} = \lambda_D(i_D, i_Q) \cdot 6i_D^5$$

$$b_D(7) = \lambda_D(i_D, i_Q) \cdot \frac{\partial \lambda_D}{\partial g} = \lambda_D(i_D, i_Q) \cdot 4i_D^3 i_Q^2$$

$$b_D(8) = \lambda_D(i_D, i_Q) \cdot \frac{\partial \lambda_D}{\partial h} = \lambda_D(i_D, i_Q) \cdot 2i_D i_Q^4$$

$$b_D(9) = \lambda_D(i_D, i_Q) \cdot \frac{\partial \lambda_D}{\partial l} = \lambda_D(i_D, i_Q) \cdot 0 = 0$$

$$\begin{aligned}
b_Q(1) &= \lambda_Q(i_D, i_Q) \cdot \frac{\partial \lambda_Q}{\partial a} = \lambda_Q(i_D, i_Q) \cdot 0 \\
b_Q(2) &= \lambda_Q(i_D, i_Q) \cdot \frac{\partial \lambda_Q}{\partial b} = \lambda_Q(i_D, i_Q) \cdot 2i_Q \\
b_Q(3) &= \lambda_Q(i_D, i_Q) \cdot \frac{\partial \lambda_Q}{\partial c} = \lambda_Q(i_D, i_Q) \cdot 0 \\
b_Q(4) &= \lambda_Q(i_D, i_Q) \cdot \frac{\partial \lambda_Q}{\partial d} = \lambda_Q(i_D, i_Q) \cdot 2i_D^2 i_Q \\
b_Q(5) &= \lambda_Q(i_D, i_Q) \cdot \frac{\partial \lambda_Q}{\partial e} = \lambda_Q(i_D, i_Q) \cdot 4i_Q^3 \\
b_Q(6) &= \lambda_Q(i_D, i_Q) \cdot \frac{\partial \lambda_Q}{\partial f} = \lambda_Q(i_D, i_Q) \cdot 0 \\
b_Q(7) &= \lambda_Q(i_D, i_Q) \cdot \frac{\partial \lambda_Q}{\partial g} = \lambda_Q(i_D, i_Q) \cdot 2i_D^4 i_Q \\
b_Q(8) &= \lambda_Q(i_D, i_Q) \cdot \frac{\partial \lambda_Q}{\partial h} = \lambda_Q(i_D, i_Q) \cdot 4i_D^2 i_Q^3 \\
b_Q(9) &= \lambda_Q(i_D, i_Q) \cdot \frac{\partial \lambda_Q}{\partial l} = \lambda_Q(i_D, i_Q) \cdot 6i_Q^5
\end{aligned}$$

Ora che ho determinato sia  $A_D$  e  $A_Q$  che  $b_D$  e  $b_Q$ , posso determinare gli elementi dell'equazione matriciale:

#### A) PRIMA RIGA

$$\begin{aligned}
A(1,1) &= A_D(1,1) + A_Q(1,1) = 4i_D^2 & A(1,6) &= A_D(1,6) + A_Q(1,6) = 12i_D^6 \\
A(1,2) &= A_D(1,2) + A_Q(1,2) = 0 & A(1,7) &= A_D(1,7) + A_Q(1,7) = 8i_D^4 i_Q^2 \\
A(1,3) &= A_D(1,3) + A_Q(1,3) = 8i_D^4 & A(1,8) &= A_D(1,8) + A_Q(1,8) = 4i_D^2 i_Q^4 \\
A(1,4) &= A_D(1,4) + A_Q(1,4) = 4i_D^2 i_Q^2 & A(1,9) &= A_D(1,9) + A_Q(1,9) = 0 \\
A(1,5) &= A_D(1,5) + A_Q(1,5) = 0
\end{aligned}$$

#### SECONDA RIGA

$$A(2,1) = A_D(2,1) + A_Q(2,1) = 0 \qquad A(2,6) = A_D(2,6) + A_Q(2,6) = 0$$

$$A(2,2) = A_D(2,2) + A_Q(2,2) = 4i_D^2$$

$$A(2,7) = A_D(2,7) + A_Q(2,7) = 4i_D^4 i_Q^2$$

$$A(2,3) = A_D(2,3) + A_Q(2,3) = 0$$

$$A(2,8) = A_D(2,8) + A_Q(2,8) = 8i_D^2 i_Q^4$$

$$A(2,4) = A_D(2,4) + A_Q(2,4) = 4i_D^2 i_Q^2$$

$$A(2,9) = A_D(2,9) + A_Q(2,9) = 12i_Q^6$$

$$A(2,5) = A_D(2,5) + A_Q(2,5) = 8i_Q^4$$

TERZA RIGA

$$A(3,1) = A_D(3,1) + A_Q(3,1) = 8i_D^4$$

$$A(3,6) = A_D(3,6) + A_Q(3,6) = 24i_D^8$$

$$A(3,2) = A_D(3,2) + A_Q(3,2) = 0$$

$$A(3,7) = A_D(3,7) + A_Q(3,7) = 16i_D^6 i_Q^2$$

$$A(3,3) = A_D(3,3) + A_Q(3,3) = 16i_D^6$$

$$A(3,8) = A_D(3,8) + A_Q(3,8) = 8i_D^4 i_Q^4$$

$$A(3,4) = A_D(3,4) + A_Q(3,4) = 8i_D^4 i_Q^2$$

$$A(3,9) = A_D(3,9) + A_Q(3,9) = 0$$

$$A(3,5) = A_D(3,5) + A_Q(3,5) = 0$$

QUARTA RIGA

$$A(4,1) = A_D(4,1) + A_Q(4,1) = 4i_D^2 i_Q^2$$

$$A(4,6) = A_D(4,6) + A_Q(4,6) = 12i_D^6 i_Q^2$$

$$A(4,2) = A_D(4,2) + A_Q(4,2) = 4i_D^4 i_Q^2$$

$$A(4,7) = A_D(4,7) + A_Q(4,7) = 8i_D^4 i_Q^4 + 4i_D^6 i_Q^2$$

$$A(4,3) = A_D(4,3) + A_Q(4,3) = 8i_D^4 i_Q^2$$

$$A(4,8) = A_D(4,8) + A_Q(4,8) = 8i_D^4 i_Q^4 + 4i_D^6 i_Q^2$$

$$A(4,4) = A_D(4,4) + A_Q(4,4) = 4(i_D^2 i_Q^4 + i_D^4 i_Q^2) \quad A(4,9) = A_D(4,9) + A_Q(4,9) = 12i_D^2 i_Q^6$$

$$A(4,5) = A_D(4,5) + A_Q(4,5) = 8i_D^2 i_Q^4$$

QUINTA RIGA

$$A(5,1) = A_D(5,1) + A_Q(5,1) = 0$$

$$A(5,6) = A_D(5,6) + A_Q(5,6) = 0$$

$$A(5,2) = A_D(5,2) + A_Q(5,2) = 8i_Q^4$$

$$A(5,7) = A_D(5,7) + A_Q(5,7) = 8i_D^4 i_Q^4$$

$$A(5,3) = A_D(5,3) + A_Q(5,3) = 0$$

$$A(5,8) = A_D(5,8) + A_Q(5,8) = 16i_D^2 i_Q^6$$

$$A(5,4) = A_D(5,4) + A_Q(5,4) = 8i_D^2 i_Q^4$$

$$A(5,9) = A_D(5,9) + A_Q(5,9) = 24i_Q^8$$

$$A(5,5) = A_D(5,5) + A_Q(5,5) = 16i_Q^6$$

### SESTA RIGA

$$A(6,1) = A_D(6,1) + A_Q(6,1) = 12i_D^6$$

$$A(6,6) = A_D(6,6) + A_Q(6,6) = 36i_D^{10}$$

$$A(6,2) = A_D(6,2) + A_Q(6,2) = 0$$

$$A(6,7) = A_D(6,7) + A_Q(6,7) = 24i_D^8 i_Q^2$$

$$A(6,3) = A_D(6,3) + A_Q(6,3) = 24i_D^8$$

$$A(6,8) = A_D(6,8) + A_Q(6,8) = 12i_D^6 i_Q^4$$

$$A(6,4) = A_D(6,4) + A_Q(6,4) = 12i_D^6 i_Q^2$$

$$A(6,9) = A_D(6,9) + A_Q(6,9) = 0$$

$$A(6,5) = A_D(6,5) + A_Q(6,5) = 0$$

### SETTIMA RIGA

$$A(7,1) = A_D(7,1) + A_Q(7,1) = 8i_D^4 i_Q^2$$

$$A(7,6) = A_D(7,6) + A_Q(7,6) = 24i_D^8 i_Q^2$$

$$A(7,2) = A_D(7,2) + A_Q(7,2) = 4i_D^4 i_Q^2$$

$$A(7,7) = A_D(7,7) + A_Q(7,7) = 4i_D^8 i_Q^2 + 16i_D^6 i_Q^4$$

$$A(7,3) = A_D(7,3) + A_Q(7,3) = 16i_D^6 i_Q^2$$

$$A(7,8) = A_D(7,8) + A_Q(7,8) = 8i_D^4 i_Q^6 + 8i_D^6 i_Q^4$$

$$A(7,4) = A_D(7,4) + A_Q(7,4) = 4i_D^6 i_Q^2 + 8i_D^4 i_Q^4$$

$$A(7,9) = A_D(7,9) + A_Q(7,9) = 12i_D^4 i_Q^6$$

$$A(7,5) = A_D(7,5) + A_Q(7,5) = 8i_D^4 i_Q^4$$

### OTTAVA RIGA

$$A(8,1) = A_D(8,1) + A_Q(8,1) = 4i_D^2 i_Q^4$$

$$A(8,6) = A_D(8,6) + A_Q(8,6) = 12i_D^6 i_Q^4$$

$$A(8,2) = A_D(8,2) + A_Q(8,2) = 8i_D^2 i_Q^4$$

$$A(8,7) = A_D(8,7) + A_Q(8,7) = 8(i_D^4 i_Q^6 + 4i_D^6 i_Q^4)$$

$$A(8,3) = A_D(8,3) + A_Q(8,3) = 8i_D^4 i_Q^4$$

$$A(8,8) = A_D(8,8) + A_Q(8,8) = 4i_D^2 i_Q^8 + 16i_D^4 i_Q^6$$

$$A(8,4) = A_D(8,4) + A_Q(8,4) = 8i_D^4 i_Q^4 + 4i_D^2 i_Q^6$$

$$A(8,9) = A_D(8,9) + A_Q(8,9) = 24i_D^2 i_Q^8$$

$$A(8,5) = A_D(8,5) + A_Q(8,5) = 16i_D^2 i_Q^6$$

### NONA RIGA

$$A(9,1) = A_D(9,1) + A_Q(9,1) = 0$$

$$A(9,6) = A_D(9,6) + A_Q(9,6) = 0$$

$$A(9,2) = A_D(9,2) + A_Q(9,2) = 12i_D^6$$

$$A(9,7) = A_D(9,7) + A_Q(9,7) = 12i_D^4 i_Q^6$$

$$A(9,3) = A_D(9,3) + A_Q(9,3) = 0$$

$$A(9,8) = A_D(9,8) + A_Q(9,8) = 24i_D^2 i_Q^8$$

$$A(9,4) = A_D(9,4) + A_Q(9,4) = 12i_D^2 i_Q^6$$

$$A(9,9) = A_D(9,9) + A_Q(9,9) = 36i_Q^{10}$$

$$A(9,5) = A_D(9,5) + A_Q(9,5) = 24i_Q^8$$

$$\mathbf{b)} \quad b(1) = b_D(1) + b_Q(1) = 2i_D \lambda_D(i_D, i_Q)$$

$$b(2) = b_D(2) + b_Q(2) = 2i_Q \lambda_Q(i_D, i_Q)$$

$$b(3) = b_D(3) + b_Q(3) = 4i_D^3 \lambda_D(i_D, i_Q)$$

$$b(4) = b_D(4) + b_Q(4) = 2i_D i_Q^2 \lambda_D(i_D, i_Q) + 2i_D^2 i_Q \lambda_Q(i_D, i_Q)$$

$$b(5) = b_D(5) + b_Q(5) = 4i_Q^3 \lambda_Q(i_D, i_Q)$$

$$b(6) = b_D(6) + b_Q(6) = 6i_D^5 \lambda_D(i_D, i_Q)$$

$$b(7) = b_D(7) + b_Q(7) = 4i_D^3 i_Q^2 \lambda_D(i_D, i_Q) + 2i_D^4 i_Q \lambda_Q(i_D, i_Q)$$

$$b(8) = b_D(8) + b_Q(8) = 2i_D i_Q^4 \lambda_D(i_D, i_Q) + 4i_D^2 i_Q^3 \lambda_Q(i_D, i_Q)$$

$$b(9) = b_D(9) + b_Q(9) = 6i_Q^5 \lambda_Q(i_D, i_Q)$$

## 4.1.4 Script Matlab usati

Per ricavare i coefficienti e tracciare gli andamenti delle varie grandezze nel primo quadrante è stato utilizzato lo script Matlab di seguito riportato. Questo può essere diviso essenzialmente in tre parti, una prima parte in cui ci si occupa del caricamento dei dati di misura e della definizione di opportune variabili che ne consentano un opportuno impegno nella successiva parte del programma, una seconda parte in cui viene implementato il metodo dei minimi quadrati andando in sequenza a definire la matrice A e il vettore b per poi procedere alla soluzione dell'equazione matriciale da essi formata. Una terza parte in cui infine vengono plottati gli andamenti delle grandezze di interesse.

```
%***** INIZIALIZZAZIONE*****
clear
clc

%***** CARICAMENTO MISURE *****
load('cross_saturation_D-0Q_05_10Q_-0D_05_10D.mat');
load('cross_saturation_Q-0Q_05_10Q_-0D_05_10D.mat');

[r_max,c_max]=size(cross_saturation_D);

flux_d=cross_saturation_D(2:r_max,2:c_max);
flux_q=cross_saturation_Q(2:r_max,2:c_max);

id_wp=cross_saturation_D(1,2:c_max);
iq_wp=cross_saturation_D(2:r_max,1);

%***** IMPLEMENTAZIONE METODO DEI MINIMI QUADRATI*****

% MATRICE A

A=zeros(9);

for i=1:1:length(iq_wp)
    for j=1:1:length(id_wp)

        A(1,1)=A(1,1)+4*id_wp(j)^2; % tr 1

        A(2,2)=A(2,2)+4*iq_wp(i)^2; % tr 3
        A(1,3)=A(1,3)+8*id_wp(j)^4;
        A(3,1)=A(1,3);

        A(1,4)=A(1,4)+4*(id_wp(j)^2)*(iq_wp(i)^2); % tr 4
        A(4,1)=A(1,4);

        A(2,4)=A(1,4); % tr 5
        A(4,2)=A(1,4);
        A(3,3)=A(3,3)+16*id_wp(j)^6;

        A(1,6)=A(1,6)+12*id_wp(j)^6; % tr 6
        A(6,1)=A(1,6);
        A(2,5)=A(2,5)+8*iq_wp(i)^4;
        A(5,2)=A(2,5);
        A(3,4)=A(3,4)+8*(id_wp(j)^4)*(iq_wp(i)^2);
```

```

A(4,3)=A(3,4);

A(1,7)=A(1,7)+8*(id_wp(j)^4)*(iq_wp(i)^2);           % tr 7
A(7,1)=A(1,7);
A(4,4)=A(4,4)+4*((id_wp(j)^2)*(iq_wp(i)^4)+
    +(id_wp(j)^4)*(iq_wp(i)^2));
A(1,8)=A(1,8)+4*(id_wp(j)^2)*(iq_wp(i)^4);           % tr 8
A(8,1)=A(1,8);
A(2,7)=A(2,7)+4*(id_wp(j)^4)*(iq_wp(i)^2);
A(7,2)=A(2,7);
A(3,6)=A(3,6)+24*id_wp(j)^8;
A(6,3)=A(3,6);
A(4,5)=A(4,5)+8*(id_wp(j)^2)*(iq_wp(i)^4);
A(5,4)=A(4,5);

A(2,8)=A(2,8)+8*(id_wp(j)^2)*(iq_wp(i)^4);           % tr 9
A(8,2)=A(2,8);
A(3,7)=A(3,7)+16*(id_wp(j)^6)*(iq_wp(i)^2);
A(7,3)=A(3,7);
A(4,6)=A(4,6)+12*(id_wp(j)^6)*(iq_wp(i)^2);
A(6,4)=A(4,6);
A(5,5)=A(5,5)+16*iq_wp(i)^6;

A(2,9)=A(2,9)+12*iq_wp(i)^6;                           % tr 10
A(9,2)=A(2,9);
A(3,8)=A(3,8)+8*(id_wp(j)^4)*(iq_wp(i)^4);
A(8,3)=A(3,8);
A(4,7)=A(4,7)+8*(id_wp(j)^4)*(iq_wp(i)^4)+
    +4*(id_wp(j)^6)*(iq_wp(i)^2);
A(7,4)=A(4,7);

A(4,8)=A(4,8)+8*(id_wp(j)^4)*(iq_wp(i)^4)+           % tr 11
    +4*(id_wp(j)^2)*(iq_wp(i)^6);
A(8,4)=A(4,8);
A(5,7)=A(5,7)+8*(id_wp(j)^4)*(iq_wp(i)^4);
A(7,5)=A(5,7);
A(6,6)=A(6,6)+36*id_wp(j)^10;

A(4,9)=A(4,9)+12*(id_wp(j)^2)*(iq_wp(i)^6);           % tr 12
A(9,4)=A(4,9);
A(5,8)=A(5,8)+16*(id_wp(j)^2)*(iq_wp(i)^6);
A(8,5)=A(5,8);
A(6,7)=A(6,7)+24*(id_wp(j)^8)*(iq_wp(i)^2);
A(7,6)=A(6,7);

A(5,9)=A(5,9)+24*iq_wp(i)^8;                           % tr 13
A(9,5)=A(5,9);
A(6,8)=A(6,8)+12*(id_wp(j)^6)*(iq_wp(i)^4);
A(8,6)=A(6,8);
A(7,7)=A(7,7)+4*(id_wp(j)^8)*(iq_wp(i)^2)+
    +16*(id_wp(j)^6)*(iq_wp(i)^4);

A(7,8)=A(7,8)+8*(id_wp(j)^4)*(iq_wp(i)^6)+           % tr 14
    +8*(id_wp(j)^6)*(iq_wp(i)^4);
A(8,7)=A(7,8);

```

```

A(7,9)=A(7,9)+12*(id_wp(j)^4)*(iq_wp(i)^6);           % tr 15
A(9,7)=A(7,9);
A(8,8)=A(8,8)+4*(id_wp(j)^2)*(iq_wp(i)^8)+
        +16*(id_wp(j)^4)*(iq_wp(i)^6);

A(8,9)=A(8,9)+24*(id_wp(j)^2)*(iq_wp(i)^8);         % tr 16
A(9,8)=A(8,9);
A(9,9)=A(9,9)+36*iq_wp(i)^10;                       % tr 17

end
end

% VETTORE b
b=zeros(9,1);

for i=1:1:length(iq_wp)
    for j=1:1:length(id_wp)

        b(1)=b(1)+2*id_wp(j)*flux_d(i,j);

        b(2)=b(2)+2*iq_wp(i)*flux_q(i,j);

        b(3)=b(3)+4*(id_wp(j)^3)*flux_d(i,j);

        b(4)=b(4)+2*id_wp(j)*(iq_wp(i)^2)*flux_d(i,j)+
            +2*(id_wp(j)^2)*iq_wp(i)*flux_q(i,j);

        b(5)=b(5)+4*(iq_wp(i)^3)*flux_q(i,j);

        b(6)=b(6)+6*(id_wp(j)^5)*flux_d(i,j);

        b(7)=b(7)+4*(id_wp(j)^3)*(iq_wp(i)^2)*flux_d(i,j)+
            +2*(id_wp(j)^4)*iq_wp(i)*flux_q(i,j);

        b(8)=b(8)+2*id_wp(j)*(iq_wp(i)^4)*flux_d(i,j)+
            +4*(id_wp(j)^2)*(iq_wp(i)^3)*flux_q(i,j);

        b(9)=b(9)+6*(iq_wp(i)^5)*flux_q(i,j);
    end
end

x=A\b;

save('Coeff_coenergia.mat','x')

%***** TRACCIAMENTO GRAFICI*****

% COENERGIA

for i=1:1:length(iq_wp)
    for j=1:1:length(id_wp)
        coenergia(i,j)=x(1)*(id_wp(j)^2)+x(2)*(iq_wp(i)^2)+
            +x(3)*(id_wp(j)^4)+x(4)*(id_wp(j)^2)*(iq_wp(i)^2)+
            +x(5)*(iq_wp(i)^4)+x(6)*(id_wp(j)^6)+

```

```

+x(7)*(id_wp(j)^4)*(iq_wp(i)^2)+
+x(8)*(id_wp(j)^2)*(iq_wp(i)^4)+
+x(9)*(iq_wp(i)^6);
    end
end

surf(id_wp,iq_wp,coenergia)
title('Coenergia')
xlabel('id')
ylabel('iq')
print('Coenergia','-djpeg');
savefig('Coenergia')
figure

% FLUSSO d

for i=1:1:length(iq_wp)
    for j=1:1:length(id_wp)
        flux_d_int(i,j)=2*x(1)*id_wp(j)+4*x(3)*(id_wp(j)^3)+
            +2*x(4)*id_wp(j)*(iq_wp(i)^2)+
            +6*x(6)*(id_wp(j)^5)+
            +4*x(7)*(id_wp(j)^3)*(iq_wp(i)^2)+
            +2*x(8)*id_wp(j)*(iq_wp(i)^4);
    end
end

surf(id_wp,iq_wp,flux_d)
title('Flusso d')
xlabel('id')
ylabel('iq')
print('Flusso d','-djpeg');
savefig('Flusso d')
hold on
surf(id_wp,iq_wp,flux_d_int)
figure

% FLUSSO q

for i=1:1:length(iq_wp)
    for j=1:1:length(id_wp)
        flux_q_int(i,j)=2*x(2)*iq_wp(i)+2*x(4)*(id_wp(j)^2)*iq_wp(i)+
            +4*x(5)*(iq_wp(i)^3)+2*x(7)*(id_wp(j)^4)*iq_wp(i)+
            +4*x(8)*(id_wp(j)^2)*(iq_wp(i)^3)+
            +6*x(9)*(iq_wp(i)^5);
    end
end

surf(id_wp,iq_wp,flux_q)
title('Flusso q')
xlabel('id')
ylabel('iq')
% print('Flusso q','-djpeg');
% savefig('Flusso q')
hold on
surf(id_wp,iq_wp,flux_q_int)
figure

```

```

% Ld
for i=1:1:length(iq_wp)
    for j=1:1:length(id_wp)
        ld(i,j)=x(1)*2+x(3)*12*(id_wp(j)^2)+x(4)*2*(iq_wp(i)^2)+
                +x(6)*30*(id_wp(j)^4)+x(7)*12*(id_wp(j)^2)*(iq_wp(i)^2)+
                +x(8)*2*(iq_wp(i)^4);
    end
end

surf(id_wp,iq_wp,ld)
title('ld')
xlabel('id')
ylabel('iq')
print('ld','-djpeg');
savefig('ld')
figure

% Lq
for i=1:1:length(iq_wp)
    for j=1:1:length(id_wp)
        lq(i,j)=x(2)*2+x(4)*2*(id_wp(j)^2)+x(5)*12*(iq_wp(i)^2)
                +x(7)*2*(id_wp(j)^4)+x(8)*12*(id_wp(j)^2)*(iq_wp(i)^2)
                +x(9)*30*(iq_wp(i)^4);
    end
end

surf(id_wp,iq_wp,lq)
title('lq')
xlabel('id')
ylabel('iq')
% print('lq','-djpeg');
% savefig('lq')
figure

% Ldq
for i=1:1:length(iq_wp)
    for j=1:1:length(id_wp)
        ldq(i,j)=4*x(4)*id_wp(j)*iq_wp(i)+8*x(7)*(id_wp(j)^3)*iq_wp(i)
                +8*x(8)*id_wp(j)*(id_wp(j)^3);
    end
end

surf(id_wp,iq_wp,ldq)
title('ldq')
xlabel('id')
ylabel('iq')
print('ldq','-djpeg');
savefig('ldq')

```

## 4.1.4 Grafici

Gli andamenti ottenuti per le grandezze di interesse sono di seguito riportati:

### Coenergia

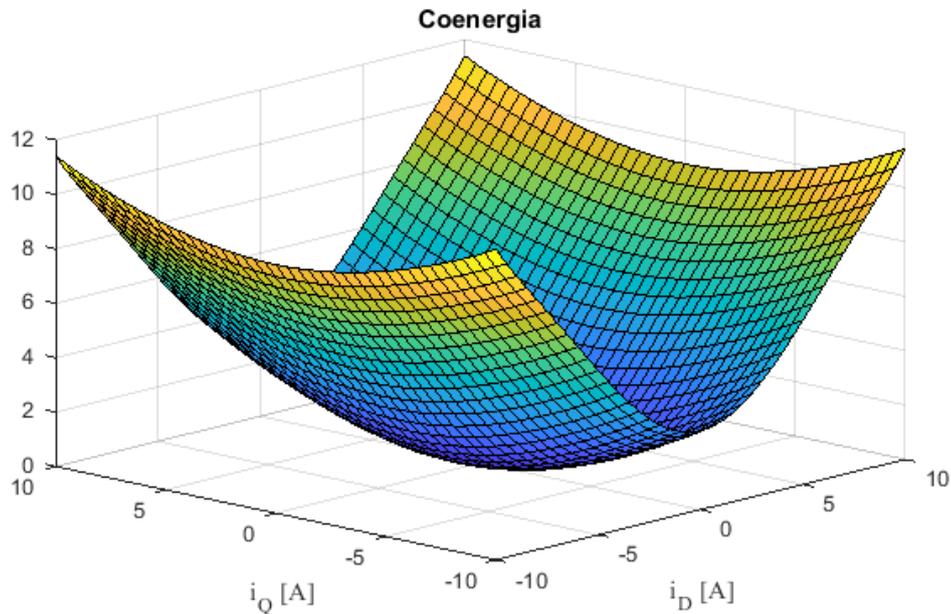
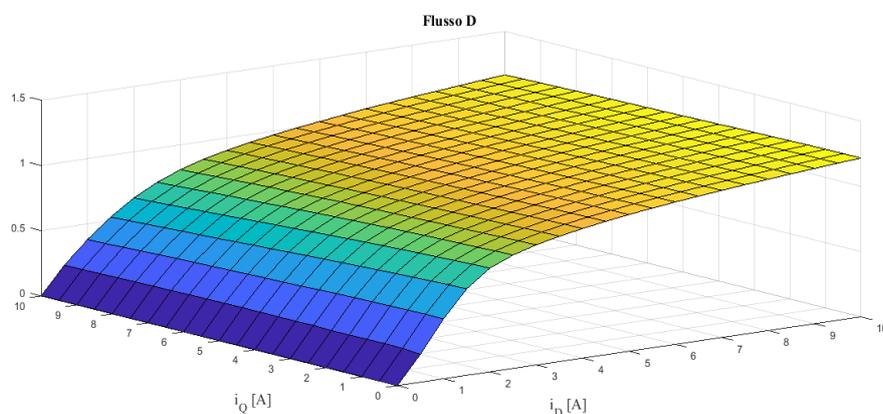


Figura 4.13: Andamento della coenergia ricavato utilizzando la funzione interpolante

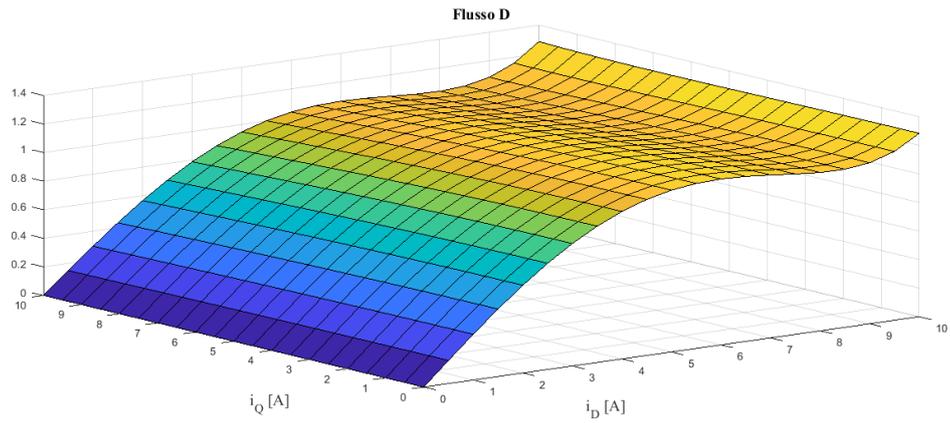
Posso osservare come la coenergia rispetti l'andamento atteso, ovvero assuma sempre valori positivi tranne in corrispondenza dell'origine in cui presenta valore nullo.

### Flussi di asse D e Q

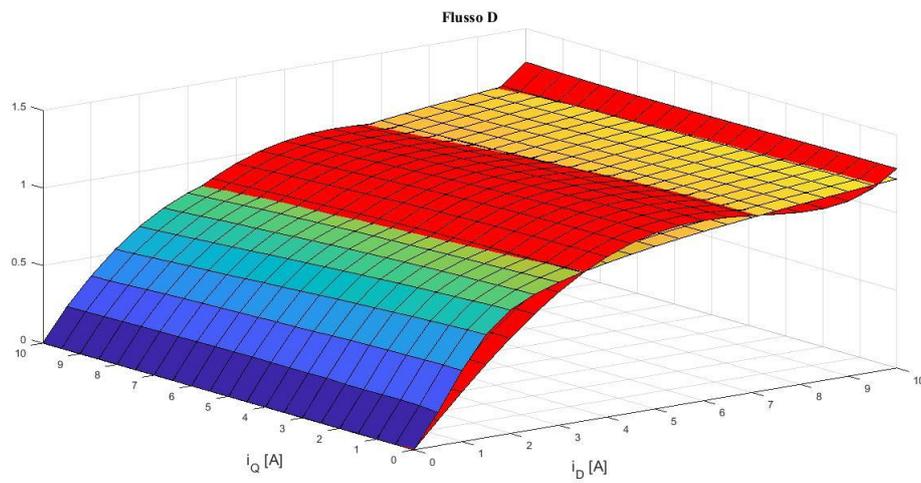
Di seguito sono riportati gli andamenti dei flussi di asse D e Q ottenuti rispettivamente dalle misure eseguite sul motore e dalla funzione interpolante precedentemente presentata. Notiamo come in entrambi i casi la funzione interpolante segua l'andamento reale dei flussi realizzando solo nel caso del flusso di asse D un'oscillazione in corrispondenza al tratto in cui comincia la saturazione.



(a)



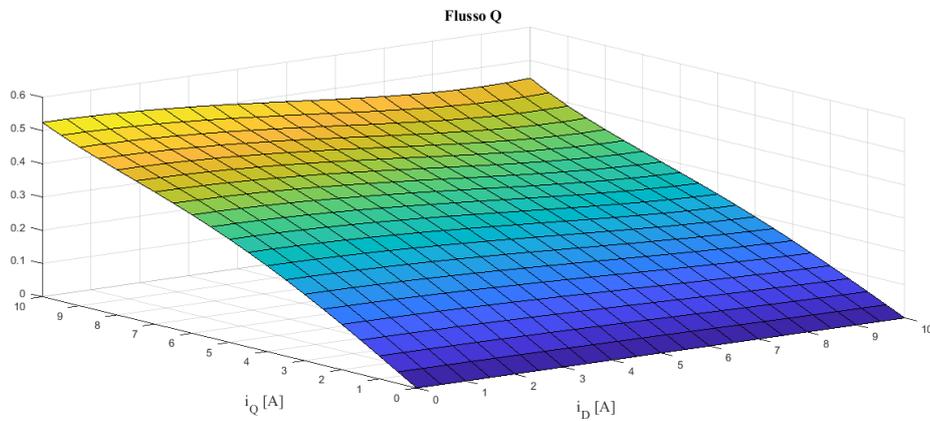
(b)



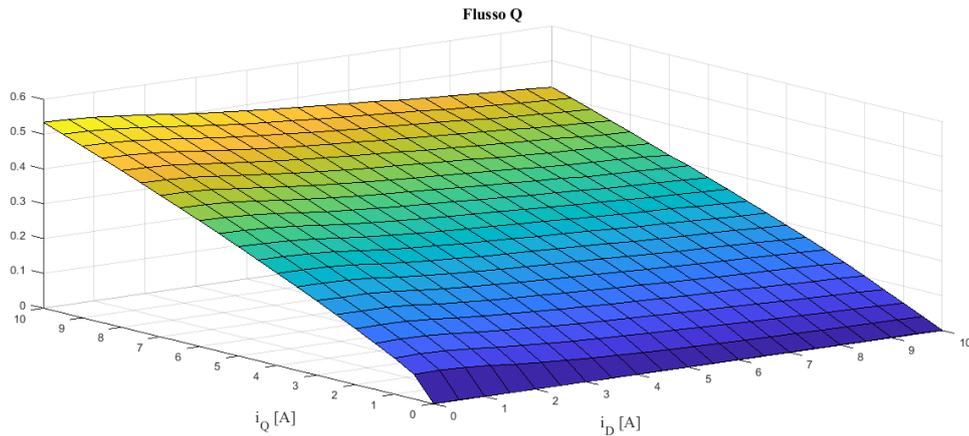
(c)

Figure 4.14: Andamenti del flusso di asse D: nella figura (a) è rappresentato l'andamento del flusso misurato, nella figura (b) è riportato l'andamento del flusso ricavato utilizzando la funzione interpolante precedentemente descritta, mentre in (c) vediamo i due andamenti sovrapposti

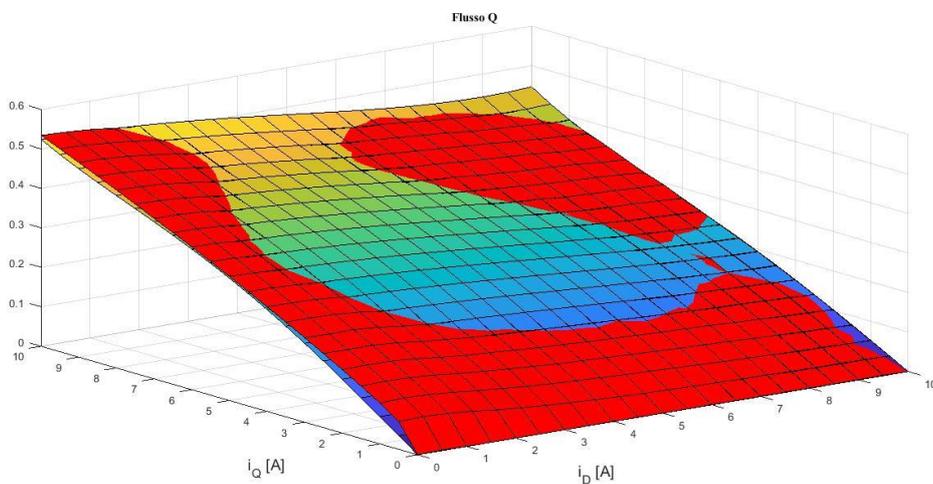
## Flusso di asse Q



(a)



(b)

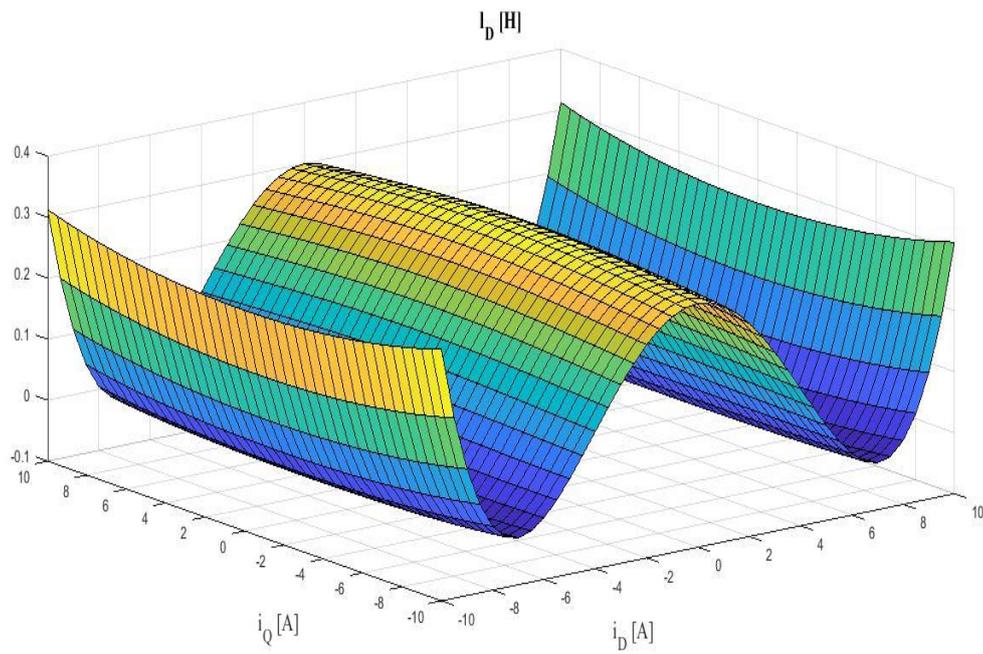


(c)

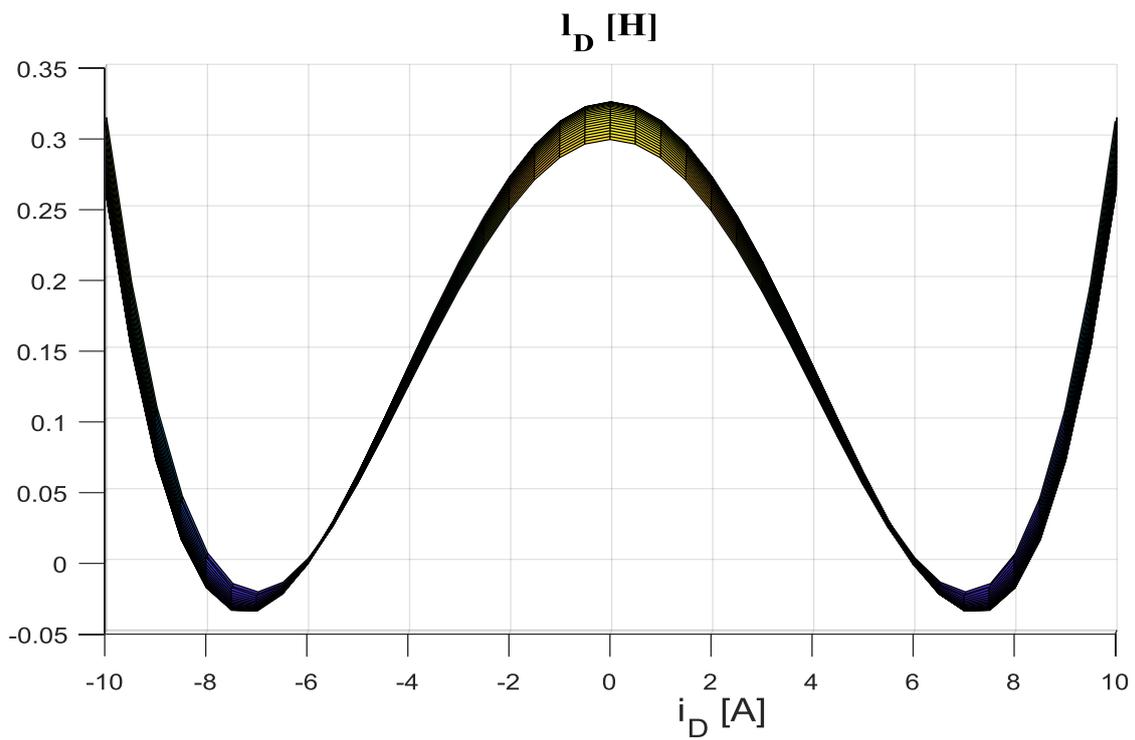
Figure 4.15: Andamenti del flusso di asse  $Q$ : nella figura (a) è rappresentato l'andamento del flusso misurato, nella figura (b) è riportato l'andamento del flusso ricavato utilizzando la funzione interpolante precedentemente descritta, mentre in (c) vediamo i due andamenti sovrapposti

## Induttanze differenziali

Di seguito riporto l'andamento dei valori delle induttanze differenziali interpolati utilizzando le varie funzioni precedentemente scritte derivate dalla funzione che descrive la coenergia. Verifico innanzitutto che le derivate di  $l_D$  rispetto a  $i_D$  e  $l_Q$  rispetto a  $i_Q$  presentano il segno che mi sarei aspettato di ottenere fino a un valore di corrente rispettivamente di asse D e Q circa pari in modulo a 7 [A], dopo di che il segno della derivata cambia. Per quanto riguarda la verifica della positività noto che  $l_Q$  assume solamente valori positivi mentre  $l_D$  assume in corrispondenza alle "valli" valori negativi.

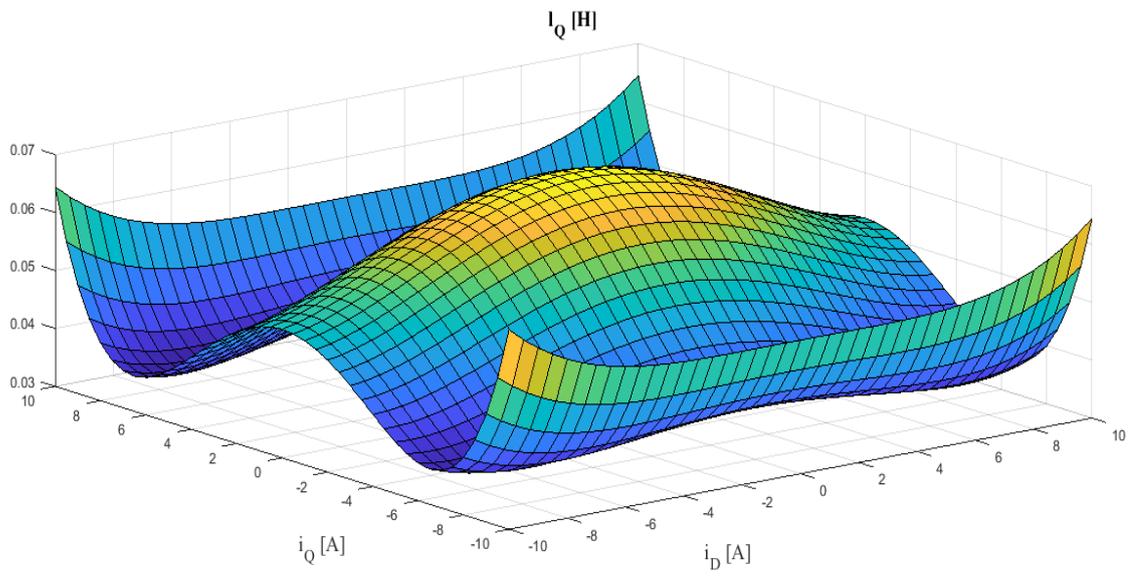


(a)

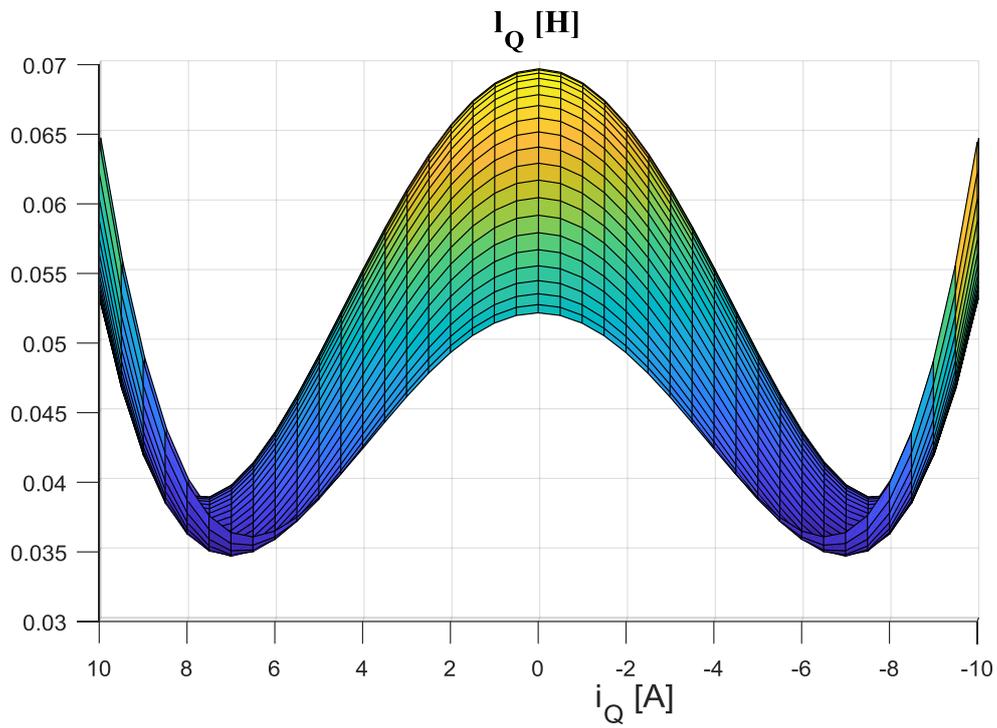


(b)

Figure 7.16:(a) e (b) rispettivamente vista complessiva e laterale andamento  $I_D$



(a)



(b)

Figure 7.17:(a) e (b) rispettivamente vista complessiva e laterale andamento  $i_D$

Per quanto riguarda l'induttanza  $l_{DQ}$  noto che, come si può vedere dalla figura 4.6(b), la condizione posta sul segno, ovvero di dover risultare negativa sul primo e sul terzo quadrante e positiva negli altri è rispettata se non ci si allontana troppo dall'origine degli assi, in corrispondenza ai bordi infatti si vede come questa condizione venga meno presentando in corrispondenza a questi valori positivi indipendentemente dal quadrante in esame.

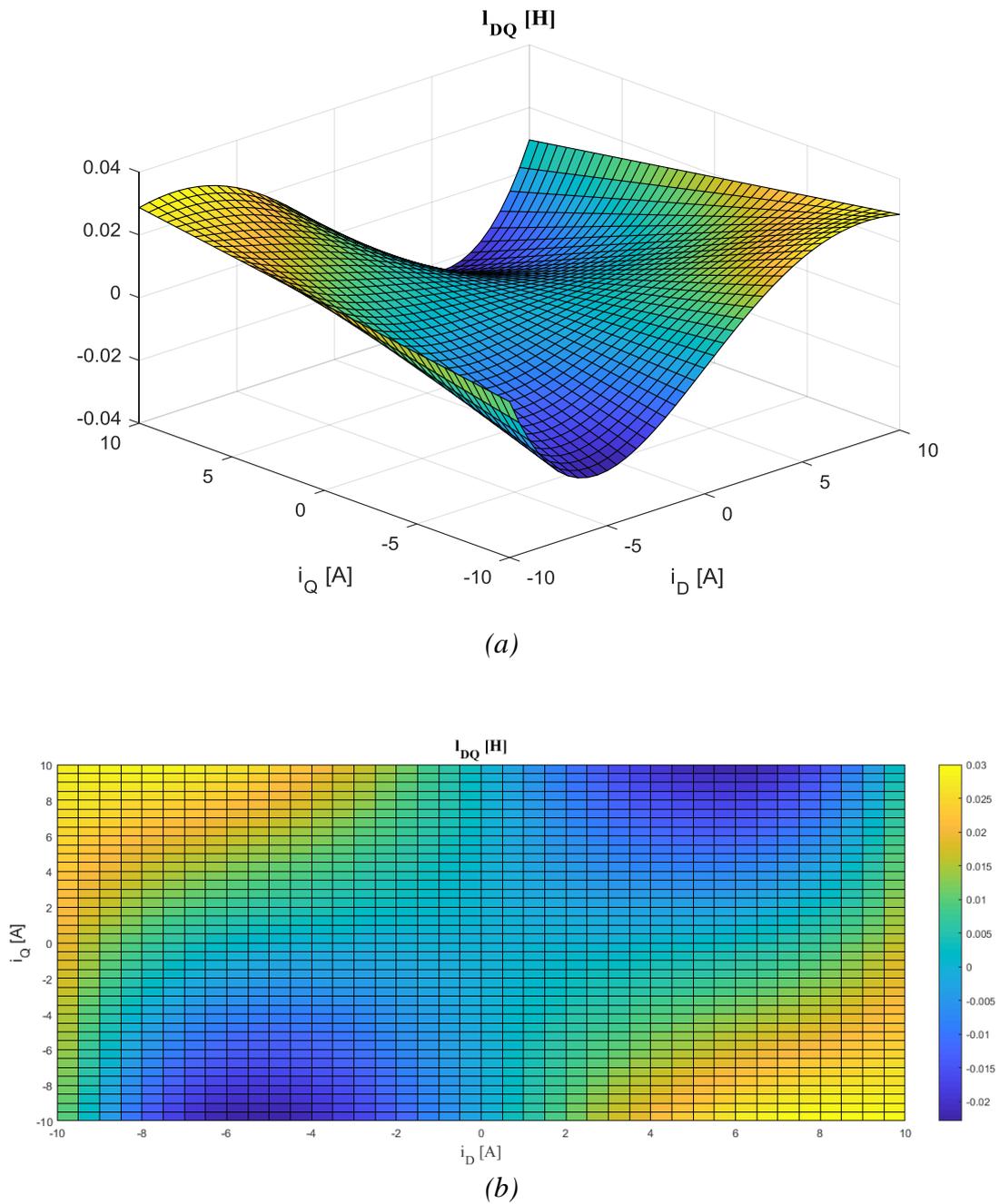


Figure 4.18:(a) e (b) rispettivamente vista complessiva andamento  $l_{DQ}$  e andamento dei valori assunti da  $l_{DQ}$  sul piano  $i_D$ - $i_Q$

#### 4.1.4 Confronto fra errore misurato ed errore stimato

Si sono infine confrontati gli errori di stima della posizione rotorica misurati con l'impiego di LEM, con quanto ottenuto dalla relazione:

$$\varepsilon = \frac{1}{2} \tan^{-1} \left( -\frac{l_{DQ}}{l_{\Delta}} \right)$$

Introducendovi i valori di  $l_{DQ}$  e  $l_{\Delta}$  ricavati dalle funzioni precedentemente descritte, noto che pur essendo presente una certa discrepanza fra i valori di errore ottenuti, muovendosi lungo i due assi di corrente il trend viene rispettato fino a che si lavora con valori contenuti della corrente  $i_D$ .

		$i_D [A]$							
		1	2	3	4	5	6	7	8
$i_Q [A]$	1	-2.4°	-6°	-14	-58	-75.5	-81.5	-83	-84
	2	-2.8	-6.2°	-15	-32	-58	-70	-75.5	-77
	3	-2.8	-8	-12.4	-23.5	-49.5	-65.5	-72.5	-76
	4	-3.8	-9	-13.9	-20	-36.3	-54	-64	-70
	5	-3.4	-9.5	-14.2	-21	-38.5	-53.8	-64	-68
	6	-3.5	-7.8	-14.1	-18.8	-32	-47	-58	-65
	7	-4.1	-8.5	-14.8	-29.8	-34	-45	-57	-63
	8	-4.1	-7.4	-13.8	-20.1	-30.5	-40.5	-52	-60

*Errori di stima della posizione del rotore misurato con l'impiego di LEM esterni*

		$i_D [A]$							
		1	2	3	4	5	6	7	8
$i_Q [A]$	1	-0.1°	-0.3°	-0.7°	-1.6°	-42.7°	2.4°	1.5°	1.7°
	2	-0.3°	-0.6°	-1.3°	-3.1°	-36.6°	4.8°	3.1°	3.5°
	3	-0.4°	-0.9°	-1.8°	-4.3°	-32.2°	7.5°	4.7°	5.4°
	4	-0.5°	-1.2°	-2.3°	-5.3°	-29°	10.4°	6.4°	7.4°
	5	-0.6°	-1.4°	-2.7°	-6.1°	-26.8°	13.4°	8.1°	9.5°
	6	-0.7°	-1.6°	-3.1°	-6.7°	-25.5°	16.3°	9.6°	11.4°
	7	-0.8°	-1.8°	-3.4°	-7.2°	-25.5°	18.3°	10.6°	12.7°
	8	-0.8°	-1.9°	-3.7°	-7.8°	-27°	18.7°	10.9°	12.7°

*Errori di stima della posizione del rotore calcolato utilizzando i valori di  $l_D$ ,  $l_Q$  e  $l_{DQ}$  forniti dalle funzioni interpolanti*

## Capitolo 5

### Conclusioni

I valori dell'errore di stima ricavati utilizzando le interpolazioni localizzate di flussi e correnti, descritte nei paragrafi 1 e 2 del capitolo 4 sono stati confrontati con i valori effettivamente misurati sulla macchina a parità di correnti.

Si può osservare dalle tabelle riportate a rispettivamente a pagina 31 e 41 come generalmente non si possa affermare che i valori trovati siano aderenti agli effettivi valori rilevati dalle misurazioni anche se in alcuni casi ci si avvicinano molto e in una certa misura ne seguano l'andamento.

L'utilizzo dell'interpolazione della funzione coenergia presentato nel paragrafo 3 del capitolo quattro invece, pur producendo una buona approssimazione degli andamenti dei flussi di asse D e Q non permette di ricavare valori di errore più prossimi a quelli reali.

Dal confronto riportato a pagina 72 infatti si vede come lo scostamento rispetto all'approccio precedente sia maggiore, oltre a notare un'inversione di segno dell'errore stesso che caratterizza però punti di lavoro in cui gli andamenti delle induttanze ricavati non soddisfacevano le condizioni poste per approssimare adeguatamente i parametri ricavati.

Si può concludere che una soluzione generale del problema sia di difficile formulazione mentre risultati più attendibili siano ricavabili qualora si cerchino parziali modellizzazioni della macchina. Queste possono rivelarsi di interesse per quanto riguarda l'implementazione di migliorie alla compensazione nelle strategie di controllo volte a ridurre o a compensare gli effetti delle non linearità magnetiche.

## Capitolo 6

### Bibliografia

- [1] V. Manzolini, M. Morandin, S. Bolognani, “The Crowded Axis of the Frequency: Optimal Pole/Zero Allocation for a Full Speed Sensorless Synchronous Motor Drives”, *IEEE Energy Conversion Congress and Exposition (ECCE)*, Milwaukee, September 2016.
- [2] D. Mingardi, M. Morandin, S. Bolognani, N. Bianchi “On the Proprieties of the Differential Cross-Saturation Inductance in Synchronous Machines”, *IEEE Transactions on Industrial Applications*, vol. 53, no.2, pp. 991-1000, October 2016.
- [3] S. Bolognani, Dispense delle lezioni del corso di Azionamenti Elettrici, anno accademico 2013/2014, Università di Padova.
- [4] P. Alotto, Dispense delle lezioni del corso di Elettrotecnica Computazionale, anno accademico 2015/2016, Università di Padova.
- [5] N. Bianchi, Calcolo delle Macchine Elettriche col Metodo degli Elementi Finiti, CLEUP, Padova, 2001.