



UNIVERSITÀ DEGLI STUDI DI PADOVA  
DIPARTIMENTO DI INGEGNERIA DELL' INFORMAZIONE  
TESI DI LAUREA TRIENNALE

# Modello MIMO per la stabilizzazione del Segway

---

RELATORE: Prof. Mauro Bisiacco

Laureando: Luca Magnabosco



## Sommario

<b>1 Presentazione del Segway</b> .....	3
<b>2 Modellizzazione</b> .....	4
2.1 Analisi della parte inferiore .....	4
2.2 Analisi della parte superiore .....	5
2.3 Utilizzando il motore in corrente continua .....	6
2.4 Driver controllato in corrente .....	7
<b>3 La funzione di trasferimento</b> .....	8
3.1 Diagrammi .....	9
<b>4 Sviluppo di un controllore</b> .....	10
4.1 Il diagramma di Nyquist del sistema da stabilizzare .....	10
4.2 Scelta dei parametri opportuni .....	11
4.3 Nyquist stabilizzato .....	11
4.4 Diagrammi di Bode di $W$ .....	12
4.5 Risposta al gradino .....	13
4.6 Robustezza del controllore e altre considerazioni .....	14
<b>5 Analisi del modello di stato</b> .....	15
5.1 Premessa .....	15
5.2 Costruzione del modello di stato.....	15
5.3 Studio delle proprietà del sistema .....	16
<b>6 Sintesi del controllore per il modello di stato</b> .....	19
6.1 Premessa .....	19
6.2 Realizzazione di un controllore lineare .....	19
<b>7 Sintesi dello stimatore dello stato</b> .....	21
7.1 Realizzazione dello stimatore dello stato .....	21
7.2 Andamento degli errori di stima .....	22
<b>8 Struttura e prestazioni del regolatore</b> .....	24
<b>9 Alcune simulazioni</b> .....	26
<b>10 Conclusioni</b> .....	29



## 1 Presentazione del Segway



Il **Segway** è un dispositivo di trasporto personale alimentato a batteria.

La sua invenzione si deve a Dean Kamen che ne presentò il prototipo nel 2001.

Il Segway è un mezzo di trasporto elettrico a 2 ruote costituito da un pianale inclinabile e da un manubrio. La sua peculiarità è che si tratta di un veicolo particolarmente intuitivo da controllare; infatti inclinandosi in avanti o indietro si accelera o si decelera, mentre spostando il proprio peso a destra o a sinistra, si impostano le curve. Per fare ciò utilizza sensori di rotazione giroscopici allo stato solido sviluppati con tecnologia MEMS.

Pesa 38 kg e riesce a raggiungere una velocità di 20 km/h con 40 km di autonomia. Non richiede alcuna speciale manutenzione: dal punto di vista ecologico rappresenterebbe un valido aiuto per combattere l'inquinamento atmosferico.

## 2 Modellizzazione

### 2.1 Analisi della parte inferiore

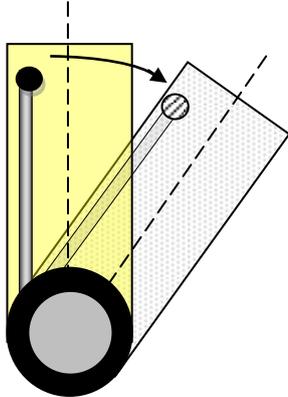


Figura 1.0: schematizzazione del Segway

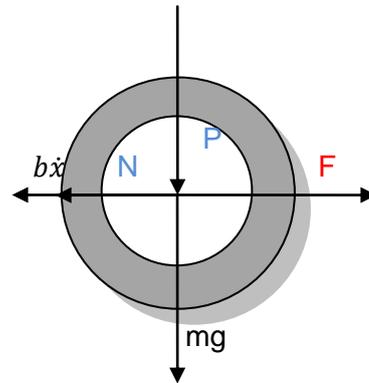


Figura 2.1: bilancio delle forze nella parte inferiore

Le forze che agiscono verticalmente vengono compensate dalla reazione del terreno, invece, le forze che agiscono orizzontalmente sono date dall'equazione:

$$M\ddot{x} = F - N - b\dot{x} \quad (1.1)$$

Come rappresentato in figura 2.1, dove:

$F$  è la forza motrice

$N$  e  $P$  sono le forze di interazione con la parte superiore

$M$  è la massa della parte inferiore

$g$  è l'accelerazione gravitazionale

$b\dot{x}$  è l'attrito viscoso

## 2.2 Analisi della parte superiore

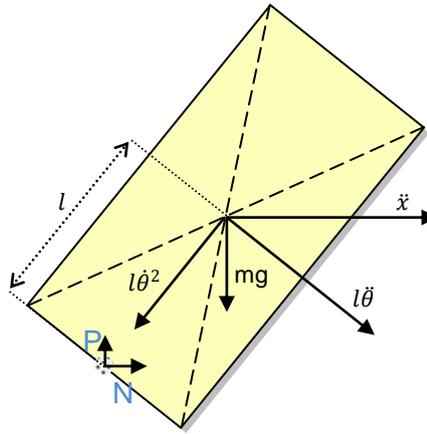


Figura 2.2: bilancio delle forze nella parte superiore

Il bilancio delle forze che agiscono orizzontalmente è dato dall'equazione:

$$N = m\ddot{x} + ml\ddot{\theta} \cos \theta - ml\dot{\theta}^2 \sin \theta \quad (1.2)$$

dove:

$m\ddot{x}$  è la forza data dall'accelerazione del robot

$ml\ddot{\theta} \cos \theta$  è la forza data dall'accelerazione angolare

$ml\dot{\theta}^2 \sin \theta$  è la forza data dall'accelerazione centripeta

Analizzando invece l'equilibrio verticale della parte superiore:

$$P - mg = m \frac{d^2 l \cos \theta}{dt^2}$$

$$P - mg = -ml\dot{\theta}^2 \cos \theta - ml\ddot{\theta} \sin \theta$$

$$P \sin \theta - mg \sin \theta = -ml\dot{\theta}^2 \cos \theta \sin \theta - ml\ddot{\theta} (\sin \theta)^2 \quad (1.3)$$

Considerando il centro di massa della parte superiore è possibile scrivere l'equazione che descrive l'equilibrio dei momenti:

$$I\ddot{\theta} = Pl \sin \theta - Nl \cos \theta \quad (1.4)$$

dove I è il momento d'inerzia rispetto al baricentro della parte superiore.

Sviluppando i calcoli:

$$I\ddot{\theta} = (mg - ml\dot{\theta}^2 \cos \theta - ml\ddot{\theta} \sin \theta)l \sin \theta - (m - ml\ddot{\theta} \cos \theta - ml\dot{\theta}^2 \sin \theta)l \cos \theta \quad (1.5)$$

che semplificando diventa:

$$(I + ml^2)\ddot{\theta} = mgl \sin \theta - ml\ddot{x} \cos \theta \quad (1.6)$$

Quindi:

$$\ddot{x} = \frac{(I + ml^2)\ddot{\theta} - mgl \sin \theta}{-ml \cos \theta} \quad (1.6)$$

che linearizzando per  $\theta$  piccolo diventa:

$$\ddot{x} = \frac{(I + ml^2)\ddot{\theta} - mgl\theta}{-ml} \quad (1.7)$$

Unendo (1.1) e (1.2) si ottiene:

$$(M + m)\ddot{x} + ml\ddot{\theta} \cos \theta = ml\dot{\theta}^2 \sin \theta + F - b\dot{x} \quad (1.8)$$

Linearizzando ancora per  $\theta$  piccolo si ottiene:

$$(M + m)\ddot{x} + ml\ddot{\theta} = mF - b\dot{x} \quad (1.9)$$

e sostituendo:

$$(M + m)\frac{(I + ml^2)\ddot{\theta} - mgl\theta}{-ml} + ml\ddot{\theta} = F - b\dot{x} \quad (1.10)$$

ed infine ricorrendo a Laplace

$$(M + m)\frac{(I + ml^2)s^2\theta - mgl\theta}{-ml} + mls^2\theta = F - bsx \quad (1.11)$$

### 2.3 Utilizzando il motore in corrente continua

Sapendo che  $F = 2(24C_m - I_r\ddot{\omega}_r) * R$  dove:

24 è il rapporto di riduzione (tratto dalle specifiche del Segway)

2 è dovuto al fatto che ci sono 2 motori che contribuiscono a muovere il mezzo

$I_r$ : inerzia complessiva del carico attaccato al motore, che quindi dipende principalmente dalla ruota

$I = \frac{1}{12}m(2l)^2 = \frac{1}{3}ml^2$ : inerzia dell'asta verticale e della persona che si tiene ad essa, rispetto al baricentro dell'asta (1.12)

## 2.4 Driver controllato in corrente

Decidiamo, a questo punto, di utilizzare il motore con un driver controllato in corrente.

$C_m$  : è la coppia generata dal motore, che per il motore in corrente continua, controllato da driver in corrente, vale:

$$C_m = \frac{1}{I_m s + F_m} \dot{\omega}_m$$

dove  $\dot{\omega}_m = 24\dot{\omega}_r$  ovvero la velocità angolare del motore è uguale a quella della ruota per il rapporto di riduzione. Inoltre  $\dot{\omega}_r R = \dot{x}$

Quindi sostituendo e semplificando

$$\left\{ (M + m) \left[ -\frac{4}{3} l s^2 + g \right] + m l s^2 \right\} \theta = \left[ 2 \left( \frac{576s}{I_m s + F_m} - I_r s^2 \right) - b s \right] x$$

da cui:

$$\frac{x}{\theta} = \frac{\left\{ (M + m) \left[ -\frac{4}{3} l s^2 + g \right] + m l s^2 \right\}}{\left[ 2 \left( \frac{576s}{I_m s + F_m} - I_r s^2 \right) - b s \right]} = \frac{(M + m) \left[ -\frac{4}{3} l s^2 + g \right] (I_m s + F_m) + m l s^2 (I_m s + F_m)}{1152s - 2I_r s^2 (I_m s + F_m) - b s (I_m s + F_m)}$$

ed infine:

$$\frac{x}{\theta} = \frac{\left[ (M + m) \left( -\frac{4}{3} l \right) I_m + m l I_m \right] s^3 + \left[ (M + m) \left( -\frac{4}{3} l \right) + m l \right] F_m s^2 + (M + m) g I_m s + (M + m) g F_m}{-2I_r I_m s^3 - (2I_r F_m + b I_m) s^2 - (b F_m - 1152) s}$$

$$\frac{x}{\theta} = \frac{\left[ (M + m) \left( -\frac{4}{3} l \right) I_m + m l I_m \right] s^3 + \left[ (M + m) \left( -\frac{4}{3} l \right) + m l \right] F_m s^2 + (M + m) g I_m s + (M + m) g F_m}{s \{ -2I_r I_m s^2 - (2I_r F_m + b I_m) s - (b F_m - 1152) \}}$$

### 3 La funzione di trasferimento

A questo punto si sostituiscono le specifiche del Segway, stimando i parametri non dati:

$$g = 9.8 \text{ m/s}^2$$

$$l = \text{met\`a della lunghezza dell'asta} = 0.7\text{m}$$

$$M = \text{massa della base del segway} = 38 \text{ Kg}$$

$$m = \text{massa della parte alta del segway} + \text{massa della persona a bordo} = 3.7 + 80 = 83.7\text{Kg}$$

$$R = \text{raggio della ruota} = 24 \text{ cm}$$

$$m_r = \text{massa della ruota} = 3\text{Kg}$$

$$b = \text{coefficiente di attrito viscoso, assunto pari ad 1}$$

$$I_{ruota} = \frac{1}{2} m_r R^2 = 0.0864 \text{ Kg m}^2$$

$$I_m = 0.0116 \text{ Kg m}^2$$

$$F_m = \frac{K_T * I_a \text{ no load}}{\dot{\theta}_{max}} = 0.727 * 10^{-3} \text{ Nms}$$

dove gli ultimi due parametri sono stati calcolati dai datasheet del motore LEM 130 95 della L.M.C ltd. Questo è stato scelto in quanto in grado di sviluppare una potenza di poco più di 1500w e una coppia di 4.35 Nm (circa la stessa dei motori brushless usati realmente nel Segway).



LEM-130 Model

Si ottiene così:

$$\frac{x}{\theta} = \frac{0.638s^3 + 0.04s^2 - 13.8349s - 0.8671}{s\{0.002s^2 + 0.0117s - 1152\}}$$

### 3.1 Diagrammi

Dalla funzione di trasferimento si ottengono i seguenti diagrammi di Bode:

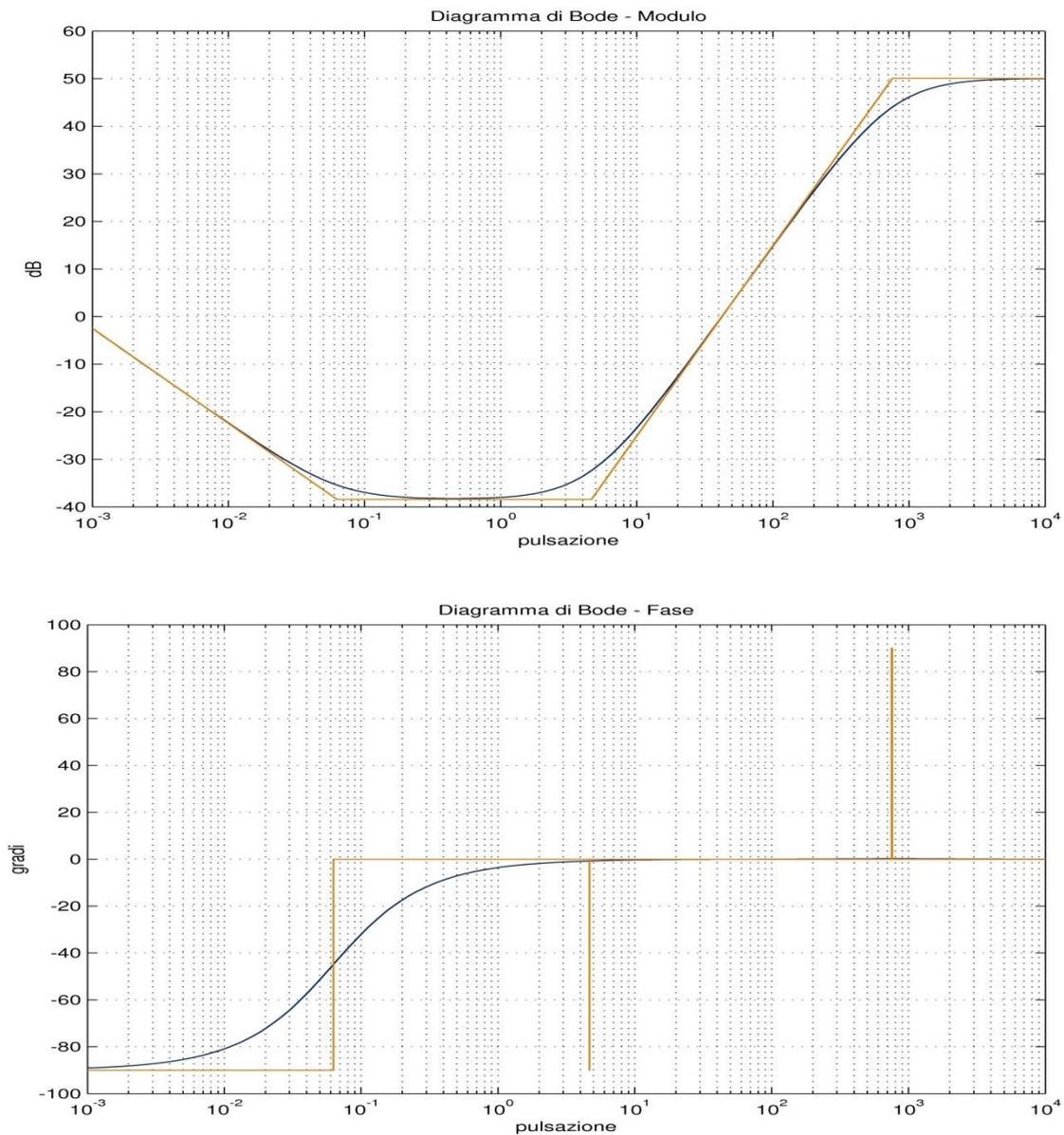


Figura 3.1: Diagrammi di Bode

La FDT proposta ha tre zeri e tre poli ordinati come segue:

$$p_1 = 0 < |z_1| < |z_2| \approx |z_3| < |p_2| \approx |p_3|, \text{ con } z_1 < 0, z_2 > 0, z_3 < 0, p_2 < 0, p_3 > 0$$

e quindi è della forma:

$$G(s) = K_B \frac{\left(1 + \frac{s}{z_1}\right) \left(1 + \frac{s}{z_2}\right) \left(1 + \frac{s}{z_3}\right)}{s \left(1 + \frac{s}{p_2}\right) \left(1 + \frac{s}{p_3}\right)}$$

Con  $K_B > 0$ .

$$z_1 = -0.0627 \quad z_2 = 4.6567 \quad z_3 = -4.6567$$

$$p_2 = -761.0219 \quad p_3 = 755.1850$$

In particolare, si noti la presenza sia di un polo che di uno zero instabile.

## 4 Sviluppo di un controllore

### 4.1 Il diagramma di Nyquist del sistema da stabilizzare

Poiché il diagramma di Nyquist che si ottiene è del seguente tipo

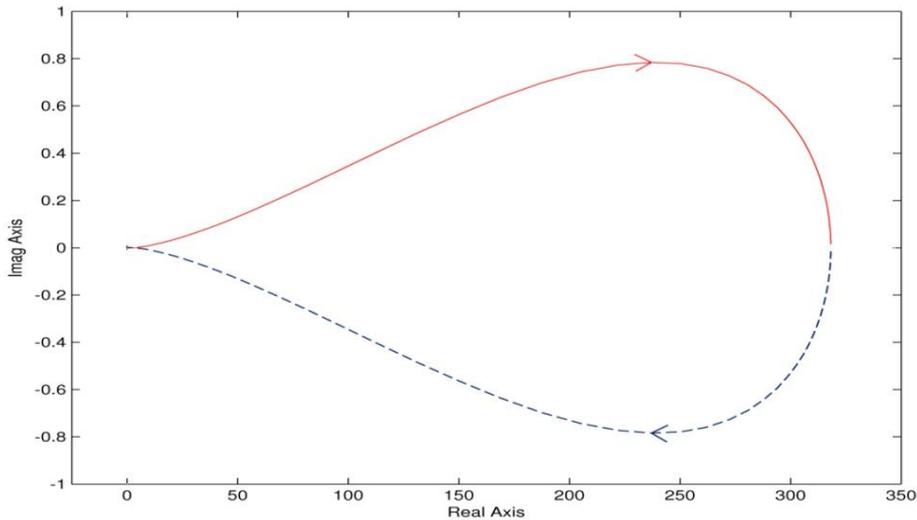


Figura 4.1: Diagramma di Nyquist del sistema da stabilizzare

dalla formula  $W_+ = G_+ - N_G$  si capisce come anche la funzione di trasferimento ad anello chiuso  $W_+$  abbia un polo positivo e sia quindi instabile.

Il nostro obiettivo sarà quindi, innanzitutto, quello di renderla stabile.

Costruiamo un primo compensatore in modo da cancellare zeri e poli instabili:

$$C_1(s) = \frac{\left(1 + \frac{s}{p_2}\right)}{\left(1 + \frac{s}{z_1}\right)\left(1 + \frac{s}{z_3}\right)}$$

in modo che:

$$C_1(s)G(s) = K_B \frac{\left(1 + \frac{s}{z_2}\right)}{s\left(1 + \frac{s}{p_3}\right)}$$

Ora è sufficiente la seguente soluzione:

$$C_2(s) = K_C \left(1 - \frac{s}{a}\right)$$

e quindi:

$$C_{TOT}(s) = C_1(s)C_2(s)$$

Con  $a > 0$ , per ottenere:

$$C_{TOT}(s)G(s) = K_B K_C \frac{\left(1 + \frac{s}{z_2}\right)\left(1 - \frac{s}{a}\right)}{s\left(1 + \frac{s}{p_3}\right)}$$

Si tratta ora di far vedere che scegliendo opportunamente  $K_C > 0$  si riesce ad ottenere  $W(s)$  stabile, dove  $W(s)$  è la funzione ad anello chiuso.

$$W(s) = \frac{C(s)G(s)}{1 + C(s)G(s)}$$

Questo si può fare utilizzando Routh e poi verificando con il criterio di Nyquist.

### 4.2 Scelta dei parametri opportuni

Dallo studio mediante il metodo di Routh risulta:

$$\frac{|z_2|a}{|z_2| + a} > K > \frac{|z_2|a}{|p_3|}$$

Quindi:  $0 < a < |p_3| - |z_2|$

### 4.3 Nyquist stabilizzato

Verifichiamo la stabilità appena dimostrata riportando il grafico di Nyquist per  $a = 70$  e  $K = K_B * K_C = 1$

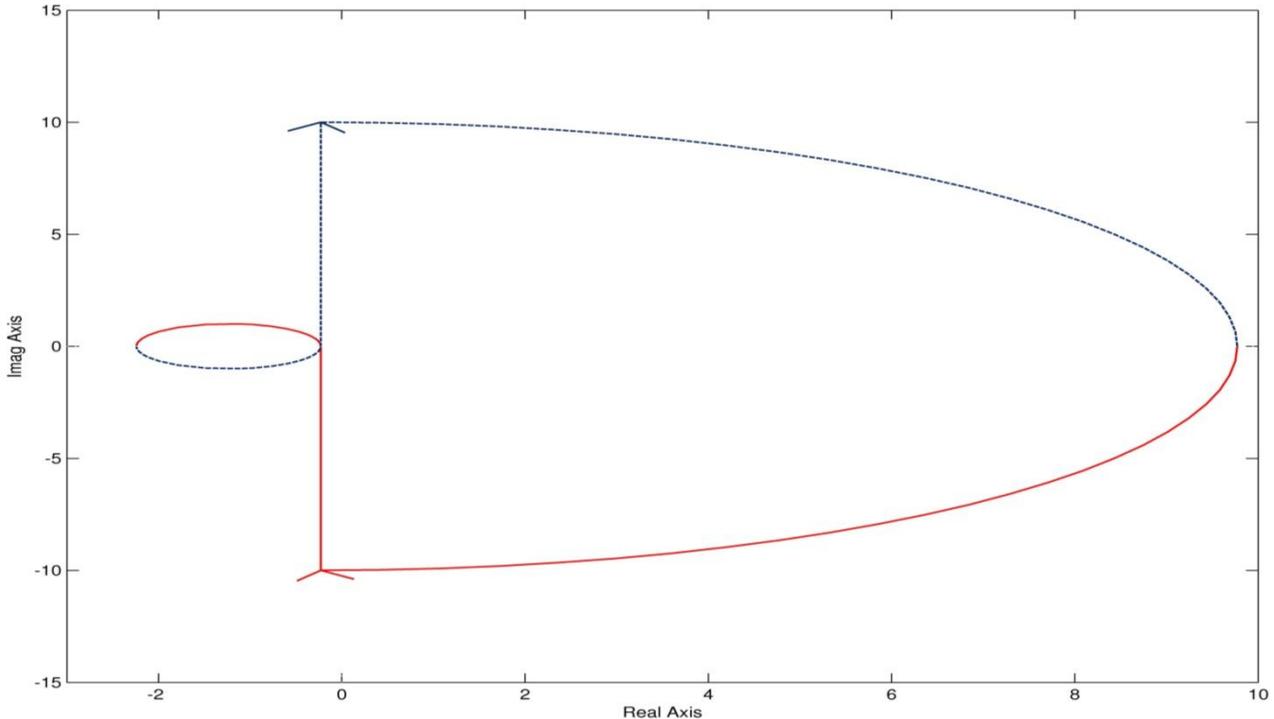


Figura 4.2: Diagramma di Nyquist del sistema stabilizzato

Risulta immediato vedere che il grafico compie un giro antiorario intorno a -1 e quindi dalla formula  $W_+ = G_+ - N_G$  si conclude che  $W$  è stabile.

### 4.4 Diagrammi di Bode di $W$

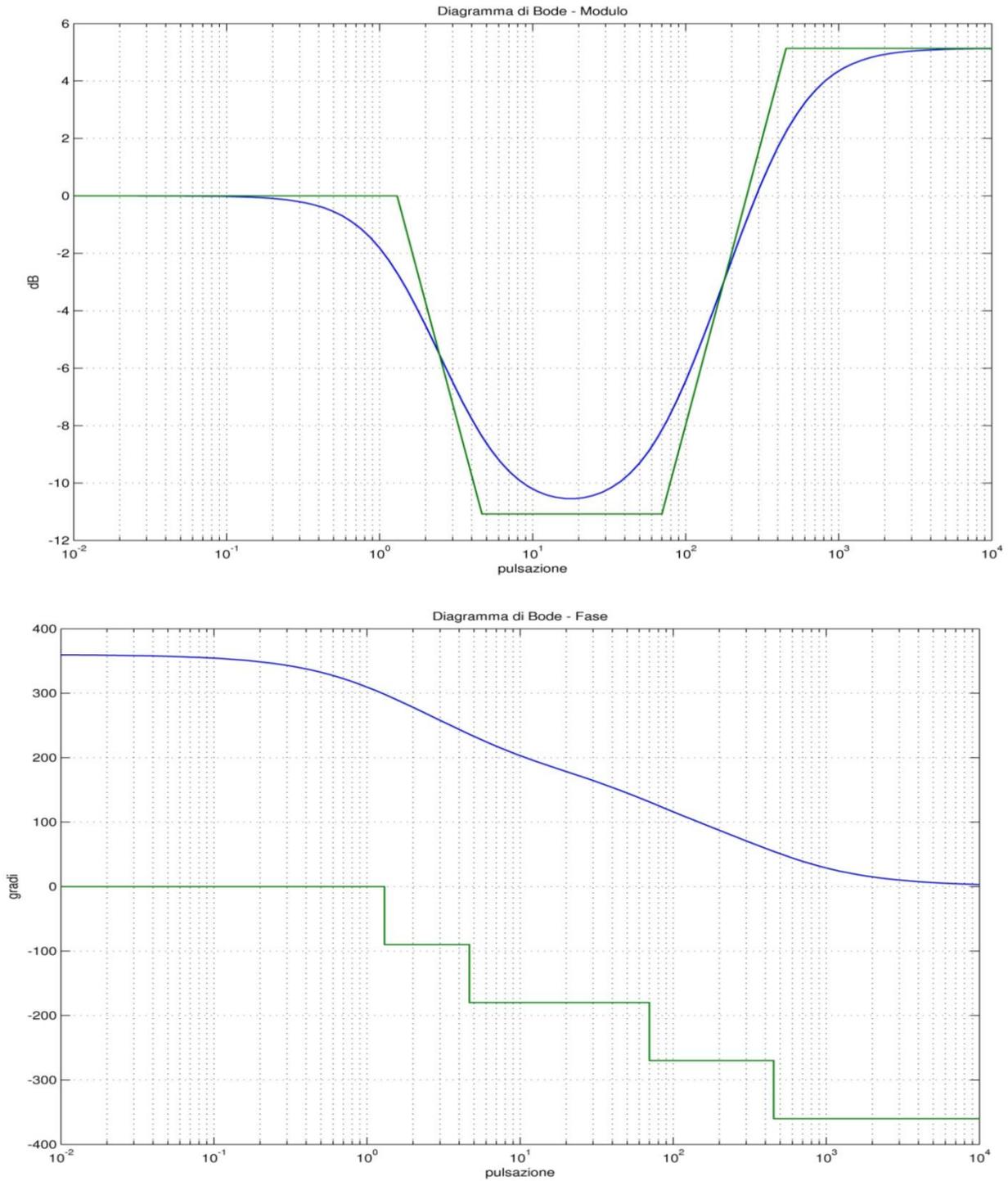


Figura 4.3: Diagrammi di Bode del sistema stabilizzato

### 4.5 Risposta al gradino

L'ingresso del sistema è il seguente:

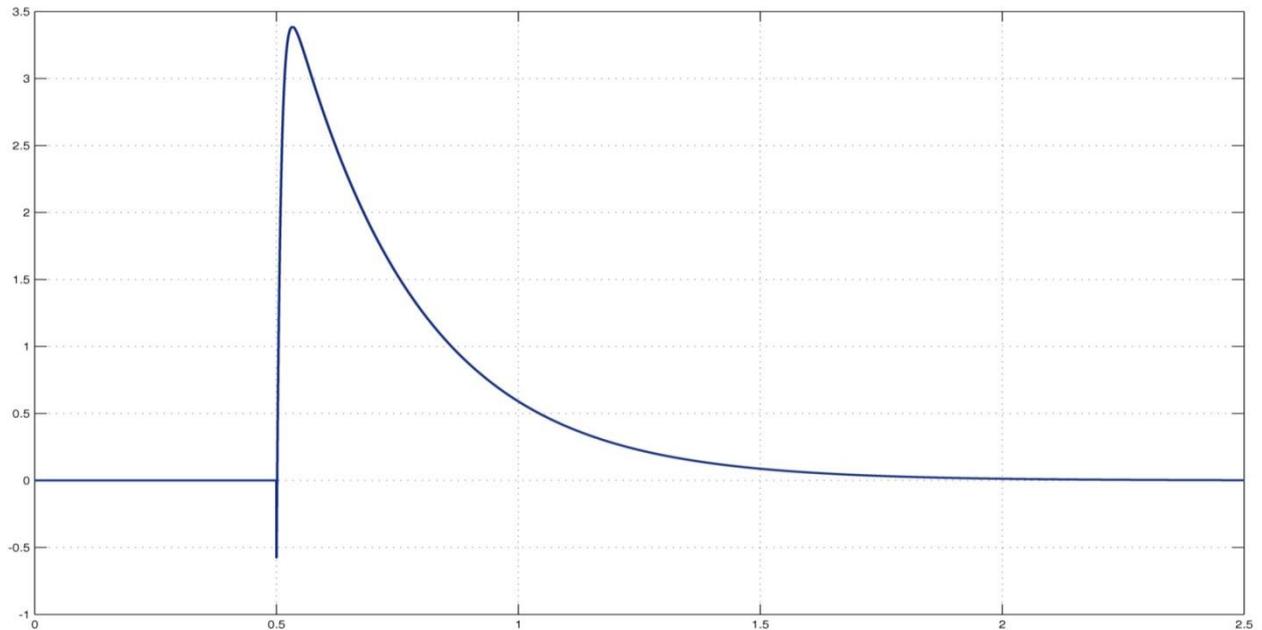


Figura 4.4: L'ingresso del sistema e la risposta del sistema al gradino è la seguente:

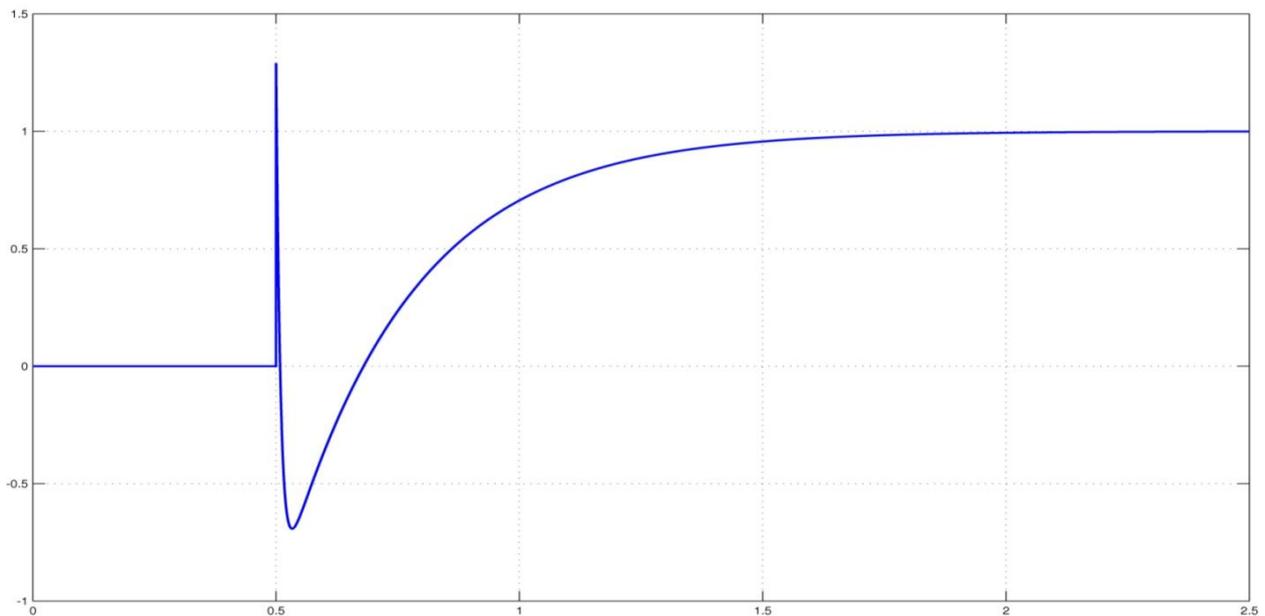


Figura 4.5: Risposta del sistema al gradino

Si nota come con  $K=2$  e  $a=70$  il rise-time sia piuttosto alto, pari a circa 1.2 secondi ed è evidente la presenza di un undershoot. Tuttavia il sistema non presenta oscillazioni attorno al punto di equilibrio e, come si vede dal grafico precedente, i valori in ingresso al sistema non sono tali da generare condizioni di saturazione.

Questo tipo di risposta è dovuta al fatto che si è rivolta l'attenzione alla stabilizzazione del sistema e non al miglioramento delle sue prestazioni.

#### 4.6 Robustezza del controllore e altre considerazioni

E' interessante notare che, anche se la risposta del sistema non ha una forma standard, il controllore realizzato garantisce una buona robustezza alle variazioni parametriche.

Infatti, aumentando del 300% il carico a cui è sottoposto il Segway, si ottengono i seguenti grafici, che differiscono dai precedenti in minima parte. Infatti l'overshoot è dell'ordine dello 0.01% e le oscillazioni attorno al punto di equilibrio, che si fanno più frequenti, sono dell'ordine dello 0.002%.

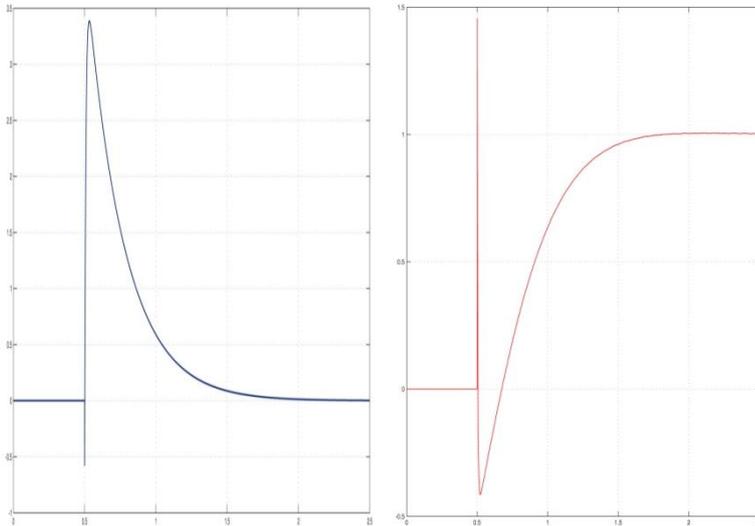


Figura 4.6: andamento dell'ingresso e dell'uscita del sistema in seguito a variazioni parametriche

Alla luce dei grafici precedenti si possono effettuare alcune considerazioni:

- L'undershoot è intrinseco ed inevitabile: esso è causato dalla presenza di zeri positivi sia nel sistema stesso che nel controllore preso in considerazione.
- La ragione per cui la risposta al gradino non comincia da zero è data dal fatto che  $C_{TOT}(s)G(s)$  è propria ma non strettamente propria e quindi  $W(\infty) = \lim_{s \rightarrow \infty} W(s)$  è finito e non nullo. Si potrebbe pensare di effettuare uno studio al variare di "K" e "a", per rendere il più piccolo possibile questo salto iniziale. Infatti l'ampiezza di  $W(\infty)$  è un aspetto predominante della risposta, di rilevanza maggiore sia rispetto al rise-time che all'overshoot.

Tuttavia questo porterebbe a realizzare  $|W(\infty)| \ll 1$  e quindi  $|C_{TOT}(s)G(s)| \ll 1$  e ciò causerebbe l'instabilità del sistema poiché, come si osserva dal grafico di Nyquist del sistema stabilizzato (Figura 4.2: **Diagramma di Nyquist del sistema stabilizzato1**), se non si compie un giro intorno a "-1"  $W_+ = 1$ .

Un'altra soluzione per rendere  $W(\infty) = 0$  sembrerebbe essere l'aggiunta di un polo ad alta frequenza in modo da rendere il sistema strettamente proprio, tuttavia anche questa idea è inapplicabile poiché come si può capire da (Figura 4.2: **Diagramma di Nyquist del sistema stabilizzato1**) anche in questo caso il sistema diverrebbe instabile.

Da queste considerazioni si può concludere che il sistema in esame presenta diverse caratteristiche che lo rendono difficilmente ottimizzabile mediante tentativi.

Per questo motivo si intende proseguire nell'intento di realizzare un controllore più prestazionale mediante il metodo "controllore + stimatore dello stato".

## 5 Analisi del modello di stato

### 5.1 Premessa

Questa modalità di controllo permette non solo un approccio più metodico ed efficace ma anche più generale. Mentre precedentemente si è dovuto utilizzare anche il modello specifico di un motore poiché non si potevano gestire sistemi con più ingressi e più uscite, ora si può prescindere da questo particolare e realizzare un controllo con il quale potranno essere utilizzati vari motori a seconda del livello di prestazioni richiesto.

Tuttavia bisogna sottolineare il fatto che uno schema di questo tipo è, per certi versi, semplificato perché non viene calcolata l'effettiva retroazione da applicare al motore.

### 5.2 Costruzione del modello di stato

Per costruire il modello usiamo le equazioni (1.6) e (1.12) da cui ricaviamo:

$$\ddot{\theta} = \frac{3}{4l}(g \sin \theta - \dot{x} \cos \theta) \quad (5.1)$$

Usando poi la (1.8) otteniamo:

$$(M + m)\ddot{x} + \frac{3}{4}m \cos \theta (g \sin \theta - \dot{x} \cos \theta) = ml\dot{\theta}^2 \sin \theta + F - b\dot{x}$$

$$\ddot{x} = \frac{ml\dot{\theta}^2 \sin \theta + F - b\dot{x} - \frac{3}{4}mg \cos \theta \sin \theta}{\left(M + m - \frac{3}{4}m \cos^2 \theta\right)} \quad (5.2)$$

dalla quale usando la (5.1):

$$\ddot{\theta} = \frac{3}{4l} \left[ g \sin \theta - \frac{ml\dot{\theta}^2 \sin \theta + F - b\dot{x} - \frac{3}{4}mg \cos \theta \sin \theta}{\left(M + m - \frac{3}{4}m \cos^2 \theta\right)} \cos \theta \right] \quad (5.3)$$

Si può quindi scrivere il sistema:

$$\left\{ \begin{array}{l} \dot{x} = \dot{x} \\ \ddot{x} = \frac{ml\dot{\theta}^2 \sin \theta + F - b\dot{x} - \frac{3}{4}mg \cos \theta \sin \theta}{\left(M + m - \frac{3}{4}m \cos^2 \theta\right)} \\ \dot{\theta} = \dot{\theta} \\ \ddot{\theta} = \frac{3}{4l} \left[ g \sin \theta - \frac{ml\dot{\theta}^2 \sin \theta + F - b\dot{x} - \frac{3}{4}mg \cos \theta \sin \theta}{\left(M + m - \frac{3}{4}m \cos^2 \theta\right)} \cos \theta \right] \end{array} \right. \quad (5.4)$$

Il sistema è quindi del quarto ordine e presenta quattro variabili di stato:

la posizione  $x$ , la velocità  $\dot{x}$ , l'angolo di piega  $\theta$  e la velocità angolare  $\dot{\theta}$ .

### 5.3 Studio delle proprietà del sistema

#### 5.3.1 Equilibrio

Si può notare che esiste un valore  $\bar{x}$  del vettore di stato  $x = \begin{bmatrix} x \\ \dot{x} \\ \theta \\ \dot{\theta} \end{bmatrix}$

e un valore  $\bar{F}$  dell'ingresso per i quali  $\dot{x} = G(\bar{x}, \bar{F}) = \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \\ 0 \end{bmatrix}$ .

Quindi si può concludere che esiste un punto di equilibrio in corrispondenza dei valori:

$$x = \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \\ 0 \end{bmatrix} \text{ e } \bar{F} = 0.$$

#### 5.3.2 Linearizzazione

In base alle considerazioni del punto precedente si può concludere che se le oscillazioni della parte superiore avvengono intorno al punto di equilibrio ricavato si può linearizzare il sistema (5.4) ottenendo:

$$\left\{ \begin{array}{l} \dot{x} = \dot{x} \\ \ddot{x} = \frac{F - b\dot{x} - \frac{3}{4}mg\theta}{\left(M + \frac{1}{4}m\right)} \\ \dot{\theta} = \dot{\theta} \\ \ddot{\theta} = \frac{3}{4l} \left[ g\theta - \frac{F - b\dot{x} - \frac{3}{4}mg\theta}{\left(M + \frac{1}{4}m\right)} \right] = \frac{3}{4l} \left[ \frac{g\theta(M + m) - F + b\dot{x}}{\left(M + \frac{1}{4}m\right)} \right] \end{array} \right. \quad (5.5)$$

che scritto in forma matriciale diventa:

$$\dot{x} = Ax + BF$$

$$\begin{bmatrix} \dot{x} \\ \ddot{x} \\ \dot{\theta} \\ \ddot{\theta} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & \frac{-b}{\left(M + \frac{1}{4}m\right)} & \frac{-\frac{3}{4}mg}{\left(M + \frac{1}{4}m\right)} & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & \frac{3b}{4l\left(M + \frac{1}{4}m\right)} & \frac{3g(M+m)}{4l\left(M + \frac{1}{4}m\right)} & 0 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} x \\ \dot{x} \\ \theta \\ \dot{\theta} \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} 0 \\ 1 \\ 0 \\ -3 \\ 4l\left(M + \frac{1}{4}m\right) \end{bmatrix} F$$

e sostituendo i valori utilizzati anche per il primo metodo ottengo:

$$\begin{bmatrix} \dot{x} \\ \ddot{x} \\ \dot{\theta} \\ \ddot{\theta} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & -0.0170 & -10.4403 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0.0182 & 21.6860 & 0 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} x \\ \dot{x} \\ \theta \\ \dot{\theta} \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} 0 \\ 0.0170 \\ 0 \\ -0.0182 \end{bmatrix} F$$

### 5.3.3 Stabilità

Trovando con Matlab il polinomio caratteristico otteniamo:

$$P(s) = s^4 + 0.0170s^3 - 21.6860s^2 - 0.1782s$$

che presenta le radici :

$$s_1 = 0 \quad s_2 = -0.0082 \quad s_3 = -4.6612 \quad s_4 = 4.6525$$

Quindi il sistema è instabile.

### 5.3.4 Raggiungibilità

La matrice di raggiungibilità del sistema è:

$$R = [B \quad AB \quad A^2B \quad A^3B]$$

e si verifica con Matlab che questa ha rango pieno e quindi il sistema è raggiungibile.

### 5.3.5 Osservabilità

Per analizzare l'osservabilità bisogna considerare anche un'altra matrice, la matrice  $C$ . Questa matrice, infatti, rappresenta le variabili di stato di cui è disponibile una misura ottenuta grazie ai sensori presenti nel Segway.

Poiché delle quattro variabili di stato del sistema, i sensori ci forniscono solo la posizione  $x$  e la velocità angolare  $\dot{\theta}$ , la matrice  $C$  è la seguente:

$$C = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}$$

quindi la matrice di osservabilità del sistema è:

$$O = [C \quad CA \quad CA^2 \quad CA^3]$$

e anche in questo caso si verifica con Matlab che il rango è pieno e quindi il sistema è osservabile.

## 6 Sintesi del controllore per il modello di stato

### 6.1 Premessa

Data la completa raggiungibilità del sistema è importante osservare che i poli ad anello chiuso possono essere scelti a piacere, e questo consente di facilitare la sintesi del controllore.

### 6.2 Realizzazione di un controllore lineare

Una volta modellizzato il sistema fisico è possibile realizzare un controllore per realizzare un controllo in catena chiusa come si vede dalla figura.

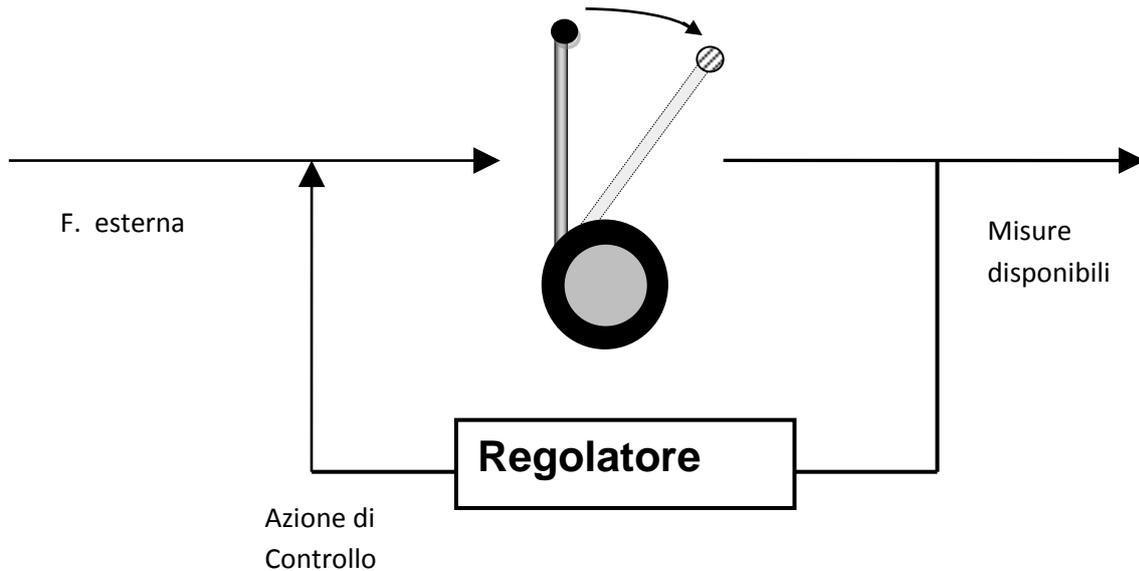


Figura 6.1: schematizzazione del sistema di controllo

Il sistema allora diventa:

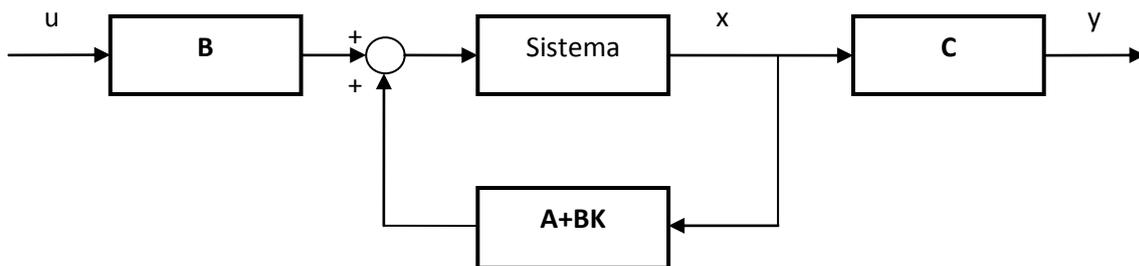


Figura 6.2: schematizzazione del sistema di controllo

Nella realizzazione del controllore bisogna tenere conto sia delle prestazioni che si desiderano, sia dei limiti. In particolare ci attendiamo che il controllore stabilizzi il sistema in un tempo ragionevole, ma allo stesso tempo siamo vincolati dalla potenza e dalla coppia che gli attuatori possono generare.

Decidiamo, in un primo momento, di imporre come polo  $-1$  con molteplicità 4. Data la dimensione delle matrici, scegliamo di calcolare la matrice  $K$  con il procedimento che prevede l'utilizzo della forma compagna:

$$A_c = \begin{bmatrix} 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \\ 0 & 0.1782 & 21.6860 & -0.017 \end{bmatrix} \quad B_c = \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \\ 1 \end{bmatrix}$$

$$R_c = [B_c \quad A_c B_c \quad A_c^2 B_c \quad A_c^3 B_c]$$

$$T = R R_c^{-1}$$

$$K = K_c T^{-1}$$

dove  $K_c$  si ricava a partire dall'ultima riga della matrice  $A_c + B_c K_c$  imponendo che l'ultima riga abbia la forma:

$$[-1 \quad -4 \quad -6 \quad -4]$$

Questo perché sappiamo che l'ultima riga della matrice in forma compagna è data, in generale, da:

$$[-a_0 \quad -a_1 \quad -a_2 \quad -a_3]$$

che sono i coefficienti del polinomio caratteristico ed in questo caso il polinomio caratteristico che desideriamo è:

$$P(s) = (s + 1)^4 = s^4 + 4s^3 + 6s^2 + 4s + 1$$

Quindi :

$$K_c = [-1 \quad -4.1782 \quad -27.6860 \quad -3.983]$$

e

$$K = [5.5908 \quad 23.4421 \quad 1527.8494 \quad 240.9311]$$

Tuttavia verificando con Matlab il reale posizionamento dei nuovi poli otteniamo:

$$s_1 = -1.1882 \quad s_2 = -1.0031 + 0.1913i \quad s_3 = -1.0031 - 0.1913i \quad s_4 = -0.8057$$

rivelando errori di posizionamento dei poli sino al 20%.

A questo punto, poiché la realizzazione di un controllore con precisione pari alla quarta cifra decimale è già impensabile, non ha senso superare tale limite e decidiamo di provare ad imporre poli diversi.

In particolare imponiamo i poli:  $-1, -2, -3, -4$ .

In questo caso otteniamo:

$$K_c = [-24 \quad -50.1782 \quad -56.686 \quad -9.983]$$

e

$$K = [134.3169 \quad 280.8766 \quad 3240.0762 \quad 810.8737]$$

In tal caso si verifica mediante Matlab che i poli reali diventano:

$$s_1 = -4.0004 \quad s_2 = -2.9984 \quad s_3 = -2.0018 \quad s_4 = -0.9993$$

Gli errori di posizionamento diventano inferiori all' 1% e sono pertanto accettabili.

## 7 Sintesi dello stimatore dello stato

### 7.1 Realizzazione dello stimatore dello stato

Al fine di realizzare un regolatore per il nostro sistema necessitiamo, ora, di uno stimatore asintotico dello stato, che sia in grado di ricostruire il vettore di stato in tutte le sue componenti nonostante i nostri sensori forniscano solo la posizione  $x$  e la velocità angolare  $\dot{\theta}$ .

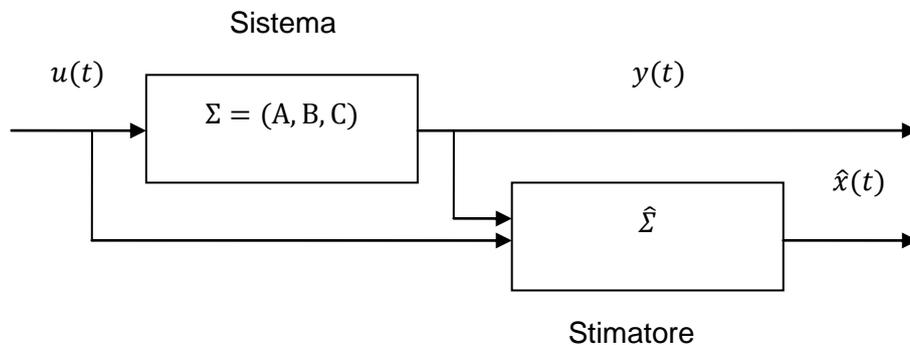


Figura 7.1: schematizzazione del sistema e dello stimatore

Nel nostro caso il sistema presenta due uscite, come si intuisce dal fatto che la matrice  $C$  presenta 2 righe. Quindi, se volessimo applicare lo stesso metodo di prima per ottenere il polinomio caratteristico che desideriamo dovremmo prima rendere il sistema osservabile da una sola uscita applicando il Lemma di Heymann al sistema duale.

Fortunatamente ci si può facilmente rendere conto che il sistema è osservabile anche solo da una delle 2 uscite quindi evitando l'uso del Lemma di Heyman si può imporre una matrice  $L$  avente la forma:

$$L = \begin{bmatrix} a & 0 \\ b & 0 \\ c & 0 \\ d & 0 \end{bmatrix}$$

dove i coefficienti  $a, b, c, d$  verranno scelti imponendo direttamente che il polinomio caratteristico della matrice  $A + LC$  abbia i poli desiderati.

Anche in questo caso scegliamo come poli  $-1, -2, -3, -4$  e otteniamo:

$$P(s) = s^4 + 10s^3 + 35s^2 + 50s + 24$$

e

$$L = \begin{bmatrix} -9.983 & 0 \\ -56.5163 & 0 \\ 25.5424 & 0 \\ 119.8621 & 0 \end{bmatrix}$$

Verificando i poli con Matlab otteniamo proprio:

$$s_1 = -4.0001 \quad s_2 = -2.9997 \quad s_3 = -2.0001 \quad s_4 = -1.0000$$

con errori di posizionamento dei poli addirittura inferiori allo 0.1%.

### 7.2 Andamento degli errori di stima

Con il seguente schema Simulink si ha la possibilità di valutare l'andamento degli errori di stima.

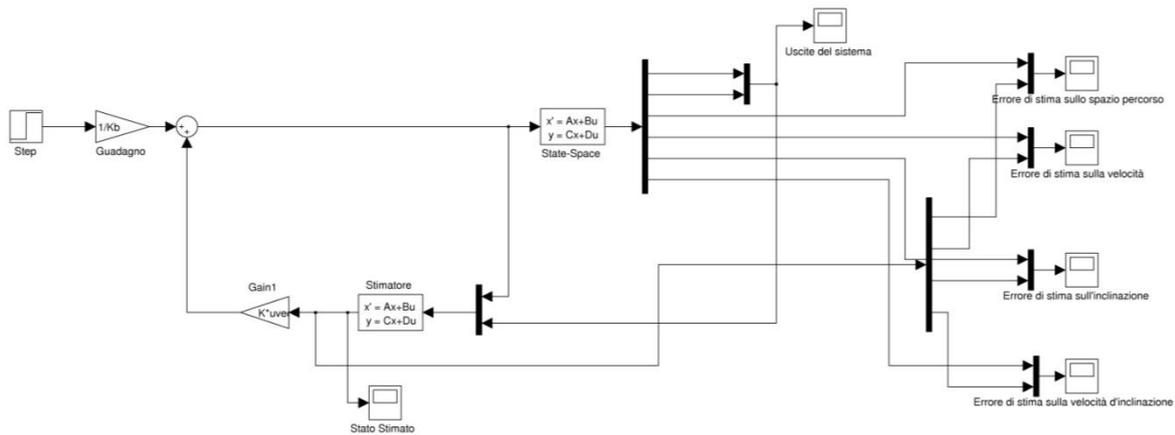


Figura 7.2: schema simulink con controllore e stimatore di Luenberger

Riportiamo in blu l'andamento degli stati stimati ed in rosso l'andamento degli stati reali.

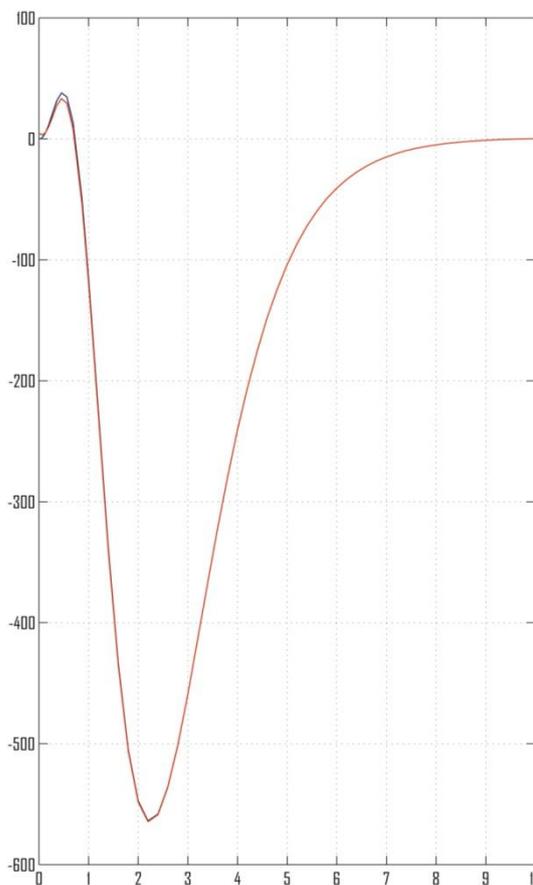


Figura 7.3: andamento dello spazio percorso

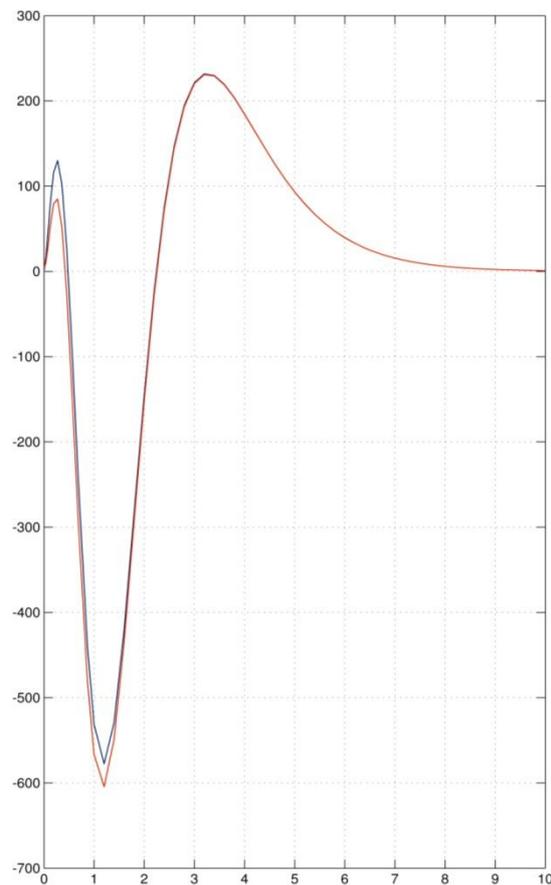


Figura 7.4: andamento della velocità

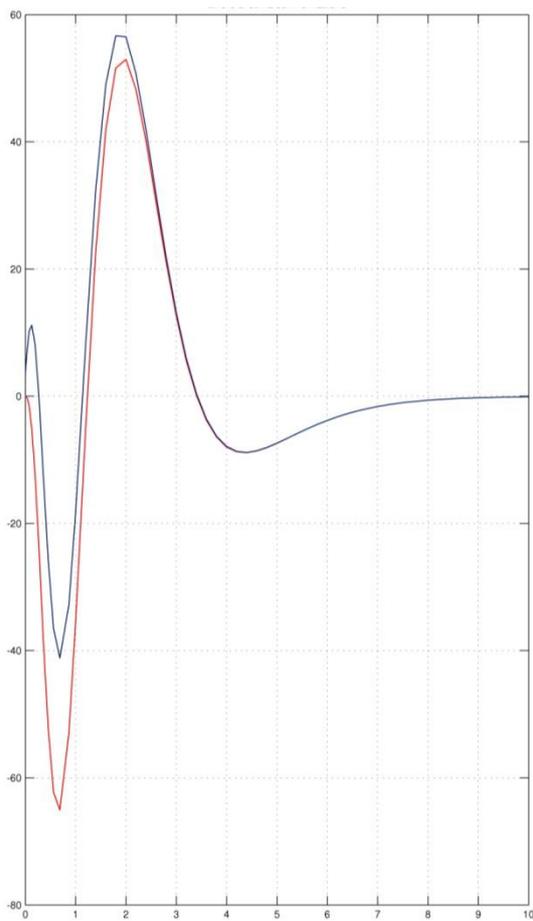


Figura 7.4: andamento dell'inclinazione

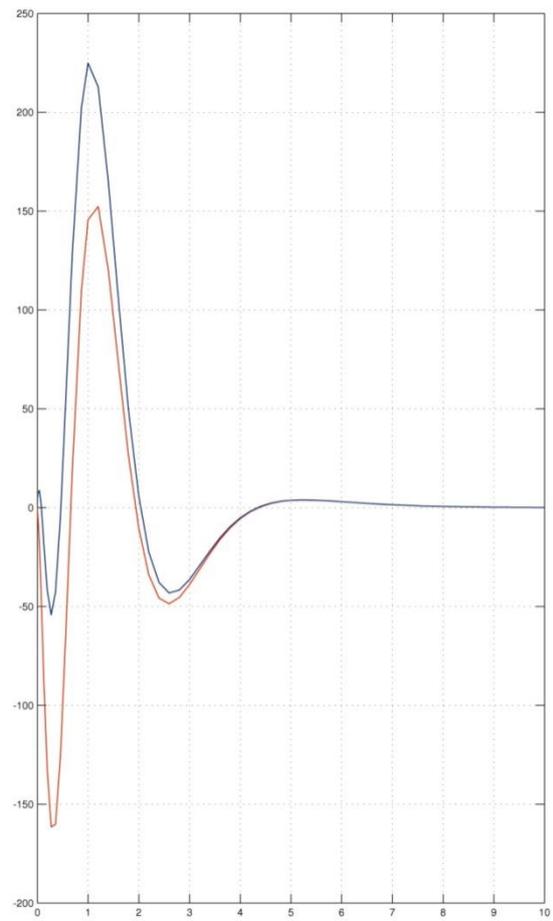


Figura 7.5: andamento della velocità d'inclinazione

### 8 Struttura e prestazioni del regolatore

Dopo aver realizzato il controllore e lo stimatore, possiamo concludere la trattazione unendoli ed ottenendo così un regolatore per il nostro sistema. Procedendo in tal senso si ricava il seguente schema:

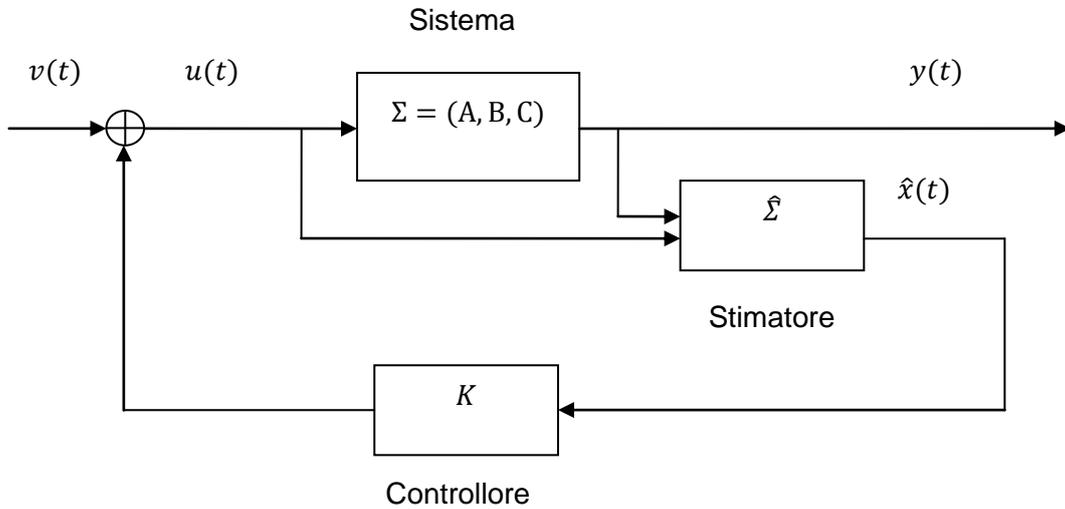
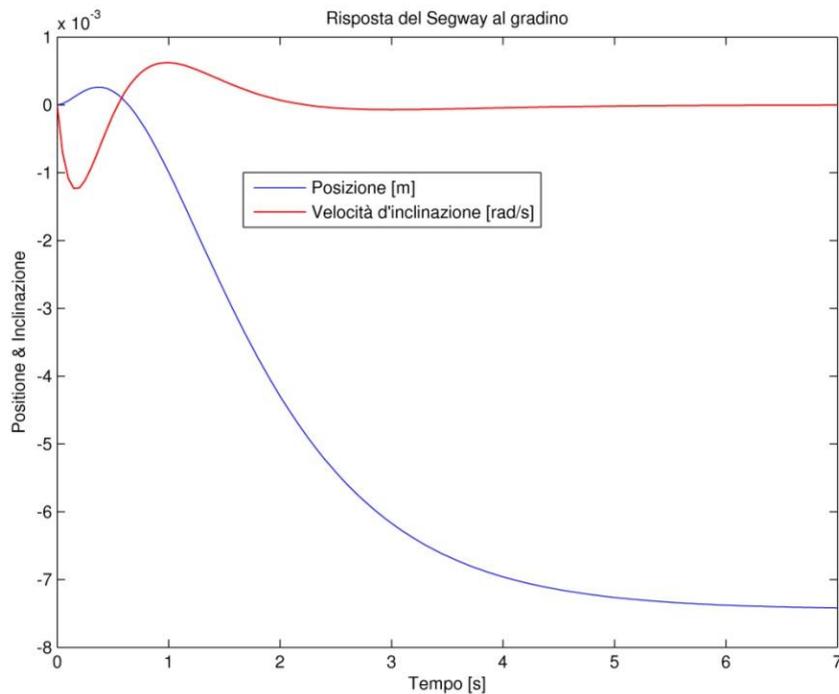
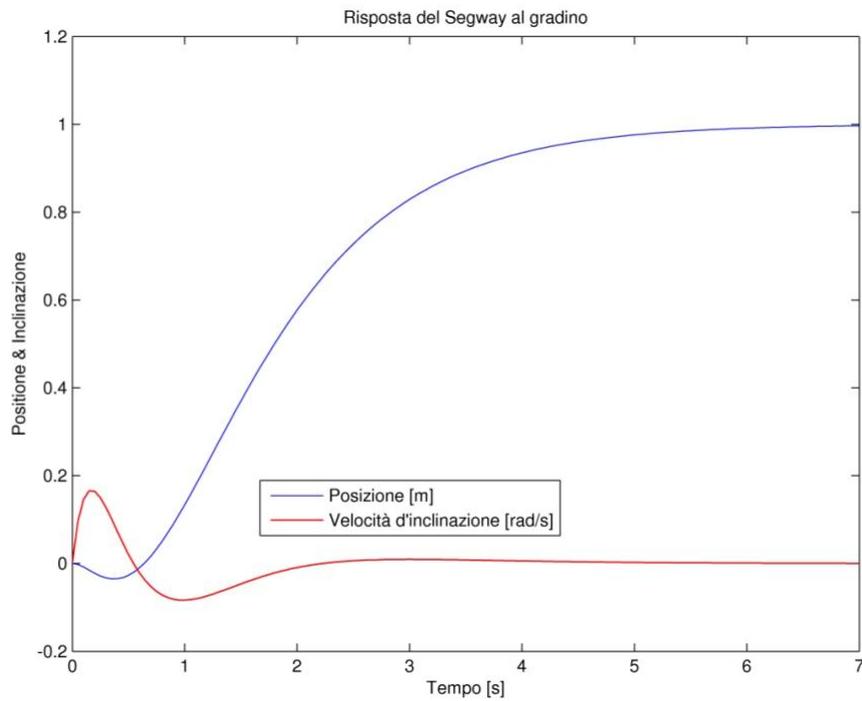


Figura 8.1: schematizzazione del regolatore

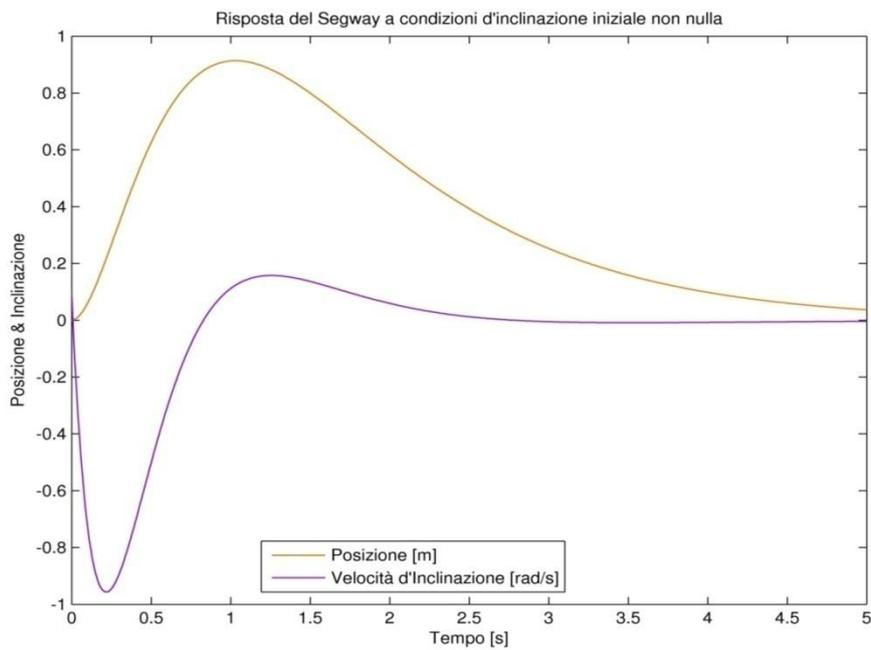
Passiamo quindi alla valutazione delle prestazioni. Dando in ingresso al motore un gradino unitario, otteniamo:



Se, invece, normalizziamo l'ingresso, aggiungendo davanti al nostro sistema un blocco che consente di modificare il guadagno in modo tale da far sì che se il gradino è unitario anche lo spostamento sia unitario, otteniamo:



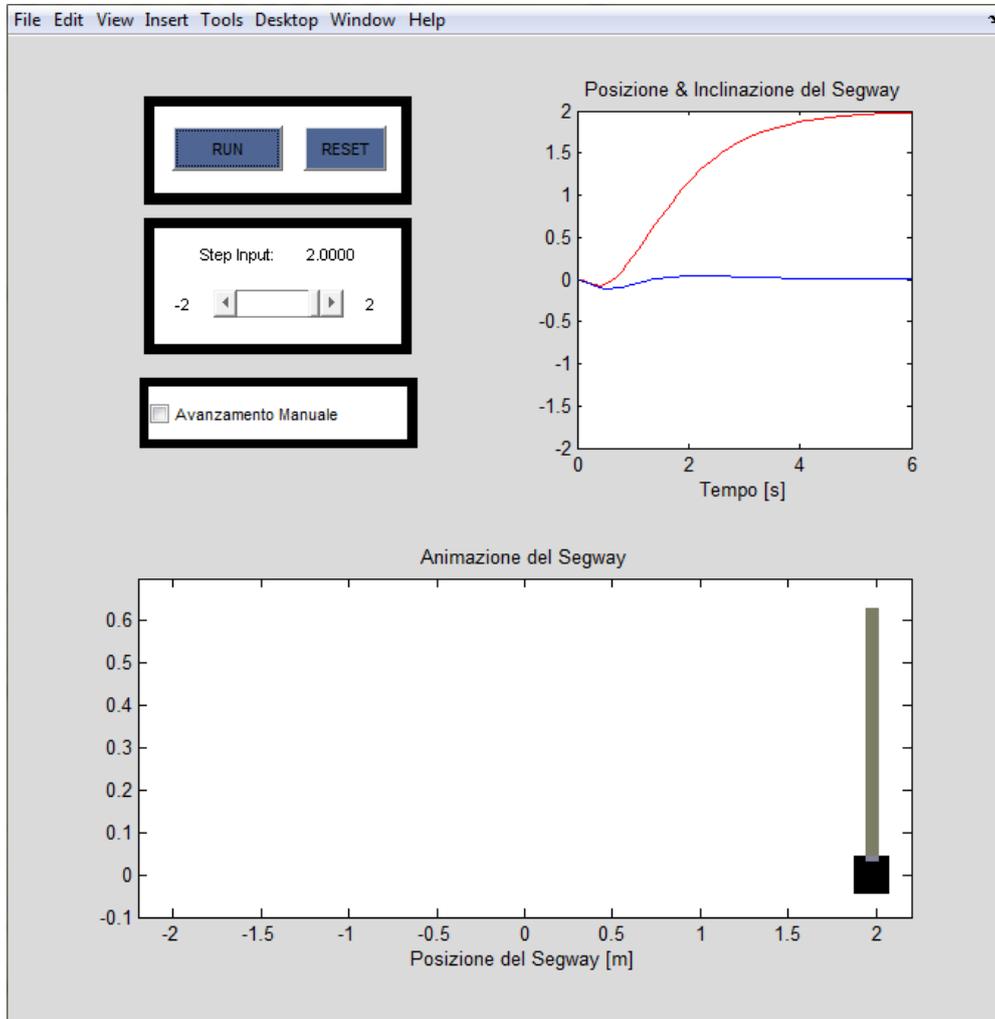
Se desideriamo invece analizzare l'evoluzione libera del sistema a partire da condizioni iniziali non nulle, in particolare con un angolo iniziale di 0.3 rad e una velocità angolare di 0.1 rad/s, otteniamo:



## 9 Alcune simulazioni

Per testare il sistema da noi analizzato e modellizzato abbiamo realizzato tre simulazioni:

La prima testa il comportamento del sistema quando al motore viene dato in ingresso un gradino unitario.



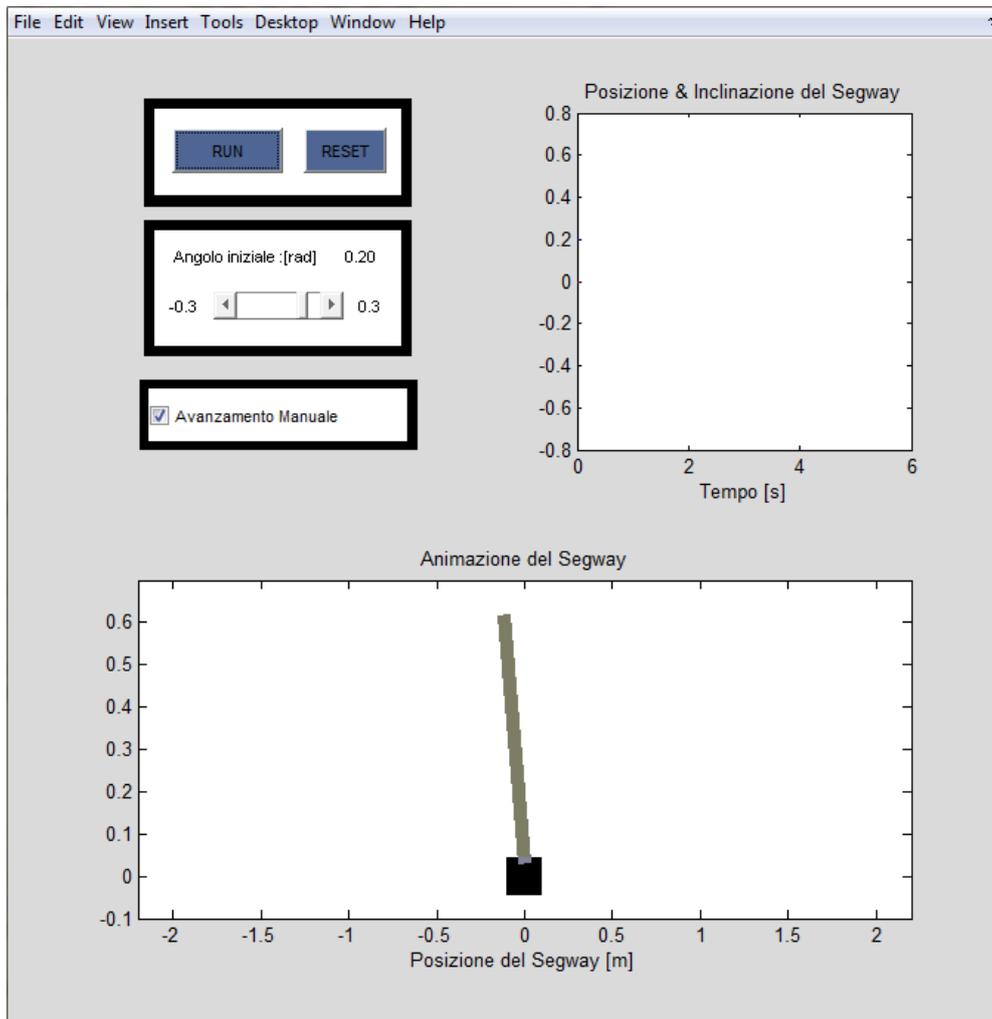
Come si può vedere, il codice Matlab genera una Grafic User Interface in cui è possibile scegliere:

- l'entità del gradino attraverso lo slider
- se eseguire la simulazione in modalità normale, che prevede lo scorrimento autonomo dei fotogrammi, o in modalità manuale che prevede di scorrere i fotogrammi mediante l'uso delle frecce della tastiera.

Alla pressione del tasto RUN vengono visualizzati due grafici:

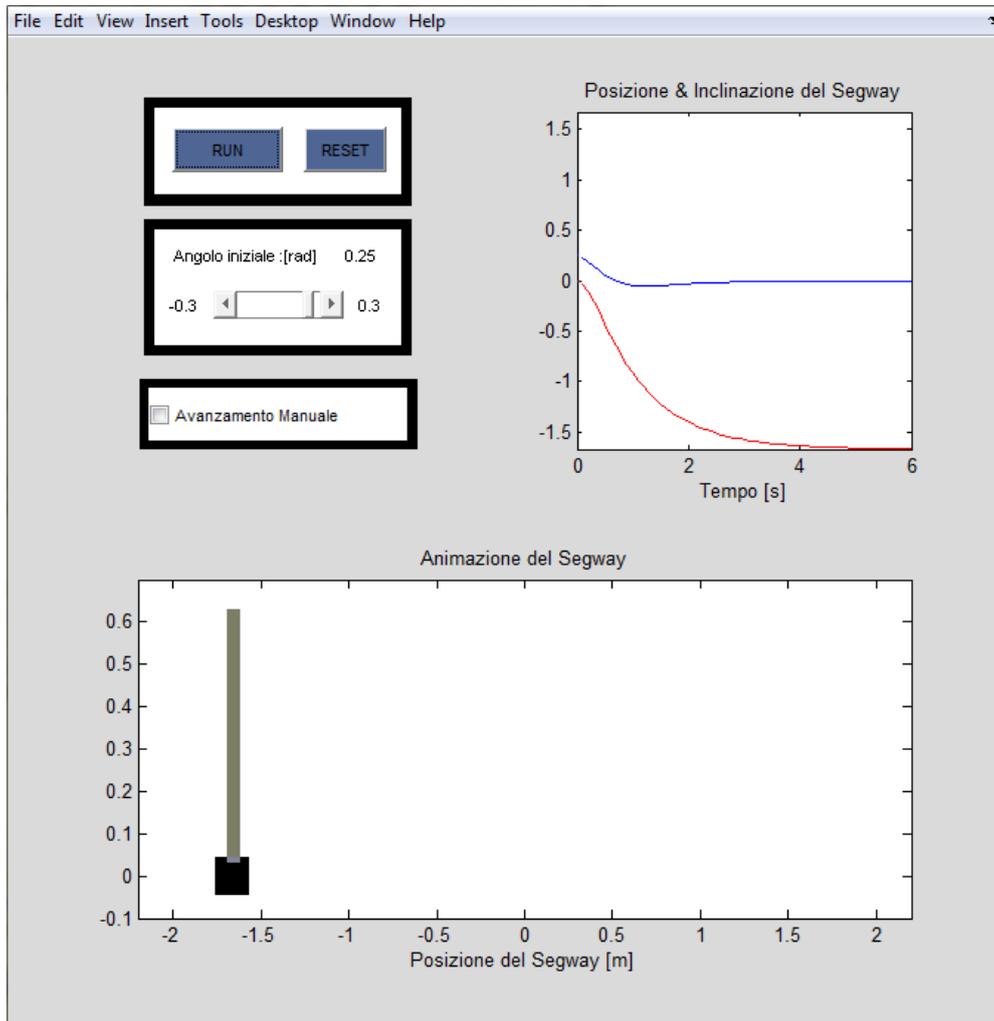
- il grafico in alto a sinistra visualizza in rosso la posizione del segway, ed in blu l'inclinazione del Segway rispetto allo scorrere dei secondi
- il grafico in basso visualizza l'animazione del segway visto di profilo, secondo una rappresentazione stilizzata della ruota e dell'asta che ne permette il controllo da parte della persona a bordo.

La seconda animazione, invece, verifica il comportamento del sistema nel caso di condizioni iniziali non nulle. In particolare a non essere nulla è l'inclinazione iniziale.



Questa interfaccia grafica presenta gli stessi comandi e gli stessi grafici di quella precedente ma al posto dell'entità del gradino è possibile scegliere l'ampiezza dell'angolo d'inclinazione.

La terza animazione ci presenta, invece, un esempio di funzionamento del Segway nel suo complesso, ipotizzando che il motore generi una coppia iniziale proporzionale all'inclinazione inizialmente imposta dalla persona a bordo.



## 10 Conclusioni

Sulla base dell'esperienza di controllo fatta, possiamo confrontare i due metodi di controllo utilizzati. Bisogna, tuttavia, tenere conto del fatto che il secondo viene applicato su un sistema semplificato mediante il quale non viene calcolata l'effettiva retroazione da applicare al motore, quindi il diretto confronto tra le risposte al gradino non sarebbe significativo.

Ad ogni modo si può constatare come il metodo di progetto con il modello di stato sia matematicamente più preciso e segua un procedimento più rigoroso. Inoltre fornisce un maggior numero di informazioni, anche se non tutte direttamente osservabili, rappresentate dallo stato del sistema.

Tuttavia questo metodo si dimostra meno affidabile perché risente in maniera molto più accentuata della sensibilità alle variazioni parametriche, che, invece, viene considerata come obiettivo primario nei metodi basati sui diagrammi. E' proprio per questo motivo che il primo controllore (sintetizzato a pag. 20) fa sì che il posizionamento dei poli arrivi a scostarsi del 20% rispetto a quello voluto, pur ipotizzando una precisione del controllore sino alla quarta cifra decimale, impensabile nella realtà. Nel nostro caso, per evitare questo problema, è stato sufficiente evitare il posizionamento di poli coincidenti, ma, in generale, si sarebbero dovute ottenere, mediante cambiamento di base, delle matrici più robuste alle variazioni parametriche.

Un altro punto a favore del metodo basato sui diagrammi di Bode e di Nyquist è dato dalla semplicità realizzativa del compensatore che ha il vantaggio di entrare in azione sin dai primissimi istanti. Mentre, nel caso del regolatore, il sistema necessita di uno stimatore con relativo errore di stima a causa del quale si deve aspettare prima di avere a disposizione, con buona approssimazione, lo stato del sistema.

Ad ogni modo, il sistema basato sui diagrammi non è perfetto e soprattutto nel caso di sistemi complessi soffre di una notevole carenza di informazioni, dato che l'unica variabile da noi osservabile è l'uscita.

Nel complesso i due metodi mostrano ambedue pregi e difetti, saranno le esigenze di precisione, rapidità e di budget ad indirizzarci di volta in volta verso la scelta più conveniente.