

Università degli Studi di Padova

DIPARTIMENTO DI MATEMATICA 'TULLIO LEVI-CIVITA'

Corso di Laurea in Matematica

TESI DI LAUREA

Iterated function systems e frattali

Candidato:

Giovanni Dal Pozzolo

Matricola 2009878

Relatore:

Prof. Francesco Rossi

Anno Accademico 2023-2024

Indice

Introduzione	iii
1 Lo spazio dei frattali e la distanza di Hausdorff	1
1.1 La distanza di Hausdorff	1
1.2 Topologia di $\mathcal{H}(X)$	6
1.2.1 Completezza di $\mathcal{H}(X)$	6
1.2.2 Compattezza di $\mathcal{H}(X)$	11
1.2.3 Connessione per archi di $\mathcal{H}(\mathbb{R}^N)$	12
2 Iterated function systems iperbolici ed attrattori	15
2.1 Contrazioni	15
2.2 Iterated function systems	17
2.3 Iterated function systems con condensazione	21
2.4 Il collage theorem	23
2.5 Dipendenza continua da parametri	25
3 Funzioni frattali e dimensione frattale	31
3.1 La dimensione frattale	31
3.2 Funzioni frattali	37
3.2.1 Interpolazione frattale	37
3.2.2 Dimensione frattale di funzioni frattali interpolanti	42
3.2.3 Esempi di funzioni frattali	47
3.2.4 Applicazioni	51
Bibliografia	53

Introduzione

I frattali sono uno degli argomenti più peculiari della matematica. L'obiettivo di questa tesi è gettare le basi per lo studio degli Iterated Function Systems, ed in particolare delle funzioni frattali, iniziando con lo studio della metrica di Hausdorff. Ci domanderemo: Come definire una metrica su uno spazio di insiemi? Quali proprietà topologiche vengono ereditate dallo spazio di partenza?

Verranno poi esplorati formalmente gli IFS, iniziando dall'esistenza degli attrattori nel caso di IFS iperbolici e IFS con condensazione, con lo scopo di comprendere quando ed in che senso essi sono frattali, e capire anche la relazione inversa. A tale fine verranno dimostrati anche alcuni risultati più pratici, nella forma del collage theorem e della dipendenza continua da parametri, ponendo particolare attenzione al passaggio da contrazioni su uno spazio, a contrazioni sullo spazio dei suoi sottoinsiemi compatti.

Verrà poi data una definizione di dimensione frattale, cercando di capire come approssimarla in modo pratico e quali informazioni è possibile ricavarne, per poi rivolgere l'attenzione alle funzioni frattali: funzioni continue il cui grafico è l'attrattore di un IFS. Vedremo come gli IFS possono essere usati per definire funzioni frattali interpolando set di dati più o meno caotici, utilizzando la dimensione frattale come misura di questo caos. Infine, daremo un breve sguardo ad alcune applicazioni pratiche dello studio dei frattali, nei contesti più disparati.

Capitolo 1

Lo spazio dei frattali e la distanza di Hausdorff

In questo capitolo vogliamo definire e studiare la distanza di Hausdorff sullo spazio dei sottoinsiemi compatti di uno spazio metrico completo X . Questo ci servirà come base per lo studio delle IFS nei capitoli successivi.

1.1 La distanza di Hausdorff

Definizione 1.1. Sia (X, d) uno spazio metrico completo. Definiamo lo *spazio dei frattali di X* così:

$$\mathcal{H}(X) = \{A \subseteq X \text{ tale che } A \text{ è compatto, } A \neq \emptyset\}.$$

Definizione 1.2. Sia (X, d) uno spazio metrico completo, dati $x \in X$ e $B \in \mathcal{H}(X)$, definiamo:

$$d(x, B) := \inf\{d(x, y) \text{ tale che } y \in B\}.$$

Tale quantità è detta la distanza tra x e l'insieme B .

OSSERVAZIONE 1.1. L'esistenza del minimo è assicurata dal fatto che

$$d(x, \cdot): \begin{cases} X \rightarrow \mathbb{R} \\ y \mapsto d(x, y) \end{cases}$$

è continua su B per ogni $x \in X$, e di conseguenza, essendo B compatto, assume un minimo (e un massimo) per il teorema di Weierstrass. In particolare, esiste $y \in B$ tale che $d(x, B) = d(x, y)$. Possiamo quindi scrivere:

$$d(x, B) = \min\{d(x, y) \text{ tale che } y \in B\}.$$

Proposizione 1.3. *La distanza punto-insieme è una distanza, nel senso che:*

- $d(x, B) \geq 0 \forall x \in X, B \in \mathcal{H}(X)$, ed è uguale a 0 se e solo che $x \in B$.
- $d(x, B) \leq d(x, z) + d(z, B) \forall x, z \in X, B \in \mathcal{H}(X)$.

Inoltre, la funzione

$$d(\cdot, B): \begin{cases} X \rightarrow \mathbb{R} \\ x \mapsto d(x, B) \end{cases}$$

è continua su X per ogni $B \in \mathcal{H}(X)$.

Dimostrazione. La prima affermazione è conseguenza dell'osservazione appena fatta: se $d(x, B) = 0$, allora esiste $y \in B$ tale che $d(x, y) = 0$, quindi $x = y$, quindi $x \in B$.

Mostriamo la seconda proprietà: per ogni $z \in X$, vale:

$$\begin{aligned} d(x, B) &= \min_{y \in B} d(x, y) \leq \min_{y \in B} (d(x, z) + d(z, y)) \\ &= d(x, z) + \min_{y \in B} d(z, y) = d(x, z) + d(z, B) \end{aligned}$$

Per dimostrare la continuità, mostriamo che:

$$\lim_{n \rightarrow \infty} d(x_n, B) = d(x, B) \text{ per ogni successione } \{x_n\}_{n \in \mathbb{N}} \subseteq X \text{ convergente a } x.$$

Essendo $d(x_n, B)$ un minimo, allora

$$\forall n, \exists y_n \in B \text{ tale che } d(x_n, B) = d(x_n, y_n).$$

Essendo B compatto, allora

$$\text{esistono } y^* \in B \text{ e una sottosuccessione } \{y_{n_k}\}_{k \in \mathbb{N}} \subseteq B \text{ tali che } y_{n_k} \rightarrow y^*.$$

Mostriamo che $d(x, B) = d(x, y^*)$, ovvero $d(x, y^*) = \min_{y \in B} d(x, y)$, ovvero: $y^* \in B$ e $d(x, y^*) \leq d(x, y)$ per ogni $y \in B$.

Osserviamo che, fissato $y \in B$, vale:

$$\text{per ogni } \varepsilon > 0 \exists \bar{n} \text{ tale che } \forall n \geq \bar{n}, \text{ vale } d(x, y) \geq d(x_n, y) - \varepsilon.$$

Questo perchè:

- se $d(x, y) \geq d(x_n, y)$ allora è vero banalmente per ogni ε .
- se $d(x, y) \leq d(x_n, y)$, allora dalla continuità di d segue che

$$\forall \varepsilon, \exists \bar{n} \text{ tale che } \forall n \geq \bar{n} \text{ vale } |d(x_n, y) - d(x, y)| \leq \varepsilon.$$

L'argomento del modulo è positivo, per cui possiamo rimuoverlo e arrivare facilmente alla disuguaglianza voluta.

Otteniamo quindi :

$$\begin{aligned} d(x, y) &\geq d(x_n, y) - \varepsilon \geq d(x_n, y_n) - \varepsilon \\ &\geq d(x_{n_k}, y_{n_k}) - \varepsilon \quad (\forall n_k \geq \bar{n}) \\ &\geq d(x_{n_k}, y^*) - 2\varepsilon \geq d(x, y^*) - 3\varepsilon \end{aligned}$$

CAPITOLO 1. LO SPAZIO DEI FRATTALI E LA DISTANZA DI HAUSDORFF

La seconda disuguaglianza è conseguenza diretta della definizione di y_n , la quarta e la quinta si dimostrano con un argomento analogo a quanto visto sopra.

(Si noti che, fissato ε , troviamo “3 diversi \bar{n} ” usando la continuità di d come sopra. Ci basta considerare n più grande del loro massimo.) Questo vale per ogni $\varepsilon > 0$, da cui otteniamo la disuguaglianza voluta.

In particolare, questo significa che $d(x, y) = d(x, B)$ per ogni y che sia limite di una sottosuccessione di y_n . Infatti y_n in generale non converge ad un limite unico, ma $d(x, y_n)$, come vogliamo dimostrare, sì.

Per completare la dimostrazione, consideriamo ora la successione $a_n := d(x_n, B) = d(x_n, y_n)$, e mostriamo che converge a $d(x, B)$.

Supponiamo per assurdo che la successione non converga al limite voluto, ovvero

$$\exists \varepsilon > 0 \text{ tale che } \forall k \in \mathbb{N}, \exists n \geq k \text{ tale che } |a_n - d(x, B)| > \varepsilon.$$

Questo è equivalente a dire che esiste una sottosuccessione a_{n_k} tale che $|a_{n_k} - d(x, B)| > \varepsilon$ per ogni $k \in \mathbb{N}$.

Ma allora, $a_{n_k} = d(x_{n_k}, y_{n_k})$, e come visto sopra $y_{n_k} \subseteq B$ ammette una sottosuccessione $y_{n_{k_h}}$ convergente ad un certo $\bar{y} \in B$, e si dimostra che $d(x, \bar{y}) = d(x, B)$. Quindi, per continuità di $d(x, y)$,

$$\lim_{h \rightarrow \infty} a_{n_{k_h}} = \lim_{h \rightarrow \infty} d(x_{n_{k_h}}, y_{n_{k_h}}) = d(x, \bar{y}) = d(x, B).$$

Ma $|a_{n_{k_h}} - d(x, B)| > \varepsilon$ per ogni $h \in \mathbb{N}$. Questo è assurdo, quindi il limite esiste ed è quello voluto. □

Definizione 1.4. Sia (X, d) uno spazio metrico completo, siano $A, B \in \mathcal{H}(X)$. Allora, definiamo:

$$d(A, B) := \sup\{d(x, B) \text{ tale che } x \in A\}.$$

OSSERVAZIONE 1.2. Come prima, l'esistenza del massimo è assicurata dalla continuità di $d(x, B)$, che abbiamo appena dimostrato. Possiamo quindi scrivere:

$$d(A, B) = \max\{d(x, B) \text{ tale che } x \in A\}.$$

Proposizione 1.5. Sia (X, d) uno spazio metrico completo. Valgono le seguenti proprietà per ogni $A, B \in \mathcal{H}(X)$:

- $d(A, B) \geq 0$, e $d(A, A) = 0$.
- se $A \subseteq B$, allora $d(A, B) = 0$. Vale anche il viceversa: se $d(A, B) = 0$, allora necessariamente $A \subseteq B$.
- $d(x, B) \leq d(x, A) + d(A, B) \forall x \in X$ e $A, B \in \mathcal{H}(X)$.

Dimostrazione. La prima affermazione è ovvia.

Per mostrare la seconda affermazione, consideriamo $A \subseteq B$, allora:

$$d(A, B) = \max_{x \in A} d(x, B) = \max_{x \in A} 0 = 0$$

Siano ora $A, B \in \mathcal{H}(X)$ tali che $d(A, B) = 0$. Se per assurdo esiste $x^* \in A \setminus B$, allora $d(A, B) = \max_{x \in A} d(x, B) \geq d(x^*, B) > 0$, che contraddice l'ipotesi. Quindi, $A \subseteq B$.

Mostriamo infine la terza affermazione: Abbiamo già visto che $d(x, B) \leq d(x, z) + d(z, B)$, per ogni $x, z \in X$ e $B \in \mathcal{H}(X)$. In particolare, questa formula vale per ogni $z \in A$, ed esiste $\bar{z} \in A$ tale che $d(x, A) = d(x, \bar{z})$. Quindi, preso $z = \bar{z}$, vale:

$$d(x, B) \leq d(x, \bar{z}) + d(\bar{z}, B) \leq d(x, A) + \max_{z \in A} d(z, B) = d(x, A) + d(A, B)$$

□

OSSERVAZIONE 1.3. Se $A \supset B$, allora $d(A, B) = \max_{x \in A} d(x, B)$ è diverso da 0, perchè esiste $x^* \in A$ tale che $x^* \notin B$, quindi $d(x^*, B) \neq 0$.

In particolare, questo implica che, in generale, non vale $d(A, B) = d(B, A)$. Quindi, d non è una distanza su $\mathcal{H}(X)$.

Dimostriamo ora una forma di disuguaglianza triangolare per questa non-distanza tra insiemi:

Proposizione 1.6. *Sia (X, d) uno spazio metrico completo. Allora, vale:*

$$d(A, B) \leq d(A, C) + d(C, B) \quad \forall A, B, C \in \mathcal{H}(X).$$

Dimostrazione. Usando la disuguaglianza appena dimostrata:

$$d(A, B) = \max_{x \in A} d(x, B) \leq \max_{x \in A} d(x, C) + d(C, B) = d(A, C) + d(C, B)$$

□

NOTAZIONE. Ricordiamo il significato dei simboli \vee e \wedge . Siano $a, b \in \mathbb{R}$, allora:

$$\begin{aligned} a \vee b &= \max(a, b) \\ a \wedge b &= \min(a, b) \end{aligned}$$

Mostriamo ora altre proprietà di $d(A, B)$, per capirne meglio il comportamento:

Proposizione 1.7. *Valgono le seguenti proprietà:*

1. $B \subseteq C \implies d(A, B) \geq d(A, C) \quad \forall A, B, C \in \mathcal{H}(X).$
2. $d(A \cup B, C) = d(A, C) \vee d(B, C) \quad \forall A, B, C \in \mathcal{H}(X).$
3. $\forall A, B \in \mathcal{H}(X), \exists a \in A, b \in B$ tale che $d(A, B) = d(a, b).$

CAPITOLO 1. LO SPAZIO DEI FRATTALI E LA DISTANZA DI HAUSDORFF

Dimostrazione.

1. $d(A, B) = \max_{x \in A} \min_{y \in B} d(x, y) \geq \max_{x \in A} \min_{y \in C} d(x, y) = d(A, C)$.
2. $d(A \cup B, C) = \max_{x \in A \cup B} d(x, C) = \max_{x \in A} d(x, C) \vee \max_{x \in B} d(x, C) = d(A, C) \vee d(B, C)$. In particolare,

$$B \subseteq A \implies d(A, C) = d(B \cup (A \setminus B), C) \geq d(B, C) \quad \forall A, B, C \in \mathcal{H}(X).$$
3. $d(A, B) = \max_{x \in A} d(x, B) = d(a, B) = \min_{y \in B} d(a, y) = d(a, b)$ per certi (non unici) $a \in A, b \in B$.

□

Partendo da d , definiamo ora un operatore in $\mathcal{H}(X)$ che sia effettivamente una distanza.

Definizione 1.8. Sia (X, d) uno spazio metrico completo. La distanza di Hausdorff tra due insiemi $A, B \in \mathcal{H}(X)$ è definita da:

$$h(A, B) := d(A, B) \vee d(B, A).$$

Proposizione 1.9. $(\mathcal{H}(X), h)$ è uno spazio metrico.

Dimostrazione.

- Chiaramente, $\forall A \in \mathcal{H}(X)$ vale: $h(A, A) = 0$.
- Chiaramente, $\forall A, B \in \mathcal{H}(X)$ vale: $h(A, B) \geq 0$.
- Siano $A, B \in \mathcal{H}(X)$ tali che $h(A, B) = 0$. Allora, $d(A, B) = 0$, $d(B, A) = 0$. Per quanto visto nella sezione precedente, questo implica rispettivamente che $A \subseteq B$ e $A \supseteq B$.
- Chiaramente, $\forall A, B \in \mathcal{H}(X)$ vale: $h(A, B) = h(B, A)$.
- Per ogni $A, B, C \in \mathcal{H}(X)$, vale:

$$\begin{aligned} h(A, B) &= d(A, B) \vee d(B, A) \\ &\leq (d(A, C) + d(C, B)) \vee (d(B, C) + d(C, A)) \\ &\leq (h(A, C) + d(C, B)) \vee (h(C, A) + d(B, C)) \\ &= h(A, C) + (d(C, B) \vee d(B, C)) = h(A, C) + h(C, B) \end{aligned}$$

□

Vediamo alcune proprietà di h , analoghe a quelle mostrate per d :

Lemma 1.10. Sia (X, d) uno spazio metrico completo. La distanza h soddisfa le seguenti proprietà:

1. $h(A \cup B, C \cup D) \leq h(A, C) \vee h(B, D) \quad \forall A, B, C, D \in \mathcal{H}(X)$.
2. $\forall A, B \in \mathcal{H}(X), \exists a \in A, b \in B$ tali che $h(A, B) = d(a, b)$.
3. se $A \subset B \subset C$ sono elementi di $\mathcal{H}(X)$, allora $h(A, C) \geq h(A, B)$.

4. se $A \subset B \subset C$ sono elementi di $\mathcal{H}(X)$, allora $h(C, B) \geq h(C, A)$.

Dimostrazione.

1. dimostro che $d(A \cup B, C \cup D) \leq h(A, C) \vee h(B, D)$, l'altro caso è analogo grazie alla simmetria di h .
 $d(A \cup B, C \cup D) = d(A, C \cup D) \vee d(B, C \cup D) \leq d(A, C) \vee d(B, D) \leq h(A, C) \vee h(B, D)$.
2. segue direttamente dalla stessa proprietà di $d(A, B)$.
3. $h(A, C) = d(C, A) \geq d(B, A) = h(B, A)$.
4. $h(C, B) = d(C, B) \geq d(C, A) = h(C, A)$.

□

OSSERVAZIONE 1.4. Abbiamo usato la compattezza degli elementi di $\mathcal{H}(X)$ per definire h tramite massimi e minimi. Potremmo definire in modo simile, usando estremi superiore ed inferiore, un operatore tra insiemi anche non compatti, ma certamente non sarebbe una distanza. Ad esempio, usando in \mathbb{R}^n un insieme più grande di $\mathcal{H}(\mathbb{R}^n)$, incontriamo alcuni problemi:

- se considerassimo $A \subseteq \mathbb{R}^n$ illimitato e $B \subseteq \mathbb{R}^n$ limitato, allora la distanza tra di essi dovrebbe essere infinita.
- se considerassimo $A \subset \mathbb{R}^n$ non chiuso, allora la distanza tra A e la sua chiusura sarebbe nulla, anche se i due insiemi sono diversi.

1.2 Topologia di $\mathcal{H}(X)$

Studiamo alcune proprietà topologiche di $\mathcal{H}(X)$: completezza, compattezza e connessione per archi.

1.2.1 Completezza di $\mathcal{H}(X)$

Introduciamo per prima cosa alcuni strumenti che ci aiutino al lavorare con la distanza di Hausdorff, con l'obiettivo di dimostrare che rende $\mathcal{H}(X)$ uno spazio metrico completo, e caratterizzare i punti limite delle sue successioni di Cauchy.

Definizione 1.11. Sia (X, d) uno spazio metrico. Siano $S \subset X$, $\varepsilon \geq 0$. Definiamo:

$$S + \varepsilon := \{x \in X \text{ tale che } d(x, y) \leq \varepsilon \text{ per qualche } y \in S\}.$$

Proposizione 1.12. Sia (X, d) uno spazio metrico, sia $r \geq 0$. Se $A \subset X$ è compatto, allora $A + r$ è chiuso.

CAPITOLO 1. LO SPAZIO DEI FRATTALI E LA DISTANZA DI HAUSDORFF

Dimostrazione. Presa una successione $\{a_n\}_{n \in \mathbb{N}} \subset A + r$ convergente ad $a \in X$, allora

$$\forall \varepsilon > 0 \exists N \text{ tale che } n \geq N \implies d(a_n, a) < \varepsilon.$$

Questo implica che $d(a, A) \leq d(a, a_n) + d(a_n, A) < \varepsilon + r$ per n abbastanza grande. Questo vale per ogni $\varepsilon > 0$, quindi $d(a, A) \leq r$, ovvero $a \in A + r$, quindi $A + r$ è chiuso. \square

OSSERVAZIONE 1.5. In generale non è vero che, se A è compatto, allora anche $A + r$ è compatto.

Infatti, se ad esempio (X, d) è completo (il caso che ci interessa), allora anche $A + r$, essendo chiuso, è completo. In generale però non è totalmente limitato: $A + r = \bigcup_{a \in A} \overline{B_r(a)}$, e $B_r(a)$ non sempre è totalmente limitata, quindi neanche $A + r$ lo è.

Esempio 1. Sia $X = C^0([0, 1], \mathbb{R})$ dotato della distanza d definita dalla norma uniforme $\|f\|_\infty = \sup_{x \in [0, 1]} |f(x)|$. (X, d) è completo, perchè una successione di Cauchy in (X, d) converge uniformemente al proprio limite puntuale per il criterio di Cauchy sulla convergenza uniforme, ed il limite uniforme di funzioni continue è una funzione continua.

La sfera unitaria chiusa in X , $B = \overline{B_1(0)} = \{f \in X \text{ tale che } d(f, 0) \leq 1\}$, è chiusa e limitata per definizione (e quindi completa), ma non è compatta. Infatti, definiamo per $n \geq 1$ la successione:

$$f_n(x) = \begin{cases} 2^{n+1}(x - \frac{1}{2^n}) & \text{se } x \in [\frac{1}{2^n}, \frac{3}{2^{n+1}}] \\ 2^{n+1}(\frac{1}{2^{n+1}} - x) & \text{se } x \in [\frac{3}{2^{n+1}}, \frac{1}{2^{n-1}}] \\ 0 & \text{se } x \in [0, \frac{1}{2^n}] \cup [\frac{1}{2^{n-1}}, 1] \end{cases}$$



Figura 1.1: Grafici di f_1, f_2, f_3, f_4

Osserviamo che $f_n \in C^0([0, 1], \mathbb{R})$ per ogni n , quindi $d(f_n, 0) = \|f_n - 0\|_\infty = 1$, quindi $f_n \in B$ per ogni $n \in \mathbb{N}$, ed inoltre $\|f_n - f_m\|_\infty = 1$ per ogni $n \neq m$. Di conseguenza, non è possibile estrarre una sottosuccessione convergente da f_n . Quindi B non è compatto. In particolare, essendo completo, non è compatto perchè non è totalmente limitato. In modo simile mostriamo che nessuna palla chiusa di (X, d) è compatta.

Se $x \in C^0([0, 1], \mathbb{R})$, allora per ogni $r > 0$ si ha che $B = \overline{B_r(x)}$ non è compatto. Infatti, definita la successione di funzioni $\{\tilde{f}_n = x + \frac{r}{2} \cdot f_n\}_{n \in \mathbb{N}}$, si vede facilmente che

$$\|x - \tilde{f}_n\|_\infty = \frac{r}{2} \quad \forall n \in \mathbb{N}, \text{ e } \|\tilde{f}_m - \tilde{f}_n\|_\infty = \frac{r}{2} \quad \forall n \neq m.$$

Di conseguenza, $\tilde{f}_n \in B$ per ogni $n \in \mathbb{N}$, e non è possibile estrarre una sottosuccessione convergente da \tilde{f}_n . Quindi B non è compatto.

Consideriamo ora $A \in \mathcal{H}(X)$, ed $r > 0$. Essendo $A + r$ chiuso, è completo. Tuttavia, non è compatto.

Infatti: supponiamo per assurdo che lo sia. Essendo che $A + r = \bigcup_{a \in A} \overline{B_r(a)}$, allora preso $a \in A$ si ha che $\overline{B_r(a)}$ è compatto, in quanto sottoinsieme chiuso di un compatto. Ma questo è assurdo, perchè come abbiamo appena visto, $B_r(a)$ non è compatto. Quindi $A + r$ non è compatto.

Lemma 1.13. *Sia (X, d) uno spazio metrico. Siano $A, B \in \mathcal{H}(X)$, sia $\varepsilon > 0$. Allora*

$$h(A, B) \leq \varepsilon \iff A \subset B + \varepsilon \text{ e } B \subset A + \varepsilon.$$

Dimostrazione. Ci basta mostrare che

$$d(A, B) \leq \varepsilon \iff A \subset B + \varepsilon.$$

Supponiamo $d(A, B) \leq \varepsilon$. Allora, $d(x, B) \leq \varepsilon$ per ogni $x \in A$, quindi per ogni $x \in A$ esiste $y \in B$ tale che $d(x, y) \leq \varepsilon$, ovvero $x \in B + \varepsilon$.

Supponiamo invece che $A \subset B + \varepsilon$. Allora, per ogni $x \in A$ esiste $y \in B$ tale che $d(x, y) \leq \varepsilon$, quindi $d(x, B) \leq \varepsilon$ per ogni $x \in A$, quindi $d(A, B) \leq \varepsilon$. \square

Vediamo ora un lemma essenziale per dimostrare la completezza di $\mathcal{H}(X)$, che ci permette di estendere una successione di Cauchy di punti (in X) all'interno di una successione di Cauchy di insiemi (in $\mathcal{H}(X)$).

Lemma di estensione 1.14. *Sia (X, d) uno spazio metrico. Sia $\{A_n\}_{n \in \mathbb{N}} \subset \mathcal{H}(X)$ una successione di Cauchy. Sia $\{n_j\}_{j \in \mathbb{N}}$ una successione di numeri naturali tale che $0 = n_0 < n_1 < n_2 < n_3 < \dots$. Sia infine $\{x_{n_j}\}_{j \in \mathbb{N}} \subset X$ una successione di Cauchy tale che $x_{n_j} \in A_{n_j}$ per ogni $j \in \mathbb{N}$.*

Allora, esiste una successione di Cauchy $\{\tilde{x}_n\}_{n \in \mathbb{N}}$ tale che $\tilde{x}_n \in A_n$ per ogni $n \in \mathbb{N}$, e $\tilde{x}_{n_j} = x_{n_j}$ per ogni $j \in \mathbb{N}$.

Dimostrazione. Costruiamo la successione $\{\tilde{x}_n\}_{n \in \mathbb{N}}$. Per ogni $n \in \{1, 2, \dots, n_1\}$, scegliamo $\tilde{x}_n \in \{x \in A_n \text{ tale che } d(x_{n_1}, A_n) = d(x_{n_1}, x)\}$. Ovvero, \tilde{x}_n è il punto più vicino a x_{n_1} in A_n . Analogamente, per $n \in \{n_j + 1, n_j + 2, \dots, n_{j+1}\}$, scegliamo $\tilde{x}_n \in \{x \in A_n \text{ tale che } d(x_{n_{j+1}}, A_n) = d(x_{n_{j+1}}, x)\}$. Per costruzione, $\tilde{x}_n \in A_n$.

Sia ora $\varepsilon > 0$. Sappiamo che $\exists N_1$ tale che $d(x_{n_k}, x_{n_j}) \leq \frac{\varepsilon}{3} \quad \forall n_k, n_j \geq N_1$. Inoltre, $\exists N_2$ tale che $d(A_n, A_m) \leq \frac{\varepsilon}{3} \quad \forall n, m \geq N_2$. Sia $N = \max\{N_1, N_2\}$. Allora, per $n, m \geq N$, vale:

$$d(\tilde{x}_m, \tilde{x}_n) \leq d(\tilde{x}_m, x_{n_j}) + d(x_{n_j}, x_{n_k}) + d(x_{n_k}, \tilde{x}_n),$$

dove $m \in \{n_{j-1} + 1, \dots, n_j\}$ e $n \in \{n_{k-1} + 1, \dots, n_k\}$.
 Dato che $h(A_m, A_{n_j}) \leq \frac{\varepsilon}{3}$, allora $d(\tilde{x}_m, x_{n_j}) = d(x_{n_j}, A_m) \leq d(A_{n_j}, A_m) \leq \frac{\varepsilon}{3}$.
 Analogamente, $h(A_n, A_{n_k}) \leq \frac{\varepsilon}{3}$.
 Da cui otteniamo che $d(\tilde{x}_m, \tilde{x}_n) \leq \varepsilon$ per ogni $m, n > N$, il che completa la dimostrazione. \square

Teorema 1.15. Completezza dello spazio dei frattali. *Sia (X, d) uno spazio metrico completo. Allora, $(\mathcal{H}(X), h)$ è uno spazio metrico completo. Inoltre, se $\{A_n \in \mathcal{H}(X)\}_{n \in \mathbb{N}}$ è una successione di Cauchy, allora il suo limite*

$$A = \lim_{n \rightarrow \infty} A_n \in \mathcal{H}(X)$$

è caratterizzato così:

$A = \{x \in X \text{ tale che } \exists \text{ una successione di Cauchy } \{x_n \in A_n\} \text{ convergente a } x\}$.

Dimostrazione. Sia $\{A_n\}_{n \in \mathbb{N}} \subset \mathcal{H}(X)$ una successione di Cauchy e sia A definito come nel teorema. Dividiamo la dimostrazione in 5 parti:

- (a) $A \neq \emptyset$.
- (b) A è chiuso, quindi è completo essendo X completo.
- (c) $\forall \varepsilon > 0, \exists N$ tale che $n \geq N \implies A \subset A_n + \varepsilon$.
- (d) A è totalmente limitato, quindi è compatto grazie al punto (b).
- (e) $\lim_{n \rightarrow \infty} A_n = A$.

dimostrazione di (a): Ci basta provare l'esistenza di una successione di Cauchy $\{a_i \in A_i\}$. Iniziamo trovando una successione di numeri naturali $N_1 < N_2 < N_3 < \dots$ tale che:

$$h(A_m, A_n) < \frac{1}{2^i} \quad \forall m, n > N_i,$$

grazie al fatto che A_n è di Cauchy. Scegliamo $x_{N_1} \in A_{N_1}$. Essendo $h(A_{N_1}, A_{N_2}) \leq \frac{1}{2}$, possiamo trovare $x_{N_2} \in A_{N_2}$ tale che $d(x_{N_1}, x_{N_2}) \leq \frac{1}{2}$, perchè $\max_{x \in A_{N_1}} d(x, A_{N_2}) \leq \frac{1}{2}$ implica che $d(x_{N_1}, A_{N_2}) \leq \frac{1}{2}$.

Per induzione, troviamo in modo analogo una successione $\{x_{N_i} \in A_{N_i}\}$ tale che $d(x_{N_i}, x_{N_{i+1}}) \leq \frac{1}{2^i}$. Vediamo che è di Cauchy: sia $\varepsilon > 0$ e scegliamo N_ε in modo che $\sum_{i=N_\varepsilon}^{\infty} \frac{1}{2^i} < \varepsilon$. Allora, per $m > n \geq N_\varepsilon$, (Con l'osservazione che $N_n \geq n$ per ogni n), abbiamo:

$$\begin{aligned} d(x_{N_m}, x_{N_n}) &\leq d(x_{N_m}, x_{N_{m+1}}) + d(x_{N_{m+1}}, x_{N_{m+2}}) + \dots + d(x_{N_{n-1}}, x_{N_n}) \\ &< \sum_{i=N_\varepsilon}^{\infty} \frac{1}{2^i} < \varepsilon \end{aligned}$$

Grazie al lemma di estensione, troviamo una successione di Cauchy $\{a_i \in A_i\}$, dove $a_{N_i} = x_{N_i}$, che in particolare è convergente in X essendo di Cauchy. Questa successione quindi ammette limite e questo limite è in A per definizione. Quindi, $A \neq \emptyset$.

dimostrazione di (b): Per mostrare che A è chiuso, supponiamo che $\{a_i \in A_i\}$ sia una successione di punti convergente ad un punto a , e mostriamo che $a \in A$.

Sappiamo che, per ogni $i \in \mathbb{N}$, $\exists \{x_{i,n} \in A_n\}_{n \in \mathbb{N}}$ tale che $\lim_{n \rightarrow \infty} x_{i,n} = a_i$, ed esiste una successione crescente di numeri naturali $\{N_i\}_{i \in \mathbb{N}}$ tale che $d(a_{N_i}, a) < \frac{1}{i}$. Inoltre, esiste un'altra successione $\{m_i\}_{i \in \mathbb{N}}$ tale che $d(x_{N_i, m_i}, a_{N_i}) \leq \frac{1}{i}$. Quindi, $d(x_{N_i, m_i}, a) \leq \frac{2}{i}$ per la disuguaglianza triangolare. Definiamo $y_{m_i} = x_{N_i, m_i}$, e notiamo che $y_{m_i} \in A_{m_i}$ e $\lim_{i \rightarrow \infty} y_{m_i} = a$. Per il lemma di estensione, possiamo estendere $\{y_{m_i}\}$ ad una successione convergente $\{z_i \in A_i\}$, che deve convergere ad a . Quindi, $a \in A$.

dimostrazione di (c): Sia $\varepsilon > 0$. Sappiamo che esiste N tale che se $n, m \geq N$, allora $h(A_m, A_n) \leq \varepsilon$. Sia ora $m \geq n \geq N$. Allora, $A_m \subset A_n + \varepsilon$. Dobbiamo mostrare che $A \subset A_n + \varepsilon$.

Sia dunque $a \in A$. Esiste una successione $\{a_i \in A_i\}$ convergente ad a . Possiamo prendere N abbastanza grande da far sì che se $m \geq N$, allora $d(a_m, a) < \varepsilon$. Allora, $a_m \in A_n + \varepsilon$ per ogni $m \geq N$, dato che $A_m \subset A_n + \varepsilon$. Essendo A_n compatto, $A_n + \varepsilon$ è chiuso, quindi $a \in A_n + \varepsilon$. Questo prova che $A \subset A_n + \varepsilon$ per n sufficientemente grande.

dimostrazione di (d): Per assurdo, supponiamo A non sia totalmente limitato: ovvero, per qualche $\varepsilon > 0$ non esiste un ricoprimento finito di palle di raggio ε . Possiamo quindi trovare una successione $\{x_i\}_{i \in \mathbb{N}} \subset A$ tale che $d(x_i, x_j) \geq \varepsilon$ per ogni $i \neq j$. Dal punto (c), sappiamo che esiste n abbastanza grande perchè $A \subset A_n + \frac{\varepsilon}{3}$. Inoltre, per ogni x_i esiste $y_i \in A_n$ tale che $d(x_i, y_i) \leq \frac{\varepsilon}{3}$. Essendo A_n compatto, esiste una sottosuccessione $\{y_{n_i}\}$ di $\{y_i\}$ che converge. Quindi, possiamo trovare due punti y_{n_i} e y_{n_j} tali che $d(y_{n_i}, y_{n_j}) < \frac{\varepsilon}{3}$.

Ma allora,

$$d(x_{n_i}, x_{n_j}) \leq d(x_{n_i}, y_{n_i}) + d(y_{n_i}, y_{n_j}) + d(y_{n_j}, x_{n_j}) < \varepsilon.$$

Questo è assurdo, quindi A è totalmente limitato. Essendo anche completo dal punto (b), è compatto. Quindi $A \in \mathcal{H}(X)$.

dimostrazione di (e): Dal punto (d), sappiamo che $A \in \mathcal{H}(X)$. Quindi, grazie al punto (c) e al Lemma 1.13, ci basta dimostrare che per ogni $\varepsilon > 0$, esiste N tale che per ogni $n \geq N$, vale $A_n \subset A + \varepsilon$.

Sia dunque $\varepsilon > 0$, e troviamo N tale che per $n, m \geq N$ vale $h(A_m, A_n) \leq \frac{\varepsilon}{2}$. Allora, per $m, n \geq N$ vale $A_m \subset A_n + \frac{\varepsilon}{2}$.

Sia ora $y \in A_n$.

In modo analogo, notiamo che esiste una successione crescente di interi tale che $n < N_1 < N_2 < \dots < N_k < \dots$ e, per $m, n > N_j$, vale $A_m \subset A_n + \frac{\varepsilon}{2^{j+1}}$.

Notiamo che $A_n \subset A_{N_1} + \frac{\varepsilon}{2}$.

Essendo che $y \in A_n$, esiste $x_{N_1} \in A_{N_1}$ tale che $d(y, x_{N_1}) \leq \frac{\varepsilon}{2}$. Allo stesso modo, essendo $x_n \in A_{N_1}$, esiste $x_{N_2} \in A_{N_2}$ tale che $d(x_{N_1}, x_{N_2}) \leq \frac{\varepsilon}{2^2}$. Procedendo in modo analogo per induzione, troviamo una successione $\{x_{N_j}\}_{j \in \mathbb{N}}$ dove $x_{N_j} \in A_{N_j}$ e $d(x_{N_j}, x_{N_{j+1}}) < \frac{\varepsilon}{2^{j+1}}$. Usando la

disuguaglianza triangolare, troviamo che:

$$d(y, x_{N_j}) \leq d(y, x_{N_1}) + \sum_{i=1}^{j-1} d(x_{N_i}, x_{N_{i+1}}) \leq \sum_{i=1}^j \frac{\varepsilon}{2^i} \leq \varepsilon \sum_{i=1}^{\infty} \frac{1}{2^i} = \varepsilon \quad \forall j.$$

Inoltre, notiamo che $\{x_{N_j}\}$ è di Cauchy, perchè, per $k < j$ vale:

$$d(x_{N_k}, x_{N_j}) \leq \sum_{i=k}^{j-1} d(x_{N_i}, x_{N_{i+1}}) \leq \sum_{i=k}^{\infty} \frac{\varepsilon}{2^{i+1}} \xrightarrow{k \rightarrow \infty} 0.$$

$\{x_{N_j}\}$ è di Cauchy, quindi converge ad un punto x . Inoltre, applicando il lemma di estensione troviamo una successione di Cauchy $\{\bar{x}_k \in A_k\}$, con $\bar{x}_{N_j} = x_{N_j}$ la quale deve anch'essa convergere ad x . Quindi, $x \in A$.

Infine,

$$d(y, x_{N_j}) \leq \varepsilon \quad \forall j \implies d(y, x) \leq \varepsilon.$$

Quindi, $d(y, A) \leq \varepsilon$, ovvero $y \in A + \varepsilon$ per ogni $y \in A_n$. Ovvero, $A_n \subset A + \varepsilon$ per n sufficientemente grande. Questo conclude la dimostrazione del fatto che $\lim A_n = A$, e $(\mathcal{H}(X), h)$ è uno spazio metrico completo.

□

1.2.2 Compattezza di $\mathcal{H}(X)$

Teorema 1.16. *Sia (X, d) uno spazio metrico completo. Allora, X è compatto $\iff \mathcal{H}(X)$ è compatto.*

Dimostrazione. X **compatto** $\implies \mathcal{H}(X)$ **compatto**

Dimostriamo che $\mathcal{H}(X)$ è totalmente limitato, il che lo renderebbe compatto, essendo anche completo. Sia $\varepsilon > 0$. Essendo X totalmente limitato, $\exists n \in \mathbb{N}$, $x_1, \dots, x_n \in X$ tali che $X \subseteq \bigcup_{i=1}^n B_\varepsilon(x_i)$. Definiamo ora l'insieme $A \subset \mathcal{H}(X)$ così:

$$A = \left\{ \bigcup_{i \in I} \{x_i\} \text{ tale che } I \subseteq \{1, \dots, n\}, I \neq \emptyset \right\}.$$

Notiamo che A ha cardinalità m finita. Sia $C \in \mathcal{H}(X)$, e sia $D = \{x_i \text{ tale che } x_i \in C + \varepsilon\}$. Allora, $D \neq \emptyset$, ovvero $D \in A$, perchè

$$y \in C \implies \exists x_i \text{ tale che } d(x_i, y) < \varepsilon \implies d(x_i, C) < \varepsilon \implies x_i \in D.$$

In particolare, $D \subset C + \varepsilon$ per definizione, ed inoltre $C \subset D + \varepsilon$ perchè, come appena visto:

$$y \in C \implies \exists x_i \in D \text{ tale che } d(x_i, y) < \varepsilon \implies d(y, D) < \varepsilon.$$

Quindi $h(C, D) < \varepsilon$. Abbiamo mostrato che fissato $\varepsilon > 0$, esistono $D_1, \dots, D_m \in \mathcal{H}(X)$ tale che per ogni $C \in \mathcal{H}(X)$, esiste i per cui $C \in B_\varepsilon(D_i)$. Ovvero, $\mathcal{H}(X)$ è totalmente limitato.

$\mathcal{H}(X)$ compatto $\implies X$ compatto

Dimostriamo che X è totalmente limitato. Per assurdo, non lo sia, ovvero, $\exists \varepsilon > 0$ tale che possiamo trovare dei punti $\{x_j\}_{j \in \mathbb{N}} \subset X$ con la proprietà che $d(x_k, x_j) \geq \varepsilon$ per ogni $k \neq j$.

Osserviamo che $\{x_j\} \subset X$ è compatto per ogni j , e $h(\{x_j\}, \{x_i\}) = d(x_j, x_i) > \varepsilon$, per ogni $j \neq i$. Quindi, non si può estrarre una successione convergente da $\{\{x_j\}\}_{j \in \mathbb{N}} \subset \mathcal{H}(X)$. Questo è assurdo, perchè $\mathcal{H}(X)$ è compatto. □

Grazie al risultato appena mostrato, possiamo dimostrare questo utile teorema:

Teorema 1.17. *Sia (X, d) uno spazio metrico completo. Sia $\{A_n\}_{n \in \mathbb{N}} \subset \mathcal{H}(X)$ una successione di elementi di $\mathcal{H}(X)$ che soddisfa $A_n \supseteq A_{n+1}$ per ogni n . Allora, $\{A_n\}$ è una successione di Cauchy.*

In modo simile, sia $\{B_n\}_{n \in \mathbb{N}} \subset \mathcal{H}(X)$ una successione di elementi di $\mathcal{H}(X)$ che soddisfa $B_n \subseteq B_{n+1}$ per ogni n . Se X è compatto, allora $\{B_n\}$ è una successione di Cauchy.

Dimostrazione. Primo caso Per ogni $n \in \mathbb{N}$ vale $A_n \in \mathcal{H}(A_1)$, ed osserviamo che $(\mathcal{H}(A_1), h)$ è uno spazio metrico completo, con la metrica h ereditata da $\mathcal{H}(X)$. Essendo A_1 compatto, anche $\mathcal{H}(A_1)$ lo è. Di conseguenza, A_n ammette una sottosuccessione A_{n_k} convergente, quindi in particolare di Cauchy. Fissato $\varepsilon > 0$ esiste quindi \bar{k} tale che per ogni $i \geq j \geq \bar{k}$ si ha che $h(A_{n_i}, A_{n_j}) = d(A_{n_j}, A_{n_i}) < \varepsilon$. Allora, presi $n \geq m \geq n_{\bar{k}}$, e preso k^* tale che $n_{k^*} \geq n$, si ha che:

$$h(A_n, A_m) = d(A_m, A_n) \leq d(A_{n_{\bar{k}}}, A_{n_{k^*}}) < \varepsilon.$$

Quindi, A_n è una successione di Cauchy in $(\mathcal{H}(A_1), h)$, quindi anche in $(\mathcal{H}(X), h)$.

Secondo caso Essendo X compatto, anche $\mathcal{H}(X)$ lo è. Di conseguenza, B_n ammette una sottosuccessione B_{n_k} convergente, ed in particolare di Cauchy, quindi per ogni $\varepsilon > 0$ esiste \bar{k} tale che per ogni $i \geq j \geq \bar{k}$ si ha che $h(B_{n_i}, B_{n_j}) = d(B_{n_i}, B_{n_j}) < \varepsilon$. Allora, presi $n \geq m \geq n_{\bar{k}}$, e preso k^* tale che $n_{k^*} \geq n$, si ha che:

$$h(B_n, B_m) = d(B_n, B_m) \leq d(B_{n_{k^*}}, B_{n_{\bar{k}}}) < \varepsilon.$$

Quindi, B_n è una successione di Cauchy. □

1.2.3 Connessione per archi di $\mathcal{H}(\mathbb{R}^N)$

Dimostriamo innanzitutto alcuni lemmi preliminari.

Lemma 1.18. *La funzione*

$$f: \begin{cases} X \rightarrow \mathcal{H}(X) \\ x \mapsto \{x\} \end{cases}$$

è continua.

CAPITOLO 1. LO SPAZIO DEI FRATTALI E LA DISTANZA DI HAUSDORFF

Dimostrazione. Sia $\{x_n\}_{n \in \mathbb{N}}$ una successione convergente in X , con $x_n \rightarrow x \in X$, sia $\varepsilon > 0$. In particolare,

$$\exists N \text{ tale che } \forall n \geq N, d(x_n, x) \leq \varepsilon.$$

Allora, per ogni $n \geq N$, $f(x_n) = \{x_n\} \subset \{x\} + \varepsilon$, e $\{x\} \subset \{x_n\} + \varepsilon$, ovvero $h(\{x_n\}, \{x\}) \leq \varepsilon$. Quindi, $\{x_n\} \rightarrow \{x\}$. Quindi f è continua. \square

Questo significa che esiste una copia di X all'interno di $\mathcal{H}(X)$. In particolare, l'immagine di \mathbb{R} in $\mathcal{H}(\mathbb{R})$ è connessa per archi, perchè \mathbb{R} lo è.

Lemma 1.19. *Le funzioni definite da:*

$$f_x: \begin{cases} [0, b] \subset \mathbb{R} \rightarrow \mathcal{H}(\mathbb{R}) \\ t \mapsto [x, x + t] \end{cases}$$

sono continue in $[0, b]$ per ogni $b, x \in \mathbb{R}$. Di conseguenza, esiste una curva continua in $\mathcal{H}(\mathbb{R})$ da un intervallo ad uno dei suoi estremi.

Dimostrazione. Sia $\{t_n\}_{n \in \mathbb{N}}$ una successione convergente in $[0, b]$, con limite t . Sia N tale che per ogni $n \geq N$, $d(t_n, t) < \varepsilon$. Allora, $h([x, x + t_n], [x, x + t]) = d(t_n, t) < \varepsilon$. Di conseguenza, le funzioni f_x sono continue. \square

Lemma 1.20. *Sia $A \in \mathcal{H}(\mathbb{R})$, allora la funzione*

$$f_A: \begin{cases} [0, b] \rightarrow \mathcal{H}(\mathbb{R}) \\ t \mapsto \bigcup_{x \in A} [x, x + t] \end{cases}$$

è continua.

Dimostrazione. Sia $\{t_n\}_{n \in \mathbb{N}}$ una successione convergente in $[0, b]$, con limite t . Sia N tale che per ogni $n \geq N$, $d(t_n, t) < \varepsilon$.

Allora, $h(\bigcup_{x \in A} [x, x + t_n], \bigcup_{x \in A} [x, x + t]) \leq \varepsilon$, perchè:

$$\bigcup_{x \in A} [x, x + t] + \varepsilon = \bigcup_{x \in A} [x - \varepsilon, x + t + \varepsilon] \supset \bigcup_{x \in A} [x, x + t_n], \text{ e viceversa.}$$

Di conseguenza, f_A è continua. \square

Lemma 1.21. *Sia $A \in \mathcal{H}(\mathbb{R})$. Allora, preso t sufficientemente grande, l'insieme $\bigcup_{x \in A} [x, x + t]$ è un intervallo.*

Dimostrazione. A è compatto, quindi chiuso e limitato. Di conseguenza, ammette un minimo c ed un massimo d . Allora, preso $t = d - c$, vale:

$$\bigcup_{x \in A} [x, x + t] \supset [c, c + t] \cup [d, d + t] = [c, d + t],$$

e chiaramente

$$\bigcup_{x \in A} [x, x + t] \subset \bigcup_{x \in A} [c, d + t] = [c, d + t].$$

Di conseguenza, $\bigcup_{x \in A} [x, x + t] = [c, d + t]$ è un intervallo. \square

Teorema 1.22. *Se $A, B \in \mathcal{H}(\mathbb{R})$, allora esiste una curva continua su un intervallo chiuso che li connette. Ovvero, $\mathcal{H}(\mathbb{R})$ è connesso per archi.*

Dimostrazione. Dal Lemma 1.21, sappiamo che possiamo connettere (tramite curve continue su intervalli chiusi) A e B a degli intervalli. Dal Lemma 1.19, sappiamo che possiamo connettere tali intervalli ai singoletti contenenti i loro estremi. Dal Lemma 1.18 (ponendo come X un intervallo chiuso di \mathbb{R} sufficientemente grande), sappiamo che possiamo connettere questi singoletti tra loro. In questo modo possiamo costruire una curva continua $\gamma: [a, b] \rightarrow \mathcal{H}(\mathbb{R})$ tale che $\gamma(a) = A$, $\gamma(b) = B$. \square

Teorema 1.23. *$\mathcal{H}(\mathbb{R}^N)$ è connesso per archi, per ogni $N \in \mathbb{N}$.*

Dimostrazione. Procediamo in modo analogo, con qualche accorgimento. Sappiamo che $A \in \mathcal{H}(\mathbb{R}^N)$ se e solo se A è chiuso e limitato, quindi in particolare esistono $x \in \mathbb{R}^N$ e $r > 0$ tali che $A \subset \overline{B_r(x)}$. Allora, possiamo connettere A e $\overline{B_r(x)}$ tramite la funzione:

$$f_A: \begin{cases} [0, r] \rightarrow \mathcal{H}(\mathbb{R}^N) \\ s \mapsto (A + s) \cap \overline{B_r(x)} \end{cases}$$

Chiaramente, $f_A(0) = A$, ed $f_A(r) = \overline{B_r(x)}$. Notiamo inoltre che f_A è ben definita, ovvero $(A + s) \cap \overline{B_r(x)} \in \mathcal{H}(\mathbb{R}^N)$ per ogni $s \in [0, r]$, perchè è chiuso (in quanto intersezione di chiusi) e limitato, quindi compatto. Inoltre, f_A è continua, perchè se $s_n^- \rightarrow s$ e $s_n^+ \rightarrow s$ sono due successioni in $[0, r]$, crescente e decrescente rispettivamente, allora:

$$\begin{aligned} \lim_{t \rightarrow s^-} (A + t) \cap \overline{B_r(x)} &= \lim_{n \rightarrow \infty} (A + s_n^-) \cap \overline{B_r(x)} = (A + s) \cap \overline{B_r(x)} \\ \lim_{t \rightarrow s^+} (A + t) \cap \overline{B_r(x)} &= \lim_{n \rightarrow \infty} (A + s_n^+) \cap \overline{B_r(x)} = (A + s) \cap \overline{B_r(x)} \end{aligned}$$

Questo perchè $(A + s_n^-) \cap \overline{B_r(x)}$ è una successione crescente in $\overline{B_r(x)}$ compatto, quindi è di Cauchy per il Teorema 1.17, mentre $(A + s_n^+) \cap \overline{B_r(x)}$ è decrescente e quindi di Cauchy per lo stesso teorema. Essendo $\overline{B_r(x)}$ compatto, in particolare completo, convergono ad $(A + s) \cap \overline{B_r(x)}$. Limite destro e sinistro di f_A esistono identici, per cui è continua.

In conclusione, se $A, B \in \mathcal{H}(\mathbb{R}^N)$, possiamo connetterli a due palle chiuse. Possiamo poi facilmente connettere due palle chiuse qualsiasi tramite una traslazione ed una simile dilatazione. \square

Capitolo 2

Iterated function systems iperbolici ed attrattori

In questo capitolo descriviamo gli Iterated Function Systems iperbolici (che d'ora in poi chiameremo IFS) e dimostriamo l'esistenza degli attrattori, indagando la relazione tra IFS e frattali. Espandiamo poi le nostre possibilità definendo gli IFS con condensazione, e dimostrando alcuni risultati pratici che ci permettono di manipolare facilmente IFS ed attrattori.

2.1 Contrazioni

Ricordiamo le definizioni di contrazione ed iterata di una funzione, ed il teorema delle contrazioni, di cui omettiamo la dimostrazione.

Definizione 2.1. Sia $f: X \rightarrow X$ una trasformazione su uno spazio metrico (X, d) definisco induttivamente l'iterata n -esima di f come:

$$f^0(x) := x, \quad f^n(x) := f \circ f^{n-1}(x) \quad \forall x \in X.$$

Definizione 2.2. Sia (X, d) uno spazio metrico. Una funzione $f: X \rightarrow X$ si dice contrazione se esiste $s \in [0, 1)$ tale che

$$d(f(x), f(y)) \leq s \cdot d(x, y) \quad \forall x, y \in X.$$

La quantità s è chiamata fattore di contrazione di f .

Teorema 2.3. Teorema delle contrazioni. *Sia (X, d) uno spazio metrico completo, $f: X \rightarrow X$ una contrazione. Allora, f ammette un unico punto fisso, ovvero esiste un unico $x_f \in X$ tale che $f(x_f) = x_f$. Inoltre, vale:*

$$\lim_{n \rightarrow \infty} f^n(x) = x_f \quad \forall x \in X.$$

Dimostrazione. La dimostrazione si può trovare, ad esempio, in [6]. □

Mostriamo ora alcuni lemmi riguardanti le contrazioni, che ci saranno utili per dimostrare altri risultati più avanti.

Lemma 2.4. *Sia $w: X \rightarrow X$ una contrazione sullo spazio metrico (X, d) . Allora, w è continua.*

Dimostrazione. Sia $\varepsilon > 0$, sia s il fattore di contrazione di w . Allora, presi $x, y \in X$ tali che $d(x, y) < \varepsilon/s$, si ha che: $d(w(x), w(y)) < s \cdot d(x, y) < \varepsilon$. Questo completa la dimostrazione. \square

Lemma 2.5. *Sia (X, d) uno spazio metrico completo, ed $f: X \rightarrow X$ una contrazione con fattore di contrazione $0 \leq s < 1$, e punto fisso $x_f \in X$. Allora, vale:*

$$d(x, x_f) \leq (1 - s)^{-1} \cdot d(x, f(x)) \quad \forall x \in X.$$

Dimostrazione. la funzione

$$d: \begin{cases} X \rightarrow X \\ y \mapsto d(x, y) \end{cases}$$

è continua in y per ogni $x \in X$ fissato. Di conseguenza,

$$\begin{aligned} d(x, x_f) &= d(x, \lim_{n \rightarrow \infty} f^n(x)) = \lim_{n \rightarrow \infty} d(x, f^n(x)) \\ &\leq \lim_{n \rightarrow \infty} \sum_{m=1}^n d(f^{m-1}(x), f^m(x)) \\ &\leq \lim_{n \rightarrow \infty} d(x, f(x))(1 + s + \dots + s^{n-1}) = (1 - s)^{-1} d(x, f(x)). \end{aligned}$$

\square

Lemma 2.6. *Siano (X, d) uno spazio metrico completo, e (P, d_P) un altro spazio metrico. Sia $s \in [0, 1)$ fissato. Sia poi $w: P \times X \rightarrow X$ una famiglia di contrazioni su X con fattore di contrazione s , ovvero: per ogni $p \in P$ fissato, $w(p, \cdot)$ è una contrazione su X con fattore di contrazione s . Infine, w sia tale che per ogni $x \in X$ fissato, $w(\cdot, x)$ sia continua su P .*

Allora, il punto fisso di $w(p, \cdot)$ dipende in modo continuo da p , ovvero: $x_f: P \rightarrow X$ è continua.

Dimostrazione. $x_f(p)$ denoti il punto fisso di $w(p, \cdot)$ per $p \in P$ fissato. Sia $\varepsilon > 0$, allora per ogni $q \in P$, vale:

$$\begin{aligned} d(x_f(p), x_f(q)) &= d(w(p, x_f(p)), w(q, x_f(q))) \\ &\leq d(w(p, x_f(p)), w(q, x_f(p))) + d(w(q, x_f(p)), w(q, x_f(q))) \\ &\leq d(w(p, x_f(p)), w(q, x_f(p))) + s \cdot d(x_f(p), x_f(q)). \end{aligned}$$

Questo implica:

$$d(x_f(p), x_f(q)) \leq (1 - s)^{-1} d(w(p, x_f(p)), w(q, x_f(p))).$$

Per continuità di $w(\cdot, x_f(p))$, l'espressione a destra può essere resa arbitrariamente piccola per $q \rightarrow p$. Questo conclude la dimostrazione. \square

Corollario 2.7. *Nelle ipotesi del lemma precedente, se esiste una costante $C > 0$ tale che*

$$d(w(p, x), w(q, x)) \leq C \cdot d_P(p, q) \quad \forall p, q \in P, x \in X,$$

allora vale:

$$d(x_f(p), x_f(q)) \leq (1 - s)^{-1} \cdot C \cdot d_P(p, q) \quad \forall p, q \in P.$$

Mostriamo ora alcuni lemmi riguardanti l'azione di una contrazione di X su $\mathcal{H}(X)$.

Lemma 2.8. *Sia $w: X \rightarrow X$ una funzione continua sullo spazio metrico (X, d) . Allora, w mappa $\mathcal{H}(X)$ in se stesso, ovvero le immagini di insiemi compatti non vuoti sono insiemi compatti non vuoti.*

Dimostrazione. Sia $A \in \mathcal{H}(X)$. Chiaramente, $w(A) \neq \emptyset$. Mostriamo che è compatto. Sia $\{x_n\}_{n \in \mathbb{N}} \subseteq A$ una successione, e $y_n = w(x_n)$. Essendo A compatto, esiste una sottosuccessione x_{n_i} convergente a $x \in A$. Per la continuità di w , la sottosuccessione y_{n_i} converge a $y := w(x) \in w(A)$. Questo completa la dimostrazione. \square

Lemma 2.9. *Sia $w: X \rightarrow X$ una contrazione sullo spazio metrico (X, d) , con fattore di contrazione s . Allora, la funzione definita da:*

$$w: \begin{cases} \mathcal{H}(X) \rightarrow \mathcal{H}(X) \\ A \mapsto \{w(x) : x \in A\} \end{cases}$$

è una contrazione su $(\mathcal{H}(X), h)$, con fattore di contrazione s .

Dimostrazione. Dai lemmi precedenti, sappiamo che, essendo $w: X \rightarrow X$ continua, mappa $\mathcal{H}(X)$ in se stesso. Siano $B, C \in \mathcal{H}(X)$. Allora,

$$d(w(B), w(C)) = \max_{x \in B} \min_{y \in C} d(w(x), (y)) \leq \max_{x \in B} \min_{y \in C} s \cdot d(x, y) = s \cdot d(B, C).$$

Analogamente, $d(w(C), w(B)) \leq s \cdot d(C, B)$.

Quindi, $h(w(C), w(B)) \leq s \cdot h(C, B)$. Questo conclude la dimostrazione. \square

2.2 Iterated function systems

Una volta dimostrato il seguente lemma, avremo a disposizione tutti gli strumenti necessari per definire e studiare gli IFS.

Lemma 2.10. *Sia (X, d) uno spazio metrico. Siano $\{w_n : n = 1, 2, \dots, N\}$ delle contrazioni su $(\mathcal{H}(X), h)$, dove w_n ha fattore di contrazione s_n . Sia poi $s = \max\{s_n : n = 1, \dots, N\}$. Definiamo:*

$$W: \begin{cases} \mathcal{H}(X) \rightarrow \mathcal{H}(X) \\ B \mapsto \bigcup_{n=1}^N w_n(B) \end{cases}$$

Allora, W è una contrazione su $\mathcal{H}(X)$ con fattore di contrazione s .

Dimostrazione. Dimostriamo l'affermazione per $N = 2$. Il caso generale si dimostra poi facilmente per induzione. Siano $B, C \in \mathcal{H}(X)$. Si ha che:

$$\begin{aligned} h(W(B), W(C)) &= h(w_1(B) \cup w_2(B), w_1(C) \cup w_2(C)) \\ &\leq h(w_1(B), w_1(C)) \vee h(w_2(B), w_2(C)) \\ &\leq s_1 h(B, C) \vee s_2 h(B, C) \leq sh(B, C). \end{aligned}$$

Questo completa la dimostrazione. \square

Definizione 2.11. Un Iterated Function System iperbolico consiste in uno spazio metrico completo (X, d) accoppiato ad un insieme finito di contrazioni $w_n: X \rightarrow X$ con rispettivi fattori di contrazione s_n , per $n = 1, 2, \dots, N$. La notazione utilizzata è $\{X; w_n: n = 1, 2, \dots, N\}$. Il parametro $s = \max\{s_n: n = 1, \dots, N\}$ è detto fattore di contrazione dell'IFS.

NOTA. D'ora in avanti con IFS sottointenderemo sempre "IFS iperbolico". Si potrebbero considerare anche IFS non iperbolici, ovvero formati da uno spazio accoppiato a funzioni che non siano necessariamente contrazioni, ma qui non ci interessa trattarli.

Teorema 2.12. Sia $\{X; w_n: n = 1, 2, \dots, N\}$ un IFS con fattore di contrazione s . La trasformazione

$$W: \begin{cases} \mathcal{H}(X) \rightarrow \mathcal{H}(X) \\ W(B) := \bigcup_{n=1}^N w_n(B) \end{cases}$$

è una contrazione sullo spazio metrico completo $(\mathcal{H}(X), h)$ con fattore di contrazione s , e viene anche chiamata "operatore di Hutchinson". Essa ammette quindi un unico punto fisso $A \in \mathcal{H}(X)$. Esso è l'unico elemento di $\mathcal{H}(X)$ a rispettare:

$$A = W(A) = \bigcup_{n=1}^N w_n(A)$$

ed è dato da $A = \lim_{n \rightarrow \infty} W^n(B)$ per un qualunque $B \in \mathcal{H}(X)$. L'insieme A è detto attrattore dell'IFS.

Dimostrazione. Per dimostrare questo teorema è sufficiente applicare il teorema delle contrazioni alla contrazione W . \square

Vediamo ora qualche esempio classico. Le immagini sono state generate usando Mathematica.

Proposizione 2.13. Sia $N = 1$, e sia $\{X; w_1\}$ un IFS con fattore di contrazione s . Allora, l'attrattore dell'IFS è $A = \{x_f\}$, dove $x_f \in X$ è l'unico punto fisso di w_1 .

Dimostrazione. Mostriamo che $x, y \in A$ implica che $x = y$. Se $x, y \in A$, allora per ogni $k \in \mathbb{N}$ esistono $x_k, y_k \in A$ tali che $w_1^k(x_k) = x$ e $w_1^k(y_k) = y$, perchè $w_1(A) = A$. Di conseguenza, vale:

$$d(x, y) = d(w_1^k(x_k), w_1^k(y_k)) < s^k d(x_k, y_k) < s^k \cdot \text{diam}(A) \xrightarrow{k \rightarrow \infty} 0$$

CAPITOLO 2. ITERATED FUNCTION SYSTEMS IPERBOLICI ED
ATTRATTORI

Dove $diam(A) = \sup_{x,y \in A} d(x,y)$ è finito in quanto A è compatto. Quindi A ha un solo elemento, il quale dev'essere necessariamente x_f , per l'unicità del punto fisso.

□

Esempio 2. La Figura 2.1 mostra l'approssimazione del classico triangolo di Sierpinsky tramite l'iterazione di alcune trasformazioni affini su tre diversi insiemi di partenza, dopo 0,2,4,8 iterazioni. Le tre trasformazioni usate sono:

$$\begin{aligned} w_1 \begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix} &= \begin{pmatrix} \frac{1}{2} & 0 \\ 0 & \frac{1}{2} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix} \\ w_2 \begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix} &= \begin{pmatrix} \frac{1}{2} & 0 \\ 0 & \frac{1}{2} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} \frac{1}{2} \\ 0 \end{pmatrix} \\ w_3 \begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix} &= \begin{pmatrix} \frac{1}{2} & 0 \\ 0 & \frac{1}{2} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} \frac{1}{4} \\ \frac{\sqrt{3}}{4} \end{pmatrix} \end{aligned}$$

L'attrattore è l'insieme limite delle iterazioni, non possiamo quindi rappresentarlo perfettamente con un algoritmo finito: ci accontentiamo di un'immagine approssimativa. Dall'immagine si vede chiaramente come l'attrattore sia indipendente dall'insieme di partenza.

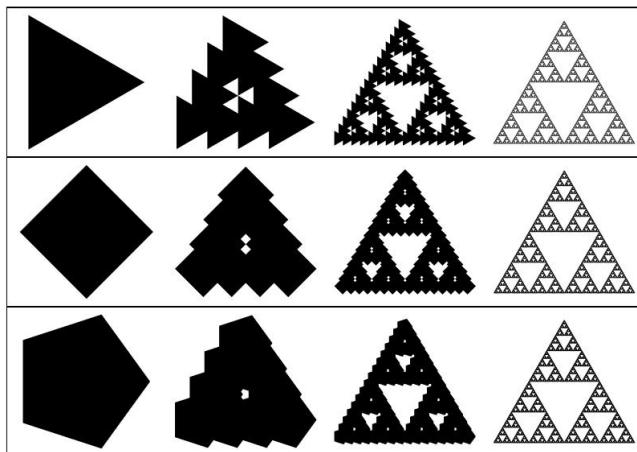


Figura 2.1: Iterazioni del triangolo di Sierpinsky

Esempio 3. Nella Figura 2.2, vediamo un'approssimazione della felce di Barnsley, uno dei frattali più famosi. Rappresentarla iterando tutte le trasformazioni su un insieme di partenza si rivela essere troppo dispendioso, per cui si utilizza un algoritmo chiamato "chaos game", che rappresenta un grande numero di punti pseudorandomici dell'attrattore iterando le contrazioni w_i in modo casuale su un solo punto. Per fare sì che l'attrattore sia ben rappresentato, ogni contrazione ha una probabilità di essere iterata proporzionale alla dimensione di $w_i(A)$.



Figura 2.2: Felce di Barnsley

Le trasformazioni usate sono:

$$\begin{aligned}w_1 \begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix} &= \begin{pmatrix} 0 & 0 \\ 0 & 0.16 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix} \\w_2 \begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix} &= \begin{pmatrix} 0.85 & 0.04 \\ -0.04 & 0.85 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} 0 \\ 1.6 \end{pmatrix} \\w_3 \begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix} &= \begin{pmatrix} 0.2 & -0.26 \\ 0.23 & 0.22 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} 0 \\ 1.6 \end{pmatrix} \\w_4 \begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix} &= \begin{pmatrix} -0.15 & 0.28 \\ 0.26 & 0.24 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} 0 \\ 0.44 \end{pmatrix}\end{aligned}$$

Esempio 4. Nella Figura 2.3 vediamo l'approssimazione di un altro frattale classico, chiamato albero di Pitagora: nella prima immagine l'insieme di partenza

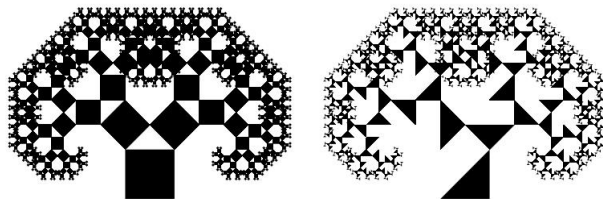


Figura 2.3: Albero di Pitagora

è un quadrato, nella seconda è un triangolo. Le trasformazioni usate sono:

$$\begin{aligned} w_1 \begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix} &= \begin{pmatrix} \frac{1}{2} & \frac{1}{2} \\ \frac{1}{2} & \frac{1}{2} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \end{pmatrix} \\ w_2 \begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix} &= \begin{pmatrix} \frac{1}{2} & \frac{1}{2} \\ -\frac{1}{2} & \frac{1}{2} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} \frac{1}{2} \\ \frac{3}{2} \end{pmatrix} \\ w_3 \begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix} &= \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix} \end{aligned}$$

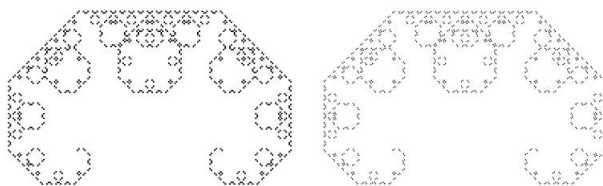


Figura 2.4: Albero di Pitagora

Notiamo che l'attrattore cambia usando diversi insiemi di partenza, questo perchè la trasformazione w_3 è l'identità su \mathbb{R}^2 , che non è una contrazione. L'attrattore vero e proprio è quello che si ottiene usando solo w_1 e w_2 , mostrato nella Figura 2.4, che infatti è indipendente dall'insieme di partenza.

2.3 Iterated function systems con condensazione

Come fare a generare frattali come quello dell'Esempio 4, includendo anche il "tronco"? Per farlo, estendiamo in modo naturale quanto visto introducendo gli IFS con condensazione. Essi permettono di costruire attrattori di tipo diverso, nei quali è resa più evidente l'azione iterata delle trasformazioni su un certo insieme, detto "di condensazione".

Definizione 2.14. Sia (X, d) uno spazio metrico e sia $C \in \mathcal{H}(X)$. La trasformazione w_0 definita da:

$$w_0: \begin{cases} \mathcal{H}(X) \rightarrow \mathcal{H}(X) \\ B \mapsto C \end{cases}$$

è detta condensazione. L'insieme C è detto insieme di condensazione associato a w_0 .

Osserviamo che w_0 è una contrazione su $\mathcal{H}(X)$ con fattore di contrazione $s_0 = 0$, e ha come punto fisso l'insieme di condensazione associato.

Definizione 2.15. Sia $\{X; w_n: n = 1, 2, \dots, N\}$ un IFS con fattore di contrazione $0 \leq s < 1$. Sia $w_0: \mathcal{H}(X) \rightarrow \mathcal{H}(X)$ una condensazione. Allora, $\{X; w_n: n = 0, 1, \dots, N\}$ è detto IFS (iperbolico) con condensazione, con fattore di contrazione s .

Teorema 2.16. Sia $\{X; w_n: n = 0, 1, \dots, N\}$ un IFS con condensazione con fattore di contrazione s . Allora l'operatore di Hutchinson, definito da:

$$W_0: \begin{cases} \mathcal{H}(X) \rightarrow \mathcal{H}(X) \\ B \mapsto \bigcup_{n=0}^N w_n(B) \end{cases}$$

è una contrazione sullo spazio metrico completo $(\mathcal{H}(X), h)$ con fattore di contrazione s . Di conseguenza ammette un unico punto fisso $A \in \mathcal{H}(X)$, chiamato attrattore dell'IFS con condensazione, che è l'unico elemento di $\mathcal{H}(X)$ a rispettare:

$$A = W_0(A) = \bigcup_{n=0}^N w_n(A),$$

ed è dato da $A = \lim_{n \rightarrow \infty} W_0^n(B)$ per un qualunque $B \in \mathcal{H}(X)$.

Dimostrazione. Analoga alla dimostrazione del Teorema 2.12. □

OSSERVAZIONE 2.1. Sia $\{X; w_n: n = 0, 1, \dots, N\}$ un IFS con condensazione, con insieme di condensazione C , sia (X, d) compatto e W_0 definita come nel teorema precedente. Definiamo $\{C_n = W_0^n(C)\}_{n \in \mathbb{N}}$. Allora il teorema precedente ci assicura che $\{C_n\}$ è una successione di Cauchy in $\mathcal{H}(X)$ che converge all'attrattore dell'IFS con condensazione.

Indipendentemente dal teorema, osserviamo che

$$C_n = C \cup W_0(C) \cup W_0^2(C) \cup \dots \cup W_0^n(C)$$

è una successione crescente di compatti (e quindi in particolare è di Cauchy, per il Teorema 1.17), da cui segue facilmente che l'insieme limite rispetta $W_0(A) = A$. Questo inoltre ci permette di caratterizzare A come:

$$A = \bigcup_{n \in \mathbb{N}} W_0^n(C)$$

OSSERVAZIONE 2.2. In generale, un IFS con condensazione non è un IFS "standard". Questo perchè abbiamo definito gli IFS a partire da contrazioni $w_n: X \rightarrow X$, mentre la condensazione w_0 in generale è definita solo su $\mathcal{H}(X)$. Sebbene infatti abbiamo visto che si può sempre passare da una contrazione su X a una su $\mathcal{H}(X)$, non è sempre vero il viceversa.

Ad esempio, consideriamo una contrazione $w: \mathcal{H}(X) \rightarrow \mathcal{H}(X)$ con la proprietà: per ogni $x \in X$, esiste $y \in X$ tale che $w(\{x\}) = \{y\}$. Allora, possiamo facilmente definire:

$$w: \begin{cases} X \rightarrow X \\ w(x) = y, \text{ dove } w(\{x\}) = \{y\} \end{cases}$$

e si vede facilmente che w così definita è una contrazione su X . Se questa condizione non è rispettata, non è detto che sia possibile trovare un modo canonico per definire una contrazione su X a partire da una su $\mathcal{H}(X)$, per esempio nel caso delle condensazioni. Una condensazione rispetta questa proprietà se e solo se il suo insieme di condensazione ha un unico elemento.

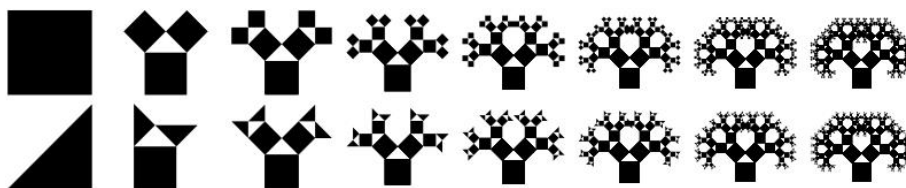


Figura 2.5: Albero di Pitagora con condensazione

Esempio 5. Riproviamo ad approssimare l'albero di Pitagora, ma invece di usare la trasformazione w_3 , usiamo la condensazione w_0 che ha come insieme di condensazione il quadrato centrale più grande. Vediamo nella Figura 2.5 che in questo caso l'IFS con condensazione è iperbolico, e quindi il limite è indipendente dall'insieme iniziale.

2.4 Il collage theorem

Il teorema che stiamo per dimostrare è uno strumento pratico per generare frattali di qualunque forma. Tuttavia, grazie ad esso saremo in grado di comprendere meglio la relazione tra l'idea intuitiva che abbiamo di frattale e i frattali come attrattori di IFS.

Collage theorem (Barnsley, 1985). *Sia (X, d) uno spazio metrico completo. Sia $B \in \mathcal{H}(X)$ fissato, e sia $\varepsilon \geq 0$. Consideriamo un IFS (o un IFS con condensazione) $\{X; (w_0), w_1, w_2, \dots, w_n\}$ con fattore di contrazione $0 \leq s < 1$, tale che*

$$h\left(B, \bigcup_{\substack{i=1 \\ (i=0)}}^n w_i(B)\right) \leq \varepsilon.$$

Allora vale:

$$h(B, A) \leq (1 - s)^{-1} \cdot \varepsilon,$$

dove A è l'attrattore dell'IFS. Equivalentemente, per ogni $B \in \mathcal{H}(X)$ vale:

$$h(B, A) \leq (1 - s)^{-1} h\left(B, \bigcup_{\substack{i=1 \\ (i=0)}}^n w_i(B)\right).$$

Dimostrazione.

La dimostrazione è l'applicazione del Lemma 2.5 allo spazio metrico completo $(\mathcal{H}(X), h)$ con la contrazione $W(B) = \bigcup_{i=1}^n w_i(B)$, (resp. $W_0(B) = \bigcup_{i=0}^n w_i(B)$). \square

Come abbiamo visto, l'attrattore di un IFS esiste ed è unico, a condizione che l'IFS sia iperbolico, ovvero che le trasformazioni iterate siano delle contrazioni. Questa condizione è piuttosto facile da verificare, ad esempio per trasformazioni affini su \mathbb{R}^k dotato della metrica Euclidea. L'attrattore di un IFS è un frattale nel senso che è invariante per la contrazione W di $\mathcal{H}(X)$, ovvero: è l'unione di un numero finito di proprie copie, trasformate tramite delle contrazioni di X , quindi intuitivamente "rimpicciolite".

Possiamo chiamare questa proprietà *autosimilarità*.

Si possono dare varie definizioni più o meno generali di autosimilarità, in questo caso possiamo definirla così:

Definizione 2.17. Sia (X, d) uno spazio metrico completo. Un insieme $B \in \mathcal{H}(X)$ è autosimile se esistono N contrazioni $\{w_1, \dots, w_N: B \rightarrow B\}$ tali che

$$B = \bigcup_{n=1}^N w_n(B)$$

Questa è una generalizzazione del caso affine su \mathbb{R}^k dotato della metrica Euclidea, nel quale consideriamo contrazioni che siano similitudini, ovvero composizioni di isometrie ed omotetie.

Conosciamo anche la relazione inversa: Dato un elemento di $\mathcal{H}(X)$, se questo è autosimile rispetto alle contrazioni di un certo IFS, allora dev'essere il suo attrattore, dato che esso è unico, per il Teorema 2.12. Grazie al collage theorem possiamo anche approssimare un qualunque compatto con degli attrattori, avendo la certezza che se creiamo un "collage" di contrazioni abbastanza preciso, anche il loro attrattore sarà vicino all'insieme di partenza, nella metrica di Hausdorff.

Notiamo che la definizione appena data non è sufficiente a descrivere l'autosimilarità degli IFS con condensazione, in quanto si ha a che fare con una contrazione su $\mathcal{H}(X)$, e non su X . Effettivamente, qualunque compatto $C \in \mathcal{H}(X)$ è l'attrattore di un IFS con condensazione, vale a dire banalmente $\{X; w_0, w_1\}$, dove $w_1(C) \subseteq C$ e w_0 è la condensazione che ha come insieme di condensazione associato C . Dare una definizione più generale di autosimilarità, che includa gli attrattori di IFS con condensazione interessanti, ma non includa, per esempio, i compatti di \mathbb{R}^n con interno non vuoto, non è banale.

Esempio 6. Nella Figura 2.6 vediamo (in ordine):

- La felce di Barnsley, dove i colori evidenziano le immagini dell'attrattore tramite le 4 trasformazioni w_i : In blu l'immagine di w_2 , in verde l'immagine di w_3 , in rosso l'immagine di w_4 ed in nero l'immagine di w_1 , ovvero lo stelo della felce. Notiamo che l'attrattore è effettivamente invariante per l'unione di esse.

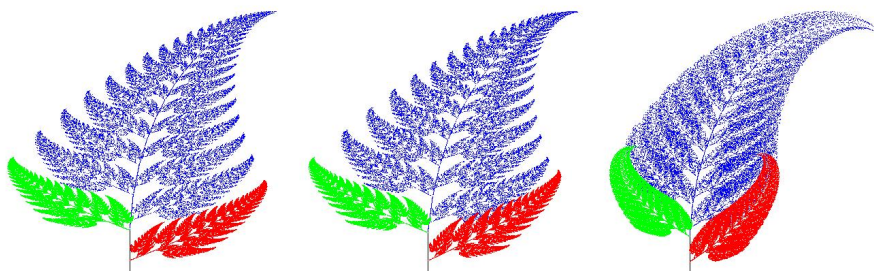


Figura 2.6: Applicazione del collage theorem alla felce di Barnsley

- Un collage della felce tramite delle trasformazioni \tilde{w}_i vicine alle w_i . Le differenze sono minime. Le trasformazioni usate sono:

$$\begin{aligned}\tilde{w}_1 \begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix} &= \begin{pmatrix} 0 & 0 \\ 0 & 0.16 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix} \\ \tilde{w}_2 \begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix} &= \begin{pmatrix} 0.90 & 0.06 \\ -0.07 & 0.89 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} 0 \\ 1.55 \end{pmatrix} \\ \tilde{w}_3 \begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix} &= \begin{pmatrix} 0.2 & -0.28 \\ 0.25 & 0.23 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} 0 \\ 1.55 \end{pmatrix} \\ \tilde{w}_4 \begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix} &= \begin{pmatrix} -0.15 & 0.30 \\ 0.29 & 0.28 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} 0 \\ 0.44 \end{pmatrix}\end{aligned}$$

- L'attrattore dell'IFS dato dalle contrazioni \tilde{w}_i . Non è molto lontano dalla felce originale, ma lo è ben di più rispetto al collage. Infatti, il fattore di contrazione s delle \tilde{w}_i è vicino a 1, dato che \tilde{w}_2 è quasi uguale ad una traslazione. Di conseguenza, la stima ricavata dal collage theorem non è molto buona, perchè $(1 - s)^{-1}$ è grande.

2.5 Dipendenza continua da parametri

Vediamo ora un risultato più teorico rispetto al collage theorem: la dipendenza continua da un parametro. Abbiamo già mostrato qualcosa a riguardo nella Sezione 2.1, ovvero il Lemma 2.6.

Vogliamo applicare il Lemma 2.6 all'operatore di Hutchinson $W_p(B)$. Per farlo però dobbiamo dimostrare che l'operatore è continuo rispetto a p per ogni B fissato: iniziamo spostando questa continuità da $w_p(x)$ a $w_p(B)$.

Lemma 2.18. *Siano (X, d) uno spazio metrico completo, e (P, d_P) un altro spazio metrico. Sia poi $w: P \times X \rightarrow X$ una famiglia di contrazioni su X con fattore di contrazione $0 \leq s < 1$. Infine, w sia tale che per ogni $x \in X$ fissato, $w(\cdot, x)$ sia continua su P .*

Allora, $w: P \times \mathcal{H}(X) \rightarrow \mathcal{H}(X)$ è una famiglia di contrazioni su $\mathcal{H}(X)$ con fattore di contrazione s , e per ogni $B \in \mathcal{H}(X)$ fissato, $w(\cdot, B)$ è continua su P .

Dimostrazione. Sappiamo già che $w(p, B)$ è una contrazione con fattore di contrazione s per ogni $p \in P$, ci resta da dimostrare la continuità nella variabile p .

Per assurdo, $w(\cdot, B)$ non sia continua, ovvero: esistono $B \in \mathcal{H}(X)$ e una successione $p_n \rightarrow p$ tali che $w_{p_n}(B)$ non converge a $w_p(B)$ in $\mathcal{H}(X)$. Questo in particolare implica che esistono $\varepsilon > 0$ e una sottosuccessione p_{n_k} tali che:

$$h(w(p_{n_k}, B), w(p, B)) > \varepsilon \quad \forall k \in \mathbb{N}.$$

Questo è equivalente a dire che, per ogni $k \in \mathbb{N}$, vale:

$$d(w(p_{n_k}, B), w(p, B)) > \varepsilon, \text{ oppure } d(w(p, B), w(p_{n_k}, B)) > \varepsilon.$$

Nel primo caso, vale

$$\max_{y \in w(p_{n_k}, B)} d(y, w(p, B)) > \varepsilon,$$

quindi esiste $x_{n_k} \in B$ tale che $d(w(p_{n_k}, x_{n_k}), w(p, x)) > \varepsilon$ per ogni $x \in B$, ed in particolare $d(w(p_{n_k}, x_{n_k}), w(p, x_{n_k})) > \varepsilon$.

Nel secondo caso, vale

$$\max_{y \in w(p, B)} d(y, w(p_{n_k}, B)) > \varepsilon,$$

quindi esiste $x_{n_k} \in B$ tale che $d(w(p, x_{n_k}), w(p_{n_k}, x)) > \varepsilon$ per ogni $x \in B$, ed in particolare $d(w(p, x_{n_k}), w(p_{n_k}, x_{n_k})) > \varepsilon$.

Quindi per ogni $k \in \mathbb{N}$, possiamo trovare $x_{n_k} \in B$ tale che

$$d(w(p_{n_k}, x_{n_k}), w(p, x_{n_k})) > \varepsilon.$$

Essendo B compatto, questa successione ammette una sottosuccessione convergente $x_{n_{k_j}} \rightarrow \bar{x}$, per un certo $\bar{x} \in B$.

Per semplicità di notazione, rinominiamo

$$\begin{aligned} x_{n_{k_j}} &\equiv x^j \\ p_{n_{k_j}} &\equiv p^j \end{aligned}$$

e ricordiamo che vale:

$$\begin{aligned} x^j &\rightarrow \bar{x} \\ p^j &\rightarrow p \\ d(w(p^j, x^j), w(p, x^j)) &> \varepsilon \quad \forall j \in \mathbb{N}. \end{aligned}$$

Utilizzando due volte la disuguaglianza triangolare, troviamo:

$$\begin{aligned} d(w(p^j, \bar{x}), w(p, \bar{x})) &\geq d(w(p, x^j), w(p, \bar{x})) - d(w(p, x^j), w(p^j, \bar{x})) \\ &\geq d(w(p^j, x^j), w(p, x^j)) - d(w(p, \bar{x}), w(p^j, x^j)) - d(w(p, x^j), w(p^j, \bar{x})) \\ &> \varepsilon - \underset{(1)}{d(w(p, \bar{x}), w(p^j, x^j))} - \underset{(2)}{d(w(p, x^j), w(p^j, \bar{x}))} \quad \forall j \in \mathbb{N} \\ &> \varepsilon - \frac{\varepsilon}{3} - \frac{\varepsilon}{3} = \frac{\varepsilon}{3} \quad \forall j \text{ maggiore o uguale di un certo } \bar{j} \in \mathbb{N} \end{aligned}$$

Questo perchè:

CAPITOLO 2. ITERATED FUNCTION SYSTEMS IPERBOLICI ED
ATTRATTORI

1. $w(p^j, x^j) \xrightarrow{p^j \rightarrow p} w(p, x^j)$ per continuità di $w(\cdot, x^j)$, e $w(p, x^j) \rightarrow w(p, \bar{x})$ per continuità di $w(p, \cdot)$. Di conseguenza, esistono $j_1, j_2 \in \mathbb{N}$ tali che:

$$\begin{aligned} d(w(p, \bar{x}), w(p^j, x^j)) &\leq d(w(p, \bar{x}), w(p, x^j)) + d(w(p, x^j), w(p^j, x^j)) \\ &< \frac{\varepsilon}{6} + \frac{\varepsilon}{6} = \frac{\varepsilon}{3} \quad \forall j \geq j_1, j_2. \end{aligned}$$

2. $w(p^j, \bar{x}) \rightarrow w(p, \bar{x})$ per continuità di $w(\cdot, \bar{x})$. Di conseguenza, esiste $j_3 \in \mathbb{N}$ tale che:

$$\begin{aligned} d(w(p, x^j), w(p^j, \bar{x})) &\leq d(w(p, x^j), w(p, \bar{x})) + d(w(p, \bar{x}), w(p^j, \bar{x})) \\ &< \frac{\varepsilon}{6} + \frac{\varepsilon}{6} = \frac{\varepsilon}{3} \quad \forall j \geq j_2, j_3. \end{aligned}$$

In conclusione, abbiamo mostrato che, per ogni $j \geq \bar{j} = \max\{j_1, j_2, j_3\}$, vale:

$$d(w(p^j, \bar{x}), w(p, \bar{x})) > \frac{\varepsilon}{3}.$$

Questo è assurdo, perchè $w(p^j, \bar{x}) \rightarrow w(p, \bar{x})$.

□

Teorema 2.19. *Siano (X, d) uno spazio metrico completo, e (P, d_P) un altro spazio metrico. Sia $\{X; w_{1,p}, \dots, w_{N,p}\}$ una famiglia di IFS parametrizzata da $p \in (P, d_P)$, con fattore di contrazione s . Infine, per ogni $n \in \{1, \dots, N\}$, w_n sia tale che per ogni $x \in X$ fissato, $w_n(\cdot, x) = w_n(\cdot, x)$ è continua su P . Allora, l'attrattore $A(p) \in \mathcal{H}(X)$ dipende in modo continuo dal parametro $p \in P$ rispetto alla metrica di Hausdorff h .*

Dimostrazione. Grazie al lemma precedente, sappiamo che le contrazioni $w_{n,p}(B)$ sono continue rispetto a p per ogni $B \in \mathcal{H}(X)$. Ci basta dimostrare che anche l'operatore di Hutchinson $W_p(B)$ lo è, e poi applicare ad esso il Lemma 2.6 per ottenere il risultato voluto.

Dimostriamolo per $N = 2$: fissiamo $B \in \mathcal{H}(X)$ e $p \in P$. Allora,

$$\begin{aligned} h(W_p(B), W_q(B)) &= h(w_{p,1}(B) \cup w_{p,2}(B), w_{q,1}(B) \cup w_{q,2}(B)) \\ &\leq h(w_{p,1}(B), w_{q,1}(B)) \vee h(w_{p,2}(B), w_{q,2}(B)). \end{aligned}$$

utilizzando il Lemma 1.10. Entrambi gli argomenti del massimo tendono a 0 per $q \rightarrow p$, di conseguenza vale lo stesso per il loro massimo.

Il risultato generale segue poi per induzione su N , notando che:

$$W_p(B) = w_{p,1}(B) \cup w_p^*(B), \text{ dove } w_p^*(B) = \bigcup_{n=2}^N w_{p,n}(B).$$

□

OSSERVAZIONE 2.3. Questo ci garantisce la continuità dell'attrattore rispetto al parametro p , ma questa in generale non è uniforme, ovvero non sempre possiamo trovare δ tale che $d_P(p, q) < \delta$ implica $H(A(p), A(q)) < \varepsilon$ per ogni $p, q \in P$.

Esempio 7. Consideriamo lo spazio metrico completo dato da (\mathbb{R}, d) dove d è la metrica Euclidea, e la famiglia di IFS data da $\{\mathbb{R}; w_p\}$ dove $p \in P = \mathbb{R}$, e dove per ogni $p \in \mathbb{R}$ definiamo:

$$w_p: \begin{cases} \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R} \\ x \mapsto \frac{1}{2}x + p^2 \end{cases}$$

Si vede facilmente che, fissato p , w_p è una contrazione con fattore di contrazione $s = \frac{1}{2}$, e l'attrattore dell'IFS è il singoletto $A(p) = \{2p^2\}$. Inoltre, fissato $x \in \mathbb{R}$, la funzione:

$$w(\cdot, x): \begin{cases} P \rightarrow \mathbb{R} \\ p \mapsto \frac{1}{2}x + p^2 \end{cases}$$

è continua rispetto a p . È facile verificare che, come affermato dal teorema precedente, l'attrattore $A(p)$ varia con continuità rispetto alla metrica di Hausdorff. Tuttavia, fissato $\varepsilon > 0$, è impossibile trovare $\delta > 0$ tale che $|p - q| < \delta$ implica $h(A(p), A(q)) < \varepsilon$ per ogni $p, q \in P$, ovvero la continuità non è uniforme su $P = \mathbb{R}$.

Infatti, se per assurdo questa proprietà fosse verificata, si avrebbe:

$$h(A(p), A(q)) = |p^2 - q^2| = |p - q| \cdot |p + q| < \delta \cdot |p + q| \xrightarrow{p \rightarrow +\infty} +\infty$$

che non può essere minore di ε per ogni $p, q \in P$.

Per ottenere la continuità uniforme dobbiamo quindi imporre ulteriori condizioni su $w_{n,p}$. La nostra scelta segue [2].

Teorema 2.20. *Sia (X, d) uno spazio metrico completo, e sia $\{X; w_{1,p}, \dots, w_{N,p}\}$ una famiglia di IFS parametrizzata da $p \in (P, d_P)$, con fattore di contrazione s . Supponiamo che per ogni n le funzioni $w_n(p, x) = w_{n,p}(x)$ siano Lipschitziane rispetto a p in modo uniforme rispetto alla variabile x , ovvero esiste una costante $k > 0$ per cui vale:*

$$d(w_{n,p}(x), w_{n,q}(x)) \leq k \cdot d_P(p, q) \quad \forall x \in X, p, q \in P, n \in \{1, \dots, N\}.$$

Allora, l'attrattore $A(p) \in \mathcal{H}(X)$ dipende in modo uniformemente continuo dal parametro $p \in P$, rispetto alla metrica di Hausdorff h . Inoltre, vale:

$$h(A(p), A(q)) \leq (1 - s)^{-1} \cdot k \cdot d_P(p, q) \quad \forall p, q \in P.$$

Dimostrazione. Vogliamo mostrare che per ogni $B \in \mathcal{H}(X)$, $n \in \{1, \dots, N\}$ vale:

$$h(w_{n,p}(B), w_{n,q}(B)) \leq k \cdot d_P(p, q).$$

Fissiamo $B \in \mathcal{H}(X)$, $n \in \{1, \dots, N\}$, e chiamiamo per comodità $w_{n,p} = w_p$. Sappiamo che se $x \in w_p(B)$, allora esiste $y \in B$ tale che $w_p(y) = x$. Allora, vale:

$$d(x, w_q(B)) = \min_{z \in w_q(B)} d(x, z) \leq d(x, w_q(y)) = d(w_p(y), w_q(y)) \leq k \cdot d_P(p, q).$$

CAPITOLO 2. ITERATED FUNCTION SYSTEMS IPERBOLICI ED
ATTRATTORI

Questo vale per ogni $x \in w_p(B)$, di conseguenza otteniamo che

$$d(w_p(B), w_q(B)) = \max_{x \in w_p(B)} d(x, w_q(B)) \leq k \cdot d_P(p, q).$$

Con un argomento analogo otteniamo la stessa disuguaglianza anche per $d(w_q(B), w_p(B))$, ottenendo infine la disuguaglianza voluta. A questo punto, è facile vedere che, definita consuetamente $W_p: \mathcal{H}(X) \rightarrow \mathcal{H}(X)$, vale:

$$h(W_p(B), W_q(B)) \leq k \cdot d_P(p, q).$$

Come al solito, lo dimostro per $N = 2$ ed il risultato segue poi per induzione.

$$\begin{aligned} h(W_p(B), W_q(B)) &= h(w_{1,p}(B) \cup w_{2,p}(B), w_{1,q}(B) \cup w_{2,q}(B)) \\ &\leq h(w_{1,p}(B), w_{1,q}(B)) \vee h(w_{2,p}(B), w_{2,q}(B)) \leq k \cdot d_P(p, q). \end{aligned}$$

In particolare, $W_p(B)$ è continua rispetto a p per ogni $B \in \mathcal{H}(X)$, quindi possiamo applicare il Lemma 2.6, che ci garantisce la dipendenza continua dell'attrattore da p . Non solo: possiamo applicare il corollario di tale lemma, il quale ci assicura che:

$$h(A(p), A(q)) \leq (1 - s)^{-1} \cdot k \cdot d_P(p, q) \quad \forall p, q \in P.$$

da cui deriviamo la continuità uniforme di $A(p)$ rispetto a p . □

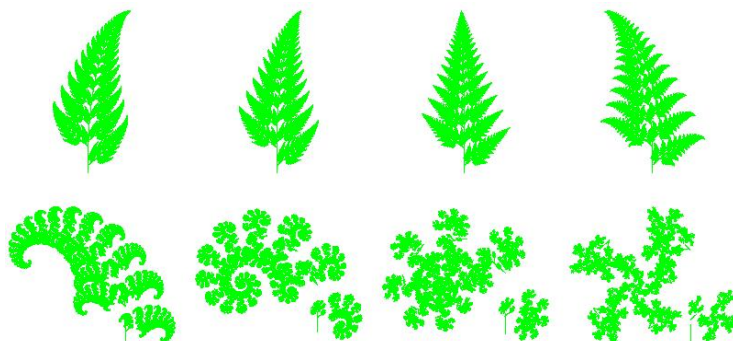


Figura 2.7: Felce di Barnsley modificata con continuità

Esempio 8. Nella Figura 2.7, abbiamo variato le trasformazioni che generano la felce di Barnsley applicando alla trasformazione w_2 , che genera la parte superiore della felce, una rotazione di (rispettivamente):

$$\vartheta = 0, 0.02, 0.05, 0.1, 0.3, 0.6, 0.9, 2.5 \text{ radianti.}$$

Notiamo che l'attrattore varia con continuità, fino a diventare irriconoscibile.

Capitolo 3

Funzioni frattali e dimensione frattale

In questo capitolo consideriamo IFS i cui attrattori siano il grafico di funzioni frattali. Queste variano da funzioni molto regolari a funzioni estremamente irregolari: la dimensione frattale è un modo per descrivere questa caoticità.

3.1 La dimensione frattale

In questa sezione definiamo la dimensione frattale, ovvero un modo per assegnare un valore numerico al modo in cui un insieme occupa lo spazio. Ad esempio, siamo abituati a pensare a sottoinsiemi del piano soprattutto come punti (zero-dimensionali), curve (monodimensionali) ed immagini (bidimensionali), ma come vedremo un sottoinsieme di \mathbb{R}^2 può avere dimensione frattale qualunque in $[0, 2]$, non soltanto 0,1 o 2.

Definizione 3.1. Consideriamo uno spazio metrico completo (X, d) , sia $A \in \mathcal{H}(X)$ e $\varepsilon > 0$. Definiamo:

$$\mathcal{N}(A, \varepsilon) := \min\{n \in \mathbb{N} \text{ tale che } A \subset \bigcup_{i=1}^n \overline{B_\varepsilon(x_i)} \text{ per qualche } \{x_1, \dots, x_n\} \subset X\}.$$

OSSERVAZIONE 3.1. L'esistenza del minimo è assicurata dalla compattezza (ed in particolare, dalla totale limitatezza) di A : per ogni $\varepsilon > 0$ esiste $\{x_1, \dots, x_n\} \subset X$ tale che $A \subset \bigcup_{i=1}^n B_\varepsilon(x_i)$, e quindi esiste anche un $n \in \mathbb{N}$ tale che $A \subset \bigcup_{i=1}^n \overline{B_\varepsilon(x_i)}$. Essendo tutti i possibili n dei numeri naturali, ammettono un minimo.

L'idea intuitiva di dimensione frattale è di trovare un valore $D \in \mathbb{R}$ tale che

$$\mathcal{N}(A, \varepsilon) \approx \varepsilon^{-D} \text{ per qualche significato di } \approx .$$

Definizione 3.2. Siano (X, d) uno spazio metrico completo, e $A \in \mathcal{H}(X)$. Se esiste finito in \mathbb{R} il valore

$$D := \lim_{\varepsilon \rightarrow 0^+} \frac{\ln(\mathcal{N}(A, \varepsilon))}{\ln(1/\varepsilon)},$$

allora chiamiamo D la *dimensione frattale* di A .

OSSERVAZIONE 3.2. Troviamo:

$$\lim_{\varepsilon \rightarrow 0^+} \frac{\ln(\mathcal{N}(A, \varepsilon))}{\ln(\varepsilon^{-D})} = 1,$$

il che ci permette di chiarire il significato dell'idea intuitiva espressa in precedenza.

NOTAZIONE. Consideriamo due funzioni

$$\begin{aligned} a: (0, +\infty) &\rightarrow (0, +\infty) \\ b: (0, +\infty) &\rightarrow (0, +\infty) \end{aligned}$$

Scriviamo $a(\varepsilon) \approx b(\varepsilon)$ se:

$$\lim_{\varepsilon \rightarrow 0^+} \frac{\ln(a(\varepsilon))}{\ln(b(\varepsilon))} = 1$$

Lemma 3.3. Consideriamo due funzioni $a(\varepsilon), b(\varepsilon)$ come sopra, tali che:

$$\begin{aligned} a(\varepsilon) &\xrightarrow{\varepsilon \rightarrow 0^+} \infty \\ b(\varepsilon) &\xrightarrow{\varepsilon \rightarrow 0^+} \infty \end{aligned}$$

Allora, $a(\varepsilon) \approx b(\varepsilon)$ se e solo se per ogni $\delta > 0$ vale:

$$\begin{aligned} \limsup_{\varepsilon \rightarrow 0^+} \frac{a(\varepsilon)}{b(\varepsilon)^{1+\delta}} &\leq 1, \\ \liminf_{\varepsilon \rightarrow 0^+} \frac{a(\varepsilon)}{b(\varepsilon)^{1-\delta}} &\geq 1. \end{aligned}$$

Dimostrazione. (\implies) Vale:

$$\forall \delta > 0, \exists \bar{\varepsilon} \text{ tale che } \varepsilon < \bar{\varepsilon} \implies (1 - \delta) \leq \frac{\ln(a(\varepsilon))}{\ln(b(\varepsilon))} \leq 1 + \delta$$

Otteniamo quindi:

$$\begin{aligned} \ln(b(\varepsilon)^{1-\delta}) &\leq \ln(a(\varepsilon)) \leq \ln(b(\varepsilon)^{1+\delta}) && \forall \varepsilon < \bar{\varepsilon} \\ b(\varepsilon)^{1-\delta} &\leq a(\varepsilon) \leq b(\varepsilon)^{1+\delta} && \forall \varepsilon < \bar{\varepsilon} \\ \frac{a(\varepsilon)}{b(\varepsilon)^{1+\delta}} &\leq 1 \leq \frac{a(\varepsilon)}{b(\varepsilon)^{1-\delta}} && \forall \varepsilon < \bar{\varepsilon} \end{aligned}$$

da cui segue il risultato voluto.

(\impliedby) Dall'ipotesi, trovo:

Per ogni $\delta, \gamma > 0$, esiste $\bar{\varepsilon} > 0$ tale che, se $\varepsilon < \bar{\varepsilon}$, vale:

$$\frac{a(\varepsilon)}{b(\varepsilon)^{1+\delta}} \leq 1 + \gamma, \quad \frac{a(\varepsilon)}{b(\varepsilon)^{1-\delta}} \geq 1 - \gamma$$

Da cui troviamo:

$$\begin{aligned} (1 - \gamma)b(\varepsilon)^{1-\delta} &\leq a(\varepsilon) \leq (1 + \gamma)b(\varepsilon)^{1+\delta} && \forall \varepsilon < \bar{\varepsilon} \\ \ln(1 - \gamma) + (1 - \delta) \ln(b(\varepsilon)) &\leq \ln(a(\varepsilon)) \leq \ln(1 + \gamma) + (1 + \delta) \ln(b(\varepsilon)) \\ \frac{\ln(1 - \gamma)}{\ln(b(\varepsilon))} + (1 - \delta) &\leq \frac{\ln(a(\varepsilon))}{\ln(b(\varepsilon))} \leq (1 + \delta) + \frac{\ln(1 + \gamma)}{\ln(b(\varepsilon))} && \forall \varepsilon < \bar{\varepsilon} \end{aligned}$$

Essendo che gli estremi della disequazione convergono a 1, possiamo concludere la dimostrazione grazie al teorema del confronto, per $\gamma, \delta, \varepsilon \rightarrow 0^+$.

□

OSSERVAZIONE 3.3. Nelle ipotesi del Lemma 3.3, vale:

$$\lim_{\varepsilon \rightarrow 0^+} \frac{a(\varepsilon)}{b(\varepsilon)} = 1 \implies a(\varepsilon) \approx b(\varepsilon),$$

ma non vale l'implicazione inversa.

Esempio 9. Definiamo:

$$\begin{aligned} a(\varepsilon) &= e^{1/\varepsilon} \cdot \frac{1}{\varepsilon} \\ b(\varepsilon) &= e^{1/\varepsilon} \end{aligned}$$

Allora, $a(\varepsilon) \approx b(\varepsilon)$, ma

$$\lim_{\varepsilon \rightarrow 0^+} \frac{a(\varepsilon)}{b(\varepsilon)} = \lim_{\varepsilon \rightarrow 0^+} \frac{1}{\varepsilon} = +\infty.$$

Vediamo ora alcuni teoremi utili per determinare in modo pratico la dimensione frattale di un insieme.

Teorema 3.4. *Siano (X, d) uno spazio metrico completo, e $A \in \mathcal{H}(X)$. Definiamo, per ogni $n \in \mathbb{N}$, $\varepsilon_n := Cr^n$ per qualche $0 < r < 1$ e $C > 0$. Se:*

$$D = \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{\ln(\mathcal{N}(A, \varepsilon_n))}{\ln(1/\varepsilon_n)},$$

allora A ha dimensione frattale D .

Dimostrazione. Sia $\varepsilon > 0$, possiamo assumere $\varepsilon < r$, e $\varepsilon < \varepsilon_1$. Possiamo assumere anche che $\mathcal{N}(A, \varepsilon) \xrightarrow{\varepsilon \rightarrow 0} \infty$, dato che in caso contrario il teorema è banalmente vero, con $D = 0$.

Sia ora $E = \{\varepsilon_n : n \in \mathbb{N}\}$. Definiamo

$$f(\varepsilon) = \max\{\varepsilon_n \in E \text{ tale che } \varepsilon_n \leq \varepsilon\}.$$

Allora, $f(\varepsilon)/r \geq \varepsilon$. In particolare,

$$f(\varepsilon) \leq \varepsilon \leq f(\varepsilon)/r, \text{ e } \mathcal{N}(A, f(\varepsilon)) \geq \mathcal{N}(A, \varepsilon) \geq \mathcal{N}(A, f(\varepsilon)/r).$$

Allora, essendo il logaritmo una funzione crescente, vale:

$$\frac{\ln(\mathcal{N}(A, f(\varepsilon)/r))}{\ln(1/f(\varepsilon))} \leq \frac{\ln(\mathcal{N}(A, \varepsilon))}{\ln(1/\varepsilon)} \leq \frac{\ln(\mathcal{N}(A, f(\varepsilon)))}{\ln(r/f(\varepsilon))} \quad (3.1)$$

Consideriamo il termine di sinistra dell'equazione (3.1):

$$\begin{aligned} \lim_{\varepsilon \rightarrow 0^+} \frac{\ln(\mathcal{N}(A, f(\varepsilon)/r))}{\ln(1/f(\varepsilon))} &= \lim_{\bar{n} \rightarrow \infty} \frac{\ln(\mathcal{N}(A, \varepsilon_{\bar{n}-1}))}{\ln(1/\varepsilon_{\bar{n}})} \\ &= \lim_{\bar{n} \rightarrow \infty} \frac{\ln(\mathcal{N}(A, \varepsilon_{\bar{n}-1}))}{\ln(1/r) + \ln(1/\varepsilon_{\bar{n}-1})} = \lim_{\bar{n} \rightarrow \infty} \frac{\ln(\mathcal{N}(A, \varepsilon_{\bar{n}}))}{\ln(1/\varepsilon_{\bar{n}})} = D. \end{aligned}$$

Dove, per ogni ε fissato, $f(\varepsilon) = \varepsilon_{\bar{n}}$ per qualche $\bar{n} \in \mathbb{N}$. In particolare, $\bar{n} \xrightarrow{\varepsilon \rightarrow 0} \infty$.

Consideriamo ora il termine di destra dell'equazione (3.1):

$$\begin{aligned} \lim_{\varepsilon \rightarrow 0^+} \frac{\ln(\mathcal{N}(A, f(\varepsilon)))}{\ln(r/f(\varepsilon))} &= \lim_{\bar{n} \rightarrow \infty} \frac{\ln(\mathcal{N}(A, \varepsilon_{\bar{n}}))}{\ln(r/\varepsilon_{\bar{n}})} \\ &= \lim_{\bar{n} \rightarrow \infty} \frac{\ln(\mathcal{N}(A, \varepsilon_{\bar{n}}))}{\ln(r) + \ln(1/\varepsilon_{\bar{n}})} = \lim_{\bar{n} \rightarrow \infty} \frac{\ln(\mathcal{N}(A, \varepsilon_{\bar{n}}))}{\ln(1/\varepsilon_{\bar{n}})} = D. \end{aligned}$$

Di conseguenza, per il teorema del confronto, si ha che

$$\lim_{\varepsilon \rightarrow 0^+} \frac{\ln(\mathcal{N}(A, \varepsilon))}{\ln(1/\varepsilon)} = D.$$

Ovvero, A ha dimensione frattale D . □

Esempio 10. Sia A il triangolo di Sierpinsky, definito come attrattore di un IFS nell'Esempio 2. Definiamo $e_n = 2^{-n}$, e notiamo che vale:

$$\mathcal{N}(A, \varepsilon_n) = 3\mathcal{N}(A, \varepsilon_{n-1}) = 3^n \mathcal{N}(A, 1) \quad \forall n \in \mathbb{N} \text{ sufficientemente piccolo.}$$

Questo perchè, se $\mathcal{N}(A, \varepsilon_n)$ è il numero minimo di palle di raggio ε necessario per ricoprire A , allora $\mathcal{N}(A, \varepsilon_n)$ è il numero minimo di palle di raggio $\varepsilon/2$ necessario a ricoprire $w_i(A)$ per ogni $i = 1, 2, 3$. Essendo che le immagini delle trasformazioni w_i , ovvero i tre triangoli principali, si intersecano solo in 3 punti, per ε abbastanza piccolo ciò significa che $3\mathcal{N}(A, \varepsilon_n)$ palle di raggio $\varepsilon/2$ ricoprono A , e questo numero è il minimo possibile, da cui l'uguaglianza voluta. Di conseguenza, vale:

$$D = \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{n \ln(3) + \ln(\mathcal{N}(A, 1))}{n \ln(2)} = \frac{\ln(3)}{\ln(2)}.$$

Questo metodo si può applicare anche ad altri attrattori di IFS semplici, ma per insiemi più complessi necessitiamo di uno strumento più comodo, che ci permetta anche di approssimare la dimensione quando necessario: esso è il metodo box counting.

Teorema 3.5. Box counting theorem. Consideriamo $A \in \mathcal{H}(\mathbb{R}^m)$, dove \mathbb{R}^m è dotato della metrica Euclidea, e ricopriamo \mathbb{R}^m di ipercubi chiusi di lato $\frac{1}{2^n}$, in modo che i vertici degli ipercubi siano dati da $\{\frac{z}{2^n} : z \in \mathbb{Z}^m\}$, formando una “griglia”. Definiamo $\mathcal{N}_n(A)$ come il numero di ipercubi di lato $\frac{1}{2^n}$ che intersecano A . Se vale:

$$D = \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{\ln(\mathcal{N}_n(A))}{\ln(2^n)},$$

allora A ha dimensione frattale D .

Dimostrazione. Osserviamo che, fissato $m \in \mathbb{N}$, vale:

$$2^{-m} \mathcal{N}_{n-1}(A) \leq \mathcal{N}(A, \frac{1}{2^n}) \leq \mathcal{N}_{k(n)}(A) \quad \forall n \in \mathbb{N},$$

dove $k(n)$ è il più piccolo intero k che soddisfa $k \geq n - 1 + \frac{1}{2} \log_2 m$. La prima disuguaglianza è valida perchè una palla di raggio $\frac{1}{2^n}$ può intersecare al massimo 2^m ipercubi di lato $\frac{1}{2^{n-1}}$ disposti su una griglia, nel caso in cui sia posizionata sullo “spigolo” tra di essi. Di conseguenza,

$$\mathcal{N}_{n-1}(A) \leq 2^m \mathcal{N}(A, \frac{1}{2^n}).$$

La seconda segue dal fatto che un ipercubo di lato s può essere contenuto in una palla di raggio r a patto che $r^2 \geq (\frac{s}{2})^2 + (\frac{s}{2})^2 + \dots + (\frac{s}{2})^2 = m(\frac{s}{2})^2$, che è il quadrato di metà della diagonale più lunga dell’ipercubo. Sostituendo $s = \frac{1}{2^k}$ e $r = \frac{1}{2^n}$, troviamo:

$$\begin{aligned} \frac{1}{2^{2n}} &\geq m \left(\frac{1}{4 \cdot 2^{2k}} \right), \\ 2^{2k} &\geq m \cdot 2^{2(n-1)}, \\ 2k &\geq \log_2 m + 2(n-1), \end{aligned}$$

Da cui la definizione di $k(n)$ e la disuguaglianza voluta. Ora:

$$\lim_{n \rightarrow \infty} \frac{\ln(\mathcal{N}_{k(n)}(A))}{\ln(2^n)} = \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{\ln(\mathcal{N}_{k(n)}(A))}{\ln(2^{k(n)})} \frac{\ln(2^{k(n)})}{\ln(2^n)} = D.$$

perchè $\frac{k(n)}{n} \rightarrow 1$. Inoltre vale:

$$\lim_{n \rightarrow \infty} \frac{\ln(2^{-m} \mathcal{N}_{n-1}(A))}{\ln(2^n)} = \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{\ln(\mathcal{N}_{n-1}(A))}{\ln(2^{n-1})} + \frac{\ln(2^{-m})}{\ln(2^{n-1})} = D + 0 = D.$$

Di conseguenza,

$$D = \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{\ln(2^{-m} \mathcal{N}_{n-1}(A))}{\ln(2^n)} \leq \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{\ln(\mathcal{N}(A, \frac{1}{2^n}))}{\ln(2^n)} \leq \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{\ln(\mathcal{N}_{k(n)}(A))}{\ln(2^n)} = D.$$

Possiamo quindi applicare il teorema del confronto. La dimostrazione è completata applicando il Teorema 3.4, con $r = \frac{1}{2}$. \square

OSSERVAZIONE 3.4. Nel box counting theorem potremmo equivalentemente utilizzare ipercubi di raggio Cr^n , dove $C > 0$ e $0 < r < 1$.

OSSERVAZIONE 3.5. Si noti che abbiamo definito la dimensione frattale come un limite, senza indagare sull'esistenza di tale limite. Proviamo a generalizzare la definizione in modo da definirla almeno per tutti gli elementi di $\mathcal{H}(\mathbb{R}^m)$.

Definizione 3.6. Sia (X, d) uno spazio metrico completo, e sia $A \in \mathcal{H}(X)$. Se esiste finito in \mathbb{R} il limite

$$D(A) := \lim_{\varepsilon \rightarrow 0^+} \sup \left\{ \frac{\ln \mathcal{N}(A, \bar{\varepsilon})}{\ln(1/\bar{\varepsilon})} : \bar{\varepsilon} \in (0, \varepsilon) \right\},$$

allora $D(A)$ è detta dimensione frattale di A .

OSSERVAZIONE 3.6. Questa definizione non è altro che il limite superiore:

$$D(A) := \limsup_{\varepsilon \rightarrow 0^+} \frac{\ln \mathcal{N}(A, \varepsilon)}{\ln(1/\varepsilon)}.$$

In particolare, questa definizione generalizza la definizione di dimensione frattale data precedentemente: se A ha dimensione frattale D nel senso della Definizione 3.2, allora ha dimensione frattale D anche nel senso di questa definizione.

Teorema 3.7. Consideriamo lo spazio metrico \mathbb{R}^m , dotato della metrica Euclidea. Allora, ogni compatto $A \in \mathcal{H}(\mathbb{R}^m)$ ammette dimensione frattale $D(A)$. Inoltre, se $A \subseteq B \in \mathcal{H}(\mathbb{R}^m)$, allora $D(A) \leq D(B)$. In particolare, per ogni $A \in \mathcal{H}(\mathbb{R}^m)$ vale:

$$0 \leq D(A) \leq m.$$

Dimostrazione. Essendo che A è limitato, esiste un ipercubo chiuso C con i vertici in \mathbb{Z}^m che contiene A . Si verifica facilmente grazie al box counting theorem che $D(C) = m$. Inoltre, $\mathcal{N}(A, \varepsilon) \leq \mathcal{N}(C, \varepsilon)$ per ogni $\varepsilon > 0$. Di conseguenza, per ogni $0 < \varepsilon < 1$, si ha:

$$0 \leq \frac{\ln(\mathcal{N}(A, \varepsilon))}{\ln(1/\varepsilon)} \leq \frac{\ln(\mathcal{N}(C, \varepsilon))}{\ln(1/\varepsilon)}.$$

Da cui segue che:

$$0 \leq \limsup_{\varepsilon \rightarrow 0^+} \frac{\ln(\mathcal{N}(A, \varepsilon))}{\ln(1/\varepsilon)} \leq \limsup_{\varepsilon \rightarrow 0^+} \frac{\ln(\mathcal{N}(C, \varepsilon))}{\ln(1/\varepsilon)} = m.$$

Di conseguenza, il primo limite superiore esiste finito ed è limitato da m . Ripetendo il procedimento con B al posto di C si ottiene l'altra disuguaglianza. \square

Teorema 3.8. Consideriamo lo spazio metrico \mathbb{R}^m , dotato della metrica euclidea, e siano $A, B \in \mathcal{H}(\mathbb{R}^m)$. Si assuma che A ammetta dimensione frattale $D(A)$, nel senso che esiste finito il limite:

$$D(A) = \lim_{\varepsilon \rightarrow 0^+} \frac{\ln(\mathcal{N}(A, \varepsilon))}{\ln(1/\varepsilon)}.$$

Se $D(B) < D(A)$, allora

$$D(A \cup B) = D(A).$$

Dimostrazione. Dal teorema precedente segue che $D(A \cup B) \geq D(A)$. Mostriamo l'altra disuguaglianza. Iniziamo osservando che, per ogni $\varepsilon > 0$, vale:

$$\mathcal{N}(A \cup B, \varepsilon) \leq \mathcal{N}(A, \varepsilon) + \mathcal{N}(B, \varepsilon).$$

Segue che

$$\begin{aligned} D(A \cup B) &= \limsup_{\varepsilon \rightarrow 0^+} \frac{\ln(\mathcal{N}(A \cup B, \varepsilon))}{\ln(1/\varepsilon)} \leq \limsup_{\varepsilon \rightarrow 0^+} \frac{\ln(\mathcal{N}(A, \varepsilon) + \mathcal{N}(B, \varepsilon))}{\ln(1/\varepsilon)} \\ &= \limsup_{\varepsilon \rightarrow 0^+} \frac{\ln(\mathcal{N}(A, \varepsilon))}{\ln(1/\varepsilon)} + \limsup_{\varepsilon \rightarrow 0^+} \frac{\ln((1 + \mathcal{N}(B, \varepsilon))/\mathcal{N}(A, \varepsilon))}{\ln(1/\varepsilon)}. \end{aligned}$$

Per concludere la dimostrazione ci basta mostrare che $\mathcal{N}(B, \varepsilon)/\mathcal{N}(A, \varepsilon)$ è minore di 1 per ε sufficientemente piccolo. Questo implicherebbe che il secondo limite è uguale a 0, mentre sappiamo che il primo converge a $D(A)$.

Essendo che

$$\sup \left\{ \frac{\ln \mathcal{N}(B, \bar{\varepsilon})}{\ln(1/\bar{\varepsilon})} : \bar{\varepsilon} \in (0, \varepsilon) \right\}$$

è una funzione decrescente nella variabile positiva ε , allora

$$\frac{\ln \mathcal{N}(B, \varepsilon)}{\ln(1/\varepsilon)} < D(A)$$

per ε sufficientemente piccolo. Essendo che il limite scritto nell'enunciato del teorema esiste finito, segue che:

$$\frac{\ln \mathcal{N}(B, \varepsilon)}{\ln(1/\varepsilon)} < \frac{\ln \mathcal{N}(A, \varepsilon)}{\ln(1/\varepsilon)}$$

per ε sufficientemente piccolo. Di conseguenza, possiamo affermare che $\frac{\mathcal{N}(B, \varepsilon)}{\mathcal{N}(A, \varepsilon)} < 1$ per ε sufficientemente piccolo, concludendo la dimostrazione. \square

3.2 Funzioni frattali

Diciamo che una funzione $f: [a, b] \rightarrow \mathbb{R}^m$ è una funzione frattale quando il suo grafico

$$G = \{(x, f(x)) : x \in [a, b]\}$$

è autosimile. In questa sezione esploriamo brevemente le possibilità che gli IFS ci danno per costruire funzioni frattali in $C^0([a, b])$.

3.2.1 Interpolazione frattale

L'interpolazione tramite funzioni frattali può essere utile per dare un senso a dati estremamente caotici, da segnali di vario genere a dati economici e demografici. In questa sezione la definiamo costruttivamente tramite IFS lineari, sfruttando lo studio svolto nei capitoli precedenti.

Definizione 3.9. Fissiamo $N \geq 2$. Un insieme di dati è un insieme di punti nella forma $\{(x_i, F_i) \in \mathbb{R}^2 : i = 0, 1, \dots, N\}$, dove $x_0 < x_1 < \dots < x_N$. Diciamo che una funzione continua $f: [x_0, x_N] \rightarrow \mathbb{R}$ interpola un insieme di dati se vale:

$$f(x_i) = F_i \quad \text{per } i = 1, 2, \dots, N.$$

Sia dato un insieme di dati $\{(x_i, F_i) : i = 0, 1, \dots, N\}$. Vediamo come costruire un IFS il cui attrattore sia il grafico di una funzione continua che interpola i dati. Questa funzione sarà quindi una funzione frattale, ovvero autosimile, che chiameremo “funzione frattale interpolante”. Ci limitiamo all’uso di trasformazioni affini, ovvero nella forma:

$$w: \begin{cases} \mathbb{R}^2 \rightarrow \mathbb{R}^2 \\ \begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix} \mapsto \begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} e \\ f \end{pmatrix} \end{cases}$$

per certi parametri $a, b, c, d, e, f \in \mathbb{R}$.

Consideriamo un IFS $\{\mathbb{R}^2; w_n, n = 1, \dots, N\}$ dove le contrazioni hanno la struttura:

$$w_n \begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} a_n & 0 \\ c_n & d_n \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} e_n \\ f_n \end{pmatrix}$$

e rispettano, per ogni $n = 1, 2, \dots, N$:

$$w_n \begin{pmatrix} x_0 \\ F_0 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} x_{n-1} \\ F_{n-1} \end{pmatrix} \quad \text{e} \quad w_n \begin{pmatrix} x_N \\ F_N \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} x_n \\ F_n \end{pmatrix}.$$

L’idea è che w_n mappi $[x_0, x_N] \times \mathbb{R}$ in $[x_{n-1}, x_n] \times \mathbb{R}$. In questo modo, la trasformazione w_n è determinata dai cinque parametri reali a_n, c_n, d_n, e_n ed f_n , che devono rispettare le quattro equazioni lineari:

$$\begin{aligned} a_n x_0 + e_n &= x_{n-1} \\ a_n x_N + e_n &= x_n \\ c_n x_0 + d_n F_0 + f_n &= F_{n-1} \\ c_n x_N + d_n F_N + f_n &= F_n \end{aligned}$$

Di conseguenza resta un solo parametro libero, scegliamo d_n . Il motivo per cui facciamo questa scelta è che l’ascissa di $w_n(x, y)$ dipende solo dalla variabile x , ovvero w_n mappa segmenti paralleli all’asse y in segmenti paralleli all’asse y . Si verifica facilmente che se L è un tale segmento, il rapporto tra le lunghezze di $w_n(L)$ e di L è proprio $|d_n|$. Chiamiamo quindi d_n il *fattore di riscalamento verticale* di w_n .

Fissando d_n per ogni n , troviamo un IFS il cui attrattore è il grafico di una funzione interpolante. Vedremo inoltre che la sua dimensione frattale è determinata da d_n .

Fissato $d_n \in \mathbb{R}$, troviamo due sistemi lineari sulle variabili a_n, e_n e c_n, f_n che hanno entrambi determinante $x_0 - x_N \neq 0$. Di conseguenza ammettono le soluzioni uniche:

$$a_n = \frac{x_n - x_{n-1}}{x_N - x_0} \quad (3.2)$$

$$e_n = \frac{x_N x_{n-1} - x_0 x_n}{x_N - x_0} \quad (3.3)$$

$$c_n = \frac{F_n - F_{n-1}}{x_N - x_0} - d_n \frac{F_N - F_0}{x_N - x_0} \quad (3.4)$$

$$f_n = \frac{x_n F_{n-1} - x_0 F_n}{x_N - x_0} - d_n \frac{x_N F_0 - x_0 F_N}{x_N - x_0} \quad (3.5)$$

L'unica cosa che ci manca ora è trovare delle condizioni su d_n che rendano l'IFS iperbolico, nella metrica Euclidea o in una metrica equivalente. Ricordiamo la definizione di metrica equivalente:

Definizione 3.10. Due metriche d_1 e d_2 sullo stesso spazio metrico X si dicono equivalenti se esistono due costanti $C, D > 0$ tali che:

$$C \cdot d_1(x, y) \leq d_2(x, y) \leq D \cdot d_1(x, y) \quad \forall x, y \in X.$$

Di conseguenza, se un IFS è iperbolico in una metrica d_1 , possiamo ricavare l'unicità dell'attrattore e la convergenza delle iterazioni in ogni metrica equivalente.

Teorema 3.11. Consideriamo un insieme di dati $\{(x_i, F_i) \in \mathbb{R}^2 : i = 0, 1, \dots, N\}$, ed un IFS $\{\mathbb{R}^2; w_n, n = 1, \dots, N\}$ definito come sopra. Se i fattori di riscalamento verticale rispettano $0 \leq d_n < 1$ per $n = 1, 2, \dots, N$, allora esiste una metrica d su \mathbb{R}^2 , equivalente alla metrica Euclidea, tale che l'IFS è iperbolico nella metrica d . In particolare, esiste unico l'attrattore G dell'IFS.

Dimostrazione. definiamo una metrica su \mathbb{R}^2 tramite

$$d\left(\begin{pmatrix} x_1 \\ y_1 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} x_2 \\ y_2 \end{pmatrix}\right) := |x_1 - x_2| + \vartheta |y_1 - y_2|,$$

dove $\vartheta > 0$.

Osserviamo che d è la distanza associata alla norma in \mathbb{R}^2 data da:

$$\|(x, y)\|_d := |x| + \vartheta |y|.$$

Di conseguenza, d è equivalente alla metrica Euclidea, in quanto tutte le norme in \mathbb{R}^m sono equivalenti. Dimostriamo ora che l'IFS è iperbolico per qualche ϑ . Definiti i parametri a_n, c_n, e_n, f_n per ogni n come in (3.2), (3.3), (3.4) e (3.5), abbiamo:

$$\begin{aligned} d(w_n(x_1, y_1), w_n(x_2, y_2)) &= \\ &= d((a_n x_1 + e_n, c_n x_1 + d_n y_1 + f_n), (a_n x_2 + e_n, c_n x_2 + d_n y_2 + f_n)) \\ &= a_n |x_1 - x_2| + \vartheta |c_n(x_1 - x_2) + d_n(y_1 - y_2)| \\ &\leq (|a_n| + \vartheta |c_n|) |x_1 - x_2| + \vartheta |d_n| |y_1 - y_2|. \end{aligned}$$

Notiamo che $|a_n| = (x_n - x_{n-1})/(x_N - x_0) < 1$. Allora, se $c_1 = \dots = c_N = 0$, scegliamo $\vartheta = 1$, e otteniamo:

$$\begin{aligned} d(w_n(x_1, y_1), w_n(x_2, y_2)) &\leq |a_n||x_1 - x_2| + |d_n||y_1 - y_2| \\ &\leq \alpha|x_1 - x_2| + \delta|y_1 - y_2| \\ &\leq \max\{\alpha, \delta\}d((x_1, y_1), (x_2, y_2)) \end{aligned}$$

dove

$$\begin{aligned} \alpha &= \max\{|a_n|: n = 1, 2, \dots, N\} < 1, \\ \delta &= \max\{|d_n|: n = 1, 2, \dots, N\} < 1. \end{aligned}$$

Altrimenti, scegliamo

$$\vartheta = \frac{1 - \alpha}{\max\{|c_n|: n = 1, \dots, N\}},$$

per cui vale:

$$\begin{aligned} d(w_n(x_1, y_1), w_n(x_2, y_2)) &\leq (|a_n| + \vartheta|c_n|)|x_1 - x_2| + \vartheta|d_n||y_1 - y_2| \\ &\leq \gamma|x_1 - x_2| + \vartheta\delta|y_1 - y_2| \\ &\leq \max\{\gamma, \delta\} \cdot d((x_1, y_1), (x_2, y_2)) \end{aligned}$$

dove

$$\begin{aligned} \gamma_n &= 1 + |a_n| - \alpha < 1, \\ \gamma &= \max\{\gamma_n: n = 1, 2, \dots, N\} < 1. \end{aligned}$$

In particolare, le trasformazioni w_n sono contrazioni rispetto alla metrica d con fattore di contrazione $s = \max\{\alpha, \gamma, \delta\}$. Questo conclude la dimostrazione. \square

Teorema 3.12. *Consideriamo un insieme di dati $\{(x_i, F_i) \in \mathbb{R}^2: i = 0, 1, \dots, N\}$, ed un IFS $\{\mathbb{R}^2; w_n, n = 1, \dots, N\}$ definito come sopra, i cui fattori di riscalamento verticale soddisfano $0 \leq d_n < 1$ per ogni n . Allora l'attrattore G dell'IFS è il grafico di una funzione continua $f: [x_0, x_N] \rightarrow \mathbb{R}$ che interpola i dati, ovvero:*

$$G = \{(x, f(x)): x \in [x_0, x_N]\},$$

dove

$$f(x_i) = F_i \quad \forall i = 0, \dots, N.$$

Dimostrazione. Definiamo

$$C = \{f: [x_0, x_N] \rightarrow \mathbb{R} \text{ continua, tale che } f(x_0) = F_0 \text{ e } f(x_N) = F_N\}.$$

Si verifica facilmente che C è un sottoinsieme chiuso di $X = C^0([x_0, x_N], \mathbb{R})$, il quale è uno spazio metrico completo. Di conseguenza anche C è completo. Siano a_n, c_n, e_n, f_n definiti come in (3.2), (3.3), (3.4) e (3.5). Definiamo l'operatore: $T: C \rightarrow C$ ponendo:

$$(Tf)(x) = c_n l_n^{-1}(x) + d_n f(l_n^{-1}(x)) + f_n \text{ per ogni } x \in [x_{n-1}, x_n], n = 1, \dots, N$$

dove l_n è la trasformazione invertibile definita da:

$$l_n: \begin{cases} [x_0, x_N] \rightarrow [x_{n-1}, x_n] \\ x \mapsto a_n x + e_n \end{cases}$$

Dimostriamo che, effettivamente, T mappa C in se stesso. T rispetta le condizioni sugli estremi, perchè:

$$\begin{aligned} (Tf)(x_0) &= c_1 l_1^{-1}(x_0) + d_1 f(l_1^{-1}(x_0)) + f_1 \\ &= c_1 x_0 + d_1 f(x_0) + f_1 \\ &= c_1 x_0 + d_1 F_0 + f_1 = F_0 \end{aligned}$$

e

$$\begin{aligned} (Tf)(x_N) &= c_N l_N^{-1}(x_N) + d_N f(l_N^{-1}(x_N)) + f_N \\ &= c_N x_N + d_N f(x_N) + f_N \\ &= c_N x_N + d_N F_N + f_N = F_N. \end{aligned}$$

Osserviamo inoltre che $(Tf)(x)$ è continua sugli intervalli aperti (x_{n-1}, x_n) , in quanto composizione di funzioni continue. Resta da verificare che è ben definita e continua sugli estremi di questi intervalli: x_2, \dots, x_{N-1} . Da un lato, abbiamo:

$$\begin{aligned} (Tf)(x_n) &= c_{n+1} l_{n+1}^{-1}(x_n) + d_{n+1} f(l_{n+1}^{-1}(x_n)) + f_{n+1} \\ &= c_{n+1} x_0 + d_{n+1} f(x_0) + f_{n+1} = F_n \end{aligned}$$

Dall'altro:

$$\begin{aligned} (Tf)(x_n) &= c_n l_n^{-1}(x_n) + d_n f(l_n^{-1}(x_n)) + f_n \\ &= c_n x_N + d_n f(x_N) + f_n = F_n \end{aligned}$$

I due valori coincidono, quindi T mappa C in se stesso. Mostriamo che è una contrazione sullo spazio metrico completo (C, d) . Siano $f, g \in C$. Siano $n \in \{1, \dots, N\}$ e $x \in [x_{n-1}, x_n]$. Allora, vale:

$$|(Tf)(x) - (Tg)(x)| = |d_n| |f(l_n^{-1}(x)) - g(l_n^{-1}(x))| \leq |d_n| \cdot d(f, g).$$

Segue che, per $\delta < 1$ definito come nella dimostrazione precedente, vale:

$$d(Tf, Tg) \leq \delta \cdot d(f, g) \quad \forall f, g \in C.$$

Di conseguenza, T è una contrazione, e per il teorema delle contrazioni ammette un unico punto fisso $f \in C$, che rispetta:

$$(Tf)(x) = f(x) \quad \text{per ogni } x \in [x_0, x_N].$$

Osserviamo che l'equazione che definisce Tf può essere riscritta come:

$$(Tf)(a_n x + e_n) = c_n x + d_n f(x) + f_n = f(a_n x + e_n) \quad \text{per ogni } n = 1, \dots, N.$$

Questo in particolare significa che, per ogni $n = 1, \dots, N$ vale:

$$\begin{pmatrix} a_n x + e_n \\ f(a_n x + e_n) \end{pmatrix} = w_n \begin{pmatrix} x \\ f(x) \end{pmatrix},$$

e quindi il grafico di f , che chiamiamo $\tilde{G} \in \mathcal{H}(\mathbb{R}^2)$ rispetta:

$$\tilde{G} = \bigcup_{n=1}^N w_n(\tilde{G}).$$

Di conseguenza, \tilde{G} è l'attrattore G dell'IFS, in quanto esso è l'unico elemento di $\mathcal{H}(\mathbb{R}^2)$ a rispettare questa proprietà. □

Definizione 3.13. Chiamiamo la funzione f il cui grafico è l'attrattore dell'IFS descritto nei teoremi precedenti *funzione frattale interpolante* relativa ai dati $\{(x_i, F_i) : i = 0, 1, \dots, N\}$.

3.2.2 Dimensione frattale di funzioni frattali interpolanti

Teorema 3.14. Consideriamo un insieme di dati $\{(x_i, F_i) \in \mathbb{R}^2 : i = 0, 1, \dots, N\}$, ed un IFS $\{\mathbb{R}^2; w_n, n = 1, \dots, N\}$ definito come sopra, i cui fattori di riscalamento verticale soddisfano $0 \leq d_n < 1$ per ogni n . Sia G l'attrattore dell'IFS, ovvero il grafico di una funzione continua che interpola i dati. Se sono soddisfatte le condizioni:

1. I dati non sono allineati, ovvero non esistono $a, b \in \mathbb{R}$ tali che $F_i = ax_i + b$ per ogni $i = 0, 1, \dots, N$

2.

$$\sum_{n=1}^N |d_n| > 1,$$

allora la dimensione frattale di G è l'unica soluzione reale D di:

$$\sum_{n=1}^N |d_n| a_n^{D-1} = 1.$$

Altrimenti, la dimensione frattale di G è 1.

Dimostrazione. La dimostrazione completa può essere trovata in [3]. La dimostrazione proposta è originale, sotto due ipotesi aggiuntive.

Lavoriamo sotto le condizioni del teorema. Consideriamo una griglia di quadrati di lato ε , simile a quella usata nel box counting theorem. Sia $k(\varepsilon)$ il numero di colonne della griglia che intersecano G . Per $j = 1, \dots, k(\varepsilon)$, chiamiamo $C_j(\varepsilon)$ la j -esima colonna della griglia che interseca G . Definiamo:

- $\mathcal{N}(\varepsilon)$ = il numero di quadrati di lato ε della griglia che intersecano G
- $\mathcal{N}_n(\varepsilon)$ = il numero di quadrati di lato ε della griglia che intersecano $w_n(G) \subset G$.
- $\mathcal{N}(C_j(\varepsilon))$ = il numero di quadrati di lato ε della j -esima colonna che intersecano G .

Le ipotesi aggiuntive sono le seguenti:

1. Nelle ipotesi del teorema, vale:

$$\min_{j=1, \dots, k(\varepsilon)} \mathcal{N}(C_j(\varepsilon)) \xrightarrow{\varepsilon \rightarrow 0^+} +\infty.$$

In particolare, quest'assunzione implica che non esiste un intervallo $I \subset [x_0, x_N]$ tale che la funzione f di cui G è il grafico sia derivabile in I con derivata limitata. Questo perchè, se tale intervallo esistesse, allora presa una colonna $C_j(\varepsilon)$ contenuta in $I \times \mathbb{R}$ (che esiste sempre per ε sufficientemente piccolo), si vede facilmente che $\mathcal{N}(C_j(\varepsilon))$ è limitato da $\max_{z \in I} |f'(z)| + 1$.

2. G ammette dimensione frattale $D \in [1, 2]$, nel senso che $\mathcal{N}(\varepsilon) \approx \varepsilon^{-D}$.

Dall'invarianza di G per l'operatore di Hutchinson, ricaviamo:

$$\mathcal{N}(\varepsilon) \leq \sum_{n=1}^N \mathcal{N}_n(\varepsilon) \leq \mathcal{N}(\varepsilon) + 2(N-1),$$

perchè al massimo $2(N-1)$ quadrati sono contati due volte dalla somma, se le immagini delle contrazioni si toccano sugli incroci della griglia. In particolare, essendo che $\mathcal{N}(\varepsilon) \rightarrow +\infty$, vale:

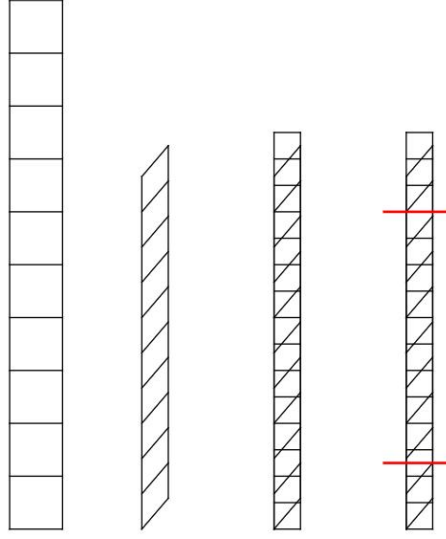
$$\lim_{\varepsilon \rightarrow 0^+} \frac{\sum_{n=1}^N \mathcal{N}_n(\varepsilon)}{\mathcal{N}(\varepsilon)} = 1.$$

Osserviamo ora che w_n manda quadrati di lato ε in parallelogrammi di base (i lati paralleli alle ordinate) $|d_n|\varepsilon$ e altezza $a_n\varepsilon$, dove i due lati verticali sono scostati di $|c_n|\varepsilon$ l'uno rispetto all'altro. Manda quindi la colonna $C_j(\varepsilon)$ in una colonna $w_n(C_j(\varepsilon))$, divisa in parallelogrammi larghi $a_n\varepsilon$. Dividiamo questa nuova colonna in quadrati di lato $a_n\varepsilon$, e chiamiamo $\mathcal{N}_n(C_j(\varepsilon))$ il numero di questi quadrati che interseca G . Allora, vale:

$$\frac{|d_n|}{a_n} (\mathcal{N}(C_j(\varepsilon)) - 2) - 2 \frac{|c_n|}{a_n} - 2 \leq \mathcal{N}_n(C_j(\varepsilon)) \leq \frac{|d_n|}{a_n} \mathcal{N}(C_j(\varepsilon)) + \frac{|c_n|}{a_n} + 1$$

La Figura 3.1 aiuta a comprendere questa stima. Vediamo, nell'ordine:

- La prima colonna è composta dai $\mathcal{N}(C_j(\varepsilon))$ quadrati di $C_j(\varepsilon)$ che intersecano G .
- La seconda colonna è l'immagine tramite w_n della prima. Ogni parallelogramma interseca G .
- La terza colonna è la seconda, divisa in quadrati di lato $a_n\varepsilon$. Non tutti questi quadrati intersecano necessariamente G . Stimando l'area dell'intera colonna e dividendola per l'area di un quadrato ($a_n^2\varepsilon^2$), otteniamo una stima del numero di quadrati nella colonna, da cui deriva la seconda disuguaglianza.
- Stimando in modo simile il numero di quadrati compresi tra le due linee rosse, otteniamo la prima disuguaglianza. Ogni quadrato compreso tra le due linee necessariamente interseca G .


 Figura 3.1: Stime di $\mathcal{N}_n(C_j(\varepsilon))$

Inoltre, valgono:

$$\sum_{j=1}^{k(\varepsilon)} \mathcal{N}_n(C_j(\varepsilon)) = \mathcal{N}_n(a_n \varepsilon), \quad \sum_{j=1}^{k(\varepsilon)} \mathcal{N}(C_j(\varepsilon)) = \mathcal{N}(\varepsilon).$$

Di conseguenza, vale:

$$\begin{aligned} \mathcal{N}_n(a_n \varepsilon) &\leq \sum_{j=1}^{k(\varepsilon)} \frac{|d_n|}{a_n} \mathcal{N}(C_j(\varepsilon)) + \frac{|c_n|}{a_n} + 1 = \frac{|d_n|}{a_n} \mathcal{N}(\varepsilon) + k(\varepsilon) \left(\frac{|c_n|}{a_n} + 1 \right) \\ \mathcal{N}_n(a_n \varepsilon) &\geq \sum_{j=1}^{k(\varepsilon)} \frac{|d_n|}{a_n} (\mathcal{N}(C_j(\varepsilon)) - 2) - 2 \frac{|c_n|}{a_n} - 2 = \frac{|d_n|}{a_n} \mathcal{N}(\varepsilon) - k(\varepsilon) \left(2 \frac{|c_n| + |d_n|}{a_n} + 2 \right) \end{aligned}$$

Grazie alla prima ipotesi aggiuntiva, sappiamo che:

$$\frac{k(\varepsilon)}{\mathcal{N}(\varepsilon)} \leq \frac{k(\varepsilon)}{k(\varepsilon) \cdot \min_{j=1, \dots, k(\varepsilon)} \mathcal{N}(C_j(\varepsilon))} \xrightarrow{\varepsilon \rightarrow 0^+} 0,$$

Da cui possiamo concludere che:

$$\frac{\mathcal{N}_n(a_n \varepsilon)}{\frac{|d_n|}{a_n} \mathcal{N}(\varepsilon)} \xrightarrow{\varepsilon \rightarrow 0^+} 1 \quad \forall n = 1, \dots, N.$$

Di conseguenza, vale anche

$$\frac{\sum_{n=1}^N \mathcal{N}_n(a_n \varepsilon)}{\sum_{n=1}^N \frac{|d_n|}{a_n} \mathcal{N}(\varepsilon)} \xrightarrow{\varepsilon \rightarrow 0^+} 1,$$

da cui ricaviamo, sostituendo a ε il valore ε/a_n :

$$\frac{\sum_{n=1}^N \mathcal{N}_n(\varepsilon)}{\sum_{n=1}^N \frac{|d_n|}{a_n} \mathcal{N}(\varepsilon/a_n)} \xrightarrow{\varepsilon \rightarrow 0^+} 1.$$

Grazie a ciò, per quanto visto in precedenza, arriviamo a dire che

$$\frac{\mathcal{N}(\varepsilon)}{\sum_{n=1}^N \frac{|d_n|}{a_n} \mathcal{N}(\varepsilon/a_n)} \xrightarrow{\varepsilon \rightarrow 0^+} 1.$$

Per il Lemma 3.3, dalla seconda ipotesi aggiuntiva, vale: Per ogni $\delta, \gamma > 0$, esiste $\bar{\varepsilon} > 0$ tale che per ogni $\varepsilon < \bar{\varepsilon}$ vale

$$\begin{aligned} \mathcal{N}(\varepsilon) &\geq (1 - \gamma)\varepsilon^{-D(1-\delta)} \\ \mathcal{N}(\varepsilon) &\leq (1 + \gamma)\varepsilon^{-D(1+\delta)} \end{aligned}$$

ed equivalentemente, per ogni $n = 1, \dots, N$:

$$\begin{aligned} \mathcal{N}(\varepsilon/a_n) &\geq (1 - \gamma) \left(\frac{\varepsilon}{a_n}\right)^{-D(1-\delta)} \\ \mathcal{N}(\varepsilon/a_n) &\leq (1 + \gamma) \left(\frac{\varepsilon}{a_n}\right)^{-D(1+\delta)} \end{aligned}$$

Di conseguenza, per ogni $\delta, \gamma > 0$, esiste $\bar{\varepsilon} > 0$ tale che per ogni $\varepsilon < \bar{\varepsilon}$ vale:

$$\frac{(1 - \gamma) \sum \frac{|d_n|}{a_n} \left(\frac{\varepsilon}{a_n}\right)^{-D(1-\delta)}}{(1 + \gamma) \varepsilon^{-D(1+\delta)}} \leq \frac{\sum_n \frac{|d_n|}{a_n} \mathcal{N}(\varepsilon/a_n)}{\mathcal{N}(\varepsilon)} \leq \frac{(1 + \gamma) \sum \frac{|d_n|}{a_n} \left(\frac{\varepsilon}{a_n}\right)^{-D(1+\delta)}}{(1 - \gamma) \varepsilon^{-D(1-\delta)}}$$

Gli estremi convergono a $\sum_{n=1}^N |d_n| a_n^{D-1}$ per $\delta, \gamma, \varepsilon \rightarrow 0^+$, mentre l'argomento centrale converge ad 1. Dal teorema del confronto quindi otteniamo:

$$\sum_{n=1}^N |d_n| a_n^{D-1} = 1.$$

Per concludere, osserviamo che se i nodi di interpolazione sono allineati, allora G è il segmento che li collega per ogni valore di d_n , $n = 1, \dots, N$. □

Esempio 11. Consideriamo il caso di nodi di interpolazione equispaziati, ovvero $x_i = x_0 + \frac{i}{N}(x_N - x_0)$ per ogni $i = 0, \dots, N$. Segue che $a_n = \frac{1}{N}$ per ogni n . Di conseguenza, se i punti (x_i, F_i) non sono allineati, sono soddisfatte le ipotesi del Teorema 3.14, quindi la dimensione frattale D della funzione interpolante è:

$$D = 1 + \frac{\log(\sum_{n=1}^N |d_n|)}{\log(N)}.$$

Questo ci dice alcune cose interessanti:

- Essendo che $\sum_{n=1}^N |d_n| < N$, vale $1 \leq D < 2$.
- Se i nodi di interpolazione non sono allineati, possiamo far variare in modo continuo la dimensione frattale della funzione interpolante tra 1 e 2, semplicemente variando i parametri d_n , per $n = 1, \dots, N$. Inoltre, la dimensione frattale dipende solo da essi, quindi per ottenere delle funzioni interpolanti di dimensione frattale $D > 1$ ci basta imporre

$$\sum_{n=1}^N |d_n| = N^{D-1}.$$

OSSERVAZIONE 3.7. Supponiamo di avere un set di dati $S = \{(x_i, F_i): i = 0, \dots, N\}$, che vogliamo interpolare tramite una funzione frattale. La dimensione frattale di S è chiaramente nulla, perchè $\mathcal{N}(S, \varepsilon) \leq N$ per ogni $\varepsilon > 0$. Tuttavia, se N è molto grande, allora $\mathcal{N}(S, \varepsilon)$ continua a crescere al decrescere di ε per svariati ordini di grandezza. Di conseguenza, nell'ambito del metodo box counting, dati $n_1 \leq n_2 \in \mathbb{N}$ appropriati è possibile trovare un valore $\tilde{D} \geq 1$ tale che

$$\frac{\ln(\mathcal{N}_n(S))}{\ln(r^n)} \cong \tilde{D}$$

per ogni $n_1 \leq n \leq n_2$. \tilde{D} corrisponde alla pendenza di un'approssimazione lineare tra r^{n_1} e r^{n_2} del grafico in scala logaritmica di r^n (nelle ascisse) e $\mathcal{N}_n(S)$ (nelle ordinate). Per un compatto con dimensione frattale $D > 0$, questo grafico tende asintoticamente ad una retta di pendenza D , ma in questo caso, essendo $D=0$, bisogna approssimarla tra r^{n_1} e r^{n_2} , scegliendo n_1 ed n_2 in modo che la pendenza rimanga stabile per svariati ordini di grandezza.

Questo valore, per quanto arbitrario, può darci un'idea della caoticità dei dati come farebbe la dimensione frattale. Possiamo infine far sì che la dimensione frattale della funzione interpolante sia proprio \tilde{D} , ovvero conservare la caoticità dei dati.

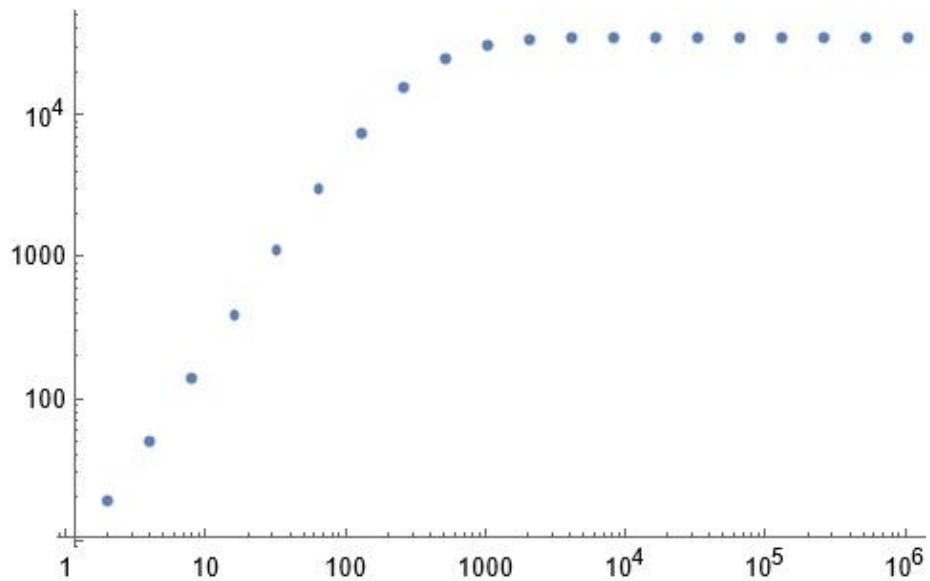


Figura 3.2: Grafico in scala logaritmica di 2^n e $\mathcal{N}_n(S)$.

Esempio 12. Nella Figura 3.2, vediamo il grafico in scala logaritmica di 2^n (nelle ascisse) e $\mathcal{N}_n(S)$ (nelle ordinate), dove S è un insieme di 35 000 punti generati casualmente nel grafico della funzione dell'Esempio 14. Vediamo che il grafico sale con pendenza più o meno costante, per poi appiattirsi quando la griglia diventa abbastanza sottile da isolare quasi tutti i punti. Approssimando la pendenza tra $n_1 = 2$ ed $n_2 = 5$ (corrispondenti a griglie di larghezza $\varepsilon = 2^{-2}$ e $\varepsilon = 2^{-5}$), troviamo il valore $\tilde{D} \cong 1.4952$.

3.2.3 Esempi di funzioni frattali

Vediamo tre esempi di funzioni frattali di vari tipi. Consideriamo (\mathbb{R}^2, d) dove d è la metrica Euclidea.

Esempio 13. Consideriamo l'IFS dato da $\{\mathbb{R}^2; w_1, w_2\}$ dove w_1 e w_2 sono definite così:

$$w_1 \begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \frac{1}{2} & 0 \\ 0 & \frac{1}{4} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix}$$

$$w_2 \begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \frac{1}{2} & 0 \\ \frac{1}{2} & \frac{1}{4} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} \frac{1}{2} \\ \frac{1}{4} \end{pmatrix}$$

Definiamo poi la funzione:

$$f: \begin{cases} [0, 1] \rightarrow [0, 1] \\ x \mapsto x^2 \end{cases}$$

Si può verificare facilmente che il grafico di f :

$$G(f) = \{(x, x^2) : x \in [0, 1]\}$$

è punto fisso dell'operatore di Hutchinson, ed è quindi l'attrattore dell'IFS. Grazie al Teorema 3.14, possiamo dire che la sua dimensione frattale è 1.



Figura 3.3: Iterazioni dell'IFS su una funzione lineare



Figura 3.4: Iterazioni dell'IFS su un quadrato

Le Figure 3.3 e 3.4 ci danno un'idea di come agiscono le trasformazioni w_1 e w_2 .

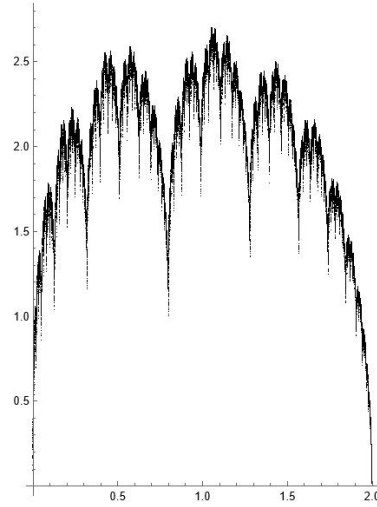


Figura 3.5: Attrattore dell'IFS

Esempio 14. Siano $d_1, d_2 \in (0, 1)$ tali che $d_1 + d_2 > 1$. Consideriamo l'IFS dato da $\{\mathbb{R}^2; w_1, w_2\}$ dove w_1 e w_2 sono definite così:

$$w_1 \begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} a & 0 \\ c & d_1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix}$$

$$w_2 \begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1-a & 0 \\ -c & d_2 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} 2a \\ 2c \end{pmatrix}$$

Nella Figura 3.5 vediamo un'approssimazione dell'attrattore, per i valori $a = 2/5$, $c = 1/2$, $d_1 = d_2 = 3/4$. Esso è il grafico di una funzione definita in $[0, 2]$, ed interpola i punti $\{0, 0\}$, $\{2a, 2c\}$ e $\{2, 0\}$, con fattori di riscalamento verticale d_1 e d_2 . Ha quindi dimensione frattale $D > 1$, dove:

$$a^{D-1}d_1 + (1-a)^{D-1}d_2 = 1.$$

Approssimando il risultato, otteniamo $D \cong 1.57782$. Non è molto lontano dall'approssimazione che avevamo ottenuto nell'Esempio 12. Le figure 3.6 e 3.7 ci danno un'idea di come agiscono le trasformazioni w_i . Nella Figura 3.8 invece vediamo l'attrattore al variare di $d_1, d_2 = 0.3, 0.4, \dots, 0.9$. Questo ci porta a pensare che più i fattori di riscalamento verticale sono elevati, più una funzione è frastagliata, più la dimensione frattale è vicina a 2.



Figura 3.6: Iterazioni dell'IFS

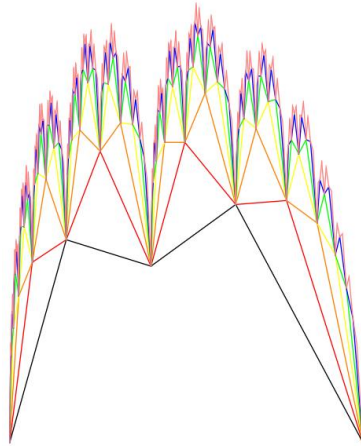


Figura 3.7: Iterazioni dell'IFS

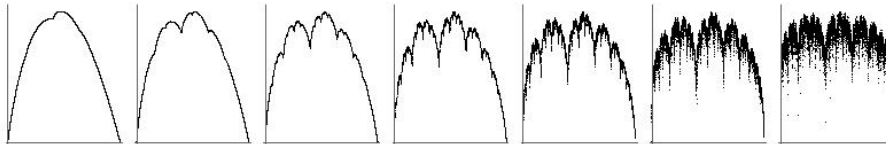


Figura 3.8: L'attrattore al variare di $|d_i|$

OSSERVAZIONE 3.8. Come abbiamo visto, più un insieme è frastagliato, più la sua dimensione frattale è elevata. Si potrebbe dare quindi una nuova definizione di frattale, chiamando frattale qualunque insieme la cui dimensione frattale sia maggiore della propria dimensione topologica. Rispetto alla definizione data dall'autosimilarità, questa esclude alcuni insiemi, come il grafico della funzione dell'Esempio 13, o gli ipercubi di \mathbb{R}^n , e ne include altri, come gli attrattori di alcuni IFS con condensazione.

Esempio 15. Nella Figura 3.9 vediamo il grafico della funzione di Weierstrass, definita in questo modo:

$$\mathcal{W}(x): \begin{cases} [-\pi, \pi] \rightarrow \mathbb{R} \\ x \mapsto \sum_{n=1}^{\infty} 2^{-n/2} \cos(2^n x) \end{cases}$$

È un fatto ben noto che \mathcal{W} è ben definita, continua e mai derivabile. Osserviamo che è frattale: in effetti, sembra essere autosimile, ma non per contrazioni affini. Proviamo a cercare un IFS il cui attrattore sia il grafico di \mathcal{W} : ci basta trovare w_1 e w_2 che rendano il grafico invariante per l'operatore di Hutchinson. Intuitivamente, proviamo a porre:

$$w_1(x, y) = \left(\frac{x + \pi}{2}, f_1(x, y) \right)$$

$$w_2(x, y) = \left(\frac{x - \pi}{2}, f_2(x, y) \right)$$

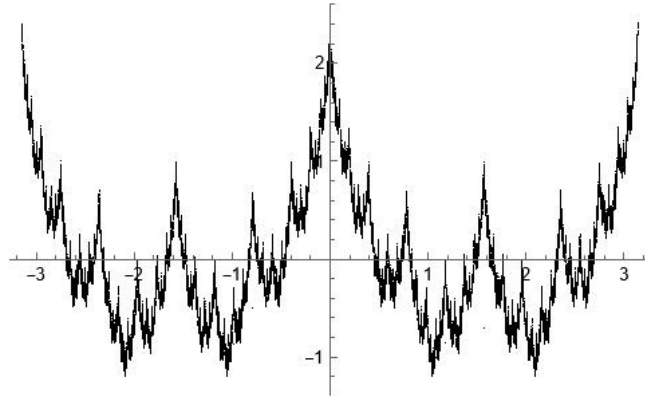


Figura 3.9: La funzione di Weierstrass

Perchè il grafico sia invariante dobbiamo imporre:

$$f_1(x, \mathcal{W}(x)) = \mathcal{W}\left(\frac{x + \pi}{2}\right)$$

$$f_2(x, \mathcal{W}(x)) = \mathcal{W}\left(\frac{x - \pi}{2}\right)$$

Troviamo:

$$\begin{aligned} f_1(x, \mathcal{W}(x)) &= \mathcal{W}\left(\frac{x + \pi}{2}\right) = \sum_{n=1}^{\infty} 2^{-n/2} \cos\left(2^n \left(\frac{x + \pi}{2}\right)\right) \\ &= \sum_{n=1}^{\infty} 2^{-n/2} \cos(2^{n-1}x + 2^{n-1}\pi) \\ &= \sum_{n=1}^{\infty} 2^{-n/2} (\cos(2^{n-1}x) \cos(2^{n-1}\pi) - \sin(2^{n-1}x) \sin(2^{n-1}\pi)) \\ &= -2^{-1/2} \cos(x) + \sum_{n=2}^{\infty} 2^{-n/2} \cos(2^{n-1}x) \\ &= 2^{-1/2} (-\cos(x) + \mathcal{W}(x)). \end{aligned}$$

In modo analogo, troviamo la stessa formula per f_2 . Definiamo quindi:

$$w_1(x, y) = \left(\frac{x + \pi}{2}, 2^{-1/2}(-\cos(x) + y)\right)$$

$$w_2(x, y) = \left(\frac{x - \pi}{2}, 2^{-1/2}(-\cos(x) + y)\right)$$

Non resta che chiederci: queste sono contrazioni in qualche metrica? Sì, definiamo la metrica su \mathbb{R}^2 :

$$d_w((x_1, y_1), (x_2, y_2)) = |x_1 - x_2| + \frac{1}{2}|y_1 - y_2|.$$

Questa è una metrica equivalente a quella Euclidea, come già visto in precedenza. Verifichiamo che w_1 e w_2 sono contrazioni in questa metrica.

$$\begin{aligned}
 d_w(w_1(x_1, y_1), w_1(x_2, y_2)) &= \frac{1}{2}|x_1 - x_2| + \frac{1}{2\sqrt{2}}(|\cos(x_1) - \cos(x_2)| + |y_1 - y_2|) \\
 &\leq \frac{1}{2}|x_1 - x_2| + \frac{1}{2\sqrt{2}}(|\cos(x_1) - \cos(x_2)| + |y_1 - y_2|) \\
 &\leq \frac{1}{2}|x_1 - x_2| + \frac{1}{2\sqrt{2}}(|x_1 - x_2| + |y_1 - y_2|) \\
 &= \frac{1 + \sqrt{2}}{2\sqrt{2}}|x_1 - x_2| + \frac{1}{2\sqrt{2}}|y_1 - y_2| \\
 &\leq \frac{1 + \sqrt{2}}{2\sqrt{2}}|x_1 - x_2| + \frac{1}{2} \frac{1 + \sqrt{2}}{2\sqrt{2}}|y_1 - y_2| \\
 &= \frac{1 + \sqrt{2}}{2\sqrt{2}}d_w((x_1, y_1), (x_2, y_2)).
 \end{aligned}$$

Dove abbiamo usato la Lipschitzianità del coseno, e il fatto che

$$\frac{1}{\sqrt{2}} < \frac{1 + \sqrt{2}}{2\sqrt{2}} < 1.$$

Si procede in modo analogo per w_2 .

OSSERVAZIONE. Le iterazioni mostrate nella Figura 3.10 non sono esatte: le contrazioni w_1 e w_2 sono applicate soltanto ai vertici, che poi sono interpolati con funzioni lineari. Questo non rappresenta le iterazioni esatte, perchè il coseno non è una funzione lineare. Si noti inoltre che, a causa di ciò, il primo grafico mostra la prima iterazione, non la funzione di partenza.



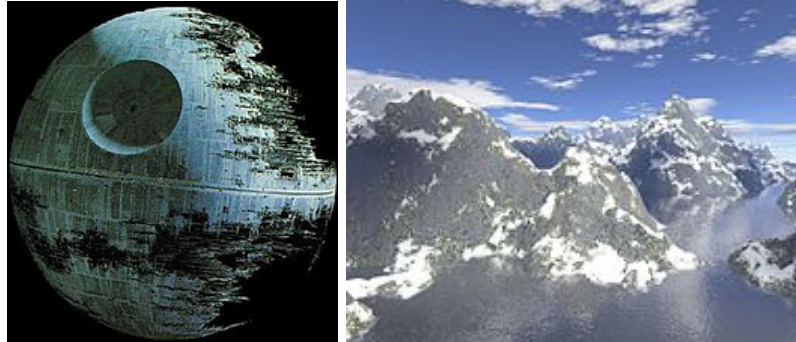
Figura 3.10: Iterazioni dell'IFS

Tuttavia, la figura può comunque darci un'idea di come agiscono le contrazioni w_i , in quanto l'attrattore è "stabile" per piccole perturbazioni delle contrazioni, come ad esempio sostituire al coseno una sua approssimazione lineare a tratti.

3.2.4 Applicazioni

Come abbiamo visto, lo studio dei frattali non è solo lo studio dell'autosimilarità, ma anche in generale di tutto ciò che è frastagliato, non liscio: Questo è in contrasto con le tipologie di funzioni più comunemente studiate, dove regolarità e derivabilità sono proprietà desiderabili. Può essere quindi utile studiarli al fine di poter modellizzare o rappresentare tutti quei processi che variano costantemente in modo repentino: dai fenomeni atmosferici, alle fluttuazioni del mercato. In molti casi poi, l'interpolazione frattale generalizza metodi classici di interpolazione (si veda [10]). Vediamo brevemente alcune applicazioni.

La prima, più ovvia, è nel campo della computer grafica: i frattali vengono usati per rappresentare superfici frastagliate e irregolari, paesaggi, ma anche nuvole, piante... persino la silhouette della morte nera di Star Wars è stata creata usando i frattali.



(a) La morte nera

(b) Esempio di paesaggio frattale

La seconda applicazione è l'analisi dei segnali, ovvero set di dati rilevati su un intervallo temporale. In [7], viene trovata una relazione esatta tra la dimensione frattale di funzioni frattali interpolanti e lo spettro di potenza trovato grazie alla FFT (Fast Fourier Transform), il cui uso è ben radicato nell'analisi dei segnali. Trovare relazioni tra i metodi classici e metodi basati sull'interpolazione frattale è essenziale per giustificarne l'uso. In particolare, la dimensione frattale si è rivelata un buono strumento per distinguere e classificare i segnali.

Quest'idea è esemplificata in [8], dove viene utilizzata l'interpolazione frattale per ricostruire i segnali di elettroencefalogrammi eseguiti su vari bambini con ADHD (Disturbo da deficit di attenzione e iperattività), ed un campione di bambini non affetti. Si è notata una maggiore differenza tra le misurazioni svolte "a riposo" e quelle svolte durante un esercizio cognitivo nelle dimensioni frattali dei segnali provenienti da alcune zone dell'encefalo nei bambini affetti da ADHD, confermando un maggiore sforzo necessario allo svolgimento dell'esercizio rispetto ai bambini non affetti.

Infine, in [9] l'interpolazione frattale è utilizzata per modellizzare dati finanziari in mercati altamente instabili, come nel caso del mercato delle criptovalute, o di economie in crisi.

In conclusione, lo studio dei frattali è una branca relativamente giovane e poco esplorata della matematica: quelli che in altri contesti sarebbero casi estremi, qui sono la norma. Proprio per questo però, è ancora presto per poter dire quali frontiere raggiungerà.

Bibliografia

- [1] Michael F. Barnsley. *Fractal Functions and Interpolation*. Atlanta, Georgia: Springer, 1986.
- [2] Michael F. Barnsley. *Fractals Everywhere*. 2a edizione. Atlanta, Georgia: Morgan Kaufmann, 1993.
- [3] Michael F. Barnsley. *Hidden Variable Fractal Interpolation Functions*. Georgia: SIAM journal of Analysis, 1986.
- [4] Dietmar Saupe Heinz-Otto Peitgen Hartmut Jürgens. *Chaos and Fractals New Frontiers of Science*. 2a edizione. Springer, 2004.
- [5] Andrew Vince Michael F. Barnsley. *Fractal continuation*. Canberra, Australia, 2012.
- [6] C. Sbordone N.Fusco P. Marcellini. *Analisi matematica due*. Napoli: Liguori, 1996.
- [7] Sebastián Navascués. *Spectral and affine fractal methods in signal processing*. Saragozza, Spagna, 2006.
- [8] Valdizán Navascués M.A. Sebastián M.V. *Fractal and Smooth Complexities in Electroencephalographic Processing*. Saragozza, Spagna: OMICS publishing group, 2015.
- [9] Efstathios Polyzos Polychronis Manousopoulos Vasileios Drakopoulos. *Financial Time Series Modelling Using Fractal Interpolation Functions*. Atene: MDPI, 2023.
- [10] Gayatri Ramesh. *Fractal interpolation*. Martin, Tennessee, 2006.