

UNIVERSITÀ DEGLI STUDI DI PADOVA

Dipartimento di Fisica e Astronomia “Galileo Galilei”

Corso di Laurea in Fisica

Tesi di Laurea

Tunneling quantistico macroscopico con giunzioni

Josephson superconduttive

Relatore

Prof. Luca Salasnich

Laureando

Tommaso Giacometti

Anno Accademico 2021/2022

Indice

<i>Introduzione</i>	1
1 Giunzioni Josephson	2
1.1 Equazioni di Josephson	2
1.2 Potenziale nullo e potenziale costante	4
1.3 La capacità nella giunzione	4
1.4 Potenziale efficace	5
1.5 Oscillatore armonico	6
2 Qubit	8
2.1 Anarmonicità della giunzione	8
2.2 Indeterminazione tra fase e numero di particelle	10
3 Qubit reali	11
3.1 Phase qubit	11
3.2 Operatore fase	12
3.3 Charge qubit	14
3.4 Flux qubit	16
3.5 Cenni storici	17
<i>Conclusioni</i>	18

Introduzione

Nel 1962 Brian David Josephson predisse un particolare effetto che si verifica quando due superconduttori vengono separati da un sottile strato di materiale isolante. Questo sistema fisico prende il nome di *giunzione Josephson*, il cui effetto è noto oggi come *effetto Josephson* [1] e fu premiato con il Nobel per la fisica nel 1973. Nel 1963 P. W. Anderson e J. M. Rowell realizzarono le prime giunzioni [2] che permisero di confermare le ipotesi proposte da Josephson.

L'effetto Josephson fa parte dei cosiddetti *effetti quantistici macroscopici*, che seguono le leggi della meccanica quantistica anche su scale macroscopiche. Queste giunzioni sono tutt'oggi interesse di importanti studi a ragione delle loro numerose applicazioni, come ad esempio la costruzione di computer quantistici, ai quali sono interessate grandi aziende come la IBM.

In questo elaborato verranno innanzitutto ricavate le equazioni di Josephson seguendo, inizialmente, un approccio proposto da Feynman [3]. Queste equazioni descrivono il funzionamento delle suddette giunzioni e permettono la scrittura di una Hamiltoniana per il sistema. Dopodiché verrà proposto un parallelo tra due metodi diversi, uno seguendo un'ottica cinematica e l'altro seguendo un'ottica Lagrangiana. Verrà mostrato inoltre il ruolo delle giunzioni all'interno dei circuiti e verranno ricavati autostati ed autovalori nel limite in cui il sistema si comporta come un oscillatore armonico.

Saranno poi introdotti i qubit e sarà spiegato il motivo per cui le giunzioni Josephson, grazie alla loro natura anarmonica, sono particolarmente efficaci per la costruzione di quest'ultimi; in questo capitolo verrà applicata la teoria delle perturbazioni alla Hamiltoniana di un oscillatore armonico.

Verranno anche analizzati i tre principali qubit studiati e costruiti: il phase qubit, il charge qubit e il flux qubit. Questi circuiti sono la base per lo studio di tutte le varianti dei qubit realizzati con le giunzioni Josephson ed hanno permesso, in particolare negli ultimi anni, uno sviluppo esponenziale dei computer quantistici. Infine verranno brevemente accennate le principali applicazioni di questi sistemi fisici e il ruolo che hanno nella ricerca.

Capitolo 1

Giunzioni Josephson

1.1 Equazioni di Josephson

Prendendo due superconduttori e separandoli con un sottile strato di materiale isolante appaiono fenomeni interessanti. Questo sistema fisico prende il nome di *giunzione Josephson* (figura 1.1).

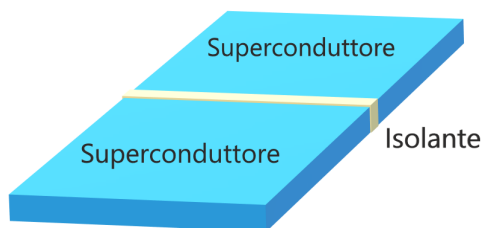


Figura 1.1: Giunzione Josephson

A temperature molto basse (generalmente $T < 10K$), in molti metalli, coppie di elettroni con spin opposti, chiamate *coppie di Cooper*, possono formare stati legati. Questi stati legati hanno spin totale nullo e si possono considerare *quasi-bosoni*.

Avvicinandosi sempre più allo zero assoluto, queste coppie tendono quindi ad occupare lo stesso stato e la funzione d'onda che le descrive diventa una funzione d'onda di singola particella moltiplicata per la radice del numero di particelle, che quindi non rappresenta più una probabilità, ma, appunto, il numero di particelle in un dato istante di tempo ed in ogni punto.

Considerando la densità di particelle costante in tutto il singolo superconduttore, le funzioni d'onda complesse per entrambi i metalli si possono scrivere, in prima approssimazione, come:

$$\psi_1(t) = \sqrt{N_1(t)} e^{i\theta_1(t)} \quad (1.1)$$

$$\psi_2(t) = \sqrt{N_2(t)} e^{i\theta_2(t)} \quad (1.2)$$

dove $N_{1,2}$ e $\theta_{1,2}$ sono rispettivamente il numero di particelle e la fase dei due superconduttori, i quali, per comodità, si considerano identici.

Per effetto tunnel le coppie possono attraversare il materiale isolante e passare dal primo superconduttore al secondo e viceversa; l'evoluzione temporale dovrà perciò tener conto di questo effetto e potrà essere scritta in questo modo:

$$i\hbar \frac{\partial}{\partial t} \psi_1 = U_1 \psi_1 + K \psi_2 \quad (1.3)$$

$$i\hbar \frac{\partial}{\partial t} \psi_2 = U_2 \psi_2 + K \psi_1 \quad (1.4)$$

dove K rappresenta l'ampiezza di probabilità di passare da 1 a 2 e viceversa. Queste due formule sono le *equazioni di Eulero-Lagrange* della Lagrangiana:

$$L = \sum_{j=1,2} \left(i\hbar\dot{\psi}_j^* \dot{\psi}_j - U_j |\psi_j|^2 \right) - K(\psi_1 \psi_2^* + \psi_2^* \psi_1) \quad (1.5)$$

La differenza di potenziale elettrico V ai capi dei due superconduttori soddisfa la relazione $U_1 - U_2 = qV$, con q carica delle coppie ($q = 2e$). Imponendo per comodità a zero il valore del potenziale a metà tra i due materiali si ottiene $U_1 = -U_2 = qV/2$.

Sostituendo le equazioni (1.1)-(1.2) nelle equazioni (1.3)-(1.4) ed eseguendo la derivata si ottiene per ψ_1 :

$$\hbar \left(i \frac{\dot{N}_1}{2\sqrt{N_1}} - \sqrt{N_1} \dot{\theta}_1 \right) = \frac{qV}{2} \sqrt{N_1} + K \sqrt{N_2} e^{i\phi} \quad \text{con} \quad \phi = \theta_2 - \theta_1 \quad (1.6)$$

L'equazione per ψ_2 si ottiene in maniera analoga con le giuste sostituzioni ($qV/2 \leftrightarrow -qV/2$, $\phi \leftrightarrow -\phi$, $1 \leftrightarrow 2$).

Uguagliando poi le parti reali con quelle immaginarie si ottiene il seguente sistema:

$$\dot{N}_1 = \frac{2K}{\hbar} \sqrt{N_1 N_2} \sin \phi \quad (1.7)$$

$$\dot{N}_2 = -\frac{2K}{\hbar} \sqrt{N_1 N_2} \sin \phi \quad (1.8)$$

$$\dot{\theta}_1 = -\frac{qV}{2\hbar} - \frac{K}{\hbar} \sqrt{\frac{N_2}{N_1}} \cos \phi \quad (1.9)$$

$$\dot{\theta}_2 = \frac{qV}{2\hbar} - \frac{K}{\hbar} \sqrt{\frac{N_1}{N_2}} \cos \phi \quad (1.10)$$

Da queste equazioni si deduce che $N_1(t) + N_2(t) = N_{tot} = \text{cost}$, in effetti il numero di *coppie di Cooper* totali del sistema deve rimanere costante. Si introduce inoltre $z(t) = (N_1(t) - N_2(t))/N_{tot}$ detto *population imbalance* dal quale risulta:

$$\sqrt{N_1 N_2} = \frac{N_{tot}}{2} \sqrt{1 - z^2} \quad , \quad \sqrt{\frac{N_1}{N_2}} - \sqrt{\frac{N_2}{N_1}} = \frac{2z}{\sqrt{1 - z^2}} \quad (1.11)$$

Notando che la variazione del numero di particelle nel tempo in uno dei due materiali risulta proporzionale ad una corrente dal primo metallo al secondo e viceversa allora si pone $J(t) = \dot{N}_1(t) = -\dot{N}_2(t)$ e dalle equazioni (1.7)-(1.10) e (1.11) si ha:

$$J = J_0 \sqrt{1 - z^2} \sin \phi \quad \text{con} \quad J_0 = \frac{KN_{tot}}{\hbar} \quad (1.12)$$

$$\dot{\phi} = \dot{\theta}_2 - \dot{\theta}_1 = \frac{qV}{\hbar} - \frac{K}{\hbar} \frac{2z}{\sqrt{1 - z^2}} \cos \phi \quad (1.13)$$

A queste ultime due equazioni si può arrivare anche tramite un approccio differente: utilizzando la *Lagrangiana* dell'equazione (1.5); sostituendo infatti le equazioni (1.1)-(1.2) in (1.5) si ottiene, dopo opportune sostituzioni:

$$L = \left(\frac{i\hbar}{2} (\dot{N}_1 + \dot{N}_2) - \frac{N_{tot}\hbar}{2} (\dot{\theta}_1 + \dot{\theta}_2) \right) + \frac{\hbar N_{tot}}{2} z \dot{\phi} - \frac{qV N_{tot}}{2} z - 2K \sqrt{N_1 N_2} \cos \phi \quad (1.14)$$

dove la prima parentesi, essendo costituita da termini che sono tutti derivate temporali di funzioni, si può eliminare.

Si ottiene così una *Lagrangiana* per z e ϕ :

$$L = \frac{\hbar N_{tot}}{2} z \dot{\phi} - \frac{qV N_{tot}}{2} z - K N_{tot} \sqrt{1 - z^2} \cos \phi \quad (1.15)$$

Scrivendo infine le *equazioni di Eulero-Lagrange* per la (1.15) si ricavano nuovamente, tenendo conto che $J(t) = \dot{N}_1(t) = (\dot{z}(t)N_{tot})/2$ in quanto $\dot{N}_1(t) = -\dot{N}_2(t)$, le equazioni (1.12) e (1.13).

In generale la *population imbalance* è molto bassa ($|z(t)| \ll 1$), cioè le densità di carica dei due superconduttori rimangono pressochè costanti, e si può quindi trascurare. Si ottengono allora due equazioni più semplici per la (1.12) e la (1.13):

$$J \simeq J_0 \sin \phi \quad e \quad \dot{\phi} \simeq \frac{qV}{\hbar} \quad (1.16)$$

Dimensionalmente però la J scritta in questi termini non è ancora una vera e propria corrente, infatti: $[J] = s^{-1}$. Moltiplicando allora J per la carica q di una singola coppia di Cooper si ottiene, anche dimensionalmente, una corrente:

$$I = I_0 \sin \phi \quad con \quad I_0 = \frac{qKN_{tot}}{\hbar} \quad (1.17)$$

Si ottengono quindi rispettivamente la prima e la seconda equazione di Josephson:

$$I = I_0 \sin \phi \quad (1.18)$$

$$\dot{\phi} = \frac{qV}{\hbar} \quad (1.19)$$

1.2 Potenziale nullo e potenziale costante

Si può ora ricavare l'equazione per $\phi(t)$ da (1.19):

$$\phi(t) = \phi_0 + \frac{q}{\hbar} \int_0^t V(t') dt' \quad (1.20)$$

con $\phi_0 = \phi(0)$ differenza di fase a $t = 0$.

Nel caso più semplice, in cui non viene messa *d.d.p.* tra i due superconduttori ($V = 0$), si ottiene $\dot{\phi}(t) = 0 \implies \phi = \phi_0 = cost$ e, tra i due metalli, scorre una corrente continua: $I = I_0 \sin \phi_0 = cost$.

Nel caso in cui, invece, si pone un potenziale costante ($V = V_0$) si ha $\phi(t) = \phi_0 + \frac{qV_0}{\hbar}t$, dove, per semplicità, possiamo prendere come $t = 0$ l'istante in cui $\phi_0 = 0$, quindi $\phi(t) = \frac{qV_0}{\hbar}t$ e si avrà una corrente alternata:

$$I = I_0 \sin \left(\frac{qV_0}{\hbar}t \right) \quad (1.21)$$

È interessante notare che il termine qV_0/\hbar sia molto grande infatti prendendo $q = 2e$ e, ad esempio, $V_0 = 1V$ si ottiene $qV_0/\hbar \simeq 3 \cdot 10^{15} s^{-1}$ e di conseguenza il periodo del seno corrisponde a $T \simeq 2 \cdot 10^{-15} s$ che è un tempo molto piccolo, ovvero la corrente oscilla molto rapidamente. Se i tempi di acquisizione sono maggiori non si rileva nessuna corrente.

Entrambi i risultati ottenuti sono sorprendenti e controintuitivi: se ai due metalli non si applica differenza di potenziale si ottiene una corrente costante; se invece si applica una differenza di potenziale costante si ottiene una corrente alternata che oscilla molto rapidamente.

Questi effetti sono dovuti alla natura quantistica dei superconduttori e, per questo motivo, vengono detti *effetti quantistici macroscopici*.

1.3 La capacità nella giunzione

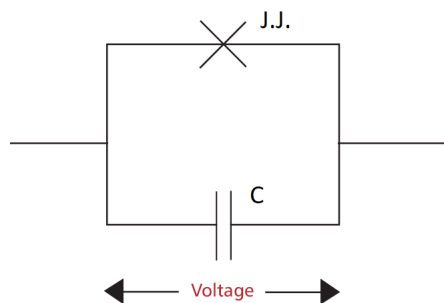
Una *giunzione Josephson* corrisponde a due superconduttori separati da uno strato di materiale isolante; si può quindi definire una capacità analogamente a come viene fatto con due conduttori classici.

Modellizzando il tutto in un circuito si può rappresentare la capacità in parallelo con la giunzione [4], la quale viene rappresentata con una croce (figura 1.2).

Sapendo che $Q(t) = V(t)C$ e $I(t) = -\dot{Q}(t)$ si ha $I(t) = -C\dot{V}(t)$ e si ottiene, dall'equazione (1.18):

$$\frac{C\hbar}{q} \ddot{\phi} = -I = -I_0 \sin \phi \quad (1.22)$$

Abbiamo trovato una relazione che ci permette di ricavare la *Lagrangiana* per la differenza di fase. Una


 Figura 1.2: Parallelo tra la capacità e la J.J. (*Josephson Junction*)

possibile scelta è:

$$L = \frac{C}{2} \left(\frac{\hbar}{q} \right)^2 \dot{\phi}^2 + \frac{\hbar}{q} I_0 \cos \phi \quad (1.23)$$

Definendo il momento coniugato $p_\phi(t) = C \left(\frac{\hbar}{q} \right)^2 \dot{\phi}(t)$, si può introdurre anche l'hamiltoniana del sistema:

$$H = \left(\frac{q}{\hbar} \right)^2 \frac{p_\phi^2}{2C} - \frac{\hbar}{q} I_0 \cos \phi \quad (1.24)$$

Allo stesso risultato si può arrivare anche in un altro modo: attraverso la *Lagrangiana* di $z(t)$ e $\phi(t)$ dell'equazione (1.15) nel limite $|z(t)| \ll 1$ in modo tale da approssimare $z(t)$ al primo ordine, il risultato che si ottiene è una lagrangiana di questo tipo:

$$L = \frac{\hbar N_{tot}}{2} z \dot{\phi} - \frac{q V N_{tot}}{2} z - K N_{tot} \cos \phi \quad (1.25)$$

Ricavando poi le equazioni di *Eulero-Lagrange*, si ottengono direttamente le equazioni (1.18) e (1.19).

Grazie alle relazioni appena trovate si ha che $I(t) = -C\dot{V}(t)$, ma $I(t) = \frac{qN_{tot}}{2}\dot{z}(t)$. Si ottiene quindi, ricordando l'equazione (1.19):

$$\frac{qN_{tot}}{2}\dot{z} = -C\dot{V} \implies z = -\frac{2C}{qN_{tot}}V + cost = -\frac{2C\hbar}{q^2N_{tot}}\dot{\phi} + cost \quad (1.26)$$

Ricordando infine che l'energia immagazzinata da un condensatore è $U(t) = \frac{1}{2}CV(t)^2$ e sostituendo la nuova espressione appena trovata per z nella *Lagrangiana* per z e ϕ si ottiene:

$$L = \frac{\hbar N}{2} \dot{\phi} \left(-\frac{2C\hbar}{q^2N} \dot{\phi} + cost \right) - \frac{qN}{2} \frac{\hbar}{q} \dot{\phi} \left(-\frac{2C\hbar}{q^2N} \dot{\phi} + cost \right) - KN \cos \phi - \frac{1}{2}C \left(\frac{\hbar}{q} \dot{\phi} \right)^2 \quad (1.27)$$

dalla quale, eliminando le derivate totali rispetto al tempo, si ottiene, a meno del segno, la *Lagrangiana* dell'equazione (1.23).

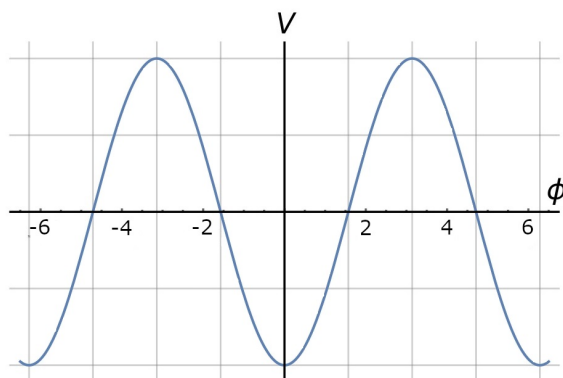
1.4 Potenziale efficace

Nelle equazioni (1.23) e (1.24) è apparso un *potenziale efficace* per $\phi(t)$:

$$V_\phi = -\frac{\hbar}{q} I_0 \cos \phi \quad (1.28)$$

esso si comporta come il coseno di $\phi(t)$ e il suo andamento è riportato in figura 1.3. Per piccoli valori di ϕ , ovvero nel limite $\phi(t) \rightarrow 0$ in espansione di Taylor, si ha $\cos \phi \simeq 1 - \phi^2/2$ e $\sin \phi \simeq \phi$ e pertanto:

$$V_\phi \simeq -\frac{\hbar}{q} I_0 \left(1 - \frac{\phi^2}{2} \right) = -V_{0,\phi} + I_0 \frac{\hbar}{2q} \phi^2 \quad (1.29)$$


 Figura 1.3: Potenziale efficace V_ϕ

$$I \simeq I_0 \phi \implies \phi = \frac{I}{I_0} \quad (1.30)$$

Dato che il potenziale è definito a meno di una costante si può eliminare il termine $V_{0,\phi} = 0$ e, sostituendo la (1.30) nella (1.29), si ottiene:

$$V_\phi = \frac{\hbar}{2qI_0} I^2 \quad (1.31)$$

Ricordando poi che l'energia associata ad un induttore vale $U(t) = \frac{1}{2}LI(t)^2$, si può definire in maniera analoga una *induttanza efficace* come:

$$L = \frac{\hbar}{qI_0} \quad (1.32)$$

La giunzione Josephson gioca quindi il ruolo di una induttanza nel circuito.

1.5 Oscillatore armonico

Il prossimo passo è la quantizzazione dell'hamiltoniana: si promuovono la differenza di fase $\phi(t)$ ed il suo momento coniugato $p_\phi(t)$ ad operatori che obbediscono alla relazione di commutazione canonica:

$$[\hat{\phi}, \hat{p}_\phi] = i\hbar \quad (1.33)$$

in realtà l'operatore per la fase $\hat{\phi}$ non è ben definito a causa della sua discontinuità; gli operatori ben definiti sono invece quelli periodici nella fase come il coseno, il quale appare nell'hamiltoniana della giunzione Josephson. Ciononostante questa ambiguità verrà trascurata nei seguenti conti.

Si considera quindi l'hamiltoniana del sistema nel limite per bassi ϕ , ovvero per $\phi(t) \rightarrow 0$, che corrisponde a quella di un oscillatore armonico:

$$\hat{H} = \left(\frac{q}{\hbar}\right)^2 \frac{\hat{p}_\phi^2}{2C} + \frac{\hbar I_0}{2q} \hat{\phi}^2 \quad (1.34)$$

Per ricavare autovalori ed autostati si può seguire il *metodo algebrico di Dirac*. Si definiscono quindi gli operatori di creazione e distruzione \hat{a}^\dagger e \hat{a} in questo modo:

$$\hat{a} = \left(\frac{\hbar I_0 C}{4q^3}\right)^{\frac{1}{4}} \hat{\phi} + i \left(\frac{q^3}{4I_0 \hbar^5 C}\right)^{\frac{1}{4}} \hat{p}_\phi \quad (1.35)$$

$$\hat{a}^\dagger = \left(\frac{\hbar I_0 C}{4q^3}\right)^{\frac{1}{4}} \hat{\phi} - i \left(\frac{q^3}{4I_0 \hbar^5 C}\right)^{\frac{1}{4}} \hat{p}_\phi \quad (1.36)$$

Si ha così $[\hat{a}, \hat{a}^\dagger] = 1$ e l'hamiltoniana del sistema si può scrivere come $\hat{H} = \omega \hbar (\hat{a}^\dagger \hat{a} + \frac{1}{2})$, con $\omega = \sqrt{\frac{qI_0}{\hbar C}}$. Da notare che ω corrisponde alla frequenza di risonanza ω_0 di un circuito LC , $\omega_0 = 1/\sqrt{LC}$.

Definendo $\hat{N} = \hat{a}^\dagger \hat{a}$ si ha che gli autovalori per l'energia corrispondono a: $E_m = \omega \hbar (m + 1/2)$, dove $m \in \mathbb{N}$ (zero compreso).

Risolvendo inoltre l'equazione $\hat{a} |0\rangle = 0$ si trova l'autovettore $|0\rangle$, dal quale poi si possono ricavare tutti gli altri autovettori tramite $|m\rangle = (\hat{a}^\dagger)^m |0\rangle$. Naturalmente tutti gli autovettori devono poi essere rinormalizzati. Le funzioni d'onda così trovate sono i *polinomi di Hermite*, i quali sono non degeneri e costituiscono una base ortonormale per lo spazio di Hilbert \mathcal{H} del sistema.

Ponendo $\sigma^2 = \sqrt{\frac{q^3}{\hbar I_0 C}}$ gli autovettori $|0\rangle$, $|1\rangle$ e $|2\rangle$, in rappresentazione ϕ , sono:

$$\langle \phi | 0 \rangle = \psi_0(\phi) = \frac{1}{\pi^{\frac{1}{4}} \sqrt{\sigma}} e^{-\frac{\phi^2}{2\sigma^2}} \quad (1.37)$$

$$\langle \phi | 1 \rangle = \psi_1(\phi) = \frac{\sqrt{2}}{\pi^{\frac{1}{4}} \sigma^{\frac{3}{2}}} \phi e^{-\frac{\phi^2}{2\sigma^2}} \quad (1.38)$$

$$\langle \phi | 2 \rangle = \psi_2(\phi) = \frac{1}{(4\pi\sigma^2)^{\frac{1}{4}}} \left(\frac{2\phi^2}{\sigma^2} - 1 \right) e^{-\frac{\phi^2}{2\sigma^2}} \quad (1.39)$$

Capitolo 2

Qubit

Il *qubit* è la versione quantistica del *bit* classico ed è l'unità base di calcolo della *quantum information*. Classicamente un *bit* può assumere solo due valori: 0 o 1. Nel mondo quantistico però avvengono fenomeni unici che non hanno analoghi classici, come l'*entanglement* ed il *principio di sovrapposizione*. Un *qubit* si può definire prendendo un sistema quantistico isolato a due livelli energetici:

$$|\Psi\rangle = \alpha |0\rangle + \beta |1\rangle \quad \text{dove } \alpha, \beta \in \mathbb{C} \quad (2.1)$$

In questo modo sono potenzialmente possibili infiniti stati, ovvero tutte le sovrapposizioni possibili di $|0\rangle$ e $|1\rangle$ e ogni stato diverso può essere rappresentato come un punto su una sfera detta *sfera di Bloch* (figura 2.1); α e β devono soddisfare $|\alpha|^2 + |\beta|^2 = 1$.

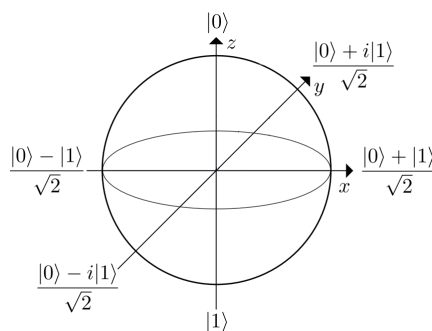


Figura 2.1: Sfera di Bloch

Nella pratica, per costruire un *qubit*, si deve creare un sistema per il quale la differenza di energia tra i livelli $|0\rangle$ e $|1\rangle$, sia diversa da quella tra autostati energetici maggiori. Questo perché, se così non fosse, il sistema risulterebbe molto difficile da controllare poiché si rischierebbe di portarlo in stati di energia maggiore, i quali non fanno parte dello spazio computazionale, involontariamente (figura 2.2).

2.1 Anarmonicità della giunzione

Il caso armonico studiato in precedenza non risulta adatto alla costruzione di un *qubit* perché tutti i livelli energetici sono separati dalla stessa quantità $\Delta E = \omega\hbar$. L'hamiltoniana scritta per l'oscillatore era però solo un'approssimazione di quella della giunzione, dove il potenziale era sinusoidale.

I livelli energetici della *giunzione Josephson* sono infatti anarmonici, cioè hanno energie di separazione dei livelli energetici diverse per ogni stato, come mostrato nel grafico a destra della figura 2.2. Questa "anarmonicità" è ciò che ci serve per costruire il nostro *qubit*.

Per calcolare le correzioni alle transizioni energetiche si può utilizzare la *teoria delle perturbazioni*.

Secondo questa teoria se abbiamo un'hamiltoniana di cui non conosciamo la soluzione analitica, ma che

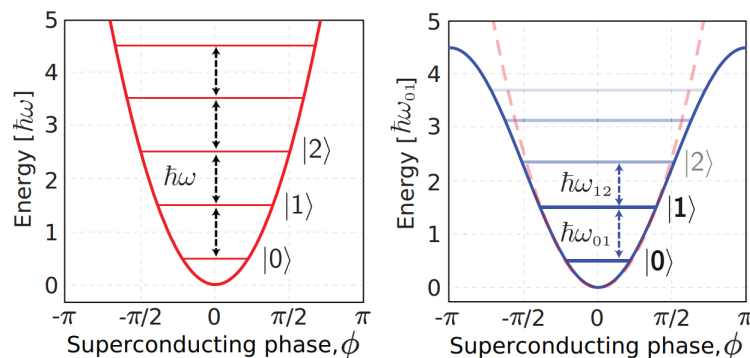


Figura 2.2: Potenziale armonico e anarmonico sinusoidale

può essere separata in due termini $\hat{H}' = \hat{H} + \hat{V}$, dove conosciamo la soluzione per \hat{H} , si possono calcolare gli autovalori e gli autovettori corretti, richiedendo solamente che questi ultimi ammettano espansione in *serie di Taylor*. La correzione da applicare all'autovalore E_m dell'oscillatore armonico è, in approssimazione al primo ordine:

$$E_m^1 = \langle m | \hat{V} | m \rangle \quad (2.2)$$

Nel nostro caso, per arrivare all'hamiltoniana di un oscillatore armonico, era stato approssimato il coseno fino al termine del secondo ordine; una prima correzione da aggiungere è quindi il termine di quart'ordine dell'espansione: $\cos \phi \simeq 1 - \phi^2/2 + \phi^4/24$. Il potenziale da aggiungere alla hamiltoniana dell'equazione (1.34) è perciò: $\hat{V} = -\hbar I_0 \hat{\phi}^4 / (24q)$.

Per applicare la (2.2) è comodo esprimere $\hat{\phi}^4$ in termini di \hat{a} e \hat{a}^\dagger :

$$\hat{\phi} = \left(\frac{q^3}{4\hbar I_0 C} \right)^{\frac{1}{4}} (\hat{a} + \hat{a}^\dagger) \quad (2.3)$$

sostituendolo nel potenziale si ottiene:

$$\hat{V} = -\frac{q^2}{96C} (\hat{a} + \hat{a}^\dagger)^4 \quad (2.4)$$

ed infine applicando la (2.2);

$$E_m^1 = \langle m | \hat{V} | m \rangle = -\frac{q^2}{96C} (6m^2 + 6m + 3) \quad (2.5)$$

A questo punto si possono calcolare le correzioni energetiche, approssimate al primo ordine, per tutti i valori energetici. Gli autovalori per i primi tre stati sono:

$$E_0 = E_0^0 + \langle 0 | \hat{V} | 0 \rangle = \frac{\hbar\omega}{2} - \frac{q^2}{32C} = \frac{1}{2} \sqrt{\frac{qI_0\hbar}{C}} - \frac{q^2}{32C} \quad (2.6)$$

$$E_1 = E_1^0 + \langle 1 | \hat{V} | 1 \rangle = \frac{3\hbar\omega}{2} - \frac{5q^2}{32C} = \frac{3}{2} \sqrt{\frac{qI_0\hbar}{C}} - \frac{5q^2}{32C} \quad (2.7)$$

$$E_2 = E_2^0 + \langle 2 | \hat{V} | 2 \rangle = \frac{5\hbar\omega}{2} - \frac{13q^2}{32C} = \frac{5}{2} \sqrt{\frac{qI_0\hbar}{C}} - \frac{13q^2}{32C} \quad (2.8)$$

Si riesce ora a vedere l'anarmonicità della giunzione: diversi livelli energetici sono separati da diversi valori; le energie da fornire per passare da $|0\rangle$ a $|1\rangle$ e da $|1\rangle$ a $|2\rangle$ diventano infatti:

$$\Delta E_{10} = \omega\hbar - \frac{q^2}{8C} \quad (2.9)$$

$$\Delta E_{21} = \omega\hbar - \frac{q^2}{4C} \quad (2.10)$$

La giunzione Josephson è quindi adatta a costruire un qubit. I due livelli di quest'ultimo sono quindi lo stato fondamentale $|0\rangle$ della giunzione ed il primo stato eccitato $|1\rangle$.

2.2 Indeterminazione tra fase e numero di particelle

Per quantizzare l'hamiltoniana è stata introdotta una relazione di commutazione tra $\hat{\phi}$ e \hat{p}_ϕ . A causa di questa relazione è presente anche una indeterminazione tra questi due operatori, data dal *principio di indeterminazione di Heisenberg*. Tenendo conto dell'equazione (1.33), trascurando sempre i problemi di $\hat{\phi}$, si può scrivere "simbolicamente":

$$\Delta\hat{\phi}\Delta\hat{p}_\phi \geq \frac{1}{2} \left| [\hat{\phi}, \hat{p}_\phi] \right| = \frac{\hbar}{2} \quad (2.11)$$

Riprendendo quindi l'equazione (1.26), la quale mostra la relazione tra la *population imbalance* z e $\dot{\phi}$, e la definizione del momento coniugato p_ϕ si ottiene una relazione diretta che collega z a p_ϕ :

$$\hat{p}_\phi = C \left(\frac{\hbar}{q} \right)^2 \dot{\phi} = C \left(\frac{\hbar}{q} \right)^2 \left(-\frac{q^2 N_{tot}}{2C\hbar} \hat{z} + cost \right) \implies \hat{p}_\phi = -\frac{\hbar N_{tot}}{2} \hat{z} + cost \quad (2.12)$$

Si ottiene così una relazione di commutazione anche per \hat{z} e $\hat{\phi}$:

$$[\hat{\phi}, \hat{p}_\phi] = -\hbar [\hat{\phi}, \frac{\hat{z} N_{tot}}{2}] \implies [\frac{\hat{z} N_{tot}}{2}, \hat{\phi}] = i \quad (2.13)$$

Quest'ultima relazione si può anche riscrivere in funzione dei portatori di carica in uno dei due superconduttori:

$$\hat{z} = \frac{2\hat{N}_1}{N_{tot}} - 1 \implies [\hat{N}_1, \hat{\phi}] = i \quad (2.14)$$

Ne segue quindi una indeterminazione tra la fase e il numero di coppie in uno dei due superconduttori:

$$\Delta\hat{N}_1\Delta\hat{\phi} \geq \frac{1}{2} \left| [\hat{N}_1, \hat{\phi}] \right| = \frac{1}{2} \quad (2.15)$$

Capitolo 3

Qubit reali

Nel capitolo 2 è stato mostrato come la giunzione Josephson sia un ottimo strumento per la realizzazione dei bit quantistici. La costruzione di questi ultimi però, per applicazioni reali come ad esempio per la costruzione di *computer quantistici*, presenta alcune difficoltà.

I gradi di libertà del sistema che si riescono a controllare e misurare facilmente sono la fase ϕ e la carica Q , o equivalentemente il numero di portatori di carica "in eccesso" in una dei due superconduttori N_1 o N_2 . Secondo la (2.15), queste due osservabili, non possono essere misurate contemporaneamente con arbitraria precisione; sono stati quindi studiati dei sistemi che mirano ad ottimizzare queste problematiche.

Innanzitutto la lagrangiana (1.23) può essere riscritta così:

$$L = \frac{C_J}{2} \left(\frac{\hbar}{q} \right)^2 \dot{\phi}^2 + E_J \cos \phi \quad \text{dove} \quad E_J = \frac{\hbar}{q} I_0 \quad (3.1)$$

Denominando poi con $E_C = q^2/(2C)$ la *energia di carica degli elettroni* e calcolando il rapporto E_J/E_C , si ottengono riferimenti sul miglior grado di libertà da controllare: se $E_J/E_C \ll 1$ la carica Q è ben definita e la fase ϕ presenta alte fluttuazioni quantistiche, al contrario se $E_J/E_C \gg 1$ la fase è ben definita e la carica presenta alte fluttuazioni.

Nel tempo sono stati creati molti circuiti diversi, ma in generale si basano tutti su tre principali design: il *phase qubit*, il *charge qubit* e il *flux qubit* [5, 6].

3.1 Phase qubit

Il *phase qubit* è formato da una singola giunzione controllata da un generatore di corrente esterno come mostrato in figura 3.1, dove I_b rappresenta la *corrente di bias*, la quale viene normalmente impostata dell'ordine della corrente critica della giunzione I_0 . Inoltre il tutto viene costruito in modo tale da avere $E_J/E_C \simeq 10^6$ e quindi la variabile ben definita è la fase, da cui il sistema prende il nome.

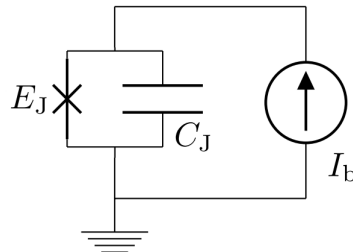


Figura 3.1: Phase qubit

La potenza fornita dal generatore di corrente è $P = VI_b$, per ricavare il lavoro basta quindi integrare

rispetto al tempo e, ricordando la (1.19), si ottiene:

$$W = I_b \int_0^t V(t') dt' = I_b \frac{\hbar}{q} \phi \quad (3.2)$$

Aggiungendo questo termine alla lagrangiana (3.1) si ottiene la lagrangiana per il sistema:

$$L = \frac{C_J}{2} \left(\frac{\hbar}{q} \right)^2 \dot{\phi}^2 + \frac{\hbar}{q} I_b \phi + E_J \cos \phi \quad (3.3)$$

la cui corrispondente hamiltoniana è:

$$H = \frac{1}{2C_J} \left(\frac{q}{\hbar} \right)^2 p_\phi^2 - \frac{\hbar}{q} I_b \phi - E_J \cos \phi \quad \text{dove} \quad p_\phi = C_J \left(\frac{\hbar}{q} \right)^2 \dot{\phi} \quad (3.4)$$

Il momento coniugato $p_\phi(t)$ può essere espresso anche in funzione dalla carica nella giunzione, denominata Q_J , secondo la relazione $Q_J(t) = p_\phi(t)q/\hbar$, infatti, ricordando la (1.19), $p_\phi(t) = C_J V_J(t)\hbar/q = Q_J(t)\hbar/q$. Il termine lineare nella fase ϕ rende il potenziale inclinato come quello in figura 3.2 e di conseguenza non ci sono particolari simmetrie che proteggono il sistema da rumori esterni.

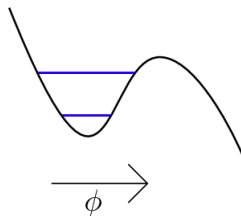


Figura 3.2: Potenziale del *phase qubit*

Inoltre, nel limite $\phi(t) \ll 1$, questa hamiltoniana differisce da quella studiata nel paragrafo 1.5, ovvero quella per un oscillatore armonico, solo per il termine lineare in ϕ . Tuttavia traslando la fase i due sistemi risultano equivalenti, infatti:

$$H = \frac{1}{2C_J} \left(\frac{q}{\hbar} \right)^2 p_\phi^2 + \frac{E_J}{2} \left(\phi^2 - 2\frac{I_b}{I_0}\phi + \frac{I_b^2}{I_0^2} \right) = \frac{1}{2C_J} \left(\frac{q}{\hbar} \right)^2 p_\phi^2 + \frac{E_J}{2} \left(\phi - \frac{I_b}{I_0} \right)^2 \quad (3.5)$$

dove nel primo passaggio è stato aggiunto il termine costante $E_J I_b^2 / (2I_0^2)$. Introducendo il cambio di variabile $\tilde{\phi}(t) = \phi(t) - I_b/I_0$ l'hamiltoniana diventa analoga alla (1.34). I risultati che si otterranno per questo sistema saranno quindi analoghi a quelli già studiati in precedenza.

Gli autostati che si ottengono hanno però solo una piccola anarmonicità e risulta difficile preservare la coerenza quantistica del sistema.

3.2 Operatore fase

Prima di studiare il *charge qubit* è utile vedere in che modo possono essere definiti operatori periodici nella fase e come agiscono sugli stati del sistema [7].

Innanzitutto va definita una nuova osservabile $n(t)$ come $n(t) = (N_1(t) - N_2(t))/2$, ovvero l'*offset* di carica nella giunzione rispetto all'equilibrio in cui $N_1 = N_2 = N_{tot}/2$. In questo modo la carica totale della giunzione $Q(t)$ si può esprimere semplicemente come $Q(t) = qn(t)$; questo *offset* di carica è anche in relazione con la *population imbalance* secondo $n(t) = N_{tot}z(t)/2$.

Si promuovono ora ad operatori le osservabili $N_1(t)$ e $N_2(t)$, alle quali corrisponderanno gli autostati $|N_1\rangle$ e $|N_2\rangle$, cioè si ha:

$$\hat{N}_1 |N_1\rangle = N_1 |N_1\rangle \quad e \quad \hat{N}_2 |N_2\rangle = N_2 |N_2\rangle \quad (3.6)$$

questi due operatori hanno quindi il compito di "contare" le coppie bosoniche e lo stato complessivo del sistema sarà rappresentato da:

$$|N_1, N_2\rangle = |N_1\rangle \otimes |N_2\rangle \quad (3.7)$$

Definendo gli operatori per $n(t)$ come $\hat{n} = (\hat{N}_1 - \hat{N}_2)/2$ e per il numero totale di coppie come $\hat{N}_{tot} = \hat{N}_1 + \hat{N}_2$ si ottiene, un volta applicati agli autoket del sistema:

$$\hat{n} |N_1, N_2\rangle = \frac{1}{2}(\hat{N}_1 - \hat{N}_2) |N_1, N_2\rangle = \frac{1}{2}(N_1 - N_2) |N_1, N_2\rangle \quad (3.8)$$

$$\hat{N}_{tot} |N_1, N_2\rangle = (\hat{N}_1 + \hat{N}_2) |N_1, N_2\rangle = (N_1 + N_2) |N_1, N_2\rangle \quad (3.9)$$

dove però il numero di coppie totali nei superconduttori è fissato e di conseguenza \hat{N} assumerà sempre il valore costante $N_{tot} = N_1 + N_2$.

A questo punto è possibile cambiare base: si passa da $|N_1, N_2\rangle$ a $|n, N_{tot}\rangle$ dove si può fare a meno di indicare la dipendenza da N_{tot} , in quanto costante, e si ottengono semplicemente gli stati $|n\rangle$.

Si introducono ora gli stati:

$$|\phi\rangle = \sum_{n=-N_{tot}/2}^{N_{tot}/2} e^{in\phi} |n\rangle \quad (3.10)$$

la relazione inversa è:

$$|n\rangle = \frac{1}{2\pi} \int_0^{2\pi} d\phi e^{-in\phi} |\phi\rangle \quad (3.11)$$

infatti:

$$|n\rangle = \frac{1}{2\pi} \int_0^{2\pi} d\phi e^{-in\phi} \sum_{m=-N_{tot}/2}^{N_{tot}/2} e^{im\phi} |m\rangle = \sum_{m=-N_{tot}/2}^{N_{tot}/2} |m\rangle \delta_{nm} = |n\rangle \quad (3.12)$$

dove δ_{nm} è una *delta di Kronecker*, inoltre:

$$\langle\phi|\phi'\rangle = \sum_{m,n} e^{-i(n\phi-m\phi')} \langle n|m\rangle = \sum_{m,n} e^{-i(n\phi-m\phi')} \delta_{nm} = 2\pi\delta(\phi-\phi') \quad (3.13)$$

dove ora $\delta(\phi-\phi')$ è una *delta di Dirac*. Gli stati $|\phi\rangle$ rappresentano quindi una base, non normalizzata, per il nostro sistema.

Si può ora definire il seguente operatore:

$$\widehat{e^{i\phi}} = \frac{1}{2\pi} \int_0^{2\pi} d\phi' e^{i\phi'} |\phi'\rangle \langle\phi'| \quad (3.14)$$

Questo operatore si comporta come ci si dovrebbe aspettare infatti:

$$\widehat{e^{i\phi}} |\phi\rangle = \frac{1}{2\pi} \int_0^{2\pi} d\phi' e^{i\phi'} |\phi'\rangle \langle\phi'|\phi\rangle = \frac{1}{2\pi} \int_0^{2\pi} d\phi' e^{i\phi'} |\phi'\rangle 2\pi\delta(\phi-\phi') = e^{i\phi} |\phi\rangle \quad (3.15)$$

Inoltre se applicato ad un stato $|n\rangle$ si ottiene:

$$\begin{aligned} \widehat{e^{i\phi}} |n\rangle &= \frac{1}{2\pi} \int_0^{2\pi} d\phi' e^{i\phi'} |\phi'\rangle \langle\phi'|n\rangle = \\ &= \frac{1}{2\pi} \int_0^{2\pi} d\phi' e^{i\phi'} |\phi'\rangle \sum_{m=-N_{tot}/2}^{N_{tot}/2} e^{-im\phi'} \langle m|n\rangle = \\ &= \frac{1}{2\pi} \int_0^{2\pi} d\phi' e^{-i(n-1)\phi'} |\phi'\rangle = |n-1\rangle \end{aligned} \quad (3.16)$$

siccome questo risultato vale per ogni stato $|n\rangle$ si ottiene una diversa rappresentazione per $\widehat{e^{i\phi}}$ e analogamente per $\widehat{e^{-i\phi}}$:

$$\widehat{e^{i\phi}} = \sum_{n=-N_{tot}/2}^{N_{tot}/2} |n-1\rangle \langle n| \quad (3.17)$$

$$\widehat{e^{-i\phi}} = \sum_{n=-N_{tot}/2}^{N_{tot}/2} |n\rangle \langle n-1| \quad (3.18)$$

Di conseguenza gli operatori periodici nella fase come il seno ed il coseno, rappresentabili come combinazioni di esponenziali, sono ben definiti.

3.3 Charge qubit

Il *charge qubit*, detto anche *Cooper pair box* (CPB), è costruito in modo tale da avere $E_J/E_C \ll 1$ e quindi la variabile ben definita è la carica, da cui deriva appunto il suo nome.

Il circuito è costituito da una giunzione Josephson controllata da un generatore di tensione V_g attraverso una *capacità di gate* C_g , in questo modo viene creata un'isola superconduttrice tra la giunzione e C_g (figura 3.3).

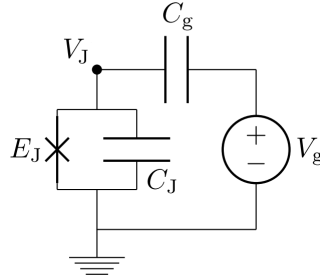


Figura 3.3: Charge qubit, l'isola superconduttrice è localizzata nel punto del circuito che corrisponde a V_J .

La capacità della giunzione può essere costruita con valori inferiori anche al femptoFarad $C_J \leq 10^{-15}F$, mentre C_g , la *capacità di gate*, può essere scelta ancora più piccola. Di conseguenza si ottiene un valore per $E_C = q^2/2(C_J + C_g)$ superiore al Kelvin ($E_C \geq 1K$); in questi problemi è comodo esprimere l'energia in Kelvin. Valori tipici per E_J sono invece dell'ordine di $E_J = 100mK$.

Indicando con $V_J(t)$ la differenza di potenziale ai capi della giunzione, che quindi soddisfa la relazione (1.19), si può scrivere la lagrangiana (3.1) del sistema, considerando anche il contributo della capacità *di gate* C_g , in questo modo:

$$L = \frac{C_J}{2}V_J^2 + E_J \cos \phi + \frac{C_g}{2} (V_g - V_J)^2 \quad (3.19)$$

A questo punto è utile introdurre il *flusso dei nodi del circuito* $\Phi(t)$, definito come:

$$\Phi(t) = \int_{-\infty}^t V(t') dt' \quad (3.20)$$

Riscrivendo le variabili della lagrangiana in funzione di $\Phi(t)$ si ottiene:

$$V_J = \dot{\Phi} \quad (3.21)$$

$$\dot{\phi} = \frac{q}{\hbar} V_J \implies \phi = 2\pi \frac{\Phi}{\Phi_0} \quad (3.22)$$

e la lagrangiana che si ottiene è:

$$L = \frac{C_J}{2} \dot{\Phi}^2 + \frac{C_g}{2} (V_g - \dot{\Phi})^2 + E_J \cos \left(2\pi \frac{\Phi}{\Phi_0} \right) \quad (3.23)$$

In questo modo si riconoscono meglio i termini cinetici e potenziali e si può ricavare il momento coniugato:

$$p_\Phi = \frac{\partial L}{\partial \dot{\Phi}} = (C_J + C_g) \dot{\Phi} - C_g V_g = C_{tot} \dot{\Phi} - C_g V_g \quad (3.24)$$

L'hamiltoniana corrispondente è:

$$H = \frac{p_\Phi^2}{2C_{tot}} + \frac{C_g V_g p_\Phi}{C_{tot}} + \frac{C_g^2 V_g^2}{2C_{tot}} - \frac{C_g V_g^2}{2} - E_J \cos \left(2\pi \frac{\Phi}{\Phi_0} \right) \quad (3.25)$$

Definendo ora con $Q_J = C_J V_J$ e $Q_g = C_g (V_g - V_J)$ le cariche rispettivamente della giunzione e della capacità di gate si può ricavare la carica risultante nell'isola superconduttrice come:

$$Q = Q_J - Q_g = C_{tot} V_J - C_g V_g \quad (3.26)$$

da notare che $Q = p_\Phi$ in quanto $\dot{\Phi} = V_J$.

Si ottiene quindi, eliminando un termine costante:

$$H = \frac{1}{2C_{tot}}(Q + C_g V_g)^2 - E_J \cos\left(2\pi \frac{\Phi}{\Phi_0}\right) \quad (3.27)$$

Infine ricordando che $q = 2e$ si pone:

$$n = -Q/q \quad \text{dove} \quad n \in \mathbb{Z} \quad (3.28)$$

il numero di portatori di carica nell'isola è:

$$n_g = C_g V_g / q \quad (3.29)$$

come un parametro facilmente controllabile dall'esterno tramite V_g , si ottiene la hamiltoniana quantizzata:

$$\hat{H} = E_C (\hat{n} - n_g)^2 - E_J \widehat{\cos \phi} \quad (3.30)$$

con $E_C = q^2 / (2C_{tot})$.

Questo sistema è stato costruito per essere molto sensibile a differenze di anche una sola coppia di Cooper nell'isola superconduttiva, si ha infatti che il termine E_C domina su E_J , di conseguenza è conveniente scrivere l'hamiltoniana nella base degli stati del numero di coppie. Si introduce quindi la completezza:

$$\mathbb{I} = \sum_{n=-\infty}^{+\infty} |n\rangle \langle n| \quad (3.31)$$

Definendo l'operatore $\widehat{\cos \phi}$ come fatto nella sezione precedente, ricordando cioè che $e^{\pm i\phi} |n\rangle = |n \mp 1\rangle$, si ottiene la seguente espressione:

$$\hat{H} = \sum_{n=-\infty}^{+\infty} \left(E_C (n - n_g)^2 |n\rangle \langle n| - \frac{E_J}{2} (|n+1\rangle \langle n| + |n\rangle \langle n+1|) \right) \quad (3.32)$$

A questo punto si può proseguire con la preparazione del qubit. Si sceglie quindi un valore per n_g intero in modo tale che il livello di energia minore sia quello per $n = n_g$, infatti inserendo $n = n_g$ della (3.32) il primo termine si annulla ed il secondo, nel limite $E_J \ll E_C$, risulta molto più piccolo dei valori di energia superiori. Il sistema, abbassando la temperatura il più possibile, tenderà di conseguenza a condensarsi in questo stato.

Se poi si alza o si abbassa n_g di $1/2$ si ottengono, per valori di $n = n_g \pm 1/2$, due livelli di energia molto simili e ben separati da quelli superiori pari a $E_C/4$ più piccole correzioni date dal termine di tunneling E_J . I livelli energetici più vicini a questi due sono quelli per $n = n_g \pm 3/2$ i quali hanno energie pari a $9E_C/4$ più piccole correzioni date da E_J . Il salto di energia da fare per passare dai due livelli di energia più bassi a quelli superiori è quindi, all'incirca, di $2E_C$, un'energia molto più alta di quella che separa i due livelli meno energetici.

Per questo motivo questa espressione può essere approssimata con buona precisione ad un sistema a due livelli, ossia si possono trascurare tutti i livelli superiori ad i primi due.

Per mantenere la stessa notazione tenuta in precedenza si possono rinominare gli autostati in questo modo:

$$|n_g - 1/2\rangle = |0\rangle \quad (3.33)$$

$$|n_g + 1/2\rangle = |1\rangle \quad (3.34)$$

e la hamiltoniana del sistema la si può scrivere così:

$$\hat{H} = \frac{E_C}{4} (|0\rangle \langle 0| + |1\rangle \langle 1|) - \frac{E_J}{2} (|1\rangle \langle 0| + |0\rangle \langle 1| + |2\rangle \langle 1| + |1\rangle \langle 2|) \quad (3.35)$$

Grazie a queste sue proprietà il charge qubit è quindi una possibile scelta per la costruzione di *qubit*.

3.4 Flux qubit

La variante più semplice del *flux qubit* consiste in un piccolo circuito chiuso costituito con una singola giunzione e costruito in maniera tale da avere $E_J \gg E_C$, dove quindi l'osservabile a basse fluttuazioni è la fase $\phi(t)$ della giunzione.

Come suggerito dal nome, questo circuito, viene controllato attraverso un flusso magnetico esterno Φ_{ext} (figura 3.4).

L'induttore presente nell'immagine del circuito non è altro che l'induttanza di tutto il circuito che per semplicità è stata condensata in L .

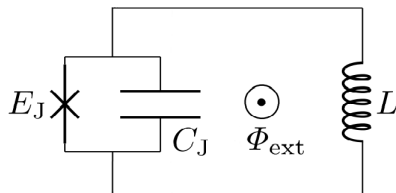


Figura 3.4: Flux qubit

Per studiare questo sistema è utile utilizzare il *flusso dei nodi del circuito* $\Phi(t)$ come è stato fatto per il charge qubit.

Va ricavato quindi il termine per l'induttanza in funzione di $\Phi(t)$:

$$U = \frac{1}{2}LI^2 \implies U = -\frac{(\Phi - \Phi_{ext})^2}{2L} \quad (V = -L\dot{I}) \quad (3.36)$$

la lagrangiana che si ottiene è:

$$L = \frac{1}{2}C_J\dot{\Phi}^2 + E_J \cos\left(2\pi\frac{\Phi}{\Phi_0}\right) - \frac{(\Phi - \Phi_{ext})^2}{2L} \quad (3.37)$$

Il momento coniugato che si ottiene è $p_\Phi(t) = C_J\dot{\Phi}(t)$, il quale corrisponde e alla carica $Q_J(t)$ nella giunzione, infatti $\dot{\Phi}(t) = V_J(t) \implies p_\Phi(t) = C_J V_J(t) = Q_J(t) = qn_J(t)$. L'hamiltoniana che si ottiene è quindi, dopo essere stata quantizzata:

$$\hat{H} = E_C n_J + \frac{(\hat{\Phi} - \Phi_{ext})^2}{2L} - E_J \cos\left(2\pi\frac{\hat{\Phi}}{\Phi_0}\right) \quad (3.38)$$

dove $E_C = q/(2C_J)$.

In un circuito chiuso, come quello del *flux qubit*, si osserva il fenomeno della quantizzazione del flusso, ovvero il flusso totale Φ' , dato dal contributo della corrente che circola nel circuito più il contributo del flusso esterno, che deve essere sempre multiplo intero di $\Phi_0 = h/(2e)$, ossia $\Phi' = m\Phi_0$, con $m \in \mathbb{Z}$.

A causa di questo fenomeno il *flux qubit* diventa analogo al *charge qubit*, ma con il rapporto E_J/E_C invertito, infatti, scegliendo valori del flusso esterno semi-interi pari a $\Phi_{ext} = (m + 1/2)\Phi_0$, si ottengono stati energeticamente molto vicini per valori di $\Phi = \Phi_{ext} \pm 1/2$. Gli altri livelli energetici sono invece ben distanziati, situazione analoga a quella del *charge qubit*.

I due ket del sistema corrispondenti a $\Phi = \Phi_{ext} \pm 1/2$, che per continuare ad utilizzare la stessa notazione si possono denominare come:

$$|\Phi_{ext} - 1/2\rangle = |0\rangle \quad (3.39)$$

$$|\Phi_{ext} + 1/2\rangle = |1\rangle \quad (3.40)$$

questi due stati corrispondono a due correnti persistenti nel circuito che fluiscono in versi opposti; per questo motivo questo qubit prende anche il nome di *persistent-current qubit*.

A questo punto, vista l'analogia con il *charge qubit*, si può trattare il sistema come fatto in precedenza, con l'unica differenza che ora la variabile da controllare è il flusso e non più la carica.

Anche questa configurazione dunque è un efficace sistema a due livelli, ottimo per la creazione di un *qubit*.

3.5 Cenni storici

Il *phase qubit* è uno dei primi qubit ad essere stati implementati; si tratta di un circuito già sotto studio già dagli anni '80. Nel 1985 questo sistema è stato utilizzato per osservare per la prima volta, da Martinis, Devoret e Clarke [8], dei livelli energetici quantizzati per una variabile macroscopica: la fase ϕ .

La prima dimostrazione che con questo circuito poteva essere costruito un qubit che eseguiva tutte le operazioni richieste avvenne però solo nel 2002 da Martins et al. [9]. Successivamente vennero eseguiti altri esperimenti, come nel 2009, quando vennero violate le *disuguaglianze di Bell* [10]; questa dimostrazione fornisce un'ulteriore forte evidenza che questo circuito macroscopico è profondamente governato dalle leggi della meccanica quantistica.

Ciò nonostante, a causa della scarsa anarmonicità e nella difficoltà che si riscontra nel preservare la coerenza quantistica nel circuito, al giorno d'oggi, nella maggior parte degli esperimenti e delle applicazioni, vengono normalmente utilizzati il *charge qubit* e il *flux qubit* o loro varianti, mentre il *phase qubit* è ormai in disuso.

Il *charge qubit*, invece, è stato proposto per la prima volta nel 1997 da Alexander Shnirman et al. [11] ed è stato uno dei primi qubit superconduttori sviluppati, nel 1999 infatti Nakamura et al. riuscirono a controllare gli stati quantistici di una Cooper pair box [12], preservando la coerenza quantistica del sistema.

Tutt'oggi le varianti del charge qubit sono tra le più studiate ed a contribuire alla loro ricerca si sono unite anche grandi aziende. Un esempio è IBM che sta sviluppando un computer quantistico basato sul *transmon qubit* [13], una variante della Cooper pair box. Recentemente ha inoltre rilasciato una versione a 127 qubit, il più potente *quantum computer* fin'ora costruito. IBM prevede addirittura il rilascio, nel 2023, di una versione da oltre 1000 qubit. Amazon sta contribuendo alla costruzione di tre hardware diversi di cui uno basato sempre sui *transmon qubit*. Anche Google basa il proprio computer su questo qubit; nel 2019 ha inoltre pubblicato un articolo in cui affermano di aver dimostrato, con l'utilizzo del processore *Sycamore*, la cosiddetta supremazia quantistica [14], ovvero il superamento della potenza di calcolo simulabile con i computer classici.

I *flux qubits* invece, nonostante offrano alcuni vantaggi rispetto ai *charge qubits*, come una minore sensibilità al rumore di carica, non trovano ancora spazio tra simulatori e computer quantistici, dove vengono privilegiati circuiti basati su, appunto, il *charge qubit*. In ogni caso si tratta di un circuito molto promettente, ad esempio si pensa possa essere un utile strumento per lo sviluppo della *adiabatic quantum computation*, a causa dei suoi rapidi tempi di oscillazione, e su cui si basano già diversi esperimenti di ottica [15].

Conclusioni

In questo elaborato come prima cosa sono state ricavate le equazioni di Josephson e la loro Hamiltoniana con due differenti approcci. In seguito è stato mostrato il ruolo della giunzione in un circuito, ossia quello di induttanza, e sono stati calcolati i primi tre stati energetici nel caso di piccole differenze di fase tra i due superconduttori coinvolti. Situazione nella quale il sistema fisico risulta essere equivalente ad un oscillatore LC.

Sucessivamente è stata calcolata, in prima approssimazione, l'anarmonicità della giunzione, caratteristica che rende le giunzioni Josephson ottimi sistemi per la realizzazione dei bit quantistici.

Infine sono stati analizzati i tre circuiti principali per la costruzione dei qubit partendo dal *phase qubit*, uno dei primi qubit costruiti, ma con piccola anarmonicità e ormai in disuso; passando poi per il *charge qubit*, un circuito approssimabile con buona precisione ad un sistema a due livelli, ma molto sensibile a variazioni della carica; arrivando infine al *flux qubit*, di nuovo ben approssimabile ad un sistema a due livelli, ma molto sensibile a flussi esterni.

Questi circuiti sono la base da cui partire per uno studio più approfondito alla ricerca del miglior qubit possibile. Esistono già moltissime varianti che cercano di trovare il giusto compromesso tra sensibilità al rumore e approssimazione a sistema a due livelli; un esempio è proprio il *transmon qubit* utilizzato per la costruzione di molti hardware quantistici.

La ricerca e lo studio dei computer quantistici è iniziata alcuni decenni fa, alimentata da una proposta di Feynman nel 1982 di costruire "simulatori quantistici" in grado di risolvere problemi computazionalmente impossibili per i computer classici. Nonostante i primi processori quantistici siano stati realizzati solamente pochi anni fa, oggi siamo già in grado di costruire sistemi con oltre 100 qubit che lavorano coerentemente tra loro e, nel giro di pochi anni, dovremmo riuscire a costruire sistemi di oltre 1000 qubit che ci permetteranno di simulare sistemi quantistici sempre più complessi.

Bibliografia

- [1] Brian David Josephson. Possible new effects in superconductive tunnelling. *Physics letters*, 1(7):251–253, 1962.
- [2] Rowell John M Anderson Philip W. Probable observation of the josephson superconducting tunneling effect. *Physical Review Letters*, 10(6):230, 1963.
- [3] Richard Feynman et al. *The Feynman Lectures on Physics*, volume 3 chapter 21. Addison–Wesley, 1964.
- [4] MJ Werner and PD Drummond. Quantum theory for josephson-junction circuits. *Physical Review A*, 43(11):6414, 1991.
- [5] Anton Frisk Kockum and Franco Nori. Quantum bits with josephson junctions. In *Fundamentals and Frontiers of the Josephson Effect*, pages 703–741. Springer, 2019.
- [6] Yuriy Makhlin, Gerd Schön, and Alexander Shnirman. Quantum-state engineering with josephson-junction devices. *Reviews of modern physics*, 73(2):357, 2001.
- [7] Nathan K Langford. Circuit qed-lecture notes. *arXiv preprint arXiv:1310.1897*, 2013.
- [8] John M Martinis, Michel H Devoret, and John Clarke. Energy-level quantization in the zero-voltage state of a current-biased josephson junction. *Physical review letters*, 55(15):1543, 1985.
- [9] John M Martinis, Sae Nam, Joe Aumentado, and C Urbina. Rabi oscillations in a large josephson-junction qubit. *Physical review letters*, 89(11):117901, 2002.
- [10] Markus Ansmann, H Wang, Radoslaw C Bialczak, Max Hofheinz, Erik Lucero, Matthew Neeley, Aaron D O’Connell, Daniel Sank, Martin Weides, James Wenner, et al. Violation of bell’s inequality in josephson phase qubits. *Nature*, 461(7263):504–506, 2009.
- [11] Alexander Shnirman, Gerd Schön, and Ziv Hermon. Quantum manipulations of small josephson junctions. *Physical Review Letters*, 79(12):2371, 1997.
- [12] Yasunobu Nakamura, Yu A Pashkin, and JS Tsai. Coherent control of macroscopic quantum states in a single-cooper-pair box. *nature*, 398(6730):786–788, 1999.
- [13] Jens Koch, M Yu Terri, Jay Gambetta, Andrew A Houck, David I Schuster, Johannes Majer, Alexandre Blais, Michel H Devoret, Steven M Girvin, and Robert J Schoelkopf. Charge-insensitive qubit design derived from the cooper pair box. *Physical Review A*, 76(4):042319, 2007.
- [14] Frank Arute, Kunal Arya, Ryan Babbush, Dave Bacon, Joseph C Bardin, Rami Barends, Rupak Biswas, Sergio Boixo, Fernando GSL Brandao, David A Buell, et al. Quantum supremacy using a programmable superconducting processor. *Nature*, 574(7779):505–510, 2019.
- [15] A Yu Dmitriev and OV Astafiev. A perspective on superconducting flux qubits. *Applied Physics Letters*, 119(8):080501, 2021.