

UNIVERSITÀ DEGLI STUDI DI PADOVA
FACOLTÀ DI INGEGNERIA

TESI DI LAUREA IN INGEGNERIA DELL'INFORMAZIONE
(Laurea triennale DM 270/04 – indirizzo Informazione)

**STUDIO IN AMBIENTE MATLAB/SIMULINK
DEL SISTEMA DI CONTROLLO DI VELOCITÀ
DI UN MOTORE ELETTRICO IN
CORRENTE CONTINUA**

Relatore: Prof. Alessandro Beghi

Laureando: Edoardo Moro

Anno Accademico: 2012-2013

Indice

1 Modellizzazione del motore elettrico in corrente continua

2 Analisi dinamica del sistema in catena aperta

- 2.1 Risposta al gradino
- 2.2 Risposta alla rampa (unitaria e parabolica)
- 2.3 Risposta in frequenza

3 Progetto del controllore

- 3.1 Sintesi del controllore PID
- 3.2 Sintesi del controllore con luogo delle radici
- 3.3 Sintesi del controllore in frequenza

4 Analisi dinamica del sistema in catena chiusa: reiezione ai disturbi

5 Conclusioni: confronto dei controllori

6 Riferimenti bibliografici

Modellizzazione del motore elettrico in corrente continua

Per lo sviluppo di questa tesi, si è analizzato il comportamento di un motore in corrente continua, ovvero alimentato da tensione costante. È stato innanzitutto studiato il sistema preso in considerazione, ricavandone il modello matematico e stabilendo infine le specifiche di controllo.

Il motore elettrico, la cui funzione è di convertire energia elettrica in energia meccanica, è composto da due parti: lo statore e il rotore (o armatura).

Lo statore è formato da una carcassa metallica e da uno o più magneti che creano un campo magnetico all'interno dello statore. Il rotore è invece costituito da una carcassa metallica a sostegno delle bobine, collegate fra loro a livello del collettore. Nel caso del motore elettrico a spazzole, il gruppo collettore-spazzole permette di selezionare l'insieme delle bobine che vengono attraversate dalla corrente in un senso e quelle che vengono attraversate in senso opposto. Si crea così un campo elettromagnetico e per effetto dell'attrazione dei poli opposti e della repulsione dei poli dello stesso segno, sul rotore si genera una coppia che lo mette in moto. Le bobine sono alimentate in maniera che l'asse dei nuovi poli del rotore sia comunque perpendicolare a quello dello statore, quindi il rotore continua a girare.

Il motore elettrico in corrente continua può essere visto come l'insieme di una parte elettrica e una parte meccanica. Entrambe fanno parte del rotore, l'unico ruolo dello statore è di creare un campo magnetico \vec{B} costante e quindi non c'è bisogno di alcun tipo di modellazione perché \vec{B} non risulterà presente nelle equazioni caratteristiche del motore.

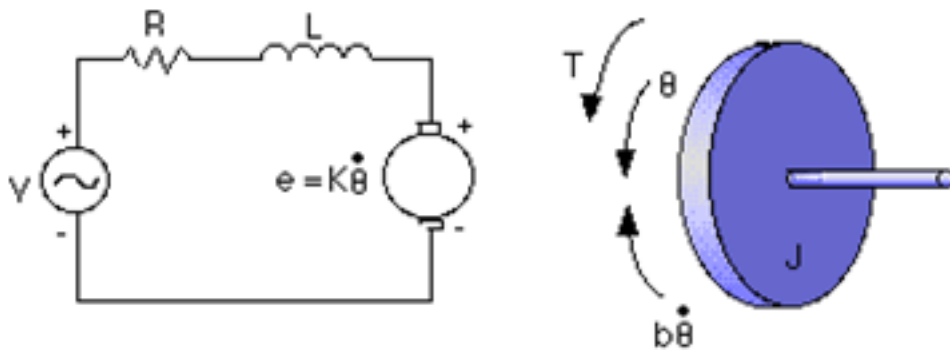


Fig. 1 modello motore elettrico e rappresentazione rotore

Come si può notare nella Fig. 1 viene inserita la serie di una resistenza R e di un'induttanza L che rappresentano il comportamento degli avvolgimenti di filo attorno al rotore. R è dovuta alla resistenza caratteristica del filo che compone la spira attorno al rotore, mentre L è dovuta al fatto che il filo è avvolto a spirale e quindi si comporta come un induttore. Infine le forze elettromotrici rappresentate nel circuito corrispondono a quella dell'alimentazione e quella che dipende dalla velocità di rotazione del motore, quindi all'avvio risulterà pari a 0 V. Quest'ultima, indicata nel circuito con la lettera "e", viene detta anche forza controelettromotrice perché si oppone alla tensione di alimentazione applicata al motore. La parte meccanica invece dipende dalle caratteristiche fisiche del rotore, principalmente forma e peso.

Le equazioni che caratterizzano la dinamica del motore, ottenute dall'analisi del modello preso in considerazione, sono descritte nel modo seguente:

T indica la coppia del motore, K_m la costante di coppia che si ottiene dalla legge di Lorentz, e $i(t)$ indica la corrente.

$$T(t) = K_m i(t)$$

Viene rappresentata con $e(t)$ la forza controelettromotrice che viene generata dal movimento dell'armatura all'interno del campo magnetico, con $\theta(t)$ la posizione angolare dell'albero motore rispetto ad un punto esterno prefissato e con K_e costante di forza elettromotrice indotta dalla legge di Faraday.

$$e(t) = K_e \frac{d\theta(t)}{dt}$$

Dalla seconda legge di Newton viene ricavata invece l'equazione del moto rotatorio del rotore

$$J \frac{d^2\theta(t)}{dt^2} + b \frac{d\theta(t)}{dt} = T(t) + T_d(t)$$

nella quale J indica il momento di inerzia del rotore, b il coefficiente di attrito viscoso dell'asse di rotazione, mentre $T(t)$ e $T_d(t)$ corrispondono rispettivamente alla coppia motore e alla coppia di carico esterna.

Definendo la velocità angolare dell'albero

$$\omega(t) \triangleq \frac{d\theta(t)}{dt}$$

si può riscrivere la formula in modo più compatto:

$$J \frac{d\omega(t)}{dt} + b\omega(t) = T(t) + T_d(t)$$

La relazione che vincola i parametri elettrici del rotore, ovvero tensione $v(t)$, corrente di armatura $i(t)$ e forza elettromotrice $e(t)$, è la seguente:

$$L \frac{di(t)}{dt} + Ri(t) = v(t) - e(t)$$

Mettendo a sistema le equazioni appena descritte, si ottiene:

$$\begin{cases} L \frac{di(t)}{dt} + Ri(t) = v(t) - e(t) \\ J \frac{d\omega(t)}{dt} + b\omega(t) = T(t) + T_d(t) \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} L \frac{di(t)}{dt} + Ri(t) = v(t) - K\omega(t) \\ J \frac{d\omega(t)}{dt} + b\omega(t) = K i(t) + T_d(t) \end{cases}$$

dove viene imposto $K_m = K_e = K$, dato che il sistema viene considerato in condizioni ideali e quindi di equilibrio tra potenza elettrica e meccanica.

Considerando il modello utilizzato e le equazioni espresse, si ottiene un sistema a due ingressi, la tensione di alimentazione $v(t)$ e il carico del motore $T_d(t)$, e ad una uscita, la velocità angolare del rotore $\omega(t)$.

Si può notare che il sistema è composto da due equazioni principali, una di tipo elettrico e l'altra di tipo meccanico.

La prima espressione può essere interpretata come un sistema rappresentante un circuito elettrico RL, dove l'ingresso è rappresentato dalla tensione $v(t) - K\omega(t)$ mentre l'uscita consiste nel valore della corrente di armatura $i(t)$. In questo modo, tramite le proprietà delle trasformate di Laplace, si ottiene la prima funzione di trasferimento:

$$W_1(s) = \frac{1}{R + sL}$$

La seconda espressione invece può essere intesa come un sistema meccanico rotatorio, considerando le coppie $T(t)$ e $T_d(t)$ come ingresso e la velocità angolare $\omega(t)$ come uscita. Si ottiene quindi la seconda funzione di trasferimento del sistema:

$$W_2(s) = \frac{1}{b + sJ}$$

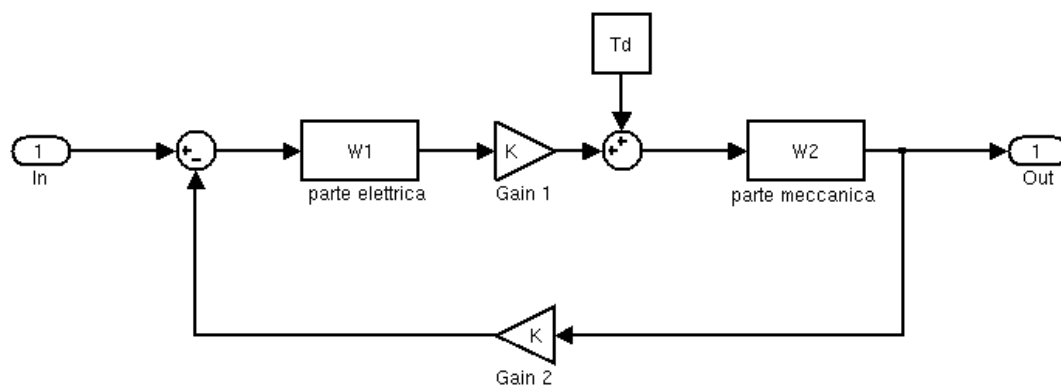


Fig. 2 schema a blocchi del motore elettrico

Si può calcolare ora la funzione di trasferimento dell'intero sistema, facendo riferimento allo schema a blocchi illustrato e seguendo le proprietà delle funzioni di trasferimento e della retroazione negativa.

Vengono considerati due casi, trovando così due funzioni di trasferimento, rispettivamente una che vincola l'ingresso $v(t)$ e l'altra l'ingresso $T_d(t)$ con l'uscita $\omega(t)$.

La prima si trova ponendo $T_d(t)$ pari a 0, si ottiene quindi:

$$W_{v,\omega}(s) = \frac{\frac{K}{(R + sL)(b + sJ)}}{1 + \frac{K^2}{(R + sL)(b + sL)}} = \frac{K}{(R + sL)(b + sJ) + K^2} =$$

$$= \frac{K}{LJs^2 + s(RJ + Lb) + (Rb + K^2)}$$

La seconda invece la si calcola ponendo v nullo.

$$\begin{aligned} W_{T_d, \omega}(s) &= \frac{\frac{1}{b + Js}}{1 + \frac{K^2}{(R + sL)(b + sJ)}} = \frac{R + sL}{(R + sL)(b + sJ) + K^2} = \\ &= \frac{R + sL}{LJs^2 + (RJ + Lb)s + (Rb + K^2)} \end{aligned}$$

Come si può notare, entrambe le funzioni di trasferimento sono BIBO stabili, infatti si può osservare che il polinomio al denominatore è di tipo hurwitziano, dato che tutti i coefficienti sono positivi. Quindi dato che la tensione in ingresso è limitata, è noto sin da ora che si otterrà in uscita una velocità angolare limitata.

Nel caso in esame, si considera un motore elettrico con una tensione di input pari a 1V e siccome il requisito basilare di questo tipo di dispositivo è quello di ottenere la velocità di rotazione del rotore (velocità angolare) desiderata, impongo come specifica del controllo un errore a regime minore dell'1%. Un altro fattore che è ritenuto necessario fissare è il tempo di assestamento, ovvero il tempo impiegato dal motore a raggiungere lo stato a regime dal momento dell'accensione. In questa analisi, a tale parametro, viene imposto un valore minore a 2 secondi. Infine dato che una velocità superiore a quella richiesta può danneggiare il motore, viene imposto un limite al valore massimo di sovraelongazione (overshooting) pari al 5%.

Ricapitolando, le tre condizioni che devono essere soddisfatte dal controllore sono:

- Errore a regime $< 1\%$;
- Tempo di assestamento $T_s < 2 \text{ sec}$;
- Sovraelongazione $S < 5\%$.

Analisi dinamica del sistema in catena aperta

In questa fase, nella quale viene analizzato il sistema dal punto di vista dinamico, si simula e si valutano gli effetti sul motore utilizzando i software Matlab/Simulink. Viene preso in considerazione il sistema in catena aperta, valutando le risposte ai segnali canonici (gradino, rampa, rampa parabolica, segnali sinusoidali), in quanto generalmente sono gli ingressi usati maggiormente, o nei casi più complessi sono una sovrapposizione di essi.

Per prima cosa impostiamo i valori dei parametri del motore elettrico in Matlab:

```
J=0.01;    % momento di inerzia rotore
b=0.1;     % coefficiente attrito viscoso
K=0.01;    % costanti della f.e.m. e di coppia
R=1;       % resistenza del circuito RL
L=0.5;     % induttanza del circuito RL
```

Si definiscono ora il numeratore e il denominatore della funzione di trasferimento $W_{v,\omega}(s)$ ricavata precedentemente:

```
num=K;
den=[(J*L) ((J*R)+(L*b)) (b*R + K^2)];
```

Ora è possibile creare esattamente la funzione di trasferimento desiderata utilizzando il comando:

```
tf(num,den):
motor=tf(num,den);
```

Sono stati quindi definiti i parametri fisici del motore elettrico in corrente continua e la funzione di trasferimento del sistema in catena aperta, ora si può procedere con l'analisi delle risposte ai segnali canonici.

RISPOSTA AL GRADINO

Il gradino è il segnale più semplice da analizzare, in quanto l'ingresso è:

$$v(t) = 1 \quad \text{per } t \geq 0$$

annullando il valore della coppia di carico T_d , si deve ottenere una risposta forzata (ovvero quella dipendente dal valore dell'ingresso) che tende a comportarsi come un gradino di ampiezza pari al guadagno a regime, ovvero al valore della funzione di trasferimento $W_{v,\omega}(s)$ con $s=0$.

$$W_{v,\omega}(s=0) = \frac{K}{Rb + K^2}$$

con i parametri descritti in precedenza si ottiene quindi:

$$W_{v,\omega}(s=0) = 0.0999 \cong 0.1$$

Questo risultato, infatti, viene confermato dal grafico che si ottiene con Matlab, inserendo la seguente serie di comandi:

```
step(motor,0:0.1:6);  
xlabel('Tempo');  
ylabel('Velocità angolare (rad/s)');  
title('Risposta al gradino del sistema in catena aperta');
```

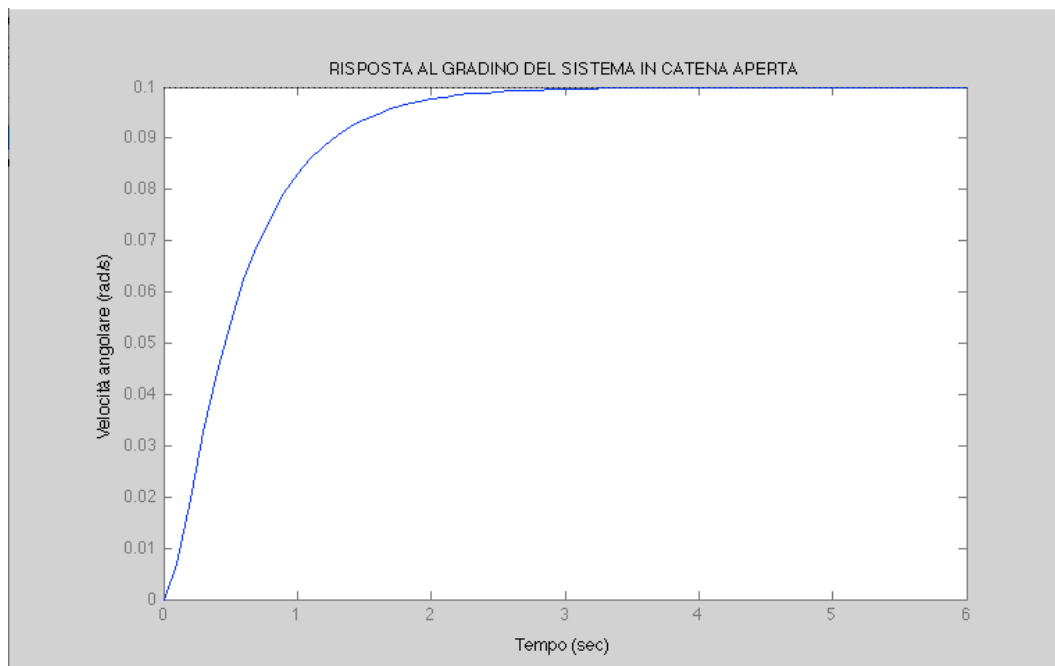


Fig. 3 grafico della risposta al gradino del sistema in catena aperta

Inserendo questa serie di comandi invece, si può osservare in modo più chiaro il rapporto tra la grandezza in ingresso e quella in uscita.

```
v=ones(size(0:0.1:6));
[w,t]=step(motor,0:0.1:6);
plot(t,v,'r');
hold on;
plot(t,w,'b');
ylabel('Ingresso (rosso) e Uscita (blu)');
xlabel('Tempo');
```

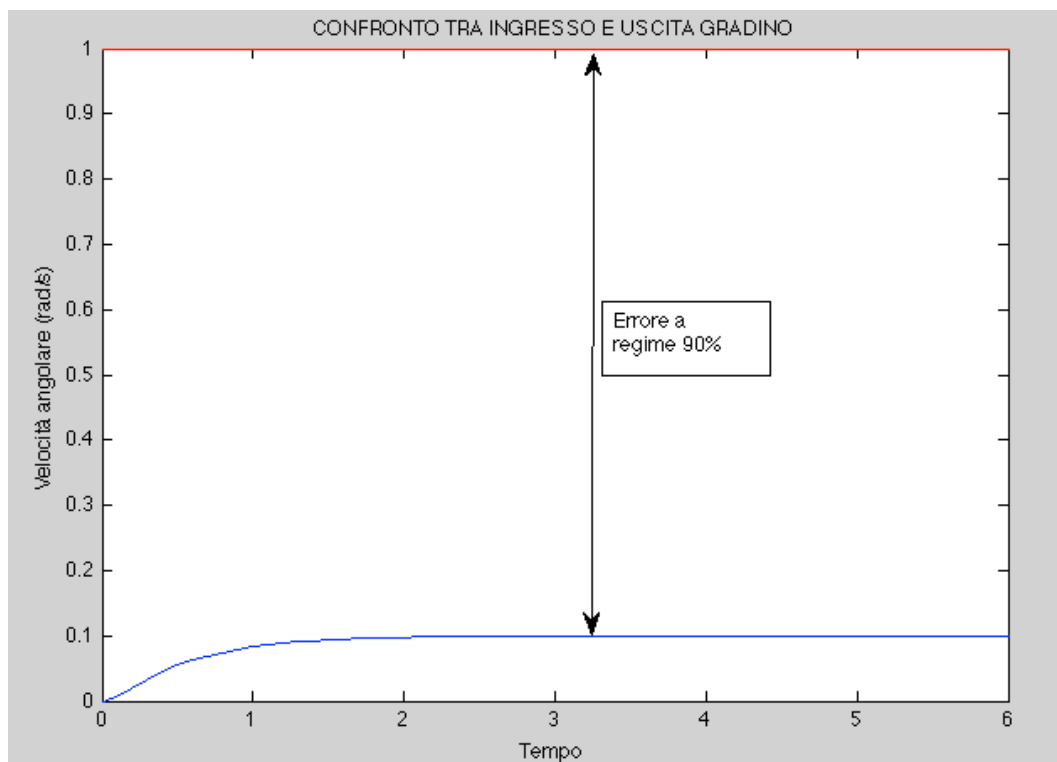


Fig. 4 errore di regime, confronto ingresso-uscita in risposta al gradino

Dal grafico soprastante, si può notare come il rotore del motore elettrico raggiunga una velocità angolare di 0.1 rad/s data una tensione pari a 1 V in ingresso al sistema, un valore dieci volte minore di quello desiderato (1 rad/s). È evidente che un errore a regime del 90% è decisamente troppo elevato rispetto alle condizioni definite inizialmente. Inoltre si può osservare, nella Fig. 3, che sono necessari quasi 3 secondi per raggiungere la stabilità del valore in uscita, ovvero il tempo di assestamento non rispetta le condizioni che si sono imposte nella presentazione del problema in esame. Per ridurre sia l'errore a regime che il tempo di assestamento sono necessarie delle modifiche ai dispositivi di controllo.

RISPOSTA ALLA RAMPA (UNITARIA E PARABOLICA)

Il segnale rampa viene così descritto:

$$v(t) = \frac{t^k}{k!} \quad \text{per } t \geq 0$$

Con questa espressione viene anche indicato il gradino unitario, infatti per $k=0$ si ottiene proprio $v(t) = 1$ per ogni valore di t non negativo. Se invece k assume valori 1 e 2, si ottengono rispettivamente la rampa unitaria e la rampa parabolica.

Anche in questo caso viene assegnato il valore nullo a T_d , in modo tale da studiare la risposta forzata. Con questo tipo di segnale, l'uscita deve tendere ad un polinomio simile a quello in ingresso, il cui termine più significativo applica un'amplificazione pari al valore del guadagno in regime (che si ottiene ponendo $s=0$ nella funzione di trasferimento del sistema) ed inoltre cresce di un ordine l , il quale dipende dal tipo di sistema in esame. In questo caso l è pari a 0.

Per analizzare la risposta del sistema in catena aperta dato un ingresso a rampa, viene impiegato nuovamente Matlab, utilizzando i seguenti comandi:

```
t=0:0.1:10;  
v=t;  
[w,t]=lsim(motor,v,t);  
plot(t,w,'b');  
title('RISPOSTA ALLA RAMPA UNITARIA DEL SISTEMA IN CATENA APERTA');  
xlabel('Tempo (s)');  
ylabel('Velocità angolare (rad/s)');
```

In questa occasione viene utilizzato il comando `lsim` perché permette di simulare il comportamento di `motor` con un ingresso arbitrario.

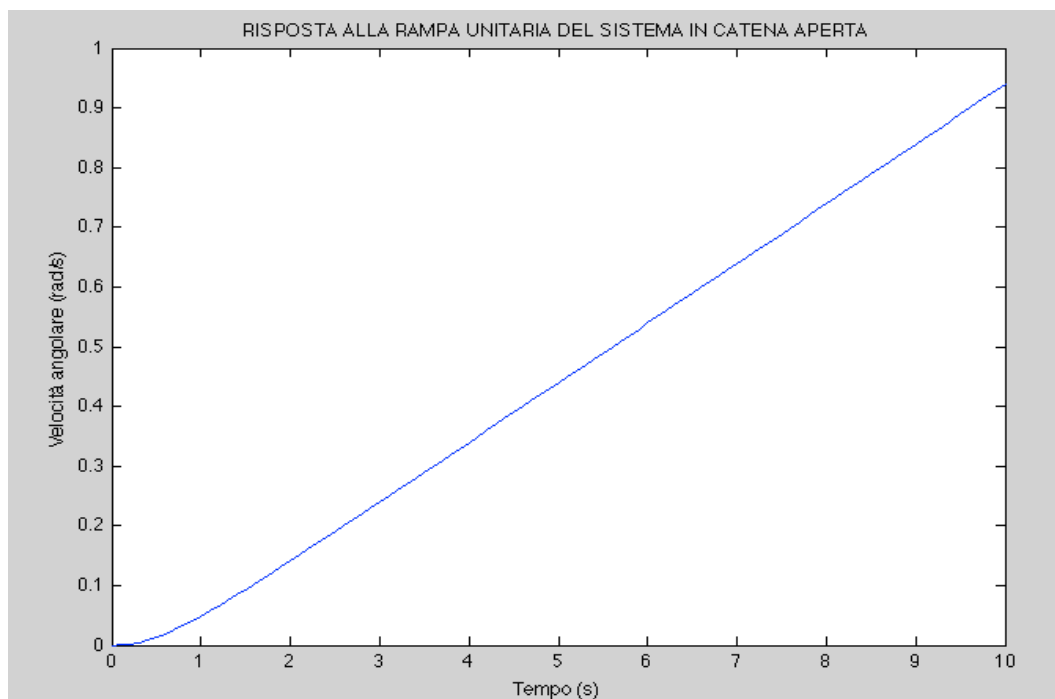


Fig. 5 grafico della risposta alla rampa unitaria del sistema in catena aperta

Per rendere immediata la differenza tra la velocità angolare desiderata e quella raggiunta dal motore, si possono inserire sullo stesso grafico i segnali di ingresso (linea rossa) e di uscita (linea blu). Per ottenere ciò, si devono eseguire i seguenti comandi in ambiente Matlab:

```
t=0:0.1:10;  
v=t;  
[w,t]=lsim(motor,v,t);  
plot(t,w,'b');  
hold on;  
plot(t,v,'r');  
title('CONFRONTO INGRESSO USCITA RAMPA UNITARIA');  
xlabel('Tempo (s)');  
ylabel('Velocità angolare (rad/s)');
```

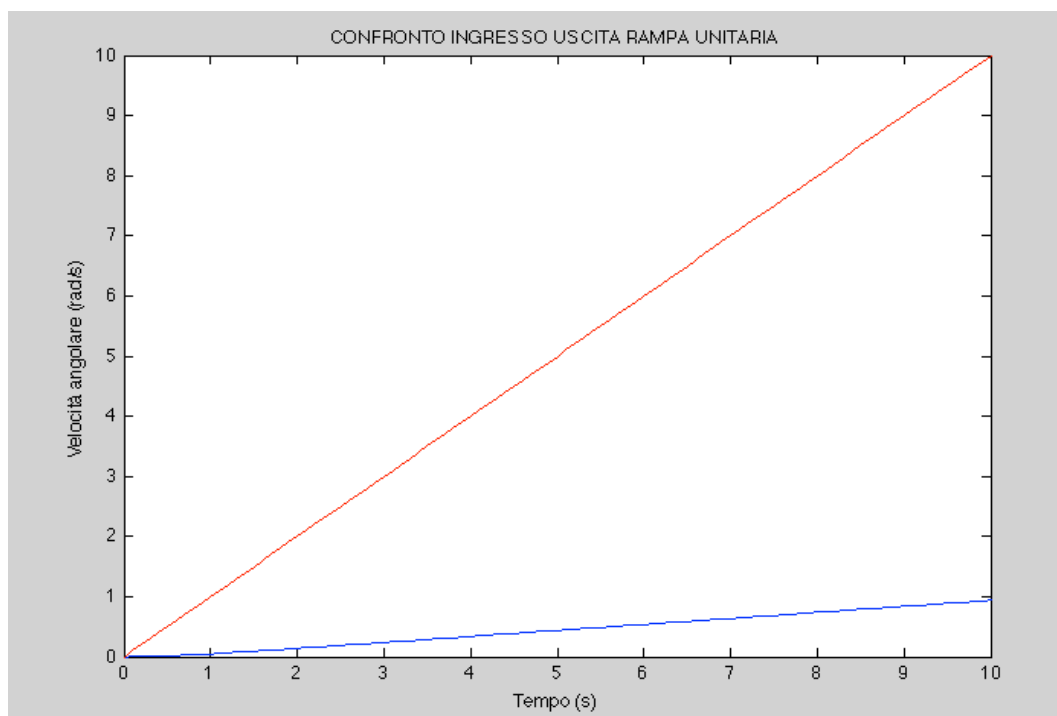


Fig. 6 confronto ingresso-uscita in risposta alla rampa unitaria

Lo stesso procedimento è stato eseguito con un ingresso a rampa parabolica. Anche in questo caso il segnale di ingresso è stato indicato con il parametro v .

```
t=0:0.1:10;  
v=t.*t./2;  
[w,t]=lsim(motor,v,t);  
plot(t,w,'b');  
title('RISPOSTA ALLA RAMPA PARABOLICA DEL SISTEMA IN CATENA APERTA');  
xlabel('Tempo (s)');  
ylabel('Velocità angolare (rad/s)');
```

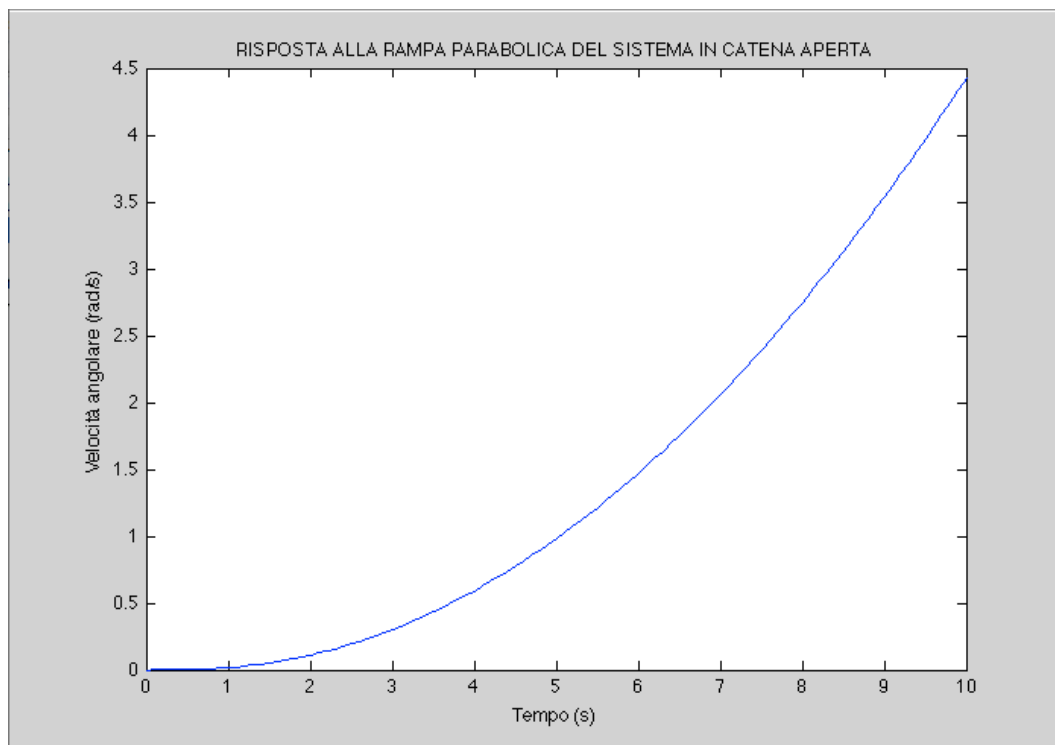


Fig. 7 grafico della risposta alla rampa parabolica del sistema in catena aperta

Infine osserviamo la differenza tra i valori in entrata (linea rossa) e quelli in uscita (linea blu).

```
t=0:0.1:10;  
v=t.*t./2;  
[w,t]=lsim(motor,v,t);  
plot(t,w,'b');  
hold on;  
plot(t,v,'r');  
title('CONFRONTO INGRESSO USCITA RAMPA PARABOLICA');  
xlabel('Tempo (s)');  
ylabel('Velocità angolare (rad/s)');
```

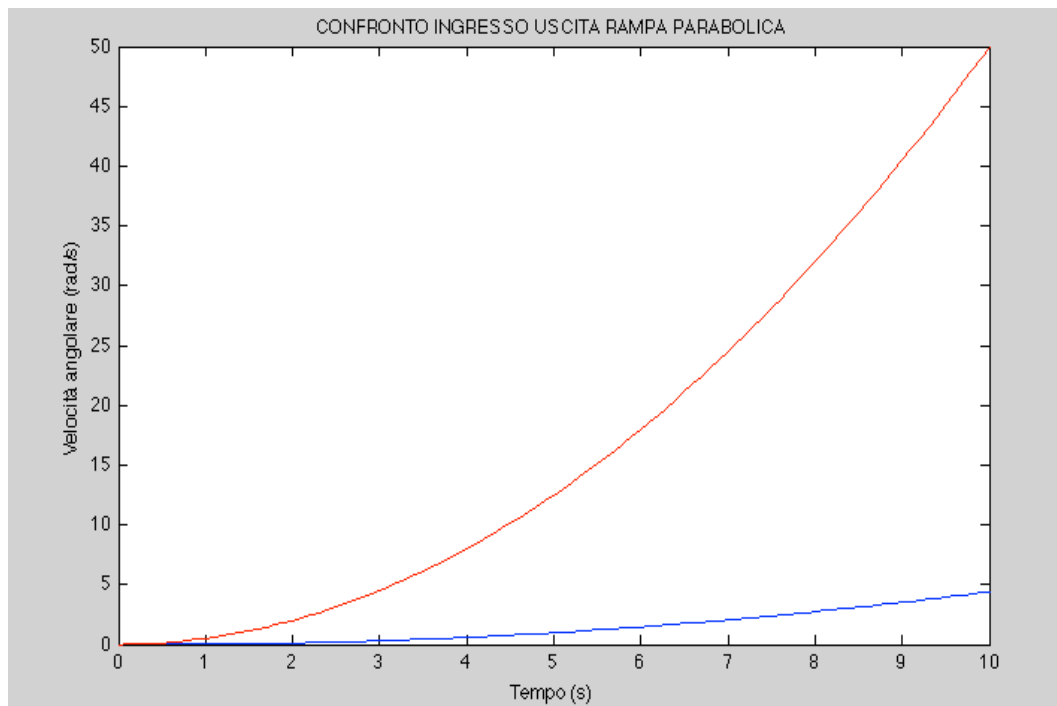


Fig. 8 confronto ingresso-uscita in risposta alla rampa parabolica

Come anche per gli altri segnali analizzati, l'errore di inseguimento (la differenza tra la velocità angolare desiderata e la velocità effettivamente raggiunta dal motore) è evidente ed eccessivo. È necessario quindi realizzare un controllo adatto per poter ovviare a questo tipo di problema, tenendo conto delle specifiche richieste, elencate all'inizio dell'elaborato.

Nelle analisi delle risposte ai vari segnali canonici, viene sempre considerato $T_d = 0$, ovvero il motore privo di carichi esterni. Per poter simulare lo schema a blocchi di un motore elettrico in continua viene usato il software Simulink che permette di osservare questo tipo di analisi.

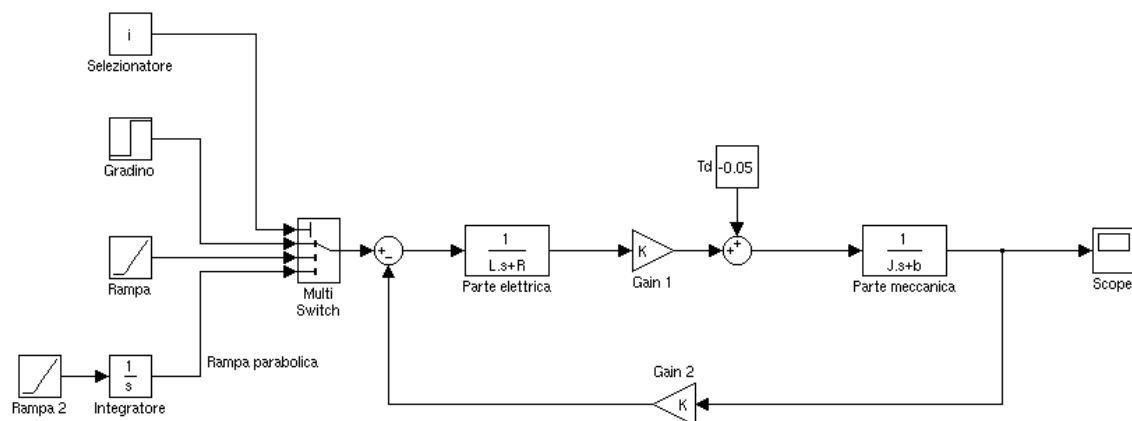


Fig. 9 schema a blocchi Simulink

Come si può notare dalla Fig. 9 è stata aggiunta una coppia di carico tra i blocchi che rappresentano rispettivamente la parte elettrica e la parte meccanica del modello del motore elettrico. La coppia esterna T_d viene considerata, in questo caso, come un ingresso di disturbo costante negativo in quanto impedisce, o comunque ostacola, la crescita della velocità

angolare del rotore.

Nei grafici seguenti è possibile osservare il comportamento dell'uscita del sistema, avendo inserito in entrata i segnali canonici: gradino, rampa unitaria e rampa parabolica (rispettivamente Fig. 10, Fig. 11 e Fig. 12).

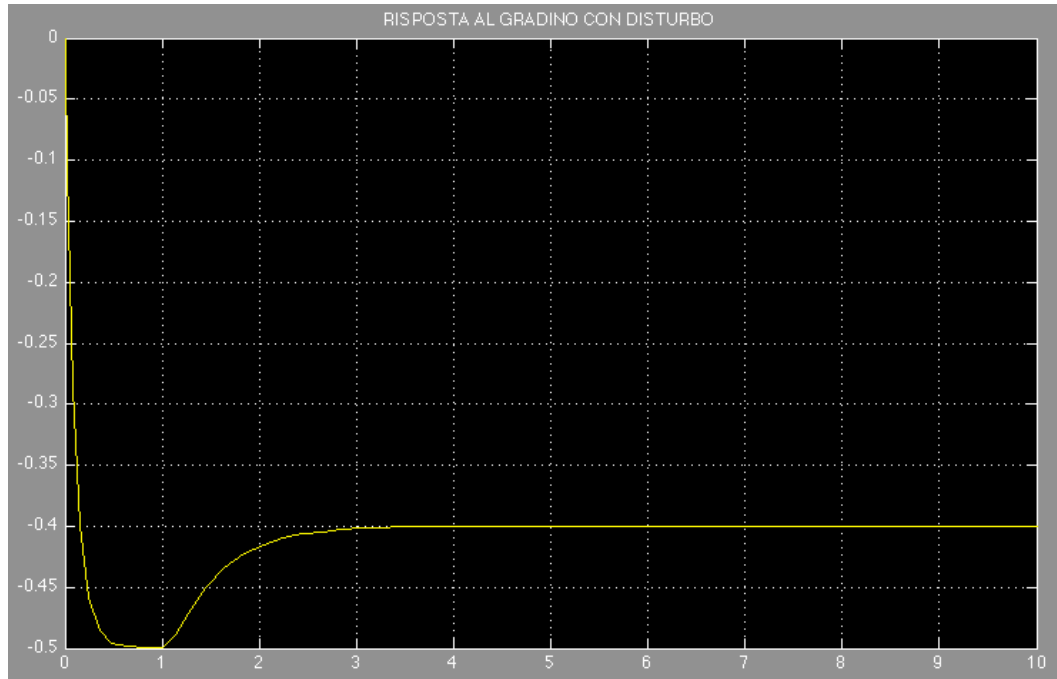


Fig. 10 grafico risposta al gradino del sistema con $T_d = -0.05$

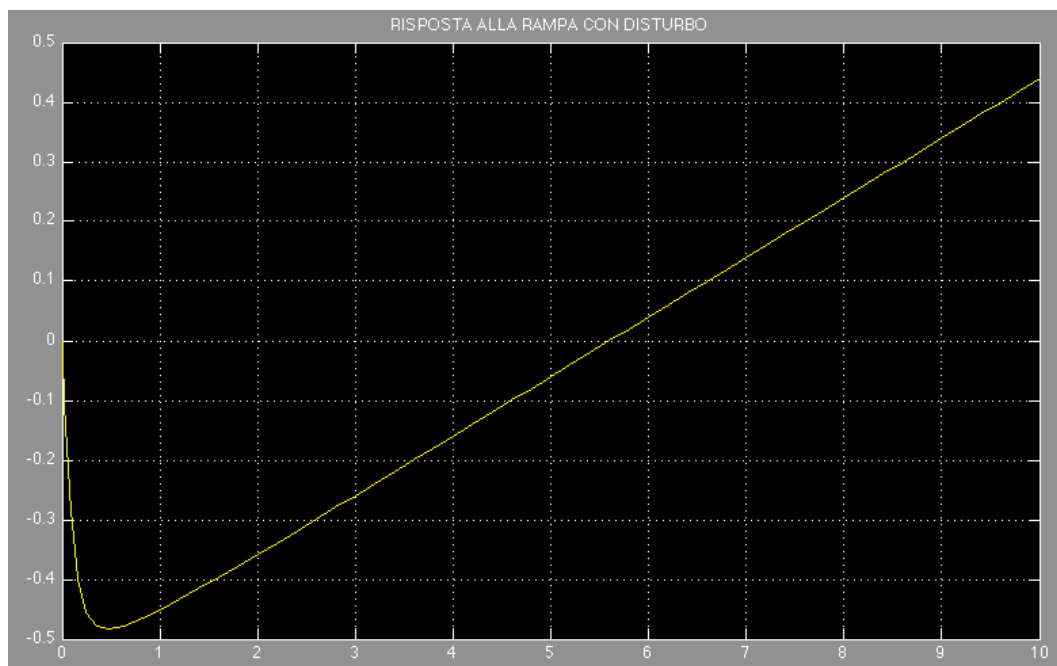


Fig. 11 grafico risposta alla rampa del sistema con $T_d = -0.05$

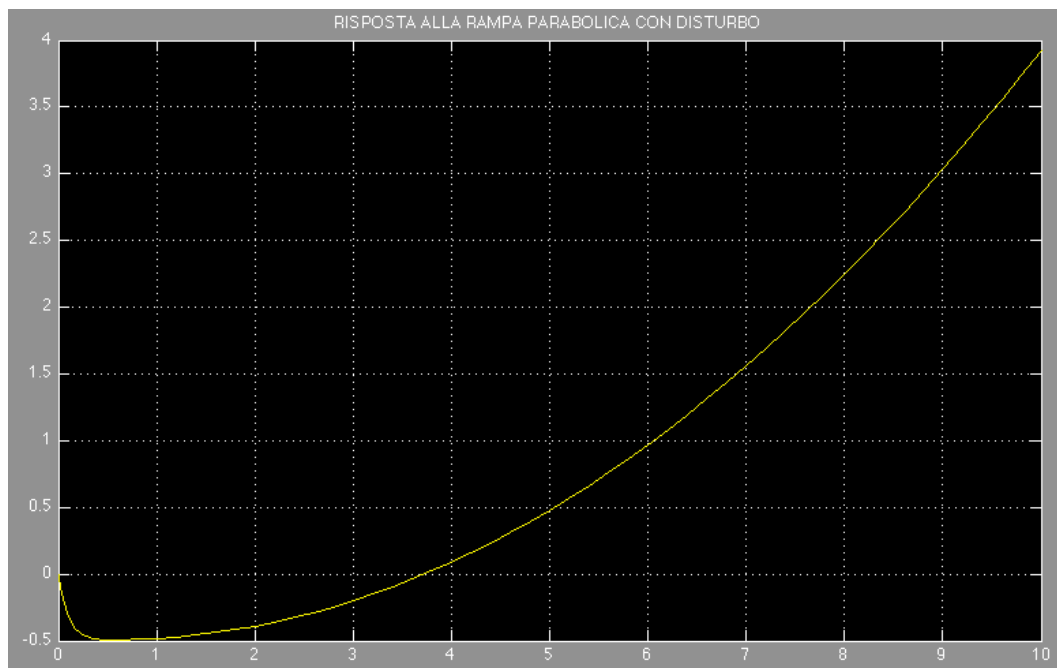


Fig. 12 grafico risposta alla rampa parabolica del sistema con $T_d = -0.05$

Si può notare in ogni grafico il contributo negativo dovuto al carico esterno T_d . Nel momento in cui viene acceso il dispositivo ($t=0$), l'uscita tende immediatamente ad assumere valori negativi, che sono dovuti all'ingresso di disturbo. Successivamente, dopo un certo tempo di set up, la velocità angolare in uscita tende a crescere secondo il tipo di segnale in ingresso. Con l'ingresso a gradino, viene incrementata di 0.1 rad/s (come è stato calcolato in precedenza) e poi si stabilizza su quel valore; con l'ingresso a rampa unitaria, l'incremento segue una pendenza di circa 1; infine con la rampa parabolica, si ottiene una crescita in uscita più rapida di quelle riferite ai segnali canonici precedenti.

ANALISI ARMONICA

Per l'analisi armonica (o in frequenza) del motore elettrico in corrente continua, si prende in considerazione il segnale di ingresso:

$$v(t) = \sin(\hat{\omega}t) \quad \text{per } t \geq 0$$

Dato questo tipo di entrata, si ottiene in uscita un segnale dello stesso tipo, ma amplificato di un valore pari a $|W_{v,\omega}(j\hat{\omega})|$ e sfasato di un angolo pari a $\angle W_{v,\omega}(j\hat{\omega})$. Questi due valori si ottengono imponendo $s = j\hat{\omega}$ (con $\hat{\omega}$ che indica la pulsazione del segnale sinusoidale) nella funzione di trasferimento calcolata precedentemente. Si può quindi ottenere una buona valutazione dell'ingresso e dell'uscita del sistema, utilizzando i diagrammi di Nyquist e di Bode. Il primo, infatti, illustra nel piano di Gauss (necessario per raffigurare geometricamente i numeri complessi su un piano cartesiano) i valori assunti da $W_{v,\omega}(j\hat{\omega}) = \Re[W_{v,\omega}(j\hat{\omega})] + j\Im[W_{v,\omega}(j\hat{\omega})]$. I diagrammi di Bode, invece, tracciano la risposta in frequenza del sistema preso in esame, analizzando separatamente il modulo e la fase della funzione di trasferimento corrispondente.

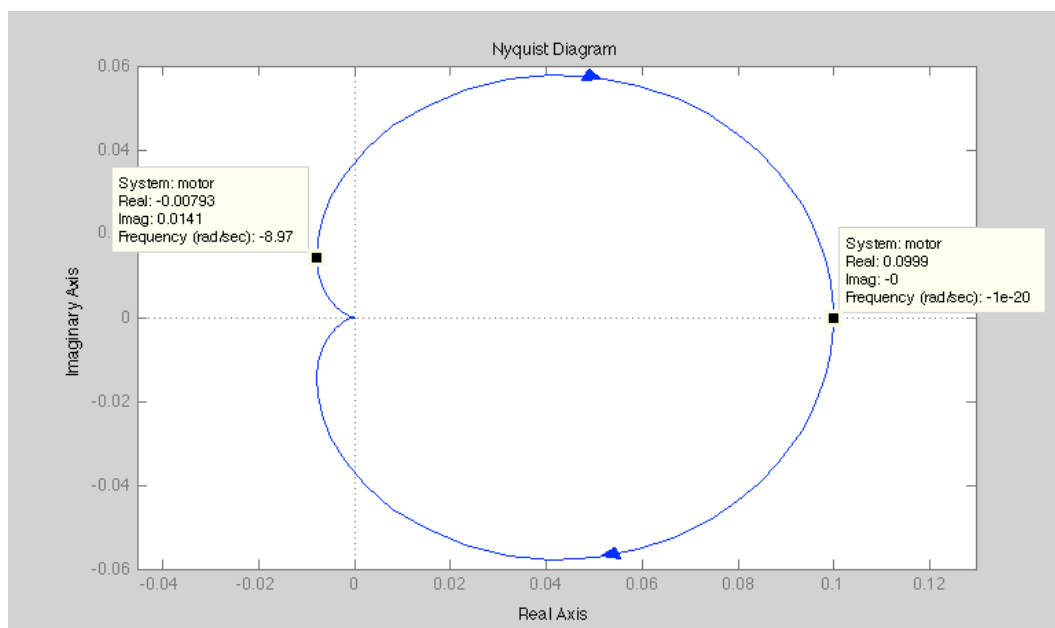


Fig. 13a diagramma di Nyquist della funzione di trasferimento del motore elettrico

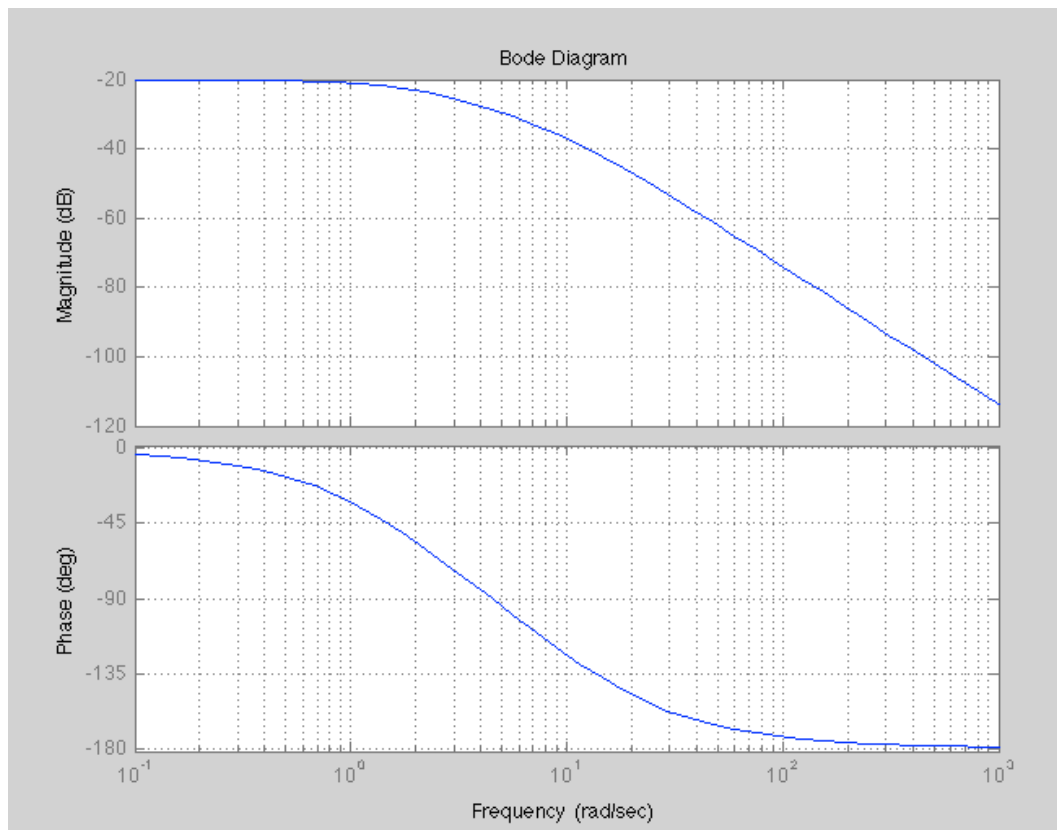


Fig. 13b diagrammi e di Bode della funzione di trasferimento del motore elettrico

A questo punto vengono riportati i grafici raffiguranti i segnali di ingresso in confronto con quelli di uscita. Sono state effettuate alcune prove con pulsazioni differenti: $\hat{\omega} = 0.1 ; 1; 10 \text{ rad/s}$.

Come si può notare, in uscita al sistema si ottiene un segnale sinusoidale con la stessa pulsazione dell'ingresso ma attenuato e sfasato, come presumibile osservando la Fig. 13.

I comandi Matlab effettuati per ottenere i grafici della risposta in frequenza del sistema sono i seguenti:

```
t=0:0.1:150;
w=0.1;
W=freqresp(motor,w);
A=abs(W);
f=angle(W);
plot(t,sin(w*t),'r');
hold on;
plot(t,A*sin(w*t+f),'b');
title('RISPOSTA AD UN INGRESSO SINUSOIDALE');
xlabel('Tempo (s)');
ylabel('Ampiezza (rad/s)');
```

In questo caso è stato utilizzato il comando `freqresp` che permette il calcolo dei valori della risposta in frequenza di un sistema dinamico. La serie di comandi riportati è quella riguardante la prima prova, nella quale è stato posto in ingresso un segnale sinusoidale con pulsazione $\hat{\omega} = 0.1 \text{ rad/s}$. Per quanto riguarda le altre prove, è stato utilizzato lo stesso codice, modificando però i valori di τ e ω . τ (che indica il tempo) è stato modificato in modo tale da rendere apprezzabili maggiormente le caratteristiche del segnale in uscita, mentre il valore di ω è stato sostituito con i valori delle pulsazioni scelte arbitrariamente.

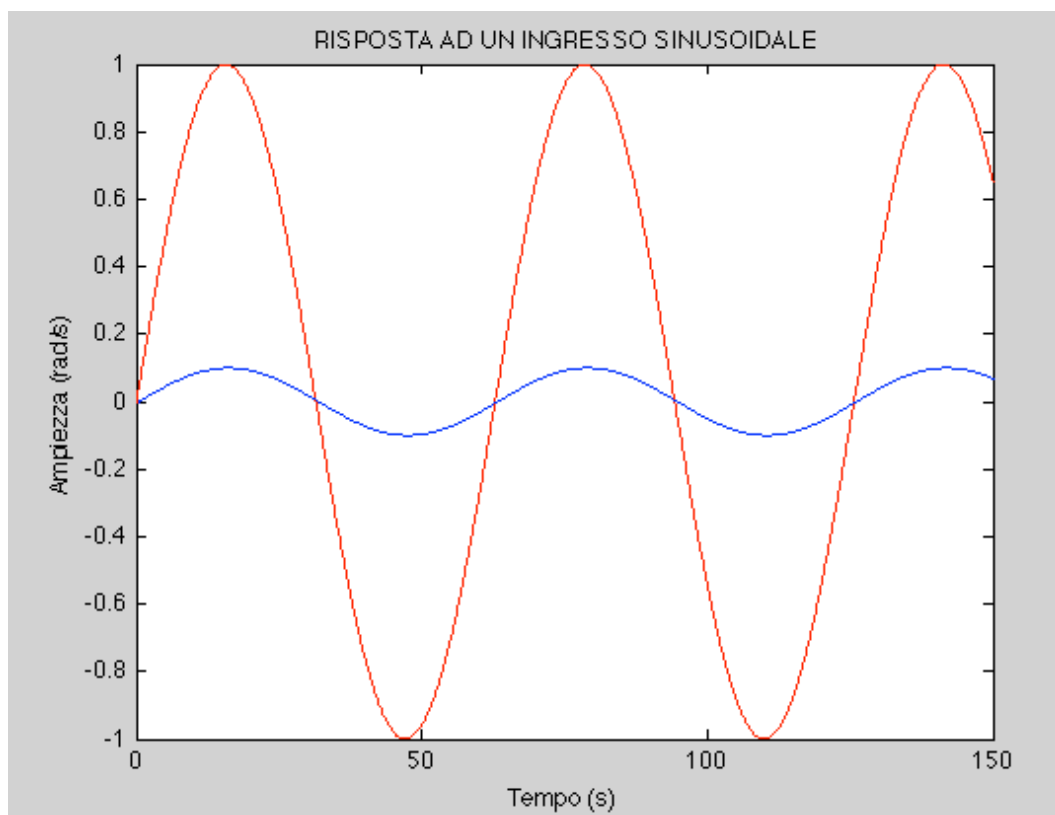


Fig. 14 grafico della risposta del sistema ad un ingresso sinusoidale con frequenza $\hat{\omega} = 0.1 \text{ rad/s}$

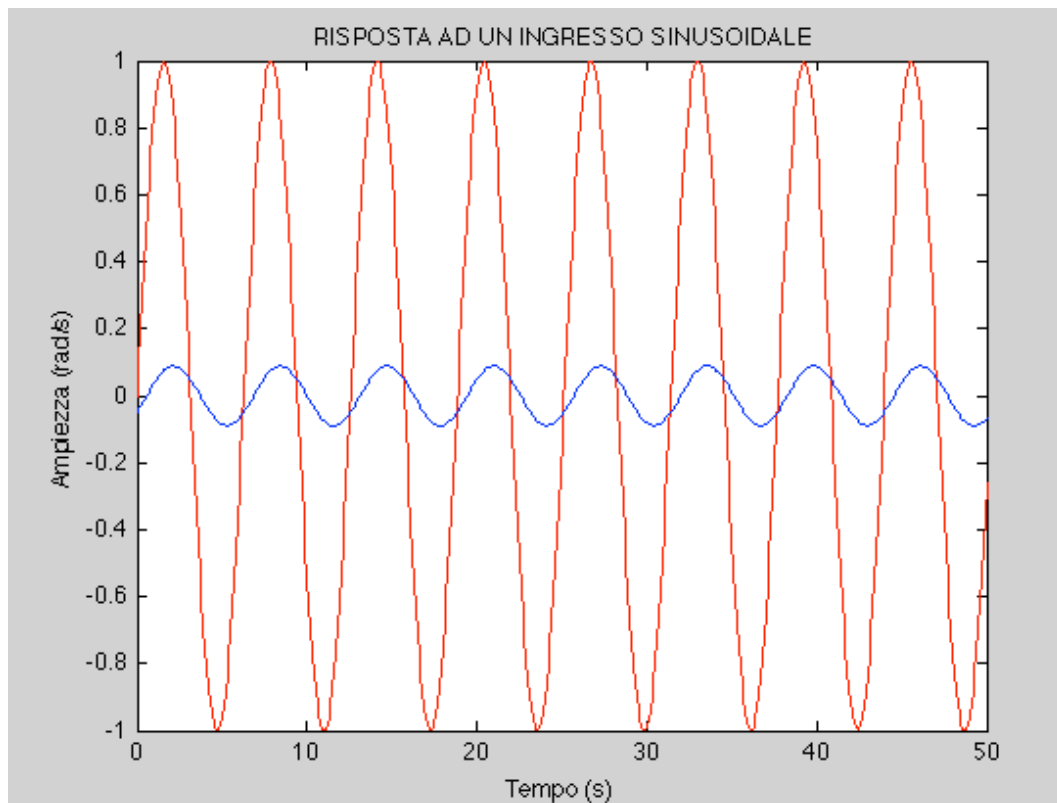


Fig. 15 grafico della risposta del sistema ad un ingresso sinusoidale con frequenza $\hat{\omega} = 1 \text{ rad/s}$

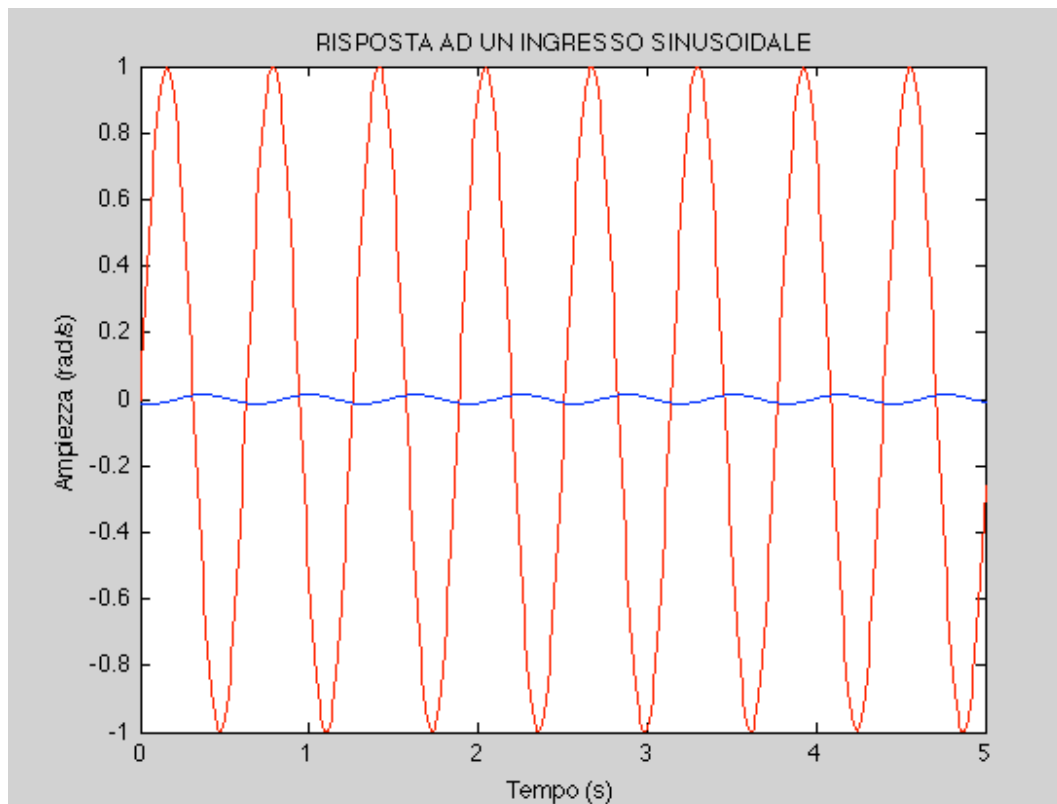


Fig. 16 grafico della risposta del sistema ad un ingresso sinusoidale con frequenza $\hat{\omega} = 10 \text{ rad/s}$

Progetto controllore

Finora è stato analizzato il sistema in catena aperta, modificando gli ingressi e studiandone la risposta. In questa parte dell'elaborato viene invece effettuata l'analisi e la progettazione del controllore. Quest'ultimo verrà implementato con diverse sintesi: tramite PID, il luogo delle radici e le reti correttrici (sintesi in frequenza).

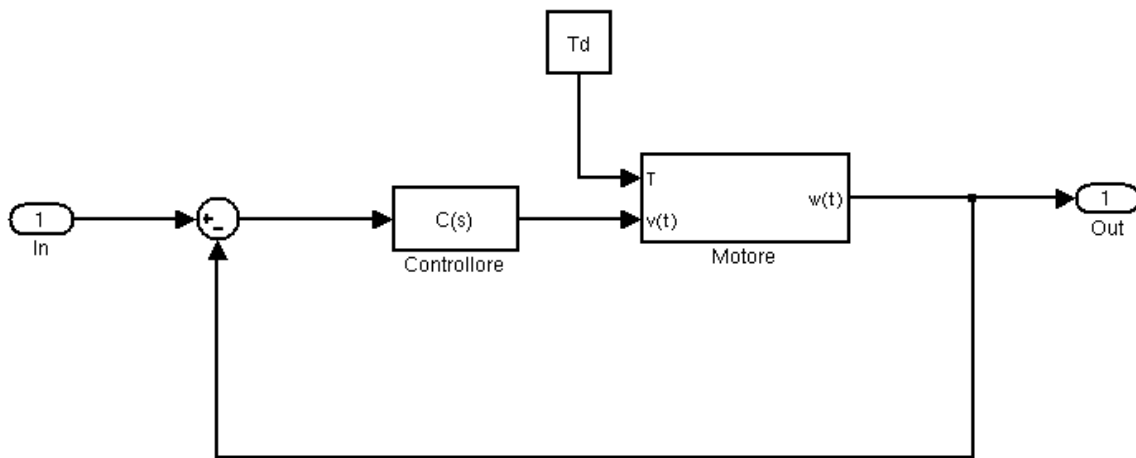


Fig. 17 Schema a blocchi controllore e motore in retroazione negativa

PID

Il controllore PID (Proporzionale Integrativo Derivativo) è un sistema di controllo in retroazione negativa, che, grazie ad un input che indica il valore attuale, è in grado di reagire in caso di errore, negativo o positivo, riducendolo al valore 0. Il controllore riceve in ingresso un valore da un processo e un valore di riferimento, la differenza tra questi, ovvero l'errore, viene usato per determinare il valore della variabile di uscita del controllore.

La funzione di trasferimento che caratterizza questo tipo di controllore è data da:

$$C(s) = K_p + \frac{K_i}{s} + K_d s = \frac{K_d s^2 + K_p s + K_i}{s}$$

La sintesi vera e propria consiste quindi nel trovare dei valori ai coefficienti K_p , K_d e K_i (rispettivamente coefficiente proporzionale, derivativo e integrativo) in modo tale che la risposta del sistema soddisfi le caratteristiche prestabilite.

Verrà quindi analizzata la risposta del sistema al gradino unitario, prestando particolare attenzione agli effetti del controllore, sapendo che ogni azione (proporzionale, derivativa e integrativa) agisce solo su un aspetto del segnale. La parte proporzionale agisce sul tempo di salita, quella derivativa riduce la sovraelongazione mentre la parte integrativa migliora il comportamento a regime. Di conseguenza, per ottenere un controllore efficiente, si deve trovare un compromesso cercando di raggiungere le prestazioni del sistema desiderate.

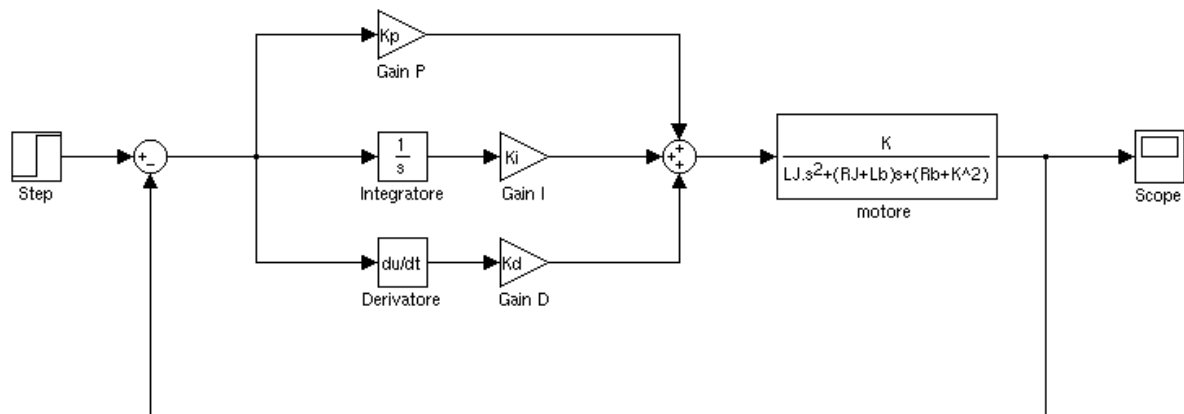


Fig. 18 schema a blocchi del sistema con retroazione negativa e con controllore PID

Inizialmente viene considerato un controllore di tipo puramente proporzionale, con coefficienti pari a:

$$K_p = 100; \quad K_i = 0; \quad K_d = 0$$

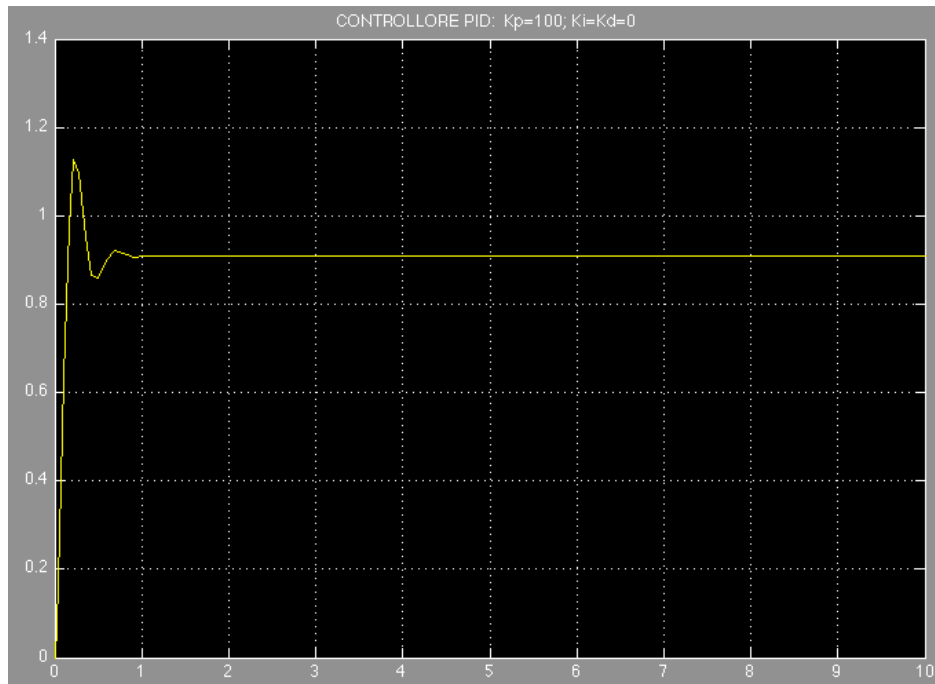


Fig. 19 grafico risposta al gradino con controllore puramente proporzionale

Dal grafico riportato nella Fig. 19 si può notare un notevole miglioramento del tempo di salita, ma sono presenti ancora dei difetti: la sovraelongazione e l'errore a regime. Per perfezionare queste caratteristiche, viene posto un valore piccolo ai coefficienti integrativo e derivativo:

$$K_p = 100; \quad K_i = 1; \quad K_d = 1$$

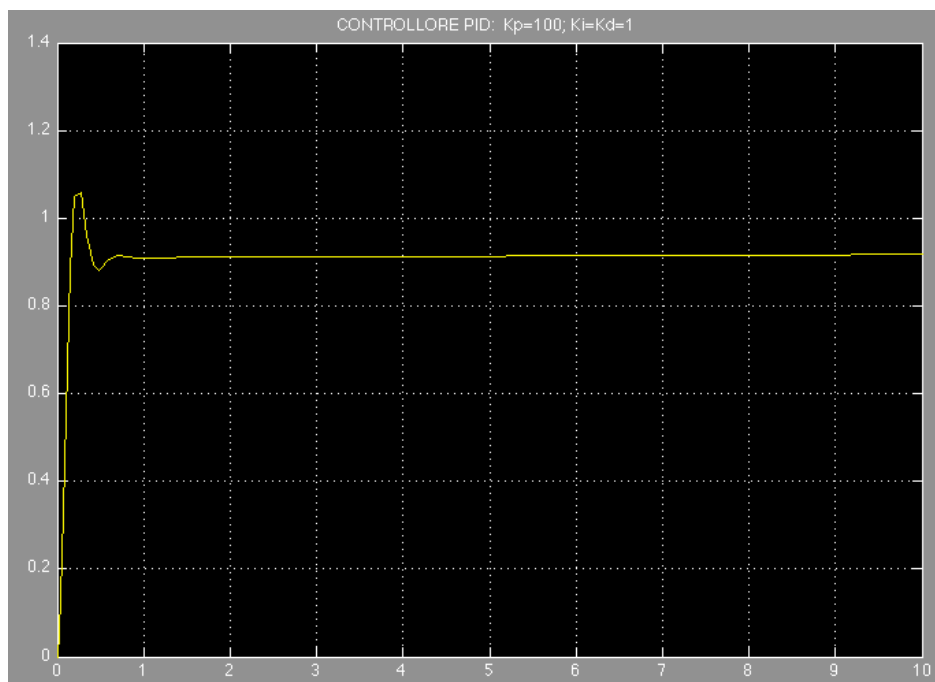


Fig. 20 grafico risposta al gradino con controllore PID con coefficienti $K_p = 100, K_i = 1, K_d = 1$

Ora si procede incrementando il valore del coefficiente integrativo, eliminando così l'errore a regime. Si pongono quindi i seguenti valori:

$$K_p = 100 ; \quad K_i = 200 ; \quad K_d = 1$$

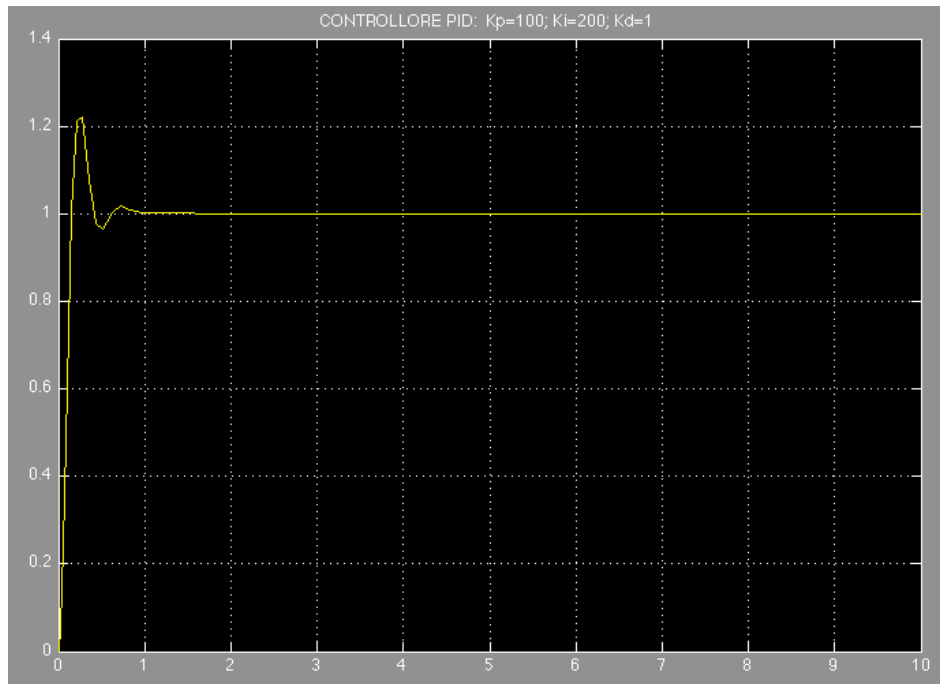


Fig. 21 grafico risposta al gradino con controllore PID con coefficienti $K_p = 100, K_i = 200, K_d = 1$

La velocità angolare che si ottiene ora all'uscita del sistema si stabilizza sul valore di 1 rad/s, ma, come si può notare dalla Fig. 21, la sovraelongazione è ancora troppo elevata, serve quindi l'aumento del coefficiente derivativo. È necessario però compensarne l'effetto diminuendo il valore del coefficiente integrativo.

Si impostano quindi i seguenti valori:

$$K_p = 100 ; \quad K_i = 80 ; \quad K_d = 5$$

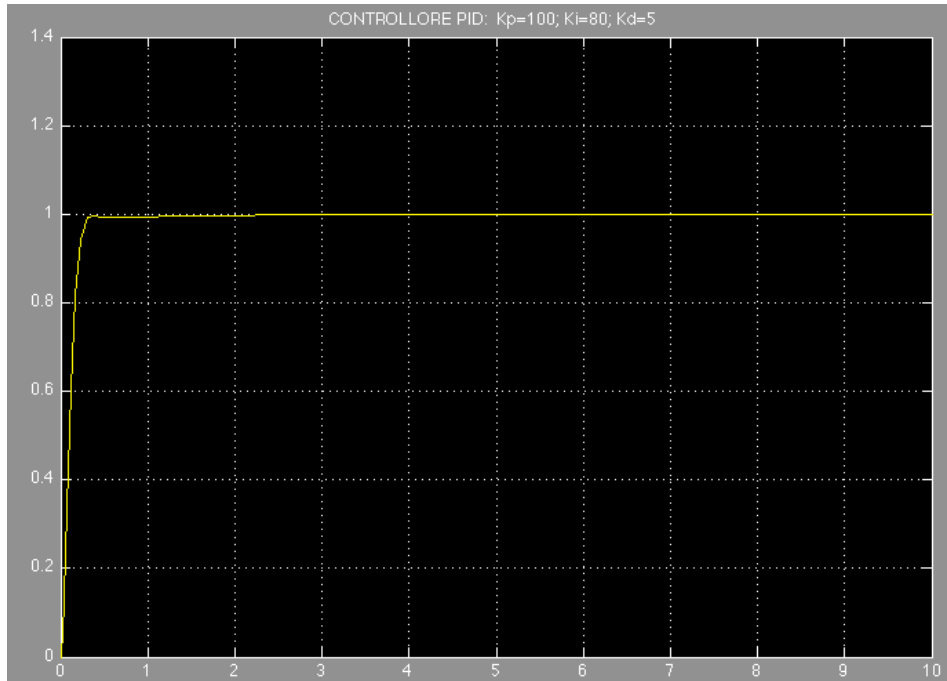


Fig. 22 grafico risposta al gradino con controllore PID con coefficienti $K_p = 100, K_i = 80, K_d = 5$

In conclusione, come si può notare dal grafico della Fig. 22, sono state soddisfatte tutte le richieste sulla costruzione del controllore, ed è stata ottenuta la rispettiva funzione di trasferimento:

$$C(s) = 100 + \frac{80}{s} + 5s$$

LUOGO DELLE RADICI

Viene ora analizzato lo stesso sistema con il metodo del luogo delle radici: un procedimento grafico che permette di studiare lo spostamento dei poli, della funzione di trasferimento ad anello chiuso presa in esame, al variare di un parametro reale K_c .

Inizialmente viene considerato un controllore di tipo proporzionale, ovvero:

$$C(s) = K_c$$

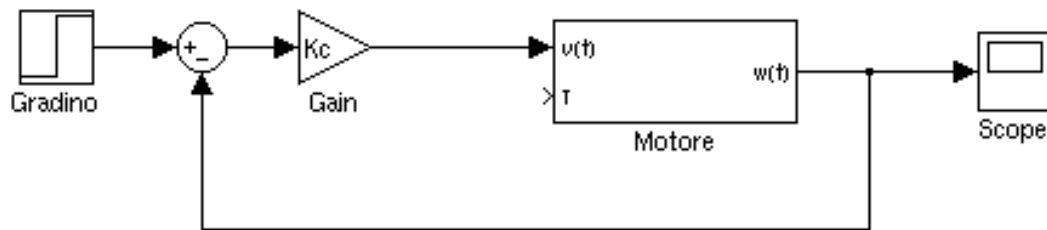


Fig. 23 schema a blocchi controllore proporzionale con guadagno K_c

Osservando lo schema riportato nella Fig. 23 si ottiene la funzione di trasferimento del sistema con retroazione negativa:

$$W_{\omega_{rif}, \omega} = \frac{K_c M(s)}{1 + K_c M(s)}$$

nella quale ω_{rif} indica il segnale in ingresso, la velocità angolare di riferimento, ω invece rappresenta la velocità angolare ottenuta in uscita (il valore raggiunto effettivamente dal motore) e infine $M(s)$ corrisponde alla funzione di trasferimento del blocco equivalente al motore.

La sintesi del controllore quindi consiste nello stabilire il valore del coefficiente K_c in modo tale che vengano soddisfatte le condizioni riguardanti le prestazioni del sistema desiderate.

Per questo fine, viene rappresentato il polinomio corrispondente al denominatore della funzione di trasferimento sul piano complesso e successivamente viene studiato il comportamento di $D(s) = 1 + K_c M(s)$ al variare del parametro K_c .

Per il disegno del luogo delle radici è stato utilizzato Matlab, tramite la seguente serie di comandi:

```
rlocus(motor);
sgrid(0.8,0);
sigrid(2.3);
title('LUOGO DELLE RADICI');
xlabel('Asse Reale');
ylabel('Asse Immaginario');
```

La seconda indicazione sovrappone al grafico del luogo delle radici delle restrizioni dovute alle condizioni imposte per la sintesi del controllore. Infatti il primo parametro, $\vartheta = 0.8$, corrisponde al limite del 5% per la sovraelongazione che è stato richiesto come caratteristica del dispositivo di controllo, mentre il secondo, $\omega_n = 0$, indica la pulsazione naturale, posta nulla perché non ci sono richieste da soddisfare riguardanti il tempo di salita. Di conseguenza, come si può notare nella Fig. 24, sono presenti due semirette che tagliano il luogo delle radici, limitando il range su cui si può spaziare per individuare il valore di K_c desiderato.

Inoltre il comando `sigrid(σ)` definisce, tramite una retta verticale passante per il punto σ (che in questo caso vale 2.3), l'area in cui è possibile scegliere la radice in modo tale da mantenere il tempo di assestamento al di sotto del limite superiore stabilito come obiettivo per la sintesi del controllore ($T_s \leq 2$ s).

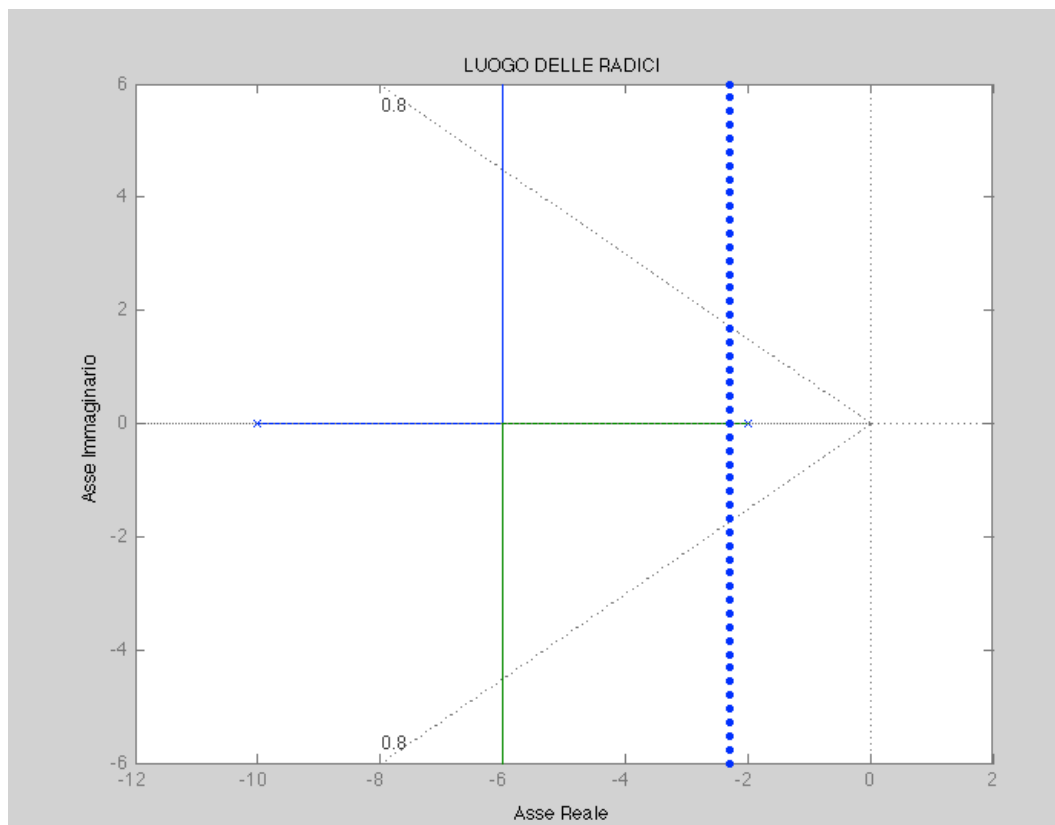


Fig. 24 grafico luogo delle radici del sistema

Viene eseguita ora la funzione `rlocfind` che permette di calcolare il guadagno corrispondente ad un punto del luogo delle radici:

```
[k, poli] = rlocfind(motor)
```


Si ottiene quindi:

Select a point in the graphics window

selected_point =

-6.0118 + 2.1801i

k =

10.3664

poli =

-6.0000 + 2.1801i

-6.0000 - 2.1801i

È stato selezionato un punto sul piano, corrispondente ad un valore di K_c , sulla retta orizzontale passante per -6, posizionato circa a metà tra l'asse reale e le semirette diagonali che limitano la scelta del valore del coefficiente per mantenere la sovraelongazione minore del 5%.

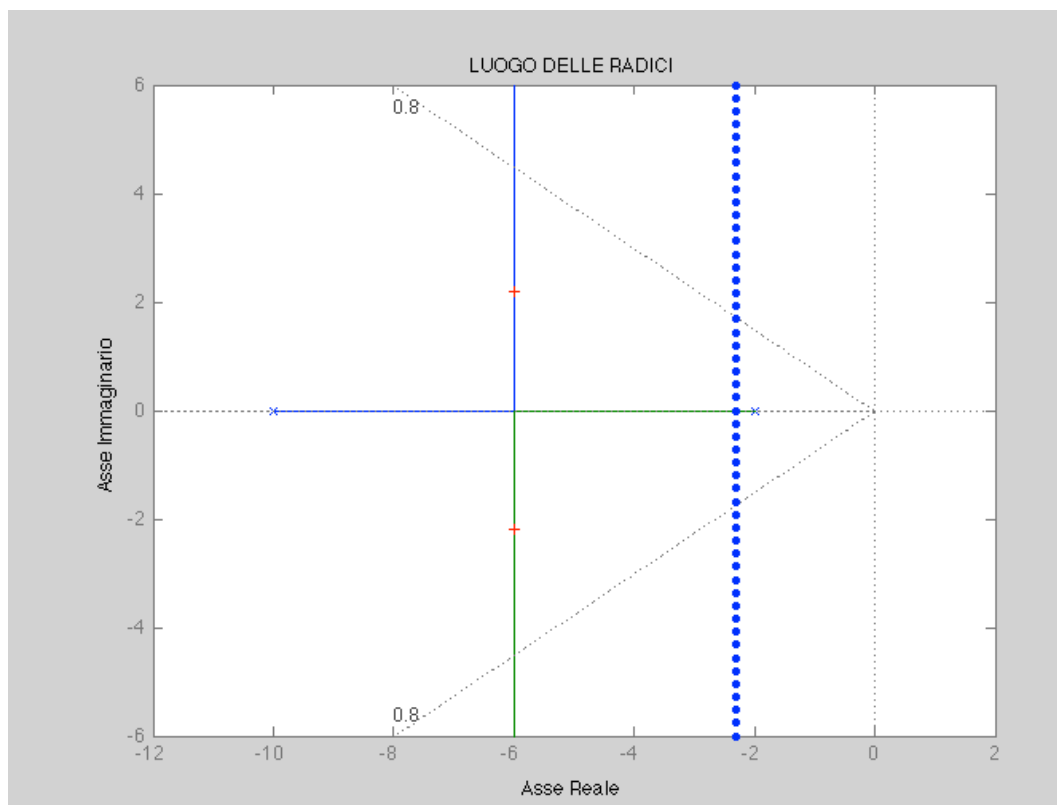


Fig. 25 grafico del luogo delle radici con in evidenza il punto selezionato

Ora si può procedere con la simulazione del sistema in catena chiusa (corrispondente alla Fig.23), che si ottiene tramite l'esecuzione in Matlab del seguente codice:

```
sistema_cl=feedback(k*motor,1);  
t=0:0.01:3;  
step(sistema_cl,t)  
title('RISPOSTA AL GRADINO');  
xlabel('Tempo');  
ylabel('Velocità angolare (rad/s)');
```

nel quale è stato utilizzata la funzione `feedback` per simulare la retroazione unitaria del sistema.

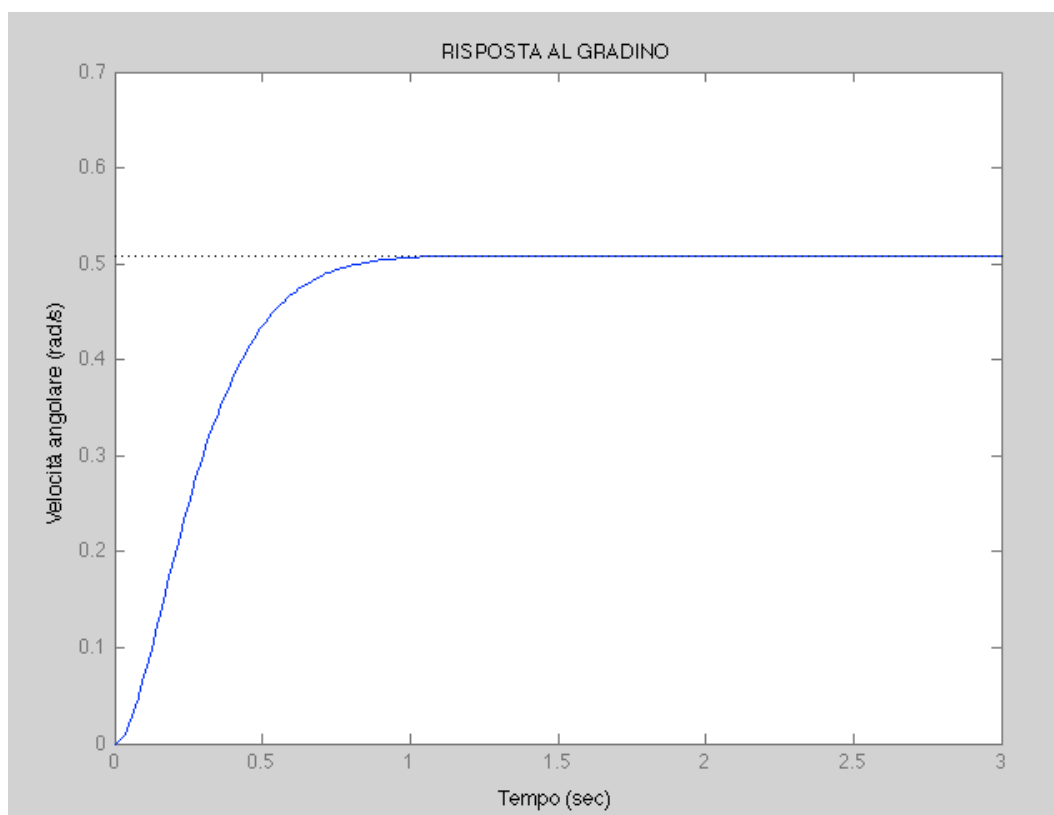


Fig. 26 risposta al gradino con controllore proporzionale $K_c \cong 10.37$

Come si può notare dal grafico della Fig. 26, è stato ottenuto un ottimo risultato sia dal punto di vista della sovralongazione (nulla) che da quello del tempo di assestamento (di circa 1 secondo). Il problema rimane sull'errore a regime, infatti l'ampiezza raggiunta è di poco superiore a 0.5 rad/s, che è circa la metà del valore desiderato. L'errore è quasi del 50%, un valore decisamente troppo elevato. Non è possibile migliorare questa caratteristica semplicemente aumentando il guadagno K_c , perché questo influirebbe negativamente sulla qualità delle altre prestazioni, in particolare aumenterebbe la sovralongazione.

Di conseguenza per raggiungere le caratteristiche desiderate è possibile aggiungere un controllore, detto compensatore lag, con funzione di trasferimento:

$$C_{lag}(s) = \frac{s + z_0}{s + p_0}$$

dove z_0, p_0 rappresentano rispettivamente uno zero e un polo della funzione. Si ottiene quindi la funzione di trasferimento del controllore:

$$C(s) = K_c \frac{s + z_0}{s + p_0}$$

In questo modo viene aggiunta una coppia zero-polo al controllore, che provoca uno spostamento verso destra del luogo delle radici ed inoltre un aumento del guadagno a regime, infatti ponendo la condizione $z_0 > p_0$, il valore viene incrementato di z_0/p_0 volte. Aggiungendo questo tipo di controllore però viene incrementato il ritardo, ovvero il tempo di assestamento aumenta, si deve quindi fare attenzione ad individuare i valori della coppia zero-polo.

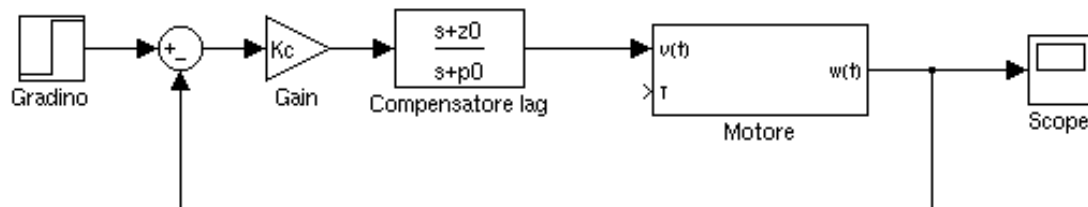


Fig. 27 schema a blocchi del sistema con guadagno K_c e compensatore lag

In questo momento è noto solo il valore di K_c , impostiamo quindi i parametri in questo modo:

$$K_c = 10 \quad z_0 = 0.1 \quad p_0 = 0.01$$

Per la simulazione del comportamento della risposta al gradino del sistema, è stato utilizzato Simulink, avendo modificato opportunamente i valori come stabilito.

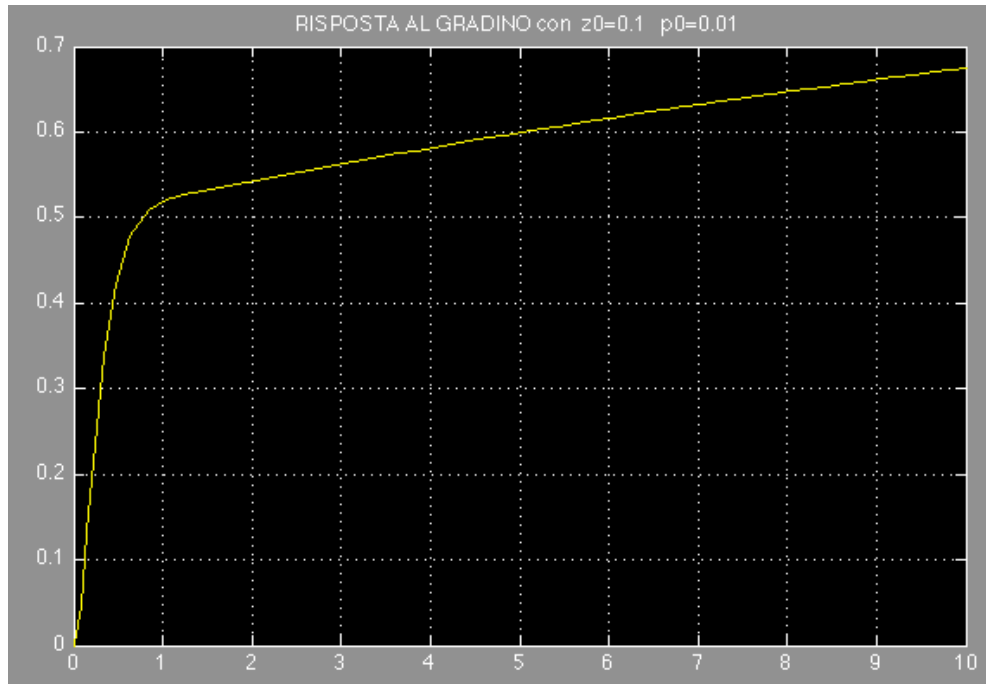


Fig. 28 risposta al gradino del sistema con $z_0 = 0.1$ e $p_0 = 0.01$

Dalla Fig. 28 si può notare che i valori scelti dei parametri non sono quelli cercati, infatti nonostante sia evidente un miglioramento, il comportamento dell'uscita del sistema non soddisfa le condizioni prefissate.

Le prestazioni desiderate si ottengono con un rapporto zero-polo maggiore, infatti ponendo i seguenti valori:

$$K_c = 10 \quad z_0 = 2 \quad p_0 = 0.001$$

si ottiene un risultato soddisfacente, come si può notare dal grafico della risposta al gradino della Fig. 29. Con questi parametri la sovraelongazione non è presente, l'errore a regime è praticamente nullo e il tempo di assestamento, seppur aumentato, è inferiore ai 2 secondi, come indicato inizialmente.

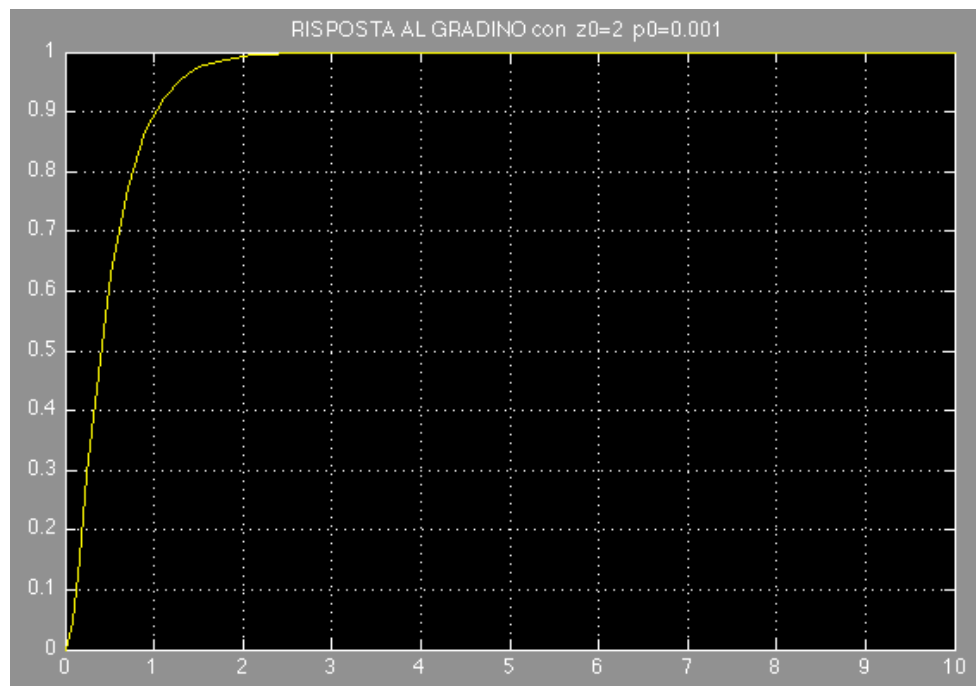


Fig. 29 risposta al gradino del sistema con $z_0 = 2$ e $p_0 = 0.001$

È possibile quindi concludere definendo la funzione di trasferimento del controllore studiato:

$$C(s) = 10 \frac{s + 2}{s + 0.001}$$

SINTESI IN FREQUENZA (RETI CORRETTRICI)

I metodi applicati finora vengono utilizzati per l'analisi e la sintesi del controllore nel dominio del tempo, mentre la tecnica che verrà usata in questa fase studia il comportamento del sistema nel dominio della frequenza. In particolare l'analisi viene effettuata tramite i diagrammi di Bode, per questo motivo è detto anche sintesi di Bode.

Questo metodo parte dal problema di controllare un sistema in retroazione configurato come in fig. 17:

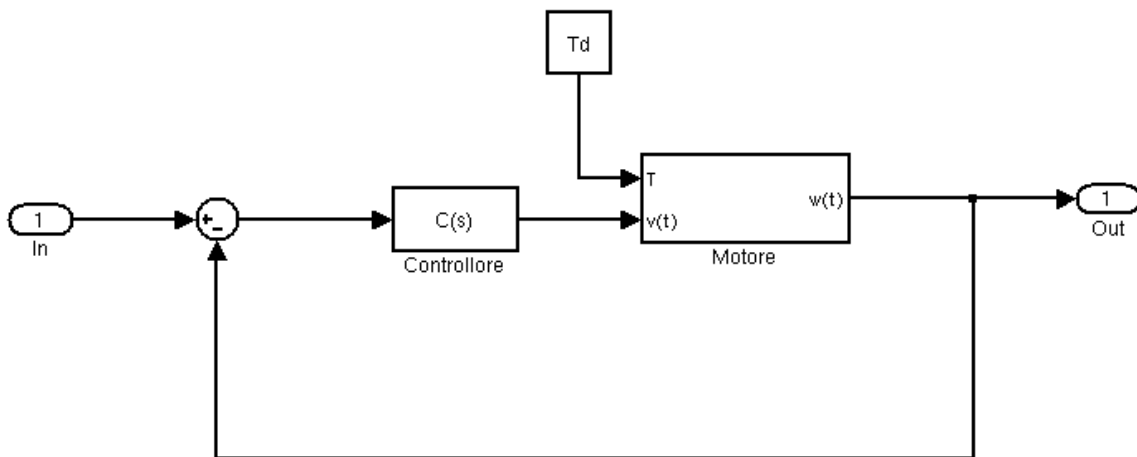


Fig. 17 Schema a blocchi controllore e motore in retroazione negativa

La tecnica su cui si basa la sintesi di Bode è la traduzione delle specifiche di progetto in vincoli in frequenza che il sistema a catena aperta deve soddisfare. La funzione di trasferimento da analizzare quindi è definita $W(s) \triangleq C(s)M(s)$. Per far sì che la sintesi risulti efficace, si deve ottenere $C(s)$ tale che rispetti le condizioni prestazionali descritte in frequenza. Riassumendo, lo studio di $W(s)$ viene svolto dal punto di vista della frequenza. In particolare l'errore a regime dipende dal tipo di sistema (dal numero di poli nell'origine) e dall'amplificazione (dal guadagno in catena aperta), la sovraelongazione dal margine di fase m_φ e infine il tempo di salita è vincolato dalla pulsazione di attraversamento ω_A .

Per iniziare la sintesi del controllore, si devono riscrivere le funzioni di trasferimento prese in esame nella forma di Bode:

$$W(s) = C(s)M(s)$$

$$W(s) = \frac{K_W}{s^{h_W}} \widehat{W}(s)$$

$$C(s) = \frac{K_C}{s^{h_C}} \widehat{C}(s)$$

$$M(s) = \frac{K_M}{s^{h_M}} \widehat{M}(s)$$

dove i coefficienti K corrispondono ai rispettivi guadagni, mentre i valori di h indicano il

numero di poli nell'origine, quindi definiscono la tipologia del sistema.

Nel caso preso in esame si ha:

$$h_W = h_C + h_M = 0 \qquad K_W = K_C K_M$$

$$K_W = \frac{1}{\varepsilon} = \frac{1}{0.01} = 100$$

dove ε indica l'errore a regime, il quale deve essere minore dell'1% secondo le specifiche di progetto.

Il guadagno di $M(s)$ è noto, dato che la funzione di trasferimento del motore è già stata analizzata precedentemente.

$$M(s) = \frac{0.01}{0.005s^2 + 0.06s + 0.1} = \frac{1}{0.5s^2 + 6s + 10}$$

$$K_M = M(0) = 0.1$$

Come si può notare dalla configurazione di $M(s)$, non sono presenti poli nell'origine, quindi $h_M = 0$. È possibile ora ricavare la tipologia e il guadagno del controllore, infatti:

$$h_C = h_W - h_M = 0$$

$$K_C = \frac{K_W}{K_M} = \frac{100}{0.1} = 1000$$

La relazione approssimata tra banda passante B e tempo di salita T_s è

$$T_s \cong \frac{0.4}{B}$$

ma dato che la relazione tra pulsazione di attraversamento ω_A e la banda B è $\omega_A \cong 5B$, si può ottenere una relazione tra tempo di salita e pulsazione. Infine si ricava quindi

$$\omega_A \cong \frac{2}{T_s}$$

inserendo il valore del tempo di salita richiesto (minore di 2 secondi), si ottiene la pulsazione di attraversamento desiderata:

$$\omega_A = 1 \text{ rad/s}$$

Infine la sovraelongazione è legata al margine di fase da

$$m_\varphi \cong 1 - 0.8S$$

Nel caso in esame si vuole ottenere una sovraelongazione minore del 5%, ciò equivale a dire

$$m_\varphi \cong 1 - 0.8 * 0.05 = 0.96 \text{ rad } (\cong 60^\circ)$$

Riassumendo, è stata ricavata la funzione di trasferimento del sistema in catena aperta

$$W(s) = C(s)M(s) = 1000\hat{C}(s)M(s) = \hat{C}(s)\hat{M}(s)$$

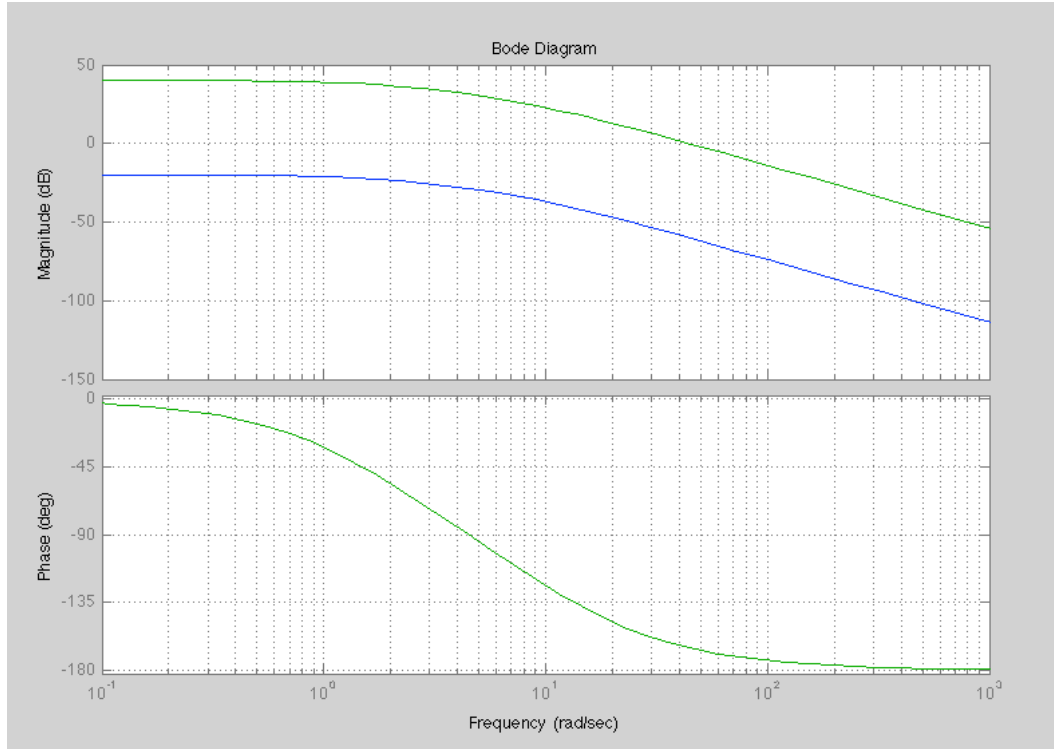


Fig. 30 confronto diagrammi di Bode: originario (linea blu), controllore con $K_c = 1000$ (linea verde)

Come si può notare nella Fig. 30, dove sono raffigurati i due comportamenti in frequenza del sistema in catena aperta privo di controllore (linea blu) e quello con guadagno aggiuntivo $K_c = 1000$ (linea verde), per ottenere i valori di pulsazione di attraversamento e margine di fase calcolati, è necessario l'utilizzo di una rete correttiva. Osservando il grafico, si può vedere che la pulsazione di attraversamento effettiva del sistema è superiore a quella richiesta. In pratica, è necessaria un'azione attenuatrice in quanto ω_A^0 (la pulsazione effettiva) è maggiore di ω_A (pulsazione richiesta). Inoltre, dal grafico della fase (nel quale la linea blu e quella verde coincidono), è evidente che il margine di fase è insufficiente ($m_\varphi^0 < m_\varphi$) ed è quindi necessaria un'azione anticipatrice in grado di aggiungere fase in corrispondenza della pulsazione di attraversamento ω_A .

Riassumendo in formule:

$$\omega_A^0 > \omega_A \quad \text{e} \quad m_\varphi^0 < m_\varphi$$

l'attenuazione necessaria è data da:

$$C = \frac{1}{|\hat{W}(j\omega_A)|} < 1$$

mentre la fase da aggiungere è pari a:

$$\Delta\varphi = m_\varphi - m_\varphi^0 = m_\varphi - (\angle \hat{W}(j\omega_A) + \pi) \quad \text{con } \Delta\varphi > 0$$

Si può quindi affermare che la rete correttrice necessaria è una rete attenuatrice e anticipatrice, vale a dire, a sella. La funzione di trasferimento di questo tipo di controllore, è composta da due coppie zero-polo. Per determinare la posizione di quest'ultimi, è stato utilizzato Sisotool, un supporto grafico dell'ambiente Matlab che permette di ricavare un compensatore SISO (Single Input Single Output) utilizzando il luogo delle radici e i diagrammi di Bode.

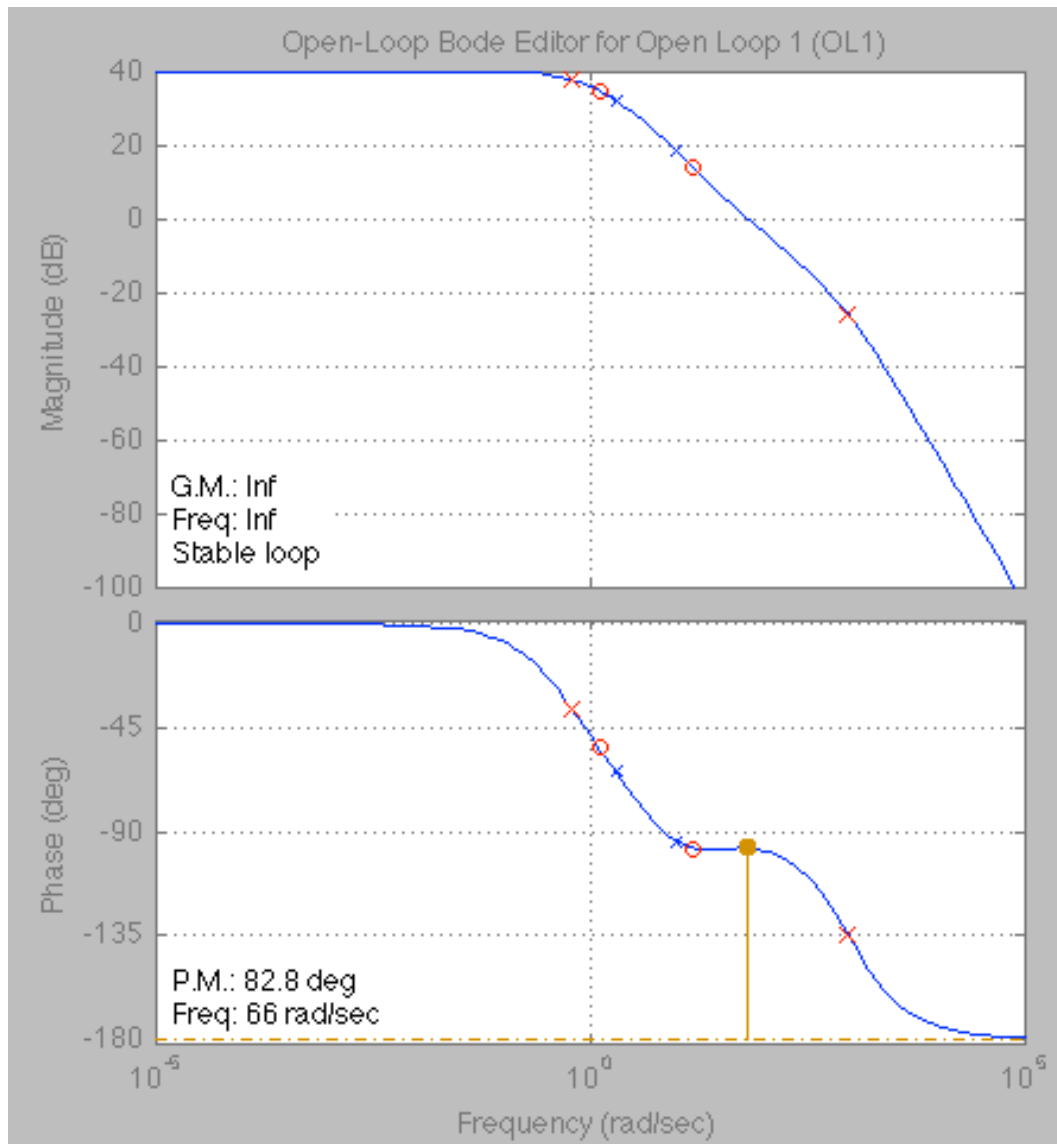


Fig. 31 diagrammi di Bode di $W(s)$ con scelta degli zeri (o) e dei poli (x)

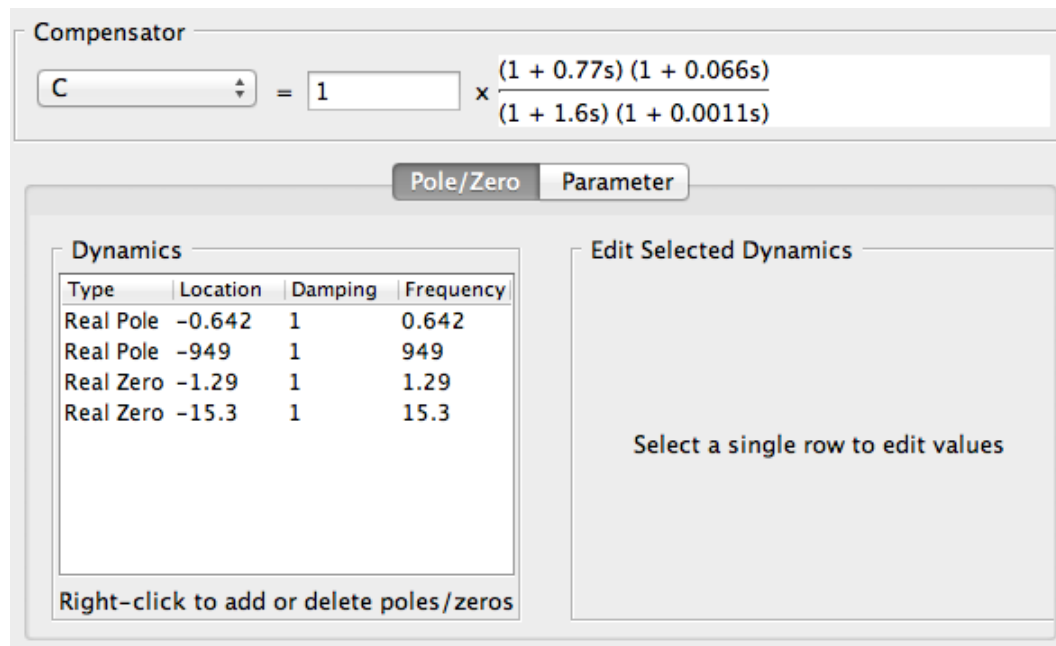


Fig. 32 progettazione $\hat{C}(s)$ tramite Sisotool

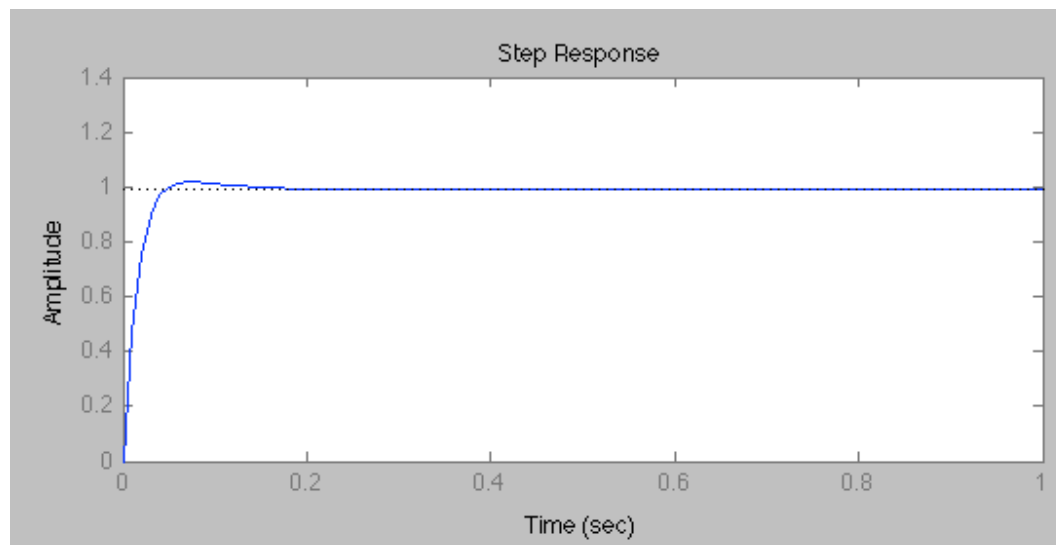


Fig. 33 risposta al gradino di $W(s)$

Dall'osservazione del grafico nella Fig. 33, si nota che sono state soddisfatte tutte le specifiche di progetto, infatti l'errore a regime è minore dell'1%, il tempo di assestamento è minore di 2 secondi e la sovralongazione è minore del 5%.

In conclusione, la sintesi tramite il metodo di Bode fornisce la seguente funzione di transizione del controllore:

$$C(s) = 1000 \frac{(1 + 0.77s)(1 + 0.066s)}{(1 + 1.6s)(1 + 0.0011s)}$$

Analisi dinamica del sistema in catena chiusa

La principale origine di disturbo in un motore elettrico in continua è la coppia esterna di carico, indicata inizialmente con T_d . L'azione di questo momento torcente viene simulata tramite l'inserimento di un ingresso a gradino al blocco rappresentante il sistema del motore, come si può vedere dallo schema a blocchi riportato nella Fig. 34. Come è stato analizzato e descritto all'inizio dell'elaborato, l'aggiunta della coppia esterna modifica il comportamento dinamico del sistema, ciò rende quindi necessaria una verifica del comportamento del motore in catena chiusa a seguito dell'aggiunta del controllore.

I segnali che agiscono in questo caso sono quindi:

$$\omega_{rif}(t) = 1 \quad \text{per } t \geq 0$$

$$T_d(t) = 0.1 \quad \text{per } t \geq 2$$

Il segnale di disturbo viene inserito con 2 secondi di ritardo per permettere al sistema di raggiungere la stabilità, ovvero la velocità angolare di 1 rad/s, e quindi di analizzare gli effetti della coppia di carico con maggior precisione.

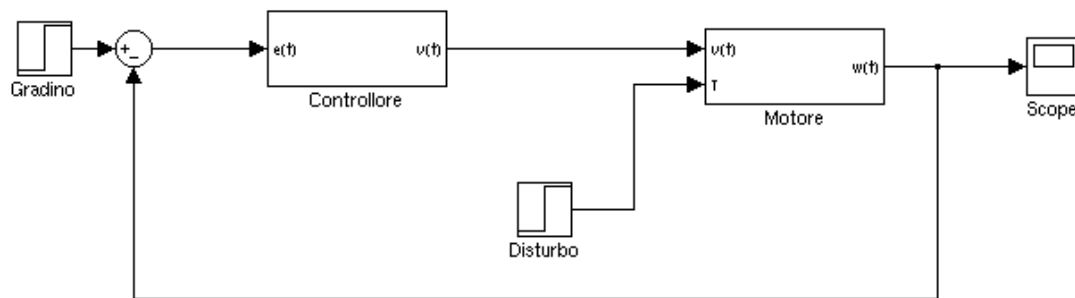


Fig. 34 schema a blocchi sistema in catena chiusa con disturbo

Il blocco che raffigura il controllore è caratterizzato dalla funzione di transizione del dispositivo definito dalla sintesi di Bode:

$$C(s) = 1000 \frac{(1 + 0.77s)(1 + 0.066s)}{(1 + 1.6s)(1 + 0.0011s)}$$

mentre la parte rappresentante il motore è definita da:

$$M(s) = \frac{1}{0.5s^2 + 6s + 10}$$



Fig. 35 risposta del sistema in catena chiusa con disturbo pari a $T_d = 0.1 \text{ rad/s}$

Come si può osservare nel grafico dell'andamento della velocità angolare in uscita nella Fig.35, la sovraelongazione dovuta all'inserimento del disturbo non rispetta le specifiche di progetto desiderate. Infatti l'aggiunta della coppia esterna a 2 secondi dall'accensione del dispositivo, provoca una sovraelongazione circa del 10%, quasi due volte il valore di quella accettata. Di conseguenza è necessario provvedere alla riduzione di tale caratteristica tramite l'inserimento di un compensatore aggiuntivo in cascata a $C(s)$, aumentando così la capacità smorzante del sistema e perciò consentendo la diminuzione della sovraelongazione.

Viene quindi aggiunto un blocco caratterizzato da una funzione di trasferimento composta da un polo e uno zero. Il compensatore che viene analizzato in questo caso è definito da:

$$C'(s) = \frac{5s + 0.05}{s + 1}$$

In conclusione, il controllore finale è caratterizzato da una funzione di trasferimento pari al prodotto delle rispettive funzioni del controllore ricavato con la sintesi di Bode e del compensatore appena aggiunto.

$$C_{fin}(s) = C'(s)C(s)$$

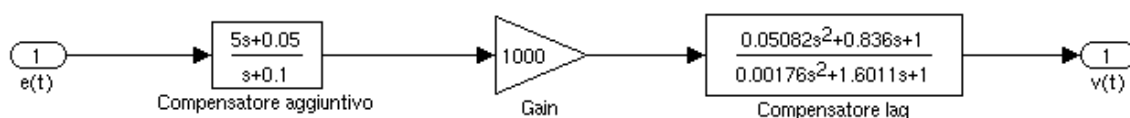


Fig. 36 schema a blocchi del compensatore aggiunto in cascata

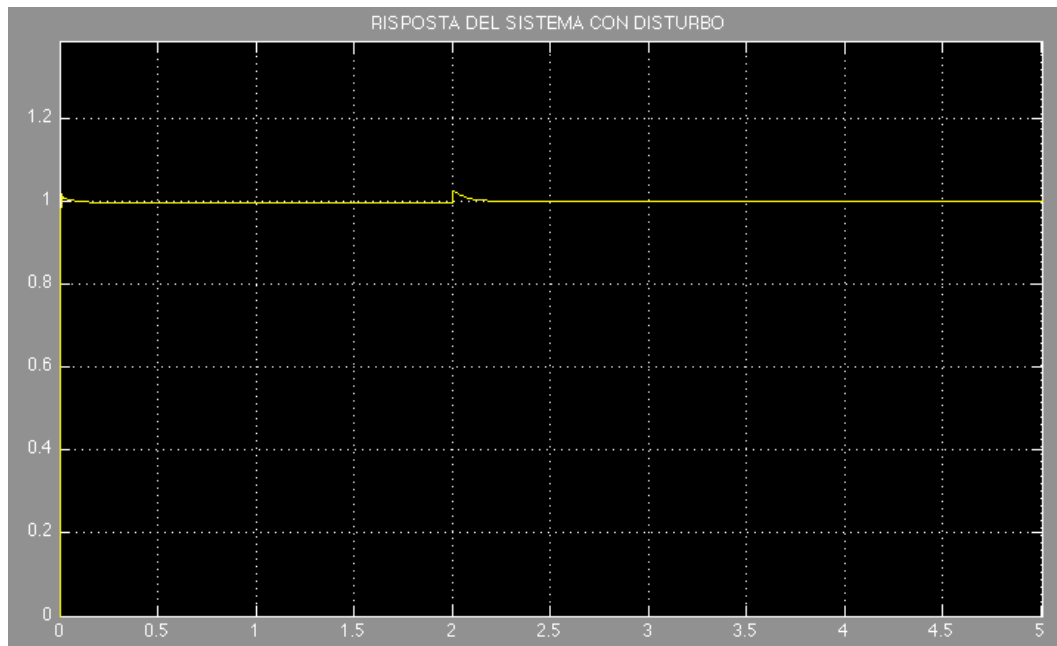


Fig. 37 risposta del sistema in catena chiusa con disturbo e compensatore aggiuntivo in cascata

Come si può notare dal grafico della Fig. 37, l'aggiunta del compensatore in cascata al controllore calcolato con la sintesi di Bode migliora la capacità smorzante del sistema mantenendo dei buoni valori per quanto riguarda l'errore a regime e il tempo di salita.

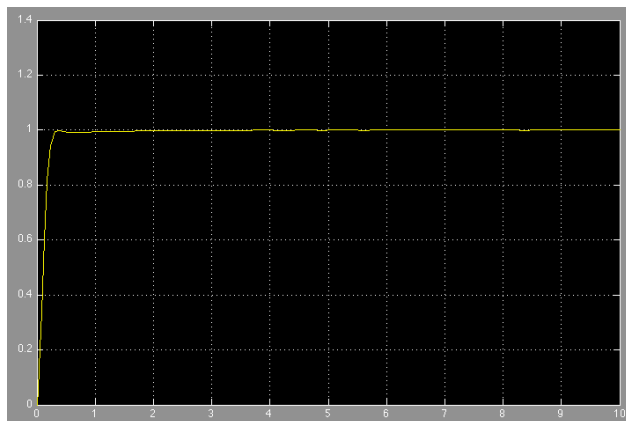
Conclusioni

In questo elaborato sono stati analizzati e configurati alcuni controllori utilizzando tecniche e sintesi differenti, ottenendo sempre risultati soddisfacenti rispetto alle specifiche di progetto fissate inizialmente. È interessante osservare e confrontare i vari risultati ottenuti in termini di tempo di assestamento, errore a regime e sovraelongazione. Per facilitare l'accostamento dei vari grafici, è stata costruita una tabella che riporta la risposta al gradino del sistema in catena chiusa in presenza delle varie tipologie di controllore, accostata al comportamento del sistema in presenza di un disturbo inserito a 2 secondi dall'accensione del motore, in altre parole:

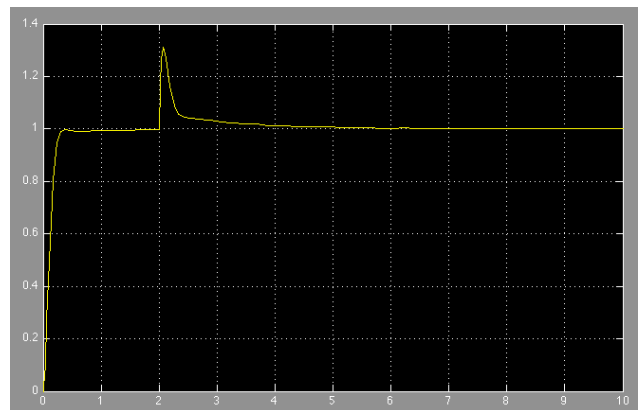
$$T_d(t) = 0.1 \quad \text{per } t \geq 2$$

RISPOSTE AL GRADINO

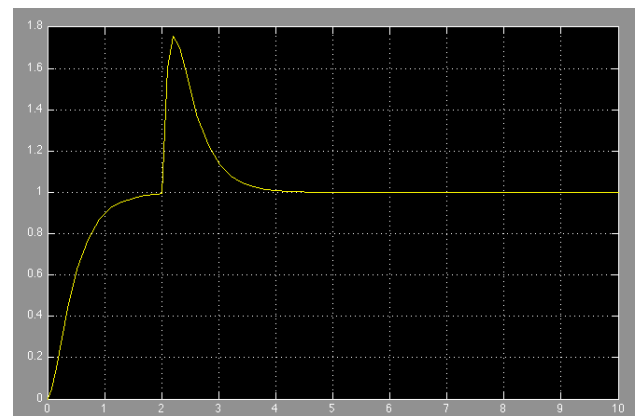
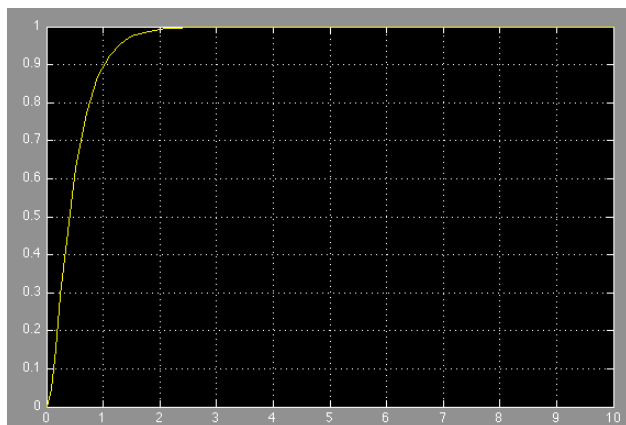
PID



RISPOSTE CON DISTURBO T_d



Sintesi con luogo delle radici



Sintesi in frequenza (o di Bode)

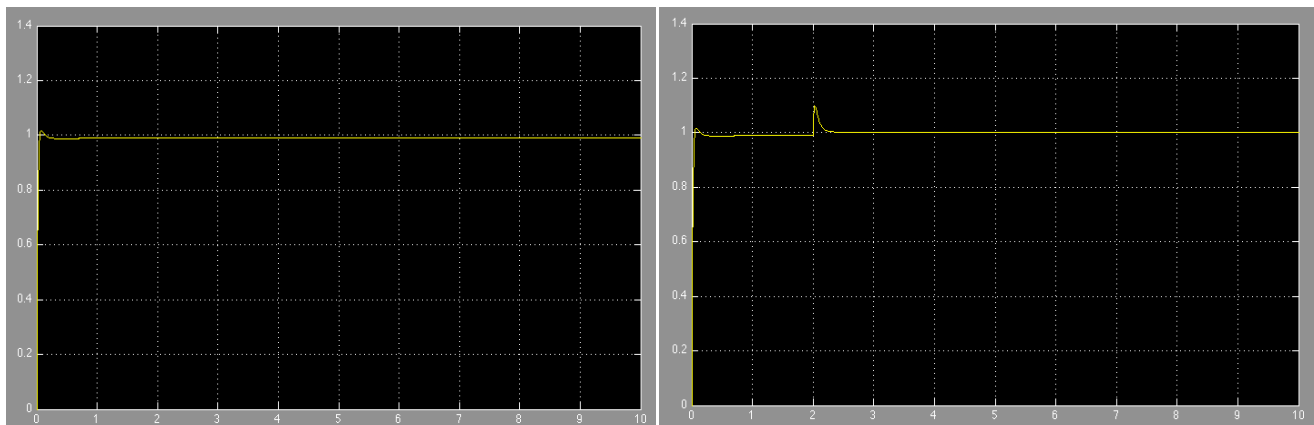


Fig. 38 confronto comportamento controllori analizzati

Dalla prima colonna della tabella riportata, si può notare che il controllore da preferire è quello che è stato configurato tramite la sintesi in frequenza in quanto presenta sia un tempo di salita sia una sovraelongazione molto ridotti. Presenta però un difetto per quanto riguarda l'errore a regime, infatti, nonostante rispetti le specifiche progettuali, la velocità del motore non è esattamente 1 rad/s ma è leggermente inferiore. Il controllore meno efficace dal punto di vista della risposta al gradino del sistema è il dispositivo ottenuto tramite il metodo del luogo delle radici, infatti è caratterizzato da un tempo di salita maggiore rispetto agli altri.

Anche dal punto di vista della reazione ai disturbi, il secondo controllore analizzato è il meno adatto, infatti la sovraelongazione dovuta all'inserimento del disturbo (circa 0.8 rad/s) è di gran lunga maggiore rispetto al valore di essa negli altri due casi (circa 0.3 rad/s per il controllore PID e meno di 0.2 rad/s per il dispositivo trovato con la sintesi in frequenza). Dai grafici rappresentati nella seconda colonna della tabella, si può affermare che il dispositivo di controllo migliore, per quanto riguarda lo smorzamento dei disturbi, è quello sintetizzato tramite l'analisi in frequenza (o sintesi di Bode).

Per completare l'analisi ed il confronto dei vari controllori analizzati e sintetizzati in questo elaborato, è stato studiato il comportamento della variabile di controllo. È stata quindi esaminata l'uscita di ogni singolo controllore in catena chiusa, come illustrato nella Fig. 39.

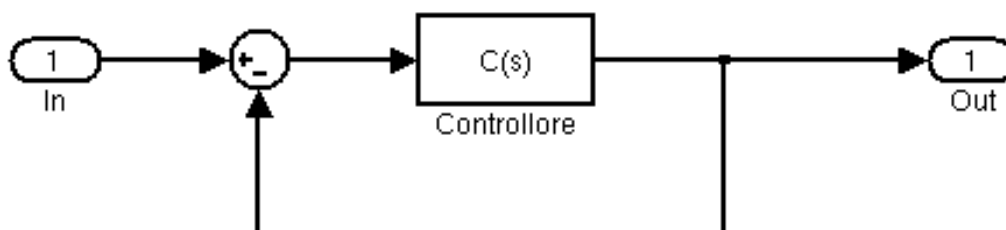


Fig. 39 sistema a blocchi del controllore in catena chiusa

Il confronto è stato realizzato tramite Matlab, utilizzando il seguente codice che permette di sovrapporre i vari grafici nel medesimo piano.

```
t=0:0.1:5;
numPID=[5 100 80];
denPID=[5 101 80];
PID=tf(numPID,denPID);
numLR=[10 20];
denLR=[11 20.001];
LR=tf(numLR,denLR);
numRC=[50.82 836 1000];
denRC=[50.82176 837.6011 1001];
RC=tf(numRC,denRC);
[w1,t]=step(PID,t);
[w2,t]=step(LR,t);
[w3,t]=step(RC,t);
plot(t,w1,'r');
hold on;
plot(t,w2,'b');
hold on;
plot(t,w3,'g');
```

%controllore PID
%controllore sintetizzato con
%Luogo delle Radici
%controllore sintetizzato con
%Reti Correttrici

Si ottiene infine la Fig. 40, nella quale sono presenti i comportamenti delle variabili di controllo dei diversi dispositivi analizzati: la linea rossa corrisponde al controllore PID, la linea blu a quello sintetizzato tramite il luogo delle radici e la linea verde a quello ottenuto per mezzo delle reti correttrici.

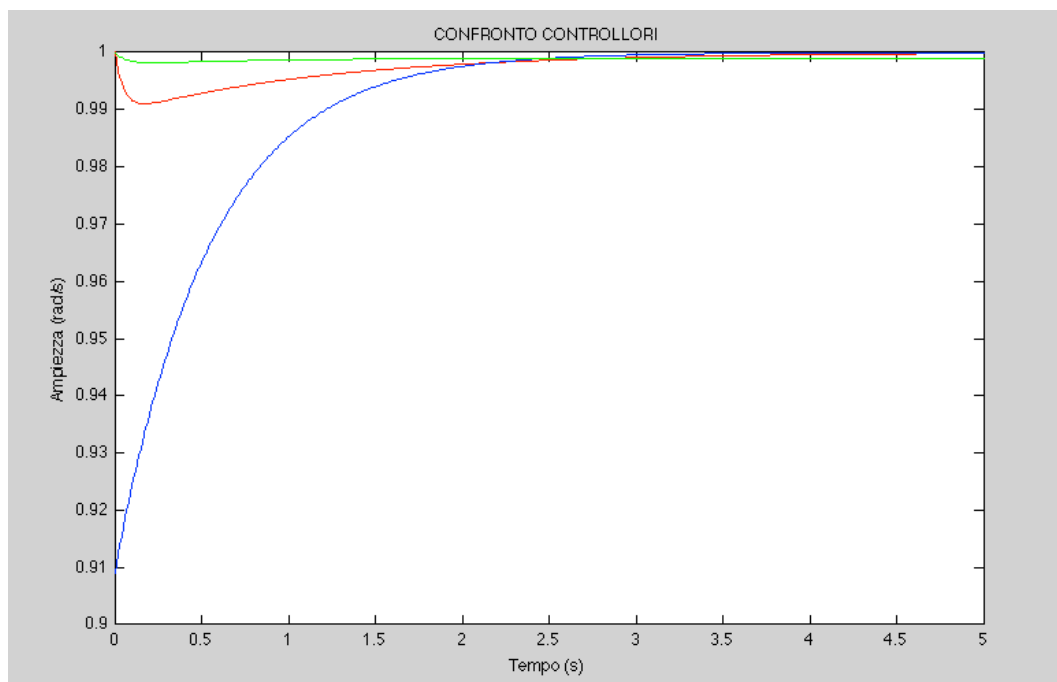


Fig.40 confronto risposta al gradino dei singoli controllori in catena chiusa
PID linea rossa, luogo radici blu, reti correttrici verde

Nella Fig.40 è interessante osservare la differenza tra le energie necessarie ai singoli

controllori per poter effettivamente modificare l'uscita del sistema in modo tale che soddisfi le caratteristiche prestabilite. La suddetta energia assorbita (utilizzata) dai dispositivi è rappresentata graficamente dall'area sottostante il grafico delle variabili di controllo. Si può quindi notare che il dispositivo sintetizzato tramite il luogo delle radici necessita di un'energia minore rispetto agli altri due controllori, i quali però hanno come vantaggio un tempo di salita inferiore e quindi portano ad un'azione di controllo più rapida.

Concludendo si può affermare che i tre dispositivi qualitativamente si equivalgono quasi interamente, infatti le differenze sono minime, anche se in alcune applicazioni, potrebbero essere importanti in relazione all'utilizzo finale del motore elettrico.

Riferimenti Bibliografici

Sandro Zampieri. Dispensa di controlli automatici.
Edizioni libreria Progetto Padova

www.engin.umich.edu Control tutorials for Matlab and Simulink.