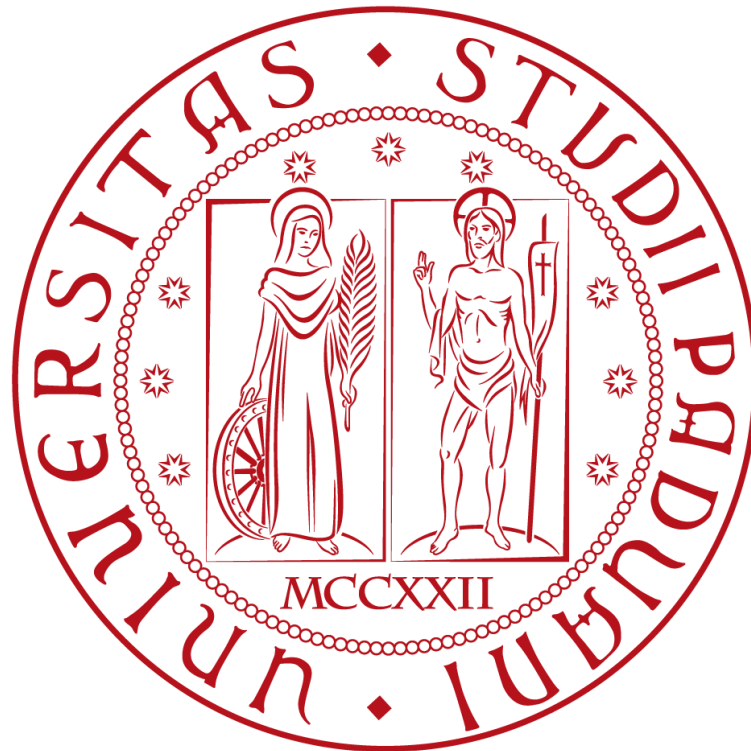


UNIVERSITÀ DEGLI STUDI DI PADOVA
DIPARTIMENTO DI INGEGNERIA DELL'INFORMAZIONE
CORSO DI LAUREA TRIENNALE IN INGEGNERIA
DELL'INFORMAZIONE



TESI DI LAUREA
MODELLAZIONE E CONTROLLO DI UN SISTEMA DI
VASCHE COMUNICANTI

Relatore
Prof. ssa Maria Elena Valcher

Laureando
Renzo Bardelle

Febbraio 2013
Anno Accademico 2012/2013

Indice

1	Modello a singolo compartimento	1
1.1	Modellazione	1
1.2	Linearizzazione	2
1.3	Parametri del modello	4
1.4	Modi in catena aperta	5
1.5	Funzione di trasferimento in catena aperta	5
1.6	Tempo di salita in catena aperta	7
1.7	Limiti dell'approssimazione	7
2	Modello a doppio compartimento	9
2.1	Modellazione e linearizzazione	9
2.2	Stabilità del modello in catena aperta	11
2.3	Sistema come modello ingresso uscita SISO	12
2.4	Caratteristiche della FDT	12
2.5	Parametri del modello	13
3	Controllo in retroazione unitaria negativa	15
3.1	Scelta del controllore	15
3.2	Tentativo 1: sintesi di un controllore PI	16
3.3	Tentativo 2: sintesi di un controllore PID	24

Sommario

Sistemi fluido-compartimentali si incontrano nei processi chimico-industriali, metabolici, nelle abitazioni domestiche, negli impianti per la produzione di energia idroelettrica, ecc. Per poter implementare un buon meccanismo di controllo è necessario disporre di un modello matematico efficace, ovvero di una modellazione che trovi il giusto compromesso tra semplicità del modello e precisione delle stime ricavabili in fase di simulazione. In questo testo si presentano le relazioni fondamentali che intercorrono tra l'ingresso e l'uscita di un sistema fluido-dinamico a singolo compartimento. A seguire, le osservazioni fatte per il singolo compartimento vengono estese ad un sistema a due compartimenti accoppiati. Per questo sistema più complesso viene ricercata una strategia per il controllo del livello di fluido nel secondo compartimento, assumendo come variabile d'ingresso il flusso entrante nel primo compartimento.

1 Modello a singolo compartimento

1.1 Modellazione

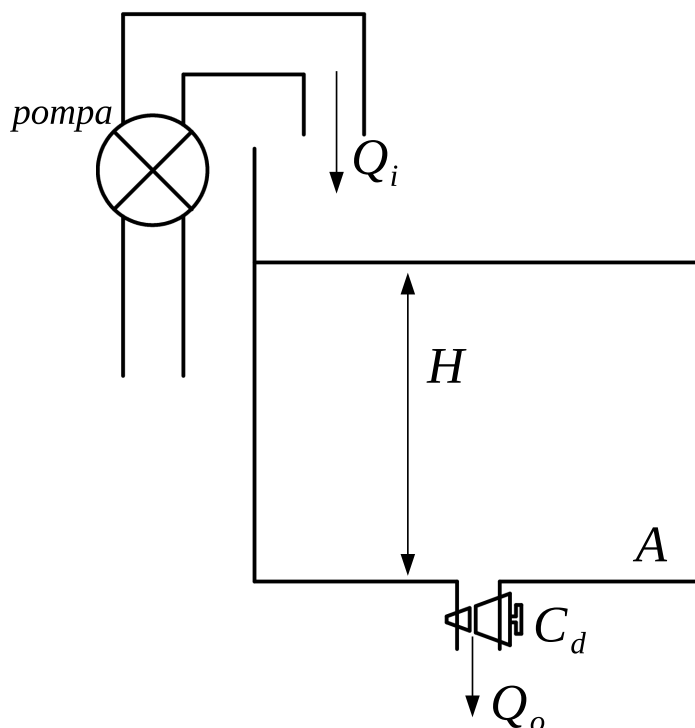


fig. 1: Modello a singolo compartimento.

Il sistema considerato nel primo capitolo di questo testo è rappresentato in fig. 1. Una sorgente (pompa) genera un flusso $Q_i(t)$ che fluisce in un serbatoio con area di base A provocando una variazione del livello (indicato con H) del fluido ivi presente. Il compartimento ha la possibilità di svuotarsi tramite la valvola d'uscita V , di sezione trasversale a . La scheda tecnica della valvola riporta un coefficiente di scarico pari a C_d . Il flusso d'uscita attraverso V è indicato con $Q_o(t)$.

Si vuole valutare la relazione che sussiste tra l'ingresso del sistema $Q_i(t)$ e l'uscita $y(t) = H(t)$ nel tempo. Il punto di partenza per la modellizzazione è imporre il bilancio di massa per il fluido:

$$Q_i(t) - Q_o(t) = A \frac{dH(t)}{dt} \quad (1)$$

Dall'idrodinamica è nota la relazione:

$$Q_o(t) = C_d a \sqrt{2gH(t)} \quad (2)$$

in cui g rappresenta l'accelerazione di gravità. Questa equazione regola il flusso attraverso la valvola V .

Tralasciando la scrittura esplicita della dipendenza temporale ed operando le dovute sostituzioni si ottiene:

$$Q_i - C_d a \sqrt{2gH} = A \frac{dH}{dt} \quad (3)$$

e quindi, esprimendo il tutto in funzione della variazione di H nel tempo, si ottiene il modello di stato SISO:

$$\begin{cases} \dot{H} = -\frac{C_d a}{A} \sqrt{2gH} + \frac{Q_i}{A} \\ y = H \end{cases} \quad (4)$$

in cui è evidente la relazione non lineare che coinvolge la variabile di stato H .

1.2 Linearizzazione

Per agevolarne lo studio, è possibile linearizzare il sistema per piccole variazioni di H attorno al livello di funzionamento desiderato H_0 .

Pongo $H = H_0 + h$, dove h rappresenta lo scostamento da H_0 . Per h sufficientemente piccolo, la non linearità $\sqrt{2gH}$, viene eliminata grazie allo sviluppo in serie di Taylor arrestato al primo ordine:

$$\sqrt{2gH} \simeq \sqrt{2gH_0} + \sqrt{\frac{g}{2H_0}} h \quad (5)$$

Sostituendo (5) nel sistema si ottiene:

$$\begin{cases} \dot{h} = -\frac{C_d a}{A} \sqrt{\frac{g}{2H_0}} h - \frac{C_d a}{A} \sqrt{2gH_0} + \frac{Q_i}{A} \\ y = h \end{cases} \quad (6)$$

Ora, assumendo di disporre di un buon sistema di controllo che regoli il flusso di Q_i in modo tale da mantenere il livello operativo vicino ad H_0 tramite piccole variazioni $q_i(t)$ di $Q_i = Q_{i0} + q_i(t)$, è possibile pensare H_0 come un punto di equilibrio per il sistema e quindi imporre che \dot{H} si annulli nel punto di equilibrio, il che vale soltanto se:

$$\frac{Q_{i0}}{A} - \frac{C_d a}{A} \sqrt{2gH_0} = 0 \quad (7)$$

Ovvero l'ingresso $Q_i(t)$ si compone di una parte variabile $q_i(t)$ e di una costante Q_{i0} con:

$$Q_{i0} = C_d a \sqrt{2gH_0} \quad (8)$$

Il che conduce ad un sistema di stato lineare che descrive lo scostamento del livello del fluido dal punto di equilibrio H_0 fissato:

$$\begin{cases} \dot{h} = -\frac{C_d a}{A} \sqrt{\frac{g}{2H_0}} h + \frac{q_i}{A} \\ y = h \end{cases} \quad (9)$$

che può essere riscritto in forma più compatta come:

$$\begin{aligned} \dot{h} &= -k_1 h + A^{-1} q_i \\ y &= h \end{aligned} \quad (10)$$

Dove si è posto $k_1 = \frac{C_d a}{A} \sqrt{\frac{g}{2H_0}}$.

Oppure, ancora, si può riformulare come modello single-input single-output nella forma:

$$\dot{h} + k_1 h = A^{-1} q_i \quad (11)$$

Dal punto di vista pratico, nella messa in funzione del sistema, dapprima si porterà a regime il livello del fluido, all'interno del serbatoio, fino all'altezza H_0 . Raggiunto tale livello verrà attivato un meccanismo di controllo per stabilizzare H al punto di lavoro H_0 .

Per dare l'idea di una possibile applicazione si pensi ad un fluido che debba raggiungere una certa temperatura prima di poter essere immesso nel processo produttivo. Il fluido dovrà attraversare un serbatoio riscaldato e permanervi per il tempo necessario a raggiungere la temperatura desiderata. Il tempo di permanenza del fluido nel serbatoio può essere regolato dall'ampiezza a dell'apertura della valvola V d'uscita, mentre il livello costante del liquido viene mantenuto dal controllo in retroazione sull'ingresso.

1.3 Parametri del modello

Allo scopo di ricondurre l'analisi astratta del modello ad un problema reale, si immagini di voler soddisfare le seguenti specifiche:

- la singola unità di fluido deve permanere per almeno 1000 secondi nel compartimento;
- il livello operativo del fluido deve stabilizzarsi ad $H_0 = 1m$.

Si supponga anche che la composizione fisica del modello vincoli ad utilizzare i seguenti dati:

$$\begin{aligned}A &= 1m^2 \\g &= 9.8m/s^2 \\C_d &= 0.8\end{aligned}$$

Rimangono da ricavare l'apertura a della valvola ed il flusso d'ingresso Q_{i0} tali da soddisfare le specifiche. Imponendo $H_0 = 1m$ si ricavano i litri di fluido (detti L) presenti nel compartimento all'equilibrio:

$$L = H_0 A = 1000l$$

Osservando che all'equilibrio il flusso d'ingresso eguaglia il flusso d'uscita ricerco il tempo medio (T_m) che la singola unità di fluido trascorre all'interno del compartimento:

$$T_m = \frac{L}{Q_{i0}}[s] \quad (12)$$

Ora ponendo a sistema (8) e (12) ed imponendo $H_0 = 1m$ e $T_m = 1000s$ ottengo:

$$\begin{cases} H_0 = \frac{Q_{i0}^2}{(C_d a)^2 2g} = 1m \\ T_m = \frac{L}{Q_{i0}} = 1000s \end{cases} \quad (13)$$

Da cui:

$$\begin{aligned}Q_{i0} &= 1l/s \\a &= 0.2823m^2 \\k_1 &= \frac{C_d a}{A} \sqrt{\frac{g}{2H_0}} = 0.5\end{aligned}$$

Risulta che per soddisfare i requisiti di 1000 secondi di permanenza e l'altezza di 1 metro è sufficiente imporre $Q_{i0} = 1l/s$ ed $a = 0.2823m^2$.

1.4 Modi in catena aperta

Per il sistema linearizzato è possibile calcolare direttamente i modi dell'evoluzione libera in catena aperta. Il sistema presenta soltanto il modo esponenziale decrescente $e^{-k_1 t}$ il che indica l'asintotica stabilità del modello, ovvero fissato l'ingresso nullo, il sistema tende esponenzialmente a zero con costante di tempo $\frac{1}{k_1}$. Estendendo il risultato al sistema (4) non linearizzato questo significa che, fissata correttamente la parte costante Q_{i0} dell'ingresso $Q_i(t) = Q_{i0} + q_i(t)$ e posta invece la parte variabile a zero ($q_i(t) = 0$), in assenza di errori il sistema non linearizzato tende proprio al punto di equilibrio desiderato, di altezza H_0 .

1.5 Funzione di trasferimento in catena aperta

Dopo aver valutato i modi in catena aperta valutiamo le caratteristiche della funzione di trasferimento $G(s)$ in catena aperta:

$$G(s) = \frac{1}{Ak_1} \frac{1}{\left(\frac{s}{k_1} + 1\right)} \quad (14)$$

Si osservi che k_1 è una costante di valore reale, maggiore di zero; quindi anche dalla $G(s)$ si può concludere la BIBO stabilità del sistema, già garantita dalla convergenza dei modi dell'equazione caratteristica.

Oltre alla stabilità del sistema è importante verificare l'assenza di oscillazioni nella risposta al gradino. A tal proposito se ne riporta il grafico assumendo come parametri quelli introdotti nella sezione precedente.

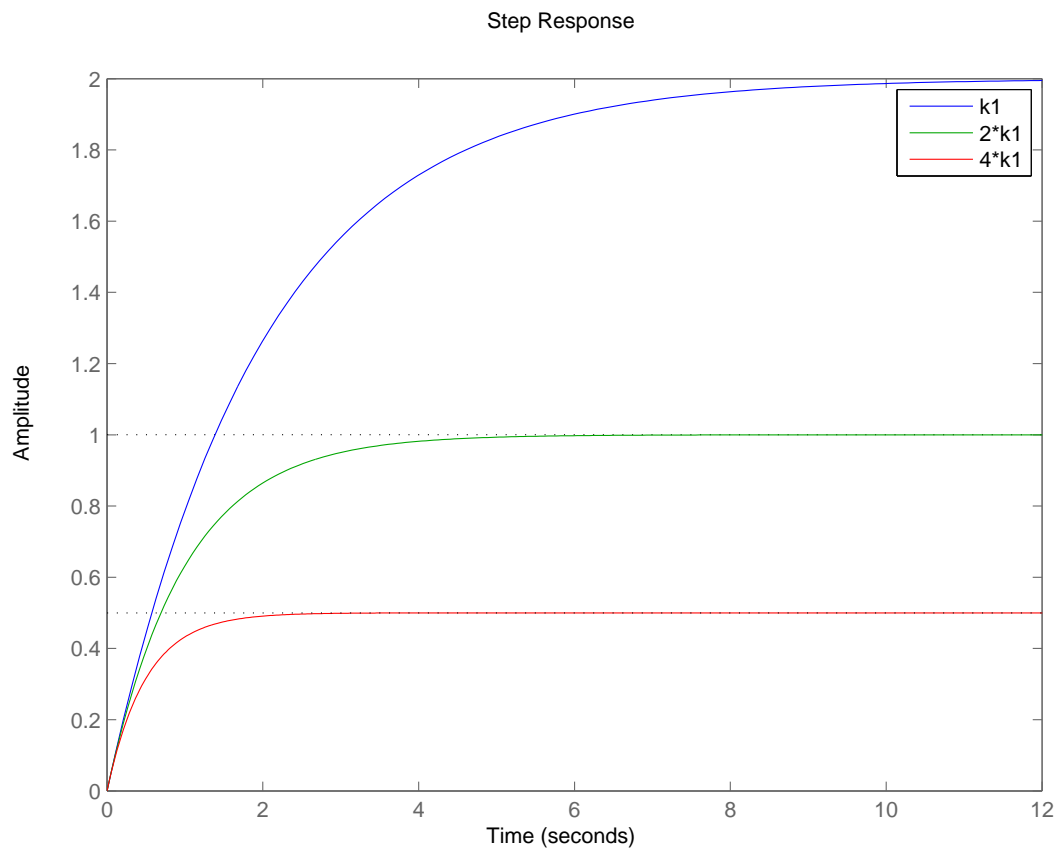


fig. 2: Risposta al gradino di $G(s)$ a singolo compartimento.

L'evidente assenza di oscillazioni è garantita dall'assenza di poli complessi con parte immaginaria diversa da zero. Si riporta in fig. 3 il diagramma di Bode per la funzione $G(s)$ in cui i parametri sono fissati come precedentemente indicato. Dal diagramma si nota il classico andamento del filtro passa-basso del primo ordine.

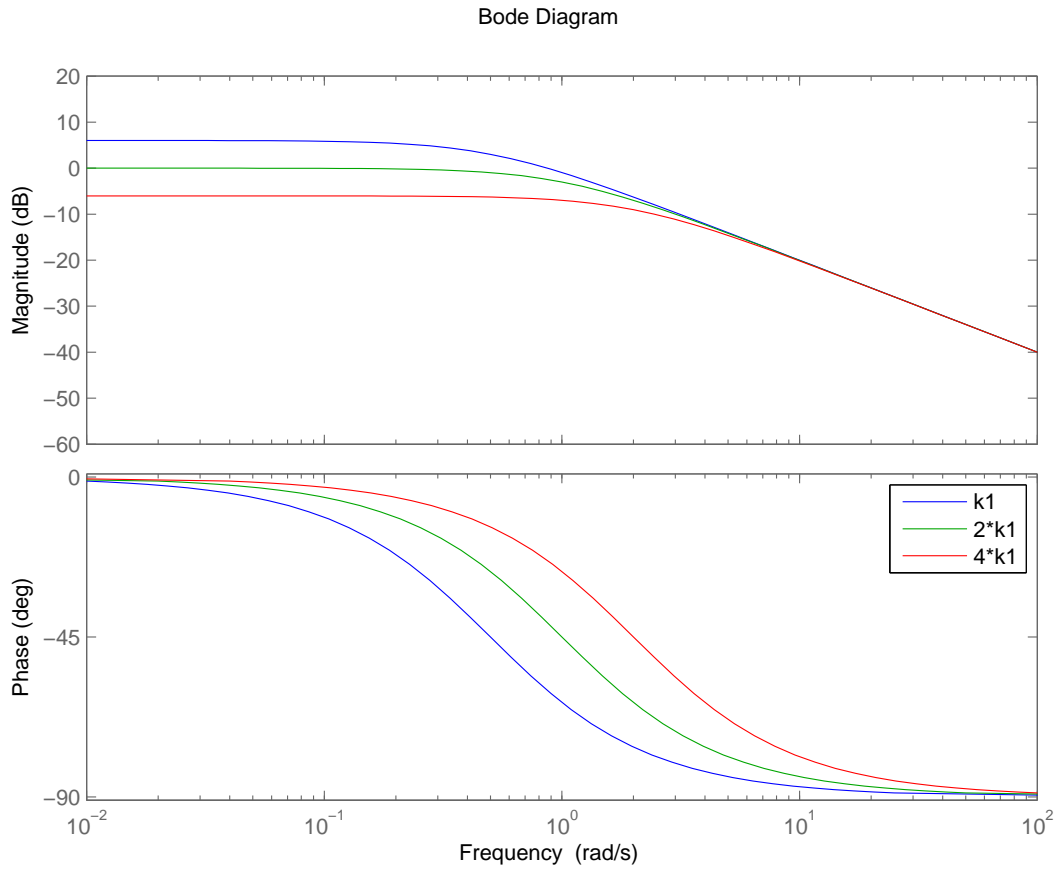


fig. 3: Diagramma di Bode di $G(s)$ a singolo compartimento.

1.6 Tempo di salita in catena aperta

Come osservato, $G(s)$ identifica un filtro passa-basso. Per questo tipo di filtro è nota la relazione tra banda passante a 3 dB (B_p) e tempo di salita (t_r) in risposta ad un ingresso a gradino:

$$B_p t_r = \ln(10) \quad (15)$$

1.7 Limiti dell'approssimazione

Nella linearizzazione del modello si sono compiute delle approssimazioni per le quali vanno discussi i limiti di validità. Resta cioè da definire cosa si intenda per piccole variazioni di h rispetto al livello H_0 operativo. L'approssimazione con Taylor è stata compiuta sul termine $\sqrt{2gH}$ attorno al valore H_0 .

Considerando errore di stima accettabile un massimo del 10% dal valore di $\sqrt{2gH}$; si deve quindi risolvere, in funzione di h , la disequazione:

$$\left| \frac{\sqrt{2g(H_0 + h)} - (\sqrt{2gH_0} + \sqrt{\frac{g}{2H_0}}h)}{\sqrt{2g(H_0 + h)}} \right| < 0.1 \quad (16)$$

in cui il fattore costante $2g$ si semplifica porgendo:

$$\left| \frac{\sqrt{(H_0 + h)} - (\sqrt{H_0} + \sqrt{\frac{1}{4H_0}}h)}{\sqrt{(H_0 + h)}} \right| < 0.1, \quad (17)$$

disequazione di cui è doveroso tenere conto nel caso in cui il modello necessiti di elevata accuratezza. Questa disequazione, fissato il valore di H_0 , individua i valori dello scostamento h che mantengono l'errore commesso in fase di linearizzazione inferiore a 0.1, cioè inferiore al 10%.

2 Modello a doppio compartimento

2.1 Modellazione e linearizzazione

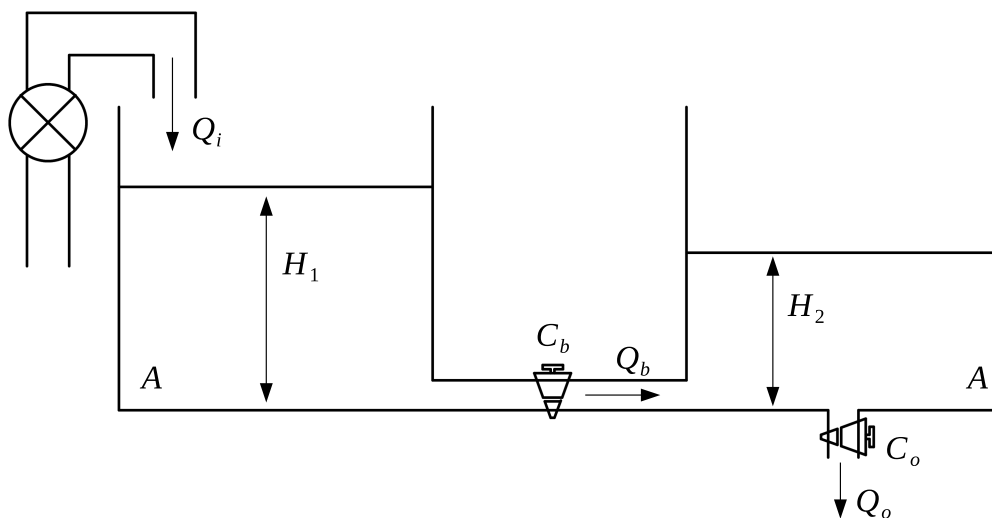


fig. 4: Modello a doppio compartimento.

Dopo aver analizzato le proprietà in catena aperta del sistema a singolo compartimento, si vuole cercare di estendere i ragionamenti fatti ad un sistema più complesso. La fig. 4 rappresenta due cisterne accoppiate tramite una valvola comune V_b , con coefficiente di scarico C_b , di sezione a_b ed attraverso la quale transita un flusso $Q_b(t)$ orientato dal compartimento di sinistra a quello di destra. I livelli di fluido nei due compartimenti sono indicati con $H_1(t)$ ed $H_2(t)$, mentre l'area di base A è uguale per entrambi. Nel primo compartimento entra un flusso pari a $Q_i(t)$, mentre dal secondo esce un flusso detto $Q_o(t)$ regolato dalla valvola V_o con coefficiente di scarico C_o e sezione a_o .

Per la conservazione della materia, omettendo le dipendenze temporali, risulta:

$$\begin{cases} Q_i - Q_b = A\dot{H}_1 \\ Q_b - Q_o = A\dot{H}_2 \end{cases} \quad (18)$$

Dalla fluidodinamica sono note le relazioni:

$$Q_b = C_b a_b \sqrt{2g(H_1 - H_2)} \quad (19)$$

$$Q_o = C_o a_o \sqrt{2gH_2} \quad (20)$$

che, sostituite nel modello, porgono:

$$\begin{cases} Q_i - C_b a_b \sqrt{2g(H_1 - H_2)} = A\dot{H}_1 \\ C_b a_b \sqrt{2g(H_1 - H_2)} - C_o a_o \sqrt{2gH_2} = A\dot{H}_2 \end{cases} \quad (21)$$

Interessa studiare la presenza di punti di equilibrio nel modello e la loro forma. A tal proposito si definiscono le seguenti quantità:

$$\begin{aligned} H_1(t) &= h_1(t) + H_{01} \\ H_2(t) &= h_2(t) + H_{02} \\ Q_i(t) &= q_i(t) + Q_{0i} \end{aligned}$$

In cui si sono indicati i parametri del modello come somma di una parte variabile nel tempo che indica lo scostamento dall'equilibrio, più un valore costante che rappresenta quello assunto all'equilibrio.

A questo punto, coerentemente con quanto fatto per il compartimento singolo, è interessante identificare i valori assunti dalle parti costanti dei parametri in un intorno del punto di equilibrio del sistema, per poi procedere ad una linearizzazione del modello supposto a lavorare in un intorno del punto di equilibrio stesso.

L'equilibrio presuppone che i valori di scostamento siano nulli e che si annullino anche le derivate prime presenti nel modello, da cui risulta:

$$\begin{cases} Q_{0i} - C_b a_b \sqrt{2g(H_{01} - H_{02})} = 0 \\ C_b a_b \sqrt{2g(H_{01} - H_{02})} - C_o a_o \sqrt{2gH_{02}} = 0 \end{cases} \quad (22)$$

Questa particolare scrittura del modello evidenzia tutte le relazioni che intercorrono, all'equilibrio, tra i parametri del modello; in particolare mostra che la stazionarietà è raggiunta quando i flussi di ingresso in ciascun compartimento eguagliano i flussi d'uscita da ciascun compartimento.

Ora è possibile linearizzare il modello con Taylor attorno al punto di equilibrio e studiarne l'evoluzione per piccoli scostamenti dell'ingresso dal valore di equilibrio. Dall'approssimazione risulta il seguente modello di stato, lineare:

$$\begin{cases} Q_i - C_b a_b [\sqrt{2g(H_{012})} + \sqrt{\frac{g}{2(H_{012})}}(h_1 - h_2)] = A\dot{h}_1 \\ C_b a_b [\sqrt{2g(H_{012})} + \sqrt{\frac{g}{2(H_{012})}}(h_1 - h_2)] - C_o a_o [\sqrt{2gH_{02}} + \sqrt{\frac{g}{2H_{02}}}h_2] = A\dot{h}_2 \end{cases} \quad (23)$$

Dove si è posto $H_{012} = H_{01} - H_{02}$.

Ma se si suppone di trovarsi in un intorno del punto di equilibrio, è possibile sfruttare le equazioni ottenute in (22) e riscrivere il modello in funzione dei soli scostamenti dall'equilibrio:

$$\begin{cases} q_i - C_b a_b \sqrt{\frac{g}{2(H_{012})}}(h_1 - h_2) = A\dot{h}_1 \\ C_b a_b \sqrt{\frac{g}{2(H_{012})}}(h_1 - h_2) - C_o a_o \sqrt{\frac{g}{2H_{02}}}h_2 = A\dot{h}_2 \end{cases} \quad (24)$$

Da cui si ricava un modello di stato lineare in forma più compatta del tipo:

$$\begin{cases} \dot{h}_1 = k_{11}h_1 + k_{12}h_2 + A^{-1}q_i \\ \dot{h}_2 = k_{21}h_1 + k_{22}h_2 \end{cases} \quad (25)$$

ancora, definiti:

$$\alpha = \frac{C_o a_o}{A} \sqrt{\frac{g}{2H_{02}}}$$

$$\beta = \frac{C_b a_b}{A} \sqrt{\frac{g}{2(H_{01} - H_{02})}}$$

risultano:

$$k_{12} = \beta$$

$$k_{21} = \beta$$

$$k_{11} = -\beta$$

$$k_{22} = -(\alpha + \beta)$$

ed il sistema è riscrivibile in forma matriciale come:

$$\begin{bmatrix} \dot{h}_1 \\ \dot{h}_2 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} -\beta & \beta \\ \beta & -(\beta + \alpha) \end{bmatrix} \begin{bmatrix} h_1 \\ h_2 \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} A^{-1} \\ 0 \end{bmatrix} q_i \quad (26)$$

2.2 Stabilità del modello in catena aperta

Osservando la prima matrice in (26) si nota che descrive un sistema di tipo compartimentale, in quanto:

- la somma degli elementi sulle colonne è minore uguale a zero;
- gli elementi sulla diagonale sono tutti negativi, mentre quelli non diagonali sono positivi.

In fig. 5 è fornita una rappresentazione schematica delle relazioni tra i compartimenti descritti dalla matrice F . Si osserva che non sono presenti sottosistemi chiusi, il che implica che in evoluzione libera il sistema convergerà a zero. Questo è sufficiente per concludere l'asintotica stabilità.

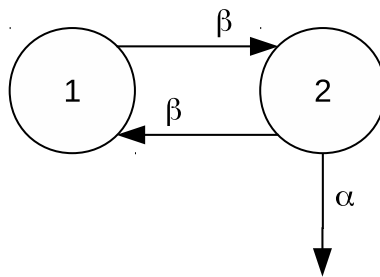


fig. 5: Sistema compartimentale descritto dalla matrice F .

2.3 Sistema come modello ingresso uscita SISO

Ci poniamo il problema di controllare il livello H_2 per mantenerlo stabile nel punto di equilibrio in caso di oscillazioni dell'ingresso. A questo scopo è utile riscrivere il sistema come modello ingresso uscita SISO, ricavando la relazione esplicita che lega lo scostamento dell'ingresso q_i a quello dell'uscita h_2 :

$$\ddot{h}_2 + (\alpha + 2\beta)\dot{h}_2 + \alpha\beta h_2 = A^{-1}\beta q_i \quad (27)$$

Da cui è facile ricavare la funzione di trasferimento in catena aperta:

$$G(s) = \frac{A^{-1}\beta}{s^2 + (\alpha + 2\beta)s + \alpha\beta} \quad (28)$$

2.4 Caratteristiche della FDT

La funzione di trasferimento (28) descrive un sistema del secondo ordine. L'asintotica stabilità è già stata discussa precedentemente, ma è importante valutare se la risposta al gradino presenti oscillazioni al variare di α e β . Dalla teoria è nota una corrispondenza stretta tra la presenza di oscillazioni e la

presenza di poli complessi coniugati, di conseguenza è necessario uno studio sul discriminante della funzione quadratica in s che compare al denominatore:

$$\Delta = (\alpha + 2\beta)^2 - 4\alpha\beta = \alpha^2 + 4\beta^2 \quad (29)$$

Ciò prova che il Δ sarà sempre maggiore di zero in quanto α e β sono, per costruzione del modello, maggiori di zero. Ovvero la risposta al gradino sarà libera da oscillazioni, come è apprezzabile dalla fig. 6.

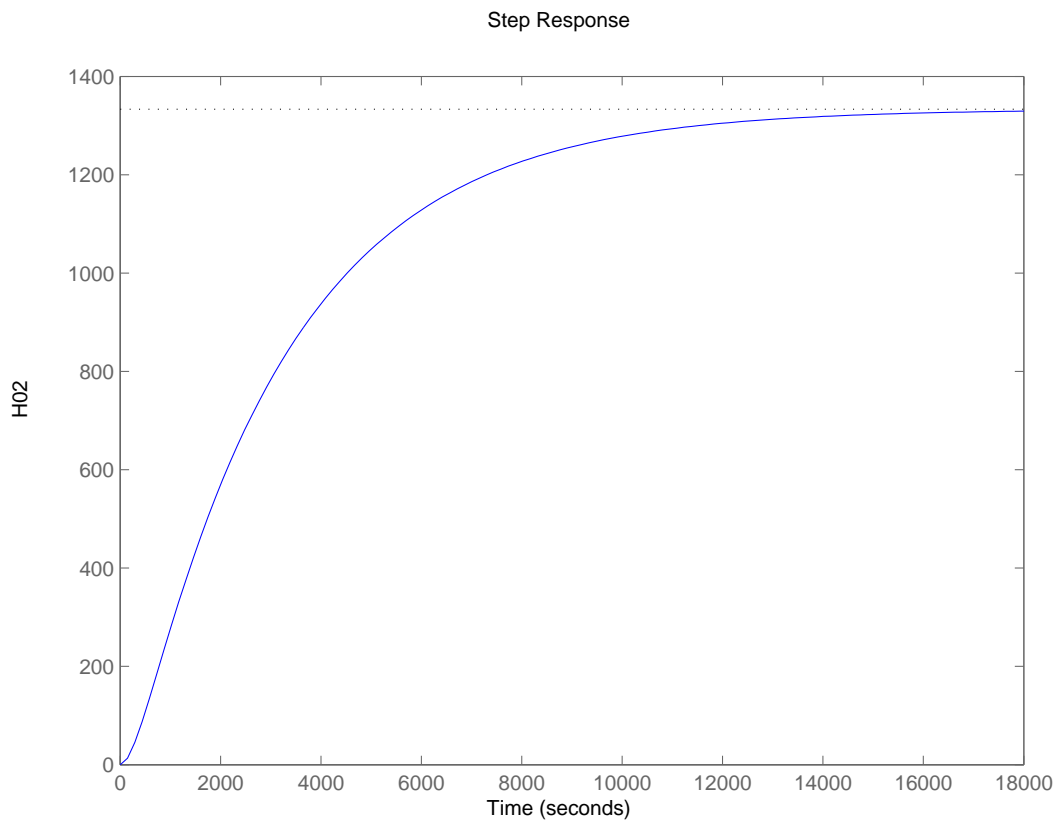


fig. 6: Risposta al gradino per $G(s)$ a doppio compartimento.

2.5 Parametri del modello

Per particolarezzare l'analisi del modello mi pongo in un caso reale di interesse. Si supponga di voler determinare le aperture delle valvole a_b ed a_o che consentano di soddisfare i seguenti requisiti:

$$\begin{aligned}
H_{01} &= 1.5m \\
H_{02} &= 1m \\
A &= 1m^2 \\
g &= 9.8m/s^2 \\
C_b &= C_o = 0.8
\end{aligned}$$

Inoltre si voglia fare in modo che il tempo di permanenza nel primo compartimento sia pari a $T_1 = 1000s$.

Indicando il volume in litri presente nel primo compartimento con L_1 risulta:

$$AH_{01} = L_1 \quad (30)$$

Da cui è possibile ricavare il flusso d'uscita dal primo compartimento (Q_{0b}) che va imposto per soddisfare il requisito su T_1 :

$$\frac{H_{01}A}{T_1} = Q_{0i} = Q_{0b} = Q[l/s] \quad (31)$$

Dove la serie di uguaglianze è stata dedotta dalle (22). Sempre dalle relazioni (22) risulta che:

$$C_b a_b \sqrt{2g(H_{01} - H_{02})} = C_o a_o \sqrt{2gH_{02}} = \frac{H_{01}A}{T_1} \quad (32)$$

E quindi esplicitando a_o ed a_b in funzione dei parametri noti si ricava:

$$\begin{cases}
a_o = \frac{H_{01}A}{T_1 C_o \sqrt{2gH_{02}}} = 4.2352 \cdot 10^{-4} m^2 \\
a_b = \frac{H_{01}A}{T_1 C_b \sqrt{2g(H_{01} - H_{02})}} = 5.9895 \cdot 10^{-4} m^2
\end{cases} \quad (33)$$

Conseguentemente risultano:

$$\begin{cases}
\alpha = 7.5 \cdot 10^{-4} s^{-1} \\
\beta = 1.5 \cdot 10^{-3} s^{-1}
\end{cases} \quad (34)$$

Incidentalmente è possibile stimare anche il tempo medio di permanenza nel secondo compartimento, che risulta pari a

$$T_2 = \frac{H_{02}A}{Q_{0o}} = \frac{H_{02}}{H_{01}} \cdot T_1 \approx 666.67s \quad (35)$$

3 Controllo in retroazione unitaria negativa

3.1 Scelta del controllore

In un processo industriale talvolta è necessario portare il livello di fluido in una delle vasche ad un valore che si discosta dal livello di equilibrio. Risulta di interesse cercare un sistema efficiente per controllare tale scostamento fornendo in ingresso un segnale di riferimento. Una delle tecniche utilizzate a questo scopo è il controllo in retroazione unitaria negativa. Si riporta sotto lo schema a blocchi del modello.

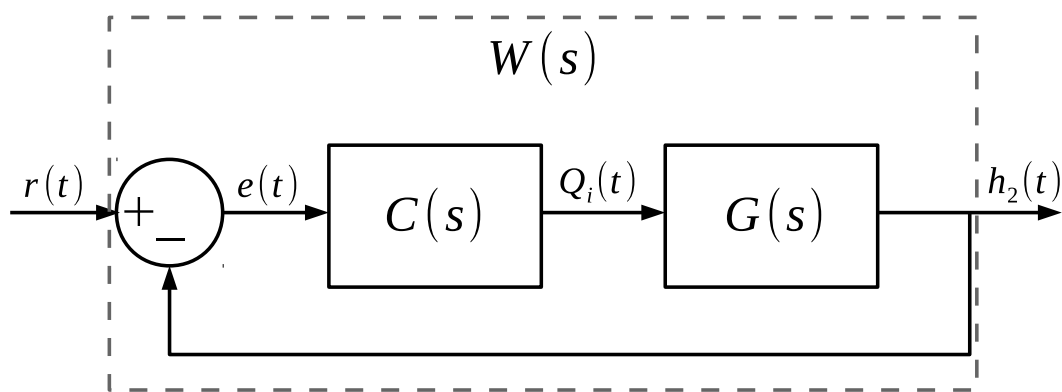


fig. 7: Schema a blocchi per $G(s)$ in retroazione unitaria negativa.

Si tratta quindi di determinare il controllore $C(s)$ adatto al sistema. La nuova funzione di trasferimento, dal riferimento $r(t)$ all'uscita $h_2(t)$, risulta quindi:

$$W(s) = \frac{H_2(s)}{R(s)} = \frac{C(s)G(s)}{1 + C(s)G(s)} \quad (36)$$

In cui $R(s)$ ed $H_2(s)$ indicano le trasformate di Laplace dei segnali $r(t)$ ed $h_2(t)$.

Nel progettare il controllore $C(s)$ è necessario chiedersi quale sarà il riferimento $r(t)$ da filtrare e quali siano le prestazioni da ricercare per il sistema. Nel nostro caso il riferimento avrà la forma di un segnale a gradino. Per il tipo di sistema in esame, considerando le dimensioni delle vasche, può essere sensato porsi i seguenti obiettivi per la risposta al gradino:

- (i) il tempo di salita t_r sia inferiore a 50 secondi;
- (ii) la risposta sia priva di oscillazioni (ottenuta imponendo un margine di fase $m_\phi \approx 90^\circ$ alla risposta in frequenza del sistema in catena aperta);

(iii) l'errore a regime sia nullo.

Uno dei controllori più utilizzati a livello industriale è il controllore PID, la cui funzione di trasferimento presenta una forma del tipo:

$$C_{PID}(s) = k_p + \frac{k_i}{s} + k_d s \quad (37)$$

3.2 Tentativo 1: sintesi di un controllore PI

Per prima cosa consideriamo il requisito (iii) di errore nullo alla risposta al gradino. Dalla teoria è noto che condizione necessaria e sufficiente per garantire errore nullo a regime per la risposta al gradino è che la serie $C(s)G(s)$ presenti un polo nell'origine, ma a questo scopo il termine derivativo del PID non è utile.

Basandoci su questa intuizione facciamo un primo tentativo di sintesi utilizzando un controllore di tipo PI, ovvero un controllore PID con $k_d = 0$:

$$C_{PI}(s) = k_i \frac{1}{s} \left(1 + s \frac{k_p}{k_i} \right) \quad (38)$$

Che a sua volta può essere visto come:

$$C_{PI}(s) = \frac{1}{s} C''(s) \quad (39)$$

con:

$$C''(s) = k_i \left(1 + s \frac{k_p}{k_i} \right) \quad (40)$$

Per avvicinare le prestazioni di $W(s) = \frac{C_{PI}(s)G(s)}{1+C_{PI}(s)G(s)}$ alle (i) ed (ii) è quindi possibile intervenire soltanto sulle costanti k_i e k_p della $C''(s)$. Nello specifico lo scopo della sintesi per tentativi è quello di scegliere k_p e k_i al fine di ridurre il tempo di salita (t_r) nella risposta al gradino di $W(s)$, evitando eventuali fenomeni oscillatori. È possibile ricondurre queste condizioni dal dominio del tempo per $W(s)$ al dominio della frequenza per la serie $C_{PI}(s)G(s)$. Il tempo di salita è inversamente proporzionale alla pulsazione di attraversamento (ω_a) nel diagramma di Bode del modulo per $C_{PI}(s)G(s)$, mentre l'assenza di oscillazioni è garantita se si mantiene un un margine di fase (m_ϕ) sufficientemente elevato nel corrispondente diagramma di Bode della fase.

Per avere un'idea generale sulle proprietà della serie $C_{PI}(s)G(s)$ ne riporto la forma di Bode, sostituendo ai parametri i valori individuati nella sezione

precedente:

$$C(s)G(s) = \frac{1.3333 \cdot 10^3 k_i \left(\frac{k_p}{k_i} s + 1\right)}{s (3.4211 \cdot 10^3 s + 1)(3.2884 \cdot 10^4 s + 1)} \quad (41)$$

Da cui si ricavano:

Costante di Bode: $K_B = 1.3333 \cdot 10^3 k_i$

Zeri: $z = \frac{k_i}{k_p}$

Poli: $p_0 = 0, p_1 = 3.2884 \cdot 10^{-4}, p_2 = 3.4211 \cdot 10^{-3}$

Per le valutazioni necessarie alla sintesi per tentativi del controllore è bene riferirsi al grafico di fig. 8 della funzione $\frac{1}{s}G(s)$ che rappresenta il comportamento di $G(s)$ a cui è aggiunto il polo nell'origine introdotto dal compensatore $C_{PI}(s)$.

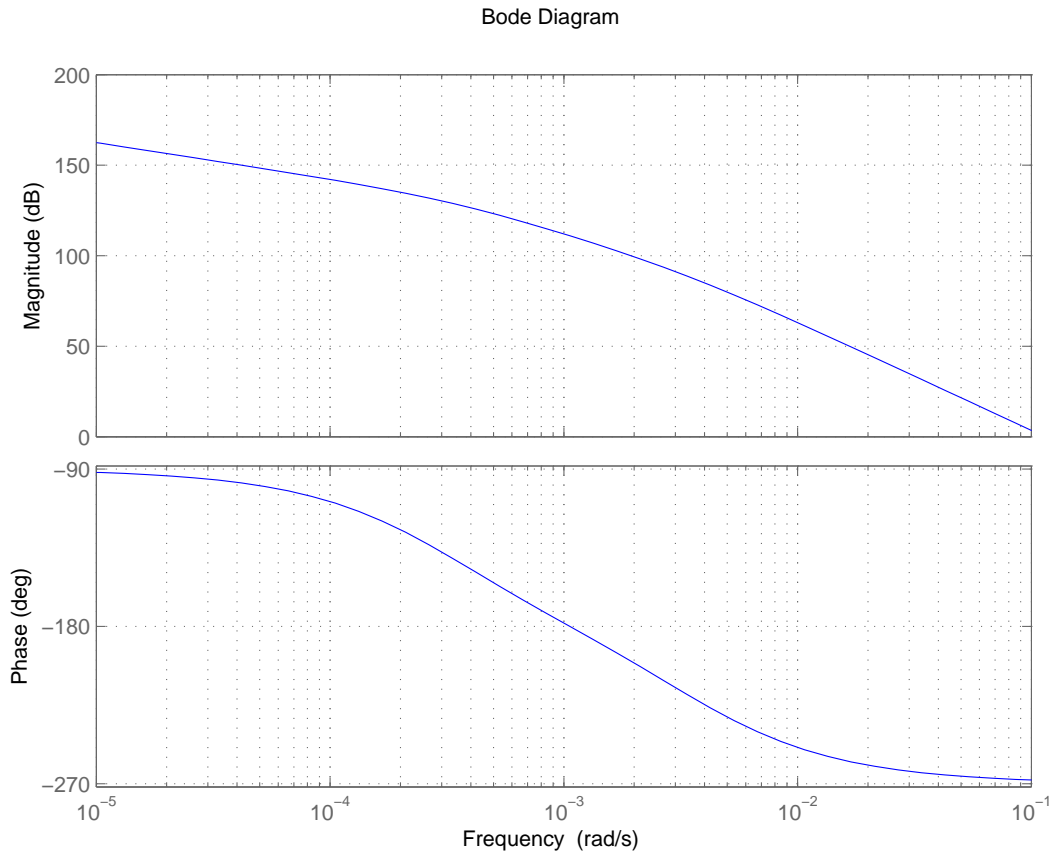


fig. 8: diagrammi di Bode di $\frac{1}{s} G(s)$ a doppio compartimento.

Le prestazioni di questo sistema non soddisfano i requisiti, infatti alla pulsazione di attraversamento il margine di fase è di -90° , questo comporta un andamento divergente della risposta al gradino.

Stimiamo ora un valore approssimativo per ω_a che consenta di soddisfare il requisito (i) su t_r . Dalla teoria è nota la relazione $B_p \cdot t_r \approx \ln(10)$, che mette in relazione la banda passante della funzione $W(s)$ con il tempo di salita della sua risposta al gradino, sappiamo inoltre che $B_p \approx \omega_a$ pulsazione di attraversamento nel diagramma di Bode di $C_{PI}(s)G(s)$. Sfruttando queste relazioni è possibile avere un'indicazione approssimativa della pulsazione di attraversamento ω_a da imporre alla serie $C_{PI}(s)G(s)$ per rispettare la specifica (i):

$$\omega_a > \frac{\ln(10)}{50s} \approx 5 \cdot 10^{-2} \text{ rad/s} . \quad (42)$$

Dalla (42) è chiaro che nel diagramma di Bode di $C_{PI}(s)G(s)$ dovremo cercare di raggiungere una pulsazione di attraversamento ω_a superiore a $5 \cdot 10^{-2}$ rad/s per garantire che t_r stia sotto ai 50 secondi.

Dalla relazione (41) è apprezzabile come la variazione dei parametri k_i e k_p influenzino la costante di Bode K_B e la posizione dello zero z . L'idea è quella di correggere l'andamento di $C_{PI}(s)G(s)$ fissando lo zero $z = \frac{k_i}{k_p}$ a basse frequenze in modo da alzare la fase. Contemporaneamente è necessario aumentare il valore della costante di Bode portando la pulsazione di attraversamento nel punto medio tra i due poli p_1 e p_2 dove m_ϕ si avvicina a 90° .

Con queste correzioni si otterrà:

$$10^{-4} < \omega_a < 10^{-3} \quad (43)$$

Questo non è sufficiente a soddisfare la relazione (42), questo fa capire che un controllore PI non riuscirà a portare t_r al di sotto dei 50 secondi.

Continuiamo comunque l'analisi per capire quanto sia possibile avvicinare le prestazioni del sistema ai valori richiesti.

Il valore di $K_B = 1.3333 \cdot 10^3 k_i$ da imporre dipende dalla posizione scelta per lo zero $z = \frac{k_i}{k_p}$. Volendo che la pulsazione di attraversamento si collochi tra i due poli, dal diagramma di Bode di fig. 8 è possibile imporre le seguenti condizioni:

$$\begin{cases} \frac{k_i}{k_p} = z \\ 20 \log(K_B) - 20 \log\left(\frac{k_i}{k_p}\right) - 10 = 0 \end{cases} \quad (44)$$

Da cui ricaviamo i valori da assegnare a k_i e k_p in funzione della scelta di z tali da garantire che l'attraversamento ω_a stia tra i due poli, pulsazione alla quale $m_\phi \approx 90^\circ$:

$$\begin{cases} k_i = z \cdot k_p \\ k_p = 10^{(-2.5 - \log(1.3333))} \end{cases} \quad (45)$$

Ora resta soltanto da fissare con precisione il valore migliore per z . Per il posizionamento dello zero viene sfruttata una proprietà osservata da alcune simulazioni, da queste si nota che t_r migliora avvicinando il valore dello zero a quello di p_1 .

Rispettando le (45) e ponendo z a frequenze inferiori a quelle di p_1 è soddisfatto il requisito (ii) sul margine di fase, per quanto riguarda il requisito (i) su t_r le prestazioni migliori si avranno aumentando quanto possibile il

valore di z , scegliamo dunque $z \approx p_1 \approx 10^{-4}$. Si noti che scegliere $z > p_1$ migliorerebbe ulteriormente il tempo di salita aggiungendo però oscillazioni alla risposta al gradino.

Ora, soddisfatti al meglio i requisiti (ii) ed (iii) dalle (45) ricavo:

$$z = 10^{-4}$$

$$k_i = 2.37 \cdot 10^{-7}$$

$$k_p = 2.40 \cdot 10^{-3}$$

Resta da stimare il t_r raggiunto sostituendo questi valori ad $W(s) = \frac{C_{PI}(s)G(s)}{1+C_{PI}(s)G(s)}$. Fissati k_i e k_p come sopra, si riportano i diagrammi di Bode e Nyquist per $C_{PI}(s)G(s)$ e la risposta al gradino per $W(s)$.

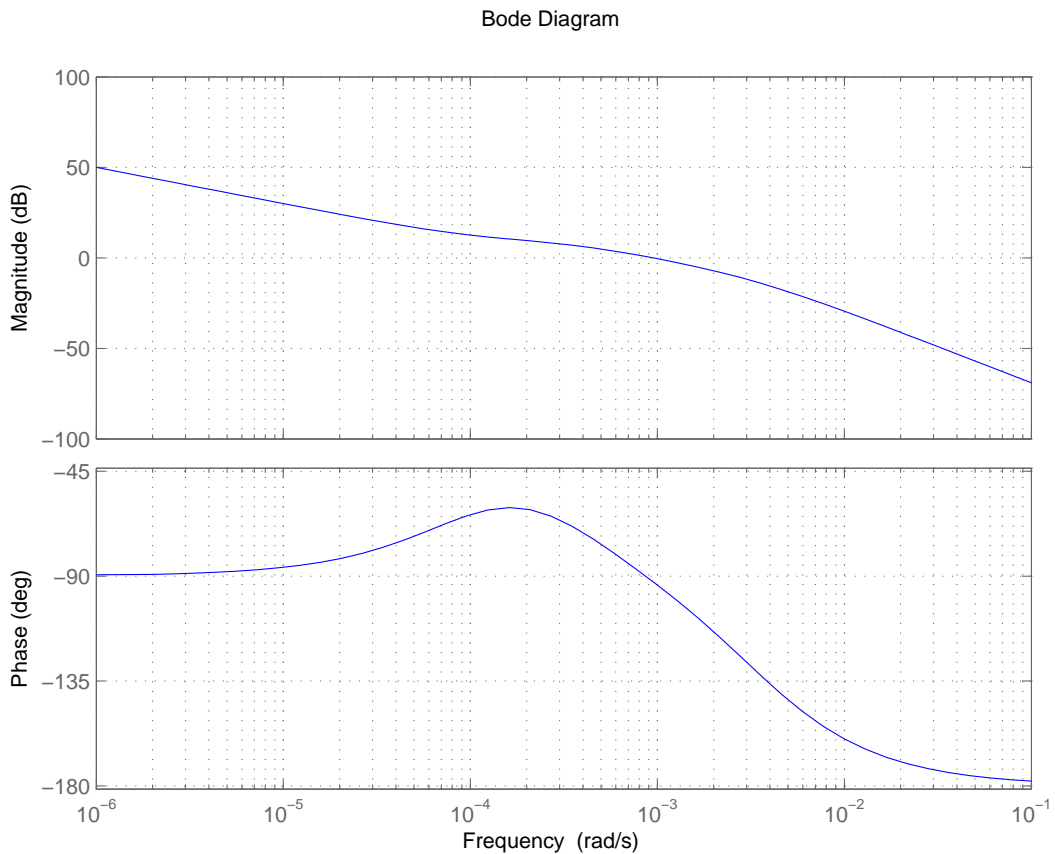


fig. 9: diagrammi di Bode di $C_{PI}(s)G(s)$ per $z = 10^{-4}$.

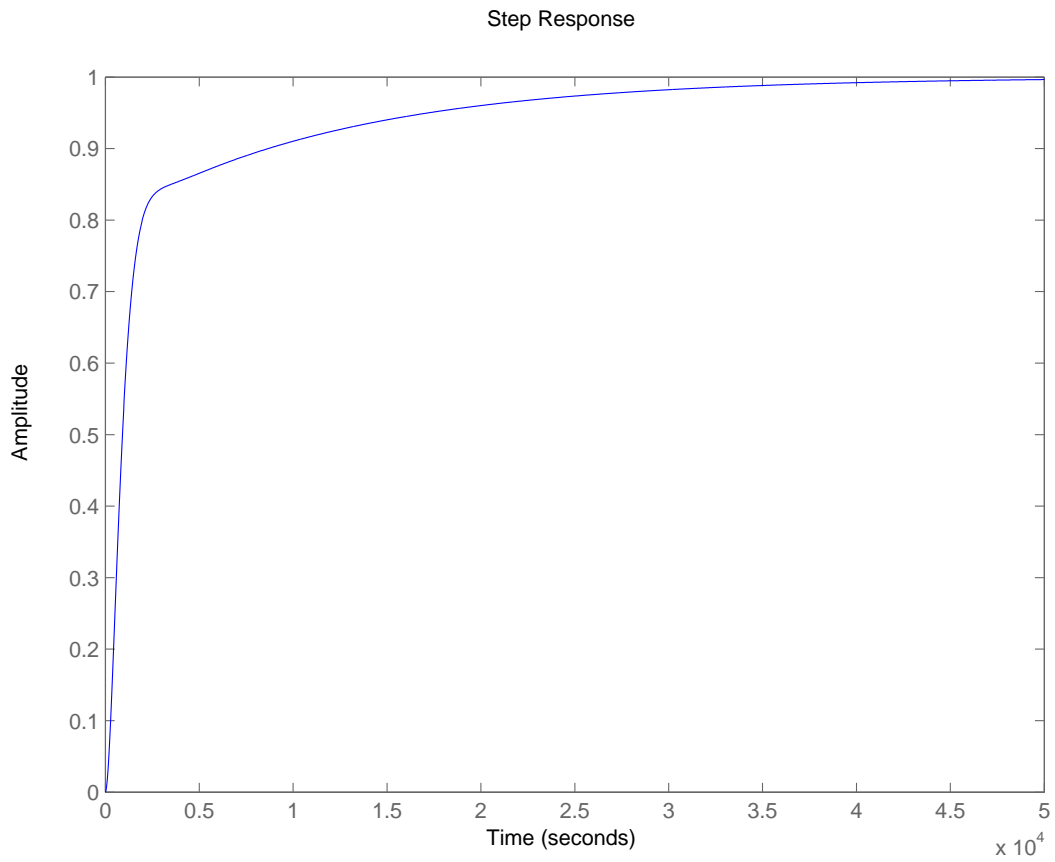


fig. 10: Step response di $W(s)$ per $z = 10^{-4}$.

Dalla fig. 10 si legge $t_r \approx 10^4 s$ un tempo inaccettabile per le applicazioni del sistema studiato.

È lecito allora chiedersi se tollerando una sovralongazione contenuta sia possibile migliorare ulteriormente le prestazioni. Vediamo cosa succede portando lo zero a $z = 10^{-3}$, oltre il primo polo, abbassando quindi il margine di fase.

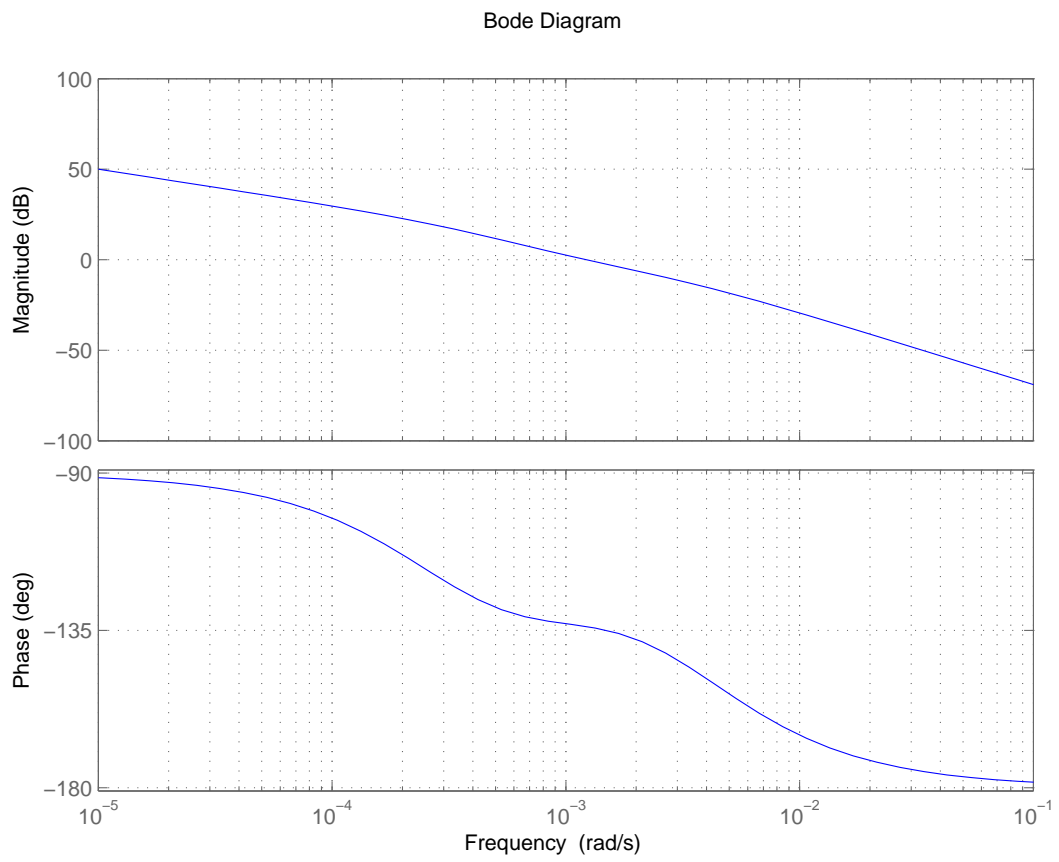


fig. 11: diagrammi di Bode di $C_{PI}(s)G(s)$ per $z = 10^{-3}$.

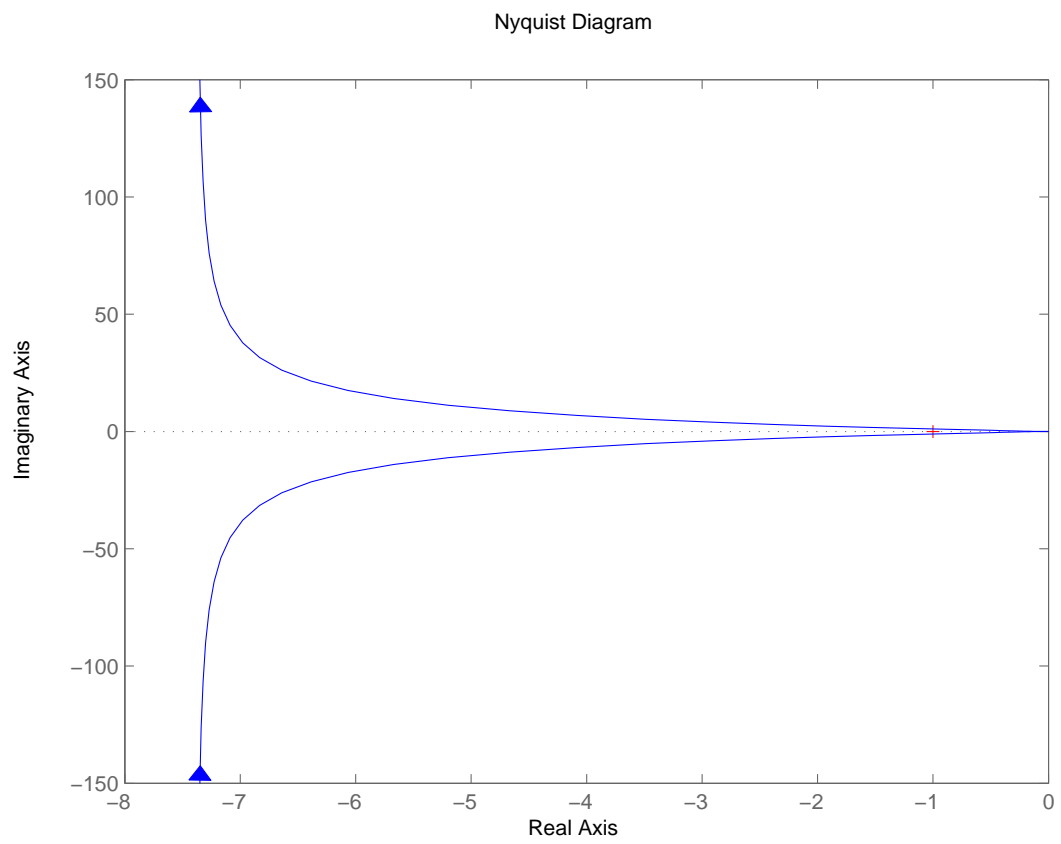


fig. 12: diagrammi di Nyquist di $C_{PI}(s)G(s)$ per $z = 10^{-3}$.

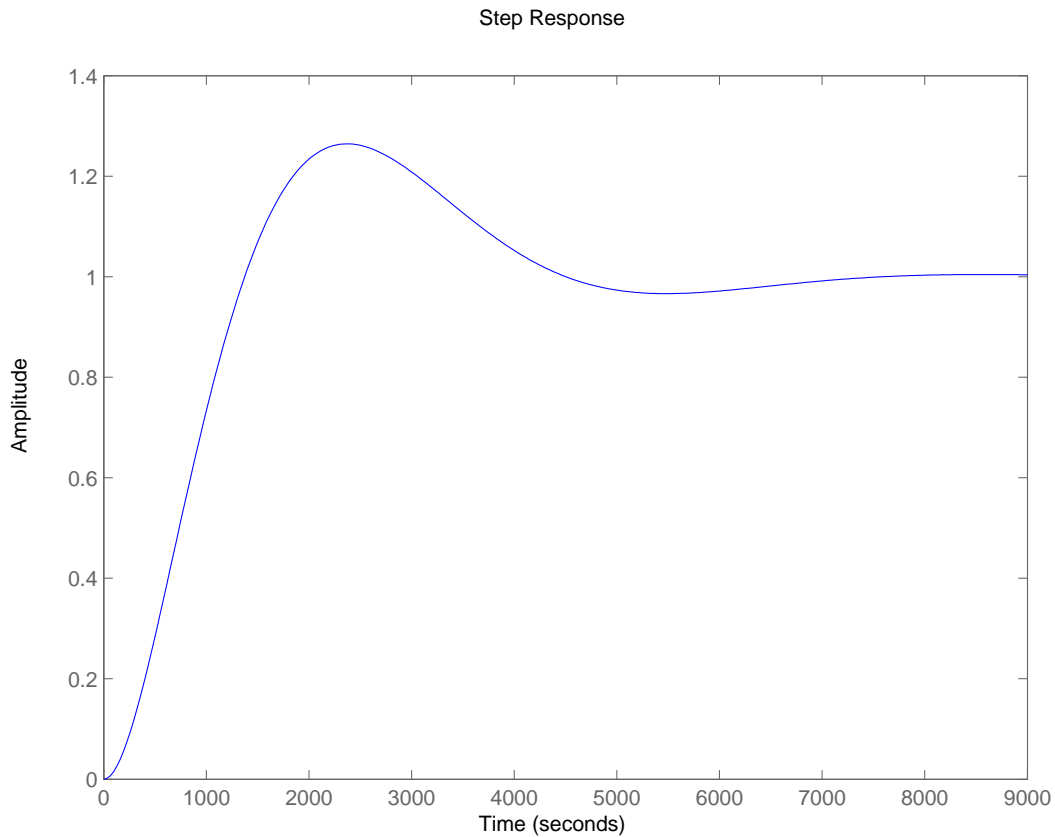


fig. 13: Step response di $W(s)$ per $z = 10^{-3}$.

Osservando il diagramma di Nyquist in fig. 12, $C_{PI}(s)G(s)$ si sta avvicinando al punto -1 , questo appare chiaramente dalla risposta al gradino in fig. 13 nella quale compare una sovralongazione del 20%. Concludiamo quindi che l'utilizzo di un controllore PI non è sufficiente per un controllo efficace del sistema.

3.3 Tentativo 2: sintesi di un controllore PID

Manteniamo invariate le prestazioni che vogliamo ottenere dalla risposta al gradino del sistema:

- (i) il tempo di salita t_r sia inferiore a 50 secondi;
- (ii) la risposta sia priva di oscillazioni (ottenuta imponendo un margine di fase $m_\phi \approx 90^\circ$ alla risposta in frequenza del sistema in catena aperta);
- (iii) l'errore a regime sia nullo.

Per prima cosa riscrivo la funzione (37) di trasferimento del controllore PID in forma fattorizzata:

$$C_{PID}(s) = \frac{k_i}{s} (1 + \tau_1 s)(1 + \tau_2 s) \quad (46)$$

Osservo che per l'analisi è ancora valida la fig. 8, in cui il polo nell'origine ora è quello aggiunto dal controllore $C_{PID}(s)$. Con riferimento allo studio fatto alla sezione precedente relativo al controllore $C_{PI}(s)$, grazie all'utilizzo del controllore completo $C_{PID}(s)$ abbiamo la possibilità di collocare un ulteriore zero per migliorare le prestazioni di $W(s)$. Con un'idea simile a quella utilizzata nel caso del controllore PI, dalla fig. 8 si nota che, ponendo i due zeri in bassa frequenza, la fase alle frequenze al disopra dei due poli si porta stabilmente a -90° , quindi per qualsiasi pulsazione di attraversamento superiore a quelle di p_1 e p_2 si ha $m_\phi = 90^\circ$.

Semplifico l'analisi scegliendo per i due zeri valori coincidenti e li posiziono in bassa frequenza, consegue che il valore di $\tau = \tau_1 = \tau_2$ dev'essere elevato, da cui:

$$C_{PID}(s) = \frac{k_i}{s} (1 + 2 \tau s + \tau s^2) \quad (47)$$

Riassumendo, fissata la pulsazione di attraversamento al di sopra dei valori p_1 e p_2 , scelto un τ sufficientemente elevato, il margine di fase soddisferà la condizione (ii).

Rimane però da definire il parametro che consente di portare la pulsazione di attraversamento al di sopra dei due poli. In analogia al caso con controllore PI, la costante k_i di $C_{PID}(s)$ permette di regolare il valore della costante di Bode della serie $C_{PID}(s)G(s)$. Aumentando il valore di k_i quindi si ottiene un aumento della pulsazione di attraversamento ω_a proprio come desiderato. Dalle considerazioni fatte risulta che per τ sufficientemente grande, aumentando k_i è possibile aumentare la pulsazione di attraversamento a piacere mantenendo $m_\phi = 90^\circ$. Ovvero è possibile ridurre a piacere t_r garantendo comunque l'assenza di oscillazioni.

A questo punto, per validare i ragionamenti fatti, vanno scelti i valori da attribuire a τ ed a k_i . Da alcune simulazioni, eseguite con il software di calcolo Matlab, risulta ragionevole ed efficace scegliere i seguenti valori per i parametri di controllo:

$$\begin{aligned} \tau &= 10^4 \\ k_i &= 10^4 \end{aligned} \quad (48)$$

da cui:

$$\begin{aligned} k_p &= 2 \cdot \tau k_i \\ k_d &= \tau^2 k_i \end{aligned} \quad (49)$$

A conferma delle ipotesi, si riportano il grafico di Bode di $C_{PID}(s)G(s)$ e la risposta al gradino del modello in retroazione:

$$W(s) = \frac{C_{PID}(s)G(s)}{1 + C_{PID}(s)G(s)} \quad (50)$$

fissando $\tau = 10^4$ e $k_i = 10^4$.

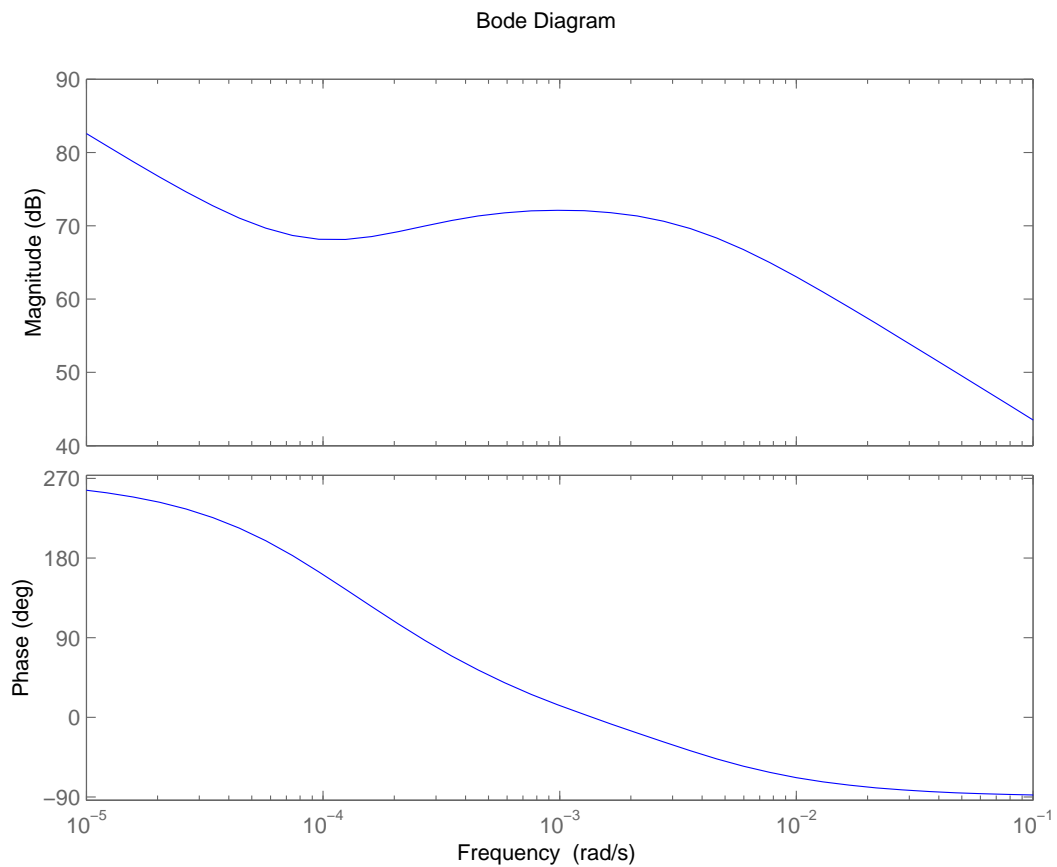


fig. 14: diagrammi di Bode di $C_{PID}(s)G(s)$ per $\tau = 10^4$ e $k_i = 10^4$.

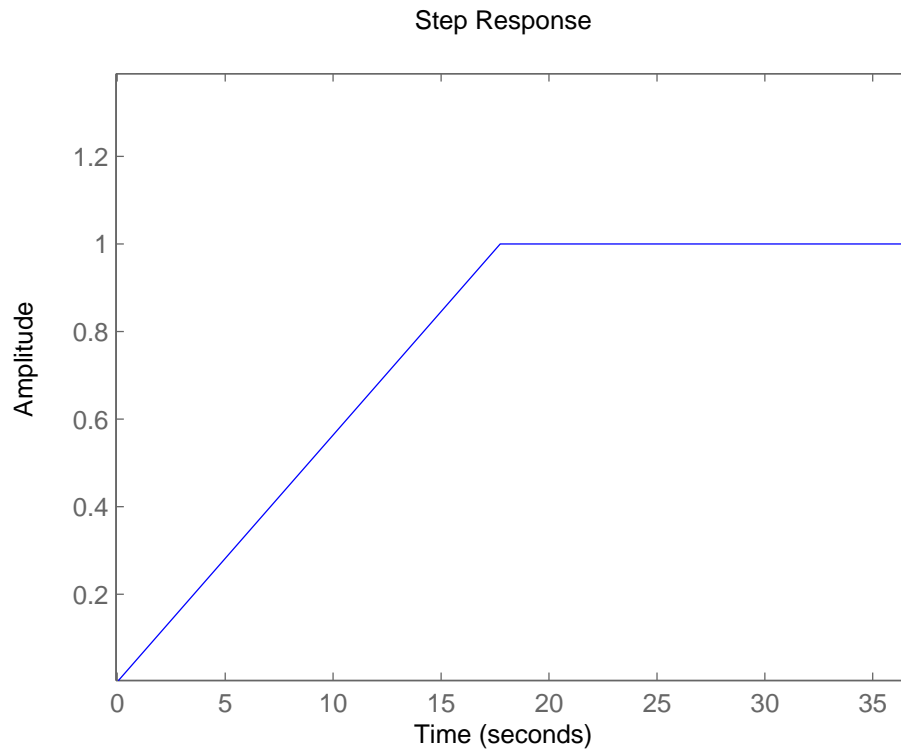


fig. 15: Risposta al gradino di $W(s)$ per $\tau = 10^4$ e $k_i = 10^4$.

In conclusione è possibile osservare dalla fig. 15 che il tempo di salita si è ridotto a $t_r \approx 16s < 50s$ senza introdurre oscillazioni nella risposta al gradino del sistema, di conseguenza le condizioni (i), (ii) ed (iii) sono state completamente soddisfatte.

Riferimenti bibliografici

- [1] M. Bisiacco, S. Braghetto, *Teoria dei sistemi dinamici*, Ed. Esculapio, Bologna ottobre 2010.
- [2] M. Bisiacco, M.E. Valcher, *Controlli Automatici*, Ed. Libreria Progetto, Padova 2008.
- [3] E. Laubwald, *Coupled tanks systems*, ad oggi febbraio 2012 consultabile all'indirizzo <http://www.control-systems-principles.co.uk/whitepapers/coupled-tanks-systems.pdf>.