Università degli studi di Padova

DIPARTIMENTO DELL'INGEGNRIA DELL'INFORMAZIONE

Corso di laurea in Ingegneria dell'Informazione

TESI DI LAUREA TRIENNALE

Fondamenti di Teoria dei Giochi e Applicazioni nell'Ingegneria dell'Informazione

Candidato:

Davide Bosello

Matricola 618297-INF

Relatore:

Prof. Luca Schenato

Anno Accademico 2012-2013

Prefazione

Questa Tesi ha lo scopo di illustrare i fondamenti di una branca della scienza matematica abbastanza recente quale la *Teoria dei giochi* che analizza il comportamento di due o più individui, chiamati giocatori, di fronte ad una determinata situazione di conflitto o di cooperazione, chiamata problema. In seguito verranno fornite alcune applicazioni che questa teoria ha riscontrato nell'ambito dell'ingegneria dell'informazione, in particolare si cercherà di approfondire il suo utilizzo nei problemi di instradamento nel campo delle telecomunicazioni, nell'ambito biomedico (biologia evoluzionistica) e nei protocolli per lo scambio di file con la tecnica Peer-to-Peer.

Indice

1. Introduzione

1.1 Introduzione 1
1.2 Cenni Storici 1
1.3 Teoria dei Giochi nell'ingegneria 2

2. Definizioni e Proprietà

2.1 Definizione di Gioco 3
2.1.1 Giochi di coordiamento 3
2.1.2 Giochi competitivi 4
2.1.3 Giochi di coesistenza 4
2.2 Informazione di un gioco 5
2.3 Rappresentazione di un gioco 6
2.4 Teoria dell'utilità 9

3. Strategie ed Equilibrio di Nash

3.1 Strategie Pure ed Equilibrio di Nash 11
3.2 Strategie Miste ed Equilibrio di Nash 15
3.2.1 Definizioni per Strategie Miste 15
3.2.2 Equilibrio di Nash per Strategie Miste 15
3.2.3 L'Ottimo di Pareto 18
3.3 Dominanza 19
3.4 Inefficienza dell'equilibrio di Nash e suoi miglioramenti 20

4. Soluzione di un Gioco

4.1 Soluzione per dominanza 24
4.2 Soluzione a ritroso (Backward Induction) 25
4.3 Soluzione Maxmin 27

5. Applicazioni della Teoria dei Giochi

5.1 Biologia Evoluzionistica 29
5.1.1 Teoria dei Giochi nella Biologia Evoluzionistica 29
5.1.2 Teoria dei Giochi e comportamento delle specie 29
5.2 Reti Peer-to-Peer 32
5.2.1 Concetti Base delle reti Peer-to-Peer 32
5.2.2 Modellizzazione tramite Teoria dei Giochi per le reti P2P 32

5.3 Instradamento (Routing) 35
5.3.1 Concetti base dell'instradamento 35
5.3.2 Modellizzazione tramite Teoria dei Giochi per il Selfish Routing 35
Conclusione 39
Bibliografia 40

Capitolo 1

Introduzione

1.1 Introduzione

La teoria dei giochi è una disciplina alquanto vasta, il cui scopo è analizzare il comportamenti strategici dei decisori (giocatori), ovvero studiare le situazioni in cui diversi giocatori interagiscono perseguendo obiettivi comuni, diversi o conflittuali, e trovare un modello matematico che dia a tal gioco una soluzione, cioè l'identificazione di una o più strategie, da parte dei diversi giocatori, compatibili con determinate assunzioni di razionalità e intelligenza dei giocatori stessi.

I concetti di soluzione di un gioco intendono descrivere quelle strategie che i decisori, individualmente o congiuntamente, dovrebbero seguire come conseguenza di quell'ipotesi di razionalità a cui si accennava prima; ogni giocatore deve cercare di ottenere sempre la massima utilità percepibile. Se poi nella realtà ciò non accade, bisogna chiedersi se il problema è che il modello matematico non cattura tutti i possibili aspetti o che i giocatori tendono alcune volte a comportarsi in maniera non razionale.

Come vedremo in seguito nella descrizione di un modello matematico che rappresenta il gioco possono comparire in alcuni casi aspetti aleatori; la differenza fondamentale tra la teoria delle decisioni e la teoria dei giochi sta nel fatto che mentre nella prima un singolo decisore si trova ad affrontare un problema decisionale di fronte ad uno "stato di natura" aleatorio, di cui eventualmente conosce la caratterizzazione probabilistica, nella seconda il giocatore si trova davanti ad un altro (o più) giocatore. Quindi in un problema decisionale lo scopo è quello di giungere ad una scelta ottimale, in un gioco invece occorre elaborare un concetto diverso, quello di equilibrio.

1.2 Cenni Storici

La teoria dei giochi è una disciplina abbastanza recente: si comincia ad intravedere qualcosa negli scritti di qualche matematico ed economista del XVIII e XIX secolo, ma la sua nascita si può far risalire al 1928, anno di pubblicazione del saggio *Zur Theorie der Gesellschaftsspiele* del matematico ungherese *Von Neumann,*, che presenta la prima trattazione generale sull'argomento. Lo stesso matematico insieme all'economista *Morgenstern* darà un ulteriore importante svolta grazie alla pubblicazione del libro *Theory of games and economic behavior* nel 1944 dove la teoria dei giochi è presentato come strumento analitico fondamentale per la formulazione di modelli nelle scienze sociali e in particolare nell'economia. All'inizio degli anni '50 un matematico di nome John Nash sviluppò nei suoi articoli un concetto chiave della teoria, che prenderà per l'appunto il nome di Equilibrio di Nash. Negli anni '70 la teoria dei giochi venne utilizzata come strumento nello studio della biologia evoluzionistica. Proprio per il suo vastissimo campo di applicabilità, ai giorni nostro la teoria dei giochi viene studiata e applicata in numerosissimi ambiti che richiedono una particolare formulazione matematica applicabile a situazioni di conflitto e in situazioni dove più giocatori devono prendere una decisione.

1.3 Teoria dei giochi nell'ingegneria

Sebbene come visto la teoria dei giochi sia una scienza matematica molto giovane, essa ha già trovato numerose applicazioni nell'ambito dell'ingegneria. Il primo grande utilizzo di queste teorie fu nella bioingegneria; applicando questa scienza gli studiosi cercano e cercarono di approfondire le teorie evoluzionistiche con modelli sempre più dettagliati. Altre applicazioni ingegneristiche della teoria dei giochi si possono notare nelle reti di trasporto, intese sia come reti stradali che come reti di comunicazioni; infatti viene ora proposta come importante modello per trovare una soluzione ottima nei problemi di instradamento (routing) dove ogni giocatore, in base alle conoscenze, elabora la propria strategia per ottenere il massimo rendimento possibile. Un ultima applicazione che verrà approfondita in questa tesi è l'utilizzo della teoria dei giochi nelle reti Peer-to-Peer: essa è una rete informatica dove i nodi non sono gerarchizzati unicamente sotto forma di client o server fissi (clienti e serventi), ma sotto forma di *nodi equivalenti* o *paritari* (in inglese *peer*) che possono cioè fungere sia da cliente che da servente verso gli altri nodi terminali della rete.

Queste tre applicazioni della teoria dei giochi verranno analizzate in dettaglio una ad una nel capitolo 4.

Capitolo 2

Definizioni e Proprietà

2.1 Definizione di Gioco

In questo paragrafo si vuol dare una definizione di gioco strategico ed esaminare alcuni esempi significativi di classi di giochi particolari che in seguito verranno poi utilizzati.

Un *gioco strategico* è un modello di interazione tra *decisori* (detti anche *giocatori*) in cui ciascuno pianifica le proprie azioni una volta per tutte, e tali scelte sono effettuate simultaneamente; esso è costituito da N giocatori, ciascuno dei quali possiede un insieme $A^i = (a_1^i, a_2^i, \dots, a_{ni}^i)$ di n_i possibili azioni o *strategie*. Se ciascun giocatore sceglie una strategia $a_k^i \in A^i$, si ha un *profilo di strategie* $\mathbf{s} = (s_1, s_2, \dots, s_n)$, ovvero una N-pla di strategie cui corrisponde un *risultato*; tipicamente la relazione di preferenza di ciascun giocatore sull'insieme A può essere espressa attraverso una funzione di utilità (o *payoff)* che fa corrispondere valori più elevati a risultati più graditi da ogni singolo giocatore. Dunque al giocatore *i* possiamo associare una funzione di utilità $u_i(\mathbf{a})$, definita su A, che esprime l'utilità per il giocatore i derivante dal profilo **a**.

Secondo la classificazione di Harsanyi (1966) si possono distinguere due sottoclassi di giochi:

- **Giochi Non Cooperativi**: Nei quali non è possibile nessun accordo tra i vari giocatori.
- **Giochi Cooperativi**: Nei quali sono possibili accordi tra i giocatori.

Da queste due sottoclassi è possibile distinguere altri gruppi di giochi, che potranno essere utili in seguito.

2.1.1 Giochi di Coordinamento

I *giochi di coordinamento* possono essere visti come un estensione dei giochi cooperativi; in questi giochi la comunicazione e gli accordi tra i giocatori sono aspetti fondamentali: i loro payoff infatti sono più alti quando essi sono in grado di coordinare le loro strategie. Il problema consiste, in pratica, nell'individuare meccanismi che consentano il coordinamento delle scelte. Per far capire meglio di cosa si tratta porteremo un esempio.

La Battaglia dei sessi

L'esempio classico di gioco di coordinamento è la cosiddetta battaglia dei sessi. In questo gioco, un ragazzo e una ragazza vogliono incontrarsi in un cinema, ma non sono riusciti a mettersi d'accordo *su quale. Sfortunatamente, hanno dimenticato i cellulari a casa quindi non hanno nessun modo per coordinare le loro azioni. A ciascuno di loro non resta altro da fare che indovinare quale film vorrebbe vedere l'altro. Si sa che al ragazzo farebbe piacere guardare un film d'azione, mentre la ragazza preferirebbe un film romantico; ma entrambi preferiscono guardare il film con l'altro piuttosto che non incontrarsi.*

Anche se non è stata ancora introdotta formalmente la funzione di utilità, è facile capire che essa sarà maggiore quando i giocatori riescono a coordinare le loro azioni piuttosto che quando non le coordinano.

2.1.2 Giochi Competitivi

L'esatto opposto dei giochi di coordinamento visti in precedenza sono i *giochi competitivi:* è il caso dei *giochi a somma zero* (ovviamente non tutti i giochi competitivi sono per forza a somma zero), chiamati così perché i guadagni relativi ad un giocatore corrispondono alle perdite del suo avversario, cioè la somma dei payoff è nulla.

Testa o Croce

A e B, due giocatori qualsiasi, devono scrivere "testa" o "croce" su di una lavagnetta, senza ovviamente sapere cosa l'avversario ha scritto sulla sua. Se voltando le lavagnette si scopre che hanno scritto la stessa cosa B cede ad A un premio in denaro, viceversa A cede a B lo stesso quantitativo di denaro.

Da questo esempio è facile intuire che entrambi avranno la stessa probabilità di perdere o vincere (non sempre ciò è vero in un gioco competitivo), e che la relativa vittoria di un giocatore corrisponde alla sconfitta dell'avversario.

2.1.3 Giochi di coesistenza

I *giochi di coesistenza* sono una classe di giochi particolare in cui i giocatori sono in competizione l'uno con l'altro ma allo stesso tempo devono cercare di cooperare in modo da ottenere il massimo payoff possibile. Negli ultimi anni i biologi hanno adottato questo tipo di classe come strumento per studiare il comportamento animale.

Falco Colomba

Due animali devono contendersi una preda. Ciascuno può decidere di comportarsi da Falco o da Colomba. Nel caso in cui uno dei due decida di comportarsi da falco e l'altro da colomba non ci sarà spartizione della preda, il falco otterrà da ciò la massima utilità percepibile mentre la colomba dovrà abbandonare la preda. Se entrambi decidono di comportarsi da colomba ci sarà un equa *spartizione della preda dando ad entrambi una certa utilità, che non sarà comunque massima. L'ultimo caso possibile è che entrambi gli animali decidano di comportarsi da falchi; in questo caso entrambi vogliono la preda con il rischio di farsi del male e di non ottenere niente.*

Da questo esempio è facile notare che la massima utilità per ognuno dei giocatori si raggiunge comportandosi da falchi nella speranza che l'altro giocatore decida di comportarsi da colomba. Ma è più probabile, e in realtà molto più conveniente, trovare un accordo per comportarsi entrambi da colomba e dividersi l'utilità.

2.2 Informazione di un Gioco

Un'altra classificazione importante può essere fatta in base alla conoscenza che ogni giocatore ha del gioco:

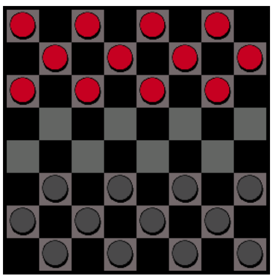
- **Giochi ad informazione perfetta**: Tutti gli individui sono a conoscenza delle possibili azioni e del possibile rendimento di ogni altro giocatore per ogni singola mossa.
- **Giochi ad informazione completa**: tutti gli individui possiedono tutte le informazioni sul contesto e sulle decisioni prese dagli avversari, ma non necessariamente su tutte le loro possibili azioni.
- **Giochi ad informazione incompleta**: almeno un individuo non possiede alcuna informazione sulle possibili azioni e sulle utilità percepibili dagli avversari.

OSSERVAZIONE 1: I giochi a informazione perfetta sono necessariamente *sequenziali*, ovvero a turni. In questo modo, la mossa del giocatore può essere effettivamente basata su una conoscenza completa del contesto (incluse tutte le mosse avversarie rilevanti).

OSSERVAZIONE 2: I giochi ad informazione completa sono molto simili ai giochi ad informazione perfetta ma differiscono nella tempistica. Infatti come si nota dall'osservazione 1 un gioco per essere ad informazione perfetta deve essere necessariamente sequenziale. Nel caso invece del gioco da informazione completa non deve esserci sequenzialità ma bensì simultaneità.

Dalle osservazioni è facile notare che un gioco ad informazione perfetta è anche un gioco ad informazione completa, il viceversa invece non è vero.

Esempio (gioco ad informazione perfetta)



Un tipico gioco ad informazione perfetta è il gioco della dama. In questo gioco due decisori, i rossi e neri, si sfidano cercando di mangiarele pedine dell'avversario. Qui in ogni momento un giocatore è ha conoscenza dell'ultima mossa dell'avversario.

Esempio (gioco ad informazione completa)

Il più banale gioco ad informazione completa è sicuramente il "pari e dispari". Ad ognuno dei due giocatori viene chiesto di lanciare simultaneamente un numero da uno a cinque (le dita della mano). La somma dei due numeri lanciati determina il vincitore in base a se tale numero è pari o dispari.

Esempio (gioco ad informazione incompleta)

Esempi di giochi ad informazione incompleta sono la briscola o la scopa. In questi casi ogni giocatore è ha conoscenza delle proprie carte ma non di quelle dell'avversario (o degli avversari). Quindi ogni giocatore non ha la piena conoscenza del gioco ma solo una parziale e deve scegliere la propria strategia in base alle conoscenze che ha e che derivano man mano dal gioco.

2.3 Rappresentazione di un gioco

Un gioco può essere presentato tipicamente in tre forme:

- La **forma estesa**: introdotta da Von Neumann e formalizzata da Kuhn nel 1953
- La **forma strategica**: già definita da Von Neumann e Morgenstern nel Theory of Games
- La **forma caratteristica**: sempre dovuta a Von Neumann e Morgenstern

Esaminiamo ora in dettaglio ognuna delle tre forme e successivamente illustreremo il classico esempio della teoria dei giochi, il dilemma del prigioniero, rappresentandolo con ognuna delle forme.

Forma estesa

E’ una descrizione puntuale del gioco, tiene memoria di tutte le situazioni, mosse e strategie di ogni singolo giocatore; risulta molto ricca sulla conoscenza del gioco ma assolutamente poco maneggievole. In generale utilizza una rappresentazione ad albero in cui a ogni nodo si associa una possibile situazione di gioco, agli archi uscenti da ciascuno di questi nodi si associano le possibili mosse del giocatore. Alle foglie dell’albero si associano i valori di payoff di ciascun giocatore (quando si arriva alle foglie dell’albero significa che il gioco è terminato).

Forma strategica

Nella forma strategica, o forma normale, a differenza della forma estesa non si utilizzano rappresentazioni grafiche per descrivere il gioco ma esso viene rappresentato per mezzo di una matrice. Rispetto alla forma esso è meno descrittivo della forma estesa che esamina situazione per situazione ma potrà essere molto più utile quando si dovranno trovare delle strategie dominanti e degli equilibri di Nash (spiegheremo in seguito di cosa si tratterà). La forma strategica di un gioco include per ogni giocatore tutte le possibili strategie e i relativi payoff.

Forma caratteristica

Questa forma può essere usata solo per i giochi cooperativi in quanto fa riferimento alla nozione di *coalizione*. Per spiegare in cosa consiste tale forma bisogna quindi innanzitutto introdurre due concetti quali il significato di coalizione e quello di funzione caratteristica.

Coalizione: in un gioco si parla di coalizione quando due o più giocatori decidono di mettersi d’accordo per riuscire ad ottimizzare il loro payoff. Detto *N* l’insieme dei giocatori, ogni sottinsieme *S* di N è detto coalizione. Se *S=N* allora si parla di *grande coalizione*.

Funzione caratteristica: si dice funzione caratteristica di un gioco a *n* giocatori una funzione indicata con *v* per cui si ha:

$$v: \varphi(N) \to R \quad con\ v(\emptyset) = 0$$

Se per ogni coppia di coalizioni disgiunte S e T si ha:

$v(S \cup T) = v(S) + v(T)$ la funzione è detta *additiva*.

$v(S \cup T) \geq v(S) + v(T)$ la funzione è detta *superadditiva*.

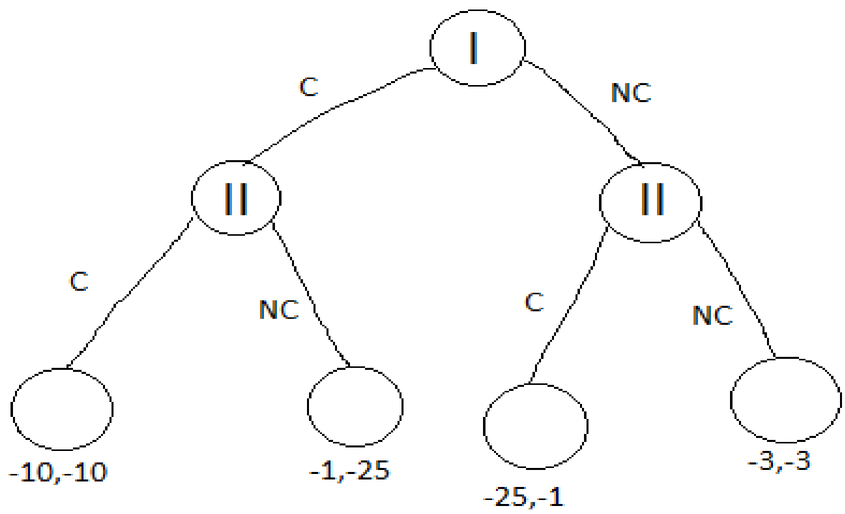
$v(S \cup T) \leq v(S) + v(T)$ la funzione è detta *subadditiva*.

Un gioco descritto tramite la funzione caratteristica viene detto in forma caratteristica, o appunto coalizionale. Se la funzione è additiva, superadditiva o subattiva anche il gioco viene detto addittivo, superadditivo o subadditivo.

Dilemma del prigioniero

Due persone, sospettate di aver commesso un crimine sono detenute in celle separate. Ognuno può scegliere di confessare (C) oppure di non confessare (NC). La scelta di ciascuno dei due influenza anche l'altro ma non possono comunicare tra di loro (in realtà anche se potessero comunicare il gioco non cambierebbe). Se entrambi confessano saranno condannati a 10 anni di prigione, se solo uno dei due confessa, accusando dunque l'altro, potrà beneficiare di uno sconto di pena e avrà solo 1 anno di carcere mentre l'altro, non avendo confessato avrà 25 di anni da scontare; infine se entrambi non confesseranno, in mancanza di prove schiaccianti ambedue le persone saranno condannate a 3 anni di prigione. Vogliamo ora schematizzare questa situazione con tutte e tre le forme di rappresentazione.

Forma estesa.



Forma strategica.

1 \ 2	C	NC
C	-10,-10	-1,-25
NC	-25,-1	-3,-3

<u>*Forma caratteristica.*</u>

$$\boldsymbol{N = \{I, II\}}$$

$$v(\emptyset) = 0; \qquad v(I) = v(II) = -10; \qquad v(I, II) = -6$$

Come si può notare dall’esempio la forma estesa contiene più informazione sul gioco rispetto alla forma strategica, comunque molto sufficiente per descriverlo.

2.4 Teoria dell’utilità

Nei paragrafi e negli esempi precedenti abbiamo usato più di qualche volte il termine *utilità*; ora cercheremo di fornire una definizione precisa di tale termine e introdurremo il concetto di *preferenza*.

In un gioco i partecipanti cercano di adottare una strategia che permetta loro di giungere al risultato che preferiscono, cioè vogliono massimizzare la loro utilità. Cominciamo con definire il termine preferenza e indifferenza.

Definizione

- *Dati due eventi, A e B, si dice che A è preferibile a B per un giocatore se egli cerca di conseguire A invece di B.*
- *Dati due eventi, A e B, si dice che A è indifferente a B per un giocatore se nessuno dei due eventi è preferibile all’altro.*

Ora che abbiamo dato la definizione di preferenza possiamo introdurre la funzione di utilità:

Definizione

- *Dato un insieme di eventi E, una relazione di preferenza su E può essere rappresentata con una funzione di utilità*

$$u: E \to R \ t.c. \forall \textit{ coppia di eventi } E_1, E_2 \in E, E_1 \text{ è } preferibile\ ad\ E_2\ se\ e\ solo\ se\ u(E_1) > u(E_2)$$

OSSERVAZIONE 1: nel caso un giocatore non abbia preferenza su due eventi di E, cioè sono indifferenti E_1 ed E_2, allora $u(E_1) = u(E_2)$.

OSSERVAZIONE 2: la funzione di utilità, non solo dice che evento è preferibile ad un altro, ma permette anche di quantificare le preferenze.

OSSERVAZIONE 3: la funzione di utilità è lineare e unica a meno di trasformazioni affini; cioè *u* è una funzione di utilità se e solo se lo è anche $z = Au + B \;\; con \; A > 0$

Verrà ora presentato un esempio per cercare di di capire quale sia la differenza tra guadagno e utilità.

Ultimatum game

Due persone devono dividersi la cifra di 100 euro con le seguenti regole:

- *Il Giocatore 1 propone una divisone (numeri interi, lasciando almeno un euro a ciascuno)*
- *Se il Giocatore 2 accetta al divisione avrà luogo e il gioco termina*
- *Se il Giocatore 2 non accetta nessuno dei due giocatori riceverà nessuna somma e il gioco terminerà*

Quale cifra conviene proporre al giocatore 1?

La scelta ottimale per il secondo giocatore è accettare sempre (almeno prenderà qualcosa), quindi la scelta migliore per il primo giocatore è proporre il massimo (99 euro).

Nelle sperimentazioni però ciò non si realizza quasi mai, poiché l'utilità reale dei giocatori tiene conto anche di altri fattori, ad esempio l'equità (perché io devo accettare un solo euro e lasciartene a te 99 quando possiamo averne entrambi 50??), e quindi una funzione di utilità che dipende solo dalla quantità di denaro non rappresenta a pieno le preferenze dei giocatori.

Capitolo 3

Strategie ed Equilibrio di Nash

3.1 Strategie Pure ed equilibrio di Nash

Nella teoria dei giochi una *strategia* di un giocatore è un completo piano di gioco; cioè l'insieme di tutte le mosse ammissibili di tale giocatore per ogni circostanza in cui esso è chiamato ad agire.

Come già visto nel precedente capitolo, il giocatore sarà chiamato a scegliere la propria strategia tra un insieme che ha a disposizione, scelta quella strategia otterrà un piano di gioco da cui deriverà il suo risultato. D'ora in avanti faremo l'ipotesi che ogni giocatore non scelga a caso la propria strategia tra quelle che ha a disposizione, ma scelga quella che gli garantisce un'utilità maggiore, facendo così l'ipotesi che ogni giocatore sia *razionale*; tale assunzione ha senso in quasi tutti i casi, infatti ogni giocatore dovrebbe cercare di ottenere il massimo possibile per se (o eventualmente per la sua coalizione).

Detto ciò possiamo introdurre uno dei concetti più importanti della teoria dei giochi, l'equilibrio di Nash:

Definizione

- *Dato un gioco G si dice che la n-pla di strategie* $(s_1^*, s_2^*, \dots, s_n^*)$ *con* $s_i^* \in S_i$ *costituisce un equilibrio se nessun giocatore ha interesse ad essere l'unica che cambia strategia, cioè si ha:*

$$u_i(\boldsymbol{s}^*) \geq u_i(\boldsymbol{s}, \boldsymbol{s}_{-1}^*) \qquad \forall \boldsymbol{s}_i^* \in \boldsymbol{S}_i, \forall\, i \in N$$

$dove\ u_i(s, s_{-1}^*) = u_i(s_1^*, s_2^*, \dots, s_{i-1}^*, s, s_{i+1}^*, \dots, s_n^*).$

Come possiamo desumere direttamente dalla definizione di Equilibrio di Nash, se un giocatore i giocasse una strategia diversa da $\boldsymbol{s}_i^*$ mentre tutti gli altri giocatori giocassero la strategia $s^* \in \boldsymbol{s}_i^*$ potrebbe solo peggiorare, o al più lasciare inalterato, il valore della propria funzione di utilità. Quindi quando si raggiunge un equilibrio di Nash nessun giocatore può migliorare il proprio payoff cambiando strategia.

OSSERVAZIONE 1: Bisogna però fare una precisazione importante: ovviamente possono esistere strategie per uno o più giocatori a cui corrispondono payoff maggiori, ma tali strategie non sono un equilibrio per il gioco.

OSSERVAZIONE 2: per un gioco possono esistere zero o più equilibri di Nash.

Riprenderemo ora l'esempio del dilemma del prigioniero per vedere se esso possiede un equilibrio di Nash, in seguito seguiranno altri due esempi rispettivamente con zero e più equilibri di Nash.

Dilemma del prigioniero

Il testo del problema è stato già esposto in precedenza: esaminiamo ora gli elementi del gioco.

Giocatori: i due sospettati.

Strategie: Ogni giocatore può compiere due possibili scelte, confessare (C) o non confessare (NC)

Preferenze: La preferenza di ciascuno dei due sospettati sarà quella di farsi meno anni di galera; siccome ogni partecipante può compiere 2 diverse azioni, le preferenze saranno 4 (2^2). Indichiamo con P_1 e P_2 rispettivamente le preferenze del primo giocatore e del secondo; ordiniamole quindi a seconda di quali azioni portano un payoff maggiore:

$$P_1=\{(C,NC),(C,C),(NC,C),(NC,NC)\}$$

$$P_2=\{(NC,C),(C,C),(C,NC),(NC,NC)\}$$

Riscriviamo ora la rappresentazione in forma strategica ed analizziamo una per una le strategie dei singoli giocatori.

1 \ 2	C	NC
C	-10,-10	-1,-25
NC	-25,-1	-3,-3

(C,NC) è facile vedere che questo non può essere un equilibrio di Nash. Infatti mentre per il primo sospettato confessare è comunque un ottima scelta in quanto può ottenere il payoff massimo, il secondo indagato non confessando può solo ridurre il proprio payoff. (Analogamente si può fare la stessa considerazione per (NC,C)).

(NC,NC) nemmeno questo è un equilibrio di Nash. Vale la stessa ragione di prima, se entrambi non confessano non potranno mai avere sconti di pena, quindi non potranno ottenere il payoff massimo.

(C,C) è l'unico equlibrio di Nash per il gioco. La scelta di confessare per entrambi i giocatori risulta essere la migliore e nessuno dei due (sempre facendo l'iporesi di razionalità dei giocatori) è chiamato a discostarsi da essa; qualsiasi cosa faccia l'avversario il mio payoff sarà comunque maggiore, sia che lui confessi sia che lui non confessi. Entrambi dovrebbero fare questo ragionamento e così facendo porterà il gioco ad avere un'unica soluzione, (C,C).

Battaglia dei sessi

Il testo del problema è stato già esposto nel capitolo precedente. Esaminiamo ora il gioco in dettaglio.

Giocatori: il ragazzo (Giocatore 1) e la ragazza (Giocatore 2)

Strategie: Entrambi i giocatori hanno due possibili azioni, andare al film d'azione (A), andare a vedere il film romantico (R).

Preferenze: come nel gioco del dilemma del prigioniero, siccome le azioni possibili sono 2, anche qui le preferenze per ogni giocatore saranno 4. Ordiamole da quella con payoff maggiore.

$$P_1=\{(A,A),(R,R),(A,R),(R,A)\}$$

$$P_2=\{(R,R),(A,A),(R,A),(A,R)\}$$

Introduciamo ora la rappresentazione strategica del gioco con i relativi payoff.

1 \ 2	A	R
A	3,1	0,0
R	0,0	1,3

Esaminando con attenzione questo esempio si può notare che esistono due equilibri di Nash: (A,A), entrambi i giocatori vanno a vedere il film d'azione e (R,R), entrambi i giocatori vanno a vedere il film romantico. Per come abbiamo infatti posto il problema la loro utilità vera non deriverà tanto da andare a vedere il film che preferiscono, bensì dallo stare insieme. Ovviamente se non possono comunicare, essendoci più di un equilibrio nel gioco, e dovendo fare una scelta simultanea, c'è la possibilità che il ragazzo e la ragazza non si vedano e quindi che il loro payoff sia nullo. In questi casi non c'è nessun modo di prevedere quale sarà l'esito del gioco, ognuna delle 4 possibilità (a meno che non vengano assegnate) hanno la stessa probabilità di riuscire.

Testa o Croce

Riprendiamo l'esempio visto nel paragrafo 2.1.2 e mostriamo che per questo esempio non esistono equilibri di Nash.

Giocatori: Giocatore A e Giocatore B

Strategie: Entrambi i giocatori possono scegliere di scrivere sulla propria lavagnetta Testa (T) o Croce (C)

Preferenze: Ordiniamo ora le preferenze di ogni giocatore a seconda del payoff, dal maggiore al minore:

$$P_a=\{(T,T),(C,C),(T,C),(C,T)\}$$

$$P_b=\{(T,C),(C,T),(T,T),(C,C)\}$$

Introduciamo ora la rappresentazione strategica con i relativi payoff.

A \ B	T	C
T	1,-1	-1,1
C	-1,1	1,-1

Esaminando ora tutte le possibili strategie noteremo che non esistono per un esempio di questa forma equilibri di Nash.

(A,A) e (B,B) non sono un equilibrio di Nash; infatti al giocatore A conviene cambiare strategia.

(A,B) e (B,A) non sono un equilibrio di Nash; infatti al giocatore B conviene cambiare strategia.

Per questa tipologia di giochi è necessario estendere il concetto di equilibrio di Nash e considerare strategie più complesse. Per cercare di ottenere il massimo è necessario cercare di "confondere" il nostro avversario affinché non venga a conoscenza della nostra scelta; infatti se l'avversario fosse a conoscenza delle nostre strategie potrebbe sfruttare questa informazione a suo vantaggio. Il modo migliore per cercare di nascondere le nostre strategie è quello di usare le cosiddette *strategie miste*.

3.2 Strategie Miste ed equilibrio di Nash

Come abbiamo visto nell'ultimo esempio del paragrafo precedente non sempre nel caso di strategie pure è possibile trovare un equilibrio di Nash; sempre alla fine dello stesso esempio abbiamo introdotto una possibile soluzione per risolvere questo problema, le strategie miste. In questo paragrafo definiremo prima cosa si intende per tali strategie per poi introdurre il concetto di equilibrio di Nash.

3.2.1 Definizioni per Strategie Miste

Definizione

- *Si chiama strategia mista σ_i per un giocatore i una distribuzione di probabilità sull'insieme delle sue strategie pure. Denotiamo con $\sigma_i(s)$ la probabilità che σ_i assegna alla strategia pura $s \in S$, secondo le leggi di probabilità,*

$$\sum_{s \in S} \sigma_i(s) = 1$$

OSSERVAZIONE 1: Una strategia pura può essere vista come un caso particolare di strategia mista dove $\sigma_i(s)=1$.

Denotiamo con $\sum_i$ l'insieme delle *strategie miste* relative al giocatore i-esimo; analogamente al caso di strategie pure, definiamo il *profilo di strategie miste*:

$$\boldsymbol{\sigma} = (\sigma_1, \sigma_2, \dots, \sigma_n)$$

Definizione

- *La funzione di utilità attesa (o payoff atteso) per il giocatore i è la somma dei payoff di ogni profilo, pesati sulle rispettive probabilità:*

$$u_i(\boldsymbol{\sigma}) = \sum_{s \in S} \sigma_i(s) u_i(\boldsymbol{s}) \quad con\ \boldsymbol{s} = (s, \sigma_{-1})$$

3.2.1 Equilibrio di Nash per Strategie Miste

In una strategia mista, un equilibrio di Nash si riferisce alla soluzione in cui ciascun giocatore sceglie la frequenza ottima per le proprie strategie, date le frequenze scelte dall'altro giocatore.

Definizione

- *Un profilo di strategie* $\boldsymbol{\sigma}^* \in \sum$ *è un equilibrio di Nash in strategie miste se:*

$$u_i(\boldsymbol{\sigma}^*) \geq u_i(\sigma, \boldsymbol{\sigma}^*_{-1}) \quad \forall \sigma_i^* \in \sum, \ \forall i \in N$$

dove $u_i(\sigma, \sigma^*_{-1})\sigma = u_i(\sigma_1^*, \sigma_2^*, \dots, \sigma_{i-1}^*, \sigma, \sigma_{i+1}^*, \dots, \sigma_n^*)$

La definizione appena data di fatto generalizza la definizione di equilibrio di Nash per strategie pure. L'importanza delle strategie miste nella teoria dei giochi viene data dal teorema che ora verrà introdotto.

Teorema di Nash

- *Ogni gioco, con un numero finito di giocatori i quali hanno un numero finito di azioni possibili, ha un equilibrio di Nash in strategie miste.*

Il teorema non verrà dimostrato, ma possiamo notare che esso non descrive un metodo per trovare un equilibrio di Nash, ma fornisce una condizione sufficiente affinché in un gioco esso sia presente in strategie miste; difatti affinché esista basta che il gioco sia finito cioè che il numero di giocatori e delle loro possibili strategie sia un numero minore di infinito.

Testa o Croce (in strategia mista)

Riprendiamo sempre lo stesso esempio visto in precedenza; abbiamo dimostrato che in strategie pure esso non possiede un equilibrio di Nash. Supponiamo ora che il Giocatore A scelga T con una probabilità p e quindi C con una probabilità 1-p; supponiamo inoltre che il Giocatore B scelga T con una probabilità q e quindi C con una probabilità 1-q. In simboli,

$$\sigma_a(T)=p,\ \sigma_a(C)=1-p,\ \sigma_b(T)=q,\ \sigma_b(C)=1-q$$

Calcoliamo ora le funzioni di utilità attesa:

$$u_a(p,q) = 1pq + (-1)p(1-q) + (-1)(1-p)q + 1(1-p)(1-q) = 4pq - 2p - 2q + 1$$

$$u_b(p,q) = (-1)pq + 1p(1-q) + 1(1-p)q + (-1)(1-p)(1-q) = -4pq + 2p + 2q - 1$$

Ora lo scopo di ogni giocatore è quello di massimizzare la propria funzione di payoff, quindi per trovare il punto di massimo della funzione dobbiamo calcolare le derivate parziali; calcoliamo intanto le derivate parziali per la funzione $u_1(p,q)$ e poniamo il gradiente uguale a zero per trovare i punti critici:

$\nabla u_a = 0$ se e solo se le derivate parziali sono uguali a 0.

Calcoliamo le derivare parziali:

$$\partial p = 2 - 4q \text{ che è uguale a 0 quando } q = \frac{1}{2}$$

$$\partial q = 2 - 4p \text{ che è uguale a 0 quando } p = \frac{1}{2}$$

Da cui è facile dedurre che l'unico punto critico in (p,q) = ($\frac{1}{2}, \frac{1}{2}$), dove la funzione di payoff atteso è uguale a 0; il significato di ciò è che, ripetendo il gioco, con questi valori di p e q il Giocatore A si aspetterà di vincere 0 euro. Possiamo fare un ragionamento analogo anche per la funzione di payoff atteso u_b(p,q) per il Giocatore B, e notare che il gradiente della funzione è uguale a 0 quando (p,q) = ($\frac{1}{2}, \frac{1}{2}$); quindi analogamente al Giocatore A, anche B, per tali valori di p e q avrà una vincita attesa pari a 0 euro (in effetti come detto nel capitolo precedente questo è un gioco a somma zero, quello che viene perso da un giocatore viene per forza vinto dall'altro).

Calcoliamo ora la natura dell'unico punto critico; per far ciò dovremo calcolare le derivate seconde parziali e le derivate miste per potere scrivere la matrice Hessiana; intanto cominceremo come prima con la funzione u_a(p,q).

$$\partial^2_{pp} = \partial^2_{qq} = 0$$

$$\partial^2_{pq} = \partial^2_{qp} = -4$$

Scriviamo ora la matrice Hessiana.

$$H = \begin{bmatrix} 0 & -4 \\ -4 & 0 \end{bmatrix}$$

Ora risulta facile calcolare il determinante di tale matrice:

$$\det(H) = 0 - (-4)(-4) = -16$$

Ciò implica che la matrice Hessiana H è indefinita; possiamo dunque concludere che l'unico punto critico (p,q) = ($\frac{1}{2}, \frac{1}{2}$) è di sella per u_a.

Facendo il ragionamento analogo per u_b arriviamo a dire che anche il suo unico punto critico (p,q) = ($\frac{1}{2}, \frac{1}{2}$) è di sella.

Calcoliamo ora infine la soluzione dell'equazione u_a(p,q) = 0; essendo un equazione con due incognite essa avrà un insieme di soluzioni che chiameremo S.

$$S = \left\{(p,q): p = \frac{1}{2}\ \forall q \in [0,1] \mid q = \frac{1}{2}\ \forall p \in [0,1]\right\}$$

Si trova un insieme di soluzioni del tutto analogo per l'equazione u_b(p,q)=0

Consideriamo ora le soluzioni trovate: ad entrambi i giocatori conviene scegliere le loro strategie con probabilità $\frac{1}{2}$ così facendo la loro funzione di payoff atteso sarà massimizzata e uguale a 0; possiamo dunque concludere che essa è la migliore strategia per entrambi i giocatori e che quindi, per il gioco preso in esame, la strategia mista $\sigma_1 = \frac{1}{2}$ e $\sigma_2 = \frac{1}{2}$ è un equilibrio di Nash.

Vediamo ora cosa accadrebbe se i due giocatori non giocassero con razionalità, cioè se decidessero di allontanarsi dall'equilibrio di Nash. Diciamo quindi che il Giocatore A e il Giocatore B giocano T rispettivamente con probabilità $p = \frac{1}{4}$ e $q = \frac{1}{4}$.

Andiamo quindi a sostituire tali valori alle funzioni di payoff atteso trovate in precedenza:

$$u_a\left(\frac{1}{4},\frac{1}{4}\right) = \frac{1}{4}$$

$$u_b\left(\frac{1}{4},\frac{1}{4}\right) = -\frac{1}{4}$$

Quindi mentre il Giocatore A ottiene un guadagno atteso in termini di denaro maggiore di 0 il Giocatore B ha una perdita attesa; abbiamo così fatto notare che se entrambi i Giocatori si discostano dall'equilibrio di Nash trovato uno dei due perderà necessariamente del denaro. Quindi almeno uno dei due giocatori sicuramente non si discosterà dall'equilibrio, mantenendo i payoff attesi di entrambi uguali a 0.

3.2.3 L'ottimo di Pareto

L'*ottimo paretiano* o *efficienza paretiana* è un concetto introdotto dall'economista e ingegnere italiano Vilfredo Pareto, largamente applicato in economia, teoria dei giochi, ingegneria e scienze sociali. Si realizza quando l'allocazione delle risorse è tale che non è possibile apportare miglioramenti paretiani al sistema cioè non si può migliorare la condizione di un soggetto senza peggiorare la condizione di un altro.

Corteggiamento delle ragazze

Nella scena finale del film *A Beautiful Mind,* film incentrato sulla figura del matematico già citato più volte John Nash, quest'ultimo è intento a suggerire a quattro amici come organizzare il corteggiamento di cinque ragazze, una delle quali, la bionda, è decisamente più carina delle altre quattro, che sono more.

Cerchiamo di modellare ora questa situazione con un gioco;

Giocatori: Nash e i suoi quattro amici.

Strategie: Tutti i giocatori possono scegliere di corteggiare la bionda B o la mora M.

Preferenze: Tutti i giocatori otterrebbero la massima utilità se riuscissero a corteggiare con successo la ragazza bionda; ma piuttosto di rimanere a "bocca asciutta" otterrebbero un discreto successo anche portando a buon fine il corteggiamento di una ragazza mora. Quindi per ognuno dei cinque giocatori $u(B) > u(M) > 0$; però c'è da sottolineare anche il fatto che se più di uno corteggia la stessa ragazza il successo non è affatto garantito per nessuno dei giocatori.

A chi dovrebbero quindi i ragazzi rivolgere le loro attenzioni?

Soluzione: Nash spiega ai suoi quattro amici che sarebbe opportuno che ciascuno corteggiasse una ragazza diversa; in questo modo nessuno intralcia gli altri e tutti possono congiuntamente conseguire la massima utilità possibile.

Diamo ora una definizione più formale di cosa sia l'ottimo di Pareto:

Definizione

- *Dato un vettore (o combinazione) di strategie,* ***s*** *è un ottimo di Pareto se non esiste nessun'altra combinazione di strategie* ***s'*** *tale che:*

$$u_i(\boldsymbol{s}') \geq u_i(\boldsymbol{s}) \qquad \forall i \in N \ dove \ N \text{ è } \#giocatori$$

OSSERVAZIONE 1: Adottare congiuntamente una strategia che non sia ottimo paretiano significa ridurre l'utilità di qualcuno senza aumentare l'utilità degli altri; quindi giocare congiuntamente una strategia che sia ottimo paretiano significa evitare di sprecare utilità.

OSSERVAZIONE 2: Anche se l'ottimo paretiano è congiuntamente razionale non è detto che lo sia per forza anche individualmente.

OSSERVAZIONE 3: Dall'osservazione 2 si può intuire come un equilibrio di Nash non è detto che sia anche un ottimo di Pareto. Infatti mentre l'ottimo di pareto vuole cercare di evitare sprechi di utilità nel sistema, come dice l'osservazione 1, l'equilibrio di Nash rappresenta la situazione nella quale il gruppo si viene a trovare se ogni giocatore fa ciò che è meglio per sé, cioè mira a massimizzare il proprio profitto a prescindere dalle scelte degli avversari; non è detto che l'equilibrio di Nash sia la soluzione migliore per tutti.

3.3 Dominanza

Talvolta le dimensioni del gioco, cioè il numero delle strategie possibili utilizzabili dai giocatori, possono essere significativamente ridotte eliminando alcune strategie; infatti ci sarà qualche azione che un giocatore non utilizzerà mai in quanto gli porterà un utilità sempre minore rispetto ad altre azioni.

E’ qui che entra in gioco il concetto di *strategia dominante*; questo è molto semplice e in accordo con l’intuizione. Esso consente però di risolvere completamente un gioco in un numero limitato di casi.

Definizione

- *Dato un gioco in forma strategica, si consideri un giocatore i e due sue strategie* a_k^i *e* a_h^i. *Sia* $\boldsymbol{a}^{-i}$ *un vettore che specifica le strategie degli altri N-1 giocatori. Se*

$$u_i\left(a_k^i, \boldsymbol{a}^{-i}\right) \geq u_i\left(a_h^i, \boldsymbol{a}^{-i}\right) \quad per\ ogni\ \boldsymbol{a}^{-i}$$

$$u_i\left(a_k^i, \widehat{\boldsymbol{a}^{-\iota}}\right) > u_i\left(a_h^i, \widehat{\boldsymbol{a}^{-\iota}}\right) \quad per\ qualche\ \widehat{\boldsymbol{a}^{-\iota}}$$

  Allora si dice che la strategia a_k^i*domina debolmente la strategia* a_h^i.

- *Dato un gioco in forma strategica, si consideri un giocatore i e due sue strategie* a_k^i *e* a_h^i. *Sia* $\boldsymbol{a}^{-i}$ *un vettore che specifica le strategie degli altri N-1 giocatori. Se*

$$u_i\left(a_k^i, \boldsymbol{a}^{-i}\right) > u_i\left(a_{h,}^i \boldsymbol{a}^{-i}\right) \quad per\ ogni\ \boldsymbol{a}^{-i}$$

  Allora si dice che la strategia a_k^i*domina strettamente la strategia* a_h^i.

OSSERVAZIONE 1: Ovviamente dalle definizioni è facile notare che se esiste una strategia strettamente dominante essa è unica, infatti nella definizione si usa la maggioranza stretta, mentre possono esistere più strategie debolmente dominanti.

3.4 Inefficienza dell’equilibrio di Nash e suoi miglioramenti

Introdurremo ora un semplice esempio in cui l’aumento delle strategie dei giocatori può generare soluzioni instabili ed equilibri inefficienti.

Esempio

Giocatori: Giocatore 1 e Giocatore 2

Strategie: Il Giocatore 1 può decidere di usare due strategie che chiameremo T e M, mentre il Giocatore 2 può decidere di usare L o C.

Preferenze: Definiamo le preferenze per il Giocatore 1 e il Giocatore 2 da quella con utilità maggiore a quella con utilità minore.

P_1={(T,L),(T,C),(M,L),(M,C)}

P_2={(T,L),(T,C),(M,L),(M,C)}

Senza troppa difficoltà possiamo dedurre dalle preferenze che l'unico equilibrio di Nash è (T,L), infatti entrambi i giocatori preferiscono tale strategia e nessuno dei due è interessato a discostarsi da essa.

Cambiamo ora leggermente l'esempio aggiungendo una possibile azione sia per il Giocatore 1 sia per il Giocatore 2.

Strategie: Rispetto a prima ora Il Giocatore 1 può decidere tra T, M o B mentre il Giocatore 2 tra L, C o R

Diamo ora una rappresentazione strategica del gioco.

1 \ 2	L	C	R
T	2,2	0,0	0,3
M	0,0	-1,-1	0,1
B	3,0	1,0	1,1

A questo punto esaminiamo le scelte del Giocatore 1: sicuramente preferirà scegliere di usare la strategia B in quanto, per qualunque scelta del Giocatore 2, il suo payoff sarà maggiore. Esaminando le scelte del Giocatore 2 possiamo fare lo stesso identico ragionamento sulla strategia R; possiamo dunque affermare che in questo caso (B,R) è l'unico equilibrio di Nash. Ma sempre guardando la rappresentazione in forma strategica del gioco notiamo che la coppia di strategie (T,L) fornisce per entrambi un payoff maggiore, pur non essendo un equilibrio di Nash. Detto ciò possiamo quindi affermare che (B,R) è un equilibrio di Nash inefficiente.

Ovviamente i giocatori potrebbero decidere di ritornare alla configurazione precedente, cioè decidere di giocare la coppia di strategie (T,L), che però adesso risulta instabile, infatti se uno di loro decidesse di cambiare strategia per ottenere un'utilità maggiore, l'altro otterrebbe un utilità minore (non è da giocatori razionali discostarsi dall'equilibrio di Nash).

Uno dei limiti dell'equilibrio di Nash è la sua non unicità e la possibilità che esso, aggiungendo nuove strategie risulti instabile. Per ovviare a questi problemi nel corso degli anni sono stati proposti numerosi raffinamenti tra cui: *l'equilibrio perfetto nei sottogiochi* applicabile alla forma estesa, in cui si definisce un sottogioco un qualunque sottoalbero, *l'equilibrio correlato* che incorpora aspetti di comunicazione tra i giocatori, nel quale però entra in gioco di concetto di fiducia, *l'equilibrio perfetto* basato sul fatto che i giocatori non possono non commettere errori e che quindi un equilibrio dovrebbe essere "limite" di equilibri che si ottengono "obbligando" i giocatori ad effettuare errori (il limite si fa facendo tendere chiaramente gli errori a zero).

Diamo ora un esempio di equilibrio perfetto.

Esempio (Equilibrio perfetto)

Il gioco rappresentato in forma strategica ha due equilibri di Nash (T,L) e (B,R). Il primo a livello di payoff è sicuramente più vantaggioso, ma è effettivamente meglio rispetto al secondo? Se analizziamo bene il gioco notiamo che (T,L) è molto rischioso in caso di perturbazioni; infatti nel caso di un "errore" non è danneggiato chi lo commette, ma è danneggiato l'avversario. Nel caso (B,R) si ha danno solo nel caso di un proprio "errore" e quindi è molto meno rischioso in caso di perturbazioni.

1 \ 2	L	R
T	10,10	0,10
B	10,0	1,1

Capitolo 4

Soluzione di un gioco

Vediamo innanzitutto cosa si intende per soluzione di un gioco; in seguito verranno forniti alcuni meccanismi per trovarne appunto una.

Per soluzione di un gioco si intende un "meccanismo oggettivo", che sotto alcune ipotesi, fornisce un modo "ovvio" di giocare. In parole semplici i concetti di soluzione intendono descrivere quelle strategie che i giocatori seguono come conseguenza delle ipotesi di razionalità e dalle quali non hanno alcun interesse a discostarsi; lo scopo finale è infatti quello di giungere ad un equilibrio.

4.1 Soluzione per dominanza

Abbiamo esaminato nello scorso capitolo il significato di strategie dominanti; abbiamo anche già detto che esse vengono usate per cercare di ridurre passo passo la dimensione del problema raggiungendo alla fine un equilibrio.

Esempio di Soluzione per Dominanza

Giocatori: Supponiamo di avere 3 possibili giocatori: Giocatore 1, Giocatore 2 e Giocatore 3

Strategie: il Giocatore 1 può decidere di giocare T o B, il Giocatore 2 può decidere di giocare L e R ed il Giocatore 3 può decidere tra S o D.

Scriveremo ora il gioco in forma strategica mettendo in risalto i valori di payoff.

Se il *Giocatore 3 sceglie la strategia S* si avrà la forma strategica:

1 \ 2	L	R
T	1,0,1	2,1,5
B	-1,1,1	3,0,1

Se il *<u>Giocatore 3 sceglie la strategia D</u>* si avrà la forma strategica:

1 \ 2	L	R
T	-3,0,4	2,1,5
B	-1,1,1	3,1,2

Esaminando i valori di payoff per il Giocatore 3 notiamo che nel caso in cui scelga la strategia D, per qualunque strategia dagli altri giocatori, l'utilità che percepirà sarà sempre maggiore o uguale rispetto alla scelta della strategia S; detto ciò possiamo affermare che *per il Giocatore 3 la strategia D domina (seppur debolmente) la strategia S.*

Guardiamo ora la rappresentazione strategica del gioco nel caso in cui il Giocatore 3 abbia scelto di usare la strategia D. Esaminando i valori di payoff per il Giocatore 1 vediamo subito che, per qualunque strategia del Giocatore 2, l'utilità percepita scegliendo B è sempre maggiore dell'utilità percepita scegliendo T: possiamo dunque affermare che *per il Giocatore 1,* data la scelta del Giocatore 3, *la strategia B domina (strettamente) la strategia T.*

Riscriviamo ora la forma strategica del gioco nel caso in cui il Giocatore 1 abbia scelto la strategia B e il Giocatore 3 la strategia D.

1 \ 2	L	R
B	-1,1,1	3,1,2

A questo punto *per il Giocatore 2*, date le scelte degli altri giocatori, *le strategie L e R risultano essere indifferenti; per cui si hanno due equilibri di Nash (B,L,D) e (B,R,D).*

OSSERVAZIONE 1: Dall'esempio si può notare che, a seconda dell'iterazione, cambiano gli equilibri di Nash; infatti alla seconda iterazione, quindi data la scelta da parte del Giocatore 3 di D, si poteva applicare la dominanza debole (debole) della strategia R rispetto alla strategia L per il Giocatore 2 e successivamente la dominanza (stretta) della strategia B rispetto alla strategia T, ottenendo quindi un solo equilibrio di Nash (B,R,D) che altro non è che un sottoinsieme degli equilibri di Nash trovati in precedenza.

4.2 Soluzione a Ritroso (Backward Induction)

Sia G un gioco non cooperativo finito, rappresentato in forma estesa. Per semplificare si può supporre che il gioco sia ad informazione perfetta. Sotto l'ipotesi che tutti i giocatori siano razionali allora è possibile determinare una soluzione applicando una metodologia che prende il nome di *induzione a ritroso.* L'idea di base che sta dietro a tale metodo è che la razionalità dei giocatori permette di "prevedere" il loro comportamento, per cui è possibile decidere la scelta di un giocatore sulla base delle scelte dei suoi successori e quindi iniziare l'analisi del gioco dalla fine, cioè dalle ultime mosse fino alla prima.

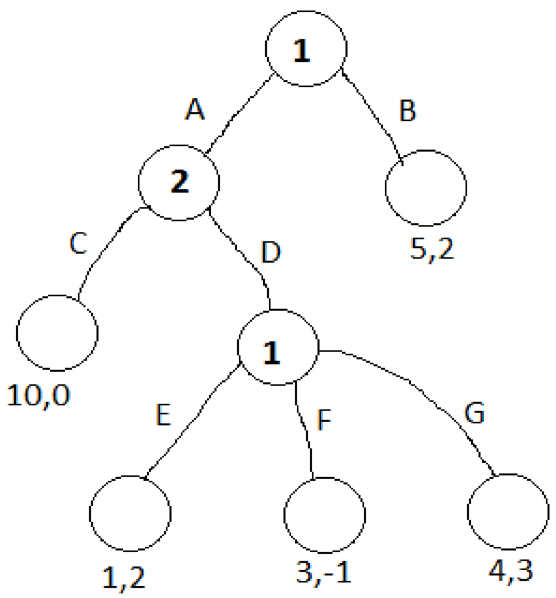
Esempio di Induzione a Ritroso

Supponiamo di avere un gioco in cui siano presenti due giocatori; uno dei due è chiamato a scegliere per primo tra una strategia che chiameremo A e un'altra che chiameremo B; fatta questa scelta l'altro giocatore è chiamato a decidere se usare la strategia C o la strategia D. Per concludere il giocatore che ha giocato per primo sceglie nuovamente se usare la strategia E, F o G. A questo punto il gioco si conclude. Supponiamo inoltre che il gioco sia ad informazione perfetta.

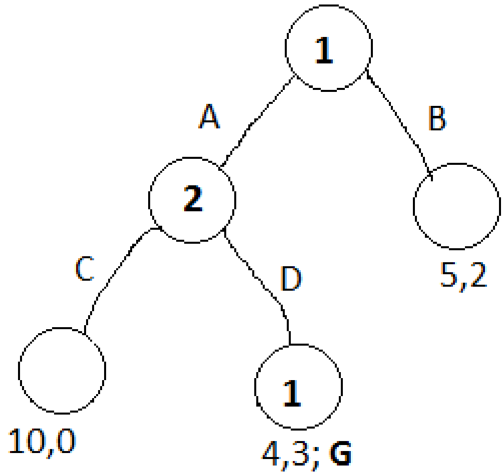
Giocatori: Giocatore 1 e Giocatore 2

Strategie: Il Giocatore 1 ha sei possibili scelte che chiameremo AE, AF, AG, BE, BF, BG; mentre il Giocatore 2 può decidere tra C o D.

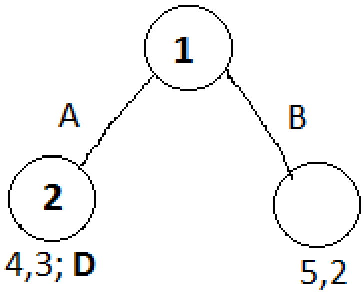
Diamo ora la rappresentazione del gioco in forma estesa (la forma ad albero).



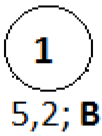
Procedendo a ritroso notiamo che la migliore scelta per il Giocatore 1, cioè quella che gli da la massima utilità, è la strategia G. Quindi possiamo sostituire il sottoalbero con radice 1 e archi etichettati E, F, G con un nodo solo che diventerà foglia dell'albero (Il Giocatore 1 non sceglierà mai di seguire il percorso etichettato dai rami E e F).



Sempre procedendo a ritroso notiamo che la migliore scelta per il Giocatore 2 è la strategia D, in quanto gli porterà un'utilità maggiore rispetto alla strategia C. Come fatto in precedenza sostituiamo il sottoalbero con il nodo etichettato 2 come radice, con un solo nodo, che diventerà foglia dell'albero (il Giocatore 2 non sceglierà mai di seguire il percorso C).



Ora la migliore scelta per il Giocatore 1 è la strategia B; sostituiamo quindi l'albero con un solo nodo, che avendo concluso l'induzione a ritroso, fornirà la soluzione del gioco.



Attuando quindi tutta la procedura si ottiene il profilo di strategie *(BG, D), che risulterà quindi essere per questo gioco un equilibrio di Nash.*

OSSERVAZIONE 1: In questo esempio, procedendo a ritroso, nessuno dei due giocatori si è trovato di fronte al caso in cui i payoff, derivanti da scelte diverse, fossero uguali; anche se ciò dovesse accadere non ci sarebbe nessun problema, in quanto dall'albero di partenza si potrebbero prendere strade diverse (con quindi alberi diversi) che porterebbero comunque ad avere un'unica soluzione (per albero); in questo modo semplicemente avremo il caso in cui si possono avere più equilibri di Nash per lo stesso gioco.

OSSERVAZIONE 2: La soluzione per induzione a ritroso potrebbe dare risultati discutibili se il gioco non è ad informazione perfetta.

4.3 Soluzione di Maxmin

Le soluzioni viste in precedenza sono sicuramente molto comode e abbastanza facili da utilizzare per trovare un equilibrio, ma non sempre sono applicabili: infatti non sempre esiste, per un giocatore, una strategia debolmente o strettamente dominante rispetto ad un'altra; neppure può essere così facile risalire alla forma estese del gioco. In questi casi una buona soluzione può essere la ricerca della *strategia di maxmin*, cioè quella strategia che garantisce il miglior risultato qualsiasi sia la scelta degli altri giocatori (questo approccio è valido per i giocatori avversi al rischio).

Fondamentalmente nella strategia di maxmin ogni giocatore punta a non ottenere il minimo, massimizzandolo su ogni possibile strategia utilizzabile. Vediamo ora un esempio che farà risultare tutto più chiaro.

Esempio di Soluzione Maxmin

Giocatori: Supponiamo di avere i soliti due giocatori: Giocatore 1 e Giocatore 2

Strategie: Il Giocatore 1 e il Giocatore 2 possono scegliere tra tre possibili strategie: rispettivamente T, M, B e L, C, R.

Scriviamo ora il gioco con la sua forma strategica

1 \ 2	L	C	R
T	1,4	3,2	-2,-1
M	-2,-2	1,3	0,4
B	2,3	-1,4	4,2

Come si può notare dalla forma strategica non esistono relazioni di dominanza tra le varie strategie, quindi ha senso cercare la soluzione per maxmin.

Vediamo ora il minimo percepibile dal Giocatore 1 per ogni sua strategia: se sceglie T il minimo payoff è -2, se sceglie M è -2, mentre se sceglie B è -1; quindi il massimo tra i minimi è -1. Al Giocatore 1 converrà quindi usare la strategia B.

Facciamo ora lo stesso ragionamento per il Giocatore 2: se sceglie L il minino payoff è -2, se sceglie C è 2, mentre se sceglie R è -1; quindi la strategia maxmin è C.

Quindi la soluzione per maxmin porta al profilo d strategie (B,C); con questo profilo il Giocatore 1 riceve effettivamente il minimo che poteva prendere, mentre al Giocatore 2 va meglio, in quanto il suo payoff sarà maggiore di quello atteso.

OSSERVAZIONE 1: A differenza delle altre soluzioni, quella per maxmin è un concetto generale, quindi applicabile in tutti i giochi.

Capitolo 5

Applicazioni della teoria dei giochi

Esamineremo ora nello specifico alcuni esempi ingegneristici in cui la teoria dei Giochi è stata applicata con successo; si cercherà di modellare ogni esempio con questa teoria cercando di trovare e definire un equilibrio.

5.1 Biologia evoluzionistica

5.1.1 Teoria dei Giochi nella biologia evoluzionistica

L'idea alla base dell'approccio della teoria dei Giochi nella biologia evoluzionistica è che differenti tipi di individui non si trovano a vivere per conto proprio e quindi a trarre profitto dalle risorse preassegnate ad ognuno e uguali per tutti, ma competono esse. Dunque si arriva ad avere una serie di confronti fra individui (che possono essere dello stesso o di diverso tipo) dove ciascuno dei due partecipanti può trarre degli svantaggi o dei vantaggi.

Questo approccio è stato ed è utilizzato tutt'ora per studiare non solo l'evoluzione dei caratteri genetici ma anche nello studio del "comportamento" delle varie specie.

In conclusione l'approccio basato sulla teoria dei Giochi riconosce come la competizione che è alla base dell'evoluzione si svolga, in ultima analisi, sempre tra individui e non tra gruppi, ma consideri poi unicamente il risultato medio fra gli attori.

5.1.2 Teoria dei Giochi e comportamento delle specie

In questo paragrafo riprenderemo l'esempio dei falchi e delle colombe visto nel capitolo 2 cercando di determinare un punto di equilibrio per esso.

Cominciamo con il considerare per semplicità di avere solo due "tipi" che interagiscono (due alleli per un dato gene, due possibili fenotipi, due strategie comportamentali per un animale, due specie in un ecosistema).

Quando due individui ci comportano in modo A avranno uguale probabilità di accaparrarsi la risorsa, così come quando si comportano in modo B; quando invece entreranno in conflitto due individui che si comportano in modo diverso le possibilità di accaparrarsi la risorsa saranno asimmetriche. D'altra parte in ogni confronto è insita la possibilità che uno tra i due contendenti (o eventualmente entrambi) riporti anche dei danni.

Rappresentiamo ora sotto forma di matrice di payoff un generico gioco di questo tipo.

1 \ 2	A	B
A	α,α	β,γ
B	γ,β	δ,δ

Dove il vettore $(\alpha, \beta, \gamma, \delta)$ rappresenta l'utilità dei giocatori utilizzando le rispettive strategie.

Consideriamo ora l'esempio già visto in precedenza, quello dei "falchi e colombe"; questo modello vuole rappresentare il modo di comportarsi di due individui appartenenti ad una o più specie diverse ed esaminare se e quali vantaggi essi possono ricavare da tale comportamento.

Chiameremo per semplicità, tipo B colui che si comporta da "colomba" e tipo A colui che si comporta da "falco".

Introduciamo ora il parametro *fitness W(X)* che rappresenta il numero atteso in media (in senso probabilistico) di discendenti per individuo nell'ambito del tipo X.

Ora quando due individui di tipo B si confrontano avranno una probabilità pari a $\frac{1}{2}$ di accaparrarsi la risorsa e quindi diremo che il suo vantaggio medio sarà $\frac{w}{2}$; se si confronteranno un individuo di tipo A con uno di tipo B, a prevale sempre e comunque e avrà un vantaggio pari a w. Quando invece interagiscono due individui di tipo A potrebbe esserci uno svantaggio s per il giocatore perdente quindi avremo $\frac{w-s}{2}$.

Consideriamo ora di avere una popolazione avente N individui totali dove il numero di coloro che si comportano da falchi è $n_a = pN$ mentre il numero di coloro che si comportano da colomba è $n_b = (1-p)N$ dove $p \in [0,1]$.

Definiamo ora il fitness per il tipo A e il tipo B.

$$W(A) = W_0 + p\alpha + (1-p)\beta \quad dove\ W_0\ rapprenta\ il\ fitness\ a\ priori$$

$$W(B) = W_0 + p\gamma + (1-p)\delta \quad dove\ W_0\ rapprenta\ il\ fitness\ a\ priori$$

Analizziamo ora cosa succede nella nuova generazione.

$$\hat{n}_a = n_a W(A) = pNW(A)$$

$$\hat{n}_b = n_b W(B) = (1-p)NW(B)$$

$$\widehat{N} = N(pW(A) + (1-p)W(B))$$

Calcoliamo quindi come cambia la frequenza *p* della scelta di comportarsi da tipo A.

$$\hat{p} = \frac{\hat{n}_a}{\widehat{N}} = \frac{NpW(A)}{N(pW(A) + (1-p)W(B))} = \frac{pW(A)}{pW(A) + (1-p)W(B)}$$

Sostituiamo i valori di W(A) e W(B) e di α,β,γ,δ e dopo alcuni passaggi otteniamo:

$$\hat{p} = \frac{p(p(s+w) - 2(w+W_0))}{p^2 s - w - 2W_0}$$

Troviamo ora il valore della frequenza *p* affinché essa sia uguale per ogni generazione, cioè il valore che rende il sistema in equilibrio. Per far ciò calcoliamo la differenza tra la frequenza *p* e quella al passo successivo e imponiamola uguale a 0.

$$\delta p = \hat{p} - p = \frac{(1-p)p(ps-w)}{p^2 s - w - 2W_0} = 0 \quad che\ ha\ le\ soluzioni\ \begin{cases} p = 1 \\ p = 0 \\ p = \dfrac{w}{s} \end{cases}$$

La prima soluzione, $p = 1$, corrisponde al caso in cui tutti gli individui si comportano da falchi, la seconda soluzione, $p = 0$, al caso in cui tutti gli individui si comportano da colomba.

Chiamiamo la soluzione $p = \frac{w}{s} = p_e$ e ricordiamo che essendo una probabilità questa deve essere compresa tra 0 e 1, quindi $s > w$.

Vediamo ora il significato di quanto visto; in un confronto fra due "falchi" lo svantaggio del perdente deve essere maggiore del vantaggio del vincitore. In questo caso, quando la percentuale di falchi sale oltre il valore p_e, il rischio insito nel comportamento aggressivo risulta eccessivo, ed è invece conveniente, in una popolazione così distribuita, il comportamento prudente delle "colombe".

Quindi per la frequenza p_e la situazione rimane sempre in equilibrio; quando gli individui si comportando da "falco" con questa probabilità abbiamo un equilibrio di Nash.

OSSERVAZIONE: Se il vantaggio per coloro che si comportano da "falchi" quando vincono dovesse crescere ed essere pari allo svantaggio per chi perde ciò comporterebbe che la frequenza di questo comportamento sarebbe uguale ad 1. Questo punto rappresenta un punto di equilibrio, ma a differenza di p_e, si può dimostrare imponendo la derivata di $\hat{p}$ uguale 0, risulta essere instabile e quindi porterebbe il sistema all'instabilità. Quindi l'unico punto di equilibrio stabile è p_e.

5.2 Reti Peer-to-Peer

5.2.1 Concetti base delle reti Peer-to-Peer

Come già accennato nell'introduzione l'idea di base che sta dietro le reti informatiche Peer-to-Peer (abbreviato P2P) consiste nel contributo attivo da parte del singolo utente (per l'appunto Peer) che, sfruttando la propria banda disponibile, ritrasmette il contenuto ad altri utenti che a loro volta ripeteranno la stessa azione creando una sorta di "catena".

Mediante questa configurazione qualsiasi nodo è in grado di avviare o completare una transazione; i nodi equivalenti possono differire nella configurazione locale, nella velocità di elaborazione, nella ampiezza di banda e nella quantità di dati memorizzati. L'esempio classico di P2P è la rete per la condivisione di file.

Le reti P2P possono essenzialmente avere due topologie: la struttura ad albero e la struttura a grafo: la prima (*Tree Network)* è chiaramente una struttura gerarchizzata dove ogni utente ha un numero connessioni limitate e stabilite dalla struttura dell'albero; i suoi limiti sono però notevoli; infatti le prestazioni sono fortemente legate alla profondità dell'albero, cosicchè gli utenti più distanti dalla radice non possono mai avere prestazioni ottimali. La struttura a grafo (*Mesh Network)* gli utenti formano una struttura priva di ogni gerarchia mantenendo comunque un numero limitato sia di nodi che possono essere serviti e sia di utenti da cui attingere le risorse; quest'ultima topologia viene usata con molta più frequenza, in quanto per numero di utenti più alti, ha un rendimento nettamente migliore.

Uno dei grandi limiti per questo tipo di reti, che in realtà è la sua grande particolarità, è l'uguaglianza tra tutti gli utenti del sistema e la mancanza di un'autorità centrale che gestisce e coordina le risorse; il problema che sorge è che molti utenti possono decidere di comportarsi semplicemente da consumatori non contribuendo allo scambio di risorse nel sistema. Per ovviare al problema si sono cercate alcune soluzioni; sicuramente quella che ha trovato maggior riscontro è stata quella del servizio differenziale: agli utenti viene attribuita una "reputazione" in base al contributo che essi forniscono al sistema creando così una sorta di gerarchia dove chi contribuisce maggiormente viene in qualche modo agevolato.

Dal momento che i nodi in un sistema P2P sono attori strategici, uno strumento corretto per modellare l'iterazione tra i vari utenti è la teoria dei giochi.

5.2.2 Modellizzazione tramite Teoria dei Giochi per le reti P2P

Come suggerisce l'intuizione modelliamo il sistema tramite un gioco non cooperativo; consideriamo tale gioco abbia N utenti (giocatori) che indicheremo con $P_1, P_2, \dots, P_N$ ai quali assegneremo rispettivamente una funzione di utilità $U_1, U_2, \dots, U_N$; lo scopo finale di utente è quello di massimizzare la propria funzione.

Definiremo formalmente più avanti la funzione di utilità, ma si può immaginare che essa dipenda dal "contributo" che il giocatore da al sistema e dal "beneficio" che ne può trarre; introduciamo ora questi due parametri che ci saranno di grande aiuto per dare la definizione di U_i.

Definizione

- *Definiamo $d_i = \frac{D_i}{D_o}$ il contributo adimensionato al sistema del giocatore i dove D_i è il contributo dimensionato e D_o è una costante assoluta del contributo.*

Il contributo che ciascun giocatore da al sistema diventa un potenziale beneficio per gli altri utenti.

Definizione

- *Definiamo $b_{ij} = \frac{B_{ij}}{c_{ij}}$ il beneficio adimensionato che il giocatore P_i riceve dal contributo fornito ad sistema dal giocatore P_j. I termini B_{ij} e c_{ij} rappresentano rispettivamente il beneficio dimensionato e una costante assoluta del beneficio.*

OSSERVAZIONE 1: Se il giocatore P_i non è per nulla interessato al contributo del giocatore P_j allora il beneficio b_{ij} sarà uguale a 0.

OSSEERVAZIONE 2: Il contributo che il giocatore P_i porta al sistema non da a lui nessun beneficio quindi b_{ii} è sempre uguale a 0.

Definizione

- $b_i = \sum_j b_{ij}$ *il beneficio totale che il giocatore P_i riceve dal resto del sistema.*
- $b_{av} = \frac{1}{N}\sum_i b_i$ *il beneficio medio del sistema.*

OSSERVAZIONE 3: vedremo in seguito che esiste un parametro critico b_c t.c se $b_i < b_c$ al giocatore P_i non conviene entrare nel sistema.

Alla fine del paragrafo precedente abbiamo accennato che una soluzione per ovviare i limiti all'assenza di gerarchia nelle reti P2P è quella del servizio differenziale; il nostro scopo è quindi quello di inserire questa soluzione nel nostro modello. Il servizio differenziale fa si che le ricompense per ogni utente del sistema sono proporzionate al contributo che essi danno a tutti gli altri utenti; quindi diremo che P_j accetta la richiesta di P_i con una probabilità $p(d_i) = \frac{d_i}{d_i+1}$ e la rifiuta con una probabilita *$1-p(d_i)$*, così facendo se il contributo d_i di P_i è alto è più probabile che la sua richiesta venga accettata.

Dopo aver introdotto tali parametri possiamo quindi introdurre la funzione di utilità.

Definizione

- $u_{\boldsymbol{i}} = -d_{\boldsymbol{i}} + p(d_i) \sum_j b_{ij} d_j$ *dove il primo termine è il contributo che il giocatore i da al sistema e il secondo è il beneficio totale previsto dall'adesione.*

Prima di massimizzare tale facciamo delle ipotesi per semplificare leggermente il gioco; ipotizziamo di essere in un sistema omogeneo, dove tutti i giocatori ottengono un uguale beneficio dai contributi degli altri, cioè tutti i possibili b_{ij} sono uguali ad un valore che chiameremo *b.* Semplifichiamo ancora il gioco supponendo che nel sistema siano presenti solo 2 giocatori.

Scriviamo ora le funzioni di utilità dei due giocatori:

$$u_1 = -d_1 + p(d_1)bd_2$$

$$u_2 = -d_2 + p(d_2)bd_1$$

Il nostro scopo, come già detto in precedenza, è quindi quello di massimizzare queste funzioni al fine di trovare l'equilibrio o gli equilibri di Nash.

Supponiamo intanto dato d_2 il contributo di P_2, il giocatore P_1 deve trovare un valore di d_1 che gli permetta di massimizzare u_1; calcoliamo quindi la derivata della funzione di utilità rispetto a d_1.

$$\frac{du_1}{dd_1} = -1 + \frac{bd_2(d_1+1) - bd_2 d_1}{(d_1+1)^2} = -1 + \frac{bd_2}{(d_1+1)^2} = \frac{-(d_1+1)^2 + bd_2}{(d_1+1)^2}$$

Poniamo $\frac{du_1}{dd_1} = 0$ e otteniamo $d_1 = \sqrt{bd_2} - 1$.

Stesso identico ragionamento possiamo farlo per il giocatore P_2 ottenendo: $d_2 = \sqrt{bd_1} - 1$.

Quindi mettendo a sistema le due soluzioni trovate otteniamo che $d_1 = d_2 = d$.

Prendiamo dunque quindi l'equazione, nell'incognita d, $d = \sqrt{bd} - 1$ e troviamo le soluzioni:

$$d_{1/2} = \frac{b - 2 \pm \sqrt{(2-b)^2 - 4}}{2} = \frac{b - 2 \pm \sqrt{b(b-4)}}{2}$$

Quindi la soluzione esiste se e solo se $b \geq 4 \equiv b_c$.

Concludiamo dicendo che per $b = 4$ c'è un unico equilibrio di Nash, se invece $b > 4$ avremo due soluzioni dell'equazione e quindi due equilibri di Nash.

5.3 Instradamento (Routing)

5.3.1 Concetti base dell'instradamento

Nelle reti di telecomunicazione il problema dell'istradamento, sia nella commutazione a circuito e sia nella commutazione a pacchetto, è quello di trovare un percorso tra i vari nodi della rete dove sia possibile far viaggiare il contenuto informativo, facendolo arrivare a destinazione.

Le reti di comunicazione sono rappresentate tramite una struttura a grafo, cioè come una collezione di nodi connessi tra di loro tramite degli archi; quindi il problema dell'istradamento (che nelle reti di comunicazioni prende il nome di routing) si riduce a trovare il percorso "minimo" tra la sorgente e la destinazione.

Il concetto di percorso "minimo" non è però così banale come può sembrare; infatti all'interno del grafo ad ogni arco viene assegnato un costo che tiene conto di numerose variabili che entrano in gioco in una rete.

Ma che c'entra la teoria dei Giochi in tutto ciò? La struttura delle reti di comunicazione si è evoluta in modo che i pacchetti possano compiere diversi percorsi per arrivare da un punto all'altro, riuscendo così a valutare l'efficienza delle possibili strategie e rendere minimo il tempo di percorrenza degli agenti sulla rete. Il caso che prenderemo in esame è quello del *selfish routing,* instradamento egoista, dove ogni agente sceglie il percorso che gli permette di minimizzare il proprio tempo di percorrenza, senza tenere conto di quanto questo influisca sugli altri aumentando il traffico nel percorso scelto.

Appare quindi evidente come tale problema può essere modellato tramite la teoria dei Giochi per riuscire a trovare una soluzione di equilibrio.

5.3.2 Modellizzazione tramite teoria dei Giochi per il *Selfish Routing*

Come prima cosa dobbiamo rappresentare il problema come flusso su un grafo dove i costi relativi agli archi non sono costanti ma funzioni della frazione di flusso che li attraversa.

Prendiamo quindi un Grafo $G = (V, E)$ dove V rappresenta l'insieme dei vertici ed E ⊆ VxV l'insieme degli archi.

Definizione

- *Sia γ_e una funzione $E \rightarrow R_+^{[0,1]}$ che associa ad ogni arco e la sua latenza in funzione della frazione di traffico che lo attraversa.*

OSSERVAZIONE 1: la latenza associata all'arco *e* altro non è che il tempo di percorrenza del contenuto informativo su quell'arco.

Supponiamo essere P_i l'insieme di tutti i percorsi che collegano un vertice sorgente s_i ad un vertice destinazione d_i.

Definizione

- *Definiamo $r_i \in [0,1]$ la frazione del traffico totale che deve andare dalla sorgente s_i alla destinazione d_i.*

Un'istanza del problema è una tripla *(G,r,γ).*

Definizione

- *Un flusso f è una funzione che assegna ad ogni cammino P la frazione di traffico f_p che lo percorre.*

La frazione di traffico che attraversa che attraversa un arco *e* si può dunque scrivere:

$$f_e = \sum_{e \in P} f_p$$

Quindi la latenza del percorso altro non è che la sommatoria di tutte le latenze associate agli archi che appartengono cammino.

$$\gamma_p(f) = \sum_{e \in P} \gamma_e(f_e)$$

Possiamo quindi finalmente dare una definizione appropriata di costo:

Definizione

Il costo totale di un flusso f è la media delle latenze dei cammini, pesata mediante la frazione di traffico sugli stessi:

$$C(f) = \sum\nolimits_P \gamma_p(f) f_p$$

Un flusso f^* si dice ottimo se: $C(f^*) = \min C(f)$.

Possiamo quindi modellare il problema dell'instradamento con la teoria dei Giochi dove ogni agente ha interesse a minimizzare la propria latenza, cosa che è in conflitto con gli altri giocatori.

Identifichiamo quindi:

- *N*, il numero di possibili agenti che concorrono al traffico, il numero di giocatori.
- La scelta del percorso come le possibili strategie utilizzabili dai giocatori.

- U_i, la funzione di utilità, con la funzione di latenza γ_i.

Definiremo ora un equilibrio di Nash per giochi così proposti e successivamente daremo un esempio che prende il nome di Paradosso di Braess che vorrà mettere in evidenza come non basta aggiungere archi per migliorare le cose.

Vogliamo quindi caratterizzare i flussi tali che nessuno agente trae beneficio dal cambiare percorso. L'idea è che per ogni coppia sorgente destinazione, spostare una frazione di flusso da un percorso ad un altro non sia conveniente per quella frazione di flusso.

Definizione

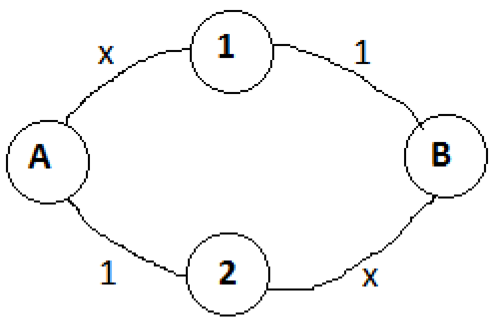
- *Data un istanza (G,r,γ), un flusso f è in equilibrio di Nash se presi due percorsi P_1 e P_2 appartenenti all'insieme dei percorsi che portano dalla sorgente s_i alla destinazione d_i, con $f_{P1} > 0$, e per ogni $\delta \in (0, f_{P1}]$, dato un flusso $\tilde{f}$ tale che*

$$\tilde{f} = \begin{cases} \tilde{f}_p = f_p - \delta & se\ P = P_1 \\ \tilde{f}_p = f_p + \delta & se\ P = P_2 \\ \tilde{f}_p = f_p & altrimenti \end{cases}$$

(Cioè se una quantità di flusso δ viene spostata da P_1 a P_2)

allora $\gamma_{P1}(f) \leq \gamma_{P2}(\tilde{f})$

Paradosso di Braess



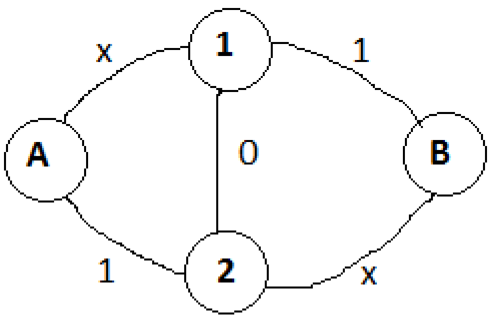
Abbiamo due percorsi che collegano la sorgente A alla destinazione B, che sono P_1=A-1-B e P_2=A-2-B.

Supponiamo che gli archi A-2 e 1-B abbiamo una latenza fissa a cui attribuiremo il valore costante 1, mentre i cammini A-1 e 2-B abbiano una latenza variabile x a seconda della frazione di traffico che il percorso assorbe.

Così facendo, avendo entrambi i percorsi la stessa latenza uguale a x+1, un equilibrio si raggiungerà quando la metà del traffico passerà attraverso il percorso A-1-B e l'altra metà di conseguenza attraverso A-2-B. Quindi $\gamma_{P1} = 1 + x = 1 + \frac{1}{2} = 1.5 = \gamma_{P2}$.

Esso rappresenta un equilibrio di Nash, infatti nessuno degli agenti ha interesse a modificare il suo percorso in quando andrebbe a peggiorare la propria latenza (quindi a peggiorare la propria funzione di utilità).

Supponiamo di fare una piccola modifica al percorso, aggiungendo un arco che collega il nodo 1 al nodo 2 con latenza nulla: facendo questa modifica vorremmo cercare di migliorare l'utilità dei giocatori; concluderemo invece che aggiungere questo cammino rischia solo di far aumentare la latenza agli agenti.



Come reagiscono gli agenti a questo cambiamento?

Ogni agente potrebbe cercare di diminuire la propria latenza seguendo il cammino A-1-2-B, infatti se tutti gli altri giocatori non cambiassero la loro strategia egli otterrebbe un utilità migliore $\cong 1$.

Essendo tutti i giocatori razionali ed egoisti, tenderanno a far ciò che porta loro un utilità migliore; e quindi potrebbero pensare tutti di utilizzare il percorso A-1-2-B; facendo così è facile notare che la latenza del percorso, che chiameremo P_3=A-1-2-B, sarà uguale a 2 poiché $x = 1$.

Quindi introducendo un nuovo cammino non miglioriamo l'utilità dei giocatori, anzi otterremo solo un peggioramento dell'equilibrio di Nash.

Conclusioni

In questa tesi si è voluta dare una breve introduzione alla teoria dei Giochi, che per quanto giovane ha già riscontrato numerosi utilizzi in molti campi scientifici e ingegneristici; ovviamente non si è potuto approfondire ogni applicazione di questa teoria ma risulta abbastanza evidente che il suo utilizzo può essere davvero ampio; infatti la sua relativa semplicità la rende un utile strumento per studiare quelli che vengono chiamati "trade-off ingegneristici" ovvero particolari situazioni di conflitto nelle quali è necessario trovare un compromesso.

Come si è già detto l'attenzione rivolta alla teoria dei Giochi da parte degli ingegneri sta crescendo esponenzialmente anche grazie allo sviluppo di reti e tecnologie sempre più "intelligenti" dove la competizione e il coordinamento diventano concetti sempre più importanti. Tuttavia questa teoria non rappresenta lo strumento universale di eccellenza per modellare tutti i problemi proprio perché, data la sua semplicità, fa uso di ipotesi restrittive che ne limitano in parte il campo di applicabilità.

Bibliografia

[1] Hal R. Varian, 2011. *Microeconomia,* Cafoscarina.

[2] Maurizio Mistri. *Economia politica internazionale,* Libreria Editrice Galileiana.

[3] Nevio Benvenuto, Michele Zorzi, 2011. *Principles of Communications Networks and Systems,* Wiley.

[4] Andrea Goldsmith. *Wireless Communications.*

[5] Giuseppe Gaeta. *Modelli matematici in Biologia,* Springer.

[6] A. Agnetis. *Introduzione alla teoria dei Giochi,* Dipartimento dell'ingegneria dell'informazione, Università di Siena.

[7] Vito Fragnelli, 2010/11. *Teoria dei Giochi,*Università di Torino.

[8] Fotini-Niovi Pavlidou, Georgios Koltsidas. *Game Theory for Routing Modeling in Communication Networks – A Survey,* Journal of Communications and Networks, vol. 10, No. 3, September 2008.

[9] C. Buragohain, D. Agrawal, S. Suri. *A Game Theoretic Framework for Incentives in P2P Systems,* Computer Science Department, University of California.

[10] Marco Li Calzi, 2002. *Un eponimo ricorrente: Nash e la Teoria dei Giochi.*

[11] T. Typpi. *Game Theory in peer-to-peer networks,* Helsinky University of Technology.

[12] Wikipedia. *Teoria dei Giochi.* **http://it.wikipedia.org/wiki/Teoria_dei_giochi**

[13] Treccani. *Teoria dei Giochi.* **http://www.treccani.it/enciclopedia/teoria-dei-giochi/**