



UNIVERSITÀ
DEGLI STUDI
DI PADOVA

UNIVERSITA' DEGLI STUDI DI PADOVA

Dipartimento di Ingegneria Industriale DII

Corso di Laurea in Ingegneria Meccanica

Ottimizzazione del sistema di aspirazione del motore del progetto
Motostudent.

Engine inlet system optimization of Motostudent project.

Relatore: Prof. Vittore Cossalter

Correlatore: Prof. Matteo Massaro

Alessandro Guzzon (1108619)

Anno Accademico 2016/2017



UNIVERSITÀ
DEGLI STUDI
DI PADOVA

UNIVERSITA' DEGLI STUDI DI PADOVA

Dipartimento di Ingegneria Industriale DII

Corso di Laurea in Ingegneria Meccanica

Ottimizzazione del sistema di aspirazione del motore del progetto
Motostudent.

Engine inlet system optimization of Motostudent project.

Relatore: Prof. Vittore Cossalter

Correlatore: Prof. Matteo Massaro

Alessandro Guzzon (1108619)

Anno Accademico 2016/2017

Sommario

Esistono diversi software per simulare il comportamento di un motore dal punto di vista fluido-termodinamico. Essendo il motore a combustione interna un sistema molto complesso, mettere a punto dei modelli con questi programmi richiede una notevole quantità di tempo ed informazioni (fasatura degli alberi a camme, leggi di alzata, coefficienti di efflusso delle valvole, lunghezze caratteristiche, eccetera).

Nel mondo delle corse il tempo per la progettazione e la realizzazione di un prototipo è molto ristretto. Spesso ci si trova a progettare componenti dovendo fare delle assunzioni a priori, perché non si conosce a pieno il contesto in cui questi dovranno lavorare.

Nello specifico, l'organizzazione della *MotoStudent*, non comunica immediatamente il tipo di motore che si andrà ad adottare. Per cominciare quindi la progettazione del sistema di aspirazione è utile avere a disposizione un modello semplice e veloce che permetta di fare un pre-dimensionamento.

Quando poi si entrerà in possesso del motore definitivo, sarà possibile implementare modelli più completi per simulare l'intero sistema composto da aspirazione, motore e scarico.

Lo scopo del modello semplificato è quello di isolare il solo sistema di aspirazione, riducendo notevolmente il numero di variabili da gestire ed evidenziando come le quote e i parametri di input influiscono sul coefficiente di riempimento.

Indice

INTRODUZIONE.....	1
--------------------------	----------

CAPITOLO 1 – Il funzionamento del sistema di aspirazione.....	3
--	----------

1.1. La pressione in camera di combustione.....	4
1.2. I condotti di aspirazione.....	8
1.2.1. Il flusso all'interno dei condotti.....	8
1.2.2. L'effetto delle dimensioni dei condotti.....	11
1.3. Il rendimento volumetrico e gli effetti d'onda.....	12
1.4. Dimensionamento del condotto di aspirazione.....	16
1.5. Dimensionamento della trombeta.....	17
1.6. L'accordatura.....	18

CAPITOLO 2 – I modelli matematici.....	23
---	-----------

2.1. Il <i>Simple Lumped Element Model (S.L.E.M.)</i>	24
2.2. L' <i>Improved Lumped Element Model (I.L.E.M.)</i>	26
2.2.1. Formulazione dell'energia cinetica.....	27
2.2.2. Formulazione dell'energia potenziale.....	28
2.2.3. Calcolo della soluzione analitica.....	28
2.3. La definizione della matrice di smorzamento.....	33
2.4. Gli sviluppi dell' <i>I.L.E.M.</i>	34
2.5. <i>Improved Lumped Element Model</i> modificato.....	37
2.5.1. Calcolo della soluzione numerica.....	46

CAPITOLO 3 – Risultati delle simulazioni.....	49
3.1. Confronto tra soluzioni analitica e numerica.....	49
3.1.1. Risolutore ODE45.....	50
3.1.2. Risolutore ODE15s.....	51
3.2. Confronto tra volume del cilindro fisso e variabile.....	52
3.3. Influenza dei parametri di calcolo.....	54
3.3.1. Influenza di <i>Nstep</i>	54
3.3.2. Influenza di <i>Tstep</i>	56
3.4. Confronto tra forzanti differenti.....	57
3.5. Influenza del numero di suddivisioni di un elemento.....	59
3.6. Analisi dello <i>script</i> definitivo.....	61
3.6.1. Convergenza cicli.....	61
3.6.2. Influenza di temperatura, pressione e rapporto di smorzamento.....	63
3.7. Ottimizzazione del sistema di aspirazione.....	69
3.7.1. Singola aspirazione.....	69
3.7.2. Cicli consecutivi.....	75
CONCLUSIONI.....	77
APPENDICE: Risonatori in parallelo.....	81
NOMENCLATURA.....	85
RIFERIMENTI BIBLIOGRAFICI.....	87

Introduzione

In questa tesi viene riportato lo sviluppo e lo studio di uno *script* MATLAB in grado di simulare il comportamento del sistema di aspirazione di un motore monocilindrico quattro tempi.

Lo scopo dello *script* è quello di riuscire a generare un grafico che riporti in ordinata il coefficiente di riempimento del cilindro e in ascissa il regime di rotazione del motore.

Il coefficiente di riempimento è strettamente legato al rendimento volumetrico del motore, quindi alla potenza erogata. Accordare opportunamente il sistema è dunque fondamentale per l'efficienza del motore.

Il modello implementato è del tipo massa-molla-smorzatore con 22 corpi.

Grazie a questo è possibile comprendere l'influenza delle quote caratteristiche del sistema di aspirazione e delle condizioni ambientali.

È stata rivolta una particolare attenzione al volume dell'*air-box* e alla lunghezza del condotto di aspirazione.

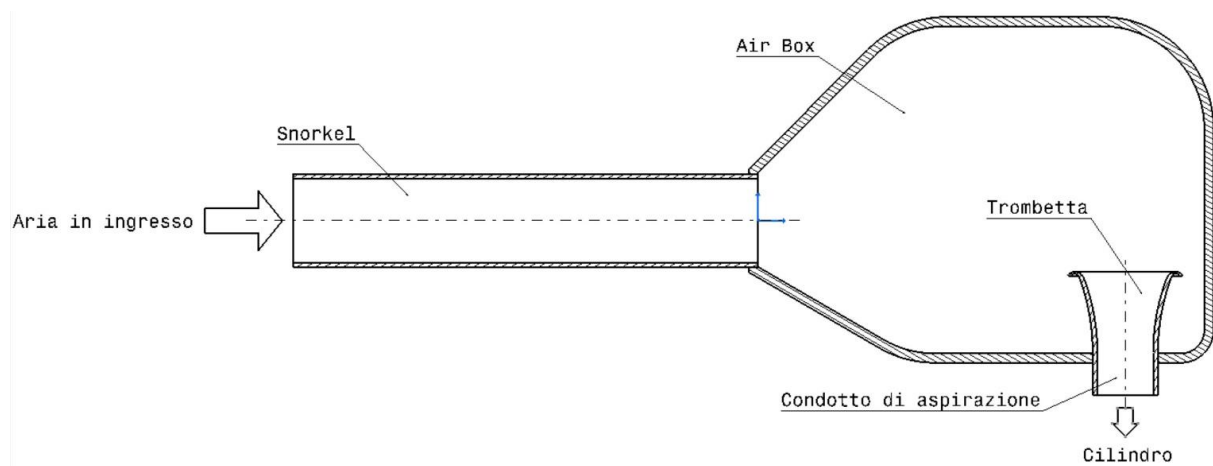
Oltre a capire come aumentare l'entità dei picchi di coefficiente di riempimento, è fondamentale saperli collocare al regime di rotazione desiderato.

Questo *script* è in grado di cogliere entrambi gli aspetti ed è quindi possibile utilizzarlo per fare un'ottimizzazione del sistema di aspirazione.

Nell'edizione *MotoStudent* passata è stato adottato il motore Honda CBR250R, per tanto tutte le simulazioni svolte durante il periodo di tesi sono basate su questo.

Capitolo 1

Il funzionamento del sistema di aspirazione



In questo capitolo verrà spiegato il funzionamento del sistema di aspirazione di un motore

Figura 1.1 Schema di un sistema di aspirazione di un motore monocilindrico quattro tempi

monocilindrico quattro tempi alimentato a benzina (Figura 1.1).

Lo scopo del sistema è di massimizzare il rendimento volumetrico al fine di ottenere una maggior potenza utile all'albero. È quindi fondamentale:

1. Massimizzare la massa d'aria entrante nel cilindro accordando opportunamente i condotti;
2. Massimizzare l'intrappolamento dell'aria nel cilindro agendo sulla fasatura delle valvole di aspirazione e di scarico. Si cerca quindi di evitare la fuoriuscita d'aria e di ottimizzare il lavaggio della camera di combustione dai gas di scarico residui dal ciclo di combustione precedente.

La conoscenza dei fenomeni fisici che interessano il sistema di aspirazione è fondamentale per dimensionarlo correttamente.

In questo capitolo si focalizzerà l'attenzione sulla propagazione delle onde di pressione nel condotto di aspirazione e l'influenza della geometria di condotti e volumi. Il punto 2 verrà trascurato, perché il regolamento della MotoStudent non consente di modificare la fasatura del motore.

1.1 La pressione in camera di combustione

Lo scopo principale è quello di ottenere il miglior riempimento del cilindro. Per fare ciò è necessario introdurre l'aria con la maggior densità (e quindi pressione) possibile.

L'analisi della pressione durante la fase di aspirazione viene fatta in diverse condizioni di apertura della valvola a farfalla, con regime di rotazione del motore costante.

Si considera inizialmente la valvola a farfalla completamente aperta.

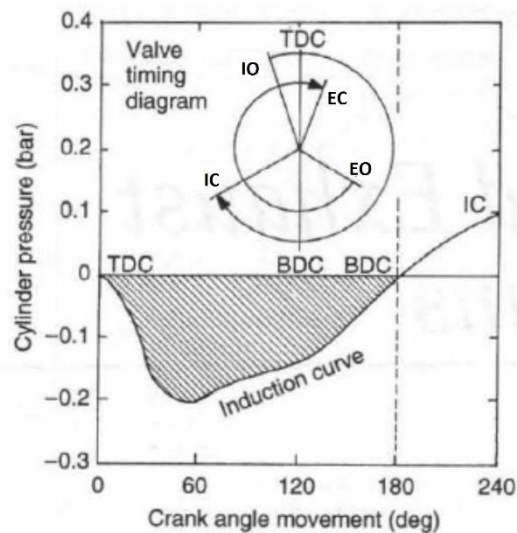


Figura 1.2 Relazione tra pressione e rotazione dell'albero motore con valvola a farfalla completamente aperta ⁽¹⁾.

In Figura 1.2 viene riportato un esempio di andamento della pressione nel cilindro durante l'intera durata della fase di aspirazione.

Inizialmente il pistone si trova al PMS con velocità nulla ma accelerazione massima diretta verso il PMI. L'aria in ingresso è quindi soggetta ad una forza che la richiama all'interno del cilindro. Essa si comporta come una molla cominciando quindi ad estendersi per richiamare il resto della colonna fluida, diminuendo dunque pressione e densità.

Quando il pistone raggiunge la metà della fase di aspirazione comincia a decelerare, consentendo all'aria di recuperare l'estensione subita.

Nell'esempio in Figura 1.2 l'aria torna alla pressione atmosferica in prossimità del PMI, ma la velocità in ingresso non è nulla. Chiudere le valvole di aspirazione in questo istante sarebbe uno spreco, in quanto l'inerzia della colonna fluida consente l'ingresso di ulteriore aria all'interno del cilindro, la quale genera una sovrappressione. Ritardandone la chiusura di circa 60° di rotazione dell'albero motore oltre il PMI si migliora il riempimento del cilindro ⁽¹⁾.

Nel caso in cui la valvola a farfalla sia completamente chiusa la situazione cambia sensibilmente (vedi Figura 1.3).

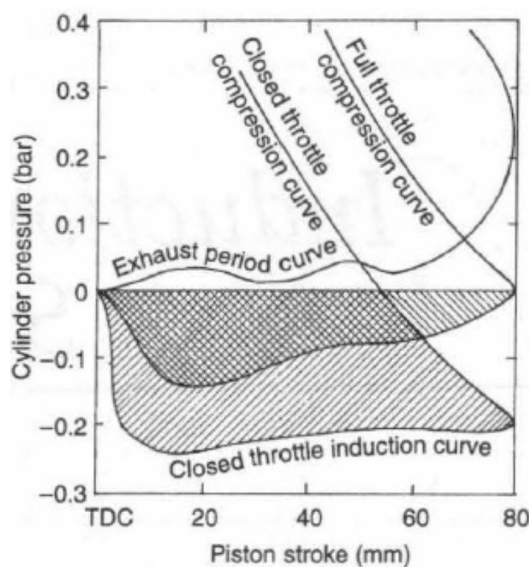


Figura 1.3 Relazione tra pressione nel cilindro e corsa del pistone nelle condizioni di completa apertura e chiusura della valvola a farfalla ⁽¹⁾.

Con la valvola a farfalla completamente aperta l'aria torna alla pressione ambientale in prossimità del PMI (80mm di corsa nell'esempio in Figura 1.3). Quando è chiusa invece, la si raggiunge circa 60° dopo il PMI ⁽¹⁾ a causa della maggior depressione generata, rendendo la fase di compressione molto più breve ed inefficiente.

La strizione imposta nel condotto di aspirazione aumenta la velocità dell'aria in ingresso, diminuendone pressione e quindi densità. Questo causa un'ulteriore calo di pressione dovuto alle perdite di carico maggiori, rendendo la curva più pianeggiante e restia a recuperare pressione.

La depressione generata nel cilindro si ripercuote negativamente anche sull'inerzia della carica tra il PMI e la chiusura delle valvole di aspirazione (Figura 1.4).

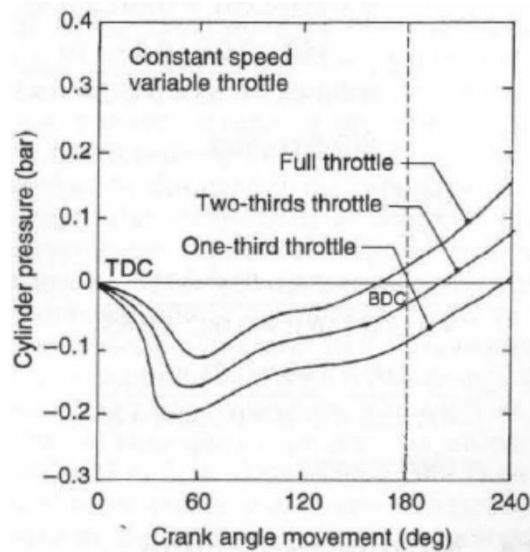


Figura 1.4 Effetto dell'apertura della valvola a farfalla sull'inerzia della carica dopo il PMI (¹).

Si nota chiaramente in Figura 1.4 come l'inerzia della carica aumenti quando la valvola a farfalla è più aperta, generando una sovrappressione maggiore (effetto *RAM*, ovvero colpo d'ariete).

In Figura 1.5 viene evidenziata la dipendenza della pressione dal regime di rotazione del motore.

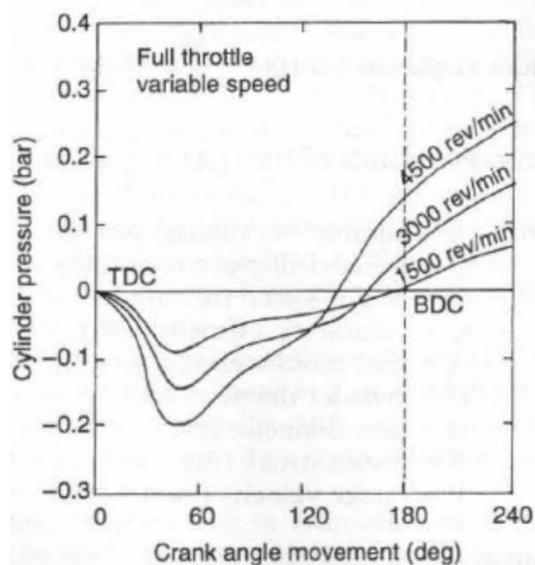


Figura 1.5 Dipendenza dell'inerzia della carica dal regime di rotazione del motore (¹).

La condizione di riempimento ottimale si ha quando le valvole di aspirazione si chiudono all'istante in cui la velocità della carica in ingresso si annulla. Questa la si può ottenere solo per un preciso regime di rotazione del motore. Al di sotto di esso la carica fresca viene in parte respinta nel condotto di aspirazione, mentre al di sopra la valvola di aspirazione si chiude prima che si annulli la velocità dell'aria in ingresso. L'unico modo per ovviare a questo problema è quello di adottare un motore dotato di sistema a fasatura variabile.

1.2 I condotti di aspirazione

Per minimizzare le perdite di carico e sfruttare al meglio gli effetti inerziali della carica, i condotti di aspirazione devono avere i seguenti requisiti:

1. Garantire il flusso al cilindro più diretto possibile;
2. La sezione deve essere abbastanza piccola da mantenere una velocità dell'aria in ingresso sufficiente anche a basse velocità del mezzo, senza compromettere il rendimento volumetrico;
3. La superficie interna dev'essere più piccola possibile, in modo da ridurre le perdite per attrito viscoso;
4. Devono essere dotati di uno scarico per le frazioni di liquido pesanti;
5. La loro lunghezza dev'essere tale da generare un effetto *RAM* al regime di rotazione desiderato (vedi paragrafo §1.6).

In generale le lunghezze dei condotti controllano l'accordatura (vedi paragrafo §1.6) mentre le sezioni controllano il flusso di massa d'aria entrante nel cilindro (vedi paragrafi §1.4 e §1.5).

1.2.1 Il flusso all'interno dei condotti

Per garantire una buona miscela aria-benzina e il riempimento del cilindro, è bene che la velocità minima dell'aria in ingresso sia $v_{min}=10\text{m/s}$. Mentre per non compromettere il rendimento volumetrico (η_v) è buona norma non superare $v_{max}=75\text{m/s}$ (¹).

Per il calcolo della velocità dell'aria all'interno di un condotto basta applicare la seguente formula:

$$v = \frac{n \cdot V_{cil}}{2 \cdot 60 \cdot A_{TRASV}}; \quad (1.1)$$

dove v (m/s) è la velocità media dell'aria nel condotto, n (rpm) è il regime di rotazione del motore, V_{cil} (m³) è la cilindrata e A_{TRASV} (m²) è la sezione trasversale del condotto.

Per il dimensionamento del condotto di aspirazione e della trombeta si usano degli indici di Mach in modo da evitare il distacco della vena fluida e velocità supersoniche locali (vedi paragrafi §1.4 e §1.5).

Si analizzano ora i profili di velocità di diverse tipologie di sezione e finiture superficiali dei condotti.

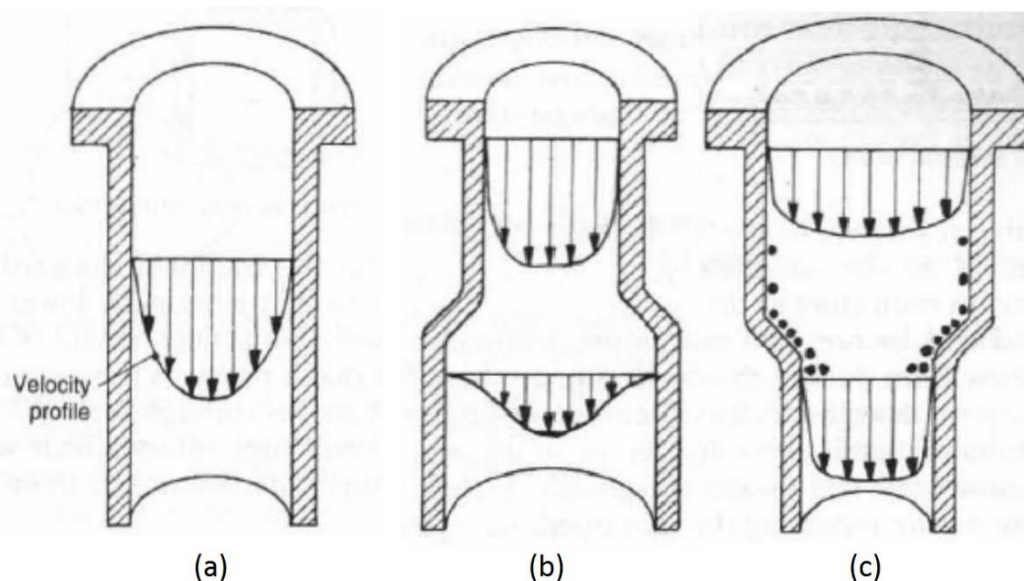


Figura 1.6 Profilo di velocità in un condotto a sezione costante (a), a sezione divergente (b) ed a sezione convergente (c) (1).

In un condotto a sezione costante la distribuzione di velocità è di tipo parabolico (Figura 1.6a). La velocità in prossimità delle pareti è nulla a causa delle forze di attrito viscoso e aumenta man mano che ci si avvicina al centro.

Se la sezione è divergente (Figura 1.6b) la velocità cala, soprattutto in prossimità delle pareti. Il profilo è meno uniforme rispetto al caso in Figura 1.6a, con rischio di precipitazione di particelle fluide nelle zone a bassa velocità.

Con una sezione convergente (Figura 1.6c) si ha un aumento di velocità del fluido con una distribuzione più uniforme. Le particelle di fluido potrebbero accumularsi sulle pareti del tratto convergente, ma l'aumento di velocità ne consente il trascinamento. In generale con questa soluzione si ottiene una miscela di aria-benzina più uniforme, quindi migliore per la combustione.

Per regolamento MotoStudent l'iniettore della benzina dev'essere posto a valle del corpo farfallato, quindi il tratto in cui possono precipitare delle particelle di combustibile è molto limitato (parte finale del condotto di aspirazione).

Una buona finitura superficiale interna dei condotti riduce le perdite per attrito viscoso, con conseguente miglioramento del rendimento volumetrico.

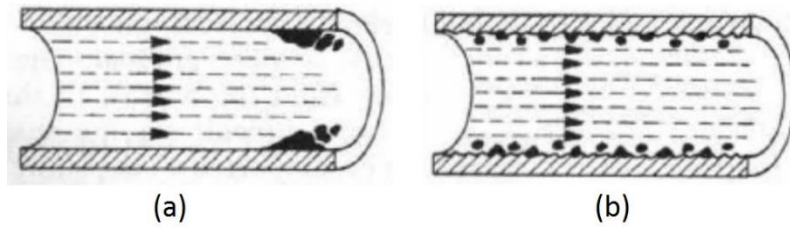


Figura 1.7 Formazione del film liquido per superfici lisce (a), rottura del film liquido per superfici rugose (b) (1).

Tuttavia se la superficie interna è molto liscia tende a formarsi un film liquido nocivo per la combustione (Figura 1.7a), soprattutto a basse velocità. Una superficie rugosa invece innesca dei meccanismi di rottura del film liquido che favoriscono la miscelazione aria-benzina (Figura 1.7b).

Quindi è bene che tutte le superfici siano lisce ad eccezione per il tratto di condotto di aspirazione a valle dell'iniettore.

1.2.2 L'effetto delle dimensioni dei condotti

Il seguente elenco spiega brevemente gli effetti prodotti dalla variazione delle dimensioni dei condotti.

Si indichino con:

Φ = Diametro condotto; L = Lunghezza condotto; S_i = Superficie interna del condotto;

v = Velocità dell'aria; η_v = Rendimento vol.; n = Regime di rotazione del motore;

m = Massa della colonna d'aria contenuta nel condotto.

1. $\Phi = \text{cost.} + L \uparrow \quad \rightarrow \quad S_i \uparrow \quad \rightarrow \quad \eta_v \downarrow$:

Mantenendo Φ costante, se si aumenta L aumenta anche S_i , quindi anche le forze di attrito viscoso che contribuiscono a peggiorare η_v ;

2. $L = \text{cost.} + \Phi \uparrow \quad \rightarrow \quad S_i \uparrow \quad \rightarrow \quad \eta_v \downarrow$:

Mantenendo L costante, se si aumenta Φ aumenta anche S_i , quindi anche le forze di attrito viscoso che contribuiscono a peggiorare η_v ;

3. $L = \text{cost.} + \Phi \downarrow \quad \rightarrow \quad v \uparrow \quad \rightarrow \quad n \downarrow \text{ per avere } \eta_{v,MAX}$:

Mantenendo L costante, se si diminuisce Φ aumenta v , di conseguenza il picco $\eta_{v,MAX}$ si sposta a n più bassi;

4. $\Phi = \text{cost.} + L \uparrow \quad \rightarrow \quad m \uparrow \quad \rightarrow \quad n \downarrow \text{ per avere } \eta_{v,MAX}$:

Mantenendo Φ costante, se si aumenta L aumenta anche m , di conseguenza il picco $\eta_{v,MAX}$ si sposta a n più bassi;

5. $L = \text{cost.} + \Phi \uparrow \downarrow \quad \rightarrow \quad \eta_{v,MAX} \text{ circa allo stesso } n$:

Mantenendo L costante, se si varia Φ il picco $\eta_{v,MAX}$ si ottiene circa allo stesso n .

6. $\Phi = \text{cost.} + L \uparrow \quad \rightarrow \quad \eta_v \uparrow \uparrow \text{ per } n \downarrow$:

Mantenendo Φ costante, se si aumenta L , η_v migliora molto per n bassi;

7. $\Phi = \text{cost.} + L \downarrow \quad \rightarrow \quad \eta_v \uparrow \text{ per } n \uparrow$:

Mantenendo Φ costante, se si diminuisce L , η_v migliora per n alti;

8. $\Phi = \text{cost.} + L \uparrow \quad \rightarrow \quad d(\eta_v)/dn \downarrow \downarrow \text{ per } n > n(\eta_{v,MAX})$:

Mantenendo Φ costante, se si aumenta L , η_v peggiora molto rapidamente per n maggiore a quello in cui si ottiene il picco $\eta_{v,MAX}$.

9. $L = \text{cost.} + \Phi \downarrow \quad \rightarrow \quad d(\eta_v)/dn \uparrow \text{ per } n < n(\eta_{v,MAX})$:

Mantenendo L costante, se si diminuisce Φ , η_v migliora più rapidamente per n minore a quella in cui si ottiene il picco $\eta_{v,MAX}$.

1.3 Il rendimento volumetrico e gli effetti d'onda

La potenza erogata da un motore a combustione interna dipende da numerosi fattori. Viene riportata in seguito la formulazione analitica della potenza utile generata in un singolo ciclo motore ⁽²⁾:

$$Wu = \eta_c \cdot \eta_{ac} \cdot \eta_{id} \cdot \eta_l \cdot \eta_{ip} \cdot \eta_p \cdot \eta_o \cdot \eta_t \cdot \eta_{vt} \cdot \frac{\rho_o \cdot Z \cdot S \cdot H_i}{\alpha_t} \cdot \frac{u}{T}, \quad (1.2)$$

Dove:

$$\eta_c = \frac{Q_b}{Q_c} \text{ rendimento di combustione;} \quad (1.3)$$

Q_b = calore intrappolato nel cilindro;

Q_c = calore liberato dalla combustione;

$$\eta_{ac} = \frac{Q_e}{Q_b} \text{ rendimento di adiabaticità;} \quad (1.4)$$

Q_e = calore che partecipa al ciclo;

$$\eta_{id} = \frac{L_{id}}{Q_e} \text{ rendimento ideale del ciclo;} \quad (1.5)$$

L_{id} = lavoro del ciclo ideale

$$\eta_l = \frac{L_l}{L_{id}} \text{ rendimento limite;} \quad (1.6)$$

L_l = Lavoro del ciclo limite;

$$\eta_{ip} = \frac{L_{ip}}{L_l} \text{ rendimento indicato positivo;} \quad (1.7)$$

L_{ip} = Lavoro del ciclo indicato positivo;

$$\eta_p = \frac{L_i}{L_{ip}} \text{ rendimento di pompaggio;} \quad (1.8)$$

L_i = lavoro totale del ciclo completo;

$$\eta_o = \frac{L_u}{L_i} \text{ rendimento organico;} \quad (1.9)$$

L_u = Lavoro utile;

$$\eta_t = \frac{Q_b}{Q_t} \text{ rendimento di intrappolamento;} \quad (1.10)$$

Q_t = calore totale fornito;

$$\eta_{vt} = \frac{m_{at}}{\rho_0 \cdot V_{cil}} \text{ rendimento volumetrico totale;} \quad (1.11)$$

m_{at} = massa d'aria totale per ciclo;

V_{cil} = cilindrata;

$$\alpha_t = \frac{m_{at}}{m_{bt}} \text{ rapporto aria-combustibile totale;} \quad (1.12)$$

m_{bt} = massa di combustibile totale;

ρ_0 = densità aria ambiente;

Z = numero di cilindri;

S = superficie del pistone;

H_i = potere calorifero inferiore del combustibile;

u = velocità media del pistone;

T = numero di tempi motore.

Il sistema di aspirazione influisce molto sul rendimento di intrappolamento. Questo si può riformulare nel modo seguente:

$$\eta_t = \frac{m_{ac}}{m_{at}}, \text{ dove;} \quad (1.13)$$

m_{ac} = massa d'aria intrappolata nel cilindro per ciclo;

m_{at} = massa d'aria totale per ciclo.

Si definisce il rendimento volumetrico nel modo seguente:

$$\eta_v = \eta_t \cdot \eta_{vt} = \frac{m_{ac}}{m_{at}} \cdot \frac{m_{at}}{\rho_0 \cdot V_{cil}} = \frac{m_{ac}}{\rho_0 \cdot V_{cil}}. \quad (1.14)$$

Quindi il rendimento volumetrico è tanto più elevato quanto sono maggiori:

- la massa d'aria entrante nel cilindro;
- l'intrappolamento dell'aria nel cilindro.

Il primo punto è strettamente legato all'accordatura del sistema di aspirazione. Il secondo punto invece è determinato dalla fasatura delle camme di aspirazione e scarico. Quest'ultimo verrà

trascurato in quanto il regolamento MotoStudent non consente di modificare la fasatura del motore.

Il rendimento volumetrico di un motore da competizione raggiunge valori superiori all'unità $\eta_v \approx 1.15-1.25$ (2).

Questo è possibile grazie ai cosiddetti effetti d'onda, ovvero alla propagazione di onde di pressione/depressione che percorrono i condotti di aspirazione. Questi nascono in luogo alla natura fortemente pulsante del sistema.

Gli effetti d'onda si dividono in due tipologie (3):

- **A valvola aperta:** influisce direttamente sull'ingresso della carica fresca durante la fase di aspirazione (noto come effetto *RAM*, ovvero colpo d'ariete).

Il pistone, scendendo verso il PMI, genera un'onda di depressione che risale il condotto di aspirazione. Quando raggiunge l'estremità della trombeta si riflette con segno opposto (sovrappressione). Quest'onda è bene che raggiunga il cilindro dopo i 90° di angolo di manovella (ovvero quando il pistone decelera e non è più in grado di aspirare) ma prima della chiusura della valvola di aspirazione, aumentando la massa d'aria entrante.

È comodo ragionare in termini di angolo di rotazione della manovella. La rotazione dell'albero motore, in un tempo pari a quello che un'onda impiega a percorrere una lunghezza L (da valvola di aspirazione a boccaglio della trombeta), è:

$$\Delta\theta^\circ = 360^\circ \cdot \frac{n}{60} \cdot \Delta t = 6 \cdot n \cdot \frac{L}{c}, \quad (1.15)$$

dove: n (rpm) è il regime di rotazione del motore, L (m) è la lunghezza del condotto e c (m/s) è la velocità del suono.

Per migliorare il riempimento, quando il pistone non è più in grado di aspirare, si impone:

$$2 \cdot \Delta\theta^\circ \approx 90^\circ \quad \rightarrow \quad L \approx \frac{7.5 \cdot c}{n}. \quad (1.16)$$

- **A valvola chiusa:** determina le condizioni iniziali che regnano all'apertura della valvola di aspirazione nel ciclo successivo.

Quando la valvola di aspirazione si chiude le onde di pressione/depressione continuano a riflettersi nel condotto di aspirazione.

Per ridurre il *back flow* dei gas di scarico e migliorare il lavaggio della camera di combustione, è bene che all'apertura della valvola di aspirazione si abbia un picco di sovrappressione.

Per completare un ciclo completo l'onda deve percorrere quattro volte la lunghezza L (andata e ritorno dell'onda di depressione più andata e ritorno dell'onda di sovrappressione). Il periodo proprio del sistema è quindi:

$$T_0 = \frac{4 \cdot L}{c}, \quad (1.17)$$

Ragionando in termini di angolo di rotazione della manovella:

$$\Delta\theta^\circ = z \cdot T_0 \cdot 360^\circ \cdot \frac{n}{60} \approx 540^\circ, \quad (1.18)$$

dove: z è il numero di volte che si ripete T_0 , n (rpm) è il regime di rotazione del motore.

I 540° nella formula corrispondono all'angolo di rotazione della manovella in cui il pistone non aspira ($720^\circ - 180^\circ$).

Per capire quali sono le condizioni iniziali all'apertura della valvola di aspirazione al ciclo successivo bisogna controllare il valore di z :

$$z = \frac{9}{4} \cdot \frac{c}{n \cdot L}. \quad (1.19)$$

Se z è un numero intero significa che l'effetto è positivo, se $z=0.5, 1.5, 2.5$, eccetera invece si ha un'onda di depressione che ostacola il lavaggio del cilindro.

Gli effetti d'onda a valvola chiusa si manifestano in modo sensibile su motori che funzionano ad alti regimi di rotazione o dotati di condotti molto lunghi ⁽³⁾.

Queste oscillazioni sono smorzate quindi, se z è molto elevato, l'onda di pressione o depressione risulterà molto attenuata.

L'effetto d'onda principale è quello a valvola aperta, infatti è in grado di generare una sovrappressione anche tre volte maggiore dell'effetto d'onda a valvola chiusa ⁽²⁾.

La lunghezza L del condotto influisce quindi sull'accordatura, mentre l'area trasversale del condotto di aspirazione varia l'intensità dei picchi di sovrappressione ⁽²⁾.

In queste formule la velocità di propagazione dell'onda viene eguagliata alla velocità del suono, ma in realtà va sommata anche la velocità del fluido in cui sta propagando. Per semplicità quest'aspetto è stato fin ora trascurato, ma nei prossimi paragrafi ne verrà tenuto conto.

I sistemi di aspirazione a geometria fissa si possono accordare solamente ad un determinato regime di rotazione del motore, per tanto in altri range si può avere un effetto negativo. Per ovviare a questo problema bisognerebbe adottare delle trombette telescopiche, in grado di variare la loro lunghezza in funzione dei giri motore. Purtroppo questo tipo di soluzione è vietata dal regolamento MotoStudent.

Quanto visto fin ora suggerisce di adottare un modello massa-molla-smorzatore per simulare il comportamento del fluido all'interno del sistema di aspirazione. Da qui nasce l'idea di implementare uno script MATLAB in grado di calcolare il coefficiente di riempimento del cilindro in funzione del regime di rotazione del motore (vedi Capitolo 2).

1.4 Dimensionamento del condotto di aspirazione

Il condotto di aspirazione va dimensionato in modo tale da generare onde di sovrappressione intense, quindi deve avere sezioni relativamente piccole. Questo però porta ad un aumento della velocità del fluido che causa maggiori perdite.

Inoltre si aumenta il rischio di distacco di vena fluida e zone in cui si raggiunge la velocità del suono. Questi ultimi due effetti riducono la sezione di passaggio e di conseguenza la portata d'aria al cilindro diminuisce. È bene quindi che i condotti siano più rettilinei possibili e con buona finitura superficiale interna.

Se le sezioni sono troppo piccole si può raggiungere Mach 1 su tutta l'area causando il cosiddetto *choking* (soffocamento), ovvero un blocco di portata d'aria al cilindro.

A questi propositi si definisce un indice di Mach per il condotto:

$$IM_c = \frac{u \cdot S}{A_c \cdot c}, \quad (1.20)$$

Dove:

$u = \frac{2 \cdot r \cdot n}{30}$ (m/s) è la velocità media del pistone;

r (m) è la lunghezza della manovella (quindi $2r$ è la corsa del pistone);

S (m²) è l'area del pistone;

A_c (m²) è l'area del condotto;

c (m/s) è la velocità del suono alle condizioni in *air-box*.

In letteratura è consigliato avere un indice $IM_c \approx 0.25$ (2) da cui si ricava la sezione del condotto:

$$A_c = \frac{u \cdot S}{IM_c \cdot c}, \quad (1.21)$$

In questo modo è possibile ottenere il miglior compromesso tra intensità delle onde e perdite di carico.

In realtà il condotto di aspirazione è leggermente conico in modo da favorire il flusso d'aria verso il cilindro ed uniformare il profilo di velocità (vedi paragrafo §1.2, Figura 1.6c).

1.5 Dimensionamento della trombeta

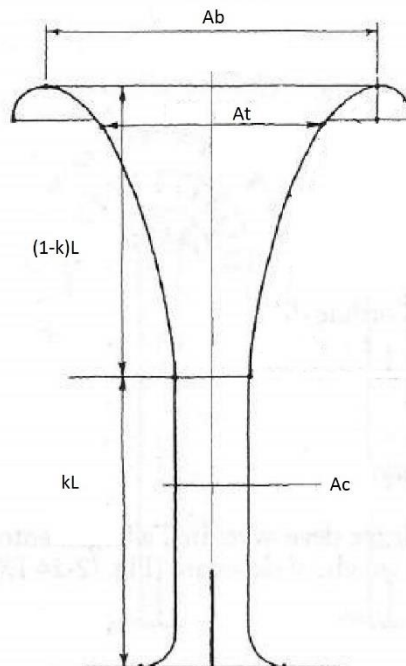


Figura 1.8 Trombeta di aspirazione.

La parte terminale del condotto di aspirazione sfocia in *air-box* con una trombeta.

La forma divergente serve per ridurre la velocità delle onde uscenti, quindi le perdite di carico localizzate. Così facendo le onde si mantengono più intense in seguito alla riflessione, perdendo però di compattezza. Infatti queste cominciano a riflettersi prima dello sbocco a causa

dell'allargamento di sezione, quindi il valore di picco di sovrappressione viene ridotto ma spalmato su una lunghezza maggiore.

Anche per l'imbocco della trombeta conviene introdurre un indice di Mach al fine di evitare distacco di vena fluida o zone a Mach 1:

$$IM_t = \frac{u \cdot S}{A_t \cdot c}, \quad (1.22)$$

In letteratura è consigliato avere un indice $IM_t \approx 0.135$ ⁽²⁾ da cui si ricava la sezione d'imbocco della trombeta:

$$A_t = \frac{u \cdot S}{IM_t \cdot c}, \quad (1.23)$$

La parte terminale della trombeta è detta boccaglio e gioca un ruolo importante nella guida del flusso dall'*air-box* al condotto di aspirazione.

Questo deve avere un raggio di raccordo sufficiente da evitare il distacco della vena fluida, ma non eccessivo perché ispessirebbe lo strato limite.

È sufficiente porre la sezione del boccaglio $A_b \approx 2 \cdot A_t$ ⁽²⁾.

1.6 L'accordatura

Come uno strumento musicale il sistema di aspirazione necessita di essere accordato.

I parametri che influenzano l'accordatura sono la fasatura e la lunghezza del condotto di aspirazione. Come già detto in precedenza il regolamento della MotoStudent non consente di modificare la fasatura del motore, quindi si focalizzerà l'attenzione solo sulla lunghezza del condotto di aspirazione.

La condizione ottimale di accordatura è quella a tre picchi di sovrappressione, cioè all'apertura della valvola di aspirazione del ciclo successivo entrerà nel cilindro il 3° picco di sovrappressione, mentre quelli precedenti rimbalzano sulla valvola chiusa (vedi Figura 1.9).

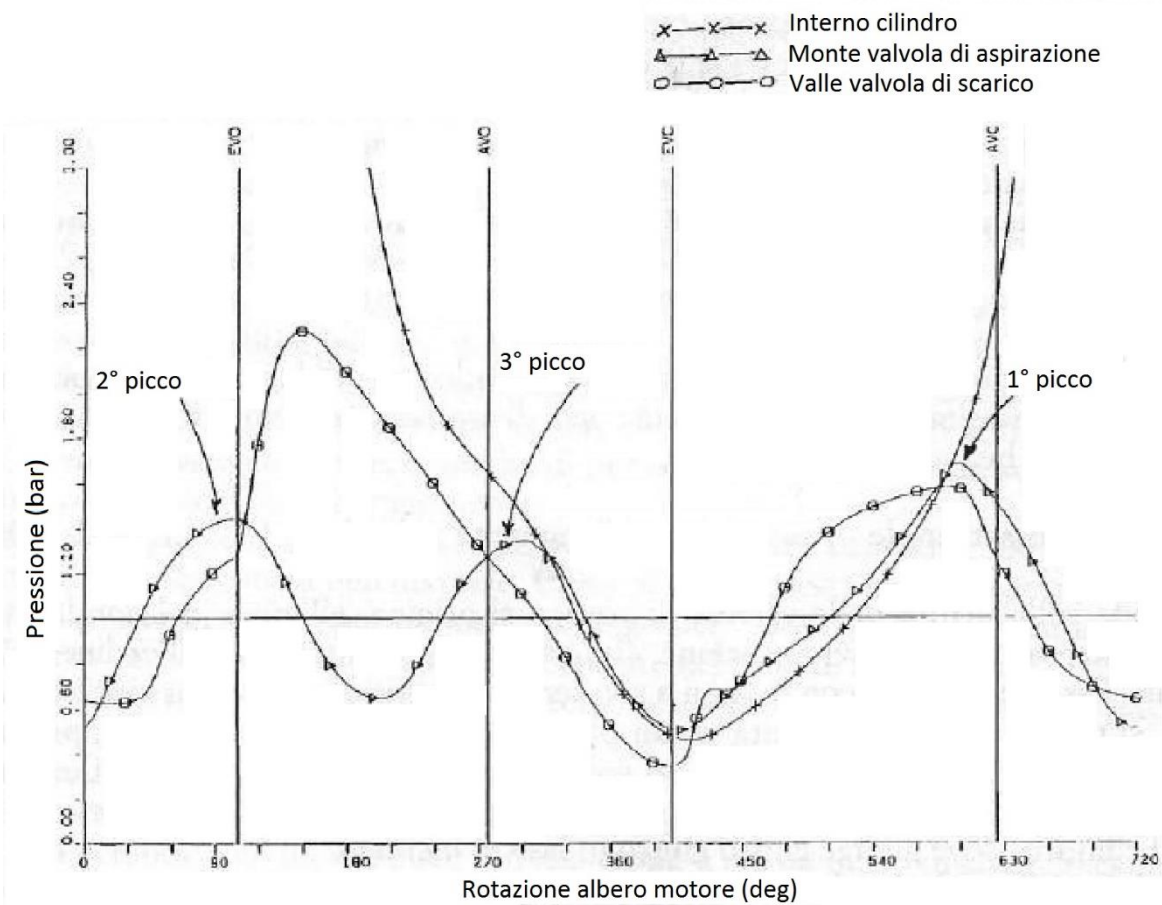


Figura 1.9 Andamento delle pressioni interna al cilindro, a monte della valvola di aspirazione e a valle della valvola di scarico in funzione della rotazione dell'albero motore (°)

Su 720° di ciclo motore completo significa che arriva un picco positivo in prossimità della valvola ogni 240° di rotazione dell'albero motore. Con questo sfasamento la prima onda di depressione arriva durante la fase di aspirazione, aumentando la depressione totale nel cilindro. In questo modo l'onda che si verrà a generare avrà un'intensità maggiore.

Per semplicità viene considerata la trombetta come un condotto a sezione costante, la cui sezione media è:

$$A_{mt} = \frac{A_c \cdot A_t}{2}, \tag{1.24}$$

Applicando le equazioni di continuità si ricavano le velocità massime nel condotto di aspirazione e nella trombeta:

$$u_{max} = 1.62 \cdot u \text{ (}^2\text{)}, \text{ velocità massima del pistone} \quad (1.25)$$

$$u_c = u_{max} \cdot \frac{S}{A_c} = 1.62 \cdot u \cdot \frac{S}{A_c}, \text{ velocità massima del fluido nel condotto} \quad (1.26)$$

$$u_t = u_c \cdot \frac{A_c}{A_{mt}} = 1.62 \cdot u \cdot \frac{S}{A_c} \cdot \frac{2 \cdot A_c}{A_c + A_t}, \text{ velocità massima del fluido nella trombeta} \quad (1.27)$$

Di seguito si useranno le seguenti notazioni (vedi Figura 1.9):

L = lunghezza totale del condotto;

$k \cdot L$ = lunghezza del tratto cilindrico;

$(1 - k) \cdot L$ = lunghezza del tratto divergente.

Il rapporto k tra la lunghezza del tratto cilindrico e la lunghezza totale del condotto non influisce pesantemente sull'accordatura, ma è bene che abbia un valore $k \approx 0.5 - 0.8$ (²).

Il periodo di andata e ritorno di un'onda è quindi:

$$T_0 = \frac{k \cdot L}{c - u_c} + \frac{(1-k) \cdot L}{c - u_t} + \frac{(1-k) \cdot L}{c + u_t} + \frac{k \cdot L}{c + u_c}. \quad (1.28)$$

I primi due termini sono relativi al tempo che l'onda impiega per percorrere il condotto da cilindro ad *air-box*, gli ultimi due invece sono il tempo di ritorno.

Sostituendo le equazioni (1.26) e (1.27) nella (1.28) ed esplicitando rispetto a L si ottiene:

$$L_z = \frac{60}{z \cdot n} \cdot \left(\frac{1}{\frac{k}{1 - \left(1.62 \cdot \frac{u \cdot S}{c \cdot A_c}\right)^2} + \frac{(1-k)}{1 - \left(1.62 \cdot \frac{u \cdot S}{c \cdot A_c} \cdot \frac{2 \cdot A_c}{A_c + A_t}\right)^2}} \right), \quad (1.29)$$

Scegliendo un picco di accordatura z per un determinato regime di rotazione n (rpm), l'equazione (1.29) restituisce la lunghezza L che deve avere il condotto per essere accordato correttamente.

La lunghezza L sarebbe riferita all'effettiva dimensione del tubo di flusso che è maggiore di quella nominale del condotto.

Per calcolare la lunghezza del tubo di flusso bisognerebbe applicare la seguente correzione ⁽⁴⁾:

$$L_{eff} = L + 2 \cdot L_0 \cdot (1 - M)^2, \quad (1.30)$$

con $L_0 \approx 0.3 \cdot \phi$, ϕ (m) diametro del tubo di flusso ed M indice di Mach.

Tuttavia la natura fortemente pulsante del sistema rende difficile l'utilizzo della (1.30).

Infatti nella pratica si preferisce avere più trombette di lunghezza differente da testare al banco prova ⁽²⁾.

Per comodità è stato implementato un foglio di calcolo Excel che calcola la lunghezza del condotto che accorda il sistema di aspirazione al picco z -esimo ad n giri/minuto.

Alla pagina seguente viene riportata la configurazione più aggiornata della MotoStudent.

In rosso è evidenziata la **lunghezza attuale** del condotto di aspirazione compreso di trombeta (330mm).

Si è cercato di accordare il sistema al 3° picco a circa 9500rpm, visto che dalla telemetria acquisita al Motorland di Aragon, risulta il regime di rotazione del motore più utilizzato.

Capitolo 2

I modelli matematici

Come già scritto nel Capitolo 1, si può pensare all'aria contenuta nei condotti come una molla.

Il moto del pistone funge da forzante del sistema e di conseguenza l'aria si mette in moto per riempire il cilindro.

Il passaggio da un elemento al successivo è regolato dalle equazioni di continuità semplici ed integrate:

$$A_1 \cdot v_1 = A_2 \cdot v_2, \quad (2.1)$$

$$A_1 \cdot x_1 = A_2 \cdot x_2, \quad (2.2)$$

In questo capitolo è presente l'analisi dei modelli massa-molla-smorzatore già esistenti in letteratura: il *Simple Lumped Element Model (S.L.E.M.)* e l'*Improved Lumped Element Model (I.L.E.M.)* (5).

L'obiettivo di questi modelli è quello di calcolare il coefficiente di riempimento del cilindro a diversi regimi di rotazione del motore. Questo è definito nel seguente modo:

$$\lambda_v = \frac{A_c \cdot \int_0^{t^*} \dot{x}_c(t) \cdot dt}{2 \cdot r \cdot S}, \quad (2.3)$$

dove t^* è la durata della fase di aspirazione e $\dot{x}_c(t)$ è la velocità dell'aria all'uscita del condotto di aspirazione in funzione del tempo.

Successivamente si passa all'analisi dei modelli migliorativi implementati in MATLAB durante il periodo di tesi. Questi mirano a rimuovere il maggior numero possibile di ipotesi semplificative al fine di ottenere risultati più attendibili.

Le equazioni implementate in MATLAB sono state ricavate tramite il software MAPLE.

2.1 Il Simple Lumped Element Model (S.L.E.M.)

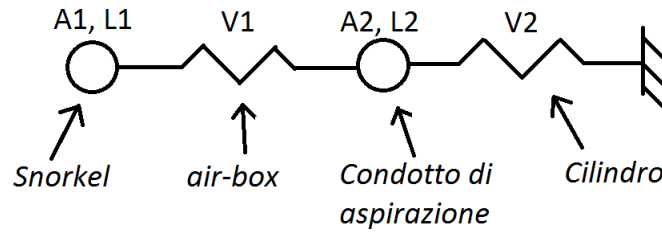


Figura 2.1 Schema modello S.L.E.M.

Questo modello considera l'inerzia del fluido ma non la comprimibilità. Infatti l'aria viene modellata come una massa concentrata all'interno dei condotti, mentre i volumi (*air-box* e cilindro) come molle con smorzatore. In questo modo le velocità e gli spostamenti in ingresso e uscita dei condotti coincidono, ignorando il fatto che l'aria si estende e si comprime.

Questa semplificazione lo rende poco attendibile ad elevati regimi di rotazione (vedi paragrafo §3.1). La lunghezza d'onda deve essere molto maggiore delle lunghezze dei condotti per ottenere un buon risultato ⁽⁵⁾:

$$V_i^{1/3} \ll \frac{2\pi c}{\omega_m} \quad A_i^{1/2} \ll \frac{2\pi c}{\omega_m} \quad L_i \ll \frac{2\pi c}{\omega_m} \quad i = 1, 2$$

dove V_i (m^3), A_i (m^2) e L_i (m) sono rispettivamente i volumi, le aree e le lunghezze degli elementi che compongono il sistema di aspirazione, c (m/s) è la velocità del suono e ω_m (rad/s) è la pulsazione motore.

Le valvole hanno un comportamento ideale, ovvero si aprono istantaneamente al PMS e si chiudono istantaneamente al PMI.

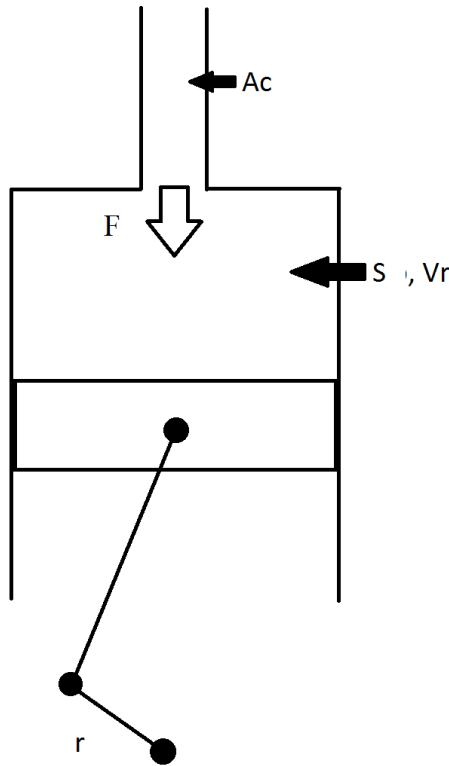
Il volume del cilindro viene mantenuto costante al valore della cilindrata opportunamente ridotta ⁽⁵⁾:

$$V_r = \frac{V_{cil}}{2} \cdot \frac{R+1}{R-1}, \quad (2.4)$$

dove R è il rapporto di compressione del motore.

Siccome il pistone non si muove, la forzante viene applicata direttamente allo sbocco del condotto di aspirazione. In questo modo l'aria presente nel sistema viene richiamata all'interno del cilindro.

Di seguito vengono riportati lo schema e la formulazione relativi alla forzante:



A_c = Sezione condotto;

S = Sezione pistone;

V_{cil} = Cilindrata;

R = Rapporto di compressione;

$V_r = \frac{V_{cil}}{2} \cdot \frac{R+1}{R-1}$ = Cilindrata ridotta;

r = Lunghezza manovella;

$L_r = r \cdot \frac{R+1}{R-1} = \frac{V_r}{S}$ = Corsa ridotta;

E = Modulo di elasticità dell'aria;

ρ = densità aria ambiente;

$c = \sqrt{\frac{E}{\rho}}$ = Velocità del suono

ω = Pulsazione motore;

$\Delta x(t) = r \cdot (1 - \cos(\omega \cdot t))$ = Spostamento

pistone.

$K_a = \frac{E \cdot A_c}{L_r}$ = Rigidezza longitudinale dell'aria nel volume V_r .

$$F = \rho c^2 \frac{A_c \cdot S}{V_r} \cdot r \cdot (1 - \cos(\omega \cdot t)) = \rho \cdot \frac{E}{\rho} \cdot \frac{A_c}{\frac{V_r}{S}} \cdot r \cdot (1 - \cos(\omega \cdot t)) = \frac{E \cdot A_c}{L_r} \cdot \Delta x = K_a \cdot \Delta x(t). \quad (2.5)$$

Il sistema viene risolto analiticamente impostando le equazioni differenziali in forma matriciale.

Essendo le matrici di massa $[M]$ e di rigidezza $[K]$ simmetriche, si assembla la matrice di smorzamento $[C]$ come combinazione lineare di queste (vedi paragrafo §2.3). Così facendo problema matriciale è diagonalizzabile.

Una volta diagonalizzato il sistema mediante la matrice dei modi di vibrare $[U]$ (normalizzata rispetto alla matrice di massa), è possibile risolvere le equazioni disaccoppiate in coordinate modali.

Per ricavare il vettore degli spostamenti reali è sufficiente moltiplicare il vettore delle coordinate modali per la matrice dei modi di vibrare $[U]$.

Simulando una singola aspirazione le condizioni iniziali sono di quiete del fluido, trascurando dunque le onde di pressione generate dai cicli precedenti.

Questo modello è stato scartato fin dal principio a causa della sua scarsa attendibilità agli elevati regimi di rotazione del motore ⁽⁵⁾.

2.2 L'Improved Lumped Element Model (I.L.E.M.)

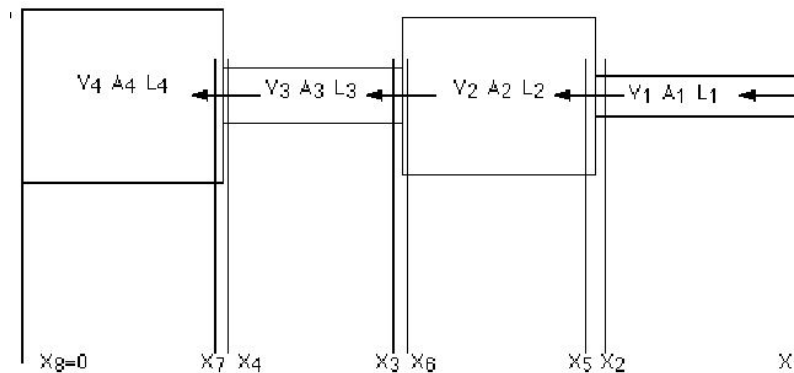


Figura 2.3 Schema del sistema di aspirazione a 4 elementi per I.L.E.M.

Il modello *I.L.E.M.* non fa differenza tra condotti e volumi ma li considera entrambi come serie di infinitesime masse e molle.

La velocità del fluido viene fatta variare linearmente tra ingresso e uscita di ogni elemento. In questo modo si considera anche la comprimibilità dell'aria oltre che la sua inerzia.

Questo aspetto lo rende più attendibile ad elevati regimi di rotazione rispetto allo *S.L.E.M.*

La forzante è la stessa definita nel modello *S.L.E.M* (vedi paragrafo §2.1).

Anche questo modello considera le valvole con un comportamento ideale, ovvero apertura istantanea al PMS e chiusura istantanea al PMI.

Anche qui la matrice di smorzamento $[C]$ viene assemblata come combinazione lineare delle matrici di massa $[M]$ e di rigidità $[K]$, quindi è diagonalizzabile (vedi paragrafo §2.3).

Simulando una singola aspirazione, le condizioni iniziali sono di quiete del fluido, trascurando dunque le onde di pressione generate dai cicli precedenti.

Come nello *S.L.E.M.* la soluzione è di tipo analitico (vedi paragrafo §2.1).

Le equazioni differenziali del sistema si ricavano risolvendo le equazioni Lagrangiane relative alle energie cinetiche e potenziali delle porzioni di fluido contenuto all'interno di ogni elemento. Le formulazioni delle energie cinetica e potenziale vengono riportate rispettivamente ai paragrafi §2.2.1 e §2.2.2.

Il coefficiente di riempimento viene calcolato come rapporto tra il volume d'aria entrante nel cilindro e la cilindrata, come riportato nella formula (2.3).

Questo modello fornisce dei risultati più attendibili rispetto allo *S.L.E.M.*, soprattutto ad elevati regimi di rotazione ⁽⁵⁾. Per questo motivo è stato scelto come base di partenza per sviluppare degli script MATLAB più completi e fedeli alla realtà.

2.2.1 Formulazione dell'energia cinetica

L'ipotesi fondamentale dell'*I.L.E.M.* è la variazione lineare tra ingresso e uscita di ogni elemento che compone il sistema (vedi Figura 2.4).

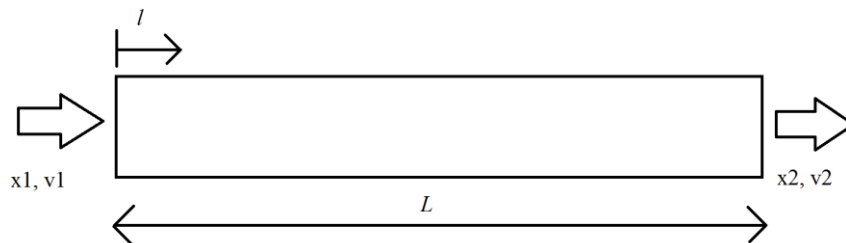


Figura 2.4 Schema di un condotto singolo

Quindi la velocità tra ingresso e uscita lungo la coordinata l ha la seguente legge:

$$v(l) = v_1 + \frac{v_2 - v_1}{L} \cdot l. \quad (2.6)$$

Sostituendo la (2.6) nell'espressione dell'energia cinetica di un elemento infinitesimo si ottiene:

$$dT = \frac{1}{2} \cdot dm \cdot v(l)^2 = \frac{1}{2} \cdot \rho \cdot A \cdot dl \cdot v(l)^2 = \frac{1}{2} \cdot \rho \cdot A \cdot \left(v_1 + \frac{v_2 - v_1}{L} \cdot l \right)^2 \cdot dl, \quad (2.7)$$

integrando la (2.7) si ottiene l'espressione dell'energia cinetica relativa ad un singolo elemento:

$$T = \int_0^L dT = \frac{1}{2} \cdot \rho \cdot A \cdot L \cdot (v_1^2 + v_1 \cdot v_2 + v_2^2), \quad (2.8)$$

2.2.2 Formulazione dell'energia potenziale

Considerando l'aria come una molla, questa può accumulare energia potenziale elastica.

La rigidità assiale si calcola nel seguente modo:

$$K_{el} = \frac{E \cdot A}{L} = \frac{\rho \cdot c^2 \cdot A}{L}, \quad (2.9)$$

Sostituendo la (2.9) nell'espressione dell'energia potenziale elastica si ottiene (riferendosi sempre alla Figura 2.4):

$$U = \frac{1}{2} \cdot K_{el} \cdot (x_1 - x_2)^2 = \frac{1}{2} \cdot \frac{\rho \cdot c^2 \cdot A}{L} \cdot (x_1 - x_2)^2 = \frac{1}{2} \cdot \frac{\rho \cdot c^2 \cdot A^2}{V} \cdot (x_1 - x_2)^2, \quad (2.10)$$

Questa è la formulazione dell'energia potenziale relativa ad un singolo elemento del sistema.

2.2.3 Calcolo della soluzione analitica

In questo paragrafo vengono riportati tutti i passaggi matematici che portano al calcolo del coefficiente di riempimento secondo il modello *I.L.E.M* ⁽⁶⁾.

Tutte le coordinate, le lunghezze, le aree e i volumi citati in questo paragrafo fanno riferimento alla Figura 2.3.

Una volta impostate le equazioni relative alle energie cinetica (2.8) e potenziale (2.10) di ogni elemento, si sommano per ricavare le energie cinetiche e potenziali dell'intero sistema:

$$T = \sum_i T_i, \quad (2.11)$$

$$U = \sum_i U_i, \quad (2.12)$$

con *i* che indica l'*i*-esimo corpo.

Si scrive l'equazione Lagrangiana:

$$L = T - U. \quad (2.13)$$

Dalle equazioni di continuità (2.1) e di continuità integrate (2.2), si esplicitano le variabili $v_5, v_6, v_7, x_5, x_6, x_7$, in fine si pone $v_8, x_8 = 0$ (pistone fermo, quindi V_4 costante).

Queste si sostituiscono nella (2.13) per ricavare l'equazione Lagrangiana ridotta L_r .

Così facendo si passa dagli otto gradi di libertà iniziali a soli quattro gradi di libertà (x_1, x_2, x_3, x_4 con relative velocità v_1, v_2, v_3, v_4).

Si scrivono i vettori delle coordinate Lagrangiane:

$$\{\mathbf{q}\} = \begin{Bmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \\ x_4 \end{Bmatrix}, \quad (2.14)$$

$$\{\dot{\mathbf{q}}\} = \begin{Bmatrix} v_1 \\ v_2 \\ v_3 \\ v_4 \end{Bmatrix}. \quad (2.15)$$

Impostando le quattro equazioni differenziali di Lagrange:

$$L_{eq,i} = \frac{d}{dt} \left(\frac{\partial L_r}{\partial \dot{q}_i} \right) - \frac{\partial L_r}{\partial q_i}, \quad (2.16)$$

e mettendole in un vettore colonna $\{\mathbf{L}_{eq}\}$, si possono riscrivere nella forma:

$$[\mathbf{M}] \cdot \{\ddot{\mathbf{q}}\} + [\mathbf{C}] \cdot \{\dot{\mathbf{q}}\} + [\mathbf{K}] \cdot \{\mathbf{q}\}. \quad (2.17)$$

Per ora la matrice di smorzamento $[\mathbf{C}]$ è uguale a $[\mathbf{0}]$.

Ipotizzando una soluzione sincrona ⁽⁶⁾:

$$\{\ddot{\mathbf{q}}\} = -s \cdot \{\mathbf{q}\}, \text{ dove } s = \omega_n^2, \quad (2.18)$$

si sostituisce la (2.18) nella (2.17) e si ottiene:

$$-s \cdot [\mathbf{M}] \cdot \{\mathbf{q}\} + [\mathbf{K}] \cdot \{\mathbf{q}\} = ([\mathbf{K}] - s \cdot [\mathbf{M}]) \cdot \{\mathbf{q}\} = [\mathbf{D}] \cdot \{\mathbf{q}\}. \quad (2.19)$$

Imponendo la (2.19) uguale a $\{\mathbf{0}\}$, si ritrova il classico problema agli autovalori.

Si calcola quindi il determinante della matrice $[\mathbf{D}]$, che risulterà un polinomio di 4° grado nella variabile s . Le sue radici non sono altro che il quadrato delle pulsazioni naturali $\omega_{n,i}$ del sistema.

Per il calcolo dei modi di vibrare si impone:

$$[\mathbf{D}] \cdot \begin{Bmatrix} 1 \\ \alpha(s) \\ \beta(s) \\ \gamma(s) \end{Bmatrix} = \begin{Bmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \\ 0 \end{Bmatrix}, \quad (2.20)$$

si esplicitano le funzioni $\alpha(s)$, $\beta(s)$ e $\gamma(s)$ e si calcolano i coefficienti relativi alle quattro radici s_i (con $i=1, 2, 3, 4$).

Ora si possono scrivere gli autovettori relativi ai quattro modi di vibrare:

$$\{\mathbf{u}_i'\} = \begin{Bmatrix} 1 \\ \alpha(s_i) \\ \beta(s_i) \\ \gamma(s_i) \end{Bmatrix}. \quad (2.21)$$

Per normalizzare i vettori (2.21) rispetto alla matrice di massa si calcolano i seguenti coefficienti moltiplicativi:

$$p_i = \frac{1}{\sqrt{\{1, \alpha(s_i), \beta(s_i), \gamma(s_i)\} \cdot [\mathbf{M}] \cdot \begin{Bmatrix} 1 \\ \alpha(s_i) \\ \beta(s_i) \\ \gamma(s_i) \end{Bmatrix}}}. \quad (2.22)$$

Ora è possibile assemblare la matrice dei modi di vibrare normalizzata rispetto alla matrice di massa:

$$[\mathbf{U}] = \begin{bmatrix} p_1 & p_2 & p_3 & p_4 \\ p_1 \cdot u_{2,1}' & p_2 \cdot u_{2,2}' & p_3 \cdot u_{2,3}' & p_4 \cdot u_{2,4}' \\ p_1 \cdot u_{3,1}' & p_2 \cdot u_{3,2}' & p_3 \cdot u_{3,3}' & p_4 \cdot u_{3,4}' \\ p_1 \cdot u_{4,1}' & p_2 \cdot u_{4,2}' & p_3 \cdot u_{4,3}' & p_4 \cdot u_{4,4}' \end{bmatrix}. \quad (2.23)$$

Nota $[\mathbf{U}]$, si possono diagonalizzare le matrici di massa $[\mathbf{M}]$ e di rigidità $[\mathbf{K}]$. Siccome la matrice dei modi di vibrare $[\mathbf{U}]$ è normalizzata rispetto alla matrice $[\mathbf{M}]$, la diagonalizzazione $[\mathbf{M}_{diag}]$ risulterà la matrice identità di ordine 4. Quindi ha senso diagonalizzare solo la matrice $[\mathbf{K}]$:

$$[\mathbf{K}_{diag}] = [\mathbf{U}]^T \cdot [\mathbf{K}] \cdot [\mathbf{U}]. \quad (2.24)$$

Assumendo il rapporto di smorzamento di due modi di vibrare qualsiasi, è possibile calcolare i rimanenti in modo che la matrice di smorzamento $[\mathbf{C}]$ sia diagonalizzabile. Per fare ciò è necessario calcolare i coefficienti di Rayleigh ⁽⁴⁾ c_M e c_K (vedi paragrafo 2.3, equazioni (2.45) e (2.46)) e assemblare $[\mathbf{C}_{diag}]$ come combinazione lineare di $[\mathbf{M}_{diag}]$ e $[\mathbf{K}_{diag}]$:

$$[\mathbf{C}_{diag}] = c_M \cdot [\mathbf{M}_{diag}] + c_K \cdot [\mathbf{K}_{diag}]. \quad (2.25)$$

I rapporti di smorzamento risulteranno quindi ⁽⁶⁾:

$$\zeta_i = \frac{c_{diag,i}}{c_{diag,cr,i}} = \frac{c_{diag,i}}{2 \cdot \sqrt{m_{diag,i} \cdot k_{diag,i}}} = \frac{c_{diag,i}}{2 \cdot \sqrt{k_{diag,i}}}, \text{ con } i = 1, 2, 3, 4 \quad (2.26)$$

dove: $m_{diag,i} = M_{diag}(i,i) = 1$, $c_{diag,i} = C_{diag}(i,i)$, $k_{diag,i} = K_{diag}(i,i)$.

La forzante del sistema è la stessa definita per il modello *S.L.E.M.* al paragrafo §2.1, equazione (2.5). Per comodità di calcolo si divide la parte costante da quella oscillante:

$$F = F_c + F_a \cdot \cos(\omega_m \cdot t), \quad (2.27)$$

dove ω_m è la pulsazione del motore. Quindi:

$$F_c = \rho \cdot c^2 \cdot \frac{A_3 \cdot A_4}{V_4} \cdot r, \quad (2.28)$$

$$F_a = -\rho \cdot c^2 \cdot \frac{A_3 \cdot A_4}{V_4} \cdot r. \quad (2.29)$$

La forzante è applicata solamente sulla quarta coordinata fisica del sistema, quindi i vettori delle forze modali costanti ed alternate risulta:

$$\{\mathbf{F}_{mc}\} = [\mathbf{U}]^T \cdot \begin{Bmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \\ F_c \end{Bmatrix}, \quad (2.30)$$

$$\{\mathbf{F}_{ma}\} = [\mathbf{U}]^T \cdot \begin{Bmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \\ F_a \end{Bmatrix}, \quad (2.31)$$

Noti tutti e quattro i ζ_i non è necessario calcolare la matrice $[\mathbf{C}]$, ma si può direttamente passare al calcolo della soluzione del problema differenziale così impostato:

$$[\mathbf{M}_{diag}] \cdot \{\ddot{\boldsymbol{\eta}}\} + [\mathbf{C}_{diag}] \cdot \{\dot{\boldsymbol{\eta}}\} + [\mathbf{K}_{diag}] \cdot \{\boldsymbol{\eta}\} = \{\mathbf{F}_{mc}\} + \{\mathbf{F}_{ma}\} \cdot \cos(\omega_m \cdot t). \quad (2.32)$$

Per il calcolo della soluzione in coordinate modali $\{\boldsymbol{\eta}\}$ si ricorre all'aiuto di alcune variabili d'appoggio ⁽⁵⁾:

$$rr_i = \sqrt{\left(1 - \left(\frac{\omega_m}{\omega_{n,i}}\right)^2\right)^2 + \left(2 \cdot \zeta_i \cdot \frac{\omega_m}{\omega_{n,i}}\right)^2}, \quad (2.33)$$

$$\varphi_i = \text{Atan}_2\left(\frac{-2 \cdot \zeta_i \cdot \frac{\omega_m}{\omega_{n,i}}}{1 - \left(\frac{\omega_m}{\omega_{n,i}}\right)^2}\right), \quad (2.34)$$

$$q_i = \omega_{n,i}^2 \cdot \sqrt{1 - \zeta_i^2}, \quad (2.35)$$

$$E_i = \frac{\left(\frac{F_{mc,i}}{\omega_{n,i}^2} - \frac{F_{ma,i} \cdot \cos \varphi_i}{rr_i \cdot \omega_{n,i}^2}\right) \cdot \omega_{n,i}^2 \cdot \zeta_i + \frac{\omega_m \cdot F_{ma,i} \cdot \sin \varphi_i}{rr_i \cdot \omega_{n,i}^2}}{q_i}, \quad (2.36)$$

$$F_i = -\frac{F_{mc,i}}{\omega_{n,i}^2} - \frac{F_{ma,i} \cdot \cos \varphi_i}{rr_i \cdot \omega_{n,i}^2}. \quad (2.37)$$

La generica coordinata modale avrà la seguente scrittura ⁽⁵⁾:

$$\eta_i = \eta_i(\omega_m) = \frac{F_{mc,i}}{\omega_{n,i}^2} + \frac{F_{ma,i} \cdot \cos \varphi_i}{rr_i \cdot \omega_{n,i}^2} + e^{-\omega_{n,i} \cdot \zeta_i \cdot t} \cdot (F_i \cdot \cos(q_i \cdot t) + E_i \cdot \sin(q_i \cdot t)). \quad (2.38)$$

Per passare al vettore delle coordinate fisiche è sufficiente moltiplicare la matrice dei modi di vibrare $[\mathbf{U}]$ per il vettore delle coordinate modali $\{\boldsymbol{\eta}\}$:

$$\{\mathbf{x}\} = [\mathbf{U}] \cdot \{\boldsymbol{\eta}\}. \quad (2.39)$$

Per il calcolo del coefficiente di riempimento è sufficiente trovare lo spostamento d'aria alla coordinata 4, corrispondente all'ingresso nel cilindro:

$$x_4(\omega_m, t) = \eta_1 \cdot u_{4,1} + \eta_2 \cdot u_{4,2} + \eta_3 \cdot u_{4,3} + \eta_4 \cdot u_{4,4}. \quad (2.40)$$

Il calcolo del coefficiente di riempimento si fa usando l'equazione (2.3):

$$\lambda_v(\omega_m) = \frac{A_3 \cdot x_4(\omega_m, t^*)}{2 \cdot r \cdot A_4}, \quad (2.41)$$

dove $t^* = \frac{1}{2} \cdot \left(\frac{2 \cdot \pi}{\omega_m}\right)$ è la durata della fase di aspirazione.

Notare che λ_v dipende dalla pulsazione del motore ω_m . Si può facilmente convertire la pulsazione motore in regime di rotazione (rpm) per facilitare la lettura del grafico $\lambda_v - n$.

2.3 La definizione della matrice di smorzamento

La matrice di smorzamento $[C]$ del sistema viene assemblata come combinazione lineare delle matrici di massa $[M]$ e di rigidità $[K]$:

$$[C] = c_M \cdot [M] + c_K \cdot [K], \quad (2.42)$$

Quest'ultime, essendo simmetriche, rendono diagonalizzabile anche la matrice $[C]$.

I coefficienti c_M e c_K sono detti coefficienti di Rayleigh ^(a).

La relazione tra le equazioni modali e le condizioni di ortogonalità consentono di riscrivere l'equazione nel seguente modo:

$$\zeta_n = \frac{1}{2 \cdot \omega_n} \cdot c_M + \frac{\omega_n}{2} \cdot c_K, \quad (2.43)$$

dove ζ_n è il rapporto di smorzamento del n-esimo modo di vibrare e ω_n è la relativa pulsazione naturale ^(a).

Se sono noti i rapporti di smorzamento relativi a due modi di vibrare qualunque, è possibile valutare le soluzioni di due equazioni simultaneamente:

$$\begin{Bmatrix} \zeta_i \\ \zeta_j \end{Bmatrix} = \frac{1}{2} \cdot \begin{vmatrix} 1/\omega_i & \omega_i \\ 1/\omega_j & \omega_j \end{vmatrix} \cdot \begin{Bmatrix} c_M \\ c_K \end{Bmatrix}. \quad (2.44)$$

Dalla (2.44) si ricavano le espressioni per il calcolo dei coefficienti c_M e c_K :

$$c_M = \frac{2 \cdot \omega_i \cdot \omega_j \cdot (\omega_i \cdot \zeta_j - \omega_j \cdot \zeta_i)}{\omega_i^2 - \omega_j^2}, \quad (2.45)$$

$$c_K = \frac{2 \cdot (\omega_i \cdot \zeta_i - \omega_j \cdot \zeta_j)}{\omega_i^2 - \omega_j^2}. \quad (2.46)$$

Noti i coefficienti di Rayleigh è possibile assemblare la matrice di smorzamento seguendo la (2.42).

I rapporti di smorzamento assunti per i modi di vibrare i e j rimangono inalterati, mentre i rimanenti vengono calcolati implicitamente.

2.4 Gli sviluppi dell'*I.L.E.M.*

In questo paragrafo viene spiegato lo sviluppo che ha portato alla stesura dello *script* MATLAB definitivo.

Vengono quindi elencati tutti i modelli implementati nel periodo di tesi, spiegando le modifiche apportate rispetto alle versioni precedenti.

Risonatore Serie 4gdl Cdiag.m

Inizialmente è stato implementato il semplice modello *I.L.E.M.*

Il sistema è composto da quattro elementi: *snorkel*, risonatore posto in serie (*air-box*), condotto di aspirazione e cilindro.

Ognuno di questi è dotato di due gradi di libertà (spostamenti in ingresso e uscita), per un totale di 8 gradi di libertà. Essendo questi vincolati dalle equazioni di continuità integrate (2.2) si riducono a soli 4 gdl (vedi paragrafo §2.2.3).

Una volta terminato lo *script*, è stato validato confrontandolo con i dati noti in letteratura ⁽⁵⁾.

Il limite di questo modello è la soluzione di tipo analitico che non consente di apportare ulteriori migliorie.

Risonatore Serie ODE15s.m

Per riuscire a rimuovere alcune delle ipotesi semplificative, si è passati da una soluzione di tipo analitico ad una di tipo numerico.

I risultati delle simulazioni sono stati confrontati con quelli ottenuti dallo *script* “*Risonatori_Serie_4gdl_Cdiag.m*”. Lo scostamento massimo rispetto alla soluzione analitica è di poco superiore all’1% (vedi paragrafo §3.2.2), quindi accettabile.

Una volta assemblata la matrice di smorzamento $[C]$, lo *script* si semplifica notevolmente. Infatti ora è sufficiente impostare il problema in forma matriciale per risolverlo numericamente:

$$[M] \cdot \{\ddot{x}\} + [C] \cdot \{\dot{x}\} + [K] \cdot \{x\} = \{F\}. \quad (2.47)$$

L'integratore scelto per risolvere le equazioni differenziali è l'ODE15s.

Questo è un risolutore per equazioni di tipo *stiff* che utilizza il metodo di ordine variabile ^(b).

Inizialmente era stato scelto l'ODE45 (Risonatore_Serie_ODE45.m), ovvero un risolutore per equazioni differenziali *non-stiff* con metodo dell'ordine medio (formula di Runge-Kutta di ordine 4-5) ^(b). Questo porta a risultati con scostamenti superiori al 4% rispetto alla soluzione analitica (vedi paragrafo §.3.2.1), inoltre i tempi di calcolo sono notevolmente più lunghi.

Per questi motivi si è preferito continuare ad utilizzare l'integratore ODE15s.

Risonatore Serie ODE15s Vvar.m

La prima ipotesi semplificativa rimossa è la costanza del volume V_4 .

In questo *script* le matrici di massa **[M]** e di rigidità **[K]** non sono costanti ma i termini relativi al cilindro sono dipendenti dal tempo.

La forzante è definita sempre allo stesso modo (vedi paragrafo §2.1, equazione (2.5)).

Al fine di ridurre i tempi di calcolo, non si trovano più le pulsazioni naturali del sistema cercando le radici del determinante della matrice **[D]**. A tale proposito viene definita una matrice **[AA]** i cui sono la parte immaginaria degli autovalori complessi coniugati ⁽⁶⁾. Per ulteriori dettagli vedere il paragrafo §2.5.1.

I risultati delle simulazioni mostrano che c'è uno scostamento massimo del 5.6% rispetto al caso in cui V_4 venga mantenuto costante (vedi paragrafo §3.3). Ciò dimostra come non sia possibile trascurare il fatto che il pistone si muova.

Risonatore Serie OODE15s pistone.m

La forzante, secondo il modello *I.L.E.M.* originale, viene applicata direttamente allo sbocco del condotto di aspirazione.

Concettualmente è più corretto pensare che sia il moto del pistone a sollecitare il sistema.

Si impone quindi $x_8 = r \cdot (1 - \cos(\omega_m \cdot t))$ e non più uguale a 0 (per ulteriori dettagli si rimanda al paragrafo §2.5.1).

Dalla derivazione delle equazioni Lagrangiane ci si accorge che compaiono dei termini smorzanti dovuti alla velocità di variazione del volume V_4 , che andranno poi sommati alla matrice di smorzamento.

Lo scostamento massimo rispetto alla forzante originale è trascurabile (inferiore al 0.2%) ma si continua ad adottare questo tipo di forzante perché concettualmente più corretta.

Risonatore Serie ODE15s pistone sudd.m

Dopo aver analizzato l'influenza della suddivisione di un singolo condotto in più corpi distinti (vedi paragrafo §3.6), si è deciso di implementare uno *script* che divida in quattro parti *snorkel*, *air-box* e cilindro e in dieci parti il condotto di aspirazione.

Il numero totale di corpi componenti il sistema sale a 22, di conseguenza anche i gradi di libertà sono 22.

La discretizzazione più fitta del condotto è giustificata dalla geometria fortemente variabile della trombetta e dalla lieve conicità dell'intero condotto.

In questo modo è possibile ottenere una soluzione molto più accurata degli *script* precedenti.

Risonatore Serie ODE15s multi sudd.m

Questo *script* è in grado di *plottare* il coefficiente di riempimento in funzione del regime di rotazione del motore dopo più cicli consecutivi.

Dalle simulazioni riportate al paragrafo §3.7.1 si vede come quattro cicli siano sufficienti per arrivare a convergenza.

In questo modo si riesce a tenere conto degli effetti d'onda generati ai cicli precedenti.

Risonatore Serie ODE15s definitivo.m

Allo *script* precedente sono stati introdotti l'anticipo all'apertura e il posticipo alla chiusura della valvola di aspirazione (rispettivamente 20° e 35° (⁷)).

Considerando la fasatura si riesce a valutare correttamente l'accordatura del sistema.

L'apertura e chiusura delle valvole rimane ideale, quindi istantanea.

Inserendo come parametri di input la temperatura T ($^{\circ}\text{C}$) e la pressione p (bar) ambientale, il calcolo della velocità di propagazione delle onde c (m/s) e della densità ρ (kg/m^3) viene fatto automaticamente (vedi paragrafo §2.5). Questo perché T e p sono più facili da misurare.

Al paragrafo §3.7.2 viene riportato lo studio dell'influenza di T , p e del rapporto di smorzamento ζ .

Al paragrafo seguente (§2.5) vengono spiegati per esteso il funzionamento e la struttura dello *script* in oggetto.

Per semplicità i rapporti di smorzamento dei primi due modi di vibrare vengono eguagliati. Per tanto in input sarà sufficiente inserire un solo valore di ζ .

2.5 Improved Lumped Element Model modificato

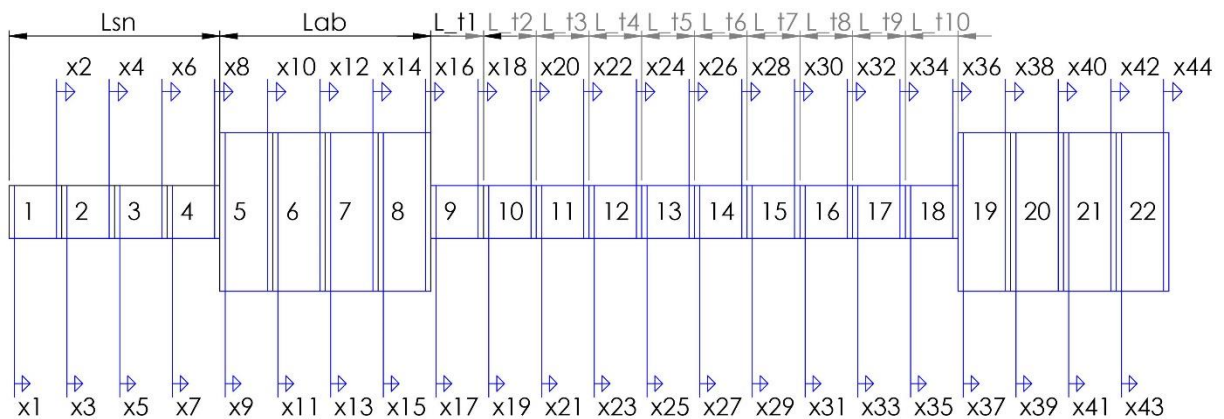


Figura 2.5 Schema del modello I.L.E.M. modificato.

All'*I.L.E.M.* originale sono state apportate importanti modifiche, sia a livello concettuale che di calcolo.

In questo paragrafo viene spiegato per esteso il modello *I.L.E.M.* modificato, ovvero la versione finale dello *script* sviluppato durante il periodo di tesi (Risonatore_Serie_ODE15s_definitivo.m).

Di seguito vengono elencati tutti i parametri richiesti in input:

- L_{sn} = Lunghezza *snorkel* (0.049m);

- L_{ab} = Lunghezza *air-box* (0.37m);

- L_{t_1} - $L_{t_{10}}$ = Lunghezze delle dieci suddivisioni del condotto di aspirazione completo
(trombetta + corpo farfallato + raccordo in testa + condotti in testa) (m);

- d_{t_1} - d_{t_9} = Diametri relativi alle sezioni del condotto di aspirazione completo (m).

Grazie a questi è possibile modellare la forma della trombetta;

- d_{valv} = diametro delle valvole di aspirazione (0.038m (⁷));

- d_{pist} = alesaggio del pistone (0.076m (⁷));

- r = lunghezza manovella (0.0275m (⁷));

- A_{sn} = Area trasversale dello *snorkel* (0.0032519m²);

- A_{ab} = Area trasversale *air-box* (0.0232432m²);

- R = rapporto di compressione del motore (10.7 (⁷));

- AO_{ant} = anticipo all'apertura della valvola di aspirazione (20° (⁷));

- AC_{post} = posticipo alla chiusura della valvola di aspirazione (35° (⁷));

- k_{corr} = fattore correttivo della fasatura;

- T_{amb} = temperatura ambiente (25°C);

- p_{amb} = pressione ambientale (1.02bar);

- ξ = rapporto di smorzamento (0.1(⁸));

- $MinN$ = regime di rotazione minimo del motore a cui fa partire la simulazione;

- $MaxN$ = regime di rotazione massimo del motore a cui fermare la simulazione;

- $Nstep$ = numero di suddivisioni del range $MinN$ - $MaxN$;

- $Tstep$ = Numero di suddivisioni dell'intervallo di integrazione della fase di aspirazione;

- $Tstep_L$ = Numero di suddivisioni dell'intervallo di integrazione del sistema libero;
- n_Cicli = Numero di cicli.

Da questi valori di input, lo *script* si calcola altri parametri fondamentali per il calcolo della soluzione.

Tra i più importanti rientrano la velocità del suono c (m/s) e la densità dell'aria ρ (kg/m³):

$$c = \sqrt{\gamma \cdot \bar{R} \cdot T_{amb}}, \quad (2.47)$$

$$\rho = \gamma \cdot \frac{p_{amb}}{c^2}, \quad (2.48)$$

dove per l'aria $\gamma = 1.4$, $\bar{R} = R/m_a = 287\text{J/kg} \cdot \text{K}$, con $R = 8.314\text{J/mol} \cdot \text{K}$ e $m_a = 29\text{g/mol}$ (⁹).

Le equazioni e le matrici riportate nello *script* sono state ricavate con l'ausilio del software MAPLE.

Prima di cominciare il calcolo della soluzione degli $nCicli$ cicli consecutivi, viene definito il sistema libero. Così facendo si riducono i tempi di, perché l'operazione viene eseguita una sola volta.

Con definizione del sistema libero si intende la scrittura delle matrici di massa [$\mathbf{M_L}$], di rigidità [$\mathbf{K_L}$] e di smorzamento [$\mathbf{C_L}$]. Queste caratterizzano la situazione di valvola di aspirazione chiusa, quindi un sistema non forzato a 18 gradi di libertà.

Successivamente si passa al ciclo *for* che simula i cicli motore in successione.

Alla forzante viene applicato uno sfasamento di $AOant$ gradi di anticipo, in modo da considerare l'apertura anticipata della valvola di aspirazione.

La durata della fase di aspirazione viene calcolata considerando anche il ritardo alla chiusura nel seguente modo:

$$T_{int} = \frac{\pi + AOant + ACpost}{\omega_m}. \quad (2.49)$$

Partendo dalle condizioni iniziali di aria in quiete, si calcolano i valori finali di spostamento e velocità dei 22 gradi di libertà del sistema per ogni regime di rotazione (vedi dettagli al paragrafo §2.5.1).

Questi vengono poi rielaborati e posti come condizioni iniziali del sistema libero.

Questo simula la propagazione delle onde a monte della valvola di aspirazione nelle rimanenti fasi del ciclo motore, fino alla nuova apertura della valvola di aspirazione.

Quindi le condizioni finali di spostamenti e velocità dell'aria nel sistema libero, vengono rielaborati e posti in ingresso al sistema che simula la successiva fase di aspirazione.

Al termine del ciclo *for* vengono visualizzati i grafici del coefficiente di riempimento al variare del regime di rotazione per i vari cicli motore simulati.

Nel vettore *lamdavMax* vengono memorizzati i picchi di λv con il relativo regime di rotazione del motore a cui si verificano.

Di seguito viene riportato lo *script* completo *Risonatore_Serie_ODE15s_definitivo.m*.

```
%Questo script consente di ricavare l'andamento del coefficiente di
%riempimento al variare del regime di rotazione di un motore monocilindrico
%quattro tempi.
%L'oggetto di studio è un sistema di aspirazione dotato di un risonatore di
%posto in serie al condotto di aspirazione del motore (air-box).
%Il modello implementato è l'I.L.E.M. modificato(Improved Lumped Element
%Method).
%%
%Definizione variabili di Input:
%Lsn, Lab, L_ti, r, d_ti, d_pist, d_valv [m]; Asn, Aab [m^2]; rho [kg/m^3];
%c [m/s]; MinN, MaxN [rpm]; T_amb [°C]; p_amb [bar]; xi, Tstep, Nstep;
%dove MinN e MaxN sono rispettivamente il minimo e il massimo regime di
%rotazione del motore che si vuole
%visualizzare in output. E' necessario che MinN>0.
%Nstep è il numero di suddivisioni dei giri motore tra MinN e MaxN (Nstep>0
%intero).
%Tstep è il numero di suddivisioni del tempo di integrazione delle fasi di
%aspirazione (Tstep>0 intero).
%Tstep_L è il numero di suddivisioni del tempo di integrazione del sistema
%libero (Tstep_L>0 intero).
%Questi tre parametri (Tstep, Tstep_L Nstep) influiscono sul tempo di
%calcolo.
%Si inserisce come input solo lo xi relativo ai primi due modi di vibrare,
%gli altri vengono calcolati automaticamente con il metodo dei coefficienti
%di Rayleigh.
%Così facendo è possibile assemblare la matrice di smorzamento [C] come
%combinazione lineare delle matrici di rigidezza [K] e di massa [M]:
%[C]=c_M*[M] + c_K*[K].
%In questo script viene tenuto conto del fatto che il volume del cilindro
%varia con lo spostamento del pistone (V4 variabile), per tanto le matrici %di
massa,
```



```

%aspirazione.
Tint_L=zeros(kEnd,Tstep_L); %Definizione dimensione matrice dei
%tempi di integrazione del sistema
%libero.

for k=1:kEnd
    Tint(k,:)=0:
        (pi+AOant+ACpost)/((Tstep-1)*Om(k)):
        (pi+AOant+ACpost)/Om(k);
%Definizione intervalli di integrazione della fase di aspirazione variare di
Om.
    Tint_L(k,:)=0:
        (3*pi-AOant-ACpost)/((Tstep_L-1)*Om(k)):
        (3*pi-AOant-ACpost)/Om(k);
%Definizione intervalli di integrazione del sistema libero al variare di %Om.
end
x=zeros(22,kEnd);
%Definizione dimensione matrice degli spostamenti fisici nel tempo al %variare
di Om per il sistema libero.
v=zeros(22,kEnd);
%Definizione dimensione matrice delle velocità fisiche iniziali per il
%sistema libero al variare di Om.
x0=zeros(22,kEnd);
%Condizioni iniziali di spostamenti nulli per il primo ciclo ad ogni Om.
v0=zeros(22,kEnd);
%Condizioni iniziali di velocità nulle per il primo ciclo ad ogni Om.
x_L=zeros(18,Tstep_L,kEnd);
%Definizione dimensione matrice degli spostamenti fisici per il sistema
%libero al variare di Om.
v_L=zeros(18,Tstep_L,kEnd);
%Definizione dimensione matrice delle velocità fisiche nel tempo al variare
%di Om per il sistema libero.
x0_L=zeros(18,kEnd);
%Definizione dimensione vettore degli spostamenti fisici iniziali per il
%sistema libero.
v0_L=zeros(18,kEnd);
%Definizione dimensione vettore delle velocità fisiche iniziali tempo per %il
sistema libero.
p_L=zeros(18,Tstep_L,kEnd);
%Definizione dimensione array pressione fisica ad ogni coordinata del %sistema
libero, dipendente dal tempo.
p18_L=zeros(kEnd,Tstep_L,nCicli);
%Definizione dimensione matrice pressione fisica alla coordinata 4 del
%sistema libero, dipendente dal tempo.
lambdav=zeros(nCicli,kEnd);
%Definizione dimensione matrice lamdav.
lambdavMax=zeros(2,6,nCicli);
%Definizione dimensione array dei massimi di lambdav.
opts=odeset('RelTol',1e-3,'AbsTol',1e-6);
%Opzioni di integrazione fase di aspirazione.
opts_L=odeset('RelTol',1e-3,'AbsTol',1e-6);
%Opzioni di integrazione sistema libero.

%%
%***DEFINIZIONE SISTEMA LIBERO***
%
%Calcolo degli autovalori della matrice [A_L].

```

%Dopo aver impostato le equazioni di Lagrange in Maple si ricavano le %matrici di massa [M_L] e di rigidezza [K_L].

%Si scrive il vettore delle pulsazioni naturali: On_L=s_L^(1/2) [rad/s].

```
M_L = [rho * A(1) * L(1) / 0.3e1 rho * L(1) * A(2) / 0.6e1 0 0 0 0 0 0 0 0 0 0 0
0 0 0 0 0 0 0; rho * L(1) * A(2) / 0.6e1 rho / A(1) * L(1) * A(2) ^ 2 / 0.3e1
+ rho * A(2) * L(2) / 0.3e1 rho * L(2) * A(3) / 0.6e1 0 0 0 0 0 0 0 0 0 0 0
0 0 0 0; 0 rho * L(2) * A(3) / 0.6e1 rho / A(2) * L(2) * A(3) ^ 2 / 0.3e1 +
rho * A(3) * L(3) / 0.3e1 rho * L(3) * A(4) / 0.6e1 0 0 0 0 0 0 0 0 0 0 0
0 0; 0 0 rho * L(3) * A(4) / 0.6e1 rho / A(3) * L(3) * A(4) ^ 2 / 0.3e1 + rho
* A(4) * L(4) / 0.3e1 rho * L(4) * A(5) / 0.6e1 0 0 0 0 0 0 0 0 0 0 0 0; 0
0 0 rho * L(4) * A(5) / 0.6e1 rho / A(4) * L(4) * A(5) ^ 2 / 0.3e1 + rho *
A(5) * L(5) / 0.3e1 rho * L(5) * A(6) / 0.6e1 0 0 0 0 0 0 0 0 0 0 0 0; 0 0 0
0 rho * L(5) * A(6) / 0.6e1 rho / A(5) * L(5) * A(6) ^ 2 / 0.3e1 + rho * A(6)
* L(6) / 0.3e1 rho * L(6) * A(7) / 0.6e1 0 0 0 0 0 0 0 0 0 0 0 0; 0 0 0 0 0 rho
* L(6) * A(7) / 0.6e1 rho / A(6) * L(6) * A(7) ^ 2 / 0.3e1 + rho * A(7) *
L(7) / 0.3e1 rho * L(7) * A(8) / 0.6e1 0 0 0 0 0 0 0 0 0 0 0 0; 0 0 0 0 0 0 rho
* L(7) * A(8) / 0.6e1 rho / A(7) * L(7) * A(8) ^ 2 / 0.3e1 + rho * A(8) *
L(8) / 0.3e1 rho * L(8) * A(9) / 0.6e1 0 0 0 0 0 0 0 0 0 0 0 0; 0 0 0 0 0 0 0 rho
* L(8) * A(9) / 0.6e1 rho / A(8) * L(8) * A(9) ^ 2 / 0.3e1 + rho * A(9) *
L(9) / 0.3e1 rho * L(9) * A(10) / 0.6e1 0 0 0 0 0 0 0 0 0 0 0 0; 0 0 0 0 0 0 0 rho
* L(9) * A(10) / 0.6e1 rho / A(9) * L(9) * A(10) ^ 2 / 0.3e1 + rho * A(10) *
L(10) / 0.3e1 rho * L(10) * A(11) / 0.6e1 0 0 0 0 0 0 0 0 0 0 0 0; 0 0 0 0 0 0 0 0
rho * L(10) * A(11) / 0.6e1 rho / A(10) * L(10) * A(11) ^ 2 / 0.3e1 + rho *
A(11) * L(11) / 0.3e1 rho * L(11) * A(12) / 0.6e1 0 0 0 0 0 0 0 0 0 0 0 0
0 0 0 rho * L(11) * A(12) / 0.6e1 rho / A(11) * L(11) * A(12) ^ 2 / 0.3e1 +
rho * A(12) * L(12) / 0.3e1 rho * L(12) * A(13) / 0.6e1 0 0 0 0 0 0 0 0 0 0 0
0 0 0 0 0 0 rho * L(12) * A(13) / 0.6e1 rho / A(12) * L(12) * A(13) ^ 2 /
0.3e1 + rho * A(13) * L(13) / 0.3e1 rho * L(13) * A(14) / 0.6e1 0 0 0 0 0 0; 0 0
0 0 0 0 0 0 0 0 rho * L(13) * A(14) / 0.6e1 rho / A(13) * L(13) * A(14)
^ 2 / 0.3e1 + rho * A(14) * L(14) / 0.3e1 rho * L(14) * A(15) / 0.6e1 0 0 0 0;
0 0 0 0 0 0 0 0 0 0 rho * L(14) * A(15) / 0.6e1 rho / A(14) * L(14) *
A(15) ^ 2 / 0.3e1 + rho * A(15) * L(15) / 0.3e1 rho * L(15) * A(16) / 0.6e1
0 0; 0 0 0 0 0 0 0 0 0 0 0 0 0 0 rho * L(15) * A(16) / 0.6e1 rho / A(15) *
L(15) * A(16) ^ 2 / 0.3e1 + rho * A(16) * L(16) / 0.3e1 rho * L(16) * A(17)
/ 0.6e1 0; 0 0 0 0 0 0 0 0 0 0 0 0 0 0 0 0 rho * L(16) * A(17) / 0.6e1 rho /
A(16) * L(16) * A(17) ^ 2 / 0.3e1 + rho * A(17) * L(17) / 0.3e1 rho * L(17)
* A(18) / 0.6e1; 0 0 0 0 0 0 0 0 0 0 0 0 0 0 0 0 rho * L(17) * A(18) / 0.6e1
rho / A(17) * L(17) * A(18) ^ 2 / 0.3e1 + rho * A(18) * L(18) / 0.3e1];;
```

```
K_L = [rho * c ^ 2 * A(1) ^ 2 / V(1) -rho * c ^ 2 * A(1) / V(1) * A(2) 0 0 0
0 0 0 0 0 0 0 0 0 0 0 0 0 0; -rho * c ^ 2 * A(1) / V(1) * A(2) rho * c ^ 2 /
V(1) * A(2) ^ 2 + rho * c ^ 2 * A(2) ^ 2 / V(2) -rho * c ^ 2 * A(2) / V(2) *
A(3) 0 0 0 0 0 0 0 0 0 0 0 0 0 0 0 0; 0 -rho * c ^ 2 * A(2) / V(2) * A(3) rho
* c ^ 2 / V(2) * A(3) ^ 2 + rho * c ^ 2 * A(3) ^ 2 / V(3) -rho * c ^ 2 * A(3)
/ V(3) * A(4) 0 0 0 0 0 0 0 0 0 0 0 0 0 0 0 0; 0 0 -rho * c ^ 2 * A(3) / V(3) *
A(4) rho * c ^ 2 / V(3) * A(4) ^ 2 + rho * c ^ 2 * A(4) ^ 2 / V(4) -rho * c
^ 2 * A(4) / V(4) * A(5) 0 0 0 0 0 0 0 0 0 0 0 0 0 0 0 0; 0 0 0 -rho * c ^ 2 * A(4)
/ V(4) * A(5) rho * c ^ 2 / V(4) * A(5) ^ 2 + rho * c ^ 2 * A(5) ^ 2 / V(5)
-rho * c ^ 2 * A(5) / V(5) * A(6) 0 0 0 0 0 0 0 0 0 0 0 0 0 0 0 0; 0 0 0 0 -rho * c
^ 2 * A(5) / V(5) * A(6) rho * c ^ 2 / V(5) * A(6) ^ 2 + rho * c ^ 2 * A(6)
^ 2 / V(6) -rho * c ^ 2 * A(6) / V(6) * A(7) 0 0 0 0 0 0 0 0 0 0 0 0 0 0 0 0; 0 0 0 0
0 -rho * c ^ 2 * A(6) / V(6) * A(7) rho * c ^ 2 / V(6) * A(7) ^ 2 + rho * c
^ 2 * A(7) ^ 2 / V(7) -rho * c ^ 2 * A(7) / V(7) * A(8) 0 0 0 0 0 0 0 0 0 0 0 0;
0 0 0 0 0 0 -rho * c ^ 2 * A(7) / V(7) * A(8) rho * c ^ 2 / V(7) * A(8) ^ 2
+ rho * c ^ 2 * A(8) ^ 2 / V(8) -rho * c ^ 2 * A(8) / V(8) * A(9) 0 0 0 0 0
```

```

0 0 0 0; 0 0 0 0 0 0 0 -rho * c ^ 2 * A(8) / V(8) * A(9) rho * c ^ 2 / V(8)
* A(9) ^ 2 + rho * c ^ 2 * A(9) ^ 2 / V(9) -rho * c ^ 2 * A(9) / V(9) * A(10)
0 0 0 0 0 0 0 0; 0 0 0 0 0 0 0 0 -rho * c ^ 2 * A(9) / V(9) * A(10) rho * c
^ 2 / V(9) * A(10) ^ 2 + rho * c ^ 2 * A(10) ^ 2 / V(10) -rho * c ^ 2 * A(10)
/ V(10) * A(11) 0 0 0 0 0 0 0; 0 0 0 0 0 0 0 0 0 -rho * c ^ 2 * A(10) / V(10)
* A(11) rho * c ^ 2 / V(10) * A(11) ^ 2 + rho * c ^ 2 * A(11) ^ 2 / V(11) -
rho * c ^ 2 * A(11) / V(11) * A(12) 0 0 0 0 0 0 0; 0 0 0 0 0 0 0 0 0 0 -rho *
c ^ 2 * A(11) / V(11) * A(12) rho * c ^ 2 / V(11) * A(12) ^ 2 + rho * c ^ 2
* A(12) ^ 2 / V(12) -rho * c ^ 2 * A(12) / V(12) * A(13) 0 0 0 0 0; 0 0 0 0
0 0 0 0 0 0 -rho * c ^ 2 * A(12) / V(12) * A(13) rho * c ^ 2 / V(12) * A(13)
^ 2 + rho * c ^ 2 * A(13) ^ 2 / V(13) -rho * c ^ 2 * A(13) / V(13) * A(14) 0
0 0 0; 0 0 0 0 0 0 0 0 0 0 0 0 -rho * c ^ 2 * A(13) / V(13) * A(14) rho * c
^ 2 / V(13) * A(14) ^ 2 + rho * c ^ 2 * A(14) ^ 2 / V(14) -rho * c ^ 2 * A(14)
/ V(14) * A(15) 0 0 0; 0 0 0 0 0 0 0 0 0 0 0 0 -rho * c ^ 2 * A(14) / V(14)
* A(15) rho * c ^ 2 / V(14) * A(15) ^ 2 + rho * c ^ 2 * A(15) ^ 2 / V(15) -
rho * c ^ 2 * A(15) / V(15) * A(16) 0 0; 0 0 0 0 0 0 0 0 0 0 0 0 0 0 -rho *
c ^ 2 * A(15) / V(15) * A(16) rho * c ^ 2 / V(15) * A(16) ^ 2 + rho * c ^ 2
* A(16) ^ 2 / V(16) -rho * c ^ 2 * A(16) / V(16) * A(17) 0; 0 0 0 0 0 0 0 0
0 0 0 0 0 0 0 -rho * c ^ 2 * A(16) / V(16) * A(17) rho * c ^ 2 / V(16) * A(17)
^ 2 + rho * c ^ 2 * A(17) ^ 2 / V(17) -rho * c ^ 2 * A(17) / V(17) * A(18);
0 0 0 0 0 0 0 0 0 0 0 0 0 0 0 -rho * c ^ 2 * A(17) / V(17) * A(18) rho * c
^ 2 / V(17) * A(18) ^ 2 + rho * c ^ 2 * A(18) ^ 2 / V(18);];

```

```

A_L = [zeros(18), -M_L\K_L ;
       eye(18) , zeros(18)];

```

```

Aval_L=eig(A_L);

```

```

s_L=zeros(1,18);

```

```

for i=2:2:36

```

```

    s_L(i/2)=imag(Aval_L(i-1));

```

```

end

```

```

On_L=sqrt(s_L);

```

```

c_M_L=2*On_L(1)*On_L(2)*(On_L(1)*xi2-On_L(2)*xi1)/(s_L(1)-s_L(2));

```

```

c_K_L=2*(On_L(1)*xi1-On_L(2)*xi2)/(s_L(1)-s_L(2));

```

```

C_L=c_M_L*M_L+c_K_L*K_L;

```

```

for j=1:nCicli

```

```

    %%

```

```

    %***FASE DI ASPIRAZIONE***

```

```

    %

```

```

    %Per ogni regime di rotazione (definito dall'array Om) vengono

```

```

    %integrate le 22 equazioni differenziali del sistema con Tstep

```

```

    %intervalli di %integrazione;

```

```

    %questo consente di considerare la dipendenza dal tempo di

```

```

    %tutte le sotto-funzioni implementate in odefun4.

```

```

    %Le condizioni iniziali y0 del primo ciclo sono di spostamenti e

```

```

    %velocità nulle.

```

```

    %Per i cicli successivi vengono eguagliate le condizioni iniziali a

```

```

    %quelle finali del sistema libero al ciclo precedente.

```

```

    for k=1:kEnd

```

```

        Om_k=Om(k);

```

```

        y0=[v0(:,k);x0(:,k)];

```

```

        [t,y]=ode15s(@(t,y)

```

```

        odefun6(t,y,r,L(1),L(2),L(3),L(4),L(5),L(6),L(7),L(8),L(9),L(10),L(11),L(12)

```

```

),L(13),L(14),L(15),L(16),L(17),L(18),A(1),A(2),A(3),A(4),A(5),A(6),A(7),A(
8),A(9),A(10),A(11),A(12),A(13),A(14),A(15),A(16),A(17),A(18),A(19),A(20),A
(21),A(22),V(1),V(2),V(3),V(4),V(5),V(6),V(7),V(8),V(9),V(10),V(11),V(12),V
(13),V(14),V(15),V(16),V(17),V(18),Vn,Om_k,rho,c,xil,xi2,AOant),Tint(k,:),y
0,opts); %Per info vedere odefun6.m
    v(:,k)=y(Tstep,1:22);
    x(:,k)=y(Tstep,23:44);
end

    lambdav(j,:)=A(19)*x(19,:)/Vcil;
%Calcolo del coefficiente di riempimento per ogni regime di rotazione.
figure('Name','lambdav');
plot(N,lambdav(j,:)); %Generazione grafici lambdav-N.

%%
%Ricerca dei massimi di lambdav.
%Viene generata una matrice lambdavMax in cui la prima riga indica i
%massimi locali di lamdav e la seconda riga a che regime di rotazione
%del motore N [rpm] si ottengono.

ct=0;
for k=1:(kEnd-2)
    if lambdav(j,k+1)>=lambdav(j,k) && lambdav(j,k+1)>=lambdav(j,k+2)
        ct=ct+1;
        lambdavMax(1,ct,j)=lambdav(j,k+1);
        lambdavMax(2,ct,j)=N(k+1);
    end
end
%%
%***RISPOSTA LIBERA***
%
%Calcolo della risposta libera del sistema a 18 gdl che si ottiene alla
%chiusura della valvola di aspirazione.
%*_L sta per sistema libero, ovvero il sistema a 18gdl con valvola di
%aspirazione chiusa senza forzante.

for i=1:18
    x0_L(i,:)=x(i,:)-x(4,:)*A(18)/A(i);
%Genera la matrice degli spostamenti fisici del sistema alla chiusura della
%valvola di aspirazione al variare di Om.
    v0_L(i,:)=v(i,:);
%Genera la matrice delle velocità fisiche del sistema alla chiusura della
%valvola di aspirazione al variare di Om.
end

for k=1:kEnd
    Om_k=Om(k);
    y0_L=[v0_L(:,k);x0_L(:,k)];
    [t_L,y_L]=ode15s(@(t_L,y_L)
odefun4_L(t_L,y_L,M_L,C_L,K_L),Tint_L(k,:),y0_L,opts_L);
%Per info vedere odefun4_L.m
    v_L(:, :,k)=real((y_L(:,1:18)).');
%Array delle velocità fisiche del sistema libero variabili nel tempo per Om
%variabile.
    x_L(:, :,k)=real((y_L(:,19:36)).');

```

```

%Array degli spostamenti fisici del sistema libero variabili nel tempo per
%Om variabile.
    p_L(:, :, k) = (-C_L*v_L(:, :, k) - K_L*x_L(:, :, k)) / A(18) * 1e-05;
    p18_L(k, :, j) = -p_L(18, :, k);
end

%Prendo le condizioni finali di spostamento e velocità del sistema libero e
%le imposto come condizioni iniziali della successiva fase di aspirazione.
    x_Ltemp(:, :) = x_L(:, Tstep_L, :);
    v_Ltemp(:, :) = v_L(:, Tstep_L, :);
    x0(:, :) = [x_Ltemp; zeros(4, kEnd)];
    v0(:, :) = [v_Ltemp; zeros(4, kEnd)];
end

```

Le sotto-funzioni `odefun6` e `odefun4_L` impostano il sistema di equazioni differenziali da risolvere numericamente mediante l'integratore ODE15s.

Al paragrafo seguente (§2.5.1) viene spiegata per esteso l'impostazione del problema differenziale. Vengono riportati inoltre i relativi *sub-script*.

2.5.1 Calcolo della soluzione numerica

La funzione `odefun6` imposta il sistema di equazioni differenziali in forma matriciale.

Moltiplicando la (2.47) per l'inversa della matrice di massa e riordinando i termini si ottiene:

$$\{\ddot{\mathbf{x}}\} = -[\mathbf{M}]^{-1} \cdot [\mathbf{C}] \cdot \{\dot{\mathbf{x}}\} - [\mathbf{M}]^{-1} \cdot [\mathbf{K}] \cdot \{\mathbf{x}\} + [\mathbf{M}]^{-1} \cdot \{\mathbf{F}\}. \quad (2.50)$$

Imponendo $\{\dot{\mathbf{x}}\} = \{\mathbf{v}\}$ si può raggruppare il sistema come segue ⁽⁶⁾:

$$\begin{Bmatrix} \{\dot{\mathbf{v}}\} \\ \{\mathbf{v}\} \end{Bmatrix} = \begin{bmatrix} -[\mathbf{M}]^{-1} \cdot [\mathbf{C}] & -[\mathbf{M}]^{-1} \cdot [\mathbf{K}] \\ [\mathbf{I}] & [\mathbf{0}] \end{bmatrix} \cdot \begin{Bmatrix} \{\dot{\mathbf{x}}\} \\ \{\mathbf{x}\} \end{Bmatrix} + \begin{Bmatrix} [\mathbf{M}]^{-1} \cdot \{\mathbf{F}\} \\ \{\mathbf{0}\} \end{Bmatrix}, \quad (2.51)$$

dove $[\mathbf{I}]$ è la matrice identità di ordine 22, mentre $[\mathbf{0}]$ è la matrice nulla di ordine 22.

In questo modo si ottiene un sistema di 44 equazioni differenziali del primo ordine.

Si definiscono i seguenti vettori e matrici:

$$\{\dot{\mathbf{y}}\} = \begin{Bmatrix} \{\dot{\mathbf{v}}\} \\ \{\mathbf{v}\} \end{Bmatrix}, \quad (2.52)$$

$$\{\mathbf{y}\} = \begin{Bmatrix} \{\dot{\mathbf{x}}\} \\ \{\mathbf{x}\} \end{Bmatrix}, \quad (2.53)$$

$$[\mathbf{AA}] = \begin{bmatrix} -[\mathbf{M}]^{-1} \cdot [\mathbf{C}] & -[\mathbf{M}]^{-1} \cdot [\mathbf{K}] \\ [\mathbf{I}] & [\mathbf{0}] \end{bmatrix}, \quad (2.54)$$

$$\{\mathbf{BB}\} = \begin{Bmatrix} [\mathbf{M}]^{-1} \cdot \{\mathbf{F}\} \\ \{\mathbf{0}\} \end{Bmatrix}. \quad (2.55)$$

Sostituendo le (2.52), (2.53), (2.54) e (2.55) nella (2.51) si ottiene:

$$\{\dot{\mathbf{y}}\} = [\mathbf{AA}] \cdot \{\mathbf{y}\} + \{\mathbf{BB}\}. \quad (2.56)$$

Il vettore $\{\mathbf{y}\}$ ha dimensione 44×1 . I primi 22 termini sono relativi alle velocità fisiche, mentre gli ultimi 22 agli spostamenti.

La parte immaginaria degli autovalori complessi coniugati della matrice $[\mathbf{AA}]$ sono le pulsazioni naturali smorzate del sistema ⁽⁶⁾.

Viene riportato in seguito il *sub-script* odefun6:

```
function
dydt=odefun6(t,y,r,L1,L2,L3,L4,L5,L6,L7,L8,L9,L10,L11,L12,L13,L14,L15,L16,L
17,L18,A1,A2,A3,A4,A5,A6,A7,A8,A9,A10,A11,A12,A13,A14,A15,A16,A17,A18,A19,A
20,A21,A22,V1,V2,V3,V4,V5,V6,V7,V8,V9,V10,V11,V12,V13,V14,V15,V16,V17,V18,V
n,Om,rho,c,xi1,xi2,AOant)
%Generazione matrici di massa, smorzamento, rigidezza e vettore delle forze
%fisiche
AA
Amat(t,r,L1,L2,L3,L4,L5,L6,L7,L8,L9,L10,L11,L12,L13,L14,L15,L16,L17,L18,A1,
A2,A3,A4,A5,A6,A7,A8,A9,A10,A11,A12,A13,A14,A15,A16,A17,A18,A19,A20,A21,A22
,V1,V2,V3,V4,V5,V6,V7,V8,V9,V10,V11,V12,V13,V14,V15,V16,V17,V18,Vn,Om,rho,c
,xi1,xi2,AOant);
BB
B(t,r,L1,L2,L3,L4,L5,L6,L7,L8,L9,L10,L11,L12,L13,L14,L15,L16,L17,L18,A1,A2,
A3,A4,A5,A6,A7,A8,A9,A10,A11,A12,A13,A14,A15,A16,A17,A18,A19,A20,A21,A22,Vn
,Om,rho,c,AOant);
%Impostazione equazioni differenziali in forma matriciale:
dydt=AA*y+BB;
end
```

A sua volta vengono richiamati all'interno di `odefun6` altre sotto-funzioni: `Amat` serve a generare la matrice $[AA]$, mentre `B` a generare il vettore $\{BB\}$.

Anche queste al loro interno richiamano altri *sub-script* ma per evitare di appesantire troppo la trattazione della soluzione numerica non vengono riportati.

Per quanto riguarda la soluzione numerica del sistema libero, il procedimento è lo stesso.

Il *sub-script* `odefun4_L` risolve il sistema di 36 equazioni differenziali del primo ordine ponendo il termine forzante $\{BB\} = \{0\}$.

Capitolo 3

Risultati delle simulazioni

In questo capitolo vengono riportati e commentati i risultati ottenuti dalle simulazioni in MATLAB.

Le prime analisi sono di tipo comparativo, per valutare le differenze tra i diversi *script* implementati.

In seguito verrà valutata l'influenza dei parametri in input.

In fine si passa all'ottimizzazione del sistema di aspirazione basandosi sia sui risultati ottenuti numericamente, sia sulle formule teoriche riportate ai paragrafi §1.4, §1.5 e §1.6.

Si omette il confronto tra i modelli *S.L.E.M.* ed *I.L.E.M.* in quanto già noto in letteratura ⁽⁵⁾.

3.1 Confronto tra soluzioni analitica e numerica

Il primo studio fatto è appunto il confronto tra le soluzioni ricavate in modo analitico (*Risonatore_Serie_4gdl_Cdiag.m*) e quelle ricavate in modo numerico (*Risonatore_Serie_ODE45.m* e *Risonatore_Serie_ODE15s.m*).

Per fare questo sono state simulate le stesse condizioni con i tre *script* citati tra parentesi.

3.1.1 Risolutore ODE45

La prima soluzione numerica utilizza il risolutore ODE45 (vedi paragrafo §2.4).

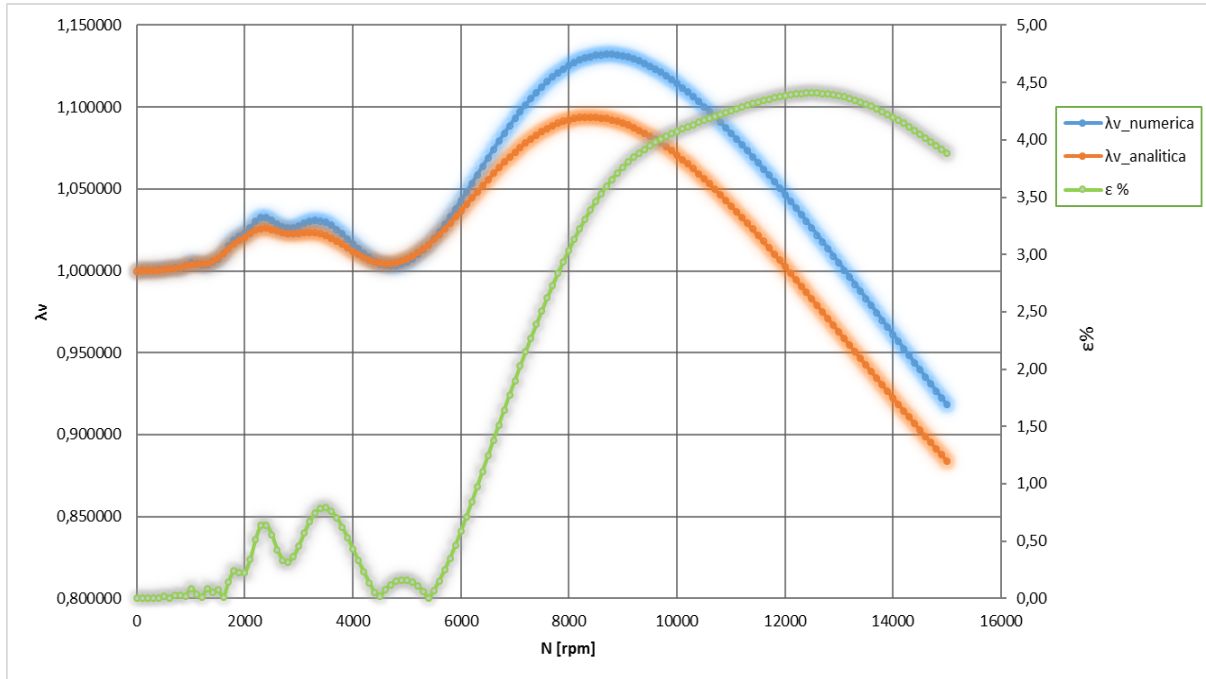


Figura 3.1 Confronto tra soluzione analitica e numerica con risolutore ODE45 del modello I.L.E.M.

L'integratore ODE45 (Risonatore_Serie_ODE45.m) fatica a seguire correttamente la soluzione analitica (Risonatore_Serie_4gdl_Cdiag.m), presentando uno scostamento massimo del 4.4%.

Questo accompagnato alla lentezza di calcolo, ha portato alla scelta di un risolutore differente, ovvero l'ODE15s per equazioni *stiff* (per ulteriori dettagli vedere il paragrafo §2.4).

3.1.2 Risolutore ODE15s

La comparativa tra la soluzione analitica (Risonatore_Serie_4gdl_Cdiag.m) e quella numerica ricavata con risolutore ODE15s (Risonatore_Serie_ODE15s.m) è molto migliore rispetto alla precedente (paragrafo §3.1.1).

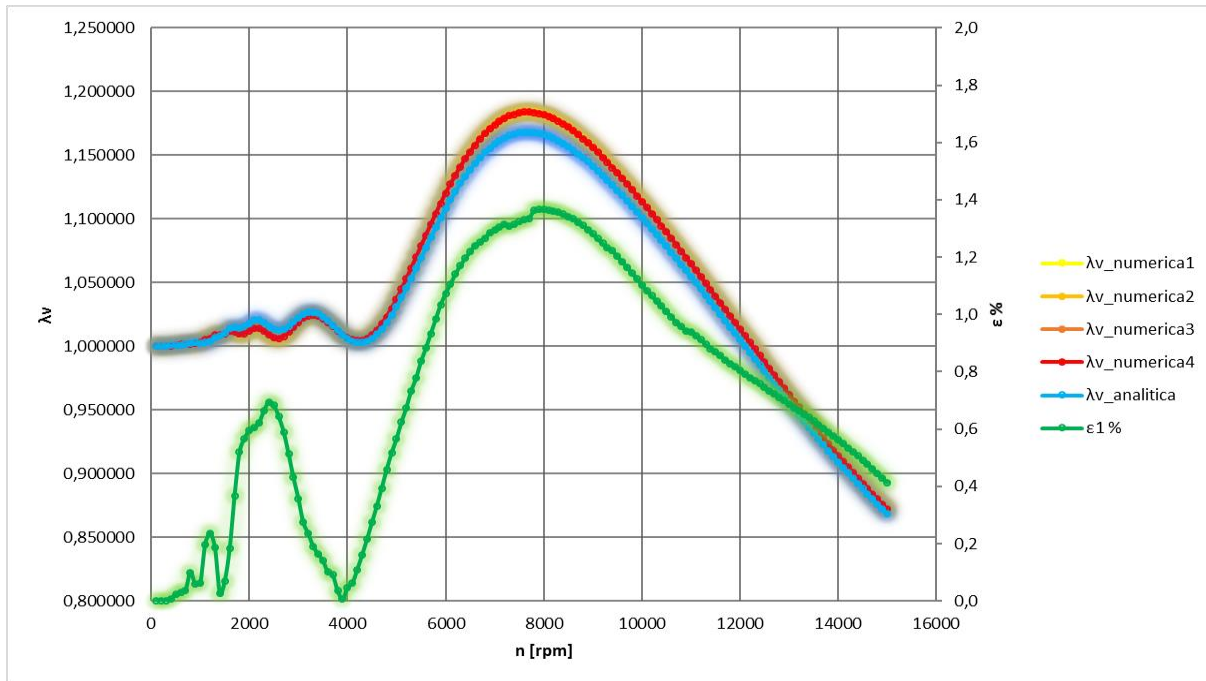


Figura 3.2 Confronto tra soluzione analitica e numerica con risolutore ODE15s del modello I.L.E.M.

Come si può vedere nel grafico in Figura 3.2, la soluzione numerica si scosta al massimo dell'1.4% rispetto alla soluzione analitica.

Ritenendo la qualità della simulazione sufficiente, si è proceduto con l'analisi dei parametri di convergenza dell'integrazione.

I due parametri su cui si può agire sono il valore di convergenza relativa *RelTol* ed assoluta *AbsTol* (^b).

Si è partiti dai valori di default per poi stringere i parametri di convergenza (vedi Figura 3.2):

- *RelTol* = 1e-03, *AbsTol* = 1e-06 (λ_v _numerica1, default);
- *RelTol* = 1e-04, *AbsTol* = 1e-07 (λ_v _numerica2);
- *RelTol* = 1e-05, *AbsTol* = 1e-08 (λ_v _numerica3);
- *RelTol* = 1e-06, *AbsTol* = 1e-09 (λ_v _numerica4).

Lo scostamento massimo rispetto alla soluzione analitica rimane sempre intorno all'1.4%, quindi per ridurre i tempi di calcolo si è preferito mantenere le impostazioni di default.

Si è passati poi all'analisi di posizione dei picchi.

Tabella 3.1 Analisi di posizionamento dei picchi al variare dei parametri di convergenza.

Picchi soluzione numerica 1						
$\lambda v_{\text{numerica1}}$	1,001357	1,006345	1,010094	1,014370	1,024219	1,183743
N [rpm]	600	1200	1500	2100	3200	7700
Picchi soluzione numerica 2						
$\lambda v_{\text{numerica2}}$	1,001295	1,006353	1,010065	1,012037	1,023990	1,183713
N [rpm]	600	1200	1500	2000	3200	7600
Picchi soluzione numerica 3						
$\lambda v_{\text{numerica3}}$	1,001303	1,006362	1,010078	1,012065	1,023993	1,183732
N [rpm]	600	1200	1500	2000	3200	7600
Picchi soluzione numerica 4						
$\lambda v_{\text{numerica4}}$	1,001302	1,006366	1,010079	1,012069	1,023995	1,183734
N [rpm]	600	1200	1500	2000	3200	7600
Picchi soluzione analitica						
$\lambda v_{\text{analitica}}$	1,002721	1,014245	1,020540	1,026640	1,168044	
N [rpm]	800	1600	2100	3200	7600	

Il picco di maggior rilievo è quello a 7600-7700rpm. Visto che la tolleranza è di ± 50 rpm, i valori in Tabella 3.1 confermano che la curva $\lambda v_{\text{numerica1}}$ fornisce degli ottimi risultati anche in termini di posizionamento del picco.

3.2 Confronto tra volume del cilindro fisso e variabile

Una volta finito di implementare lo *script* Risonatore_Serie_ODE15s_Vvar.m, lo si è confrontato con Risonatore_Serie_ODE15s.m in modo da valutare l'influenza della variazione del volume V_4 (vedi Figura 2.3).

Vengono riportati i risultati delle simulazioni in seguito:

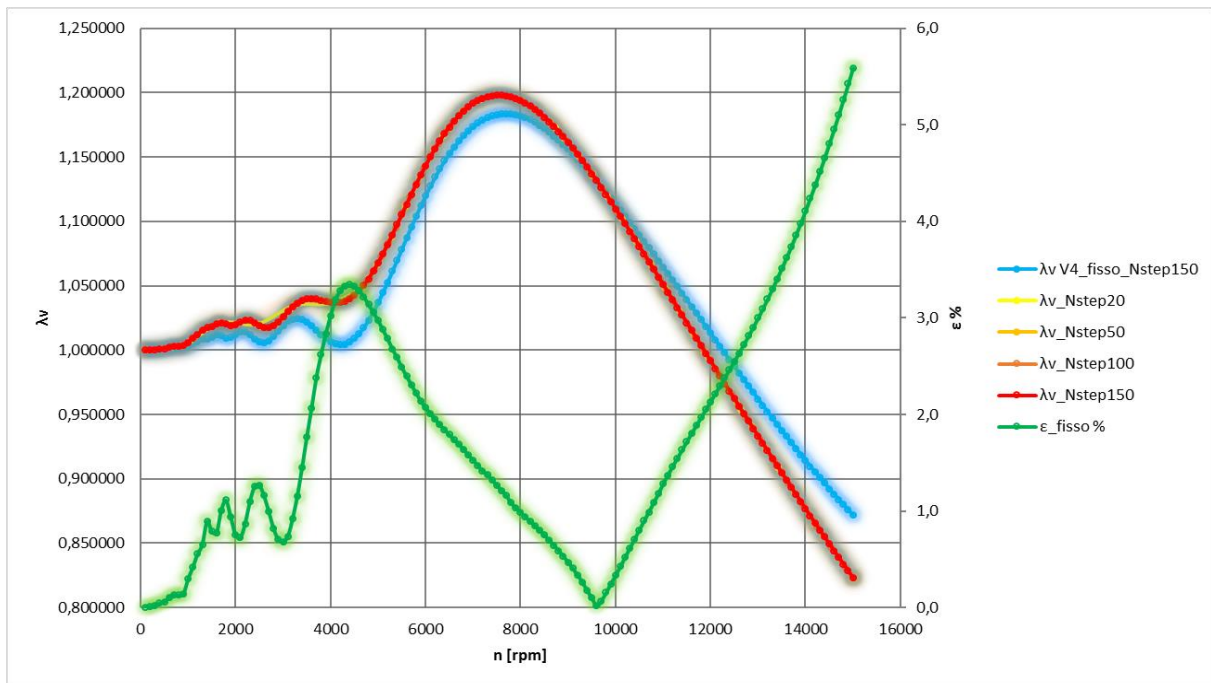


Figura 3.3 Confronto tra soluzione con volume V_4 fisso e variabile.

In Figura 3.3 si nota come ad elevati regimi di rotazione lo scostamento raggiunga valori superiori al 5%.

Anche per regimi di rotazione tra i 4000rpm e i 5000rpm si supera il 3% di errore.

L'entità del picco principale della soluzione λ_v _Nstep150 differisce del 2.5% rispetto a quello della soluzione analitica.

Anche il posizionamento del picco di λ_v varia del 1-6%. L'analisi dettagliata viene riportata al paragrafo §3.3.1, insieme allo studio dell'influenza dei parametri di calcolo dello *script*.

Ciò dimostra come non sia trascurabile il fatto che il pistone si muova e faccia variare il volume V_4 .

3.3 Influenza dei parametri di calcolo

In questo paragrafo si valuta l'influenza dei parametri di calcolo dello *script* *Risonatore_Serie_ODE15s_Vvar.m*.

Questi sono:

- $Nstep$ = numero di suddivisioni del range $MinN - MaxN$;
- $Tstep$ = numero di suddivisioni dell'intervallo di integrazione.

Al fine di ridurre i tempi di calcolo sono stati cercati i valori minimi che potessero cogliere correttamente l'entità e il posizionamento almeno del picco principale.

3.3.1 Influenza di $Nstep$

Il numero di suddivisioni del range $MinN - MaxN$ influisce molto sulla qualità del risultato.

Più questo valore aumenta e meglio si riesce a collocare il picco di λv in termini di regime di rotazione del motore.

Di seguito vengono riportati i risultati delle analisi fatte con $MinN = 1rpm$ e $MaxN = 15000rpm$.

Tabella 3.2 Risultati delle simulazioni ottenuti variando il parametro $Nstep$

Picchi soluzione λv V4_fisso_Nstep150						
λv V4_fisso_Nstep150	1,002721	1,014245	1,020540	1,026640	1,168044	
N [rpm]	800	1600	2100	3200	7600	
Picchi soluzione λv _Nstep20						
λv _Nstep20	1,021337	1,194894				
N [rpm]	1668	7158				
Picchi soluzione λv _Nstep50						
λv _Nstep50	1,020651	1,023380	1,039338	1,197599		
N [rpm]	1620	2229	3445	7398		
Picchi soluzione λv _Nstep100						
λv _Nstep100	1,021044	1,023278	1,040067	1,197926		
N [rpm]	1756	2207	3562	7475		
Picchi soluzione λv _Nstep150						
λv _Nstep150	1,003242	1,021452	1,023226	1,040068	1,197978	
N [rpm]	700	1700	2200	3600	7500	

Nella Tabella 3.2 vengono riportati i valori dei picchi di λv e il regime di rotazione a cui si verificano.

L'entità e la posizione dei picchi di λv varia al variare di $Nstep$.

Per rendere più agevole l'interpretazione dei risultati sono stati valutati gli scarti in percentuale rispetto alla soluzione con V_4 fisso.

Tabella 3.3 *Influenza del parametro $Nstep$ sull'entità e il collocamento del picco principale di λv rispetto alla soluzione con V_4 fisso.*

	$\Delta N\%$	$\Delta \lambda v \%$
Nstep20	-5,82	2,30
Nstep50	-2,66	2,53
Nstep100	-1,65	2,56
Nstep150	-1,32	2,56

Tornando brevemente al confronto tra V_4 fisso e variabile, si nota come al variare del parametro $Nstep$ la soluzione si discosti leggermente. Questo accade sia in termini di entità che di posizionamento del picco.

Prendendo la soluzione migliore (ovvero $Nstep = 150$), sono stati valutati gli scostamenti delle altre soluzioni con V_4 variabile. Vengono riportati in seguito i risultati:

Tabella 3.4 *Confronto tra le soluzioni ottenute dai diversi valori di $Nstep$ con la soluzione $Nstep = 150$*

	$\Delta N\%$	$\Delta \lambda v \%$
Nstep20	-4,56	-0,26
Nstep50	-1,36	-0,03
Nstep100	-0,34	0,00

Per mantenere l'errore inferiore all'1% è meglio tenere $Nstep \geq 100$.

3.3.2 Influenza di $Tstep$

L'altro parametro di calcolo dello *script* è il numero di suddivisioni dell'intervallo di integrazione $Tstep$.

Si riportano in seguito i risultati della analisi.

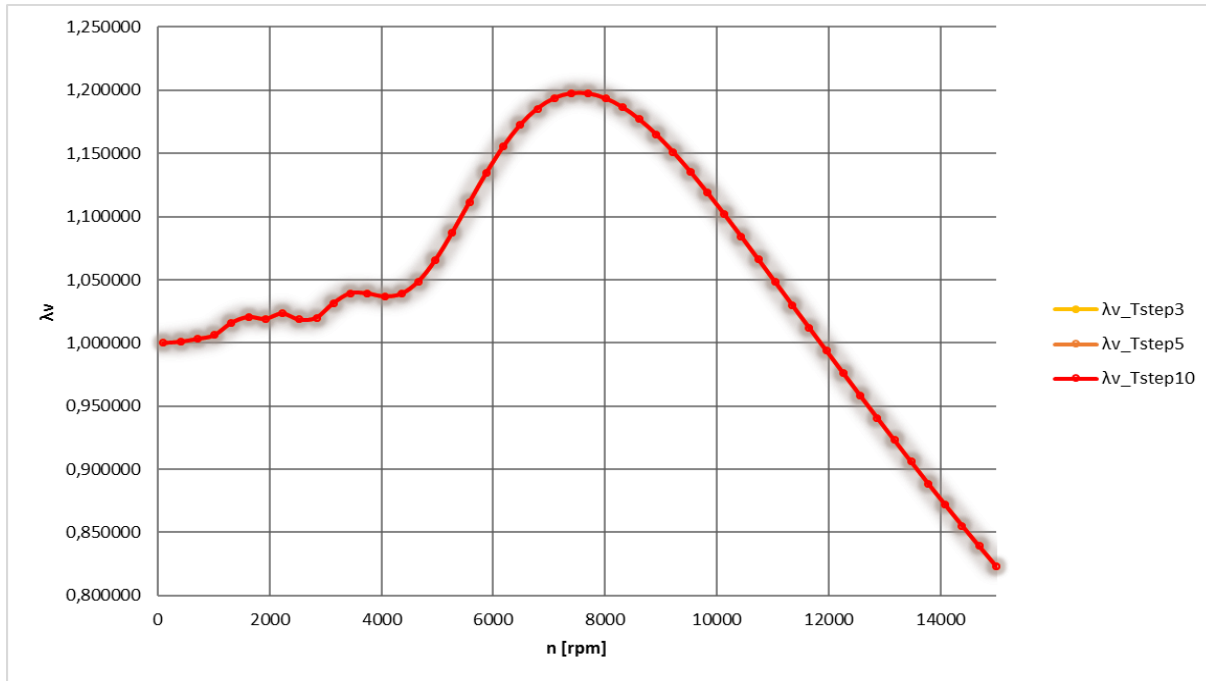


Figura 3.4 Analisi dell'influenza del parametro $Tstep$ sulla soluzione.

Le tre curve relative a $Tstep = 3$, $Tstep = 5$ e $Tstep = 10$ sono sovrapposte.

Questo significa che il numero di intervalli di integrazione non influisce sui valori di λv .

Quindi è sufficiente mantenere $Tstep = 3$ per ottenere un buon risultato minimizzando i tempi di calcolo.

3.4 Confronto tra forzanti differenti

Lo *script* Risonatore_Serie_ODE15s_Vvar.m utilizza la forzante definita al paragrafo §2.1.

Nello *script* Risonatore_Serie_ODE15s_pistone.m si utilizza il moto del pistone come forzante, imponendo uno spostamento alla coordinata x_8 .

In questo paragrafo si confrontano i risultati ottenuti dai due *script*, commentandoli opportunamente.

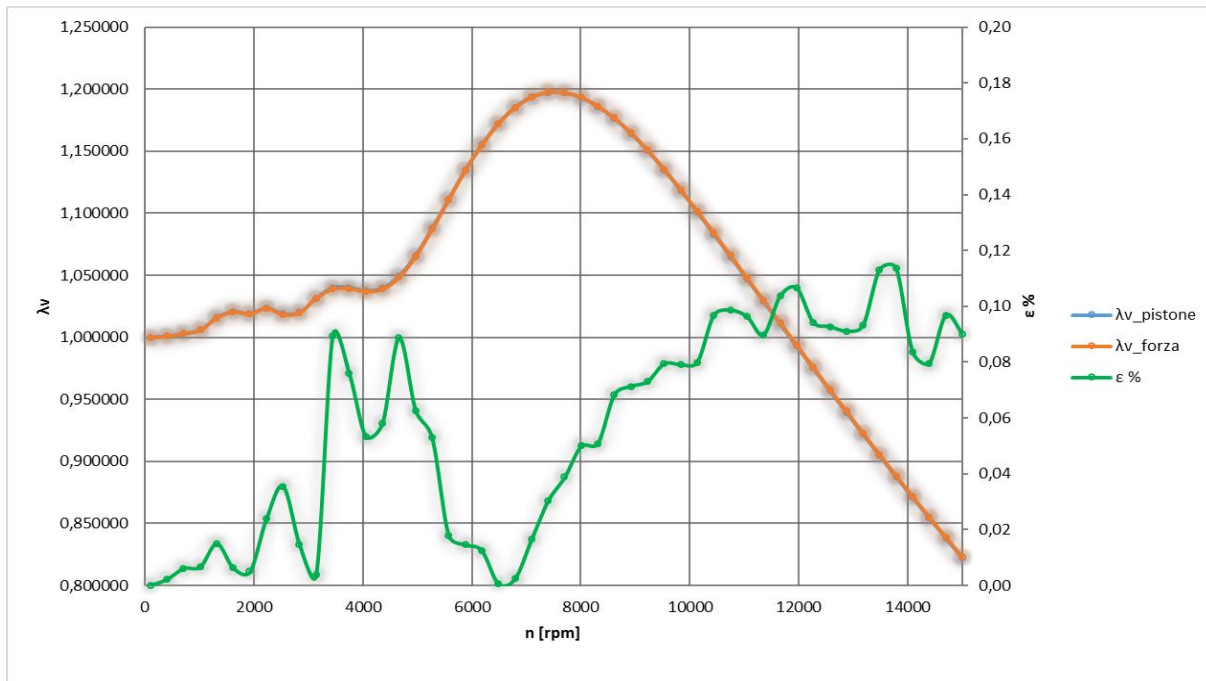


Figura 3.5 Influenza del tipo di forzante su λ_v .

Dal grafico in Figura 3.5 si nota che le due curve sono sovrapposte, con uno scarto massimo che non supera lo 0,12%. Questo significa che le due forzanti danno lo stesso contributo in termini di coefficiente di riempimento a qualunque regime di rotazione.

Per cercare di comprendere più nel dettaglio le differenze, si è monitorata la velocità dell'aria in uscita dal condotto di aspirazione v_4 alla chiusura della valvola di aspirazione.

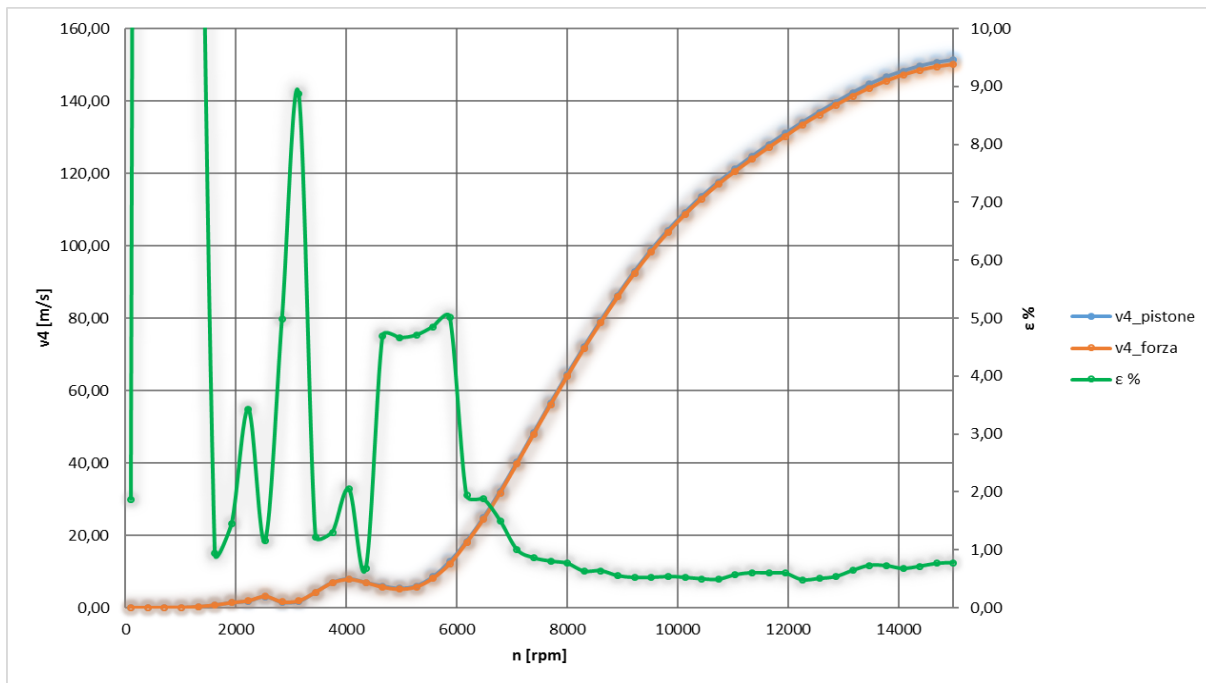


Figura 3.6 *Influenza della forzante sulla velocità dell'aria in uscita dal condotto di aspirazione v_4 alla chiusura della valvola di aspirazione.*

Le forti oscillazioni dello scarto percentuale (curva verde in Figura 3.6) per valori di velocità prossimi allo zero vengono trascurate ($n < 2000 \text{rpm}$).

Si nota che nel range compreso tra i 2000rpm e i 7000rpm la differenza può raggiungere anche il 9%.

Oltre i 7000rpm le due forzanti si comportano analogamente (scarto inferiore all'1%).

Quindi se per il calcolo di λ_v è indifferente la scelta della forzante, non lo è per l'andamento della velocità v_4 nel tempo.

La velocità v_4 nel caso di forzante generata dal moto del pistone è sempre maggiore del caso in cui la forzante sia quella definita al paragrafo §2.1 (classica).

Questo significa che, per ottenere lo stesso λ_v , durante la fase di aspirazione è la forzante classica a generare una velocità nel condotto maggiore di quella generata dal moto del pistone, quindi con un Δv_4 maggiore.

Il fattore che rende la $v_4(t)$ più restia a cambiare nel tempo è la matrice di smorzamento non nulla che si ricava dalla derivazione delle equazioni Lagrangiane nello script `Risonatore_Serie_ODE15s_pistone.m`.

Questi termini smorzanti si oppongono alla variazione di v_4 e nascono in luogo alla velocità di variazione del volume V_4 .

La velocità dell'aria alla chiusura della valvola di aspirazione incide sull'entità delle onde di pressione che si propagano durante le altre tre fasi motore. Di conseguenza influisce anche sul valore del coefficiente di riempimento al ciclo motore successivo.

Questo aspetto riguarda solo lo script `Risonatore_Serie_ODE15s_definitivo.m` in cui è stato implementato il calcolo di più cicli consecutivi.

Per tanto si è optato di mantenere la forzante generata dal moto del pistone.

3.5 Influenza del numero di suddivisioni di un elemento

L'ipotesi fondamentale che sta alla base del modello I.L.E.M. è la variazione lineare della velocità del fluido tra ingresso e uscita di ogni elemento.

Questa è un'ipotesi molto forte che non permette di cogliere la propagazione delle onde di sovrappressione/depressione all'interno di un singolo elemento del sistema.

Si è quindi deciso di aumentare progressivamente la discretizzazione di un corpo e monitorare le pulsazioni naturali dei modi di vibrare.

Di seguito vengono riportati i risultati dell'analisi.

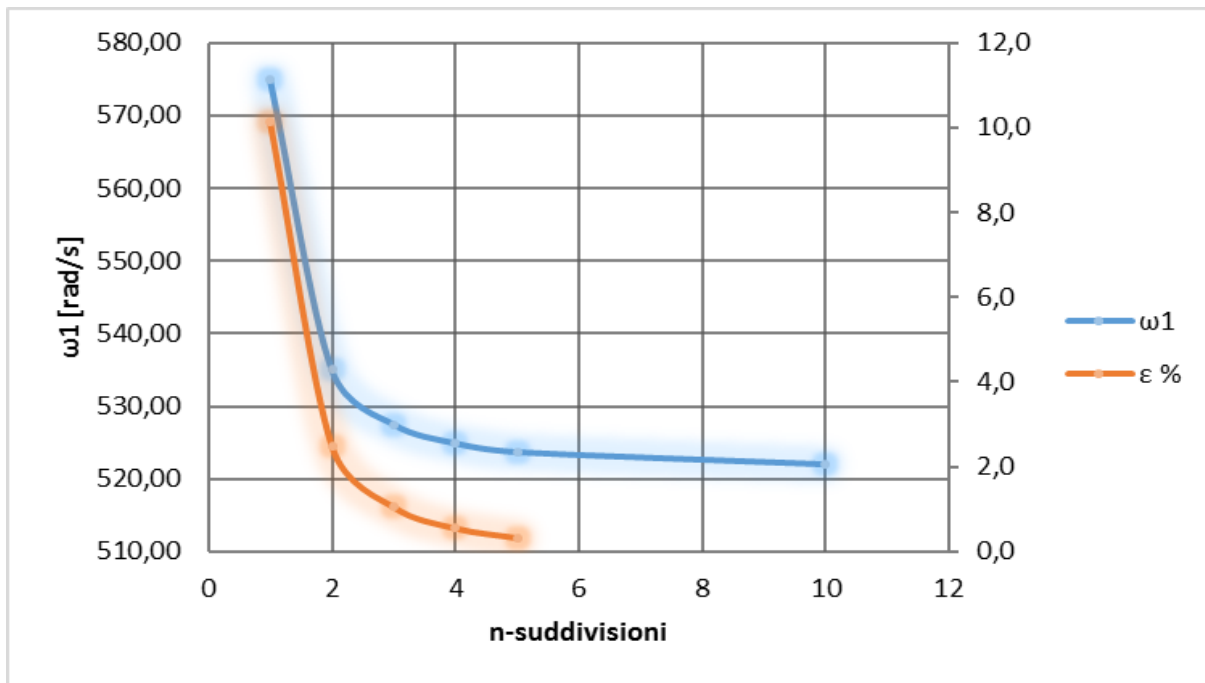


Figura 3.7 *Influenza del numero di suddivisioni di un singolo elemento sulla pulsazione naturale del primo modo di vibrare.*

Dal grafico in Figura 3.7 si nota chiaramente un calo di ω_1 all'aumentare del numero di suddivisioni.

Tabella 3.5 *Variazione di ω_1 all'aumentare del numero di suddivisioni ed analisi di convergenza.*

ω_1	n	ϵ %
575,00	1	10,2
535,00	2	2,5
527,50	3	1,1
524,90	4	0,6
523,70	5	0,3
522,00	10	-

Dai dati riportati in Tabella 3.5 si vede come già a quattro suddivisioni lo scarto rispetto la ω_1 con 10 suddivisioni sia inferiore all'1%.

Per questo motivo nello *script* Risonatore_Serie_ODE15s si è deciso di suddividere *snorkel*, *air-box* e cilindro in 4 parti, mentre il condotto di aspirazioni in 10 parti, in modo da poter modellare con maggior precisione le variazioni di sezione.

3.6 Analisi dello *script* definitivo

Lo *script* Risonatore_Serie_ODE15s_definitivo.m, introducendo il calcolo del coefficiente di riempimento dopo più cicli consecutivi, rimuove la maggior parte delle ipotesi semplificative del modello *I.L.E.M.* classico.

La spiegazione dettagliata e il funzionamento del modello implementato in questo *script* sono già stati trattati al paragrafo §2.5.

In questo paragrafo ne viene studiato il comportamento al variare dei parametri di input.

3.6.1 Convergenza cicli

Prima che il sistema vada a regime, necessita di compiere un certo numero di cicli definito dalla variabile *nCicli*.

In questo paragrafo ci si è concentrati su questo aspetto, in modo da determinare il numero minimo di cicli da compiere per arrivare a convergenza con la soluzione.

Per fare ciò bisogna monitorare lo scostamento percentuale sia del valore di λv che del regime di rotazione del motore a cui si verificano.

Di seguito ne vengono riportati i risultati.

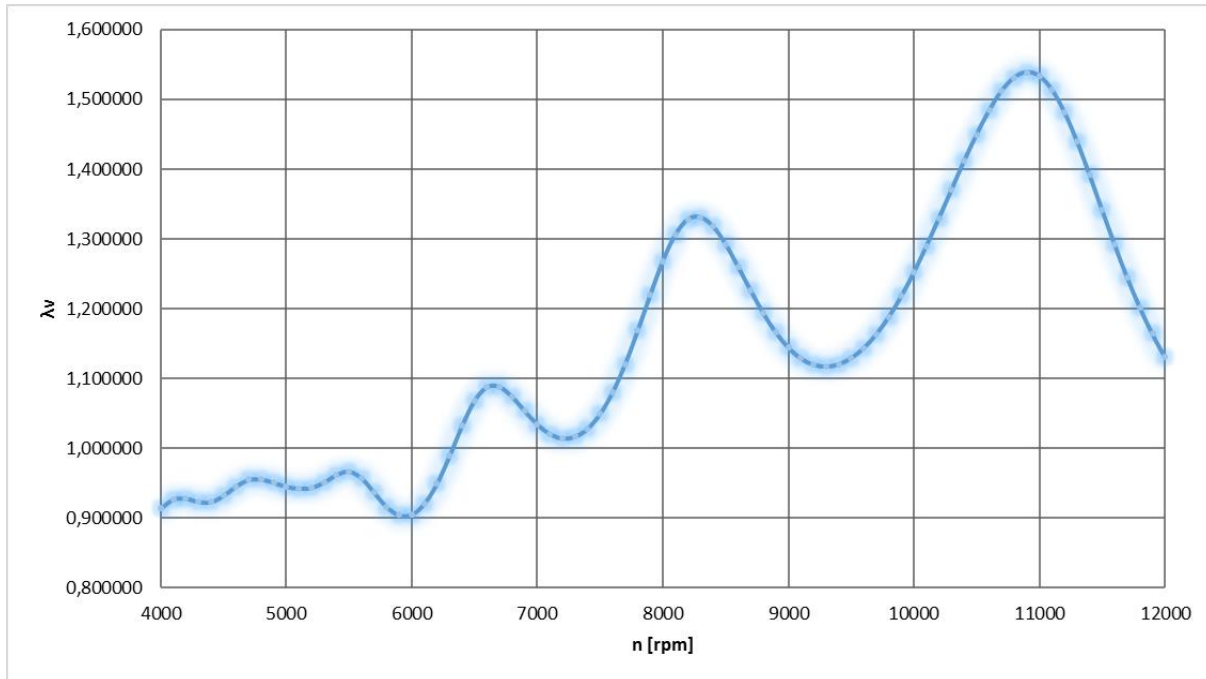


Figura 3.8 Coefficiente di riempimento al variare del regime di rotazione del motore dopo 8 cicli.

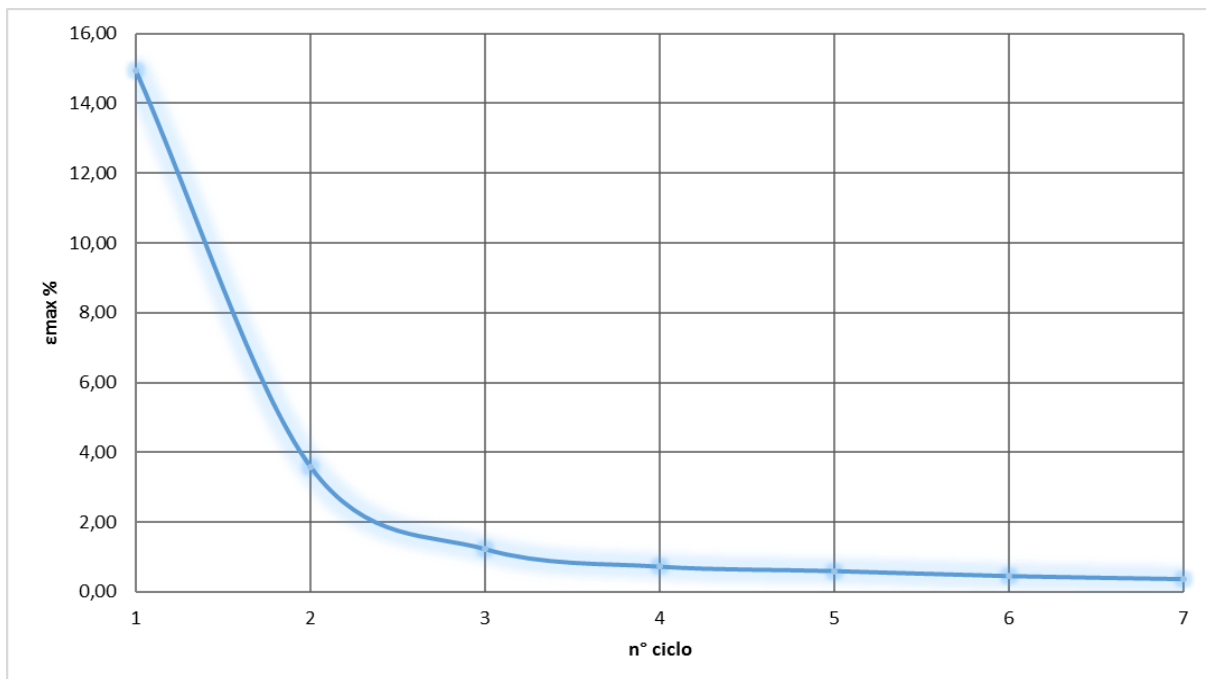


Figura 3.9 Convergenza del coefficiente di riempimento all'aumentare del numero di cicli motore consecutivi.

In Figura 3.8 viene riportata la soluzione che si ottiene dopo 8 cicli motore.

Nel grafico in Figura 3.9 invece si vede come lo scarto massimo, rispetto alla soluzione con 8 cicli consecutivi, scenda sotto l'1% già dopo soli 4 cicli.

Si passa ora allo studio del posizionamento dei picchi.

Tabella 3.6. Posizione dei picchi di lv di 8 cicli consecutivi.

	2° ciclo	3° ciclo	4° ciclo	5° ciclo	6° ciclo	7° ciclo	8° ciclo
	n [rpm]	n [rpm]	n [rpm]	n [rpm]	n [rpm]	n [rpm]	n [rpm]
Picco 1	6700	6700	6700	6700	6600	6600	6700
Picco 2	8300	8300	8300	8300	8300	8300	8300
Picco 3	10800	10900	10900	10900	10900	10900	10900

Come si può notare dalla Tabella 3.6, i regimi di rotazione del motore a cui si verificano i picchi di coefficiente di riempimento rimangono pressoché invariati già a partire dal secondo ciclo.

Si può quindi affermare che quattro cicli consecutivi sono sufficienti per arrivare a convergenza della soluzione.

3.6.2 Influenza di temperatura, pressione e rapporto di smorzamento

Gli ultimi input che rimangono da studiare, prima di passare alle quote relative al sistema di aspirazione, sono la temperatura ambientale, la pressione ambientale e il rapporto di smorzamento scelto per i primi due modi di vibrare.

Temperatura

L'*I.L.E.M.* modificato, non essendo un modello termodinamico, non considera le variazioni di temperatura dell'aria nel sistema di aspirazione.

Quindi c e T_{amb} rimangono costanti sia nel tempo che nello spazio.

Di seguito vengono riportati i risultati dello studio dell'influenza della temperatura sui valori di λ_v .

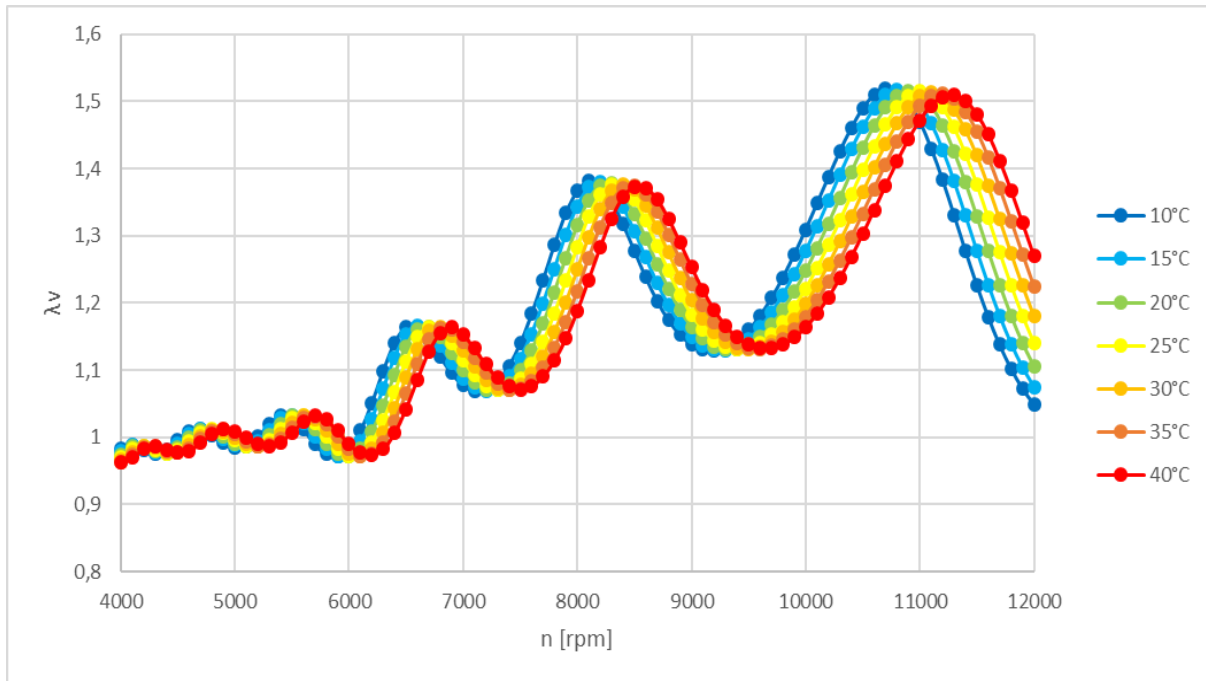


Figura 3.10 *Influenza della temperatura sull'andamento del coefficiente di riempimento al variare del regime di rotazione del motore.*

Dal grafico in Figura 3.10 si nota che la temperatura ha un'influenza notevole sia sull'entità che sul posizionamento dei picchi di λ_v .

Per interpretare meglio i risultati, vengono riportati in seguito le tabelle con i valori relativi ai picchi in Figura 3.10.

Tabella 3.7 *Influenza della temperatura sull'entità dei picchi di λ_v*

T [°C]	λ_v 1	λ_v 2	λ_v 3
10	1,164613	1,380949	1,518653
15	1,166508	1,379823	1,517294
20	1,164629	1,377562	1,515796
25	1,164622	1,376451	1,514427
30	1,164343	1,376424	1,512748
35	1,162920	1,37468	1,511084
40	1,163587	1,373113	1,509437

Dai dati in Tabella 3.7 si nota la tendenza di λ_v a calare di con l'aumento della temperatura.

Questo è dovuto al valore più basso di densità, secondo le leggi (2.47) e (2.48).

Per quanto riguarda lo spostamento della curva verso destra all'aumentare della temperatura, vengono riportati in Tabella 3.8 i risultati delle simulazioni.

Tabella 3.8 *Influenza della temperatura sul posizionamento dei picchi di λv .*

T [°C]	n_1 [rpm]	n_2 [rpm]	n_3 [rpm]
10	6600	8100	10700
15	6600	8200	10800
20	6700	8300	10900
25	6700	8300	11000
30	6800	8400	11100
35	6800	8500	11200
40	6900	8500	11300

La temperatura è un parametro che consente di calcolare la velocità di propagazione delle onde secondo l'equazione (2.47). Con il suo aumento si verifica un aumento anche della velocità del suono c . Questo fenomeno porta ad un'accordatura del sistema a regimi di rotazione più elevati.

In Figura 3.11 viene riportato il grafico dell'influenza della temperatura sui valori di velocità di propagazione delle onde c e della densità dell'aria ρ .

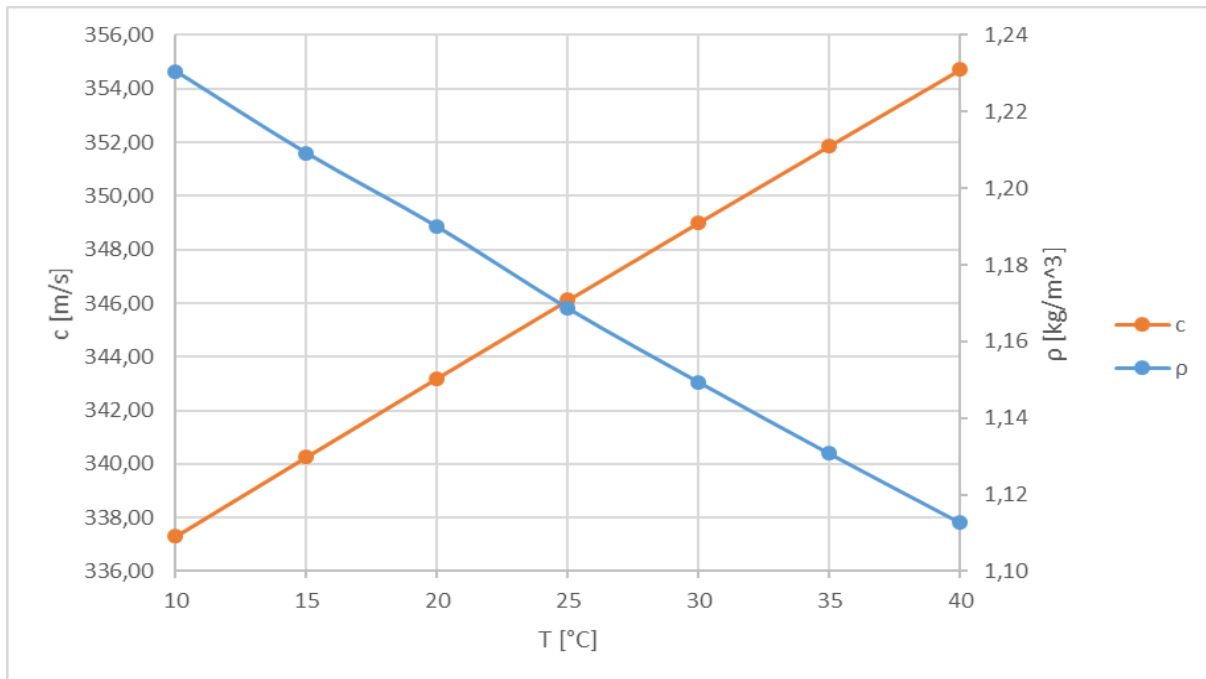


Figura 3.11 *Influenza della temperatura sulla velocità di propagazione delle onde c e sulla densità dell'aria ρ .*

Per un range di temperature ristretto (come quello in Figura 3.11), l'andamento delle due curve è pressoché lineare.

Pressione

La pressione è un altro parametro che influisce sull'andamento del coefficiente di riempimento.

Questa infatti, secondo l'equazione (2.48), varia il valore della densità dell'aria e quindi cambia sia l'inerzia che la rigidità degli elementi massa-molla del sistema.

Di seguito vengono riportati i risultati delle simulazioni.

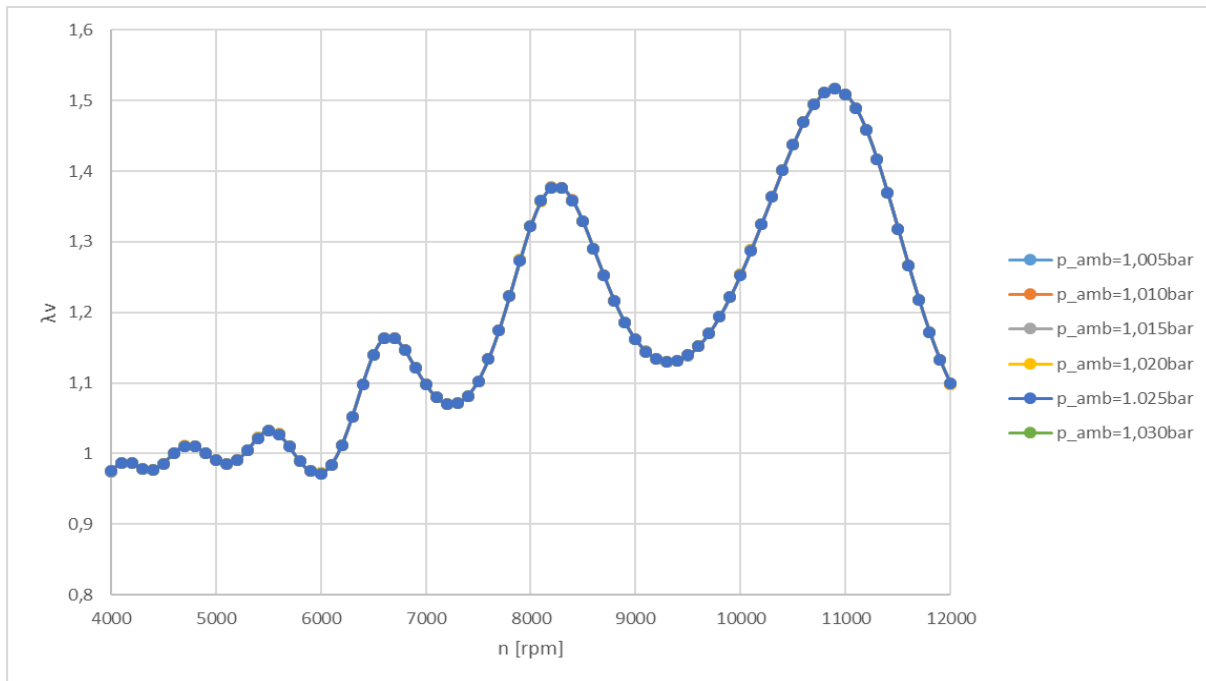


Figura 3.12 *Influenza della pressione sull'andamento del coefficiente di riempimento al variare del regime di rotazione del motore.*

Per un range di valori che va da 1.005bar a 1.030bar le curve sono sovrapposte.

Le pressioni utilizzate nelle simulazioni sono verosimili a quelle di una giornata soleggiata ad Aragon nel periodo autunnale (°).

Ciò significa che la pressione ambientale ha un effetto trascurabile rispetto agli altri parametri in input al sistema.

Rapporto di smorzamento

Un altro parametro fondamentale è il rapporto di smorzamento ζ scelto per i primi due modi di vibrare.

Per un sistema composto da “scatole” vuote come quello in esame, è bene tenere un rapporto di smorzamento $\zeta \approx 0.05$ (°).

Il sistema in esame è molto complesso, quindi questo valore potrebbe discostarsi. Di norma è bene non superare un valore di $\zeta \approx 0.1$ (°).

Si riportano in seguito i risultati delle simulazioni fatte variando il valore del rapporto di smorzamento.

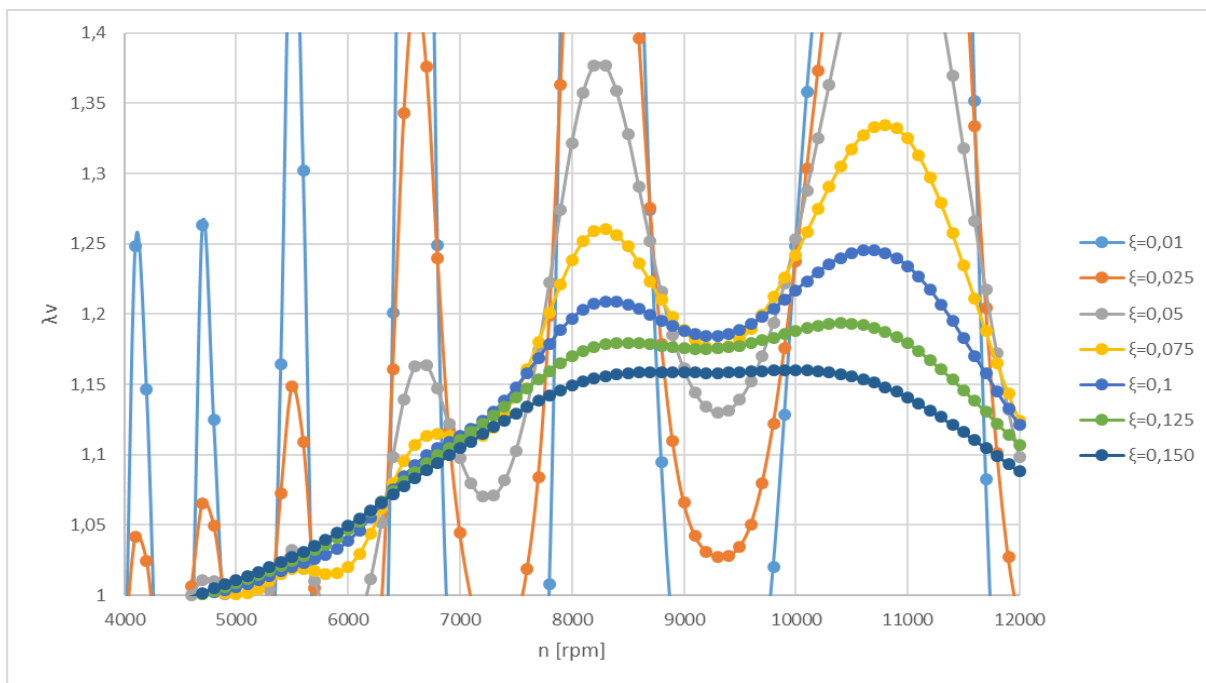


Figura 3.13 *Influenza del rapporto di smorzamento ζ sull'andamento di λv al variare del regime di rotazione del motore.*

Il grafico in Figura 3.13 evidenzia l'importanza di questo parametro.

La curva che più si avvicina ai valori noti in letteratura è quella con $\zeta=0.1$ (²).

Questa “uccide” il primo picco che si registra tra i 6000rpm e i 7000rpm, il quale però ha un'importanza marginale visti gli scopi del sistema di aspirazione in esame. Essendo un motore da competizione è più importante analizzare gli elevati regimi di rotazione del motore.

Per studiare nel dettaglio l'influenza di ζ sul posizionamento dei picchi di λv , si riporta in Tabella 3.9 una sintesi dei risultati ottenuti.

Figura 3.9 Influenza di ζ sul posizionamento dei picchi di λv .

ξ	Picco 1	Picco 2	Picco 3
0,010	6600	8200	11100
0,025	6600	8200	11000
0,050	6700	8200	10900
0,075	6700	8300	10800
0,100	-	8300	10600
0,125	-	8500	10400
0,150	-	8800	10000

All'aumentare del rapporto di smorzamento il primo e il secondo picco tendono a spostarsi verso valori di n più elevati, mentre il terzo picco a valori più bassi.

Effettuare misurazioni di questo parametro su un sistema reale è un'impresa molto difficile. Per mettere a punto il modello MATLAB è necessario avere un modello Lotus o Wave funzionante con cui fare dei confronti.

3.7 Ottimizzazione del sistema di aspirazione

Per ottimizzare il sistema di aspirazione, si è deciso di svolgere due tipi di simulazioni: uno che prevede di analizzare l'influenza delle quote geometriche sul coefficiente di riempimento ad una singola succhiata del pistone e uno che ne valuta l'influenza con più cicli consecutivi.

Ci si è mossi in un intorno dei valori utilizzati nei test di Misano del 12-03-2017. Questa scelta è stata fatta in modo da analizzare quote verosimili per la MotoStudent attuale.

Tutte le simulazioni sono state eseguite con $T_{amb} = 25^{\circ}\text{C}$ e $p_{amb} = 1.02\text{bar}$.

In rosso vengono evidenziati i valori relativi alla configurazione dei **test di Misano**.

3.7.1 Singola aspirazione

Le tre tipologie di analisi condotte sono le seguenti:

- Variazione del volume dell'*air-box* accorciando *Lab*. Viene mantenuta costante la lunghezza $Lab+Lsn$, in modo che sia sempre possibile portare l'aria dalla presa sulla carena alla trombeta;
- Variazione della lunghezza del condotto di aspirazione;
- Variazione della sezione dell'*air-box* mantenendone il volume costante (sempre con $Lab+Lsn$ costante).

Variazione del volume dell'*air-box*

In Tabella 3.10 vengono riportati i valori di input mantenuti costanti durante le simulazioni.

Tabella 3.10 *Dati in input costanti.*

Valori fissi															
R	r [m]	Φ_{pistone} [m]	Φ_{corpo} [m]	Φ_1 [m]	L_3 [m]	L_4 [m]	A_1 [m ²]	A_2 [m ²]	A_3 [m ²]	A_4 [m ²]	V_3 [m ³]	V_4 [m ³]	ζ_1	ζ_2	V_{c1} [m ³]
10,7	0,0275	0,0760	0,0380	0,0455	0,3300	0,0332	0,0033	0,0232	0,0011	0,0045	0,0004	0,0002	0,1000	0,1000	0,00025

I risultati delle simulazioni sono riportati nella Figura 3.14 e nella Tabella 3.11.

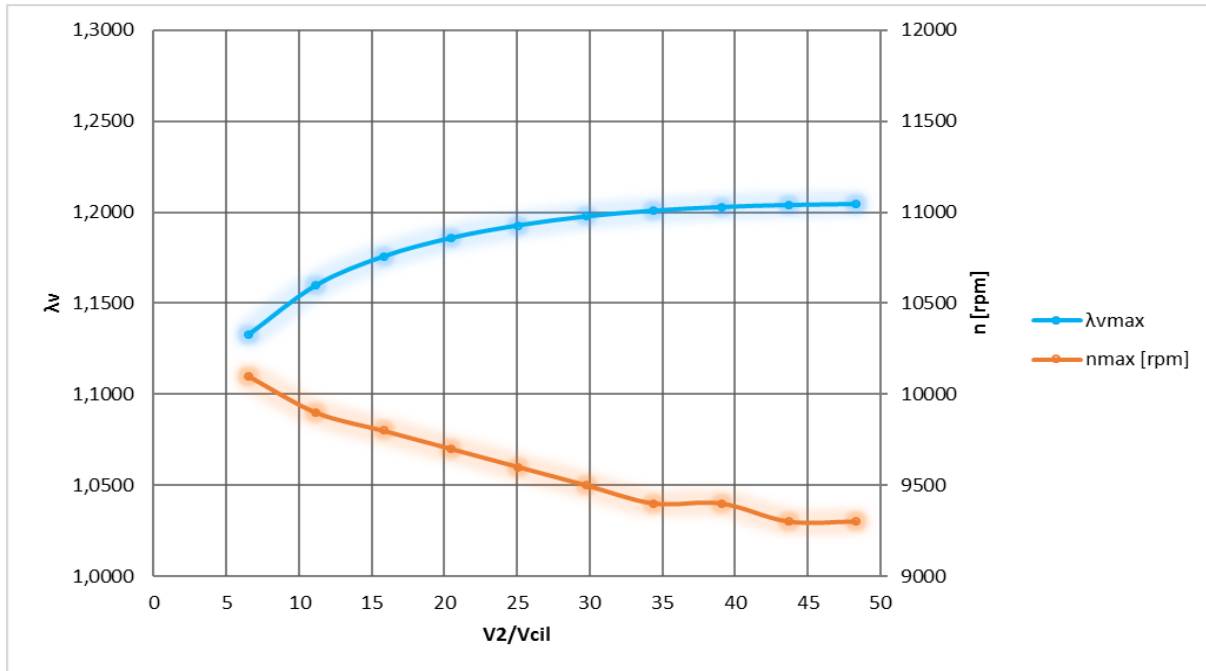


Figura 3.14 Influenza del volume dell'air-box sull'entità e il posizionamento del picco massimo di λ_v .

Tabella 3.11 Dati relativi all'influenza del volume dell'air-box sull'entità e il posizionamento del picco di λ_v .

Valori variabili				Rapporti				Risultati 1 ciclo			
L_1 [m]	L_2 [m]	V_1 [m ³]	V_2 [m ³]	L_3/A_3	L_1/L_3	A_1/A_3	V_2/V_{cil}	$\lambda_{v\ max}$	$n_{\ max}$ [rpm]	$\epsilon_{\ \lambda v\ %}$	$\epsilon_{\ \lambda v_{max}\ %}$
0,3400	0,5200	0,0011	0,0121	290,9758	1,0303	2,8674	48	1,2045	9300	-	-
0,3900	0,4700	0,0013	0,0109	290,9758	1,1818	2,8674	44	1,2040	9300	0,05	-0,05
0,4400	0,4200	0,0014	0,0098	290,9758	1,3333	2,8674	39	1,2029	9400	0,09	-0,14
0,4900	0,3700	0,0016	0,0086	290,9758	1,4848	2,8674	34	1,2009	9400	0,16	-0,30
0,5400	0,3200	0,0018	0,0074	290,9758	1,6364	2,8674	30	1,1977	9500	0,27	-0,57
0,5900	0,2700	0,0019	0,0063	290,9758	1,7879	2,8674	25	1,1928	9600	0,41	-0,97
0,6400	0,2200	0,0021	0,0051	290,9758	1,9394	2,8674	20	1,1858	9700	0,58	-1,55
0,6900	0,1700	0,0022	0,0040	290,9758	2,0909	2,8674	16	1,1756	9800	0,86	-2,40
0,7400	0,1200	0,0024	0,0028	290,9758	2,2424	2,8674	11	1,1598	9900	1,35	-3,72
0,7900	0,0700	0,0026	0,0016	290,9758	2,3939	2,8674	7	1,1325	10100	2,35	-5,98

Lo scarto $\epsilon_{\ \lambda v}$ è calcolato tra i valori di picco $\lambda_{v\ max}$ di due simulazioni successive. Già per un rapporto $V_2/V_{cil} = 16$ si ha uno scarto inferiore all'1%, quindi si può affermare di aver raggiunto un asintoto oltre il quale l'aumento di volume è sproporzionato rispetto l'incremento di λ_v .

Un altro scarto interessante da valutare è $\epsilon_{\ \lambda v_{max}}$, ovvero il confronto con il valore di picco di λ_v di asintoto (quello relativo a $V_2/V_{cil} = 48$). Questo evidenzia che per rapporti V_2/V_{cil} inferiori a 11 si ha un calo che supera il 4%.

Quindi è bene non scendere mai a volumi dell'*air-box* inferiori a dieci volte la cilindrata, perché le perdite di potenza sarebbero inaccettabili.

Questo è un valore che nella pratica le officine consigliano di garantire.

In conclusione è bene avere l'*air-box* più grande possibile compatibilmente con gli ingombri, anche se superato il rapporto $V_2/V_{cil} = 16$ il vantaggio è molto contenuto.

Variatione della lunghezza del condotto di aspirazione

La lunghezza del condotto di aspirazione è fondamentale per l'accordatura del sistema (vedi paragrafo §1.6).

Questa è la quota di maggior influenza, viene quindi esteso lo studio al caso di più cicli consecutivi al paragrafo §.

Tabella 3.12 vengono riportati i valori di input mantenuti costanti durante le simulazioni.

Tabella 3.12 *Dati in input costanti.*

Valori fissi											
L_1 [m]	L_2 [m]	L_4 [m]	A_1 [m ²]	A_2 [m²]	A_3 [m ²]	A_4 [m ²]	V_1 [m ³]	V_2 [m ³]	V_4 [m ³]	ζ_1	ζ_2
0,4900	0,3700	0,0332	0,0033	0,0232	0,0011	0,0045	0,0016	0,0086	0,0002	0,1000	0,1000

I risultati delle simulazioni sono riportati nella Figura 3.15 e nella Tabella 3.13.

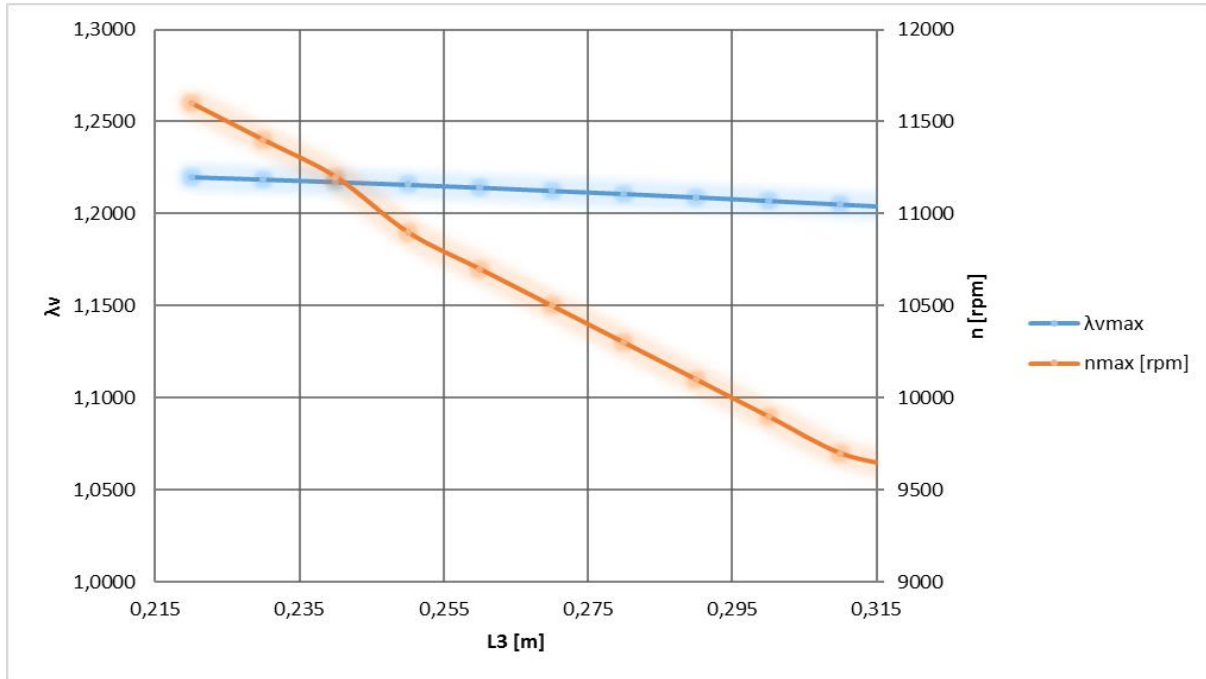


Figura 3.15 Influenza della lunghezza del condotto di aspirazione sull'entità e il posizionamento del picco massimo di λv .

Tabella 3.13 Dati relativi all'influenza della lunghezza del condotto di aspirazione sull'entità e il posizionamento del picco di λv .

Valori variabili		Rapporti				Risultati 1 ciclo	
L_3 [m]	V_3 [m ³]	L_3/A_3	L_1/L_3	A_1/A_3	V_2/V_4	λv_{max}	n_{max} [rpm]
0,350	0,0004	308,6107	1,4000	2,8674	57,1523	1,1966	9100
0,340	0,0004	299,7932	1,4412	2,8674	57,1523	1,1987	9300
0,330	0,0004	290,9758	1,4848	2,8674	57,1523	1,2009	9400
0,320	0,0004	282,1583	1,5313	2,8674	57,1523	1,2030	9600
0,310	0,0004	273,3409	1,5806	2,8674	57,1523	1,2050	9700
0,300	0,0003	264,5235	1,6333	2,8674	57,1523	1,2071	9900
0,290	0,0003	255,7060	1,6897	2,8674	57,1523	1,2090	10100
0,280	0,0003	246,8886	1,7500	2,8674	57,1523	1,2108	10300
0,270	0,0003	238,0711	1,8148	2,8674	57,1523	1,2125	10500
0,260	0,0003	229,2537	1,8846	2,8674	57,1523	1,2143	10700
0,250	0,0003	220,4362	1,9600	2,8674	57,1523	1,2159	10900
0,240	0,0003	211,6188	2,0417	2,8674	57,1523	1,2174	11200
0,230	0,0003	202,8013	2,1304	2,8674	57,1523	1,2188	11400
0,220	0,0002	193,9839	2,2273	2,8674	57,1523	1,2200	11600

La lunghezza del condotto di aspirazione non influisce molto sull'entità del picco di λv . Tuttavia si nota un lieve miglioramento accorciandolo.

L'effetto principale lo si ha sul posizionamento del picco, infatti accorciandolo si sposta il picco a regimi di rotazione più alti, perfettamente in accordo con la teoria ⁽²⁾.

Essendo Aragon una pista molto grande per la tipologia di moto, conviene accordare il sistema ad elevati regimi di rotazione, facendo attenzione che il limitatore elettronico è impostato a 12000rpm.

Per accordarlo tra 10500rpm e 11000rpm bisogna adottare una lunghezza del condotto tra i 250mm e i 270mm secondo lo *script*.

Secondo la Tabella 1.1 la lunghezza per accordare il sistema al 3° picco a quel regime è tra i 280mm e i 295mm.

Lo scostamento sul regime di rotazione si aggira intorno al 7-8%, accettabile vista la semplicità dello *script* e delle formule teoriche che non considerano la presenza dell'*air-box* ⁽²⁾.

Prima di tirare le conclusioni bisogna valutare il comportamento dopo 4 cicli consecutivi (vedi paragrafo §3.7.2).

Variazione della sezione dell'*air-box*

Mantenendo il volume dell'*air-box* costante è stata abbassata l'altezza della sezione trasversale.

Con h si indica l'altezza e con w la larghezza della sezione.

In Tabella 3.14 vengono riportati i valori di input mantenuti costanti durante le simulazioni.

Tabella 3.14 Dati in input costanti.

Valori fissi										
w [m]	L_3 [m]	L_4 [m]	A_1 [m ²]	A_3 [m ²]	A_4 [m ²]	V_2 [m ³]	V_3 [m ³]	V_4 [m ³]	ζ_1	ζ_2
0,1800	0,3300	0,0332	0,0033	0,0011	0,0045	0,0086	0,0003	0,0002	0,1000	0,1000

I risultati delle simulazioni sono riportati nella Figura 3.15 e nella Tabella 3.13.

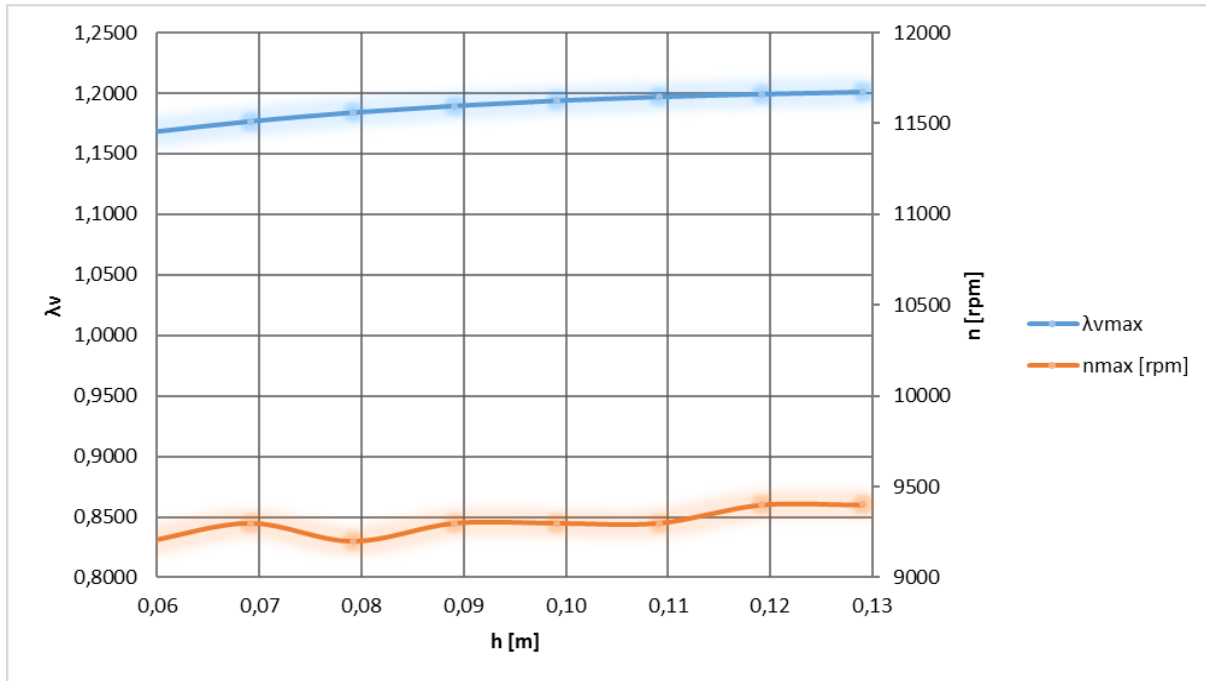


Figura 3.16 Influenza della sezione trasversale dell'air-box sull'entità e il posizionamento del picco massimo di λv .

Tabella 3.15 Dati relativi all'influenza della sezione trasversale dell'air-box sull'entità e il posizionamento del picco di λv .

Valori variabili					Rapporti				Risultati 1 ciclo	
h [m]	A_2 [m ²]	L_1 [m]	L_2 [m]	V_1 [m ³]	L_3/A_3	L_1/L_3	A_1/A_3	V_2/V_4	λv_{max}	n_{max} [rpm]
0,13	0,0232432	0,4900	0,3700	0,0016	290,9758	1,4848	2,8674	57,1523	1,2009	9400
0,12	0,0214432	0,4589	0,4011	0,0015	290,9758	1,3907	2,8674	57,1523	1,1992	9400
0,11	0,0196432	0,4222	0,4378	0,0014	290,9758	1,2794	2,8674	57,1523	1,1969	9300
0,10	0,0178432	0,3780	0,4820	0,0012	290,9758	1,1455	2,8674	57,1523	1,1938	9300
0,09	0,0160432	0,3239	0,5361	0,0011	290,9758	0,9817	2,8674	57,1523	1,1895	9300
0,08	0,0142432	0,2562	0,6038	0,0008	290,9758	0,7764	2,8674	57,1523	1,1840	9200
0,07	0,0124432	0,1689	0,6911	0,0005	290,9758	0,5117	2,8674	57,1523	1,1767	9300
0,06	0,0106432	0,0520	0,8080	0,0002	290,9758	0,1575	2,8674	57,1523	1,1675	9200

L'influenza della sezione trasversale dell'air-box è molto piccola sia sull'entità del picco massimo che sul posizionamento.

C'è comunque un lieve miglioramento per h crescente.

3.7.2 Cicli consecutivi

Il calcolo di più cicli consecutivi è in grado di cogliere l'effetto delle onde di pressione che si propagano nel sistema quando la valvola di aspirazione è chiusa.

Visti i risultati ottenuti al paragrafo §3.7.1, è stato deciso di valutare solo l'influenza della lunghezza del condotto di aspirazione.

In Tabella 3.16 vengono riportati i valori di input mantenuti costanti durante le simulazioni.

Tabella 3.16 Dati in input costanti.

Valori fissi											
L_1 [m]	L_2 [m]	L_4 [m]	A_1 [m ²]	A_2 [m ²]	A_3 [m ²]	A_4 [m ²]	V_1 [m ³]	V_2 [m ³]	V_4 [m ³]	ζ_1	ζ_2
0,4900	0,3700	0,0332	0,0033	0,0232	0,0011	0,0045	0,0016	0,0086	0,0002	0,1000	0,1000

I risultati delle simulazioni sono riportati nella Figura 3.17 e nella Tabella 3.17.

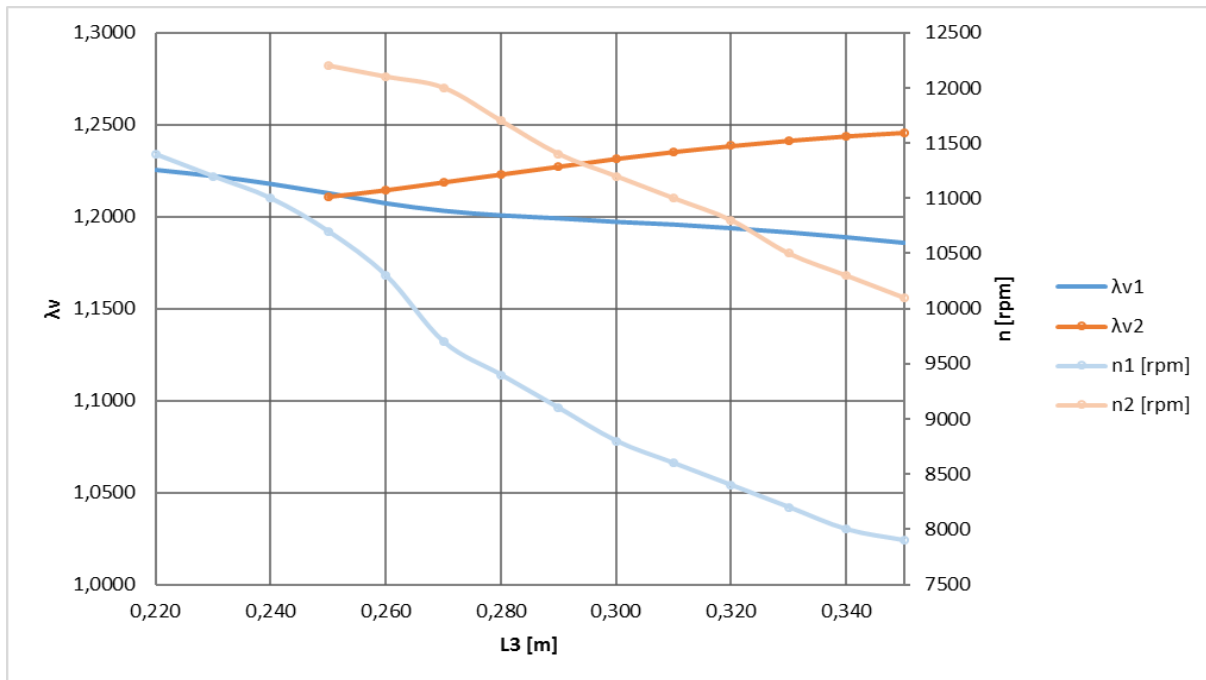


Figura 3.17 Influenza della lunghezza del condotto di aspirazione sull'entità e il posizionamento del picco massimo di λ_v .

Tabella 3.17 Dati relativi all'influenza della sezione trasversale dell'*air-box* sull'entità e il posizionamento del picco di λv .

Valori variabili		Rapporti				Risultati 4° ciclo			
L_3 [m]	V_3 [m ³]	L_3/A_3	L_1/L_3	A_1/A_3	V_2/V_4	λv_1	n_1 [rpm]	λv_2	n_2 [rpm]
0,350	0,0004	308,6107	1,4000	2,8674	57,1523	1,1855	7900	1,2458	10100
0,340	0,0004	299,7932	1,4412	2,8674	57,1523	1,1886	8000	1,2439	10300
0,330	0,0004	290,9758	1,4848	2,8674	57,1523	1,1913	8200	1,2415	10500
0,320	0,0004	282,1583	1,5313	2,8674	57,1523	1,1936	8400	1,2386	10800
0,310	0,0004	273,3409	1,5806	2,8674	57,1523	1,1956	8600	1,2354	11000
0,300	0,0003	264,5235	1,6333	2,8674	57,1523	1,1971	8800	1,2316	11200
0,290	0,0003	255,7060	1,6897	2,8674	57,1523	1,1990	9100	1,2274	11400
0,280	0,0003	246,8886	1,7500	2,8674	57,1523	1,2006	9400	1,2231	11700
0,270	0,0003	238,0711	1,8148	2,8674	57,1523	1,2031	9700	1,2188	12000
0,260	0,0003	229,2537	1,8846	2,8674	57,1523	1,2072	10300	1,2145	12100
0,250	0,0003	220,4362	1,9600	2,8674	57,1523	1,2127	10700	1,2109	12200
0,240	0,0003	211,6188	2,0417	2,8674	57,1523	1,2178	11000	-	-
0,230	0,0003	202,8013	2,1304	2,8674	57,1523	1,2221	11200	-	-
0,220	0,0002	193,9839	2,2273	2,8674	57,1523	1,2255	11400	-	-

Entrambe i picchi si accordano a regimi di rotazione più elevati man mano che si accorcia il condotto di aspirazione, in accordo con la teoria (²).

Il secondo picco λv_2 si registra a regimi troppo elevati rispetto a quelli in Tabella 1.1.

Questo porta a pensare che non sia generato dall'accordatura al 3° picco del condotto di aspirazione (vedi paragrafo §1.6) ma da altri fenomeni di risonanza generati dall'*air-box*.

Il picco da osservare è per tanto il 1°.

Per accordare il sistema tra 10500rpm e 11000rpm bisogna adottare una lunghezza del condotto tra i 240mm e i 260mm secondo lo *script*.

Secondo la Tabella 1.1 la lunghezza per accordare il sistema al 3° picco a quel regime è tra i 280mm e i 295mm.

Lo scostamento sul regime di rotazione si aggira intorno al 11%, accettabile vista la semplicità dello *script* e delle formule teoriche che non considerano la presenza dell'*air-box* (²).

CONCLUSIONI

Lo *script* definitivo è in grado di calcolare l'andamento del coefficiente di riempimento al variare del regime di rotazione del motore dopo più cicli consecutivi. Il modello implementato è stato sviluppato sulla base dell'*I.L.E.M.* rimuovendo numerose ipotesi semplificative ed apportando notevoli migliorie.

Il modello è dotato di più corpi, in modo cogliere la propagazione delle onde all'interno del sistema, con la possibilità di modellare il condotto di aspirazione con sezione variabile.

Il volume del cilindro non viene più mantenuto costante ma varia con il moto del pistone, il quale genera la forzante del sistema.

Grazie allo *script* è possibile studiare il comportamento del sistema al variare delle quote caratteristiche e delle condizioni ambientali.

Dalle simulazioni si è scoperto che l'aumento del volume dell'*air-box* influisce positivamente sull'entità del picco massimo di sovrappressione. Tuttavia oltre un rapporto $V_{air-box}/V_{cil} = 16$ si raggiunge un asintoto.

Per contro, scendere al di sotto di un rapporto $V_{air-box}/V_{cil} = 10$, porta ad una perdita superiore al 4% in termini di λ_{vmax} , che si traduce in una notevole perdita di potenza erogata del motore.

La quota che influisce maggiormente sull'accordatura del sistema è la lunghezza del condotto di aspirazione.

Accorciandolo si sposta il picco di λ_v a regimi più elevati, in accordo con la teoria ⁽²⁾.

A parità di lunghezza del condotto, il regime di rotazione a cui si accorda il sistema è inferiore del 11% circa rispetto a quello in Tabella 1.1 (formule teoriche ⁽²⁾).

Questo scostamento può essere dovuto in parte alla semplicità dello *script*, che non considera gli scambi termici, la combustione, le leggi d'alzata delle valvole, i coefficienti di efflusso, l'accordatura dello scarico e il *back-flow* dei gas di scarico. D'altro canto anche la formula (1.29), che porta alla Tabella 1.1, si basa su forti ipotesi semplificative ⁽²⁾.

Per mettere a punto correttamente il modello MATLAB, bisogna confrontarne i risultati con quelli ottenuti da un modello Lotus o Wave validato da prove al banco.

Un altro parametro che influisce molto su λ_v è la temperatura ambientale.

All'aumentare di questa i picchi si registrano a regimi di rotazione più elevati (vedi Figura 3.10).

È quindi opportuno progettare un *air-box* facilmente accessibile all'interno, per poter comodamente sostituire la trombeta di aspirazione al variare delle condizioni ambientali.

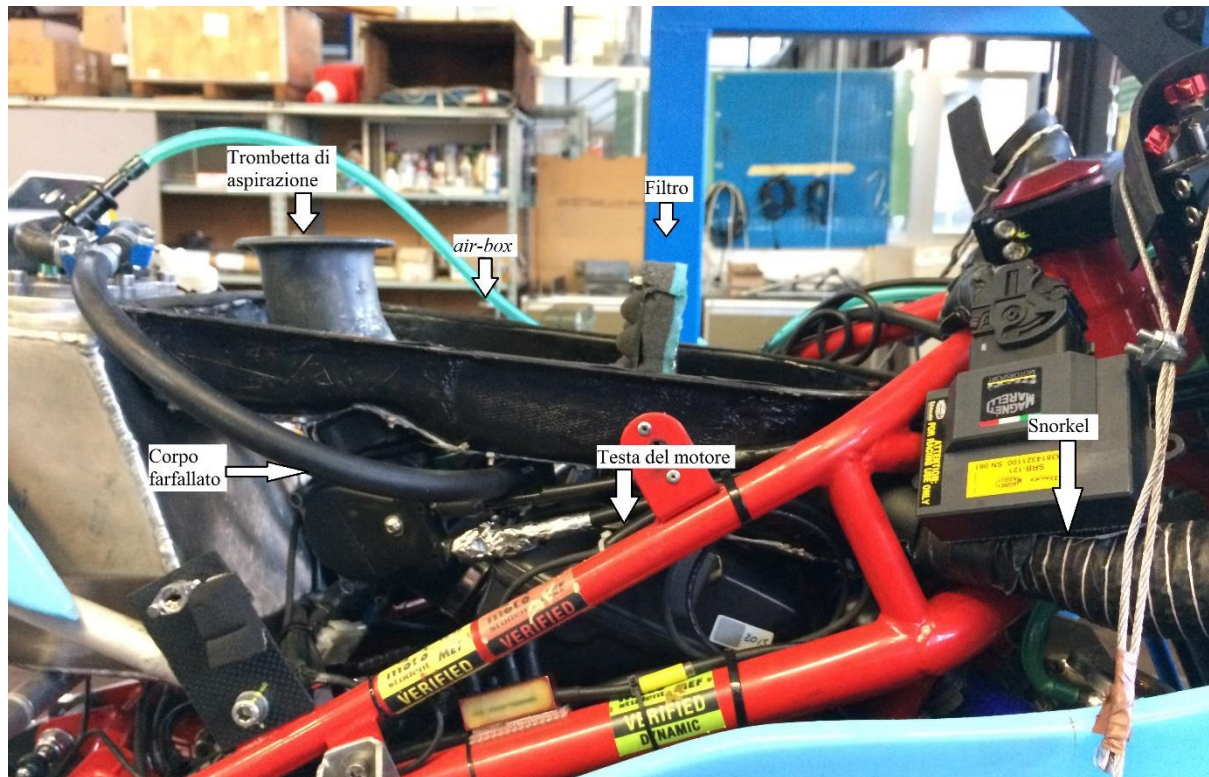


Figura 4.1 Sistema di aspirazione attualmente installato.

Attualmente l'*air-box* è facilmente accessibile in quanto coperto da una sola carena, agganciata al telato da 4 sganci rapidi *Skybolt*.

Accedere al suo interno è più laborioso, in quanto diviso in due metà chiuse da 6 viti a brugola M3.

L'operazione di sostituzione della trombeta risulta ancora più difficile. Visto che in parte esce dall'*air-box* per agganciarsi al corpo farfallato, è necessario sigillarla con del silicone.

Per risolvere questi problemi, bisogna progettare un *air-box* che abbia il foro d'ingresso direttamente appoggiato al corpo farfallato e non come in Figura 4.1.

In questo modo la trombeta sta completamente all'interno e si potrebbe sostituire senza rimuovere altri componenti.

Installando una guarnizione in gomma si sigilla l'*air-box* al corpo farfallato, evitando l'utilizzo del silicone.

Avendo la trombetta interna si ha maggiore libertà sulla scelta della lunghezza.

I risultati ottenuti dalle simulazioni riassunte in Figura 3.17 e in Tabella 3.17, portano la lunghezza totale del condotto di aspirazione a 240-260mm. Al momento una quota simile non permetterebbe al boccaglio della trombetta di entrare in *air-box*.

Questa modifica consentirebbe di accordare in maniera ottimale il motore a 10500-11000rpm.

Un'ulteriore miglioria da apportare al sistema è quella di rendere il condotto di aspirazione rettilineo.

In questo modo si riducono le perdite di carico, uniformando il flusso d'aria fino al cilindro.

Per poter installare un *air-box* che si agganci direttamente al corpo farfallato, con condotto di aspirazione rettilineo, è necessario arretrare il serbatoio al fine di recuperare spazio.

Anche gli *snorkels* vanno aggiornati perché hanno brusche curvature e pessima finitura superficiale interna.

Per la prossima edizione si potrebbe progettare un telaio con canotto di sterzo forato come quello in Figura 4.2.

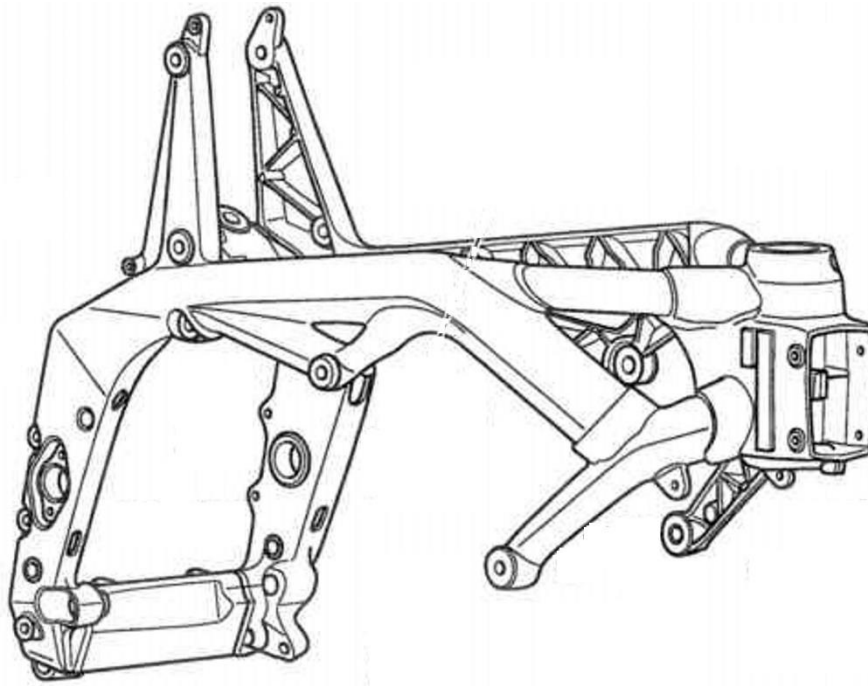


Figura 4.2 Telaio Triumph Daytona 675.

In questo modo si avrebbe un condotto rettilineo che porta l'aria dalla presa anteriore fino all'*air-box*.

Così facendo si può collocare la presa d'aria al centro della carenatura, in modo da sfruttare il punto di massima pressione.

Riassumendo, lo *script* implementato è utile per studiare il comportamento di un sistema di aspirazione al variare delle quote caratteristiche e delle condizioni ambientali.

È stato in grado di evidenziare quali sono i parametri più influenti e dare un range di valori entro i quali ricade la soluzione ottima.

In seguito sono state formulate delle migliorie da apportare al sistema di aspirazione che verranno adottate nella prossima edizione della MotoStudent.

APPENDICE

Risonatore in parallelo

L'idea di porre un volume di risonanza, in parallelo all'*air-box*, potrebbe portare dei vantaggi in termini di coefficiente di riempimento (vedi Figura 5.1).

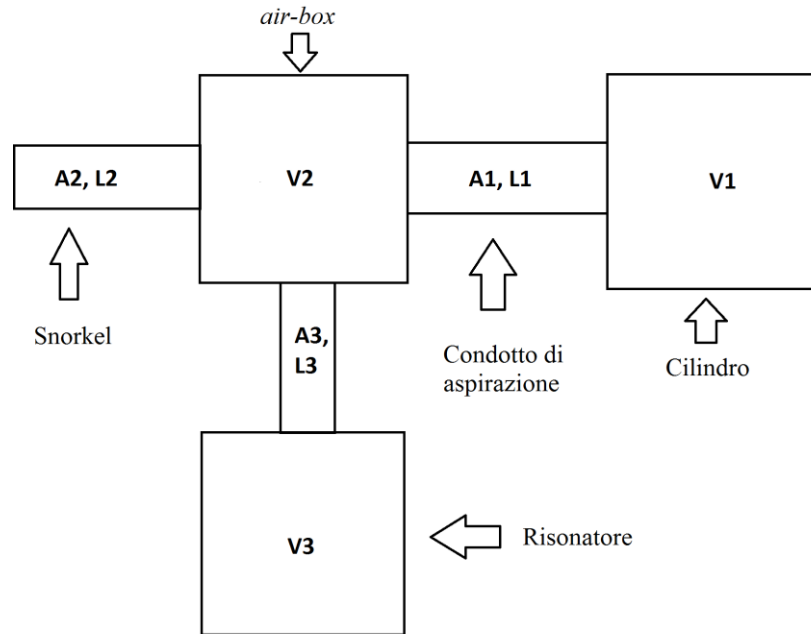


Figura 5.1 Schema di sistema di aspirazione dotato di risonatore posto in parallelo all'*air-box*.

Anche in questo caso sono stati sviluppati i modelli *S.L.E.M.* ed *I.L.E.M.* classici.

Con MAPLE sono state ricavate le equazioni di implementare in MATLAB.

L'equazione di continuità per l'*air-box* impone che la portata volumetrica in ingresso (*snorkel*) sia pari alla somma della portata volumetrica in uscita verso il risonatore e quella in uscita verso il condotto di aspirazione.

Di seguito vengono riportati i risultati del confronto tra le soluzioni ottenute con il modello *S.L.E.M.* (Risonatore_Parallelo_3gdl_SLEM.m) ed *I.L.E.M.* (Risonatore_Parallelo_5gdl_ILEM_Cdiag.m).

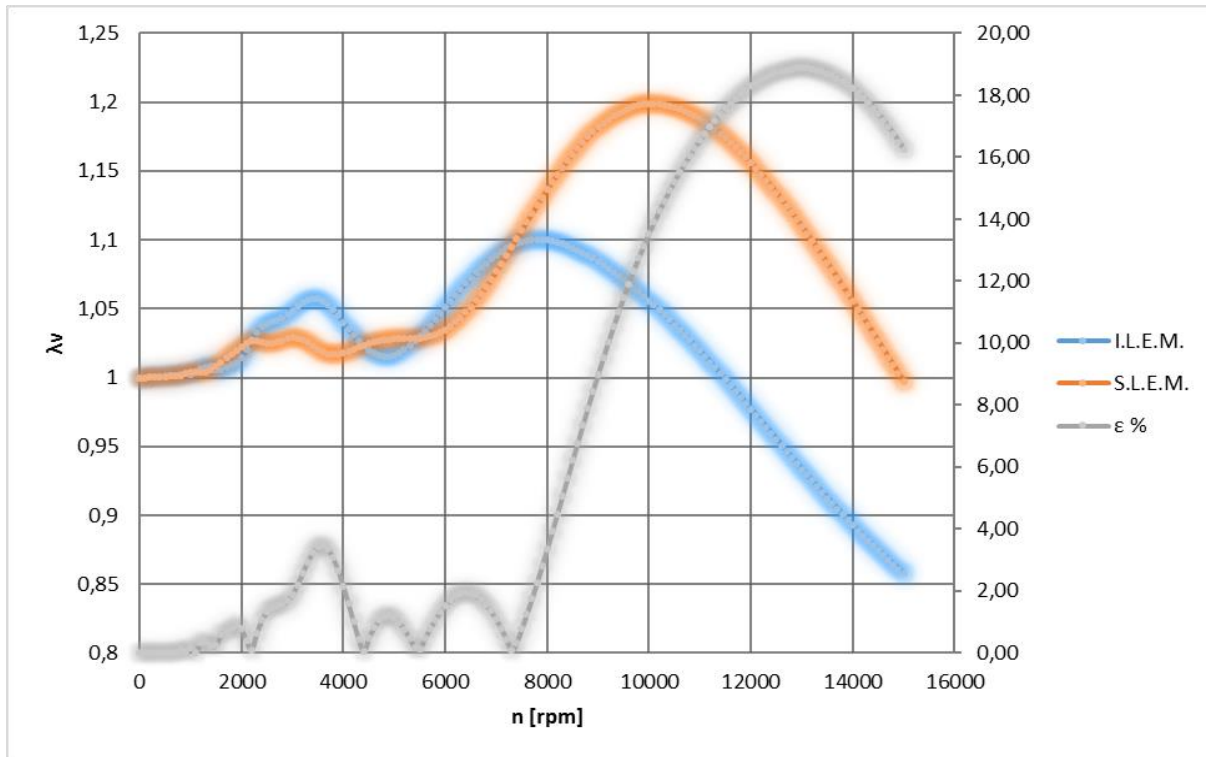


Figura 5.2 Confronto tra modelli S.L.E.M. ed I.L.E.M. per sistema di aspirazione dotato di risonatore il parallelo.

Come si può notare in Figura 5.2, anche nel caso di risonatore in parallelo, il modello S.L.E.M. si scosta molto dal modello I.L.E.M. (scostamento massimo del 19% per elevati regimi di rotazione).

È interessante vedere un confronto tra gli *script* Risonatore_Serie_4gdl_Cdiag.m e Risonatore_Parallelo_5gdl_ILEM_Cdiag.m.

Dalla Figura 5.3 si nota come, un risonatore posto in parallelo all'*air-box*, tenda a spalmare il picco di λ_v su un range di regime di rotazione più ampio, riducendone l'entità di circa l'8%.

Questo può tornare utile in piste in cui ci siano curve strette (dove serve coppia ai bassi regimi in uscita) seguite da lunghi rettilinei (in cui serve potenza ad elevati regimi di rotazione).

Il risonatore utilizzato per la simulazione ha dimensioni 10 x 10 x 10cm con condotto di lunghezza 10cm e sezione di 10mm².

Sarebbe opportuno sviluppare il modello I.L.E.M. modificato per questo tipo di sistemi, in maniera analoga a quanto fatto per il sistema con *air-box* classico.

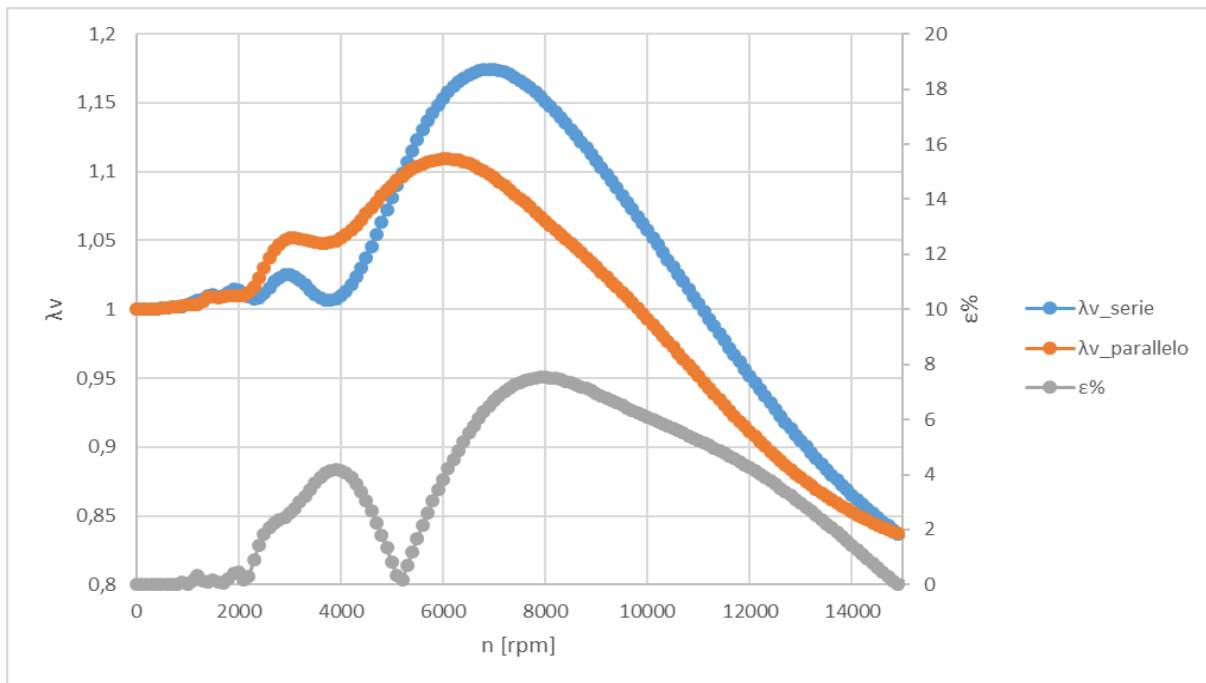


Figura 5.3 Confronto tra *air-box* classico ed *air-box* con risonatore in parallelo.

Quello attuale considera il volume del cilindro fisso, la forzante direttamente applicata alla sezione di sbocco del condotto di aspirazione, apertura e chiusura istantanea della valvola di aspirazione rispettivamente al PMS e PMI ed è in grado di simulare una singola aspirazione.

Inoltre non si ha alcun controllo sulla posizione del condotto che porta al risonatore. Si sa che è in parallelo all'*air-box* perché legati dall'equazione di continuità ma non dove sia collocato con precisione.

Dividendo l'*air-box* in un numero maggiore di parti è possibile ridurre l'incertezza sulla posizione ed ottenere un risultato più accurato anche dal punto di vista della propagazione delle onde.

Sarebbe interessante studiare l'influenza del volume del risonatore e della lunghezza, il posizionamento e la sezione di passaggio del condotto di collegamento.

Nomenclatura

A_b	=	Area del boccaglio della trombetta (m ²);
A_c	=	Area trasversale del condotto di aspirazione (m ²);
A_{mt}	=	Area media della trombetta (m ²);
A_t	=	Area trasversale allo sbocco della trombetta (m ²);
A_{TRASV}	=	Area trasversale (m ²);
c	=	Velocità del suono (m/s);
[C]	=	Matrice di smorzamento;
k	=	Rapporto tratto_cilindrico/lunghezza_totale del condotto di aspirazione;
[K]	=	Matrice di rigidezza;
L	=	Lunghezza totale del condotto di aspirazione (m);
[M]	=	Matrice di massa;
n	=	Regime di rotazione del motore (rpm);
S	=	Superficie pistone (m ²);
u	=	Velocità media del pistone (m/s);
u_{max}	=	Velocità massima del pistone (m/s);
u_c	=	Velocità massima del fluido nel condotto di aspirazione (m/s);
u_t	=	Velocità massima del fluido nella trombetta (m/s);
v	=	Velocità media del fluido (m/s);
z	=	Picco di accordatura.

Lettere greche

$\Delta\theta^\circ$ = Angolo di rotazione della manovella (deg);

λ_v = Coefficiente di riempimento;

η_v = Rendimento volumetrico;

Acronimi

EC (o *EVC*) = *Exhaust (Valve) Close*, chiusura valvola di scarico;

EO (o *EVO*) = *Exhaust (Valve) Open*, apertura valvola di scarico;

IC (o *IVC*) = *Injection (Valve) Close*, chiusura valvola di aspirazione;

IO (o *IVO*) = *Injection (Valve) Open*, apertura valvola di aspirazione;

I.L.E.M. = *Improved Lumped Element Model*;

S.L.E.M. = *Simple Lumped Element Model*;

PMI = Punto Morto Inferiore → (*BDC, Bottom Dead Center*);

PMS = Punto Morto Superiore → (*TDC, Top Dead Center*);

Riferimenti

1. H. Heisler (2005), *Advanced engine technology*, Butterworth-Heinemann, London (UK).
2. G. A. Pignone, U. R. Vercelli (1995), *Motori ad alta potenza specifica*, Giorgio Nada Editore, Milano (IT).
3. G. Ferrari (2005), *Motori a combustione interna*, Gruppo editoriale Il Capitello, Torino (IT).
4. D. A. Bies, C. H. Hansen (2009), *Engineering noise control: Theory and practice*, Spon Press, Abingdon (UK).
5. D. Bortoluzzi, V. Cossalter, A. Doria (1998), *The effect of tunable resonators on the volumetric efficiency of an engine*, in “SAE International”.
6. V. Cossalter, M. Da Lio, A. Doria (2004), *Meccanica applicata alle macchine*, Edizioni Progetto, Padova (IT).
7. Honda CBR250R Service Manual.
8. L. L. Beranek, I. L. Vér (1990), *Noise and vibration control engineering*, .
9. A. Cavallini, M. Sovrano (1973), *Elementi di gasdinamica*, Patron editore, Bologna (IT)

Siti web

- a. <https://wiki.csiamerica.com/display/kb/Damping+coefficients>
(ultimo accesso: 22/03/2017)
- b. <https://it.mathworks.com>
(ultimo accesso: 23/03/2017)
- c. <http://www.woeurope.eu>
(ultimo accesso: 29/03/2017)