



# **UNIVERSITÀ DEGLI STUDI DI PADOVA**

**Dipartimento di Fisica e Astronomia "Galileo Galilei"**

**CORSO DI LAUREA IN FISICA**

**TESI DI LAUREA**

## **La Meccanica Quantistica nello spazio delle fasi: caratteristiche non classiche**

**Relatore**

**Prof. Pieralberto MARCHETTI**

**Laureando**

**Harman Preet SINGH**

**Anno Accademico 2018/2019**



# Indice

<b>Premessa</b>	<b>v</b>
<b>1 Stati e osservabili sullo spazio delle fasi</b>	<b>1</b>
1.1 Mappa di Weyl . . . . .	1
1.2 Stati sullo spazio delle fasi . . . . .	5
1.3 Estensione distribuzionale della mappa di Weyl . . . . .	7
1.4 Osservabili sullo spazio delle fasi . . . . .	11
1.4.1 Rappresentazione metaplettica . . . . .	12
<b>2 Proprietà algebriche delle osservabili</b>	<b>15</b>
2.1 Prodotto di Moyal . . . . .	15
2.1.1 Funzioni di classe $L^2$ . . . . .	15
2.1.2 Distribuzioni temperate . . . . .	18
2.2 Valori medi e spettro di un'osservabile . . . . .	20
2.3 Parentesi di Moyal . . . . .	22
2.3.1 Cenno sulla realizzazione delle simmetrie . . . . .	24
<b>3 Evoluzione temporale</b>	<b>27</b>
3.1 Visuale di Schrödinger . . . . .	27
3.2 Visuale di Heisenberg . . . . .	30
3.3 Due sistemi paradigmatici . . . . .	32
3.3.1 Particella libera . . . . .	32
3.3.2 Oscillatore armonico . . . . .	34
<b>Conclusioni</b>	<b>37</b>
<b>A Forma geometrica di <math>\star</math></b>	<b>39</b>
<b>Bibliografia</b>	<b>41</b>

*Desidero ringraziare il professor P. Marchetti per la disponibilità e la pazienza  
dedicatemi nella realizzazione di questo lavoro di tesi.*

# Premessa

Così come è possibile visualizzare la Meccanica Classica come un limite formale ( $c^{-1} \rightarrow 0$ ) della Meccanica Relativistica, risulta spontaneo chiedersi in che misura sia possibile inquadrare la prima come caso limite ( $\hbar \rightarrow 0$ ) della Meccanica Quantistica. Questo interrogativo pone un altro quesito collegato, relativo alla rappresentabilità di quest'ultima sullo spazio delle fasi: infatti, se questo ha una risposta ben definita e affermativa, allora le discrepanze tra la struttura classica e la corrispondente quantistica risultano essere manifeste e analizzabili mediante un approccio diretto sullo spazio delle fasi.

Lo scopo di questo elaborato è, di conseguenza, quello di costruire, per quanto possibile in modo matematicamente rigoroso, una rappresentazione mista  $q-p$  della Meccanica Quantistica consistentemente formulata sullo spazio delle fasi, e di analizzarne le caratteristiche prettamente non classiche.

L'organizzazione dei capitoli e del materiale segue un percorso storico.

1. Il primo passo verso la strada conducente alla realizzazione di questo obiettivo, venne mosso da Hermann Weyl, che, indagando sulla radice della connessione tra sistemi classici e quantistici, in [1] definì una corrispondenza tra funzioni classiche sullo spazio delle fasi e operatori su spazi di Hilbert. Tale mappa gode inoltre di importanti proprietà di covarianza e ha i pregi di associare a funzioni reali, sotto opportune ipotesi tecniche, operatori autoaggiunti, e di mantenere una perfetta simmetria tra il ruolo di posizione e momento. Un ulteriore costruito trattato, legato a doppio filo con il concetto di matrice densità, e importante per la comprensione globale di una eventuale formulazione della Meccanica Quantistica sullo spazio delle fasi, è quello di funzione di Wigner, introdotto da questi per trattare correzioni termodinamiche semiclassiche in [2].

2. Successivamente Joe Moyal e Hilbrand Groenewold, indipendentemente l'uno dall'altro, riuscirono a trasportare la struttura algebrica (di Lie) quantistica non commutativa delle osservabili sullo spazio delle fasi, mediante la definizione, sull'algebra delle funzioni su tale spazio, di un prodotto non commutativo e non locale, detto  $\star$ -product; tale risultato ha permesso di osservare come la struttura quantistica possa essere vista come una deformazione formale in serie di potenze di  $\hbar$  della corrispondente struttura di Poisson classica.

3. Infine, sfruttando la struttura algebrica ricavata nel Capitolo 2, si ricava l'evoluzione temporale di sistemi quantistici, e si mostra l'applicazione del formalismo introdotto a due casi semplici: la particella libera e l'oscillatore armonico.

Il presente lavoro di tesi cerca di raccogliere in una visione unitaria e coerente tutti questi risultati.

## Notazione e convenzioni

Segue una lista di notazioni e convenzioni adottate in questo elaborato con lo scopo di semplificare la trattazione.

1. Si assumerà come spazio delle fasi di un sistema ad  $n$  gradi di libertà il seguente fibrato cotangente:  $\Gamma = T^*\mathbb{R}^n \cong \mathbb{R}^{2n}$ ; le coordinate canoniche globali su di esso saranno denotate a seconda della convenienza con  $(q, p)$  o  $z$ , ove

$$(q, p) \equiv (q^1, \dots, q^n, p_1, \dots, p_n) \quad z = (q, p).$$

Conseguentemente la misura su  $\Gamma$  sarà indicata  $dqdp = dz := d\lambda_{2n}(q, p)$ ;

2. Dato  $\mathbb{R}^s$ , adottando l'uso della misura di Lebesgue  $s$ -dimensionale  $d\lambda_s$ , si abbrevierà

$$L^2(\mathbb{R}^s) \equiv L^2(\mathbb{R}^s, d\lambda_s) := \left\{ f : \mathbb{R}^s \rightarrow \mathbb{C} : \int_{\mathbb{R}^s} |f|^2 d\lambda_s < \infty \right\}$$

e, se  $(x^1, \dots, x^s)$  è un sistema di coordinate globali cartesiane per  $\mathbb{R}^s$ , la misura sarà denotata  $dx = d\lambda_s(x)$ ;

3. Data  $f \in \mathcal{S}(\mathbb{R}^s)$ , verrà assunta la seguente definizione della trasformata di Fourier e della sua inversa.

$$\hat{f}(k) = \mathcal{F}[f](k) = \frac{1}{h^{s/2}} \int_{\mathbb{R}^s} f(x) e^{-ik \cdot x / \hbar} dx \quad \check{f}(x) = \mathcal{F}^{-1}[f](x) = \frac{1}{h^{s/2}} \int_{\mathbb{R}^s} f(k) e^{ik \cdot x / \hbar} dk$$

Le stesse definizioni, per il teorema di Plancherel, saranno intese essere state estese nel senso di limite per  $f \in L^2(\mathbb{R}^s, dx)$ . Inoltre, per sistemi che possiedono una partizione privilegiata di coordinate,  $\mathbb{R}^k \times \mathbb{R}^s$ , si adotteranno le seguenti nozioni di trasformata di Fourier parziale:

$$\mathcal{F}_1[f](u, y) = \frac{1}{h^{s/2}} \int_{\mathbb{R}^s} f(x, y) e^{-iu \cdot x / \hbar} dx \quad \mathcal{F}_2[f](x, w) = \frac{1}{h^{k/2}} \int_{\mathbb{R}^k} f(x, y) e^{-iw \cdot y / \hbar} dy.$$

# Capitolo 1

## Stati e osservabili sullo spazio delle fasi

Nel seguente capitolo si espone la corrispondenza di Weyl, che permette di associare ad una funzione sullo spazio delle fasi un operatore lineare, creando così un ponte tra la formulazione classica e quella quantistica. Si utilizza successivamente tale mappa per definire gli stati e le osservabili su  $\Gamma$  e si confronta il risultato ottenuto con le corrispondenti quantità classiche, per evidenziare le analogie e le differenze tra il sistema quantistico e la controparte classica.

### 1.1 Mappa di Weyl

Nella formulazione assiomatica standard della Meccanica Quantistica, lo spazio degli stati del sistema fisico preso in esame è (lo spazio di raggi vettori di) uno spazio di Hilbert  $\mathcal{H}$  complesso separabile e ad ogni osservabile è associato un operatore autoaggiunto  $A : \mathcal{H} \supseteq D(A) \rightarrow \mathcal{H}$ . Sorge allora la domanda su quale operatore sia associato ad una determinata osservabile classica  $f : \Gamma \rightarrow \mathbb{R}$ , problema che in letteratura è descritto con il termine *quantizzazione*.

Si può immediatamente osservare che non è possibile procedere con la semplice sostituzione formale  $f(q, p) \mapsto f(Q, P)$ , dove  $Q$  e  $P$  sono gli operatori vettoriali posizione e momento, in quanto nascono ambiguità di ordinamento; ad esempio in  $\mathbb{R}^2$  al monomio  $qp$ , corrisponderebbero sia  $QP$  che  $PQ$ , ed entrambi questi ultimi non sarebbero nemmeno osservabili in senso quantistico.

Weyl ovviò il problema *mediando* fra le due possibili scelte cosicché  $qp \mapsto (QP + PQ)/2$ , dando in generale la seguente definizione.

**Definizione 1.1** (Corrispondenza di Weyl). Ad ogni monomio  $q_i^k p_j^m, k, m \in \mathbb{N}$  è associato l'operatore

$$W(q_i^k p_j^m) := \frac{1}{(n+m)!} \sum_{\sigma \in \mathfrak{S}_{k+m}} \tilde{\sigma}(Q_i, \dots, Q_i, P_j, \dots, P_j) \quad \forall i, j \in \{1, \dots, n\}$$

dove  $\mathfrak{S}_{k+m}$  è il gruppo delle permutazioni di ordine  $k+m$  e  $\tilde{\sigma}(A_1, \dots, A_{k+m}) = \prod_{i=1}^{k+m} A_{\sigma(i)}$ .

**Esempio.**  $q^2 p$  viene mandato in  $(Q^2 P + Q P Q + P Q^2)/3 = Q P Q$ .

**Osservazione.** Questa prescrizione preserva la completa simmetria tra  $q$  e  $p$ , non privilegiando nessuna delle due variabili canoniche, e polinomi di sola posizione o momento hanno come immagine operatori che dipendono solo da  $Q$  o  $P$ .

La corrispondenza appena definita, estesa per linearità allo spazio dei polinomi su  $\Gamma$ , gode di una proprietà cruciale, che permetterà di trovare il corrispondente operatoriale di una quantità notevole di funzioni.

**Lemma.** *La quantizzazione di Weyl è univocamente determinata dal seguente fatto.*

$$W((a \cdot q + b \cdot p)^k) = (a \cdot Q + b \cdot P)^k \quad \forall a, b \in \mathbb{R}^n, \forall k \in \mathbb{N}$$

Questo risultato permette di estendere la corrispondenza agli esponenziali di argomento puramente immaginario, difatti per il lemma precedente si ha

$$W(e^{i(a \cdot q + b \cdot p)/\hbar}) = e^{i(a \cdot Q + b \cdot P)/\hbar}.$$

Per chiarire l'azione di tale operatore su un vettore di stato si richiama il teorema di Stone e lo si sfrutta per darne una rappresentazione equivalente.

**Teorema 1.1** (Stone). *Sia  $\{U(t) : \mathcal{H} \rightarrow \mathcal{H}, t \in \mathbb{R}\}$  un gruppo ad un parametro di operatori unitari fortemente continuo, ovvero  $t \rightarrow t_0 \implies U(t)\psi \xrightarrow{\mathcal{H}} U(t_0)\psi, \forall \psi \in \mathcal{H}$ , allora  $\exists (A, D(A))$  autoaggiunto, detto generatore del gruppo, tale che*

$$A\psi = \lim_{t \rightarrow 0} \frac{U(t) - \mathbb{I}}{it} \psi = -i \frac{dU}{dt}(0)\psi \quad \forall \psi \in D(A).$$

**Proposizione 1.1.** *Sia  $U(t; a, b) \in \mathcal{B}(L^2(\mathbb{R}^n))^1$  definito da*

$$(U(t; a, b)\psi)(x) := e^{it^2(a \cdot b)/2\hbar} e^{it(a \cdot x)/\hbar} \psi(x + tb), \forall \psi \in L^2(\mathbb{R}^n),$$

*allora esso è un gruppo ad un parametro fortemente continuo di operatori unitari  $\forall a, b \in \mathbb{R}^n$ , di generatore  $(a \cdot Q + b \cdot P)/\hbar$ .*

*Dimostrazione.* Per quanto riguarda la proprietà di gruppo  $\forall \psi \in L^2(\mathbb{R}^n)$

$$(U(t+s)\psi)(x) := e^{i(t^2(a \cdot b)/2 + s^2(a \cdot b)/2 + ts(a \cdot b) + (t+s)(a \cdot x))/\hbar} \psi(x + tb + ts) = (U(t)U(s)\psi)(x).$$

L'unitarietà è manifesta in quanto  $U(t; a, b)$  è il prodotto di due operatori unitari, di generatori  $a \cdot Q/\hbar, b \cdot P/\hbar$ , e di un'operatore scalare (ovvero multiplo dell'identità) di modulo 1. Per dimostrare la forte continuità si osserva che  $C_c^\infty(\mathbb{R}^n)$  è denso in  $L^2(\mathbb{R}^n)$ , ovvero dato  $\varepsilon > 0, \forall \psi \in L^2(\mathbb{R}^n) \exists \xi \in C_c^\infty(\mathbb{R}^n) : \|\psi - \xi\| < \varepsilon$ .

Scegliendo  $\delta > 0 : \|U(t-s)\xi - \xi\| < \varepsilon \forall s : |t-s| < \delta$ , allora segue che

$$\|U(t)\psi - U(s)\psi\| \leq \|U(t)(\psi - \xi)\| + \|U(s)(U(t-s)\xi - \xi)\| + \|U(s)(\psi - \xi)\| < 3\varepsilon$$

dove nel primo passaggio si è sommata e sottratta la stessa quantità e si è utilizzata la disuguaglianza triangolare, mentre nel secondo si è sfruttata l'unitarietà di  $U$  e le ipotesi. Di conseguenza per il teorema di Stone si può calcolare il generatore di  $U$  come

$$-i \frac{dU}{dt}(0; a, b) = (a \cdot Q + b \cdot P)/\hbar. \quad \square$$

**Osservazione.** Ponendo  $t=1$ , otteniamo che  $e^{i(a \cdot Q + b \cdot P)/\hbar} = e^{i(a \cdot b)/2\hbar} e^{i(a \cdot Q)/\hbar} e^{i(b \cdot P)/\hbar}$ , risultato che si può ottenere formalmente applicando una forma speciale della formula di Baker-Hausdorff-Campbell  $e^{A+B} = e^{-[A,B]/2} e^A e^B$ , che tuttavia è valida, a rigore, per operatori  $A, B \in \mathcal{B}(L^2(\mathbb{R}^n))$  tali che  $[A, [A, B]] = [B, [A, B]] = 0$ .

<sup>1</sup>  $\mathcal{B}(L^2(\mathbb{R}^n))$  denota l'insieme degli operatori limitati (equivalentemente, continui) su  $L^2(\mathbb{R}^n)$ .



Si può ora dare una definizione preliminare della mappa di Weyl: data  $f \in L^2(\Gamma)$ , essendo, per il teorema di Plancherel, la trasformata di Fourier un'applicazione unitaria su tale spazio,

$$f(q, p) = \frac{1}{h^n} \int_{\mathbb{R}^{2n}} \hat{f}(a, b) e^{i(a \cdot q + b \cdot p)/\hbar} da db \implies W(f) := \frac{1}{h^n} \int_{\mathbb{R}^{2n}} \hat{f}(a, b) e^{i(a \cdot Q + b \cdot P)/\hbar} da db. \quad (1.1)$$

Per dare una forma alternativa a  $W$  è conveniente dare la seguente definizione.

**Definizione 1.2** (Operatore di Grossmann-Royer).  $\Delta(q, p) := h^{-n} \int_{\mathbb{R}^{2n}} e^{i[a \cdot (Q-q) + b \cdot (P-p)]/\hbar} da db$

Possiamo perciò riscrivere  $W$  sviluppando la trasformata, ottenendo

$$f \longmapsto W(f) = \frac{1}{h^n} \int_{\Gamma} f(q, p) \Delta(q, p) dq dp, \quad (1.2)$$

ovvero come sovrapposizione continua di operatori di Grossmann-Royer pesati da  $f$ . Dalla definizione appena data non è tuttavia chiaro quale sia l'immagine  $W(L^2(\Gamma))$ , e il modo più veloce di determinarla è calcolare il *kernel integrale* di  $W(f)$ .

**Definizione 1.3.** Dato un operatore  $(A, D(A) \subseteq L^2(\mathbb{R}^n))$ , si chiama *kernel integrale* di  $A$  l'applicazione  $k_A : \mathbb{R}^n \times \mathbb{R}^n \rightarrow \mathbb{C}$  tale che

$$(A\psi)(x) = \int_{\mathbb{R}^n} k_A(x, y) \psi(y) dx dy \quad \forall \psi \in D(A), \forall x \in \mathbb{R}^n.$$

**Osservazione.** In notazione di Dirac, il kernel integrale è l'elemento di matrice generalizzato che soddisfa la seguente uguaglianza.

$$\langle x|A|\psi \rangle = \int_{\mathbb{R}^n} \langle x|A|y \rangle \langle y|\psi \rangle dy$$

**Lemma.**  $\forall (q, p) \in \Gamma, \Delta(q, p) \in \mathcal{B}(L^2(\mathbb{R}^n))$  e l'azione di un operatore di Grossmann-Royer su  $\psi \in L^2(\mathbb{R}^n)$  è data da  $(\Delta(q, p)\psi)(x) = 2^n e^{2i(x-q) \cdot p/\hbar} \psi(2q - x)$ .

*Dimostrazione.* Sfruttando la proposizione 1.1 e la definizione 1.2, si può direttamente computare, per  $\psi \in \mathcal{S}(\mathbb{R}^n)$

$$\begin{aligned} (\Delta(q, p)\psi)(x) &= \frac{1}{h^n} \int_{\mathbb{R}^{2n}} e^{-i \frac{a \cdot q + b \cdot p - a \cdot b/2 - a \cdot x}{\hbar}} \psi(x + b) da db = \\ &= \int_{\mathbb{R}^n} \delta^n \left( x - q + \frac{b}{2} \right) e^{-i \frac{b \cdot p}{\hbar}} \psi(x + b) db = 2^n e^{2i(x-q) \cdot p/\hbar} \psi(2q - x), \end{aligned} \quad (1.3)$$

dove nel primo passaggio si è utilizzata la rappresentazione integrale della distribuzione  $\delta$  di Dirac  $n$ -dimensionale e nel secondo la proprietà della medesima  $\delta^n(\Lambda x) = \delta^n(x)/|\det(\Lambda)|$ ,  $\forall \Lambda \in GL(n, \mathbb{R})$ , con  $\Lambda = \mathbb{I}_n/2$ . Sfruttando ora la continuità di  $\delta^n$ , si estende tale calcolo ad ogni  $\psi \in L^2(\mathbb{R}^n)$ .

Dal calcolo risulta ora chiaro che  $\Delta(q, p) = 2^n e^{2i(Q-q) \cdot p/\hbar} e^{2iq \cdot P/\hbar} \mathcal{P}$ , ove  $\mathcal{P}$  è l'operatore di parità spaziale, quindi  $\Delta(q, p)$  è limitato, in particolare un multiplo di un operatore unitario.  $\square$

**Nota.** D'ora in poi, calcoli analoghi all'equazione (1.3) saranno eseguiti in modo formale direttamente per funzioni di classe  $L^2$ , sottintendendo una procedura analoga di estensione per continuità da  $\mathcal{S}$ .

**Osservazione.** Si nota che dalla relazione formale

$$\Delta(q', p') = \int_{\Gamma} \delta^n(q - q') \delta^n(p - p') \Delta(q, p) dq dp,$$

gli operatori di Grossmann-Royer sarebbero le quantizzazioni corrispondenti alle distribuzioni concentrate in un punto dello spazio delle fasi,  $\delta_{q'}^n \otimes \delta_{p'}^n \in \mathcal{S}'(\Gamma)$ ; tale caratteristica acquisirà un senso ben definito successivamente nel capitolo.

Calcolando quindi l'azione di  $W(f)$  su  $\psi \in L^2(\mathbb{R}^n)$ , otteniamo

$$(W(f)\psi)(x) := \frac{1}{h^n} \int_{\Gamma} f(q, p) (\Delta(q, p)\psi)(x) dq dp = \left(\frac{2}{h}\right)^n \int_{\Gamma} f(q, p) e^{2i(x-q)\cdot p/\hbar} \psi(2q - x) dq dp,$$

ed effettuando il cambio di variabile  $2q - x = y$ , l'equazione di sopra si riscrive come

$$(W(f)\psi)(x) = \frac{1}{h^n} \int_{\mathbb{R}^{2n}} f((x+y)/2, p) e^{i(x-y)\cdot p/\hbar} \psi(y) dp dy. \quad (1.4)$$

Quindi il kernel integrale di  $W(f)$  è

$$k_f(x, y) = \frac{1}{h^n} \int_{\mathbb{R}^n} f\left(\frac{x+y}{2}, p\right) e^{i(x-y)\cdot p/\hbar} dp = \frac{1}{h^{n/2}} \mathcal{F}_2[f] \left(\frac{x+y}{2}, y-x\right). \quad (1.5)$$

Definendo l'applicazione lineare  $\Sigma : \mathbb{R}^{2n} \rightarrow \mathbb{R}^{2n}$   $(x, y) \mapsto \Sigma(x, y) = \left(\frac{x+y}{2}, y-x\right)$ , notando che  $\Sigma \in SL(n, \mathbb{R})$  e la trasformata parziale di Fourier è unitaria, è possibile enunciare la seguente proposizione.

**Proposizione 1.2.** *L'equazione (1.5) definisce un isomorfismo  $K : L^2(\Gamma) \rightarrow L^2(\mathbb{R}^n \times \mathbb{R}^n)$   $f \mapsto K(f) = k_f$  tale che  $h^{n/2}K$  è mappa unitaria. L'inversa è data da*

$$f_k(q, p) = \int_{\mathbb{R}^n} k\left(q + \frac{b}{2}, q - \frac{b}{2}\right) e^{-ib\cdot p/\hbar} db. \quad (1.6)$$

*Dimostrazione.* Dal calcolo effettuato sopra e dall'invertibilità di  $\Sigma$  e  $\mathcal{F}_2$ , si nota immediatamente che  $K$  è invertibile e l'inversa si calcola in modo diretto.  $\square$

Ora è possibile chiudere l'ultimo anello della catena, ricordando la definizione dello spazio degli operatori di Hilbert-Schmidt  $\mathcal{HS}(\mathcal{H}) := \{A \in \mathcal{B}(\mathcal{H}) : \text{tr}(A^\dagger A) < \infty\}$ , che si può dimostrare essere spazio di Hilbert rispetto al prodotto scalare  $\langle A, B \rangle := \text{tr}(A^\dagger B)$ .

**Teorema 1.2.** *Esiste una trasformazione unitaria  $\iota : L^2(\mathbb{R}^n \times \mathbb{R}^n) \rightarrow \mathcal{HS}(L^2(\mathbb{R}^n))$ , determinata dalla definizione di kernel integrale.*

$$\iota(k) = A_k : (A_k\psi)(x) = \int_{\mathbb{R}^n} k(x, y)\psi(y) dy \quad \forall \psi \in L^2(\mathbb{R}^n) \quad \wedge \quad \|A_k\|_{\mathcal{HS}} = \|k\|_{L^2}$$

*Dimostrazione.* Si rimanda al Teorema VI.23 di [4].  $\square$

Si è raggiunto di conseguenza un risultato importante, in quanto si è determinata esplicitamente la mappa di Weyl, condensato nella seguente definizione ben posta.

**Definizione 1.4** (Mappa di Weyl). Si definisce la seguente mappa biiettiva e non unitaria.

$$W : L^2(\Gamma) \rightarrow \mathcal{HS}(L^2(\mathbb{R}^n)) \quad W = \iota \circ K \quad f \mapsto W(f) = \frac{1}{h^n} \int_{\Gamma} f(q, p) \Delta(q, p) dq dp$$

**Corollario.**  $A^\dagger = A \in \mathcal{HS}(L^2(\mathbb{R}^n)) \iff (W^{-1}(A))^* = W^{-1}(A)$

*Dimostrazione.* Si ha  $\langle \varphi, A^\dagger \psi \rangle = \langle A\varphi, \psi \rangle = \int_{\mathbb{R}^n \times \mathbb{R}^n} \varphi^*(y) k_A^*(x, y) \psi(x) dx dy \quad \forall \varphi, \psi \in L^2(\mathbb{R}^n)$ , quindi  $A^\dagger = A \iff k_A^*(x, y) = k_A(y, x) \quad \forall (x, y) \in \mathbb{R}^n \times \mathbb{R}^n$ . Dal calcolo di  $k_A$  in funzione del simbolo, come si chiama in letteratura, sullo spazio delle fasi  $a = W^{-1}(A)$  svolto in equazione (1.5), segue che  $k_A^*(x, y) = k_A(y, x) \iff a^*(q, p) = a(q, p)$ , da cui la tesi.  $\square$

## 1.2 Stati sullo spazio delle fasi

Le proprietà della mappa di Weyl mostrano che ad operatori autoaggiunti corrispondono simboli su  $\Gamma$  reali. Inoltre è noto che in Meccanica Quantistica gli stati di un sistema possono essere rappresentati univocamente da operatori  $\rho \in \mathcal{B}(\mathcal{H})$  che possiedono le seguenti caratteristiche:

1.  $\rho^\dagger = \rho$  (autoaggiuntezza);
2.  $\text{tr}(\rho) = 1$  (normalizzazione);
3.  $\langle \psi | \rho | \psi \rangle \geq 0 \quad \forall \psi \in \mathcal{H}$  (positività);
4. in caso di stati puri,  $\rho = |\psi\rangle\langle\psi|$ , per qualche  $|\psi\rangle \in \mathcal{H} : \langle\psi|\psi\rangle = 1$ , ovvero  $\rho^2 = \rho$ .

Tenendo conto che gli operatori di classe traccia (il cui insieme contiene propriamente quello degli stati) sono anche di Hilbert-Schmidt, è possibile sfruttare la mappa di Weyl definita nel capitolo precedente per definire gli stati sullo spazio delle fasi.

**Definizione 1.5.** Gli stati sullo spazio delle fasi  $\Psi_\rho$  sono dati da

$$\Psi_\rho := \frac{1}{h^n} W^{-1}(\rho) \quad \Psi_\rho(q, p) = \frac{1}{h^n} \int_{\mathbb{R}^n} k_\rho \left( q + \frac{b}{2}, q - \frac{b}{2} \right) e^{-ib \cdot p / \hbar} db.$$

**Osservazione.** Nel caso speciale di stato puro, essendo  $\rho = |\psi\rangle\langle\psi| \Rightarrow k_\rho = \psi \otimes \psi^*$ , si ottiene

$$\Psi(q, p) = \frac{1}{h^n} \int_{\mathbb{R}^n} \psi^* \left( q - \frac{b}{2} \right) e^{-ib \cdot p / \hbar} \psi \left( q + \frac{b}{2} \right) db, \quad (1.7)$$

che è esattamente la funzione di Wigner associata al raggio vettore  $|\psi\rangle$ . Storicamente, le funzioni di Wigner vennero introdotte dallo stesso nel 1932 in [2] con lo scopo di calcolare le correzioni quantistiche alla meccanica statistica classica.

Si nota ancora una simmetria tra  $q$  e  $p$ , in quanto il kernel integrale di  $\rho$  in rappresentazione dei momenti risulta essere  $\varphi \otimes \varphi^*$ , con  $\varphi = \hat{\psi}$ , e la funzione di Wigner associata si ottiene dall'equazione (1.7) operando la sostituzione  $(q, p) \rightarrow (p, q), \psi \rightarrow \hat{\psi}$ .

**Nota.** Il fattore  $h^{-n}$  tiene conto della non unitarietà di  $W$  ed è giustificato dalle seguenti considerazioni.

**Proposizione 1.3.**  $f \in L^2(\Gamma)$  è integrabile secondo Lebesgue se, e solo se,  $W(f) \in \mathcal{HS}(L^2(\mathbb{R}^n))$  è di classe traccia. Inoltre vale

$$h^n \text{tr}(W(f)) = \int_{\Gamma} f(q, p) dq dp.$$

*Dimostrazione.* Da un calcolo diretto, risulta

$$\int_{\Gamma} f(q, p) dq dp = \int_{\Gamma \times \mathbb{R}^n} k_f \left( q + \frac{b}{2}, q - \frac{b}{2} \right) e^{-ib \cdot p / \hbar} dq dp db = h^n \int_{\mathbb{R}^n} k_f(q, q) dq = h^n \text{tr}(W(f))$$

avendo utilizzato l'equazione (1.6) nel primo e la rappresentazione integrale di  $\delta^n$  nel secondo passaggio.  $\square$

Diretta conseguenza di questa proposizione è la normalizzazione di  $\Psi_\rho$ .

$$1 = \text{tr}(\rho) = \int_{\Gamma} \Psi_\rho(q, p) dqdp,$$

che è in stretta analogia con la normalizzazione di uno stato misto classico  $\int_{\Gamma} \rho_{cl} dqdp = 1$ . Inoltre, come si mostrerà nel capitolo successivo, il valore di aspettazione di una osservabile  $f$  su uno stato  $\Psi_\rho$  è dato da

$$\langle f \rangle_{\Psi_\rho} = \int_{\Gamma} f(q, p) \Psi_\rho(q, p) dqdp,$$

che ha ovvio corrispondente classico.

Queste due analogie spinsero Wigner a tentare di interpretare  $\Psi_\rho$  come una densità di probabilità su  $\Gamma$ , ovvero di inquadrare i sistemi fisici quantistici come particolari *ensemble* statistici classici, ma ciò risulta essere falso, in quanto in generale non è detto che sia definita positiva, come si accorse egli stesso.

**Esempio.** Per il primo stato eccitato dell'oscillatore armonico per  $n = 1, m\omega = \hbar$ , si ha

$$\psi_1(x) = \sqrt{\frac{4}{\pi}} x e^{-x^2/2} \quad \Psi_1(q, p) = \frac{2}{h} \left( 2q^2 + 2\frac{p^2}{\hbar^2} - 1 \right) e^{-q^2 - p^2/\hbar^2}$$

Di conseguenza ci si riferisce alle funzioni di Wigner come *quasidensità* di probabilità, soddisfacenti alla condizione di normalizzazione e alla condizione di realtà (essendo immagini, mediante  $W^{-1}$ , di operatori autoaggiunti), ma non verificanti necessariamente la positività.

Nonostante questa caratteristica, chiaramente non desiderabile, le funzioni di Wigner rappresentanti stati puri godono di proprietà specifiche, che mostrano la loro importanza.

**Proposizione 1.4.** *Per stati puri valgono le seguenti ulteriori uguaglianze.*

$$\int_{\mathbb{R}^n} \Psi(q, p) dp = |\psi(q)|^2 \quad \int_{\mathbb{R}^n} \Psi(q, p) dq = |\hat{\psi}(p)|^2 \quad |\Psi| \leq \left( \frac{2}{h} \right)^n$$

*Dimostrazione.* Dall'equazione (1.7) si ottiene

$$\int_{\mathbb{R}^n} \Psi(q, p) dp = \int_{\mathbb{R}^n} \delta^n(b) \psi^* \left( q - \frac{b}{2} \right) \psi \left( q + \frac{b}{2} \right) db = |\psi(q)|^2$$

$$\int_{\mathbb{R}^n} \Psi(q, p) dq = \frac{1}{h^n} \int_{\mathbb{R}^{2n}} \psi^*(x) \psi(y) e^{-i(y-x) \cdot p/\hbar} dx dy = |\hat{\psi}(p)|^2$$

$$|\Psi|(q, p) \leq \frac{1}{h^n} \int_{\mathbb{R}^n} \left| \psi^* \left( q - \frac{b}{2} \right) \psi \left( q + \frac{b}{2} \right) \right| db = \frac{2^n}{h^n} \int_{\mathbb{R}^n} |\psi^*(2q - x) \psi(x)| dx \leq \frac{2^n}{h^n}$$

ove nella prima espressione si è eseguita l'integrazione in  $p$ , nella seconda si è effettuato il cambio di variabile  $(x, y) = (q - b/2, q + b/2)$  e si è fattorizzato l'integrale, e nella terza è stato compiuto lo stesso cambio.  $\square$

Quindi la funzione di Wigner codifica in sé, come *proiezioni* marginali, sia la densità di probabilità che il sistema abbia una certa configurazione spaziale  $q$  che una certa configurazione di momento  $p$ , meritandosi l'appellativo di *quasidensità*, e mostrando in tal senso una maggiore visualizzabilità rispetto alla funzione d'onda complessa  $\psi$ .

Una ulteriore caratteristica degli stati puri in questa rappresentazione è che, proprio come i raggi vettori<sup>2</sup> in  $\mathbb{P}\mathcal{H}$ , non costituiscono uno spazio vettoriale: la somma  $a\Psi_1 + b\Psi_2$ , con  $a + b = 1, a, b > 0$ , determina uno stato misto, com'era da aspettarsi, in quanto si è sostanzialmente riprodotto il formalismo delle matrici densità sullo spazio delle fasi.

Essendo di interesse comprendere come determinare se una generica funzione  $f \in L^2(\Gamma)$  rappresenti uno stato puro, si nota che si può utilizzare la definizione stessa come test: di conseguenza,  $f$  è una funzione di Wigner se ha somma 1 e se la sua trasformata di Fourier parziale rispetto alla seconda variabile ammette una decomposizione del tipo

$$\exists g : \mathbb{R}^n \rightarrow \mathbb{C} \quad : \quad \mathcal{F}_2[f](q, y) = g^*(q - y/2)g(q + y/2) \quad (1.8)$$

o, più formalmente, se

$$\frac{\partial^2(\log \mathcal{F}_2[f])}{\partial(q + y/2)\partial(q - y/2)} \equiv 0.$$

Si nota per di più che, contrariamente agli stati puri classici, che sono puntiformi sullo spazio delle fasi, i corrispondenti quantistici sono comunque vincolati ad essere di classe  $L^2$  e sono anche limitati, indizio dell'impossibilità di concentrare tutta l'informazione sul sistema in una configurazione a misura nulla su  $\Gamma$ .

Infine, si mostrerà nell'ultimo capitolo, anche l'evoluzione temporale degli stessi è radicalmente diversa da quella governata dall'equazione di Liouville

$$\frac{\partial \rho_{cl}}{\partial t} = \{H, \rho_{cl}\},$$

dove  $\{\cdot, \cdot\} : \mathcal{C}^\infty(\Gamma) \times \mathcal{C}^\infty(\Gamma) \rightarrow \mathcal{C}^\infty(\Gamma)$  indica la parentesi di Poisson.

### 1.3 Estensione distribuzionale della mappa di Weyl

Dalla definizione di mappa di Weyl data nella sezione 1.1, come isomorfismo tra  $L^2(\Gamma)$  e  $\mathcal{HS}(L^2(\mathbb{R}^n))$ , si può vedere che non sono inclusi nemmeno i polinomi in  $q$  e  $p$ , da cui tuttavia si era euristicamente partiti. Questa sezione, di conseguenza, è dedicata all'estensione della corrispondenza determinata da Weyl a una classe di simboli sullo spazio delle fasi più ampia, precisamente allo spazio delle distribuzioni temperate<sup>3</sup>  $\mathcal{S}'(\Gamma)$ .

Si richiama preliminarmente la definizione dell'inverso dell'isomorfismo  $K : L^2(\Gamma) \rightarrow L^2(\mathbb{R}^n \times \mathbb{R}^n)$  definito in Sezione 1.1.

$$(K^{-1}(k))(q, p) = \int_{\mathbb{R}^n} k\left(q + \frac{b}{2}, q - \frac{b}{2}\right) e^{-ib \cdot p/\hbar} db$$

**Definizione 1.6** (Trasformata di Wigner).  $w := h^{-n}K^{-1}$ ; in particolare  $w|_{\mathcal{S}(\mathbb{R}^n \times \mathbb{R}^n)}$  è una mappa biettiva e continua che ha codominio<sup>4</sup>  $\mathcal{S}(\Gamma)$ .

**Osservazione.** Tale morfismo è stato così chiamato perché, alla luce della sezione precedente, risulta  $\Psi = w(k_\rho)$ , in cui  $k_\rho$  è il kernel integrale associato allo stato  $\rho$ .

<sup>2</sup> $\mathbb{P}\mathcal{H} := \{\psi \in \mathcal{H} : \|\psi\| = 1, \psi \sim e^{i\theta}\psi, \forall \theta \in S^1\}$

<sup>3</sup>Nel seguito si indicherà la valutazione di una distribuzione temperata  $g \in \mathcal{S}'(\mathbb{R}^n)$  su una funzione di test  $\psi \in \mathcal{S}(\mathbb{R}^n)$  con  $\llbracket g, \psi \rrbracket \in \mathbb{C}$ .

<sup>4</sup>Ciò si può facilmente verificare osservando che  $w$  è determinata da una trasformazione lineare e da una trasformata di Fourier parziale, che risultano essere automorfismi su  $\mathcal{S}(\mathbb{R}^{2n})$ .

La strategia per completare il suddetto programma passa innanzitutto nel calcolare gli elementi di matrice degli operatori di Grossmann-Royer in funzione della trasformata appena definita.

**Lemma.** Vale,  $\forall \varphi, \psi \in \mathcal{S}(\mathbb{R}^n), \forall (q, p) \in \Gamma, \quad \langle \varphi, \Delta(q, p)\psi \rangle = h^n w(\psi \otimes \varphi^*)$ .

*Dimostrazione.* Da un calcolo diretto, ricordando la definizione di  $\Delta(q, p)$ , si ottiene

$$\langle \varphi, \Delta(q, p)\psi \rangle = \int_{\mathbb{R}^n} 2^n \varphi^*(x) \psi(2q - x) e^{2i(x-q) \cdot p/\hbar} dx = \int_{\mathbb{R}^n} \varphi^*\left(q - \frac{b}{2}\right) \psi\left(q + \frac{b}{2}\right) e^{-ib \cdot p/\hbar} db,$$

dove nell'ultimo passaggio si è effettuata la sostituzione  $b = 2(q - x)$ .  $\square$

Ne segue che gli elementi di matrice della quantizzazione alla Weyl di funzioni di prova su  $\Gamma$  risultano essere quantificabili come, date  $\psi, \varphi \in \mathcal{S}(\mathbb{R}^n), f \in \mathcal{S}(\Gamma)$ ,

$$\langle \varphi, W(f)\psi \rangle_n = \frac{1}{h^n} \int_{\Gamma} f(q, p) \langle \varphi, \Delta(q, p)\psi \rangle_n dq dp = \langle f^*, w(\psi \otimes \varphi^*) \rangle_{2n}$$

dove, per chiarezza, si è indicata a pedice la dimensionalità  $a = n, 2n$  dello spazio  $L^2(\mathbb{R}^a)$ , in modo da distinguere i due prodotti scalari.

Richiamando la proprietà, dimostrata in sezione 1.1,  $w^*(\psi \otimes \varphi^*) = w(\varphi \otimes \psi^*)$ , si nota che è possibile riscrivere l'uguaglianza suddetta come

$$\langle W(f)\psi, \varphi \rangle_n = \langle \varphi, W(f)\psi \rangle_n^* = \langle f^*, w(\psi \otimes \varphi^*) \rangle_{2n}^* = \langle f, w(\varphi \otimes \psi^*) \rangle_{2n}. \quad (1.9)$$

Rammentando che ogni funzione di *test* definisce un funzionale lineare continuo sullo spazio di Schwartz, ovvero che esiste una immersione antilineare  $\mathfrak{I}_n : \mathcal{S}(\mathbb{R}^n) \hookrightarrow \mathcal{S}'(\mathbb{R}^n)$ , definita da

$$\begin{aligned} \varphi &\longmapsto \mathfrak{I}_n(\varphi) & \llbracket \mathfrak{I}_n(\varphi), \psi \rrbracket &:= \langle \varphi, \psi \rangle_n \quad \forall \psi \in \mathcal{S}(\mathbb{R}^n) \\ \mathfrak{I}_n(a\psi + b\varphi) &= a^* \mathfrak{I}_n(\psi) + b^* \mathfrak{I}_n(\varphi), \end{aligned}$$

è possibile interpretare l'equazione (1.9) come

$$\langle W(f)\psi, \varphi \rangle_n = \llbracket \mathfrak{I}_{2n}(f), w(\varphi \otimes \psi^*) \rrbracket_{2n}.$$

È quindi giustificabile la seguente definizione, che generalizza tale linea di pensiero.

**Definizione 1.7.** Si denota con  $\tilde{W}$  la seguente estensione distribuzionale della mappa di Weyl, avente come codominio lo spazio degli operatori lineari da  $\mathcal{S}(\mathbb{R}^n)$  a  $\mathcal{S}'(\mathbb{R}^n)$ ;

$$\begin{aligned} \tilde{W} : \mathcal{S}'(\Gamma) &\rightarrow \mathcal{L}(\mathcal{S}(\mathbb{R}^n), \mathcal{S}'(\mathbb{R}^n)) \\ g &\longmapsto \tilde{W}(g) : \mathcal{S}(\mathbb{R}^n) \rightarrow \mathcal{S}'(\mathbb{R}^n) \quad \psi \longmapsto \tilde{W}(g)\psi \\ \forall \psi, \varphi \in \mathcal{S}(\mathbb{R}^n) & \quad \llbracket \tilde{W}(g)\psi, \varphi \rrbracket_n := \llbracket g, w(\varphi \otimes \psi^*) \rrbracket_{2n} \end{aligned}$$

**Osservazione (Importante).** Probabilmente sembra bizzarro che si siano ottenuti degli operatori in  $\mathcal{L}(\mathcal{S}(\mathbb{R}^n), \mathcal{S}'(\mathbb{R}^n))$ , e non siano stati considerati gli usuali  $A : D(A) \rightarrow L^2(\mathbb{R}^n)$ ; ciò è essenzialmente dovuto alla scelta di trovare il corrispondente operatoriale delle distribuzioni temperate su  $\Gamma$ . Per gli scopi di questo elaborato, l'estensione ricavata è sufficiente, in quanto gli operatori di interesse hanno dominio contenente  $\mathcal{S}(\mathbb{R}^n)$  (si pensi alla posizione e al momento), e quindi possono essere visti come applicazioni contenute in  $\mathcal{L}(\mathcal{S}(\mathbb{R}^n), L^2(\mathbb{R}^n)) \subset \mathcal{L}(\mathcal{S}(\mathbb{R}^n), \mathcal{S}'(\mathbb{R}^n))$ .

**Osservazione.** Con tale definizione si recupera l'originale intento di Weyl, in quanto un generico polinomio  $f$  su  $\Gamma$  definisce una distribuzione temperata, e il corrispondente operatore polinomiale  $\tilde{W}(f)$  può essere immaginato come un endomorfismo lineare su  $\mathcal{S}(\mathbb{R}^n)$ , cosicché

$$\langle \tilde{W}(f)\psi, \varphi \rangle = \llbracket f, w(\varphi \otimes \psi^*) \rrbracket_{2n}.$$

**Esempio.** Applicando la definizione e integrando in  $p$ , per la posizione risulta che ( $n = 1$  per semplicità),

$$\llbracket q, w(\varphi \otimes \psi^*) \rrbracket = \int_{\mathbb{R}} q\varphi(q)\psi^*(q) dq = \langle Q\psi, \varphi \rangle = \llbracket Q\psi, \varphi \rrbracket.$$

La definizione or ora enunciata non risulta essere molto pratica da un punto di vista computazionale; perciò, seguendo i passi della Sezione 1.1, si può trovare una caratterizzazione analoga in termini di *kernel integrali* distribuzionali.

**Definizione 1.8.** Dato un operatore  $A \in \mathcal{L}(\mathcal{S}(\mathbb{R}^n), \mathcal{S}'(\mathbb{R}^n))$ , si chiama *kernel integrale* di  $A$  una distribuzione temperata  $k_A \in \mathcal{S}'(\mathbb{R}^n \times \mathbb{R}^n)$  tale che

$$\llbracket A\psi, \varphi \rrbracket_n = \llbracket k_A, \varphi \otimes \psi^* \rrbracket_{2n} \quad \forall \varphi, \psi \in \mathcal{S}(\mathbb{R}^n)$$

**Osservazione.** Il nome deriva dal fatto, rigorosamente valido per distribuzioni regolari, e formale per quelle singolari, che dalla rappresentazione integrale

$$\llbracket A\psi, \varphi \rrbracket_n = \llbracket k_A, \varphi \otimes \psi^* \rrbracket_{2n} = \int_{\mathbb{R}^{2n}} k_A^*(x, y)\varphi(x)\psi^*(y) dx dy$$

è possibile estrarre

$$(A\psi)(x) = \int_{\mathbb{R}^n} k_A(x, y)\psi(y) dy.$$

**Teorema 1.3.** Esiste un isomorfismo  $\tilde{\tau} : \mathcal{S}'(\mathbb{R}^n \times \mathbb{R}^n) \rightarrow \mathcal{L}(\mathcal{S}(\mathbb{R}^n), \mathcal{S}'(\mathbb{R}^n))$ , dato dalla definizione di kernel integrale, ovvero ogni operatore  $A$  è associato a una, e una sola, distribuzione  $k_A$ .

**Definizione 1.9.** Data una applicazione di spazi vettoriali  $B : \mathcal{V} \rightarrow \mathcal{Z}$ , si definisce come *trasposta* di  $B$  l'unico morfismo  ${}^tB : \mathcal{Z}' \rightarrow \mathcal{V}'$  che soddisfa, per ogni  $v \in \mathcal{V}$  e  $\tilde{z} \in \mathcal{Z}'$ , a

$$\llbracket {}^tB\tilde{z}, v \rrbracket_{\mathcal{V}'} = \llbracket \tilde{z}, Bv \rrbracket_{\mathcal{Z}'}$$

**Proposizione 1.5.** La mappa  $\tilde{K} : \mathcal{S}'(\Gamma) \rightarrow \mathcal{S}'(\mathbb{R}^n \times \mathbb{R}^n)$ ,  $g \mapsto K(g) := k_{\tilde{W}(g)}$  è un omeomorfismo. Vale inoltre

$$\tilde{K} = {}^t w.$$

*Dimostrazione.* Dalle definizioni appena date segue che, per ogni distribuzione temperata  $g$  su  $\Gamma$  e per ogni coppia di funzioni di prova  $\psi, \varphi$ ,

$$\llbracket k_{\tilde{W}(g)}, \varphi \otimes \psi^* \rrbracket_{2n} = \llbracket \tilde{W}(g)\psi, \varphi \rrbracket_n = \llbracket g, w(\varphi \otimes \psi^*) \rrbracket_{2n} \quad \Rightarrow \quad k_{\tilde{W}(g)} = {}^t w(g),$$

quindi  $\tilde{K} = {}^t w$ . Siccome la trasformata di Wigner è un omeomorfismo, ne segue che anche la sua trasposta lo è.  $\square$

Si è perciò ricostruita la mappa di Weyl come

$$\tilde{W} : \mathcal{S}'(\Gamma) \rightarrow \mathcal{L}(\mathcal{S}(\mathbb{R}^n), \mathcal{S}'(\mathbb{R}^n)) \quad \tilde{W} = \tilde{\iota} \circ \tilde{K} = \tilde{\iota} \circ {}^t w.$$

Ora è facile calcolare il *kernel* integrale, come trasposta di  $w$ , che è tutto quello di cui si ha necessità da un punto di vista pratico. Scrivendo l'azione delle distribuzioni in forma integrale (formalmente), si computa

$$\llbracket {}^t w(g), \varphi \otimes \psi^* \rrbracket = \frac{1}{h^n} \int_{\Gamma \times \mathbb{R}^n} g^*(q, p) \varphi\left(q + \frac{b}{2}\right) \psi^*\left(q - \frac{b}{2}\right) e^{-ib \cdot p/\hbar} dq dp db.$$

Operando il cambio di variabile  $(x, y) = (q + b/2, q - b/2)$ , si ottiene

$$\llbracket {}^t w(g), \varphi \otimes \psi^* \rrbracket = \int_{\mathbb{R}^{2n}} \left[ \frac{1}{h^n} \int_{\mathbb{R}^n} g\left(\frac{x+y}{2}, p\right) e^{i(x-y) \cdot p/\hbar} dp \right]^* \varphi(x) \psi^*(y) dx dy$$

In ultima analisi, si ritrova perciò

$$k_{\tilde{W}(g)}(x, y) = ({}^t w(g))(x, y) = \frac{1}{h^n} \int_{\mathbb{R}^n} g\left(\frac{x+y}{2}, p\right) e^{i(x-y) \cdot p/\hbar} dp, \quad (1.10)$$

che, a livello formale, corrisponde, com'era da attendersi, all'equazione (1.5). Si conclude perciò che è possibile utilizzare tutte le espressioni ricavate in sezione 1.1, a patto di intendere il computo degli integrali in senso distribuzionale. Risulta ora spontaneo chiedersi a cosa corrispondano operatori autoaggiunti: per fare ciò si devono dare le due seguenti nozioni di involuzione, che generalizzano, rispettivamente, i concetti di coniugazione complessa e di aggiunzione.

**Definizione 1.10.** La distribuzione complesso coniugata  $g^*$  associata a  $g \in \mathcal{S}'(\Gamma)$  è definita dalla seguente proprietà, valida per ogni funzione di prova.<sup>5</sup>

$$\llbracket g^*, \varphi \otimes \psi \rrbracket_{2n} = \llbracket g, \varphi^* \otimes \psi^* \rrbracket_{2n}^*$$

L'operatore *aggiunto*, denotato con  $A^\dagger$ , abbinato ad  $A \in \mathcal{L}(\mathcal{S}(\mathbb{R}^n), \mathcal{S}'(\mathbb{R}^n))$ , è l'operatore per cui, per ogni funzione di *test*,

$$\llbracket A^\dagger \psi, \varphi \rrbracket_n = \llbracket A \varphi, \psi \rrbracket_n^*.$$

**Proposizione 1.6.** Siano  $a \in \mathcal{S}'(\Gamma)$  e  $A \in \mathcal{L}(\mathcal{S}(\mathbb{R}^n), \mathcal{S}'(\mathbb{R}^n))$  tali che  $A = \tilde{W}(a)$ , allora

$$a = a^* \iff A = A^\dagger.$$

*Dimostrazione.* Utilizzando le definizioni e la proprietà  $w^*(\varphi \otimes \psi^*) = w(\psi \otimes \varphi^*)$ , si ha che,  $\forall \varphi, \psi \in \mathcal{S}(\mathbb{R}^n)$ ,

$$\llbracket A^\dagger \psi, \varphi \rrbracket_n = \llbracket A \varphi, \psi \rrbracket_n^* = \llbracket a, w(\psi \otimes \varphi^*) \rrbracket_{2n}^* = \llbracket a^*, w(\varphi \otimes \psi^*) \rrbracket_{2n}$$

e quindi  $a = a^* \iff A = A^\dagger$ . □

**Convenzione.** Avendo stabilito l'analogia formale dell'equazione (1.10) con (1.5), nel seguito si interpreteranno tutti i calcoli che fanno uso di integrali in senso distribuzionale, e si ometteranno i simboli di tilde sulle estensioni, onde evitare l'appesantimento di notazione che ha caratterizzato questa sezione.

<sup>5</sup>Ivi si sfrutta la densità di  $\mathcal{S}(\mathbb{R}^n) \otimes \mathcal{S}(\mathbb{R}^n)$  in  $\mathcal{S}(\Gamma)$ .



## 1.4 Osservabili sullo spazio delle fasi

**Definizione 1.11.** Le osservabili sullo spazio delle fasi sono le controimmagini mediante  $W$  di operatori autoaggiunti.

$$a = W^{-1}(A)$$

Si nota che non è affatto scontato dalla definizione data (riflettente la volontà di mantenere la fedeltà alla formulazione standard operatoriale) che l'osservabile coincida con la corrispondente funzione classica. Tuttavia, date le speciali proprietà della mappa di Weyl, certamente si può ottenere il seguente risultato preliminare.

**Proposizione 1.7.** Siano  $A, B \in \mathcal{L}(\mathcal{S}(\mathbb{R}^n), \mathcal{S}'(\mathbb{R}^n))$  autoaggiunti, tali da essere dipendenti, rispettivamente, da posizione e momento, ovvero

$$\exists a, b : \mathbb{R}^n \rightarrow \mathbb{R} \quad : \quad A = \int a(\lambda) d\mu_Q(\lambda) \quad B = \int b(\lambda) d\mu_P(\lambda),$$

con  $\mu_{Q,P}$  misura spettrale associata a  $Q, P$ , allora  $W^{-1}(A) = a \otimes 1$  e  $W^{-1}(B) = 1 \otimes b$ .

*Dimostrazione.* Si ha che  $\mu_Q(\lambda) = H(\lambda - Q)$ , con  $H$  funzione di Heaviside, quindi il kernel integrale di  $A$  e l'osservabile sullo spazio delle fasi sono

$$k_A(x, y) = a(x)\delta^n(x - y) \quad W^{-1}(A)(q, p) = \int_{\mathbb{R}^n} a(q + b/2)\delta^n(b)e^{-ib \cdot p/\hbar} db = a(q)$$

Analogamente, si trova nel caso di  $B$  che

$$k_B(x, y) = \frac{1}{h^n} \int_{\mathbb{R}^n} b(k)e^{i(x-y) \cdot k/\hbar} dk \quad W^{-1}(B)(q, p) = \frac{1}{h^n} \int_{\mathbb{R}^{2n}} b(k)e^{i(k-p) \cdot y/\hbar} dk dy = b(p)$$

dove si è sfruttata la rappresentazione integrale della  $\delta^n$ . □

Di conseguenza, per funzioni puramente dipendenti da posizione o momento, l'osservabile  $a = W^{-1}(A)$  coincide con la funzione classica  $a_{cl}$ .

In secondo luogo, si osserva che la nozione di autoaggiuntezza data dalla definizione 1.10 permette di incorporare come osservabili anche operatori che nella formulazione standard non sarebbero ben definiti, precisamente quelli a valori distribuzionali.

**Esempio.** L'Hamiltoniana del pettine di Dirac (con larghezza tipica  $a$ ), in  $n = 1$ , tipicamente utilizzata in una prima modellizzazione di cristallo unidimensionale, non è un'osservabile in senso stretto nella formulazione operatoriale della Meccanica Quantistica, essendo data da

$$H = \frac{p^2}{2m} + \sum_{k \in \mathbb{Z}} \delta(Q - ka),$$

ma in base alla precedente definizione essa risulta esserlo, con simbolo sullo spazio delle fasi  $h(q, p) = (2m)^{-1}p^2 + \sum_{k \in \mathbb{Z}} \delta(q - ka)$ .

**Esempio.** Gli autostati generalizzati di  $Q$  e  $P$ ,  $|x\rangle\langle x|$  e  $|k\rangle\langle k|$ , hanno corrispondenti distribuzioni sullo spazio della fasi  $\Psi_x(q, p) = \delta^n(q - x)$  e  $\Psi_k(q, p) = \delta^n(p - k)$ .

In generale, tuttavia, non è detto che l'osservabile coincida con la funzione classica; come si mostrerà nel prossimo capitolo (quando si doterà di una struttura algebrica l'insieme delle

osservabili su  $\Gamma$ ), per  $n = 3$ , mentre le tre componenti del momento angolare sono mappate nelle corrispondenti classiche<sup>6</sup>,

$$l_i(q, p) = W^{-1}(L_i)(q, p) = \epsilon_i^{jk} q_j p_k = l_{i,cl}(q, p)$$

la norma quadra del momento angolare risulta mandata in

$$\|l\|^2 = W^{-1}(\|L\|^2) = \|l_{cl}\|^2 - \frac{3}{2}\hbar^2.$$

Ciò è un primo indicatore del fatto che la struttura geometrica e algebrica di un sistema quantistico sullo spazio delle fasi deve essere diversa da quella euclidea standard classica. Per concludere, si pone l'attenzione su un fatto non rimarcato abbastanza sulla mappa di Weyl. Dalla definizione

$$A = W(a) = \frac{1}{(2\pi\hbar)^n} \int_{\Gamma} a(q, p) \Delta(q, p; \hbar) dq dp$$

segue che, al variare di  $\hbar$ , si ottiene una famiglia di mappe invertibili indicizzata su tale variabile; in particolare, prendendo il limite formale per  $\hbar \rightarrow 0$  del simbolo  $a = W^{-1}(A)$  di un operatore, si nota che esso tende al suo equivalente classico, mostrando quindi un fenomeno di contrazione. Si illustra tale caratteristica con un esempio.

**Esempio.** Le dequantizzazioni dell'operatore  $QP$  e dell'osservabile  $(QP + PQ)/2$ , risultano avere lo stesso limite.

$$\lim_{\hbar \rightarrow 0} W^{-1} \left( QP - \frac{QP + PQ}{2} \right) = \lim_{\hbar \rightarrow 0} \frac{i\hbar}{2} = 0$$

In tal senso, quindi, il limite per  $\hbar \rightarrow 0$  rappresenta un ripristino della struttura commutativa classica, in quanto tutte le funzioni che differiscono per  $\mathcal{O}(\hbar)$  hanno lo stesso limite: in questo modo per  $\hbar \rightarrow 0$  si sta annullando la prescrizione di Weyl, che aveva appunto il fine di porre questa distinzione per poter dare una mappa biiettiva.

### 1.4.1 Rappresentazione metaplettica

In Meccanica Classica, tra tutte le trasformazioni lineari sullo spazio delle fasi  $\Gamma$  sono privilegiate quelle che preservano la forma delle equazioni di Hamilton. Denotando i punti dello spazio delle fasi con  $(q, p) = z$ , e la matrice unità simplettica di ordine  $2n$  con  $\mathcal{S}_n$ , sia dato un sistema con Hamiltoniana  $h \in C^\infty(\Gamma)$ , allora le equazioni del moto si scrivono

$$\dot{z} = X_h = \mathcal{S}_n \nabla_z h \iff \dot{q}^i = \frac{\partial h}{\partial p_i} \quad \wedge \quad \dot{p}_i = -\frac{\partial h}{\partial q^i} \quad i = 1, \dots, n \quad (1.11)$$

e sotto l'azione di una generica applicazione lineare invertibile

$$\tilde{S} : \Gamma \rightarrow \Gamma \quad z \mapsto y = \tilde{S}(z) = Sz \quad S \in GL(2n, \mathbb{R})$$

l'equazione differenziale (1.11) viene coniugata mediante *push-forward* del campo vettoriale Hamiltoniano a

$$\dot{y} = \tilde{S}_* X_h = S \mathcal{S}_n {}^t S \nabla_y (\tilde{S}_* h),$$

<sup>6</sup>Ivi si adotta la convenzione sugli indici ripetuti di Einstein.

che è ancora in forma di equazione di Hamilton di Hamiltoniana  $\tilde{S}_*h = h \circ \tilde{S}^{-1}$  se vale la condizione, detta di simpletticità,

$$S\mathcal{I}_n^t S = \mathcal{I}_n. \quad (1.12)$$

L'insieme delle matrici che soddisfano alla condizione (1.12) formano un gruppo sotto l'operazione di prodotto matriciale, detto *simplettico*, e denotato con  $\text{Sp}(n, \mathbb{R})$ , di cui anche  $\mathcal{I}_n$  fa parte.

Avendo definito la mappa di Weyl, risulta spontaneo chiedersi se le osservabili quantistiche sullo spazio delle fasi siano compatibili con l'azione di tali trasformazioni canoniche. La risposta, affermativa, è codificata nella cosiddetta rappresentazione *metaplettica* di  $\text{Sp}(n, \mathbb{R})$ . Per semplicità ci si restringe alle osservabili di classe  $L^2$ .

**Teorema 1.4.** *Esiste una rappresentazione unitaria, detta metaplettica, del gruppo  $\text{Sp}(n, \mathbb{R})$ , denotata con  $m : \text{Sp}(n, \mathbb{R}) \rightarrow \mathcal{L}(L^2(\mathbb{R}^n))$ , tale che, per ogni trasformazione lineare canonica  $\tilde{S}$ , avente matrice rappresentativa  $S \in \text{Sp}(n, \mathbb{R})$  rispetto alla base canonica di  $\Gamma$ , il seguente diagramma risulti commutativo,*

$$\begin{array}{ccc} L^2(\Gamma) & \xrightarrow{\tilde{S}_*} & L^2(\Gamma) \\ W \downarrow & & \downarrow W \\ \mathcal{H}\mathcal{S}(L^2(\mathbb{R}^n)) & \xrightarrow{m_S} & \mathcal{H}\mathcal{S}(L^2(\mathbb{R}^n)) \end{array}$$

ove  $m_S(A) = m(S)Am^\dagger(S)$ . Ciò equivale a dire che  $W(\tilde{S}_*f) = m(S)W(f)m^\dagger(S)$ .

*Dimostrazione.* Si veda [6] e [7] per una dimostrazione e per ulteriori approfondimenti.  $\square$

**Osservazione.** Questa è una importante proprietà di covarianza, in quanto mostra che le trasformazioni lineari simplettiche sono ancora ammissibili in Meccanica Quantistica, poiché sono corrispondenti a trasformazioni unitarie, e quindi non cambiano i dati fisici del sistema. Si sottolinea, che tra tutte le prescrizioni che si possono dare, quella di Weyl è l'unica che gode di questa proprietà, ancora una volta grazie alla simmetria tra posizione e momento garantita da essa.

Ci si aspetta allora che per  $\mathcal{I}_n$ , che scambia le variabili coniugate  $[(q, p) \mapsto (p, -q)]$ , la trasformazione unitaria sia quella che permette di passare dalla rappresentazione  $x$  a  $p$ .

**Corollario.** *Effettivamente,  $m(\mathcal{I}_n) = \mathcal{F}$ , quindi  $W(f \circ \mathcal{I}_n^{-1}) = \mathcal{F}W(f)\mathcal{F}^{-1}$ .*

*Dimostrazione.* Si rimanda a [6].  $\square$



# Capitolo 2

## Proprietà algebriche delle osservabili

Nel capitolo seguente si introduce, e se ne discutono le proprietà algebriche e geometriche, un prodotto non commutativo ( $\star$ ), trattato per la prima volta da Groenewold in [3], e detto di Moyal, che permetta di emulare la composizione operatoriale sullo spazio delle fasi

$$AB \quad \longleftrightarrow \quad a \star b,$$

e si dà la nozione di parentesi di Moyal, che permette di imitare il commutatore

$$[A, B] \quad \longleftrightarrow \quad i\hbar \{a, b\} = a \star b - b \star a.$$

Si mostra come questo prodotto possa essere scritto come una deformazione del prodotto puntuale,

$$f \star_{\hbar} g - g \star_{\hbar} f = i\hbar \{f, g\} + \mathcal{O}(\hbar^2),$$

evidenziando il significato del limite classico (formale)  $\hbar \rightarrow 0$ , con

$$\lim_{\hbar \rightarrow 0} a \star_{\hbar} b = ab \qquad \lim_{\hbar \rightarrow 0} \{a, b\}_{\hbar} = \{a, b\}.$$

Tali costrutti permettono, coseguentemente, di dare all'insieme delle osservabili una struttura di algebra di Poisson non locale e di ricavare lo spettro delle stesse.

## 2.1 Prodotto di Moyal

### 2.1.1 Funzioni di classe $L^2$

Nella Sezione 1.1 si è mostrato come la mappa di Weyl

$$W(f) = \frac{1}{h^n} \int_{\Gamma} f(q, p) \Delta(q, p) dq dp$$

sia un multiplo di una trasformazione unitaria tra  $L^2(\Gamma)$  e  $\mathcal{HS}(L^2(\mathbb{R}^n))$ ; essendo quest'ultimo spazio chiuso rispetto alla composizione<sup>1</sup> operatoriale, questa operazione viene trasportata sullo spazio delle fasi mediante la seguente definizione.

---

<sup>1</sup>Addirittura esso è un ideale ambilatero di  $\mathcal{B}(L^2(\mathbb{R}^n))$ , quindi il prodotto di un operatore di Hilbert-Schmidt e di uno limitato è ancora di Hilbert-Schmidt.

**Definizione 2.1.** Il prodotto di Moyal è l'unica operazione  $\star : L^2(\Gamma) \times L^2(\Gamma) \rightarrow L^2(\Gamma)$  che rende commutativo il seguente diagramma.

$$\begin{array}{ccc} L^2(\Gamma) \times L^2(\Gamma) & \xrightarrow{\star} & L^2(\Gamma) \\ W \times W \downarrow & & \downarrow W \\ \mathcal{HS}(L^2(\mathbb{R}^n)) \times \mathcal{HS}(L^2(\mathbb{R}^n)) & \xrightarrow{\circ} & \mathcal{HS}(L^2(\mathbb{R}^n)) \end{array}$$

Vale a dire,  $\forall f, g \in L^2(\Gamma)$ ,  $f \star g := W^{-1}(W(f)W(g))$ .

Da ciò, indipendentemente dalla forma esatta di  $\star$ , seguono direttamente alcune proprietà immediate ma significative:  $\forall \alpha, \beta \in \mathbb{C}, \forall f, g, h \in L^2(\Gamma)$

1. associatività  $f \star (g \star h) = (f \star g) \star h = f \star g \star h$ ;
2. in generale, non commutatività  $f \star g \neq g \star f$ ;
3. linearità  $(\alpha f + \beta g) \star h = \alpha f \star h + \beta g \star h$ ;
4. comportamento sotto coniugio  $(f \star g)^* = g^* \star f^*$ .

Si riporta ora la forma esplicita del prodotto, mantenendo la convenzione di denotare i punti dello spazio delle fasi con  $(q, p) = z$ .

**Proposizione 2.1.** Il prodotto tra  $f, g \in L^2(\Gamma)$  è computabile come

$$f \star g(z) = \frac{1}{h^{2n}} \int_{\mathbb{R}^{4n}} \hat{f}(a-b) \hat{g}(b) e^{ia \cdot (2z - \mathcal{I}_n b) / 2\hbar} da db \quad (2.1)$$

*Dimostrazione.* Dalla definizione di mappa di Weyl e dalla Proposizione 1.1, denotando  $(Q, P) = Z$ , segue che

$$h^{2n} W(f)W(g) = \int_{\mathbb{R}^{4n}} \hat{f}(a') \hat{g}(b) e^{ia' \cdot Z / \hbar} e^{ib \cdot Z / \hbar} da' db = \int_{\mathbb{R}^{4n}} \hat{f}(a-b) \hat{g}(b) e^{-ia \cdot \mathcal{I}_n b / 2\hbar} e^{i(a \cdot Z) / \hbar} da db.$$

Quindi risulta essere, per la definizione di prodotto di Moyal, che

$$\widehat{f \star g}(a) = \frac{1}{h^n} \int_{\mathbb{R}^{2n}} \hat{f}(a-b) \hat{g}(b) e^{-ia \cdot \mathcal{I}_n b / 2\hbar} db,$$

e l'antitrasformata permette di concludere. □

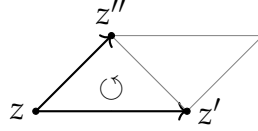
La proposizione precedente mostra esplicitamente che le proprietà 1-4 sono rispettate, ma non risulta essere esplicativa da un punto geometrico. Per comprendere tale aspetto del prodotto di Moyal, si sviluppano le trasformate nell'equazione (2.1), e riarrangiando i vari termini si ottiene la seguente forma.

**Proposizione 2.2** (Prodotto di Moyal, forma geometrica).

$$f \star g(z) = \left(\frac{2}{h}\right)^{2n} \int_{\Gamma^2} f(z') g(z'') e^{2i(z-z') \cdot \mathcal{I}_n (z-z'') / \hbar} dz' dz''$$

*Dimostrazione.* La dimostrazione è riportata in Appendice. □

**Osservazione (I).** L'interpretazione geometrica è ora chiara: il prodotto di una funzione  $f$  con un'altra  $g$ , valutato in un punto  $z \in \Gamma$ , è dato dalla sovrapposizione dei prodotti puntuali  $f(z')g(z'')$ , pesati da una fase proporzionale al volume simplettico orientato del triangolo di vertici  $z, z', z''$  (si veda la figura in basso). Da questo la non località e la non commutatività sono manifeste.



**Osservazione (II).** Per il lemma di Riemann-Lebesgue<sup>2</sup> si nota che l'integrale in Proposizione 2.2, sotto l'ipotesi che  $f \otimes g \in L^1(\Gamma^2) \cap L^2(\Gamma^2)$ , è in realtà concentrato in un volume di misura comparabile ad  $\hbar^n$  attorno al punto di valutazione, mentre il resto del contributo ad esso, siccome la fase oscilla velocemente, si annulla (solo) asintoticamente. Ciò mostra che il prodotto di Moyal è *moderatamente* non locale e che punti vicini sullo spazio delle fasi sono intercorrelati.

Studiando il comportamento al variare di  $\hbar$  del prodotto di due funzioni, si ottiene il seguente risultato.

**Proposizione 2.3.** Siano  $f, g \in \mathcal{S}(\Gamma)$ , allora  $f \star_{\hbar} g \xrightarrow[\hbar \rightarrow 0]{L^1} fg$ .

*Dimostrazione.* Chiaramente per  $f, g \in \mathcal{S}(\Gamma)$  si ha che  $f \star g \in \mathcal{S}(\Gamma)$ . Dalla Proposizione 2.1, utilizzando la definizione standard della trasformata di Fourier (contrariamente a quanto fatto finora), e denotando la convoluzione con  $*$ , segue che

$$\left\| (2\pi)^n \widehat{f \star g} - \widehat{f} * \widehat{g} \right\|_{L^1} = 2 \int_{\mathbb{R}^{4n}} |\widehat{f}(a-b)\widehat{g}(b)| \operatorname{sen}^2 \left( \frac{\hbar}{4} a \cdot \mathcal{I}_n b \right) da db \xrightarrow[\hbar \rightarrow 0]{} 0.$$

Quindi, da  $\mathcal{F}^{-1}[\widehat{f} * \widehat{g}] = (2\pi)^n fg$  segue la tesi. □

Di conseguenza, si nota ancora che il limite  $\hbar \rightarrow 0$  corrisponde al ripristino della struttura algebrica classica data dal prodotto puntuale.

**Osservazione.** È d'uso comune in letteratura denotare il prodotto di Moyal con il seguente operatore bidifferenziale

$$\star = e^{i\hbar \left( \overleftarrow{\partial}_q \cdot \overrightarrow{\partial}_p - \overleftarrow{\partial}_p \cdot \overrightarrow{\partial}_q \right) / 2}, \tag{2.2}$$

che mostra esplicitamente la proposizione precedente: difatti il prodotto può essere sviluppato in serie di potenze asintotica come

$$f \star_{\hbar} g = fg + \frac{i\hbar}{2} \{f, g\} + \mathcal{O}(\hbar^2) \xrightarrow[\hbar \rightarrow 0]{} 0. \tag{2.3}$$

In tal senso si può interpretare il prodotto non commutativo di Moyal come una *deformazione* del prodotto puntuale, ottenuta mediante correzioni simplettiche. Questo fatto ha ispirato un intero filone di ricerca, che permette di quantizzare<sup>3</sup> generiche varietà di Poisson  $M$ , mediante la deformazione formale dell'algebra  $(C^\infty(M), \cdot, \{, \})$ .

<sup>2</sup>Sia  $f \in L^1(\mathbb{R}^k)$ , allora  $\lim_{\|s\| \rightarrow \infty} \mathcal{F}[f](s) = 0$ .

<sup>3</sup>A tal proposito si veda:

**Osservazione.** L'equazione (2.2) suggerisce un modo rapido di calcolare il prodotto di due funzioni: infatti lo si può formalmente scrivere nelle seguenti due forme equivalenti

$$f \star g(q, p) = f\left(q + \frac{i\hbar}{2} \frac{\partial}{\partial p}, p - \frac{i\hbar}{2} \frac{\partial}{\partial q}\right) g(q, p) = g\left(q - \frac{i\hbar}{2} \frac{\partial}{\partial p}, p + \frac{i\hbar}{2} \frac{\partial}{\partial q}\right) f(q, p); \quad (2.4)$$

se utilizzate con cautela, queste prescrizioni permettono di computare il prodotto di Moyal di due osservabili in maniera alquanto veloce.

Un'altra caratteristica di tale costrutto è la seguente: date due funzioni, il loro  $\star$ -prodotto e quello puntuale non sono globalmente differenti.

**Proposizione 2.4.** *Siano  $f, g \in L^2(\Gamma)$  tali che  $fg$  sia integrabile secondo Lebesgue, allora  $f \star g$  è integrabile e vale*

$$\int_{\Gamma} f \star g(z) dz = \int_{\Gamma} f(z)g(z) dz.$$

*Dimostrazione.* Da un calcolo diretto, utilizzando la forma geometrica di  $\star$ , si ottiene

$$\int_{\Gamma} f \star g(z) dz = \int_{\Gamma^2} f(z')g(z'')\delta^{2n}(\mathcal{I}_n(z' - z'')) dz' dz'' = \int_{\Gamma} f(z')g(z') dz'$$

e quindi  $f \star g$  è integrabile se  $fg$  lo è, e in tal caso vale l'uguaglianza.  $\square$

In ultima istanza, dalla discussione sulla rappresentazione metaplettica del gruppo simplettico in Sezione 1.4, segue che il prodotto di Moyal è equivariante sotto l'azione di  $\text{Sp}(n, \mathbb{R})$ .

**Proposizione 2.5.** *Per ogni  $f, g \in L^2(\Gamma)$ , e per ogni trasformazione canonica lineare  $\tilde{S} : \Gamma \rightarrow \Gamma$ , vale*

$$\tilde{S}_*(f \star g) = (\tilde{S}_*f) \star (\tilde{S}_*g).$$

*Dimostrazione.* Sia  $S \in \text{Sp}(n, \mathbb{R})$  la matrice rappresentativa di  $\tilde{S}$  rispetto alla base canonica di  $\Gamma$ , allora

$$(\tilde{S}_*f) \star (\tilde{S}_*g) = W^{-1}(\mathfrak{m}(S)W(f)\mathfrak{m}^\dagger(S)\mathfrak{m}(S)W(g)\mathfrak{m}^\dagger(S)) = \tilde{S}_*(f \star g),$$

dove si è sfruttato il Teorema 1.4.  $\square$

## 2.1.2 Distribuzioni temperate

Avendo come obiettivo l'estensione del prodotto di Moyal a distribuzioni temperate sullo spazio delle fasi, è bene tenere a mente che globalmente non è possibile, in quanto tale prodotto corrisponderebbe, mediante la corrispondenza di Weyl, alla composizione di due operatori in  $\mathcal{L}(\mathcal{S}(\mathbb{R}^n), \mathcal{S}'(\mathbb{R}^n))$ , generalmente non definibile.

Tuttavia, ricordando che  $(\mathcal{S}(\Gamma), \star)$  è una sottoalgebra di  $(L^2(\Gamma), \star)$ , e traendo ispirazione dalla Proposizione 2.4, è naturale dare le seguenti estensioni preliminari.

1. F. Bayen, M. Flato, C. Fronsdal, A. Lichnerowicz, D. Sternheimer, *Quantum mechanics as a deformation of classical mechanics*, *Letters in Mathematical Physics*, **1**, pp. 521-530, (1977);
2. B. V. Fedosov, *A simple construction of deformation quantization*, *Journal of Differential Geometry*, **40**, pp. 213-238, (1994);
3. M. Kontsevich, *Deformation quantization of Poisson manifolds*, *Letters in Mathematical Physics*, **66**, pp. 157-216, (2003), risorsa Arxiv [q-alg/9709040];



**Definizione 2.2.** Definiamo i prodotti di Moyal destro e sinistro come

$$\star_1 : \mathcal{S}'(\Gamma) \times \mathcal{S}(\Gamma) \rightarrow \mathcal{S}'(\Gamma) \quad \star_2 : \mathcal{S}(\Gamma) \times \mathcal{S}'(\Gamma) \rightarrow \mathcal{S}'(\Gamma) \quad : \quad \forall \psi, \varphi \in \mathcal{S}(\Gamma), \forall f \in \mathcal{S}'(\Gamma)$$

$$\llbracket f \star_1 \psi, \varphi \rrbracket := \llbracket f, \psi^* \star \varphi \rrbracket \quad \llbracket \psi \star_2 f, \varphi \rrbracket := \llbracket f, \varphi \star \psi^* \rrbracket$$

Le due estensioni non sono indipendenti perché vale il seguente lemma.

**Lemma.** Per ogni  $\psi, \varphi \in \mathcal{S}(\Gamma), f \in \mathcal{S}'(\Gamma)$  sono valide le seguenti uguaglianze.

$$(\psi \star_2 f)^* = f^* \star_1 \psi^*$$

$$(\psi \star_2 f) \star_1 \varphi = \psi \star_2 (f \star_1 \varphi) \quad (f \star_1 \psi) \star_1 \varphi = f \star_1 (\psi \star \varphi) \quad \psi \star_2 (\psi \star_2 f) = (\psi \star \varphi) \star_2 f$$

*Dimostrazione.* Sfruttando la proprietà 4 del prodotto di Moyal, si ottiene,  $\forall \eta \in \mathcal{S}(\Gamma)$ , la tesi.

$$\llbracket (\psi \star_2 f)^*, \eta \rrbracket = \llbracket \psi \star_2 f, \eta^* \rrbracket^* = \llbracket f, (\psi \star \eta)^* \rrbracket^* = \llbracket f^* \star_1 \psi^*, \eta \rrbracket$$

Le proprietà di associatività seguono in modo analogo, ricordando l'associatività di  $\star$ .  $\square$

In generale questo è il massimo che si può ottenere, ma risulta maggiormente proficuo cercare sottospazi di  $\mathcal{S}'(\Gamma)$  che presentino una qualche proprietà di chiusura rispetto alle estensioni.

**Definizione 2.3.** Si nominano  $N, \bar{N}$  i seguenti sottoinsiemi di  $\mathcal{S}'(\Gamma)$

$$N := \{f \in \mathcal{S}'(\Gamma) : f \star_1 \psi \in \mathcal{S}(\Gamma) \forall \psi \in \mathcal{S}(\Gamma)\} \quad \bar{N} := \{f \in \mathcal{S}'(\Gamma) : \psi \star_2 f \in \mathcal{S}(\Gamma) \forall \psi \in \mathcal{S}(\Gamma)\}.$$

**Osservazione.** Grazie al lemma precedente è facile verificare che  $f \in N \Leftrightarrow f^* \in \bar{N}$ ; quindi per distribuzioni reali  $f \in N, \bar{N} \Leftrightarrow f \in N \cap \bar{N}$ .

Inoltre tali insiemi non sono vuoti, in quanto tutti i polinomi appartengono alla loro intersezione, come anche la distribuzione  $\delta^{2n}$  di Dirac.

Ora è possibile dare l'estensione voluta.

**Definizione 2.4.** Il prodotto  $\tilde{\star}$  di due distribuzioni temperate  $f, g \in \mathcal{S}'(\Gamma)$  è definito se almeno una appartiene a  $N$ . Supponendo sia  $f, \forall \eta \in \mathcal{S}(\Gamma)$  si ha che

$$\llbracket f \tilde{\star} g, \eta \rrbracket := \llbracket g, \eta \star_2 f^* \rrbracket \quad \llbracket g \tilde{\star} f, \eta \rrbracket := \llbracket g, f^* \star_1 \eta \rrbracket$$

**Proposizione 2.6.** L'insieme, dotato di operazione,  $(N \cap \bar{N}, \tilde{\star})$  è un'algebra associativa, chiamata Algebra di Moyal e indicata con  $(\mathcal{A}_M(\Gamma), \tilde{\star})$ .

*Dimostrazione.* Si rimanda a [5].  $\square$

**Osservazione.** Si è ora ottenuta una sequenza di tre  $\star$ -algebre incastolate, previa identificazione  $\tilde{\star}|_{L^2(\Gamma) \times L^2(\Gamma)} = \star$ , nel seguente ordine:  $(\mathcal{S}(\Gamma), \star) \subset (L^2(\Gamma), \star) \subset (\mathcal{A}_M(\Gamma), \tilde{\star})$ .

**Nota.** In letteratura (si veda ad esempio [7]) esiste un'ulteriore estensione del prodotto di Moyal, data dalla definizione di un particolare sottospazio di  $\mathcal{S}'(\Gamma)$  (e del suo analogo barrato) definito come  $R := \{f \in \mathcal{S}'(\Gamma) : f \star_1 \psi \in L^2(\Gamma), \forall \psi \in \mathcal{S}(\Gamma)\}$ . Di conseguenza si può definire il seguente prodotto

$$\star' : R \times \bar{R} \rightarrow \mathcal{S}'(\Gamma) \quad (f, g) \mapsto f \star' g$$

$$\forall \psi, \varphi \in \mathcal{S}(\Gamma) \quad \llbracket f \star' g, \psi \star \varphi^* \rrbracket := \langle f \star_1 \varphi, g^* \star_1 \psi \rangle.$$

Tuttavia, tale generalità esula dagli scopi di questo elaborato, anche perché  $R \cap \bar{R}$  non costituisce un'algebra.

**Convenzione.** Per evitare appesantimenti di notazione, nel seguito non si distinguerà più tra le varie estensioni, denotandole tutte con  $\star$ . Questa scelta è ancora una volta dettata dalla volontà di interpretare le formule esplicite della sottosezione precedente in senso distribuzionale. Si denoterà altresì con  $O_M(\Gamma) := \{f \in \mathcal{A}_M(\Gamma) : f = f^*\}$  il sottoinsieme dell'algebra di Moyal costituito da distribuzioni reali.

## 2.2 Valori medi e spettro di un'osservabile

Una teoria che cerchi di descrivere un sistema fisico deve contenere in sé stessa gli algoritmi per computare i valori medi, le probabilità di transizione e lo spettro delle osservabili: questo sarà precisamente lo scopo di questa Sezione.

Nel formalismo operatoriale su uno spazio di Hilbert, le prime due grandezze sono definite nel seguente modo.

**Definizione 2.5.** Data una osservabile  $A$  e due stati (eventualmente misti)  $\rho_1, \rho_2$  tali che  $\rho_1 A$  sia di classe traccia, si danno le sottostanti due definizioni:

1. il valor medio, o aspettazione, di  $A$  su  $\rho_1$  è dato da  $\langle A \rangle_{\rho_1} := \text{tr}(\rho_1 A)$ ;
2. la probabilità di transizione dallo stato  $\rho_1$  a  $\rho_2$  è  $\mu_{1,2} = \langle \rho_2 \rangle_{\rho_1} := \text{tr}(\rho_1 \rho_2)$ .

**Osservazione (I).** La definizione di probabilità di transizione è simmetrica.

**Osservazione (II).** Nel caso di stati puri, le due definizioni si riducono a quelle usuali:  $\langle A \rangle_{\psi} = \langle \psi, A\psi \rangle$  e  $\mu_{1,2} = |\langle \psi_1, \psi_2 \rangle|^2$ .

Con l'ottica di riprodurre gli stessi risultati, sullo spazio delle fasi si danno le sottostanti definizioni.

**Definizione 2.6.** Data un'osservabile  $a \in O_M(\Gamma)$  e due stati, ovvero funzioni di Wigner,  $\Psi, \Phi$  (eventualmente misti) tali che  $a\Psi$  è integrabile vengono date le seguenti definizioni:

1. il valor medio, o aspettazione, di  $a$  su  $\Psi$  è dato da

$$\langle A \rangle_{\Psi} := \int_{\Gamma} a(q, p) \Psi(q, p) dq dp;$$

2. la probabilità di transizione dallo stato  $\Psi$  a  $\Phi$  è

$$\mu_{\Psi, \Phi} := h^n \int_{\Gamma} \Phi(q, p) \Psi(q, p) dq dp.$$

**Osservazione.** Nonostante la definizione al punto 1. rassomigli estremamente alla media classica di un'osservabile  $a_{cl}$  su uno stato misto  $\rho_{cl}$ , bisogna porre delle fondamentali distinzioni: in primo luogo  $\Psi$  non è necessariamente definita positiva, e in secondo luogo gli stati puri quantistici non si presentano concentrati in un punto.

Inoltre nel punto 2. la normalizzazione è cruciale sia dimensionalmente che per motivi di coerenza, come si mostra di seguito.

**Proposizione 2.7.** Siano  $\Psi, \Phi$  funzioni di Wigner,  $\rho_{\Psi}, \rho_{\Phi} \in \mathcal{B}(L^2(\mathbb{R}^n))$  operatori di densità,  $a \in O_M(\Gamma)$  distribuzione reale e  $A$  operatore autoaggiunto su  $L^2(\mathbb{R}^n)$ , tali che

$$\rho_{\Psi} = h^n W(\Psi) \quad \rho_{\Phi} = h^n W(\Phi) \quad A = W(a)$$

allora le definizioni 2.5 e 2.6 sono compatibili, vale a dire

$$\langle A \rangle_{\rho_{\Psi}} = \langle a \rangle_{\Psi} \quad \mu_{\rho_{\Psi} \rho_{\Phi}} = \mu_{\Psi \Phi}.$$

*Dimostrazione.* Dalla Definizione 1.5 e le Proposizioni 1.3 e 2.4, segue che

$$\mathrm{tr}(\rho_{\Psi}A) = \frac{1}{h^n} \int_{\Gamma} W^{-1}(\rho_{\Psi}) \star W^{-1}(A)(q, p) dqdp = \int_{\Gamma} a(q, p) \Psi(q, p) dqdp.$$

Analogamente,

$$\mathrm{tr}(\rho_{\Psi}\rho_{\Phi}) = \frac{1}{h^n} \int_{\Gamma} W^{-1}(\rho_{\Psi}) \star W^{-1}(\rho_{\Phi})(q, p) dqdp = h^n \int_{\Gamma} \Phi(q, p) \Psi(q, p) dqdp;$$

le definizioni 2.5 e 2.6 permettono di concludere.  $\square$

Per quanto riguarda lo spettro di un'osservabile, ossia l'insieme dei valori ottenibili da una misura di tale grandezza fisica, occorre rammentare che nel formalismo standard su spazio di Hilbert della Meccanica Quantistica esso è determinato nel seguente modo.

**Definizione 2.7.** La fluttuazione,  $(\Delta B)_{b,\psi}^2$  di un'operatore autoaggiunto  $(B, D(B))$  su uno stato  $\psi \in D(B)$  attorno ad un valore  $b \in \mathbb{R}$  è data da

$$(\Delta B)_{b,\psi}^2 := \langle (B - b\mathbb{I})^2 \rangle_{\psi}$$

La varianza è definita come la fluttuazione attorno al valor medio,  $(\Delta B)_{\psi}^2 := (\Delta B)_{\langle B \rangle_{\psi}, \psi}^2$ .

**Definizione 2.8.** Lo spettro di un'osservabile coincide con lo spettro dell'operatore autoaggiunto ad essa associato.

$$\sigma(B) = \{b \in \mathbb{R} : \inf_{\psi \in D(B) \setminus \{0\}} (\Delta B)_{b,\psi}^2 = 0\}$$

Per dare una caratterizzazione più illuminante dello spettro, utilizzando la tripletta spettrale di Gel'fand  $\Phi_B \subset \mathcal{H} \leftrightarrow \mathcal{H}' \subset \Phi'_B$ , nel formalismo operatoriale si dimostra che i valori di cui è costituito risultano essere le soluzioni delle seguenti equazioni agli autovalori:

$$B|b\rangle = b|b\rangle \quad \langle b|B = b\langle b|;$$

la prima fornisce la componente puntuale dello spettro,  $\sigma_p(B)$ , con autostati fisici  $|b\rangle \in \mathcal{H}$ , mentre la seconda, risolta, dà quella continua,  $\sigma_c(B)$ , con autofunzionali non fisici  $\langle b| \in \Phi'_B \setminus \mathcal{H}'$ .

Traendo spunto da questa caratterizzazione, e facendo uso della mappa di Weyl, si dà la seguente definizione.

**Definizione 2.9.** Lo spettro di una distribuzione temperata reale  $b \in O_M(\Gamma)$  è completamente determinato dalla soluzione delle equazioni agli  $\star$ -autovalori riportate di seguito.

$$b \star \Psi_{\beta} = \beta \Psi_{\beta} = \Psi_{\beta} \star b \quad (2.5)$$

Si chiamerà *degenerazione* dell'autovalore  $\beta$  il numero di soluzioni differenti afferenti ad esso, e si indicherà con  $d(\beta)$ .

**Osservazione (I).** Gli autovalori sono necessariamente reali; infatti

$$\beta^* \Psi_{\beta} = (b \star \Psi_{\beta})^* = \Psi_{\beta} \star b = \beta \Psi_{\beta} \implies \beta^* = \beta.$$

Inoltre, dall'equazione (2.4) segue che le (2.5) possono essere viste come equazioni differenziali alle derivate parziali dotate di parte reale e parte immaginaria, sullo spazio delle fasi  $\Gamma$ .

Infine, chiaramente lo spettro di un'osservabile non va a coincidere con la sua immagine, e questo indica una dipartita radicale dal caso classico, ove  $\sigma(b_{cl}) = b(\Gamma)$ .

**Osservazione (II).** Autofunzioni afferenti ad autovalori differenti sono  $\star$ -ortogonali; infatti, da un computo diretto, e dall'associatività di  $\star$  risulta

$$\beta_1 \Psi_1 \star \Psi_2 = \Psi_1 \star B \star \Psi_2 = \beta_2 \Psi_1 \star \Psi_2 \quad \wedge \quad \beta_1 \neq \beta_2 \quad \implies \quad \Psi_1 \star \Psi_2 = 0.$$

**Osservazione (III).** Lo spettro discreto sarà determinato da autovalori  $\beta$  la cui autofunzione corrispondente  $\Psi_\beta$  è una funzione di Wigner di stato puro (e quindi, una funzione di classe  $L^2$ ), mentre la componente continua sarà costituita dai  $\beta$  tali che  $\Psi_\beta \in O_M(\Gamma)$  è una distribuzione temperata.

**Esempio** ( $n = 1$ ). Si calcolano di seguito lo spettro e le autofunzioni dell'osservabile posizione.

$$0 = q \star \Psi(q, p) - x \Psi(q, p) = (q - x) \Psi_x(q, p) + \frac{i\hbar}{2} \frac{\partial \Psi_x}{\partial p}(q, p)$$

Annullando parte reale e immaginaria separatamente otteniamo

$$(q - x) \Psi_x(q) = 0 \quad \implies \quad \Psi_x(q) = \delta(q - x).$$

Quindi  $\sigma(q) = \mathbb{R}$ , come atteso. Si osserva che le autofunzioni corrispondono, com'era da attendersi, esattamente a  $W^{-1}(|x\rangle\langle x|)$ . Analogamente si procede per trovare  $\sigma(p) = \mathbb{R}$ .

**Definizione 2.10.** In analogia alle Definizioni 2.7, la fluttuazione di  $b \in O_M(\Gamma)$  su una funzione di Wigner  $\Psi$  attorno al valore  $\beta \in \mathbb{R}$  è data da

$$(\Delta b)_{\beta, \Psi}^2 = \langle (b - \beta)_\star \rangle_\Psi$$

e la varianza risulta calcolabile come

$$(\Delta b)_\Psi^2 = \langle b \star b \rangle_\Psi - \langle b \rangle_\Psi^2.$$

In ultima istanza, la definizione del concetto di autovalori e autofunzioni permette di trasportare sullo spazio delle fasi un altro costrutto molto importante: data  $b \in O_M(\Gamma)$ , la completezza di Dirac rispetto alle sue autofunzioni si scrive, in questo formalismo, nel modo seguente.

$$h^n \left[ \sum_{\beta \in \sigma_p(b)} \sum_{r=0}^{d(\beta)} \Psi_{\beta, r} + \int_{\sigma_c(b)} \sum_{r=0}^{d(\beta)} \Psi_r(\beta) d\beta \right] = 1 \quad (2.6)$$

## 2.3 Parentesi di Moyal

Dalla proprietà  $(f \star g)^* = g^* \star f^*$  risulta evidente che due osservabili (ovvero due distribuzioni reali) che non commutano hanno prodotto, se definito, non osservabile<sup>4</sup>. Di conseguenza, non è lo  $\star$ -product a caratterizzare direttamente la struttura algebrica delle osservabili.

Tuttavia, ricordando che nel formalismo operatoriale il costrutto di interesse è il commutatore<sup>5</sup> si può dare la seguente definizione.

<sup>4</sup>Ciò è equivalente a trovarsi, nel formalismo operatoriale, con  $A, B$  autoaggiunti ma non commutanti.

<sup>5</sup>Si rammenta che il commutatore  $[A, B]$  di due operatori  $A, B$  è definito come  $[A, B] = AB - BA$ .

**Definizione 2.11** (Parentesi di Moyal). La mappa, data dall'antisimmetrizzazione del prodotto di Moyal,

$$\{\!\!\{ \cdot, \cdot \}\!\!\} : \mathcal{A}_M(\Gamma) \times \mathcal{A}_M(\Gamma) \rightarrow \mathcal{A}_M(\Gamma) \quad (f, g) \mapsto \{\!\!\{ f, g \}\!\!\} := \frac{f \star g - g \star f}{i\hbar}$$

è detta parentesi di Moyal.

**Osservazione.** In sostanza,  $\{\!\!\{ \cdot, \cdot \}\!\!\}$  è l'operazione corrispondente mediante Weyl a  $[\cdot, \cdot]/(i\hbar)$ .

Dalla definizione e dalle proprietà di  $\star$  è facile dedurre tutta una serie di caratteristiche della parentesi di Moyal.

**Proposizione 2.8.** Per ogni  $f, g, h \in \mathcal{A}_M(\Gamma)$ , e  $\alpha, \beta \in \mathbb{C}$  valgono le seguenti proprietà:

1. *antisimmetria*  $\{\!\!\{ f, g \}\!\!\} = -\{\!\!\{ g, f \}\!\!\}$ ;
2. *linearità*  $\{\!\!\{ \alpha f + \beta g, h \}\!\!\} = \alpha \{\!\!\{ f, h \}\!\!\} + \beta \{\!\!\{ g, h \}\!\!\}$ ;
3. *identità di Jacobi*  $\{\!\!\{ f, \{\!\!\{ g, h \}\!\!\} \}\!\!\} + \{\!\!\{ g, \{\!\!\{ h, f \}\!\!\} \}\!\!\} + \{\!\!\{ h, \{\!\!\{ f, g \}\!\!\} \}\!\!\} = 0$ ;
4. *regola di Leibniz*  $\{\!\!\{ f \star g, h \}\!\!\} = f \star \{\!\!\{ g, h \}\!\!\} + \{\!\!\{ f, h \}\!\!\} \star g$ ;
5. *realtà*  $f = f^*, g = g^* \implies \{\!\!\{ f, g \}\!\!\}^* = \{\!\!\{ f, g \}\!\!\}$ ;
6. *traccia nulla*: sia vero che  $fg$  esiste ed è integrabile, allora

$$\int_{\Gamma} \{\!\!\{ f, g \}\!\!\}(q, p) dqdp = 0.$$

*Dimostrazione.* I punti 1, 2 e 5 seguono dalla definizione, il terzo è un calcolo diretto e per verificare il quarto è sufficiente sfruttare l'associatività di  $\star$ . L'ultimo risulta essere un corollario della Proposizione 2.4, a seguito delle ipotesi fatte.  $\square$

Quindi, a seguito dei punti 1-4 sopra esposti,  $(\mathcal{A}_M(\Gamma), \star, \{\!\!\{ \cdot, \cdot \}\!\!\})$  costituisce una  $\star$ -algebra di Poisson<sup>6</sup>.

In particolare, per quanto concerne la Meccanica Quantistica, avendo convenuto di denotare con  $O_M(\Gamma) = \{f \in \mathcal{A}_M(\Gamma) : f = f^*\}$  l'insieme delle osservabili per cui è certamente definito il prodotto, dal punto 5 segue che  $(O_M(\Gamma), \{\!\!\{ \cdot, \cdot \}\!\!\})$  è una sottoalgebra di Poisson di  $\mathcal{A}_M(\Gamma)$ .

**Osservazione (I).** Tale  $\star$ -algebra di Poisson è profondamente diversa da quella classica, data da  $(\mathcal{C}^\infty(\Gamma), \{\cdot, \cdot\})$ , ma può essere vista come una deformazione (formale, perché  $\hbar$  è una costante fondamentale dimensionale) di quest'ultima. Ricordando l'equazione (2.3) si può infatti sviluppare<sup>7</sup> per  $f, g \in \mathcal{S}(\Gamma)$

$$\{\!\!\{ f, g \}\!\!\}_\hbar = \{f, g\} + \mathcal{O}(\hbar^2)(\partial^3) \quad (2.7)$$

cosicché nel limite formale  $\hbar \rightarrow 0$  viene ripristinata la struttura classica.

<sup>6</sup>Uno spazio vettoriale dotato di un'operazione interna detta prodotto e di un'operazione chiamata parentesi  $(V, m, p)$  è detto  $m$ -algebra di Poisson se è un'algebra di Lie di tipo Leibniz, ovvero valgono i punti 1-4 sopra esposti, con  $m$  al posto di  $\star$  e  $p$  sostituito a  $\{\!\!\{ \cdot, \cdot \}\!\!\}$ .

<sup>7</sup>Il termine di prim'ordine è nullo; il termine al second'ordine contiene derivate parziali terze.

**Osservazione (II).** La non corrispondenza fra le due parentesi è dovuta alla mancanza di una mappa di quantizzazione che, sotto richieste ragionevoli (ad esempio, mandi  $\{\cdot, \cdot\}$  in  $[\cdot, \cdot]/(i\hbar)$ ), associ a sistemi classici i corrispondenti quantistici; ciò costituisce l'enunciato di un importante teorema dovuto a Groenewold ed esteso da Van Hove (si veda, ad esempio, la Sezione 13.4 di [8]).

**Esempio.**  $\{\{q^3, p^3\}\} = 9q^2p^2 - 3\hbar^2/2 = \{q^3, p^3\} - 3\hbar^2/2$ .

Possiamo ora procedere a calcolare l'algebra fondamentale, relativa alle osservabili  $q$  e  $p$ .

**Proposizione 2.9.** *L'algebra di  $q$  e  $p$  è determinata dalle seguenti uguaglianze.*

$$\{\{q^i, q^j\}\} = 0 \quad \{\{p_i, p_j\}\} = 0 \quad \{\{q^i, p_j\}\} = \delta^i_j \quad \forall i, j = 1, \dots, n$$

*Dimostrazione.* Da un calcolo diretto, che si può effettuare utilizzando l'espressione esplicita in Proposizione 2.2 o utilizzando l'equazione (2.4), risulta

$$q^j \star p_k = q^j p_k + \frac{i\hbar}{2} \delta^j_k \quad p_k \star q^j = q^j p_k - \frac{i\hbar}{2} \delta^j_k \quad q^j \star q^k = q^j q^k \quad p_j \star p_k = p_j p_k$$

e la definizione 2.11 permette di concludere. □

**Osservazione.** L'algebra risulta essere quella canonica, identica a quella classica.

Si conclude questa sottosezione con un importante teorema, diretta applicazione della parentesi di Moyal.

**Teorema 2.1 (Heisenberg).** *Siano due osservabili  $a, b \in O_M(\Gamma)$ , allora le loro dispersioni su qualsiasi stato  $\Psi$  sono vincolate a soddisfare la seguente disuguaglianza.*

$$(\Delta a)_\Psi (\Delta b)_\Psi \geq \frac{\hbar}{2} |\langle \{\{a, b\}\} \rangle_\Psi|$$

*Dimostrazione.* È sufficiente seguire nel nuovo formalismo passo passo la dimostrazione originalmente divisata da Heisenberg nel 1927. □

### 2.3.1 Cenno sulla realizzazione delle simmetrie

**Definizione 2.12.** Sia  $O$  l'algebra delle osservabili e  $V$  lo spazio degli stati di un sistema, una simmetria fisica è una mappa  $S_O \times S_V$  che rispetta la struttura di algebra delle osservabili e preserva i valori medi, ovvero

$$S_O \times S_V : O \times V \rightarrow O \times V \quad (A, \psi) \mapsto (S_O(A), S_V(\psi))$$

tale che  $S_O(A + B) = S_O(A) + S_O(B)$ ,  $S_O(AB) = S_O(A)S_O(B)$  e  $\langle S_O(A) \rangle_{S_V(\psi)} = \langle A \rangle_\psi$

Nel formalismo operatoriale della Meccanica Quantistica, nella descrizione matematica delle simmetrie fisiche sono fondamentali i seguenti teoremi, che permettono di trattarle con operatori unitari o antiunitari.

**Teorema 2.2 (Wigner).** *Tutte le trasformazioni tra raggi vettori che preservano le probabilità di transizione e la struttura di algebra delle osservabili sono descritte da raggi operatori unitari o antiunitari.*

**Teorema 2.3** (Bargmann). *Sotto assunzioni deboli, le rappresentazioni proiettive continue di un gruppo  $G$  sono in corrispondenza biunivoca con rappresentazioni unitarie del gruppo di ricoprimento universale di  $G$ , denotato con  $\tilde{G}$ .*

Conseguenza di questi teoremi è che le simmetrie vanno a corrispondere a gruppi fortemente continui di operatori unitari.

In particolare, se il gruppo  $G$  che caratterizza la simmetria è di Lie, sia  $U : G \rightarrow \mathcal{L}(\mathcal{H})$  la rappresentazione unitaria fortemente continua di interesse, mediante il teorema di Stone si determina una rappresentazione di algebre di Lie  $D : \mathfrak{g} \rightarrow \mathcal{L}(\mathcal{H})$  tale che, denotati con  $e_\alpha$  e con  $u_\alpha$  i generatori di  $\mathfrak{g}$  e di  $U$ , si ha  $D(e_\alpha) = u_\alpha$ .

Sullo spazio delle fasi è quindi conveniente dare la seguente definizione.

**Definizione 2.13.** Lo  $\star$ -esponenziale di  $f \in \mathcal{A}_M(\Gamma)$  è dato da

$$\exp_\star(f) := \sum_{k=0}^{\infty} \frac{1}{k!} \overbrace{f \star \cdots \star f}^{k \text{ volte}}$$

Conseguentemente, la realizzazione matematica di una simmetria fisica continua nel formalismo sullo spazio delle fasi sarà data da una  $\star$ -rappresentazione  $U_\star$  del gruppo.

**Esempio.** Supponiamo  $G = (\mathbb{R}^n, +)$ , allora  $U_\star : \mathbb{R}^n \rightarrow \mathcal{A}_M(\Gamma)$  di generatori  $u_k \in \mathcal{O}_M(\Gamma)$ ,  $k = 1, \dots, n$ , sarà data da  $U_\star(a) = \exp_\star(ia^k u_k)$ .

In particolare, uno stato  $\Psi$  e un'osservabile  $f$  trasformeranno come

$$\Psi'_g = U_\star(g) \star \Psi \star U_\star^*(g) \quad f'_g = U_\star(g) \star f \star U_\star^*(g).$$

Inoltre, nel caso  $G$  sia di Lie, vi sarà anche una  $\star$ -rappresentazione di algebre di Lie.

$$D : (\mathfrak{g}, [\cdot, \cdot]_{\mathfrak{g}}) \rightarrow (\mathcal{A}_M(\Gamma), \{\{\cdot, \cdot\}\}) \quad : \quad D([a, b]_{\mathfrak{g}}) = \{\{D(a), D(b)\}\} \quad \forall a, b \in \mathfrak{g}$$

**Esempio** (Momento angolare,  $n = 3$ ). Grazie alle proprietà del prodotto di Moyal e alla Proposizione 2.9, risulta che l'osservabile momento angolare ha componenti classiche,

$$l_i(q, p) = W^{-1}(L_i)(q, p) = \epsilon_i^{jk} q_j \star p_k = \epsilon_i^{jk} q_j p_k = l_i^{cl}(q, p),$$

mentre l'osservabile quantistica modulo quadro dello stesso viene ad essere

$$\|l\|_\star^2(q, p) = q_j p_k \star q^j p^k - q_j p_k \star q^k p^j = \|l_{cl}\|^2(q, p) - \frac{3\hbar^2}{2}.$$

L'algebra del momento angolare risulta essere proprio una  $\star$ -rappresentazione di  $\mathfrak{so}(3)$ , avendo essa gli stessi coefficienti di struttura di quest'ultima.

$$\{\{l_i, l_j\}\} = \epsilon_{ij}^k l_k \quad \{\{\|l\|_\star^2, l_i\}\} = 0 \quad \forall i, j = 1, 2, 3$$

Il vantaggio di poter definire tale algebra consiste, oltre alla dimostrazione che il momento angolare è il generatore delle rotazioni, anche nel fatto che è possibile ricavare lo spettro dello stesso; infatti con un procedimento analogo a quello diviso da Dirac per il formalismo operatoriale, mediante la definizione delle distribuzioni di innalzamento e di abbassamento

$$l_\pm := l_1 \pm il_2 \quad \{\{l_+, l_-\}\} = -2il_3,$$

è possibile determinare  $\sigma(\|l\|_\star^2) = \{\hbar^2 \lambda(\lambda + 1), \lambda \in \mathbb{N}\}$  e  $\sigma(l_3) = \{m\hbar, m \in [0, \lambda] \cap \mathbb{N} \cup \{0\}\}$ .

In ultima istanza, si accenna alle simmetrie dinamiche, che dipendono dal sistema preso in esame.

**Definizione 2.14.** Dato  $G$  gruppo di Lie di dimensione 1, una simmetria  $U_\star : G \rightarrow \mathcal{A}_M(\Gamma)$  di un sistema quantistico, caratterizzato da una Hamiltoniana  $h \in O_M(\Gamma)$ , è detta dinamica se, denotato con  $u = -i \frac{dU_\star}{dg} \Big|_{g=e}$  il generatore del gruppo, è verificata la seguente uguaglianza.

$$U_\star(g) \star h \star U_\star^*(g) = h \quad \forall g \in G \quad \iff \quad \{u, h\} \equiv 0$$

**Osservazione.** Come si mostrerà nel prossimo capitolo, simmetrie dinamiche e leggi di conservazione sono strettamente correlate: in particolare verrà dimostrato che il generatore di una simmetria dinamica è una costante del moto. In un certo senso questa è la realizzazione del teorema di Nöther in ambito quantistico.



# Capitolo 3

## Evoluzione temporale

Nel seguente capitolo si espone la rappresentazione dell'evoluzione temporale di un sistema quantistico sullo spazio delle fasi, e la si compara con l'equivalente dei sistemi classici Hamiltoniani. In seguito, a titolo d'esempio vengono presentati due sistemi che forniscono degli ottimi laboratori di analisi delle caratteristiche di un formalismo, precisamente la particella libera e l'oscillatore armonico.

Nell'analisi di tale evoluzione temporale, essendo la grandezze di interesse fisico i valori medi e le probabilità di transizione, è possibile prospettare due visioni della medesima, differenti ma compatibili, che, in analogia con il formalismo usuale della Meccanica Quantistica, verranno chiamate

1. visuale di Schrödinger: si prescrive l'evoluzione degli stati, mentre le osservabili rimangono invariate, secondo lo schema sottostante;

$$t \mapsto \Psi(t) \in L^2(\Gamma) \quad t \mapsto a \in \mathcal{O}_M(\Gamma) \quad \langle a \rangle_\Psi(t) := \langle a \rangle_{\Psi(t)}$$

2. visuale di Heisenberg: viene data la regola secondo cui evolvono le osservabili e gli stati sono costanti rispetto al tempo, secondo il seguente prospetto.

$$t \mapsto \Psi \in L^2(\Gamma) \quad t \mapsto a(t) \in \mathcal{O}_M(\Gamma) \quad \langle a \rangle_\Psi(t) := \langle a(t) \rangle_\Psi$$

Nel seguito si espongono entrambe, tentando di analizzare vantaggi e difetti di ciascuna.

**Nota.** Per questo capitolo, si rompe parzialmente la convenzione di denotare le osservabili sullo spazio delle fasi con lettere minuscole dell'alfabeto latino, scegliendo di indicare l'Hamiltoniana con  $H$ , per evitare che essa venga confusa con la costante di Planck  $h$ .

### 3.1 Visuale di Schrödinger

Da quanto discusso nella sottosezione 2.3.1 riguardo alla realizzazione delle simmetrie, l'evoluzione temporale di un sistema isolato (avente Hamiltoniana indipendente dal tempo) sarà data da una rappresentazione  $\star$ -unitaria del gruppo  $(\mathbb{R}, +)$  sullo spazio delle fasi. Ciò, unito alla volontà di mantenere la compatibilità con la formulazione operatoriale, suggerisce la seguente definizione.

**Definizione 3.1.** Le funzioni di Wigner, che rappresentano gli stati di un sistema fisico di Hamiltoniana  $H \in O_M(\Gamma)$ , evolvono come

$$\Psi(q, p; t) = [U_\star(t) \star \Psi \star U_\star^*(t)](q, p),$$

ove  $U_\star : \mathbb{R} \rightarrow A_M(\Gamma)$  è la rappresentazione  $\star$ -unitaria, di generatore  $H$ , data da

$$U_\star(t) := \exp_\star[-itH/\hbar].$$

**Osservazione.** Gli  $\star$ -autostati dell'Hamiltoniana risultano essere stazionari; infatti, data un'autofunzione  $\Psi_\varepsilon$  di autovalore  $\varepsilon$ ,  $\forall t \in \mathbb{R}$  si ha

$$\Psi_\varepsilon(t) = U_\star(t) \star \Psi_\varepsilon \star U_\star^*(t) = e^{-it\varepsilon/\hbar} \Psi_\varepsilon e^{it\varepsilon/\hbar} = \Psi_\varepsilon.$$

La Definizione 3.1 risulta essere difficile da computare da un punto di vista pratico, ed è per questo motivo conveniente trasportare sullo spazio delle fasi l'equazione di Schrödinger scritta in termini dell'operatore di evoluzione, riportata sotto.

$$H_{op} = W(H) \quad U(t) = \exp[-itH_{op}/\hbar] \quad i\hbar \frac{\partial U}{\partial t}(t) = H_{op}U(t) \quad \wedge \quad U(0) = \mathbb{I} \quad (3.1)$$

**Definizione 3.2.** Il propagatore relativo alla funzione Hamiltoniana  $H$  è la distribuzione  $\Xi_H \in \mathcal{A}_M(\Gamma)$  che equivale alla funzione d'evoluzione temporale.

$$\Xi_H(q, p; t) = [U_\star^{(H)}(t)](q, p)$$

Su  $\Gamma$ , perciò, l'equazione differenziale (3.1) e le relative condizioni al contorno si traducono nel seguente problema di Cauchy

$$i\hbar \frac{\partial \Xi_H}{\partial t}(t) = H \star \Xi_H(t) \quad \wedge \quad \Xi_H(0) \equiv 1. \quad (3.2)$$

Quindi una possibile strada generale per trovare un qualsiasi stato evoluto  $\Psi(t)$  consiste nel risolvere l'equazione alle derivate parziali (3.2) per ottenere  $\Xi_H$  e calcolare successivamente

$$\Psi(t) = \Xi_H(t) \star \Psi \star \Xi_H(-t).$$

**Osservazione.** Si congettura che, essendo l'energia la variabile coniugata al tempo in Meccanica Hamiltoniana, il supporto dell'antitrasformata di Fourier di  $\Xi_H$  rispetto al tempo,

$$\mathcal{F}^{-1}[\Xi_H](\varepsilon) = \frac{1}{\sqrt{\hbar}} \int_{\mathbb{R}} \Xi_H(t) e^{i\varepsilon t/\hbar} dt = \frac{1}{\sqrt{\hbar}} \int_{\mathbb{R}} e_\star^{-itH/\hbar} e^{i\varepsilon t/\hbar} dt,$$

sia dato dallo spettro  $\sigma(H)$  della funzione di Hamilton. Nonostante l'esistenza di risultati parziali, riguardo a casi specifici (Hamiltoniane quadratiche), non esiste conferma di tale ipotesi. La verifica della sua eventuale veridicità, tuttavia, permetterebbe di trovare un modo alternativo di calcolo dello spettro energetico di un sistema.

Si sottolinea che quanto definito finora non permette un raffronto diretto e preciso con il caso classico. Per mostrare appieno analogie e differenze tra il formalismo adottato in questo elaborato e l'evoluzione classica degli stati, si traspone l'equazione di von Neumann

$$i\hbar \frac{\partial \rho}{\partial t} = [H_{op}, \rho] \quad (3.3)$$

sullo spazio delle fasi, mediante la mappa di Weyl.

**Proposizione 3.1.** *L'equazione differenziale che determina l'evoluzione temporale degli stati è quella di Moyal, data da*

$$\frac{\partial \Psi}{\partial t} = \{\!\!\{ H, \Psi \}\!\!\}.$$

*Dimostrazione.* Per concludere è sufficiente applicare  $\hbar^{-n}W^{-1}$  ad entrambi i membri dell'equazione (3.3), ricordando al contempo la definizione di parentesi di Moyal.  $\square$

**Osservazione.** Ricordando lo sviluppo in equazione (2.7) risulta

$$\frac{\partial \Psi}{\partial t} = \{H, \Psi\} + \mathcal{O}(\hbar^2),$$

e quindi la proposizione precedente mostra che l'evoluzione è governata da una deformazione dell'equazione classica di Liouville. Da ciò risulta chiaro che, in generale, l'evoluzione degli stati è strettamente non classica, in quanto non è più verificato il Teorema di Liouville.<sup>1</sup>

**Proposizione 3.2.** *Il flusso quantistico  $t \rightarrow \Psi(t)$  è diffusivo; inoltre, dato un sottoinsieme misurabile secondo Lebesgue  $\Omega \subset \Gamma$ , vale*

$$\int_{\Omega} \frac{d\Psi}{dt} dqdp = \int_{\Omega} \{\!\!\{ H, \Psi \}\!\!\} - \{H, \Psi\} dqdp.$$

*Dimostrazione.* Dall'equazione in Proposizione 3.1 e dalla definizione di parentesi di Poisson segue che

$$\int_{\Omega} \frac{d\Psi}{dt} dqdp = \int_{\Omega} \frac{\partial \Psi}{\partial t} - \{H, \Psi\} dqdp = \int_{\Omega} \{\!\!\{ H, \Psi \}\!\!\} - \{H, \Psi\} dqdp \neq 0$$

in generale.  $\square$

**Corollario.** *Il flusso quantistico non è globalmente diffusivo.*

$$\int_{\Gamma} \frac{d\Psi}{dt} dqdp = 0$$

**Osservazione.** La Proposizione 3.2 mostra il moto del fluido quasiprobabilistico su  $\Gamma$  non può in alcun modo rappresentare un'emulazione delle traiettorie classiche, governate dal flusso  $\Phi_H : \mathbb{R} \times \Gamma \rightarrow \Gamma$ ,  $(t, z) \mapsto z(t)$  che rappresenta la soluzione delle equazioni di Hamilton.

Il corollario invece è una manifestazione dell'indipendenza dal tempo della normalizzazione della funzione di Wigner.

Si restringe ora l'analisi ad Hamiltoniane meccaniche, ossia funzioni che si possono scrivere come

$$H(q, p) = \frac{\|p\|^2}{2m} + V(q).$$

**Proposizione 3.3.** *Sia  $f \in \mathcal{A}_M(\Gamma)$  un generico polinomio di grado massimo 2, allora per ogni distribuzione  $g \in \mathcal{A}_M(\Gamma)$  la parentesi di Moyal fra le due si riduce a quella di Poisson.*

$$\{\!\!\{ f, g \}\!\!\} = \{f, g\}$$

---

<sup>1</sup>La probabilità si conserva localmente nel tempo, ovvero  $\frac{d\rho_{cl}}{dt} \equiv 0$ .

*Dimostrazione.* Da un computo diretto risulta che  $\forall k = 1, \dots, n$

$$p_k^2 \star g = p_k^2 g - \frac{\hbar^2}{4} \frac{\partial^2 g}{\partial q_k^2} - i\hbar p_k \frac{\partial g}{\partial q_k} \quad g \star p_k^2 = p_k^2 g - \frac{\hbar^2}{4} \frac{\partial^2 g}{\partial q_k^2} + i\hbar p_k \frac{\partial g}{\partial q_k},$$

quindi  $\{\{p_k^2, g\}\} = -2p_k \partial_{q_k} g = \{p_k^2, g\}, \forall g \in \mathcal{A}_M(\Gamma)$ .

Analogamente si procede per  $q_k, p_k, q_k^2$ , e  $q_j p_k$ . Successivamente è sufficiente sfruttare la linearità di entrambe le parentesi per concludere.  $\square$

Di conseguenza, per Hamiltoniane meccaniche, vale il seguente risultato.

**Proposizione 3.4.** *L'equazione d'evoluzione temporale per uno stato  $\Psi$ , nel caso meccanico, si scrive*

$$\frac{\partial \Psi}{\partial t} = \frac{1}{2m} \{\|p\|^2, \Psi\} + \{V, \Psi\}.$$

*Inoltre, per Hamiltoniane  $H$  quadratiche, l'equazione di Moyal si riduce a quella di Liouville.*

*Dimostrazione.* Le tesi seguono dalla proposizione 3.3.  $\square$

**Osservazione (I).** In sostanza, nel caso meccanico, la parte cinetica di  $H$  contribuisce classicamente all'equazione di Moyal, ed è solo la componente potenziale che la rende non classica.

**Osservazione (II).** Questa proposizione è molto importante, perché mostra che per sistemi lineari, aventi Hamiltoniana quadratica, l'evoluzione è quella classica: pur non potendo definire traiettorie puntiformi, è possibile computare più semplicemente l'evolva temporale di uno stato  $\Psi$ ; sia

$$\Phi_H : \mathbb{R} \times \Gamma \rightarrow \Gamma \quad (t, z) \mapsto z(t)$$

il flusso Hamiltoniano che definisce, a tempo fissato, una mappa lineare invertibile da  $\Gamma$  in sé stesso, allora è verificata la seguente uguaglianza.

$$\Psi(t) = \Psi(0) \circ \Phi_H^{-t}$$

Naturalmente ciò è una conseguenza della peculiare struttura geometrica della parentesi di Moyal, il cui sviluppo non contiene termini in  $\hbar$  (e quindi con derivate seconde), e .

In conclusione, si rammenta che in questa visione i valori medi evolvono come

$$\langle a \rangle_\Psi(t) = \int_\Gamma a(q, p) \Psi(q, p; t) dq dp.$$

## 3.2 Visuale di Heisenberg

In questa visuale si deve dare una prescrizione che mostri l'evoluzione delle osservabili, compatibilmente con la visuale di Schrödinger.

**Proposizione 3.5.** *Una distribuzione temperata  $a \in \mathcal{A}_M(\Gamma)$  evolve come*

$$a(t) = U_\star^*(t) \star a \star U_\star(t)$$

*di modo che il calcolo dei valori medi sia compatibile, precisamente  $\langle a(t) \rangle_\Psi = \langle a \rangle_{\Psi(t)}$ .*

*Dimostrazione.* Dalla Definizione 3.1 e dalle Proposizioni 1.3 e 2.4, segue che

$$\langle a \rangle_{\Psi(t)} = h^n \operatorname{tr}(W(a)U(t)W(\Psi)U^\dagger(t)) = h^n \operatorname{tr}(U^\dagger(t)W(a)U(t)W(\Psi)) =: \langle a(t) \rangle_{\Psi},$$

dove nel penultimo passaggio si è utilizzata l'invarianza sotto trasformazioni unitarie della traccia.  $\square$

**Osservazione.** Supponendo di aver risolto l'equazione (3.2) per il propagatore  $\Xi_H$ , anche in questa visuale è evidentemente possibile scrivere l'evoluzione come

$$a(t) = \Xi_H(-t) \star a \star \Xi_H(t).$$

Pur essendo chiara l'analogia con la formulazione operatoriale della Meccanica Quantistica, ancora una volta le soluzioni sono scarsamente computabili e non è chiaro in che misura tali risultati si distacchino dal caso classico.

Si deve, nuovamente, ricavare l'equazione che va a definire un flusso come quello in Proposizione 3.5; ciò è facilmente eseguibile mediante la formulazione dell'equazione di Heisenberg sullo spazio delle fasi.

Quest'ultima può quindi essere scritta nella seguente forma: data un'osservabile  $a \in O_M(\Gamma)$  e una Hamiltoniana  $H \in O_M(\Gamma)$ , l'evoluta temporale di  $a$  soddisfa alla seguente equazione.

$$\frac{da}{dt} = \{\!\!\{ a, H \}\!\!\} \quad (3.4)$$

**Osservazione (I).** Tale equazione contiene derivate di ogni ordine in generale, e quindi in generale è difficile da risolvere, ma mostra chiaramente che ancora una volta si è in presenza di deformazione del caso classico.

**Osservazione (II).** Il legame tra costanti del moto e simmetrie dinamiche, anticipato nella conclusione alla sottosezione 2.3.1, risulta ora chiaro:

**Proposizione 3.6.** *Sia data un'osservabile  $u \in O_M(\Gamma)$  che  $\star$ -commuta con  $H \in O_M(\Gamma)$ , ovvero tale che*

$$\{\!\!\{ u, H \}\!\!\} \equiv 0,$$

*allora  $u$  è una grandezza conservata dall'evoluzione temporale e il gruppo ad un parametro di applicazioni  $\star$ -unitarie*

$$U_\star(s) = \exp_\star[isu]$$

*generato da essa è una simmetria dinamica.*

*Dimostrazione.* La conservazione segue dall'equazione di Heisenberg su  $\Gamma$  e la tesi su  $U_\star$  è implicata dalla commutazione di  $H$  con  $u$ .  $\square$

Alla luce dell'equazione (3.4), è possibile dare il seguente risultato che semplifica la trattazione.

**Proposizione 3.7.** *Sia  $f$  un qualsiasi polinomio di grado massimo 2, allora  $\forall H \in O_M(\Gamma)$  la sua evoluzione temporale è classica.*

$$\frac{da}{dt} = \{a, H\}$$

*In particolare, le osservabili posizione e momento soddisfano alle equazioni di Hamilton.*

$$\dot{q}^i = \frac{\partial H}{\partial p_i} \quad \wedge \quad \dot{p}_i = -\frac{\partial H}{\partial q^i} \quad i = 1, \dots, n$$

*Dimostrazione.* La tesi segue applicando la Proposizione 3.3 all'equazione (3.4).  $\square$

**Osservazione (I).** È bene sottolineare che, nonostante risultino ancora valide le equazioni di Hamilton, esse non possiedono la valenza ontologica del caso classico: ciò è evidentemente dovuto alla non puntiformità degli stati, che non permette la definizione di orbite *quantistiche* su  $\Gamma$ .

**Osservazione (II).** Il risultato appena enunciato semplifica molto il calcolo dei valori medi di determinate osservabili; ad esempio, dato uno stato  $\Psi$ , le incertezze  $(\Delta q)_\Psi(t)$  e  $(\Delta p)_\Psi(t)$  sono facilmente computabili in visuale di Heisenberg, posto che sia noto il flusso Hamiltoniano  $\Phi_H$ .

In conclusione, si nota che anche in questa visuale l'evoluzione di sistemi lineari, aventi Hamiltoniana quadratica, è particolarmente semplice, essendo data dalla seguente prescrizione: data un'osservabile  $a \in O_M(\Gamma)$ ,

$$a(t) = a \circ \Phi_H^t,$$

dove  $\Phi_H$  denota ancora una volta il flusso lineare Hamiltoniano che risolve le equazioni di Hamilton di funzione caratteristica  $H$ .

### 3.3 Due sistemi paradigmatici

In questa Sezione si illustrano due sistemi semplici e quadratici che permettono di illustrare il formalismo finora costruito e mostrano il comportamento differente dal corrispettivo classico degli stessi: rispettivamente, la particella libera e l'oscillatore armonico.

Per semplicità di calcolo si considererà il caso unidimensionale ( $n = 1$ ), cosicché  $\dim \Gamma = 2$ .

#### 3.3.1 Particella libera

La funzione di Hamilton che descrive una particella libera di massa  $m$  è

$$(q, p) \longmapsto H(p) = \frac{p^2}{2m}$$

Per trovare lo spettro di quest'ultima si procede quindi a impostare e sviluppare la seguente equazione agli autovalori.

$$\begin{aligned} \frac{p^2}{2m} \star \Psi_\varepsilon(q, p) &= \varepsilon \Psi_\varepsilon(q, p) \\ \left( p^2 - 2m\varepsilon - \frac{\hbar^2}{4} \frac{\partial^2}{\partial q^2} \right) \Psi_\varepsilon + i\hbar p \frac{\partial \Psi_\varepsilon}{\partial q} &= 0 \end{aligned} \quad (3.5)$$

La parte immaginaria dell'equazione fornisce quindi il seguente *ansatz*

$$\Psi_\varepsilon(q, p) = f(q)\delta(p) + g(p),$$

che, inserito nella parte reale dell'equazione (3.5), porge

$$(p^2 - 2m\varepsilon)g(p) - \left( 2m\varepsilon + \hbar^2 \partial_q^2 / 4 \right) \delta(p)f(q) = 0.$$

Un'analisi separata per  $p = 0$  e per  $p \neq 0$ , con il vincolo aggiuntivo di realtà, porta infine a computare, posto  $2m\varepsilon = \hbar^2 k^2$ ,

$$\Psi_k(q, p) = \alpha\delta(p - \hbar k) + \beta\delta(p + \hbar k) + (\gamma e^{2ikx} + \gamma^* e^{-2ikx})\delta(p),$$

con  $\alpha, \beta \in \mathbb{R}$  e  $\gamma \in \mathbb{C}$  costanti arbitrarie. Perciò si conclude che lo spettro è puramente continuo ed ammonta a  $\sigma(H) = \sigma_c(H) = \mathbb{R}^+ \cup \{0\}$ .

In questo caso, inoltre, è semplice anche calcolare il propagatore, che corrisponde semplicemente a

$$\Xi_H(q, p) := \exp_*[-itH/\hbar](q, p) = e^{-itp^2/2m\hbar},$$

e quindi l'evoluzione di uno stato  $\Psi$  è data da

$$\Psi(q, p; t) = e^{-itp^2/2m\hbar} \star \Psi(q, p; 0) \star e^{itp^2/2m\hbar}.$$

Ricordando tuttavia i risultati ottenuti per Hamiltoniane quadratiche, è decisamente conveniente calcolare il flusso Hamiltoniano classico,

$$\Phi_H : \mathbb{R} \times \Gamma \quad (t, q, p) \longmapsto \left(q + \frac{p}{m}t, p\right),$$

e computare

$$\Psi(q, p; t) = \Psi\left(q - \frac{p}{m}t, p; 0\right).$$

Allo stesso modo, una generica osservabile  $a \in O_M(\Gamma)$  evolve come

$$a(q, p; t) = a\left(q + \frac{p}{m}t, p; 0\right).$$

**Esempio.** Consideriamo un pacchetto d'onde gaussiano, centrato in  $(0, p_0)$ , avente dispersione tipica  $\sigma$ , la cui funzione di Wigner è

$$\Psi(q, p; 0) = \frac{1}{\pi\hbar} e^{-x^2/\sigma^2} e^{-\sigma^2(p-p_0)^2/\hbar^2},$$

allora lo stato al tempo  $t$  è dato da

$$\Psi(q, p; t) = \frac{1}{\pi\hbar} e^{-(q-pt/m)^2/\sigma^2} e^{-\sigma^2(p-p_0)^2/\hbar^2}.$$

Inoltre è facile calcolare che i valori medi di posizione e momento evolvono, secondo il teorema di Ehrenfest,

$$\langle q(t) \rangle_\Psi = \frac{p_0}{m}t \quad \langle p(t) \rangle_\Psi = p_0,$$

e le incertezze cambiano rispettando il principio di indeterminazione  $\forall t \in \mathbb{R}$ .

$$(\Delta q)_\Psi(t) = \sqrt{\frac{1}{2} \left( \sigma^2 + \frac{\hbar^2}{m^2 \sigma^2} t^2 \right)} \quad (\Delta p)_\Psi(t) = \frac{\hbar}{\sigma\sqrt{2}} \quad (\Delta q)_\Psi(t)(\Delta p)_\Psi \geq \frac{\hbar}{2}$$

### 3.3.2 Oscillatore armonico

Un oscillatore armonico, avendo posto  $\omega = m = 1$  per semplicità, ha la seguente funzione di Hamilton quadratica.

$$H(q, p) = \frac{p^2 + q^2}{2}$$

In questo caso, non è necessario risolvere direttamente le equazioni agli autovalori per ricavare lo spettro, in quanto esiste un metodo algebrico basato sulle funzioni di Birkhoff di creazione e annichilazione,<sup>2</sup> definite come

$$z(q, p) = \frac{q + ip}{\sqrt{2}} \quad z^*(q, p) = \frac{q - ip}{\sqrt{2}} \quad \{\{z, z^*\}\} = -i.$$

Infatti, sfruttando le relazioni di commutazione canoniche, è possibile riscrivere l'Hamiltoniana come

$$H = \hbar \left( N + \frac{1}{2} \right) \quad \text{con } N = \frac{z^* \star z}{\hbar}.$$

Procedendo ora analogamente alla deduzione usuale dello spettro dell'operatore numero si ottiene che esso è puramente discreto, cosicché

$$\sigma(H) = \sigma_p(H) = \left\{ \hbar \left( k + \frac{1}{2} \right), k \in \mathbb{N} \cup 0 \right\},$$

e che le  $\star$ -autofunzioni, avendo indicato con  $\Psi_0$  quella relativa allo stato fondamentale, sono date da

$$\Psi_k = \frac{\hbar^k}{k!} (z^\dagger \star)^k \Psi_0 (\star z)^k \quad k \in \mathbb{N}.$$

Invece, scegliendo di procedere per via analitica, impostando l'equazione agli autovalori si ottiene

$$\left[ p^2 + q^2 - 2\varepsilon - \frac{\hbar^2}{4} \nabla^2 + i\hbar \left( q \frac{\partial}{\partial p} - p \frac{\partial}{\partial q} \right) \right] \Psi_\varepsilon = 0.$$

La parte immaginaria suggerisce che l'equazione di sopra dipenda solamente dalla variabile radiale  $u := 2(q^2 + p^2)/\hbar$ , di modo che la parte reale, avendo anche effettuato l'ansatz  $\Psi_\varepsilon(u) = e^{-u/2} g_\varepsilon(u)$ , assuma la forma

$$\left[ u \frac{\partial^2}{\partial u^2} - (1 - u) \frac{\partial}{\partial u} + \frac{\varepsilon}{\hbar} - \frac{1}{2} \right] g_\varepsilon = 0 \quad (3.6)$$

che risulta essere l'equazione di Laguerre se esiste  $k \in \mathbb{N} \cup \{0\}$  tale che

$$\frac{\varepsilon}{\hbar} - \frac{1}{2} = k \quad \implies \quad \varepsilon_k = \hbar \left( k + \frac{1}{2} \right).$$

A  $k$  fissato, l'equazione (3.6) è risolta dal  $k$ -esimo polinomio di Laguerre

$$L_k(u) = \sum_{j=0}^k \binom{k}{j} \frac{(-u)^j}{j!},$$

<sup>2</sup>I simboli sullo spazio delle fasi degli operatori, rispettivamente,  $\sqrt{\hbar}a$  e  $\sqrt{\hbar}a^\dagger$ .



e quindi la  $k$ -esima autofunzione, determinata con il vincolo aggiuntivo di normalizzazione, si può scrivere come

$$\Psi_k(q, p) = \frac{(-1)^k}{\pi\hbar} e^{-(q^2+p^2)/\hbar} L_k \left( \frac{2(q^2 + p^2)}{\hbar} \right).$$

In particolare, esse sono dotate di simmetria sferica, e, poiché tutti i polinomi di Laguerre hanno un numero di zeri pari al proprio ordine, si annullano sulle circonferenze determinate da tali zeri sullo spazio delle fasi, diventando anche negative, guadagnandosi appieno il titolo di *quasidensità* di probabilità.

Inoltre tale risultato mostra che la controimmagine delle funzioni di Hermite mediante la mappa di Weyl sono funzioni di Laguerre.

Passando a trattare l'evoluzione temporale di stati e osservabili, risulta chiaro che il propagatore<sup>3</sup> non può essere facilmente computabile.

$$\Xi_H(q, p) = \exp_* \left[ -it \frac{p^2 + q^2}{2\hbar} \right]$$

Tuttavia, rammentando che il flusso Hamiltoniano classico dell'oscillatore armonico per  $m = \omega = 1$  è dato da rotazioni in senso orario,

$$\Phi_H : \mathbb{R} \times \Gamma \rightarrow \Gamma \quad (t, q, p) \mapsto \Phi_H^t(q, p) = R_{-t} \begin{pmatrix} q \\ p \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \cos t & \sin t \\ -\sin t & \cos t \end{pmatrix} \begin{pmatrix} q \\ p \end{pmatrix},$$

segue che uno stato  $\Psi$  e un'osservabile  $f$  generici evolvono come

$$\Psi(q, p; t) = \Psi(R_t(q, p); 0) = \Psi(q \cos t - p \sin t, q \sin t + p \cos t; 0)$$

$$f(q, p; t) = f(R_{-t}(q, p); 0) = f(q \cos t + p \sin t, -q \sin t + p \cos t; 0).$$

**Esempio.** Si consideri lo stato fondamentale dell'oscillatore armonico, traslato dall'origine di  $\eta$  lungo l'asse delle posizioni,

$$\Psi(q, p; 0) = \frac{1}{\pi\hbar} e^{-((q-\eta)^2+p^2)/\hbar},$$

la funzione di Wigner che rappresenta l'evoluta temporale di  $\Psi$  risulta perciò essere pari a

$$\Psi(q, p; t) = \frac{1}{\pi\hbar} e^{-(q^2+p^2)/\hbar} e^{-[\eta^2+2\eta(p \sin t - q \cos t)]/\hbar} = \frac{1}{\pi\hbar} e^{-[(q-\eta \cos t)^2+(p+\eta \sin t)^2]/\hbar},$$

ovvero ancora la stessa gaussiana, ma centrata nel punto  $(\eta \cos t, -\eta \sin t)$ . Quindi ciascun punto del fluido *quasiprobabilistico* su  $\Gamma$  ruota rigidamente in senso orario con frequenza angolare unitaria sulla corrispondente orbita classica, e di conseguenza la distribuzione mantiene la forma nel tempo; questa è la situazione più vicina al caso classico che si può verificare per un sistema quantistico. Naturalmente i valori medi assumono i seguenti valori.

$$\langle q \rangle_\Psi(t) = \eta \cos t \quad \langle p \rangle_\Psi(t) = -\eta \sin t$$

Un altro fatto da notare è il vantaggio di dare la descrizione in questa rappresentazione congiunta in posizione e momento: infatti, mentre la funzione d'onda  $\psi$ , e di conseguenza

<sup>3</sup>Controimmagine mediante Weyl del *kernel* di Mehler.

la sua trasformata di Fourier, cambia nel tempo in modo significativo, non rendendo evidenti le analogie classiche, la funzione di Wigner ruota rigidamente sullo spazio delle fasi. Le densità di probabilità marginali, integrando in  $q$  e  $p$  lo stato  $\Psi(t)$ , risultano essere pari a

$$|\psi(q; t)|^2 = \int_{\mathbb{R}} \Psi(q, p; t) dp = \frac{1}{\sqrt{\pi\hbar}} e^{(q-\eta \cos t)^2/\hbar}$$

$$|\hat{\psi}(p; t)|^2 = \int_{\mathbb{R}} \Psi(q, p; t) dq = \frac{1}{\sqrt{\pi\hbar}} e^{(p+\eta \sin t)^2/\hbar}.$$

# Conclusioni

In questo elaborato si sono raggiunti un certo numero di risultati interessanti. È stato infatti possibile riunire in un unico *framework* i differenti concetti di corrispondenza di Weyl, prodotto di Moyal e funzione di Wigner, mostrando come il problema della quantizzazione non sia estraneo all'ambito delle rappresentazioni della Meccanica Quantistica. In particolare, la mappa di Weyl è stata realizzata sfruttando la risoluzione integrale di Fourier di una funzione  $f$ ,

$$W(f) = \frac{1}{h^{2n}} \int_{\mathbb{R}^{2n} \times \Gamma} f(q, p) e^{i[a \cdot (Q-q) + b \cdot (P-p)]/\hbar} da db dq dp,$$

con inversa, in notazione di Dirac, data da

$$W^{-1}(F)(q, p) = \int_{\mathbb{R}^n} \left\langle q + \frac{y}{2} \left| F \right| q - \frac{y}{2} \right\rangle e^{-ip \cdot y/\hbar} dy;$$

il prodotto di Moyal di  $f, g$  come la controimmagine del prodotto operatoriale,

$$f \star g = W^{-1}(W(f)W(g)),$$

e le funzioni di Wigner  $\Psi$  come le applicazioni corrispondenti ad operatori densità  $\rho$

$$\Psi = \frac{1}{h^n} W^{-1}(\rho).$$

A rigore, pur essendo la mappa di Weyl solo una delle tante prescrizioni possibili, essa è stata scelta in quanto possedente varie proprietà che rendono ideale il confronto tra caso classico e quantistico:

1. la simmetria tra posizione e momento;
2. la covarianza sotto trasformazioni simplettiche lineari;
3. la corrispondenza tra osservabili e funzioni reali.

Si è di conseguenza osservato come la scelta di una prescrizione (nel caso del presente lavoro di tesi, quella di Weyl) sia possibile trasportare l'intera struttura quantistica sullo spazio delle fasi, permettendo di trovare alcune differenze lampanti rispetto al caso classico:

1. il fallimento dei punti di  $\Gamma$  a rappresentare realtà distinte, causa la natura non puntiforme degli stati puri;
2. il fallimento nell'interpretare la Meccanica Quantistica come una teoria *d'ensemble* statistica classica, dovuto al fatto che gli stati sono rappresentati da distribuzioni di *quasiprobabilità*;

3. il comportamento di queste ultime come fluidi compressibili sotto evoluzione temporale, in netto contrasto con le densità di probabilità classiche, che ubbidiscono al teorema di Liouville.

La scelta di costruire questa formulazione ha inoltre permesso di analizzare il significato del limite formale classico  $\hbar \rightarrow 0$ , mostrando come esso comporti la contrazione della struttura di Weyl-Moyal a quella di Poisson.

È stato anche possibile notare come sia piuttosto difficile, a parte in casi molto semplici, computare grandezze di interesse come lo spettro di un'osservabile e la sua evoluzione temporale.

Tutte queste proprietà permettono di concludere che questa rappresentazione sullo spazio delle fasi risulta essere conveniente soprattutto in quegli ambiti, anche sperimentali,<sup>4</sup> in cui è necessario (o è più facile) monitorare contemporaneamente posizione e momento del sistema, e in problemi coinvolgenti l'uso di approssimazioni semiclassiche.

Ciò rende rilevante questo formalismo per problemi, tipicamente fisici, di ottica quantistica, di teoria dei segnali e dell'informazione, ma risulta anche, se inteso come deformazione dell'algebra di Poisson classica, di interesse matematico (si veda l'ambito relativo alla *deformation quantization*).

---

<sup>4</sup>Si veda ad esempio l'uso delle funzioni di Wigner nella determinazione sperimentale della violazione delle disuguaglianze di Bell per fasci presentanti vortici ottici in S. Prabhakar, S. Gangireddy, A. Aadhi, C. Perumangatt, G. K. Goutam, R. Singh, *Violation of Bell's inequality for phase singular beams*, *Physical Review A*, **92**, (2015), risorsa Arxiv [quant-ph/1406.6239v4].

# Appendice A

## Forma geometrica di $\star$

Si riporta la dimostrazione del teorema sottostante, non presentata nella parte principale perché ritenuta interrompere il flusso del ragionamento.

**Teorema** (Forma geometrica di  $\star$ ). *Il prodotto di Moyal*

$$\star : L^2(\Gamma) \times L^2(\Gamma) \rightarrow L^2(\Gamma) \quad (f, g) \mapsto f \star g$$

può essere scritto nella forma sottostante.

$$f \star g(z) = \left(\frac{2}{\hbar}\right)^{2n} \int_{\Gamma^2} f(z')g(z'')e^{2i(z-z') \cdot \mathcal{I}_n(z-z'')/\hbar} dz' dz'' \quad (\text{A.1})$$

*Dimostrazione.* Richiamando la Proposizione 2.1, per  $f, g \in \mathcal{S}(\Gamma)$  si ha

$$f \star g(z) = \frac{1}{h^{2n}} \int_{\mathbb{R}^{4n}} \hat{f}(a-b)\hat{g}(b)e^{ia \cdot (2z - \mathcal{I}_n b)/2\hbar} da db.$$

Sviluppando le trasformate di Fourier nell'espressione precedente, e riarrangiando gli esponenziali, si ottiene

$$f \star g(z) = \frac{1}{h^{4n}} \int_{\mathbb{R}^{4n} \times \Gamma^2} f(z')g(z'')e^{ia \cdot (2z - 2z' - \mathcal{I}_n b)/2\hbar} e^{ib \cdot (z' - z'')/\hbar} da db dz' dz'';$$

utilizzando la rappresentazione integrale di  $\delta^{2n}$ , si può giungere quindi alla seguente equazione.

$$f \star g(z) = \left(\frac{2}{\hbar}\right)^{2n} \int_{\mathbb{R}^{2n} \times \Gamma^2} f(z')g(z'')\delta^{2n}(\mathcal{I}_n b - 2(z - z'))e^{ib \cdot (z' - z'')/\hbar} db dz' dz''$$

Ora è sufficiente ricordare che  $\mathcal{I}_n^{-1} = -\mathcal{I}_n$  e che  $\det(\mathcal{I}_n) = 1$  per concludere che

$$f \star g(z) = \left(\frac{2}{\hbar}\right)^{2n} \int_{\Gamma^2} f(z')g(z'')e^{2i(z-z') \cdot \mathcal{I}_n(z-z'')/\hbar} dz' dz''.$$

Infine, sfruttando la densità di  $\mathcal{S}(\Gamma)$  in  $L^2(\Gamma)$ , si estende per continuità la definizione integrale appena verificata.  $\square$

**Osservazione.** Per  $f, g \in L^2(\Gamma) \setminus \mathcal{S}(\Gamma)$ , come in tutti gli integrali computati in questo elaborato, l'equazione nel Teorema deve quindi essere intesa come un limite.



# Bibliografia

- [1] H. Weyl, *Quantenmechanik und Gruppentheorie*, *Zeitschrift für Physik*, **46**, pp. 1-46, (1927).
- [2] E. P. Wigner, *On the Quantum Correction for Thermodynamic Equilibrium*, *Physical Review*, **40**, pp. 749-760, (1932).
- [3] H. J. Groenewold, PhD thesis, *On the principles of elementary quantum mechanics*, *Physica*, **12**, pp. 405-460, (1946).
- [4] M. Reed, B. Simon, *Functional Analysis*, Vol. 1 in *Methods of Modern Mathematical Physics*, Academic Press, San Diego, (1980).
- [5] J. M. Gracia-Bondía, J. Várilly, *Algebras of distributions suitable for phase-space quantum mechanics. I*, *Journal of Mathematical Physics*, **29**, pp. 869-879, (1988).
- [6] G. B. Folland, *Harmonic Analysis in Phase Space*, *Annals of Mathematics Studies* 122, Princeton University Press, (1989).
- [7] D. A. Dubin, M. A. Hennings, T. B. Smith, *Mathematical aspects of Weyl Quantization and Phase*, World Scientific, Singapore, (2000).
- [8] B. C. Hall, *Quantum theory for Mathematicians*, *Graduate Texts in Mathematics* 267, Springer-Verlag, New York, (2013), capp. XIII-XIV.
- [9] T. L. Curtright, D. B. Fairlie, C. K. Zachos, *A Concise Treatise on Quantum Mechanics in Phase Space*, World Scientific, Singapore, (2014).

Riferimenti bibliografici non strettamente utilizzati:

- 1. F. Bayen, M. Flato, C. Fronsdal, A. Lichnerowicz, D. Sternheimer, *Quantum mechanics as a deformation of classical mechanics*, *Letters in Mathematical Physics*, **1**, pp. 521-530, (1977);
- 2. B. V. Fedosov, *A simple construction of deformation quantization*, *Journal of Differential Geometry*, **40**, pp. 213-238, (1994);
- 3. M. Kontsevich, *Deformation quantization of Poisson manifolds*, *Letters in Mathematical Physics*, **66**, pp. 157-216, (2003), risorsa Arxiv [q-alg/9709040];
- 4. S. Prabhakar, S. Gangireddy, A. Aadhi, C. Perumangatt, G. K. Goutam, R. Singh, *Violation of Bell's inequality for phase singular beams*, *Physical Review A*, **92**, (2015), risorsa Arxiv [quant-ph/1406.6239v4].