

UNIVERSITÀ DEGLI STUDI DI PADOVA

Dipartimento di Fisica e Astronomia “Galileo Galilei”

Corso di Laurea in Fisica

Tesi di Laurea

Propagazione di radiazione in mezzi fortemente magnetizzati

Relatore

Prof. Roberto Turolla

Correlatore

Dott. Roberto Taverna

Laureando

Giovanni Stimamiglio

Anno Accademico 2022/2023

ABSTRACT

In presenza di campi magnetici ultra-forti la radiazione elettromagnetica si propaga in due modi normali di polarizzazione (ordinario, O, e straordinario, X). Negli strati atmosferici di una stella di neutroni, gli effetti concorrenti legati al plasma e al vuoto fortemente magnetizzati fanno in modo che la classificazione dei due modi normali diventi ambigua. In particolare, nell'attraversare l'atmosfera i fotoni possono subire mode switching, passando da X a O o viceversa, alla cosiddetta vacuum resonance. Si tratta di un effetto di QED, assimilabile al Mikheyev-Smirnoff-Wolfenstein (MSW) effect nell'oscillazione dei neutrini. Nella tesi vengono approfonditi alcuni aspetti della vacuum resonance, riottenendo attraverso l'uso di semplici codici numerici alcuni risultati (mode collapse, mode switching) presenti in letteratura.



Indice

Introduzione	1
1 Fisica in forti campi magnetici	3
1.1 Effetto di campi forti sul vuoto in QED	3
1.2 Elettroni in un forte campo magnetico	6
2 Stelle di neutroni	9
2.1 Formazione	9
2.1.1 Formazione del campo magnetico delle magnetars	10
2.2 Classificazione	10
2.3 Struttura generale	13
3 Propagazione della radiazione	15
3.1 Plasma freddo	15
3.1.1 Tensore dielettrico del plasma e polarizzazione del vuoto	15
3.1.2 Modi di propagazione dei fotoni	16
3.1.3 Mode conversion in un plasma non omogeneo	18
3.2 Plasma caldo e mode collapse	21
3.2.1 Condizioni per il verificarsi del mode collapse	23
3.2.2 Propagazione delle onde ai punti di mode collapse	24
3.3 Effetti sullo spettro di emissione termica di una stella di neutroni	25
3.4 Effetto Mikheyev–Smirnov–Wolfenstein	27
3.5 Metodi numerici	29
Discussione e Conclusioni	31
Bibliografia	33

Introduzione

La presenza di forti campi magnetici può influenzare il modo in cui la radiazione si propaga all'interno di un mezzo. Ciò è dovuto all'effetto che un campo magnetico ha sulle proprietà del mezzo stesso. Ad esempio, l'elettrodinamica quantistica prevede che, in presenza di un campo magnetico molto intenso, il vuoto diventi birifrangente rispetto alla propagazione di radiazione elettromagnetica [7]. L'unione di questo effetto con le proprietà dielettriche del plasma dà luogo al fenomeno della “vacuum resonance”. In presenza di forti campi magnetici, la radiazione elettromagnetica si propaga in due modi normali di propagazione, definiti a partire dalla direzione reciproca del vettore campo elettrico con il piano individuato dalla direzione di propagazione e dal campo magnetico: il modo ordinario (O) e quello straordinario (X) [16]. Attraversando degli strati di plasma fortemente magnetizzato di densità non uniforme, come per esempio avviene nel caso degli strati atmosferici di una stella di neutroni [4], la classificazione dei modi può diventare ambigua. Ciò è dovuto al concorrere degli effetti di vuoto e di quelli di plasma, che tendono a modificare la polarizzazione, rendendola lineare in direzioni perpendicolari l'uno rispetto all'altro. In particolare, nello strato in cui tali effetti si equilibrano (alla cosiddetta vacuum resonance) la polarizzazione passa dall'essere lineare ad essere circolare, facendo in modo che i fotoni cambino il loro modo di polarizzazione originario in maniera adiabatica [5].

Questo fenomeno, detto appunto “mode conversion” o “mode switching”, è assimilabile all'effetto MSW di oscillazione dei neutrini ([20]) ed è fondamentale nella comprensione delle proprietà spettrali e di polarizzazione della radiazione emessa dagli strati atmosferici di una stella di neutroni, lo studio del quale permette di comprendere meglio la composizione e le proprietà di tali oggetti stellari. In particolare, la posizione della vacuum resonance rispetto alle fotosfere dei modi di polarizzazione influenza drasticamente lo spettro di emissione, portando a differenze che dipendono tanto dall'energia dei fotoni quanto dall'intensità del campo magnetico [8]. Inoltre, il recente lancio di IXPE (Imaging X-ray Polarimetry Explorer) da parte della NASA (in collaborazione con l'ASI e l'INAF) permetterà di osservare la polarizzazione della radiazione emessa da sorgenti altamente magnetizzate come le magnetar, permettendo di aggiungere informazioni riguardo la polarizzazione all'analisi spettrale fatta finora [17].

Inoltre, gioca un ruolo fondamentale anche la probabilità che tale cambio di modo avvenga: come detto, infatti, il mode switching che avviene alla vacuum resonance deve essere adiabatico, ma la condizione affinché ciò avvenga non è sempre verificata e dipende da molti fattori, tra cui l'energia dei fotoni, il campo magnetico e la temperatura [15]. Di conseguenza, più la condizione di adiabaticità non viene rispettata, meno efficace la mode conversion diventa. Lo studio della probabilità di conversione risulta determinante [12], in quanto la sua influenza sullo spettro di emissione è di importanza paragonabile a quella della posizione della vacuum resonance.

La presenza dello smorzamento dà poi luogo al fenomeno del “mode collapse”, che avviene quando i due modi di polarizzazione coincidono e quindi collassano l'uno sull'altro al verificarsi di particolari condizioni, nei cosiddetti punti di collasso [21]. La peculiarità di tali punti è la dipendenza dei modi dal percorso, legata all'impossibilità di distinguere univocamente i modi in un intorno dei punti di collasso a meno di compiere una scelta non fisica.

Scopo di questa tesi è tracciare una panoramica degli effetti di campi magnetici molto intensi sulla propagazione della radiazione, raccogliendo gli studi già presenti in letteratura e riassumendoli al

fine di creare una visione di insieme organica e lineare degli effetti appena introdotti. Inoltre, alcuni risultati sono stati riottenuti sfruttando l'utilizzo di un codice numerico in C++.

In particolare, nel capitolo [1](#) vengono delineati alcuni effetti di campi magnetici molto intensi in fisica, tra cui la birifrangenza del vuoto sopracitata e l'influenza sul moto degli elettroni. Nel capitolo [2](#) si trova un'introduzione alle stelle di neutroni dalla loro formazione fino alla loro struttura, passando per la loro classificazione in base alle proprietà che le caratterizzano. Nel capitolo [3](#), invece, si tratta in maniera più approfondita la propagazione della radiazione, differenziando tra i casi di plasma freddo e plasma caldo ed indagando gli effetti della mode conversion sullo spettro termico di una stella di neutroni. In quest'ultimo capitolo viene inoltre introdotto l'effetto MSW dei neutrini, le cui analogie con l'effetto di mode conversion vengono discusse nelle conclusioni. Infine, una breve panoramica del programma numerico e delle sue caratteristiche principali viene tracciata nella sezione [3.5](#).

Capitolo 1

Fisica in forti campi magnetici

1.1 Effetto di campi forti sul vuoto in QED

Se sottoposto ad un campo esterno, elettrico o magnetico, molto forte, il vuoto si magnetizza e polarizza. Utilizzando l'elettrodinamica quantistica (QED), ed in particolare delle correzioni ad un loop, è possibile calcolare l'indice di rifrazione, la permeabilità magnetica e la costante dielettrica del vuoto sottoposto a tali campi.

Prima di applicarla alla Lagrangiana del campo elettromagnetico, è doveroso spiegare brevemente cosa si intende con correzione ad un loop. In meccanica quantistica, la dinamica di una data particella è descritta dal propagatore, ossia un'opportuna funzione che esprime la probabilità che la particella si sposti tra due punti A e B in un certo intervallo di tempo Δt . Lo scambio di energia e momento tra particelle diverse che interagiscono tra loro tramite determinati processi può essere espresso come scambio di altre particelle (tipicamente fotoni, nel caso elettromagnetico). Per calcolare la probabilità con cui avviene una data interazione è possibile combinare opportunamente i propagatori di tutte le particelle coinvolte, visivamente rappresentati nei cosiddetti “diagrammi di Feynman”. Tuttavia, in meccanica quantistica, alla stessa interazione possono corrispondere diversi diagrammi di Feynman. Il contributo maggiore alla probabilità finale è dato dai diagrammi più semplici (i cosiddetti diagrammi *tree-level*), in cui le particelle interagenti seguono cammini “diretti”. Ma i fotoni che le particelle interagenti si scambiano durante l'interazione possono convertirsi temporaneamente in coppie elettrone-positrone, che successivamente si annichilano nuovamente in un fotone. Oppure, le particelle interagenti possono irradiare energia (sotto forma di ulteriori fotoni), che vengono poi riassorbiti dalle stesse particelle iniziali. Processi come questo, chiamati processi *a loop*, non sono previsti in elettrodinamica classica, in quanto violerebbero la conservazione di energia e momento. Possono, però, verificarsi in meccanica quantistica, ammesso che avvengano in tempi compatibili con il principio di indeterminazione di Heisenberg (in questo senso si parla di particelle “virtuali”). La probabilità totale del processo è a rigore data dalla somma dei contributi del processo principale e dei processi a loop successivi; per semplicità, si può pensare di fermarsi ai processi a un loop (al primo ordine), considerando trascurabili tutti i contributi agli ordini successivi.

Consideriamo allora la Lagrangiana del campo elettromagnetico:

$$\mathcal{L}_0 = -\frac{1}{4}F_{\mu\nu}F^{\mu\nu}, \quad (1.1)$$

dove $F_{\mu\nu} = \partial_\mu A_\nu - \partial_\nu A_\mu$ è il tensore elettromagnetico.

Se in quest'ultima vengono incluse correzioni ad un *loop*, si ottiene un termine correttivo non lineare \mathcal{L}_1 , da sommare al termine imperturbato dell'eq. [1.1](#), espresso nelle unità di Heaviside-Lorentz ($\epsilon_0 = \mu_0 = 1$)

$$\mathcal{L}_1 = \frac{e^2}{hc} \int_0^\infty e^{-\zeta} \frac{d\zeta}{\zeta^3} \left\{ i\zeta^2 \frac{\sqrt{-K}}{4} \frac{\cos\left(\frac{\zeta}{B_Q} \sqrt{-\frac{I}{2} + i\frac{\sqrt{-K}}{2}}\right) + \cos\left(\frac{\zeta}{B_Q} \sqrt{-\frac{I}{2} - i\frac{\sqrt{-K}}{2}}\right)}{\cos\left(\frac{\zeta}{B_Q} \sqrt{-\frac{I}{2} + i\frac{\sqrt{-K}}{2}}\right) - \cos\left(\frac{\zeta}{B_Q} \sqrt{-\frac{I}{2} - i\frac{\sqrt{-K}}{2}}\right)} + |B_Q|^2 + \frac{\zeta^2}{6} I \right\}, \quad (1.2)$$

dove B_Q è il campo critico quantistico, definito come

$$B_Q = \frac{m_e^2 c^3}{e\hbar} = 4.4 \times 10^{13} \text{ G}, \quad (1.3)$$

e i due termini sono stati scritti in funzione degli invarianti di Lorentz

$$I = F_{\mu\nu} F^{\mu\nu} = 2(|\mathbf{B}|^2 - |\mathbf{E}|^2) \quad ; \quad K = \left(\frac{1}{2} e^{\lambda\rho\mu\nu} F_{\lambda\rho} F_{\mu\nu}\right)^2 = -(\mathbf{4E} \cdot \mathbf{B})^2, \quad (1.4)$$

con $e^{\lambda\rho\mu\nu}$ il tensore di Levi-Civita.

Risulta quindi opportuno definire un parametro adimensionale ξ che esprima la forza del campo

$$\xi = \frac{1}{B_Q} \sqrt{\frac{I}{2}} \quad (1.5)$$

e sfruttare l'espressione analitica del termine correttivo della Lagrangiana nel limite di K piccolo

$$\mathcal{L}_1 = \mathcal{L}_1(I, 0) + K \frac{\partial \mathcal{L}_1}{\partial K} \Big|_{K=0} + \frac{K^2}{2} \frac{\partial^2 \mathcal{L}_1}{\partial K^2} \Big|_{K=0} + \dots \quad (1.6)$$

per i primi due termini, definiti come

$$\mathcal{L}_1(1, 0) = \frac{e^2}{hc} \frac{I}{2} X_0\left(\frac{1}{\xi}\right), \quad \frac{\partial \mathcal{L}_1}{\partial K} \Big|_{K=0} = \frac{e^2}{hc} \frac{1}{16I} X_1\left(\frac{1}{\xi}\right), \quad (1.7)$$

dove

$$X_0(x) = 4 \int_0^{\frac{x}{2}-1} \ln(\Gamma(v+1)) dv + \frac{1}{3} \ln\left(\frac{1}{x}\right) + 2 \ln 4\pi - (4 \ln A + \frac{5}{3} \ln 2) + \left[\ln 4\pi + 1 + \ln\left(\frac{1}{x}\right) \right] x + \left[\frac{3}{4} + \frac{1}{2} \ln\left(\frac{2}{x}\right) \right] x^2, \quad (1.8)$$

$$X_1(x) = -2X_0(x) + xX_0^{(1)}(x) + \frac{2}{3}X_0^{(2)}(x) - \frac{2}{9} \frac{1}{x^2}. \quad (1.9)$$

Qui $X_0^{(n)} = \frac{d^n X_0(x)}{dx^n}$ e $\ln A = \frac{1}{12} - \zeta^{(1)}(-1) \approx 0.2488$, utilizzando la derivata prima della funzione ζ di Riemann. Viene inoltre usata la funzione Γ di Eulero.

Si tratta quindi il vuoto come un mezzo polarizzabile; i campi macroscopici sono definiti a partire dai momenti lagrangiani generalizzati coniugati ai campi:

$$\mathbf{D} = \frac{\partial \mathcal{L}}{\partial \mathbf{E}} = \mathbf{E} + \mathbf{P}, \quad \mathbf{H} = -\frac{\partial \mathcal{L}}{\partial \mathbf{B}} = \mathbf{B} - \mathbf{M}, \quad \mathbf{P} = \frac{\partial \mathcal{L}_1}{\partial \mathbf{E}}, \quad \mathbf{M} = \frac{\partial \mathcal{L}_1}{\partial \mathbf{B}}. \quad (1.10)$$

Per il vuoto, si definiscono rispettivamente i tensori dielettrico (ϵ_{ij}) e inverso della permeabilità magnetica (μ_{ij}) attraverso le relazioni

$$D_i = \epsilon_{ij} E_j, \quad H_i = \mu'_{ij} B_j, \quad (1.11)$$

definite, sfruttando le eq. [1.4](#), da

$$\epsilon_{ij} = \delta_{ij} - 4 \frac{\partial \mathcal{L}_1}{\partial I} \delta_{ij} - 32 \frac{\partial \mathcal{L}_1}{\partial K} B_i B_j, \quad (1.12)$$

$$\mu'_{ij} = \delta_{ij} - 4 \frac{\partial \mathcal{L}_1}{\partial I} \delta_{ij} + 32 \frac{\partial \mathcal{L}_1}{\partial K} E_i E_j, \quad (1.13)$$

dove l'apice indica appunto l'inverso del tensore permeabilità magnetica.

Al fine di ricostruire l'equazione d'onda, è necessario linearizzare le equazioni [1.10](#) nei campi $\tilde{\mathbf{E}}$, $\tilde{\mathbf{B}}$ di una generica onda elettromagnetica; così facendo, è possibile ridefinire i tensori dielettrico e inverso della permeabilità magnetica in maniera analoga a quanto fatto nella [1.11](#) ed ottenere un secondo set di matrici, definite come

$$\begin{aligned} \tilde{\epsilon}_{ij} &= \frac{\partial^2 \mathcal{L}}{\partial E_i \partial E_j} = \\ &= \delta_{ij} - 4 \frac{\partial \mathcal{L}_1}{\partial I} \delta_{ij} + 16 \frac{\partial^2 \mathcal{L}_1}{\partial I^2} E_i E_j - \left(64K \frac{\partial^2 \mathcal{L}_1}{\partial K^2} + 32 \frac{\partial \mathcal{L}_1}{\partial K} \right) B_i B_j + 128(\mathbf{E} \cdot \mathbf{B}) \frac{\partial^2 \mathcal{L}_1}{\partial I \partial K} (E_i B_j + E_j B_i), \end{aligned} \quad (1.14)$$

$$\begin{aligned} \tilde{\mu}'_{ij} &= \frac{\partial^2 \mathcal{L}}{\partial B_i \partial B_j} = \\ &= \delta_{ij} - 4 \frac{\partial \mathcal{L}_1}{\partial I} \delta_{ij} - 16 \frac{\partial^2 \mathcal{L}_1}{\partial I^2} B_i B_j + \left(64K \frac{\partial^2 \mathcal{L}_1}{\partial K^2} + 32 \frac{\partial \mathcal{L}_1}{\partial K} \right) E_i E_j + 128(\mathbf{E} \cdot \mathbf{B}) \frac{\partial^2 \mathcal{L}_1}{\partial I \partial K} (E_i B_j + E_j B_i). \end{aligned} \quad (1.15)$$

Inserendo queste matrici nelle equazioni di Maxwell macroscopiche, se si sfrutta il fatto che al primo ordine $\tilde{\mathbf{H}} \parallel \tilde{\mathbf{B}}$ e $\tilde{\mathbf{D}} \parallel \tilde{\mathbf{E}}$, è possibile ottenere le equazioni d'onda

$$\nabla^2 \tilde{\mathbf{E}} - \frac{\tilde{\epsilon}}{\tilde{\mu}' c^2} \frac{\partial^2 \tilde{\mathbf{E}}}{\partial t^2} = 0, \quad \nabla^2 \tilde{\mathbf{B}} - \frac{\tilde{\epsilon}}{\tilde{\mu}' c^2} \frac{\partial^2 \tilde{\mathbf{B}}}{\partial t^2} = 0, \quad (1.16)$$

dove abbiamo definito $\tilde{\mu}'$ ed $\tilde{\epsilon}$ come $\tilde{\mathbf{H}} = \tilde{\mu}' \tilde{\mathbf{B}}$ e $\tilde{\mathbf{D}} = \tilde{\epsilon} \tilde{\mathbf{E}}$. L'onda allora viaggerà a velocità $v = c \sqrt{\tilde{\mu}' / \tilde{\epsilon}}$ e l'indice di rifrazione sarà $n = \sqrt{\tilde{\epsilon} / \tilde{\mu}'}$.

Dato un sistema di riferimento (SdR) cartesiano (x, y, z) , se si considera un campo magnetico parallelo all'asse \hat{z} il campo magnetico dell'onda assume due modi di propagazione: nel caso esso oscilli perpendicolarmente al piano individuato dal campo esterno e dalla direzione di propagazione (\mathbf{k}) si parla di modo ortogonale (\perp), nel caso oscilli in quel piano si ha il modo parallelo (\parallel). Definendo θ come l'angolo tra la direzione di propagazione ed il campo esterno si ottiene, allora

$$n_{\perp} = 1 - \frac{\alpha}{4\pi} X_1 \left(\frac{1}{\xi} \right) \sin^2 \theta + \mathcal{O} \left[\left(\frac{\alpha}{2\pi} \right)^2 \right], \quad (1.17)$$

$$n_{\parallel} = 1 + \frac{\alpha}{4\pi} \left[X_0^{(2)} \left(\frac{1}{\xi} \right) \xi^{-2} - X_0^{(1)} \left(\frac{1}{\xi} \right) \xi^{-1} \right] \sin^2 \theta + \mathcal{O} \left[\left(\frac{\alpha}{2\pi} \right)^2 \right], \quad (1.18)$$

con $\alpha = 1/137$ la costante di struttura fine.

Se si considera invece un campo elettrico parallelo all'asse \hat{z} , i modi di propagazione avranno il campo elettrico ($\tilde{\mathbf{E}}$) o nel piano $\mathbf{k} - \mathbf{E}$ (n_{\parallel}) o perpendicolare a tale piano (n_{\perp}). Ridefinendo quindi

$$\xi = iy = i \frac{E}{E_Q} \quad (1.19)$$

e sostituendo tale equazione in [1.17](#) e [1.18](#) otteniamo gli indici di rifrazione nel caso di campo elettrico esterno

$$n_{\perp} = 1 + \frac{\alpha}{4\pi} X_1 \left(\frac{1}{iy} \right) \sin^2 \theta + \mathcal{O} \left[\left(\frac{\alpha}{2\pi} \right)^2 \right], \quad (1.20)$$

$$n_{\parallel} = 1 + \frac{\alpha}{4\pi} \left[X_0^{(2)} \left(-\frac{i}{y} \right) y^{-2} - iX_0^{(1)} \left(-\frac{i}{y} \right) y^{-1} \right] \sin^2 \theta + \mathcal{O} \left[\left(\frac{\alpha}{2\pi} \right)^2 \right]. \quad (1.21)$$

In generale, la birifrangenza di un mezzo, ossia la sua proprietà di avere indice di rifrazione dipendente dalla polarizzazione e dalla direzione di propagazione dell'onda incidente, viene quantificata con la differenza tra gli indici di rifrazione relativi ai due modi di propagazione. In questo caso, quindi, si ottiene

$$n_{\perp} - n_{\parallel} = \pm \frac{\alpha}{4\pi} \left[X_0^{(1)} \left(\frac{1}{\xi} \right) \xi^{-1} - X_0^{(2)} \left(\frac{1}{\xi} \right) \xi^{-2} - X_1 \left(\frac{1}{\xi} \right) \right] \sin^2 \theta + \mathcal{O} \left[\left(\frac{\alpha}{2\pi} \right)^2 \right], \quad (1.22)$$

dove il $+$ si riferisce al caso del campo magnetico esterno e il $-$ a quello del campo elettrico.

L'andamento della birifrangenza in funzione di ξ è mostrato nella figura [1.1](#) di seguito.

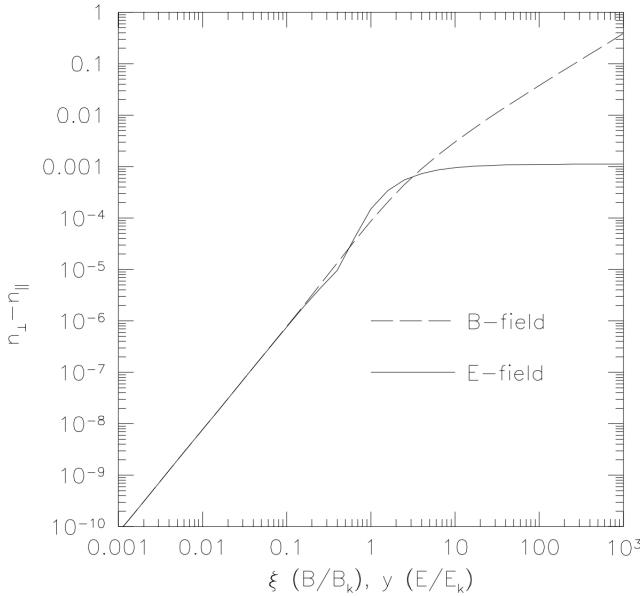


Figura 1.1: Differenza tra gli indici di rifrazione per il modo \perp e il modo \parallel della radiazione che attraversa una zona con campo esterno in funzione del parametro adimensionale di intensità del campo. Tratto da [\[7\]](#).

È immediato notare come, per valori dei campi esterni circa mille volte minori del campo critico, la differenza tra i due indici di rifrazione sia trascurabile ($\sim 10^{-10}$), mentre avvicinandosi al campo critico la differenza diventi apprezzabile. Si nota in particolare l'assenza di un limite superiore nel caso del campo magnetico, mentre per il campo elettrico la birifrangenza si assesta su un valore costante per campo esterno oltre 10 volte più intenso di quello critico: ciò è dovuto al fatto che, in presenza di un campo elettrico così intenso, si osserva produzione di coppie.

1.2 Elettroni in un forte campo magnetico

Per una migliore comprensione delle sezioni successive, è opportuno trattare il moto di una particella carica (in questo caso, elettroni) in un forte campo magnetico.

In primis, quindi, si consideri il moto non relativistico di una particella di massa m_i e carica e_i in un campo magnetico \mathbf{B} parallelo all'asse \hat{z} . In meccanica classica, la particella seguirà un'orbita elicoidale di raggio e frequenza angolare dati da

$$\rho = \frac{m_i c v_{\perp}}{|e_i| B}, \quad \omega_c = \frac{|e_i| B}{m_i c}, \quad (1.23)$$

dove v_{\perp} è la velocità perpendicolare alla direzione del campo.

In meccanica quantistica non relativistica invece, definendo il momento meccanico $\mathbf{\Pi} = \mathbf{p} - \frac{e_i}{c} \mathbf{A} = m_i \mathbf{v}$, il momento canonico $\mathbf{p} = -i\hbar \nabla$ e il potenziale vettore del campo magnetico \mathbf{A} , l'energia cinetica del moto trasverso è quantizzata nei cosiddetti livelli di Landau

$$E_{\perp} = \frac{1}{2} m_i v_{\perp}^2 = \frac{1}{2m_i} \mathbf{\Pi}_{\perp}^2 \rightarrow \left(n_L + \frac{1}{2} \right) \hbar \omega_c, \quad n_L = 0, 1, 2, \dots \quad (1.24)$$

Per un elettrone ($m_i \rightarrow m_e$, $e_i \rightarrow -e$), quindi, il quanto di energia di base viene detto energia di ciclotrone

$$E_{ce} = \hbar\omega_{ce} = \hbar \frac{eB}{m_e c}. \quad (1.25)$$

Se si includono l'energia cinetica legata al momento lungo l'asse \hat{z} (p_z) e l'energia di spin, definita come

$$E_{\sigma_z} = \frac{e\hbar}{2m_e c} \boldsymbol{\sigma} \cdot \mathbf{B} = \frac{\hbar\omega_{ce}\sigma_z}{2}, \quad \sigma_z = \pm 1, \quad (1.26)$$

è possibile riscrivere l'energia totale dell'elettrone come

$$E_n = n\hbar\omega_{ce} + \frac{p_z^2}{2m_e}, \quad n = n_L + \frac{(1 + \sigma_z)}{2} = 0, 1, \dots \quad (1.27)$$

I livelli di Landau introdotti nell'eq. [1.24](#) presentano una degenerazione intrinseca oltre a quella di spin, che riflette l'indipendenza dell'energia dalla posizione del guiding centre. Per tener conto di tale degenerazione, si definisce lo pseudomomento (o momento generalizzato) come

$$\mathbf{K} = \boldsymbol{\Pi} + \frac{e_i}{c} \mathbf{B} \times \mathbf{r}, \quad (1.28)$$

la cui componente parallela all'asse \hat{z} è il momento lineare p_z , mentre quella ortogonale (\mathbf{K}_\perp) è legata al vettore posizione del centro di rotazione (\mathbf{R}_\perp) dalla seguente relazione:

$$\mathbf{R}_c = \frac{c\mathbf{K}_\perp \times \mathbf{B}}{e_i B^2} = \frac{c}{e_i B} \boldsymbol{\Pi}_\perp \times \hat{\mathbf{B}} + \mathbf{r}_\perp, \quad (1.29)$$

dove $\hat{\mathbf{B}}$ è il versore del campo magnetico.

Unendo le equazioni [1.24](#) e [1.29](#) è possibile quantizzare il raggio della rotazione classica come

$$\rho = |\mathbf{r}_\perp - \mathbf{R}_c| = \frac{c}{|e_i|B} |\boldsymbol{\Pi}_\perp| \longrightarrow \sqrt{2n_L + 1} \hat{\rho}, \quad \hat{\rho} = \sqrt{\frac{\hbar c}{|e_i|B}}, \quad (1.30)$$

dove $\hat{\rho}$ viene definito raggio di ciclotrone o lunghezza magnetica.

Tuttavia, solo una delle componenti di \mathbf{K}_\perp è diagonalizzabile per stati stazionari, in quanto quest'ultime non commutano tra loro ($[K_x, K_y] = -i\hbar(e_i/c)B$). Ciò implica l'impossibilità di specificare guiding centre della particella. Se infatti si usa K_x per classificare gli stati, la funzione d'onda assume la forma $e^{iK_x x/\hbar} \phi(y)$, dove $\phi(y)$ è una funzione centrata in $y_c = -cK_x/(e_i B)$. La degenerazione di Landau in un'area $\mathcal{A}_g = L_g^2$ è data da

$$\frac{L_g}{h} \int dK_x = \frac{\mathcal{A}_g}{2\pi \hat{\rho}^2}. \quad (1.31)$$

Per campi magnetici ultraforti, ossia per $B \gtrsim B_Q$ (dove B_Q è definito nell'eq. [1.3](#)), il moto trasverso dell'elettrone diventa relativistico ed il momento trasverso è quindi quantizzato come in eq. [1.24](#). Tuttavia, risolvendo l'equazione di Dirac in un campo magnetico omogeneo, l'equazione [1.27](#) per l'energia totale dell'elettrone deve essere riscritta come

$$E_n = \sqrt{c^2 p_z^2 - m_e^2 c^4 \left(1 + 2n \frac{B}{B_Q}\right)}, \quad (1.32)$$

mentre la forma della funzione d'onda di Landau nel caso relativistico è la stessa del caso non relativistico. Correzioni di ordine superiore in e^2 possono essere calcolate, ma sono generalmente trascurabili.

Capitolo 2

Stelle di neutroni

2.1 Formazione

L'intera vita di una stella potrebbe essere vista come un gioco di equilibri tra la contrazione dovuta alla forza gravitazionale e l'espansione dovuta, a seconda della fase evolutiva, a diversi fattori.

La nascita di una stella avviene per il collasso gravitazionale di una nube di gas interstellare costituita principalmente da idrogeno ed elio con temperatura o energia cinetica minore, oppure con densità maggiore, rispetto alla materia circostante. La compressione dell'ammasso gassoso genera un repentino aumento di temperatura sufficiente ad innescare reazioni termonucleari, la cui energia bilancia la gravità generata dalla massa stessa della stella.

Nella fase principale della sua vita, la stella (che si assume appartenere alla sequenza principale) trasforma idrogeno in elio e si parla quindi di fase di bruciamento dell'H. Le reazioni termonucleari che mediano tale processo dipendono dalla temperatura, e quindi dalla massa, della stella: per stelle con $T < 15 \times 10^6$ K e $M \sim 1.3M_{\odot}$ ([19]) domina il cosiddetto ciclo protone-protone ($6p \rightarrow 2e^+ + 2\nu_e + 2\gamma + 2p + {}^4\text{He} + \Delta E$, con $\Delta E \simeq 26.73$ MeV), mentre all'aumentare della temperatura prevale il ciclo CNO, composto da diverse possibili reazioni accomunate dalla presenza di atomi di carbonio (C), azoto (N) ed ossigeno (O) che fungono da catalizzatori. La fase di bruciamento dell'idrogeno, che rappresenta la maggior parte della vita della stella, continua fino a quando la quantità di combustibile termonucleare presente non è più sufficiente a sostenere la reazione. Il collasso gravitazionale, finora bilanciato, riprende, fino a che l'aumento di temperatura dovuto alla contrazione non è sufficiente ad innescare la fusione dell'elio. All'esaurirsi dell'elio, il collasso riprende e si bruciano gli elementi successivi, fino a giungere agli elementi del gruppo del ferro (Fe, Ni, Co): in particolare, l'energia di legame per nucleone del ${}^{56}\text{Fe}$ è la più alta tra tutti i nuclei che possono essere prodotti in quantità apprezzabile nelle stelle, e di conseguenza la sua fusione nucleare non è vantaggiosa, ossia non rilascia energia in quanto non è possibile produrre un nucleo più legato. Il ferro rappresenta, in sostanza, la cenere della fusione termonucleare.

Al venire meno della pressione termica dovuta alle reazioni termonucleari, il collasso gravitazionale continua e si aprono due possibilità per lo stato finale: una stella in equilibrio supportata da una fonte non termica di pressione, oppure un collasso gravitazionale continuo. Il collasso gravitazionale compatta la materia stellare fino a che la compressione non è tale da rendere significativa la pressione di Fermi degli elettroni, legata all'impossibilità di avere due elettroni nello stesso stato quantistico per il principio di esclusione di Pauli (degenerazione degli elettroni). Se tale pressione è sufficiente a bilanciare la gravità, si forma una nana bianca.

Se la massa del nucleo in collasso è, in questa fase, superiore al limite rappresentato dalla massa di Chandrasekhar ($M_{Ch} \simeq 1.4M_{\odot}$, ciò avviene generalmente per stelle di massa iniziale $\gtrsim 8M_{\odot}$), la pressione di Fermi degli elettroni non è sufficiente a bilanciare la gravità e il collasso continua, innescando nel nucleo il processo di neutronizzazione ($p + e^- \rightarrow n + \nu_e$). L'aumento progressivo della densità di neutroni dovuta a tale processo genera da un lato la pressione di Fermi dei neutroni (analoga a quella degli elettroni) e dall'altro forze nucleari quali la repulsione dovuta alla forza forte. Mentre

gli strati più esterni della stella, che stavano collassando verso il nucleo, vengono espulsi violentemente in una supernova, se le pressioni non termiche sopracitate risultano sufficienti ad equilibrare la forza di gravità, il nucleo si assesta e forma una stella di neutroni (NS), che è un oggetto estremamente compatto (una NS di massa circa pari a quella del Sole ha un raggio di ~ 10 km).

Se, al contrario, la forza di gravità prevale (ciò avviene se il nucleo rimasto ha massa superiore a $\sim 3M_{\odot}$ [2]), il collasso continua indefinitamente e si genera un buco nero.

2.1.1 Formazione del campo magnetico delle magnetars

Riguardo l'origine del campo magnetico delle magnetar vi sono due linee di pensiero prevalenti.

L'ipotesi più tradizionale è quella del campo fossile, secondo la quale il campo magnetico viene ereditato dalla stella progenitrice e si basa sulla conservazione del flusso magnetico, con il campo che si amplifica durante il collasso del nucleo stellare (approssimativamente come $B \propto R^{-2}$). Dal momento che le stelle di neutroni si formano in una core-collapse supernova dal materiale contenuto nel nucleo convettivo di una stella di sequenza principale, quindi, il campo magnetico potrebbe essere generato proprio dal collasso del nucleo convettivo della stella progenitrice. Tale ipotesi è avvalorata dal fatto che la supernova legata a tale collasso possa generare ~ 25 magnetars [23] con proprietà, quali periodo di rotazione, età e appunto campo magnetico, compatibili con quelle osservate.

Un'altra ipotesi è legata alla teoria dinamo: una stella di neutroni fortemente magnetizzata è generata dall'amplificazione del campo magnetico dovuta ad un consistente effetto dinamo nella fase iniziale altamente convettiva della protostella (i primi ~ 10 s). Rotazione e convezione producono, in un plasma astrofisico, due tipi di effetto dinamo: da un lato l' α - *dynamo* dovuto all'accoppiamento tra rotazione e moti convettivi, dall'altro l' ω - *dynamo* alimentato dalla rotazione differenziale. Entrambi questi effetti operano a basso numero di Rossby (che rappresenta il rapporto fra l'accelerazione inerziale di un corpo e l'accelerazione di Coriolis), per cui il periodo di rotazione iniziale deve essere breve ($\lesssim 3$ ms) affinché il mixing convettivo risulti efficace: ciò indicherebbe le magnetars come il punto di arrivo dell'evoluzione di stelle molto massive il cui nucleo ruota molto rapidamente.

In entrambe le ipotesi, il campo magnetico della protostella di neutroni è instabile, evolvendo in una configurazione stabile su un tempo di Alfvén $t_A \sim (4\pi\rho)^{1/2} R/B$, per $B \sim 10^{15}$ G si ha $t_A \sim 0.1$ s, ossia ben prima della formazione della crosta, che avviene circa 100 s dopo il collasso. Tale configurazione stabile è molto probabilmente costituita da un campo poloidale e da uno toroidale di intensità paragonabili.

2.2 Classificazione

Si osservano diverse classi di stelle di neutroni, caratterizzate da proprietà anche molto diverse tra loro.

Un metodo efficace per visualizzare la loro classificazione è mediante il diagramma $P - \dot{P}$ (fig. 2.1) dove P è il periodo di rotazione e \dot{P} la sua derivata temporale. Il grafico presenta inoltre informazioni sul campo magnetico superficiale (linee tratteggiate a coefficiente angolare negativo) e sull'età caratteristica (linee punteggiate a coefficiente positivo) calcolati rispettivamente come

$$B = \sqrt{\frac{3c^3 I}{8\pi^2 R^6} P \dot{P}}, \quad \tau = \frac{P}{2\dot{P}}, \quad (2.1)$$

dove I è il momento di inerzia della stella ed R è il suo raggio. La linea nera diagonale rappresenta la cosiddetta *death line*: quando una stella di neutroni, che rallenta nel tempo la sua velocità di rotazione, supera tale linea, le sue emissioni radio cessano. La presenza e la posizione di tale linea sono strettamente vincolate alle osservazioni: la sua teorizzazione deriva infatti dalla necessità di motivare l'altrimenti inspiegabile assenza di NS osservate nella zona ad alto P e bassa \dot{P} del grafico, mentre la parametrizzazione mostrata in figura è $B/P^2 = 0.17 \times 10^{12} \text{Gs}^{-2}$.

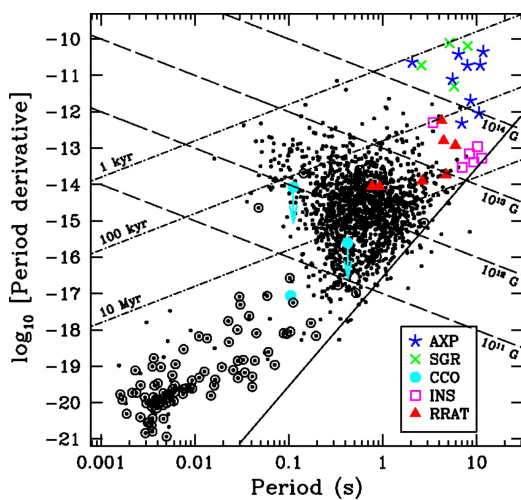


Figura 2.1: Diagramma $P-\dot{P}$. I dati vengono dall' ATNF Pulsar catalog www.atnf.csiro.au/research/pulsar/psrcat, e dal McGill SGR/AXP Online Catalog www.physics.mcgill.ca/pulsar/magnetar/main.html. I cerchi aperti indicano sistemi binari. Immagine tratta da [10].

I puntini neri in figura, che rappresentano la maggior parte delle stelle di neutroni osservate (oltre il 95% degli oggetti totali), sono le Rotation-Powered Pulsar (RPPs): questo termine, più preciso del largamente utilizzato Radio Pulsars (PSRs), indica una classe di oggetti che emettono regolarmente impulsi generalmente nella banda delle onde radio. La nomenclatura RPP nasce dal fatto che l'energia di tali oggetti deriva dalla perdita di energia rotazionale legata all'azione frenante del loro campo magnetico. Il loro periodo varia da 1 ms a 8 s, mentre il loro campo magnetico si assesta tra 10^8 e 9×10^{13} G.

Alcune RPP sono state osservate anche in banda X; l'emissione di raggi X delle RPPs si divide in due categorie:

- Emissione termica, risultato del raffreddamento residuo in seguito alla formazione della stella nel collasso della stella progenitrice in una supernova. Il suo studio potrebbe aiutare a porre dei limiti sull'equazione di stato della materia densa, che rappresenta un problema ancora aperto;
- Emissione non termica, che solitamente segue una legge di potenza ed ha frequenza maggiore della componente termica, generata da particelle accelerate negli strati più esterni della magnetosfera e strettamente correlata al rate di perdita di energia cinetica rotazionale della pulsar legata al rallentamento della sua rotazione (definita come $\dot{E} = 4\pi^2 I \dot{P} / P^3$ dove I è il momento di inerzia della stella).

Una sottoclasse delle RPPs sono le Millisecond Pulsars (MSPs), caratterizzate da $P < 20$ ms e $B \lesssim 10^{10}$ G: sebbene siano anch'esse alimentate dalla perdita di energia rotazionale, le loro peculiari proprietà derivano dalla loro storia evolutiva. Tali stelle potrebbero essersi formate da sistemi binari long-lived: in generale, una NS in un sistema binario non è osservabile come radio pulsar in quanto la corona della compagna disperderebbe il segnale radio rendendolo troppo tenue per essere captato; tuttavia, si ritiene che in una fase molto avanzata dell'evoluzione (da qui l'epiteto long-lived), quando la NS ha già superato la *death line*, l'espansione della compagna binaria dovuta al suo processo evolutivo porti ad un trasferimento di massa. Se il campo magnetico della stella di neutroni è sufficientemente intenso da indirizzare la materia accresciuta verso i poli magnetici, si creeranno sopra quest'ultimi due calde colonne di gas che emettono raggi-X, rendendo il sistema una X-ray binary. Questo episodio di accrescimento (detto "di riciclo") velocizza la rotazione della NS, riportandola oltre la *death line* e assestandone il campo magnetico su valori più modesti (in quanto viene, per esempio, "schermato" dalla materia accresciuta). Si spiegano così tutte le peculiari proprietà delle MSPs [3].

Un'altra classe è rappresentata dalle Rotating Radio Transients (RRATs), oggetti di recente scoperta. Si differenziano dalle RPPs in quanto non producono emissioni periodiche osservabili, bensì improvvisi e non prevedibili bursts radio di breve durata. Nonostante ciò, è possibile dedurre una periodicità di fondo grazie alla costanza in fase dei sopraccitati bursts, per cui oggi si ipotizza che tali oggetti siano una forma estrema di RPPs.

Vi sono poi le già citate magnetars, osservativamente classificate come Anomalous X-ray Pulsars

(AXPs) e Soft-Gamma Repeaters (SGRs). Tali oggetti sono caratterizzati da periodi di rotazione relativamente lunghi, e si ritiene siano alimentate da fortissimi campi magnetici, tra 10^{13} e 10^{15} G, ben oltre il campo critico B_Q introdotto nell'eq. [1.3](#).

La divisione nelle due sottocategorie sopracitate è legata al modo in cui queste sorgenti sono state inizialmente scoperte. Da un lato i SGRs sono stati scoperti con la rilevazione di brevi ed intensi bursts in un range tra i raggi X ad alta energia e i gamma a bassa energia: tale caratteristica aveva inizialmente portato ad associare tali oggetti con i gamma-ray bursts (GRBs), salvo poi riconoscere la ripetitività di tali emissioni (del tutto incompatibile con i GRBs). Al contario, le AXP erano state identificate come X-ray pulsars con emissioni nei raggi X a bassa energia, per poi essere riconosciute come classe a sé stante per la loro alta luminosità, superiore alla potenza emessa per spin-down.

Tali sottoclassi vengono oggi raggruppate sotto il termine magnetars in quanto presentano molte proprietà osservabili in comune, tra cui la mancanza di una compagna binaria, la già citata luminosità nei raggi X, i lunghi periodi di rotazione ($\sim 2\text{--}12$ s) e una grande rate di rallentamento della rotazione ($\dot{P} \sim 10^{-13}\text{--}10^{-11}$ s s $^{-1}$). Inoltre, le magnetars sono caratterizzate dall'emissione di bursts, che possono essere corti, intermedi e giganti (in ordine di frequenza, dai più ai meno comuni ed in ordine di energia emessa, dai meno ai più energetici). La caratteristica fondamentale delle magnetars è tuttavia il fortissimo campo magnetico: sebbene non esistano misure dirette di tali campi, vi sono diverse argomentazioni indipendenti a sostegno di tale ipotesi, tra cui

- la perdita di energia rotazionale è inferiore della luminosità in raggi X ($\dot{E} \ll L_X$);
- i lunghi periodi di rotazioni possono essere ottenuti, compatibilmente con l'età stimata degli oggetti, attraverso effetti di frenamento magnetico solo per campi $\gtrsim 10^{14}$ G;
- la misura di grandi rate di rallentamento della rotazione che implicano campi magnetici dipolari di $\sim 10^{14} - 10^{15}$ G;
- l'enorme quantità di energia ($\sim 10^{44} - 10^{47}$ erg s $^{-1}$) emessa dai giant flares (GFs) può essere spiegata solo da campi magnetici ultra-forti;
- la recente osservazione della polarizzazione in 4U0142+61 ([22](#)), con il rilevamento di due direzioni distinte di polarizzazione a 90° l'una dall'altra, che indica la presenza di campi magnetici sufficientemente forti ($\gtrsim B_Q$) da permettere la polarizzazione lineare dei fotoni in due modi normali.

Una classe potenzialmente fondamentale nell'ottica di una teoria di unificazione delle stelle di neutroni sono le RPPs con campo magnetico elevato, generalmente comparabile o superiore a B_Q . Sebbene siano state a lungo cercate emissioni simili a quelli delle magnetars per provare un overlap tra le due classi, questi oggetti presentano emissioni simili a quelli di RPPs di età compatibile, il che ha portato ad avanzare l'ipotesi che si tratti di magnetars quiescenti.

Vi sono poi le X-ray Dim Isolated Neutron Star (XDINSs), caratterizzate da spettri di raggi X quasi-termici, una relativa prossimità alla Terra (distanze $\lesssim 500$ pc) e periodi di rotazione relativamente lunghi (3–11 s). Anche in questo caso, lo studio di tali oggetti potrebbe risultare fondamentale nell'individuazione dell'equazione di stato della materia densa, oltre al fatto che non è da escludere la possibilità che rappresentino una larga fetta di tutte le stelle di neutroni all'interno della galassia [11](#). Misure del Chandra X-Ray Observatory e di XMM Newton hanno evidenziato come queste stelle stiano rallentando la loro rotazione in maniera regolare, e presentino un campo magnetico dedotto di $\sim 1\text{--}3 \times 10^{13}$ G, più alto rispetto a quello delle RPPs. Le proprietà delle XDINSs potrebbero essere spiegate ammettendo che si tratti di RPPs osservate molto al di fuori del loro fascio radio, sebbene la loro luminosità, troppo alta per un convenzionale raffreddamento, suggerisca forme alternative di riscaldamento (quale il decadimento del campo magnetico).

In ultimo, vi sono i Central Compact Objects (CCOs), stelle di neutroni che si trovano al centro dei loro resti di supernovae, le cui proprietà sono estremamente peculiari. Non vi è infatti evidenza di nebulose o controparti ad altre lunghezze d'onda, e sono difficili da osservare.

I CCOs presentano campo magnetico molto modesto in relazione alla loro età, e perciò sono stati

rinominati "antimagnetars": sono molto luminosi nei raggi X, e ciò potrebbe essere legato ai residui del raffreddamento termico a seguito della loro formazione. Si ritiene quindi che tali stelle di neutroni si siano formate con un campo magnetico ed un periodo già relativamente bassi.

2.3 Struttura generale

Molte delle proprietà osservabili di una stella di neutroni dipendono dalla sua struttura e composizione interna, per cui è importante delinearle in maniera generale.

La struttura di una stella di neutroni si divide in diverse zone: la più interna è il nucleo (interno ed esterno), seguito dalla crosta (esterna ed interna) e dall'atmosfera.

Il nucleo liquido si divide in una zona esterna con neutroni e protoni in un possibile stato di superfluidità/supercoduttività, oltre ad elettroni e muoni, ed in una più interna estremamente densa che si ipotizza possa contenere iperioni (principalmente Σ^- e Λ), condensati di pioni e kaoni e addirittura quark liberi.

La crosta costituisce l'1-2% della massa della stella e ha spessore di $\sim 1-2$ km. La sua parte più esterna consiste principalmente di nuclei atomici ed elettroni in un mare di Fermi. La composizione dello strato più interno, distinguibile a partire da $\rho \equiv \rho_{ND} = 4.4 \times 10^{11} \text{ g cm}^{-3}$ è dibattuta: se inizialmente si credeva contenesse prevalentemente un solo tipo di nucleo a formare un reticolo cristallino quasi perfetto (in particolare un cristallo di Coulomb), più recentemente è stata proposta un'ipotesi che prevede una maggior presenza di impurità [9].

L'atmosfera, invece, consiste in generale di un sottile strato (~ 10 cm) di plasma di elettroni e idrogeno (anche se non è esclusa la presenza di elementi più pesanti quali C e Fe) con una densità ρ_{atm} tra 10^{-3} e 10^3 g cm^{-3} . È di importanza fondamentale in quanto media la radiazione che emerge dalla superficie ed arriva all'osservatore, e di conseguenza è il luogo di formazione dello spettro elettromagnetico termico di una stella di neutroni, dal quale è possibile ricavare informazioni sulle proprietà della superficie della stella, sulla sua massa ed il suo raggio.

La struttura dell'atmosfera dipende dal campo magnetico e dalla temperatura superficiale della stella. Per temperature sufficientemente basse e campi magnetici abbastanza elevati, infatti, si può verificare una transizione di fase (detta "magnetic condensation") che trasforma l'atmosfera in un liquido/solido. Una stella di neutroni con $B \sim 10^{13} \text{ G}$ (relativamente modesto) e $T \gtrsim 10^5 \text{ K}$ ha un'atmosfera prevalentemente non-degenere composta da idrogeno ionizzato, atomi di idrogeno e piccole molecole di H_N , con la fase degenere trascurabile nella fotosfera. All'aumentare della densità, la materia si trasforma lentamente in un plasma di Coulomb degenere, non ideale e parzialmente ionizzato. La descrizione dell'equilibrio di ionizzazione degli atomi in un plasma fortemente magnetizzato come quello descritto è molto complessa: la teoria maggiormente accreditata prevede di calcolare tale equilibrio minimizzando l'energia libera rispetto al numero di particelle, imposti i vincoli stechiometrici [18].

Per una stella con campo magnetico più intenso e/o temperatura più bassa, lo strato di idrogeno potrebbe trovarsi in uno stato condensato, metallico, in quanto l'energia di legame dell'idrogeno condensato aumenta come una potenza di B , mentre l'energia di legame di atomi e piccole molecole aumenta come il logaritmo di B . In un campo magnetico molto intenso, esiste poi una temperatura

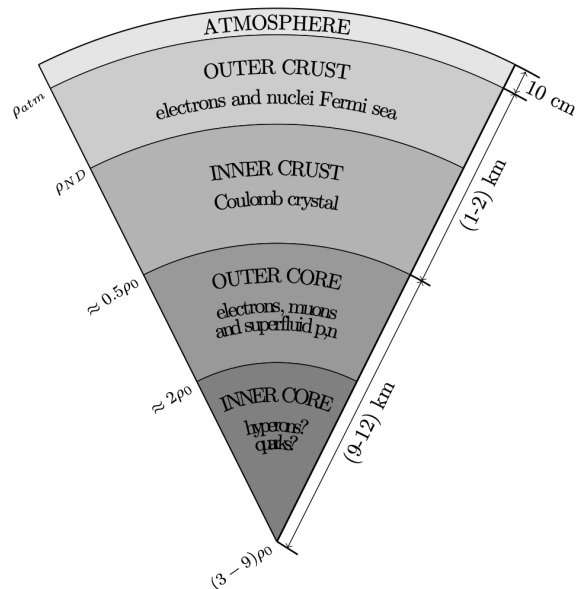


Figura 2.2: Struttura schematica di una stella di neutroni. Con $\rho_0 = 2.8 \times 10^{14} \text{ g cm}^{-3}$ si indica la densità nucleare normale, ossia la densità in massa della materia nucleonica in un nucleo pesante.

critica $T_{crit} \sim 8 \times 10^4, 5 \times 10^5, 10^6$ K per $B = 10^{13}, 10^{14}, 5 \times 10^{14}$ [14] al di sotto della quale, per l'idrogeno, avviene la transizione tra stato gassoso e condensato.

Le proprietà radiative dello strato atmosferico verranno discusse nel paragrafo 3.3.

Capitolo 3

Propagazione della radiazione

Il plasma fortemente magnetizzato di cui è composta l'atmosfera di una stella di neutroni è anisotropo e birifrangente e gioca un ruolo fondamentale nella polarizzazione della radiazione che lo attraversa. Il plasma si definisce caldo se è quasi totalmente ionizzato, freddo se, invece, solo una frazione contenuta è ionizzata: la propagazione della radiazione risente fortemente anche di questa proprietà.

3.1 Plasma freddo

3.1.1 Tensore dielettrico del plasma e polarizzazione del vuoto

Si consideri un plasma freddo composto da elettroni (di carica $-e$, massa m_e e densità numerica n_e) e ioni (rispettivamente Ze , $m_i = Am_p$, $n_i = n_e/Z$, dove m_p è la massa del protone, mentre Z , A sono i numeri atomico e di massa dello ione). Poiché la densità di tale plasma non è costante, risulta necessario definire la densità numerica elettronica in funzione del valore (variabile) della densità come $n_e = \frac{\rho}{m_p}$. Dal momento che l'accoppiamento di elettroni e ioni avviene per collisione, si definisce ν_{ei} la frequenza di collisione, mentre le frequenze di smorzamento radiativo vengono espresse con ν_{re} e ν_{ri} rispettivamente per elettroni e ioni. In presenza di un'onda elettromagnetica il cui campo ha andamento $\mathbf{E} \propto e^{-i\omega t}$, le equazioni del moto per una coppia elettrone-ione sono

$$m_e \ddot{\mathbf{r}}_e = -e\mathbf{E} - \frac{e}{c} \dot{\mathbf{r}}_e \times \mathbf{B} - m_e \nu_{ei} (\dot{\mathbf{r}}_e - \dot{\mathbf{r}}_i) - m_e \nu_{re} \dot{\mathbf{r}}_e, \quad (3.1)$$

$$m_i \ddot{\mathbf{r}}_i = Ze\mathbf{E} + \frac{Ze}{c} \dot{\mathbf{r}}_i \times \mathbf{B} - m_e Z \nu_{ei} (\dot{\mathbf{r}}_i - \dot{\mathbf{r}}_e) - m_i \nu_{ri} \dot{\mathbf{r}}_i. \quad (3.2)$$

Risolvendo tali equazioni è possibile calcolare $\mathbf{r} = \mathbf{r}_e - \mathbf{r}_i$, grazie al quale si ricava il vettore polarizzazione del plasma $\mathbf{P} = n_i Z e \mathbf{r}_i - n_e e \mathbf{r}_e = -n_e e \mathbf{r}$. Da quest'ultimo è possibile definire il vettore induzione elettrica $\mathbf{D} = \mathbf{E} + 4\pi \mathbf{P} = \hat{\epsilon}^{(p)} \cdot \mathbf{E}$. In un sistema di riferimento cartesiano (x,y,z) in cui \mathbf{B} è lungo \hat{z} , il tensore dielettrico del plasma è dato da

$$[\hat{\epsilon}^{(p)}]_{\hat{z}=\hat{B}} = \begin{bmatrix} \varepsilon & ig & 0 \\ -ig & \varepsilon & 0 \\ 0 & 0 & \eta \end{bmatrix}. \quad (3.3)$$

Per definire i parametri di tale tensore è necessario introdurre alcune quantità fondamentali.

Si definiscono la pulsazione di ciclotrone degli elettroni (ω_{ce}), la pulsazione di ciclotrone degli ioni (ω_{ci}), la pulsazione di plasma degli elettroni (ω_{pe}) e la pulsazione di plasma degli ioni (ω_{pi}) come

$$\omega_{ce} = \frac{eB}{m_e c}, \quad \omega_{ci} = \frac{ZeB}{m_i c}, \quad \omega_{pe} = \sqrt{\frac{4\pi n_e e^2}{m_e}}, \quad \omega_{pi} = \sqrt{\frac{4\pi n_i Z^2 e^2}{m_i}}. \quad (3.4)$$

A partire da tali parametri, è possibile ora definire le quantità adimensionali

$$u_e = \frac{\omega_{ce}^2}{\omega^2}, \quad u_i = \frac{\omega_{ci}^2}{\omega^2}, \quad v_e = \frac{\omega_{pe}^2}{\omega^2}, \quad v_i = \frac{\omega_{pi}^2}{\omega^2}, \quad (3.5)$$

dove ω è la pulsazione del fotone (ricavabile dall'energia ricordando che $\epsilon = \hbar\omega$). Si definiscono poi i parametri adimensionali di smorzamento come

$$\gamma_{ei} = \frac{\nu_{ei}}{\omega}, \quad \gamma_{re} = \frac{2e^2\omega}{3m_e c^3}, \quad \gamma_{ri} = \frac{Z^2 m_e}{A m_p} \gamma_{re}. \quad (3.6)$$

Risulta ora possibile definire le quantità che entrano nel tensore in eq. 3.3 come

$$\varepsilon \pm g = 1 - \frac{v_e(1 + i\gamma_{ri}) + v_i(1 + i\gamma_{re})}{(1 + i\gamma_{re} \pm \sqrt{u_e})(1 + i\gamma_{ri} \mp \sqrt{u_i}) + i\gamma_{ei}}, \quad (3.7)$$

$$\eta \simeq 1 - \frac{v_e}{1 + i(\gamma_{ei} + \gamma_{re})} - \frac{v_i}{1 + i(\gamma_{ei} + \gamma_{ri})}. \quad (3.8)$$

Nel prosieguo lo smorzamento verrà ignorato ($\gamma_{ei} = \gamma_{ri} = \gamma_{re} = 0$) e le equazioni precedenti si semplificano in

$$\varepsilon = 1 - \frac{v_e}{1 - u_e} - \frac{v_i}{1 - u_i}, \quad g = \frac{v_e \sqrt{u_e}}{1 - u_e} - \frac{v_i \sqrt{u_i}}{1 - u_i}, \quad \eta = 1 - v_e - v_i. \quad (3.9)$$

Come visto nella sezione 1.1, in presenza di un forte campo magnetico il vuoto si polarizza ed influenza la propagazione della radiazione. Il vuoto magnetizzato, per effetto delle correzioni ad un *loop*, avrà allora i tensori dielettrico $\hat{\epsilon}^{(v)}$ e permeabilità magnetica $\hat{\mu}^{(v)}$ non banali. Nel limite di basse energie ($\hbar\omega \ll m_e c^2$), è quindi possibile applicare la correzione di Heisenberg-Euler in eq. 1.2 alla Lagrangiana del campo elettromagnetico, e i tensori dielettrico ed inverso della permeabilità magnetica del vuoto assumono la forma

$$\hat{\epsilon}^{(v)} = \mathbb{I} + \Delta\hat{\epsilon}^{(v)}, \quad \hat{\mu}^{(v)} = \mathbb{I} + \Delta\hat{\mu}^{(v)}. \quad (3.10)$$

Definendo il parametro adimensionale β che quantifica la forza del campo magnetico (equivalente a ξ definito in eq. 1.5) come

$$\beta = \frac{B}{B_Q}, \quad (3.11)$$

è possibile definire

$$\Delta\hat{\epsilon}^{(v)} = \hat{a}\mathbb{I} + q\hat{\mathbf{B}}\hat{\mathbf{B}}, \quad \Delta\hat{\mu}^{(v)} = \hat{a}\mathbb{I} + m\hat{\mathbf{B}}\hat{\mathbf{B}}, \quad (3.12)$$

dove \hat{a} , q e m sono funzioni di β . Nel limite $\beta \ll 1$, tali coefficienti sono definiti ([1]) come

$$\hat{a} = -\frac{2\alpha}{45\pi}\beta^2, \quad q = \frac{7\alpha}{45\pi}\beta^2, \quad m = -\frac{4\alpha}{45\pi}\beta^2. \quad (3.13)$$

Per B arbitrario, invece, è possibile usare le seguenti formule, ricavate da [7]:

$$\hat{a} \approx -\frac{2\alpha}{9\pi} \ln \left(1 + \frac{\beta^2}{5} \frac{1 + 0.25487\beta^{3/4}}{1 + 0.75\beta^{5/4}} \right), \quad (3.14)$$

$$q \approx \frac{7\alpha}{45\pi} \beta^2 \frac{1 + 1.2\beta}{1 + 1.33\beta + 0.56\beta^2}, \quad (3.15)$$

$$m \approx -\frac{\alpha}{3\pi} \frac{\beta^2}{3.75 + 2.7\beta^{5/4} + \beta^2}. \quad (3.16)$$

3.1.2 Modi di propagazione dei fotoni

Il tensore dielettrico del plasma, unendo gli effetti del vuoto magnetizzato, può essere sempre scritto come in eq. 3.3, con le sostituzioni

$$\varepsilon \longrightarrow \varepsilon' = \varepsilon + \hat{a}, \quad \eta \longrightarrow \eta' = \eta + \hat{a} + q. \quad (3.17)$$

In un sistema di riferimento cartesiano (x,y,z) , si consideri un'onda elettromagnetica descritta dall'equazione

$$\nabla \times (\hat{\boldsymbol{\mu}}' \cdot \nabla \times \mathbf{E}) = \frac{\omega^2}{c^2} \boldsymbol{\epsilon} \cdot \mathbf{E}; \quad (3.18)$$

se si considerano i modi normali di propagazione lungo \hat{z} con $\mathbf{E} \propto e^{ik_{\pm}z}$, l'equazione d'onda si riduce a

$$-k_{\pm}^2 \hat{z} \times [\hat{\boldsymbol{\mu}}' \cdot (\hat{z} \times \mathbf{E})] = \frac{\omega^2}{c^2} \boldsymbol{\epsilon} \cdot \mathbf{E}_{\pm}, \quad (3.19)$$

dove \mathbf{k} indica la direzione di propagazione, mentre i pedici \pm indicano i due modi, detti 'plus-mode' e 'minus-mode'. Per \mathbf{k} parallelo all'asse \hat{z} ed il campo \mathbf{B} nel piano $x-z$ (dimodoché $\hat{\mathbf{B}} \times \hat{\mathbf{k}} = \sin \theta_B \hat{y}$, con θ_B angolo tra la direzione del campo e quella di propagazione), è possibile esprimere esplicitamente l'autovettore del modo (che è anche il campo elettrico) \mathbf{E}_{\pm} come $\mathbf{E}_{\pm} = \mathbf{E}_{\pm T} + E_{\pm z} \hat{z}$: la componente lungo \hat{z} viene trascurata in quanto si considerano onde piane, mentre la parte trasversa è definita come

$$\mathbf{E}_{\pm T} = \frac{1}{\sqrt{1 + K_{\pm}^2}} (iK_{\pm}, 1). \quad (3.20)$$

Nell'equazione precedente è stata introdotta l'ellitticità $K = -i \frac{E_x}{E_y}$ dei modi, con

$$K_{\pm} = \beta_p \pm \sqrt{\beta_p^2 + r}, \quad r = 1 + \frac{m}{a} \sin^2 \theta_B, \quad (3.21)$$

dove $a = 1 + \hat{a}$ e β_p è il parametro (complesso) di polarizzazione definito come

$$\beta_p = -\frac{\epsilon'^2 - g^2 - \epsilon' \eta' (1 + \frac{m}{a}) \sin^2 \theta_B}{2g\eta'} \frac{\sin^2 \theta_B}{\cos \theta_B}. \quad (3.22)$$

Infine, l'indice di rifrazione è dato da

$$n_{\pm} = \frac{ck_{\pm}}{\omega} = \sqrt{\frac{g\eta'}{a\epsilon_{33}} \left(\frac{\epsilon'}{g} + \frac{1}{K_{\pm}} \cos \theta_B \right)}, \quad (3.23)$$

dove $\epsilon_{33} = \epsilon' \sin^2 \theta_B + \eta' \cos^2 \theta_B$.

A partire da K_{\pm} è possibile classificare i modi di un fotone che si propaga in un plasma magnetizzato. La suddivisione classica ([16]) si basa sul valore di $|K|$: il modo straordinario (X-mode) presenta $|K| \ll 1$ ed il suo \mathbf{E} è perpendicolare al piano $\hat{\mathbf{k}} - \hat{\mathbf{B}}$, mentre il modo ordinario (O-mode) ha $|K| \gg 1$ ed è quindi polarizzato parallelamente al piano $\hat{\mathbf{k}} - \hat{\mathbf{B}}$. Tale classificazione è largamente usata in quanto presenta un vantaggio: i due modi così definiti interagiscono in maniera diversa con la materia. Da un lato, l'opacità del modo O non viene sostanzialmente influenzata dal campo magnetico, mentre quella del modo X si riduce sensibilmente (di un fattore dell'ordine di ω^2/ω_{ce}^2 , per $\omega < \omega_{ce}$) all'aumentare del campo.

Nel caso della propagazione di fotoni termici nell'atmosfera di una stella di neutroni (che implica $u_e \gg 1$, ossia fotoni la cui energia è molto più piccola di quella di ciclotrone), per valori generici di ϵ e θ_B , i due modi sono chiaramente distinti, con i fotoni linearmente polarizzati. Tuttavia, tale distinzione diventa ambigua quando $|\beta_p| \lesssim 1$ (ossia $|K| \sim 1$). Ciò avviene non solo nel caso particolare $\omega = \omega_{ci}$ ($\beta_p = 0$), ma anche per una generica energia $\epsilon \neq \hbar\omega_{ci}$ quando un fotone che si propaga in un mezzo non omogeneo incontra $\beta = 0$ alla cosiddetta *vacuum resonance*, ossia quando è soddisfatta la condizione

$$v_e = q + m. \quad (3.24)$$

In particolare, è possibile calcolare a quale densità si incontra la vacuum resonance riscrivendo la definizione di ω_{pe} data in equazione 3.4 come $\hbar\omega_{pe} = \hbar(4\pi n_e e^2/m_e)^{1/2} = 28.71(Y_e \rho_1)^{1/2}$ eV, dove Y_e è la frazione di elettroni nel gas e $\rho_1 = \rho/(1 \text{ g cm}^{-3})$ ed imponendo la condizione 3.24. Si trova che

$$\rho_V = 0.964 Y_e^{-1} (B_{14} \epsilon_1)^2 f^{-2} \text{ g cm}^{-3}, \quad (3.25)$$

dove $\epsilon_1 = \epsilon/(1 \text{ keV})$ e f è una funzione debolmente dipendente da β definita come

$$f = \sqrt{\frac{\alpha\beta^2/15\pi}{q+m}}. \quad (3.26)$$

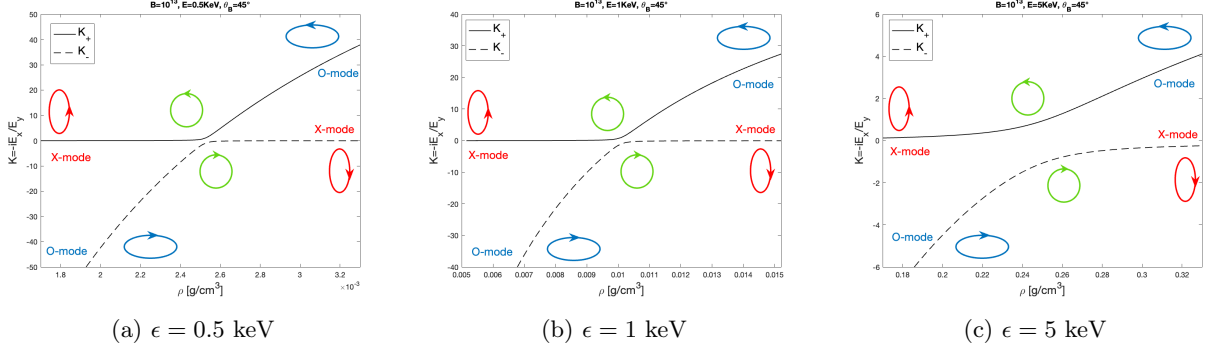


Figura 3.1: L'ellitticità in funzione della densità del plasma nell'intorno della vacuum resonance. Le due curve, che rappresentano i due modi, sono state calcolate nell'approssimazione di smorzamento nullo. In questo esempio, i parametri $B = 10^{13}$ G, $Y_e = 1$ e $\theta_B = 45^\circ$ sono mantenuti costanti, mentre l'energia ϵ del fotone varia.

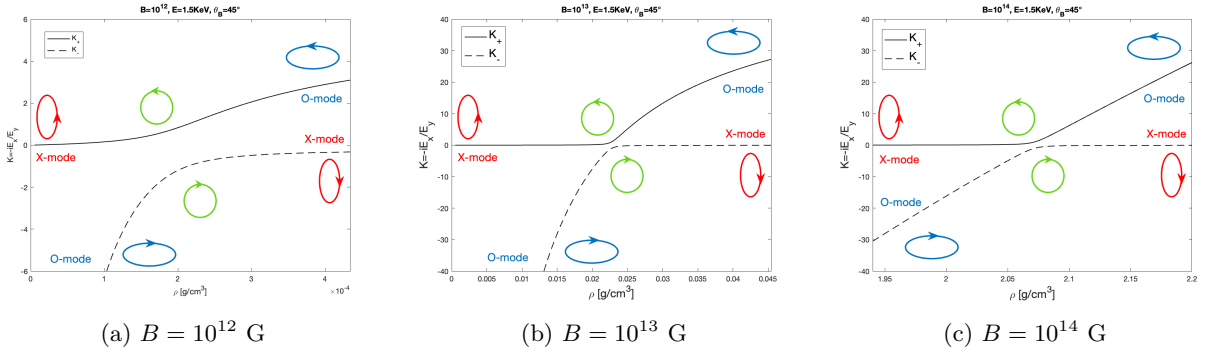


Figura 3.2: L'ellitticità della polarizzazione in funzione della densità del plasma nell'intorno della vacuum resonance. Le due curve, che rappresentano i due modi, sono state calcolate nell'approssimazione di smorzamento nullo. In questo esempio, i parametri $\epsilon = 1.5$ keV, $Y_e = 1$ e $\theta_B = 45^\circ$ sono mantenuti costanti, mentre il campo magnetico B varia.

Le figure [3.1](#) e [3.2](#) illustrano l'effetto della vacuum resonance. Per $\rho < \rho_V$ domina la polarizzazione del vuoto, mentre per $\rho > \rho_V$ dominano gli effetti di plasma: in queste zone, lontane dalla risonanza, i modi dei fotoni sono polarizzati linearmente come discusso in precedenza, con le ellissi di polarizzazione ortogonali tra loro. Intorno a $\rho = \rho_V$, tuttavia, i modi normali diventano polarizzati circolarmente, in quanto gli effetti di vuoto e quelli di plasma, che tenderebbero a polarizzare i modi linearmente ma in direzioni mutualmente ortogonali, si equilibrano. Qualitativamente, quindi, è possibile definire la vacuum resonance come la frequenza cui gli effetti di plasma e la vacuum polarization si “cancellano” a vicenda.

Se si includono nel tensore dielettrico i parametri di smorzamento espressi in eq: [3.6](#) si osserva il fenomeno del “mode collapse”, che avviene quando i due modi di polarizzazione diventano identici ($K_+ = K_-$). In tal caso, la descrizione in modi del trasporto radiativo non è più efficace ed risulta necessario risolvere le equazioni di trasporto utilizzando i parametri di Stokes.

3.1.3 Mode conversion in un plasma non omogeneo

Come mostrato nelle figure [3.1](#) e [3.2](#), un fotone originariamente polarizzato nel modo O ad alte densità rimane sulla curva K_+ attraversando la vacuum resonance, convertendosi in un fotone X-

mode mentre si allontana dalla superficie. Questo peculiare effetto avviene se la variazione della densità è sufficientemente graduale, dimodoché la conversione alla vacuum resonance sia adiabatica. Questo effetto, detto “mode conversion”, è analogo all’effetto Mikheyev-Sminorv-Wolfstein (MSW) per l’oscillazione dei neutrini descritto nel paragrafo [3.4](#).

Per quantificare l’effetto di mode conversion, decomponiamo il campo elettrico di una generica onda elettromagnetica polarizzata che si propaga lungo \hat{z} nei due modi $+$ e $-$ come

$$\mathbf{E}(z) = A_+ \mathbf{E}_+ e^{i\phi_+} + A_- \mathbf{E}_- e^{i\phi_-}, \quad (3.27)$$

dove $\phi_{\pm}(z) = \int^z k_{\pm} dz$. Se ci si pone nell’approssimazione di Wentzel–Kramers–Brillouin (WKB, ossia ottica geometrica), A_{\pm} ed \mathbf{E}_{\pm} variano su una scala di lunghezza molto maggiore della lunghezza d’onda del fotone. In questo modo, è possibile sostituire l’eq. [3.27](#) nella [3.18](#), sfruttando l’eq. [3.19](#) e le approssimazioni $a - 1 \ll 1$ e $m \ll 1$. Moltiplicando il risultato ottenuto per \mathbf{E}_{+T}^* ed \mathbf{E}_{-T}^* è possibile ottenere le equazioni di evoluzione dell’ampiezza

$$\begin{pmatrix} A'_+ \\ A'_- \end{pmatrix} = \begin{bmatrix} -\frac{k'_+}{2k_+} & \frac{k_- \theta'_m e^{-i\Delta\phi}}{k_+} \\ -\frac{k_+ \theta'_m e^{i\Delta\phi}}{k_-} & -\frac{k'_-}{2k_-} \end{bmatrix} \begin{pmatrix} A_+ \\ A_- \end{pmatrix}, \quad (3.28)$$

dove l’apice $'$ indica d/dz , $\Delta\phi = \phi_+ - \phi_-$ e l’angolo di mixing θ_m viene definito come $\tan 2\theta_m = \beta_p^{-1}$. Se si ignorano i termini non diagonali, si ritrova un risultato standard della WKB: $A_{\pm}(z) \propto |k_{\pm}(z)|^{-1/2}$. Definendo $\mathcal{A}_{\pm} = A_{\pm} e^{i\phi_{\pm}}$, sottraendo una matrice identità non essenziale e sfruttando il fatto che $k_+ \simeq k_-$ e $|k'_{\pm}/k_{\pm}| \ll |k_{\pm}|$ è possibile riscrivere l’eq. [3.28](#) in una forma analoga a quella della meccanica quantistica:

$$i \begin{pmatrix} \mathcal{A}'_+ \\ \mathcal{A}'_- \end{pmatrix} \simeq \begin{pmatrix} -\frac{\Delta k}{2} & i\theta'_m \\ -i\theta'_m & \frac{\Delta k}{2} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} \mathcal{A}_+ \\ \mathcal{A}_- \end{pmatrix}, \quad (3.29)$$

dove $\Delta k = k_+ - k_-$.

La condizione di adiabaticità è soddisfatta per $|\theta'_m| \ll |\Delta k/2|$ o per

$$\gamma \equiv \left| \frac{(n_+ - n_-)\omega}{2\theta'_m c} \right| \gg 1. \quad (3.30)$$

Sebbene tale condizione sia generalmente soddisfatta, viene facilmente violata alla vacuum resonance, per cui è necessario calcolarla nuovamente. Ridefinendo in funzione della densità l’angolo di mixing

$$\theta'_m = -\frac{1}{2} \sin^2 2\theta_m \frac{\sqrt{u_e}(1 - u_i) \sin^2 \theta_B}{2 \cos \theta_B} \left(\frac{\rho_V}{\rho} \right) \frac{\rho'}{\rho} \quad (3.31)$$

e la differenza tra gli indici di rifrazione

$$n_+ - n_- \simeq -\frac{v_e \cos \theta_B}{\sqrt{u_e}(1 - u_i) \sin 2\theta_m}, \quad (3.32)$$

è possibile valutare l’equazione [3.30](#) a $\rho = \rho_V$. Si ottiene così la seguente condizione sull’energia

$$\epsilon \gtrsim \epsilon_{ad}(B, \theta_B, H_\rho) = 1.49 (f \tan \theta_B |1 - u_i|)^{2/3} \left(\frac{5 \text{ cm}}{H_\rho} \right)^{1/3} \text{ keV}, \quad (3.33)$$

dove $H_\rho = |dz/d \ln \rho|$ è l’altezza di scala della densità, calcolata per $\rho = \rho_V$, lungo il raggio. Per un’atmosfera ionizzata di idrogeno, $H_\rho \simeq 1.65 T_6 / (g_{14} \cos \theta)$ cm dove $T = 10^6 T_6$ K è la temperatura, e $g = 10^{14} g_{14} \text{ cm s}^{-2}$ è l’accelerazione di gravità e θ è l’angolo tra il raggio e la normale alla superficie. Nei conti successivi, si è considerato $H_\rho = 5$ cm, così da mandare ad 1 l’ultimo fattore della [3.33](#). Qualora l’energia del fotone non rispetti la condizione di adiabaticità, vi è una probabilità non nulla che avvenga un “salto” non adiabatico tra le due curve, ossia che un fotone prodotto come X rimanga X attraversando la vacuum resonance e analogamente per un fotone O. Tale probabilità può essere

calcolata utilizzando la formula di Landau-Zener (che è una soluzione analitica dell'equazione del moto che governa le dinamiche di transizione di un sistema quantistico a due stati che esprime, appunto, la probabilità di una transizione non adiabatica tra i due stati):

$$P_{jump} = e^{-\frac{\pi}{2} \left(\frac{\epsilon}{\epsilon_{ad}} \right)^3}. \quad (3.34)$$

Grazie alla formula [3.34](#) precedente, è possibile descrivere in maniera esaustiva il comportamento di un fotone che attraversa la vacuum resonance. Per $\epsilon \gtrsim 1.3\epsilon_{ad}$, l'evoluzione della polarizzazione è fortemente adiabatica anche a $\rho = \rho_V$: la probabilità di un salto non adiabatico è trascurabile ($P_{jump} \lesssim 0.03$) ed un fotone X (O) si convertirà in un fotone O (X) attraversando la risonanza. Al contrario, nel caso in cui la condizione di adiabaticità non sia rispettata, il fotone passerà da una curva all'altra alla vacuum resonance, mantenendo quindi la sua polarizzazione originaria.

Mediante un programma numerico, sono state applicate le formule [3.33](#) e [3.34](#) ai set di parametri rappresentati nelle figure [3.1](#) e [3.2](#); i risultati sono riassunti nella tabella [3.1](#) di seguito.

B [G]	ϵ [keV]	θ_B [°]	ρ_V [g cm ⁻³]	ϵ_{ad} [keV]	P_{jump}	Mode conversion
10^{13}	0.5	45	0.00252	1.450	0.94	trascurabile
10^{13}	1	45	0.01009	1.460	0.61	parziale
10^{13}	5	45	0.25241	1.467	9.8×10^{-28}	totale
10^{12}	1.5	45	0.00022	1.489	0.20	quasi totale
10^{13}	1.5	45	0.02272	1.465	0.19	quasi totale
10^{14}	1.5	45	2.07072	1.329	0.10	quasi totale

Tabella 3.1: Valori di ϵ_{ad} e P_{jump} per diverse combinazioni di parametri.

Per il primo set ($B = 10^{13}$ G, $\epsilon = 0.5$ keV e $\theta_B = 45^\circ$), è immediato notare che la probabilità di mode conversion è quasi nulla ($1 - P_{jump} = 0.06$): ciò vuol dire che un fotone X (O), raggiunta la vacuum resonance, effettuerà una transizione non adiabatica tra le due curve, mantenendo il modo di partenza, come mostrato in figura [3.3](#)

Nel caso specifico di fotoni che si propagano nella magnetosfera di una stella di neutroni, lo stato di polarizzazione evolve in maniera adiabatica fino al raggiungimento del cosiddetto “polarization-limiting radius” (r_{pl}), oltre al quale la direzione del campo elettrico del fotone rimane costante: per calcolarlo ([6](#)), è sufficiente considerarlo come la distanza alla quale vengono meno le condizioni di adiabaticità, ottenendo

$$r_{pl} = \left(\frac{\alpha \nu}{45 c} \right)^{1/5} \left(\frac{\mu}{B_Q} \sin \alpha_B \right)^{2/5}, \quad (3.35)$$

dove $\nu = \omega/2\pi$ è la frequenza del fotone, μ il momento di dipolo magnetico della stella ed α_B l'angolo tra il vettore dipolo magnetico (\mathbf{m}) e la linea di vista della stella.

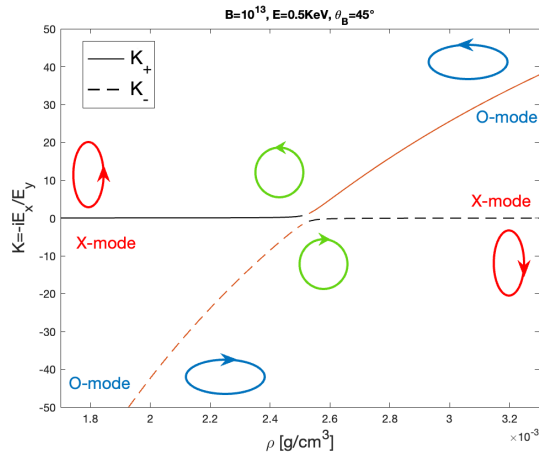


Figure 3.3: Set con $B = 10^{13}$ G, $\epsilon = 0.5$ keV e $\theta_B = 45^\circ$ tenendo conto di P_{jump} : i diversi colori evidenziano il “percorso” di un fotone che attraversa la vacuum resonance, compiendo un salto non adiabatico tra le due curve.

3.2 Plasma caldo e mode collapse

In un plasma omogeneo con densità, temperatura e campo magnetico fissati, i modi di polarizzazione dipendono dalla frequenza del fotone ($\omega/\omega_{ce} = x$) e dall'angolo θ_B tra il vettore propagazione ed il campo magnetico. La parte reale (o immaginaria) dell'indice di rifrazione associato può essere visualizzata come una superficie di Riemann nel piano (x, θ) con due fogli che si intersecano lungo delle curve, come mostrato in figura 3.4. Ciò è possibile poiché, in generale, i modi di polarizzazione (e di conseguenza i relativi indici di rifrazione) sono complessi. In particolare, esistono due punti $P_{1,2}^c = (x_{1,2}^c, \theta_{1,2}^c)$ in cui $\text{Re}(n_+ - n_-) = \text{Im}(n_+ - n_-) = 0$. In questi punti i modi di polarizzazione coincidono e quindi “collassano” l'uno sull'altro, dando luogo al fenomeno del mode collapse introdotto nella sezione 3.1.2. Una peculiarità connessa a tali punti è che, mentre le superfici che rappresentano $\text{Re}(n)$ e $\text{Im}(n)$ sono funzioni continue di x e θ , i modi di polarizzazione dipendono dal percorso.

Tale dipendenza dal percorso può essere visualizzata facilmente in figura 3.4: come mostrato, è possibile seguire un percorso liscio dal punto A al punto B lungo il foglio “superiore”. Se tuttavia si volesse seguire un altro percorso che aggiri il punto di collasso, si verrebbe portati lungo un percorso liscio ad un punto B' (ad esempio la proiezione del punto B sul foglio “inferiore”). Se il punto A corrisponde al modo 1, risulta allora necessario designare come modo 1 uno tra il punto B e quello B' a seconda del percorso seguito. Se si identifica arbitrariamente il foglio “superiore” con il modo 1 e quello “inferiore” con il modo 2 (che è una scelta non fisica in quanto porta a discontinuità nelle derivate di $\text{Re}(n^2)$), allora anche $\text{Im}(n^2)$ avrà un comportamento discontinuo: ogni tentativo di definire univocamente i modi sull'intero piano (x, θ) porta quindi a delle discontinuità nell'indice di rifrazione. Ciò è legato alla topologia di una superficie di Riemann, che non permette una separazione significativa in due superfici distinte. Per considerazioni di natura fisica, è necessario che $n^2(x, \theta)$ sia una funzione continua e differenziabile, e tale condizione è soddisfatta dalla doppia superficie n^2 : è allora non fisico richiedere una distinzione univoca dei modi, la cui identità deve essere dipendente dal percorso seguito.

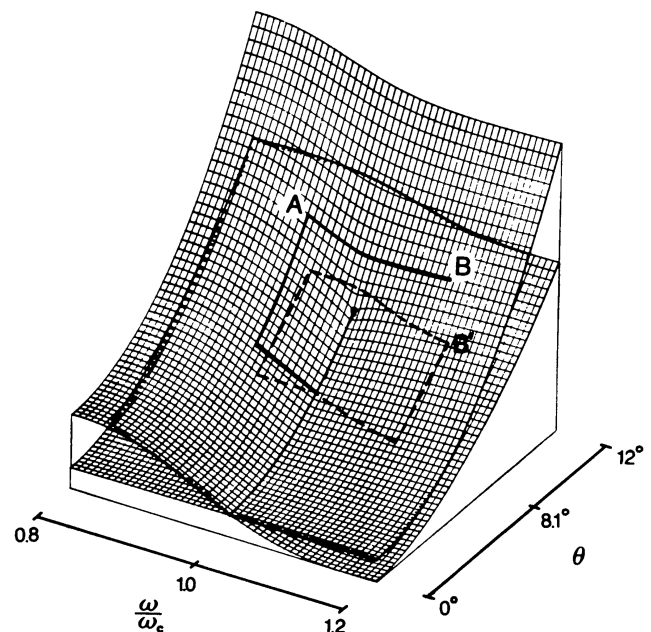


Figura 3.4: Zoom della doppia superficie $\text{Re}(n^2)$ (calcolata per $\epsilon_{ce,50} \equiv (\hbar\omega_{ce}/50 \text{ keV}) = 1$, $\rho = 1 \text{ g cm}^{-3}$ e $k_B T = 10 \text{ keV}$) vicino al punto di mode collapse P_2^c ($\omega_2^c \simeq \omega_{ce}$ e $\theta_{B,2}^c = 8.1^\circ$). Immagine tratta da [21].

Nelle sezioni precedenti, il tensore dielettrico del plasma freddo è stato calcolato nel limite classico, che equivale al limite di $k \rightarrow 0$ (con k numero d'onda del fotone) del caso quantistico. In particolare, dal momento che la dimensione della funzione d'onda di Landau è dell'ordine di $\hat{\rho}$ (definito nell'eq. 1.30), è necessario che $k_\perp \hat{\rho} \ll 1$ (dove k_\perp è il numero d'onda perpendicolare al campo magnetico) oppure che l'energia del fotone sia tale che $\epsilon \sin \theta_B \ll \sqrt{m_e c^2 \epsilon_{ce}}$. L'approssimazione di plasma freddo vale quando:

- la velocità termica degli elettroni, definita come $V_T = \sqrt{2k_B T/m_e}$, è molto minore della velocità di fase dell'onda ($\omega/k \simeq c$);
- la frequenza ω dell'onda è sufficientemente lontana dalla frequenza di ciclotrone $|\omega - \omega_{ce}| \gg (\omega/c)V_T$;
- si trascura il rinculo degli elettroni.

Per tener conto del moto degli elettroni, il denominatore della frequenza di ciclotrone $\omega - \omega_{ce}$ nel tensore dielettrico di plasma freddo deve essere sostituito da $\omega - k_{\parallel}V_{\parallel} - \omega_{ce}$, dove $k_{\parallel} = |\omega/c \cos \theta_B|$ e V_{\parallel} sono rispettivamente il numero d'onda e la velocità dell'elettrone paralleli al campo magnetico. Per includere anche il rinculo, è invece necessario attuare la sostituzione $\omega \rightarrow \omega \pm \hbar k_{\parallel}^2 / (2m_e)$. Infine, il tensore dielettrico deve essere mediato sulla funzione di distribuzione della velocità elettronica. Nel limite di campo magnetico ultraforte (in cui gli elettroni occupano il più basso livello di Landau disponibile, $k_B T \ll \epsilon_{ce}$), il tensore mantiene la forma dell'eq. [3.3](#), ma i fattori diventano

$$\varepsilon'' = 1 - \frac{v_e}{\gamma_+} \left\{ 1 - \frac{\omega_{ce}/\gamma_+}{2V_T k_{\parallel}} [W(y_-) - W(y_+)] \right\}, \quad (3.36)$$

$$g'' = -\frac{v_e}{\gamma_+^2} \frac{\omega_{ce}}{2V_T k_{\parallel}} [W(y_-) + W(y_+)], \quad (3.37)$$

$$\eta'' = 1 - \frac{v_e}{\gamma_+}, \quad (3.38)$$

dove $\gamma_+ = (1 + i\gamma)$ è il termine di smorzamento dell'onda. Nel limite di plasma debolmente dispersivo, tale termine è dominato dalle componenti radiative e di collisione ($\gamma = \gamma_{re} + \gamma_{coll}$): nel caso particolare del plasma atteso nello strato atmosferico di una stella di neutroni, tuttavia, si assume $\gamma = \gamma_{re}$ [21](#). Si definisce inoltre

$$y_{\pm} = \frac{\omega \pm \omega_{ce}/\gamma_+}{V_T k_{\parallel}} \pm \frac{\hbar k_{\parallel}}{2m_e V_T}, \quad (3.39)$$

in cui il secondo termine viene dal rinculo degli elettroni (e verrà trascurato nel prosieguo della trattazione), mentre $W(z)$ è la funzione di dispersione di plasma

$$W(z) = \frac{1}{\sqrt{\pi}} \int_{-\infty}^{\infty} \frac{e^{-x^2}}{x - z} dx. \quad (3.40)$$

Nel limite di dispersione debole è allora possibile definire gli indici di rifrazione come

$$n_{\pm}^2 = \varepsilon'' + 4\delta \sin^2 \theta_B + g'' \cos \theta_B K'_{\pm}(\beta'_p), \quad (3.41)$$

dove il parametro di polarizzazione β'_p ed il parametro δ sono definiti come

$$\beta'_p = \frac{\sin^2 \theta_B}{2g'' \cos \theta_B} (\eta'' - \varepsilon'' + 3\delta), \quad \delta = \frac{\alpha}{45\pi} \beta^2. \quad (3.42)$$

A partire da β'_p è possibile definire l'ellitticità dei modi K'_{\pm} (utilizzata nell'equazione [3.41](#)) come

$$K'_{\pm}(\beta'_p) = \beta'_p \pm \sqrt{1 + \beta'^2_p}. \quad (3.43)$$

L'effetto di un valore finito della temperatura è l'allargamento del picco della risonanza di ciclotrone, che nel limite di plasma freddo è molto stretto, fino ad una larghezza $\Delta\omega \sim k_{\parallel}V_T$. Questo effetto (detto allargamento Doppler) insieme alla presenza dello smorzamento porta i modi di polarizzazione ad essere generalmente non ortogonali, con il grado di non ortogonalità misurabile come $|\mathbf{E}'_{+} \cdot \mathbf{E}'_{-}|$. Per valori reali di K'_{\pm} e β'_p i modi di polarizzazione risultano ortogonali, mentre la totale non ortogonalità, definita appunto mode collapse, avviene quando

$$K'_+ = K'_- = \beta'_p = \pm i. \quad (3.44)$$

Il mode collapse è quindi legato agli effetti dissipativi nella propagazione dell'onda: trascurando lo smorzamento, il tensore dielettrico del plasma è hermitiano, da cui β'_p è reale e si ritrovano i risultati della sezione precedente [\(3.1\)](#), con l'equazione [3.44](#) che non ha soluzione.

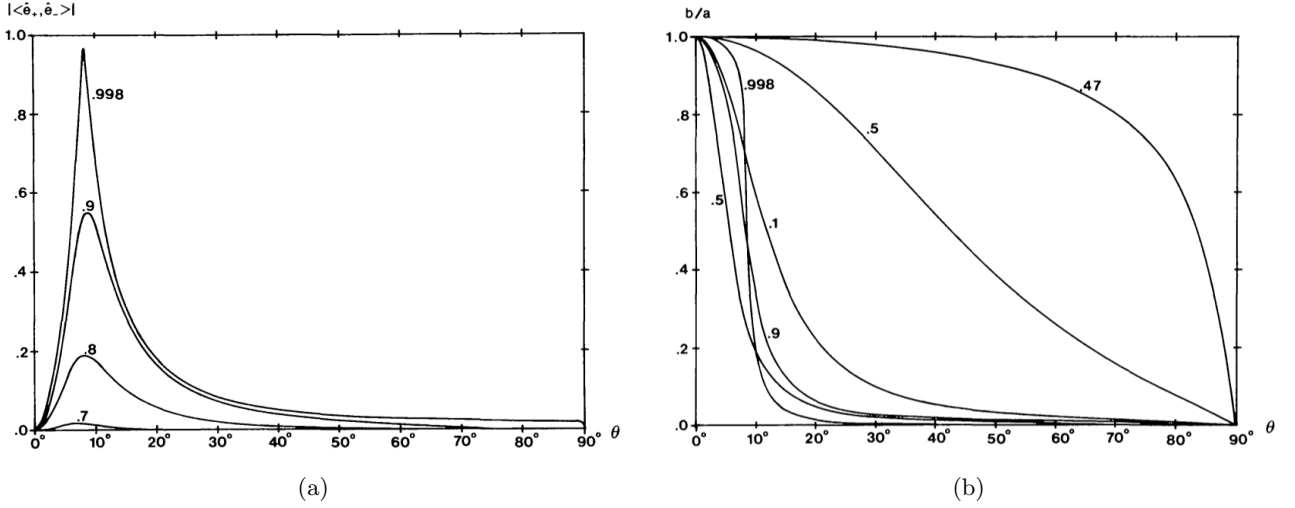


Figura 3.5: (a) Il grado di non ortogonalità dei modi in funzione di θ_B per vari valori di ω . (b) Rapporto (b/a) tra il semiasse minore e quello maggiore dell'ellisse di polarizzazione in funzione di θ_B . In ambo i casi il numero che identifica le curve rappresenta il valore di ω/ω_{ce} e i parametri di plasma sono gli stessi della figura 3.4. Immagini tratte da [21].

In figura 3.5a si vede come il grado di non ortogonalità aumenti avvicinandosi alla frequenza critica $\omega_2^c/\omega_{ce} = 0.9984$, legata al punto di collasso di angolo $\theta_{B,2}^c = 8.1^\circ$. In figura 3.5b, viene invece visualizzato il rapporto tra il semiasse minore (b) e quello maggiore (a) dell'ellisse di polarizzazione in funzione di θ_B : anche in questo caso, si vede come la polarizzazione sia pressoché circolare alla vacuum resonance ($\omega_2^c \simeq \omega_V$) e lineare altrove.

3.2.1 Condizioni per il verificarsi del mode collapse

Risulta importante determinare quando l'equazione 3.44 abbia soluzioni fisiche. Una condizione necessaria affinché ciò avvenga è

$$\text{Re}(y) = 0, \quad \text{dove } y = -2\beta'_p \frac{\cos \theta_B}{\sin^2 \theta_B}. \quad (3.45)$$

Nel limite $T \rightarrow 0$ (plasma freddo con smorzamento incluso), si ottiene

$$\varepsilon'' = 1 - \frac{v_e \gamma_+}{\gamma_+^2 - u_e}, \quad g'' = \frac{v_e \sqrt{u_e}}{\gamma_+^2 - u_e}, \quad \eta'' = 1 - \frac{v_e}{\gamma_+}. \quad (3.46)$$

Allora, ricordando che $x = \omega/\omega_{ce}$, la 3.45 diventa

$$x^2(1 - x^2) - \xi = 0, \quad \text{dove } \xi = \frac{\omega_{pe}^2}{3\delta\omega_{ce}^2} = \frac{v_e}{3\delta} x^2, \quad (3.47)$$

che ha soluzioni se $\xi < \xi_{cr} = 0.25$. Per $\xi \ll 1$ si trova

$$x_{1,2}^c \simeq \sqrt{\xi}, 1 \quad \text{cioè } \omega_{1,2}^c \simeq \omega_V, \omega_{ce}. \quad (3.48)$$

Lungo la linea $\text{Re}(y) = 0$, per $\xi, \gamma \ll 1$, si trova

$$\frac{\cos \theta_B^c}{\sin^2 \theta_B^c} = -\frac{1}{2} \text{Im}(y) \Big|_{x=x_{1,2}^c}, \quad \text{Im}(y) = \begin{cases} \gamma \xi^{-1/2} & : x = x_1^c \\ -2\gamma \xi^{-1} & : x = x_2^c \end{cases}. \quad (3.49)$$

Mentre il punto critico a basse frequenze appena calcolato si trova ben sotto la vacuum resonance (ed è quindi possibile sfruttare il limite $T \rightarrow 0$), per calcolare il secondo punto è necessario usare un'approssimazione della funzione di dispersione di plasma che valga vicino alla risonanza: $W(z) \simeq$

$i\sqrt{\pi} - 2z$ (valida per $|z| \ll 1$). Dal momento che l'eq. [3.45](#) è ora dominata dagli effetti di vuoto vicino a $x = 1$ ed è approssimativamente soddisfatta quando $\text{Re}(W(y_+) + W(y_-)) = 0$, si trova

$$x_2^c \cong 1 - \frac{\pi v_e}{12 \delta} - \frac{1}{4(V_T k_{\parallel})^2}. \quad (3.50)$$

A tale pulsazione corrisponde

$$\sin^2 \theta_{B,2}^c = 0.89 T^{-1/2} \epsilon_{ce,50}^{-9/2} \rho_1. \quad (3.51)$$

3.2.2 Propagazione delle onde ai punti di mode collapse

L'equazione [3.44](#) mostra che ai punti di mode collapse vi è una sola onda polarizzata che si propaga, il cui vettore campo elettrico è $\mathbf{E}_c = (\pm 1, 1)$.

Per capire cosa accade ad un'onda incidente con polarizzazione ortogonale ad \mathbf{E}_c , è necessario riscrivere l'equazione d'onda come ([21](#))

$$\mathbf{N}^2 \mathbf{E}_t = n^2 \mathbf{E}_t, \quad (3.52)$$

dove \mathbf{E}_t è la componente del vettore campo elettrico trasversa rispetto a \mathbf{k} e $\mathbf{N}^2 = 1 + \boldsymbol{\chi}$ è una matrice 2×2 definita, nel limite di dispersione debole, come

$$\chi_{11} = \epsilon'' - 1 + (\eta'' - \epsilon'' + 7\delta) \sin^2 \theta_B, \quad \chi_{22} = \epsilon'' - 1 + 4\delta \sin^2 \theta_B, \quad \chi_{21} = -\chi_{12} = -ig'' \cos \theta_B, \quad (3.53)$$

dove il vettore della base canonica \hat{e}_1 si trova nel piano (\mathbf{k}, \mathbf{B}) , mentre \hat{e}_2 in quello ortogonale a quest'ultimo. Con questa scelta, è possibile riscrivere $\beta'_p = (\chi_{11} - \chi_{22})/2i\chi_{21}$. In un mezzo omogeneo la [3.52](#) ha soluzione (sia \mathbf{E}_0 il modo normale)

$$\mathbf{E}(z) = e^{i\mathbf{k}z} \mathbf{E}_0, \quad \text{per } \mathbf{k} = \frac{\omega}{c} \sqrt{\mathbb{I} + \boldsymbol{\chi}}. \quad (3.54)$$

La matrice $\exp(i\mathbf{k}z - i\omega/c\mathbb{I})$ è proporzionale alla matrice di trasferimento \mathbf{T} che appare nell'equazione del trasporto per la matrice polarizzazione $\varrho_{\alpha\beta} = \langle E_{\alpha} E_{\beta}^* \rangle$. Per i parametri del mode collapse la matrice diventa degenere con $\chi_{12} = \pm 1/2(\chi_{11} - \chi_{22})$ e può essere espressa in funzione di due quantità complesse $\chi_{\pm} = 1/2(\chi_{11} \pm \chi_{22})$ come

$$\boldsymbol{\chi} = \chi_+ \mathbb{I} + \chi_- \begin{pmatrix} 1 & \pm 1 \\ \mp 1 & -1 \end{pmatrix} = \chi_+ \mathbb{I} + \chi_- \mathbf{M}. \quad (3.55)$$

Sfruttando il fatto che \mathbf{M} è nilpotente, è possibile riscrivere l'eq. [3.54](#) nei punti di mode collapse come

$$\mathbf{E}(z) = e^{ik_c z} (\mathbb{I} + ik_r z \mathbf{M}) \mathbf{E}_0, \quad \text{per } k_c = \frac{\omega}{c} \left(1 + \frac{1}{2} \chi_+ \right), \quad k_r = \frac{1}{2} \frac{\omega}{c} \chi_-. \quad (3.56)$$

Allora, la matrice \mathbf{M} applicata ad \mathbf{E}_c restituisce zero, mentre se applicata ad un vettore ortogonale restituisce un vettore nella direzione di \mathbf{E}_c , con $\text{Im}(k_c)$ che rappresenta il coefficiente di attenuazione per il modo normale \mathbf{E}_0 . Sostituendo allora $\mathbf{E}_c = \mathbf{e}_{\perp}$ nell'eq. [3.56](#) si trova

$$\mathbf{E}_{\perp}(z) = e^{ik_c z} (\mathbf{e}_{\perp} + 2ik_r z \mathbf{E}_c). \quad (3.57)$$

Per i due punti di mode collapse si avrà allora

$$(x_1^c, \theta_{B,1}^c) : \begin{cases} \chi_+ = \left(\frac{2}{3} + x^2\right) v_e + \frac{i}{2} v_e \gamma_{re} \\ \chi_- = -\frac{i}{2} v_e \gamma_{re} \end{cases}, \quad (x_2^c, \theta_{B,2}^c) : \begin{cases} \chi_+ \cong \frac{\sqrt{\pi}}{2} v_e B_0 \left(\frac{11}{3} \cos \theta_{B,2}^c + i\right) \\ \chi_- \cong \frac{\sqrt{\pi}}{2} v_e B_0 \cos \theta_{B,2}^c \end{cases}, \quad (3.58)$$

dove $B_0 = \omega_{ce}/(V_T k_{\parallel})$.

In ambo i casi, un'onda polarizzata ortogonalmente ad \mathbf{e}_c è attenuata entro una scala di lunghezza caratteristica del coefficiente di assorbimento totale (per tale frequenza) e in contemporanea viene creata una componente parallela ad \mathbf{e}_c entro una scala di lunghezza dell'ordine del cammino libero medio del fotone.

3.3 Effetti sullo spettro di emissione termica di una stella di neutroni

Come visto nelle sezioni precedenti, la polarizzazione del vuoto e gli effetti di plasma dovuti a campi magnetici ultra forti influenzano il trasporto radiativo. In particolare, tali effetti interessano l'emissione proveniente dagli strati superficiali di una stella di neutroni. Dal momento che i due modi di polarizzazione dei fotoni hanno opacità molto diverse, infatti, l'effetto di mode conversion è determinante nello studio del trasporto radiativo dei fotoni attraverso l'atmosfera magnetizzata.

In generale, è necessario risolvere due equazioni del trasporto accoppiate per poter trattare i due modi di polarizzazione (X,O). Tuttavia, come detto, tali modi presentano opacità anche molto diverse, il che implica che le densità alle quali si incontrano le relative fotosfere possono essere molto differenti tra loro. Con fotosfera si intende la regione di un corpo in cui lo spessore ottico (definito come $\tau = \int \kappa \rho ds$, dove κ è l'opacità del mezzo e l'integrale è fatto sulla traiettoria del fotone) vale $2/3$. Se infatti $\tau \ll 1$ la radiazione, in pratica, non interagisce con il mezzo, mentre per $\tau \gg 1$ la gran parte della radiazione interagisce (attraverso scattering o assorbimento). La fotosfera corrisponde quindi alla regione che permette a circa il $\sim 50\%$ della radiazione di passare indisturbata. La densità alla quale si incontra la fotosfera di un modo è anche detta densità di disaccoppiamento ("decoupling density"), in quanto, attraversata la fotosfera, l'intensità di tale modo rimarrà costante e può essere quindi considerata disaccoppiata da quella dell'altro modo.

Se, in prima approssimazione, si trascura la polarizzazione del vuoto (nv, no vacuum) le densità di decoupling risultano [\[8\]](#)

$$\rho_O^{(nv)} \approx 0.42 T_6^{-1/4} \epsilon_1^{3/2} S^{-1/2} \text{ g cm}^{-3}, \quad \rho_X^{(nv)} \approx 486 T_6^{-1/4} \epsilon_1^{1/2} S^{-1/2} B_{14} \text{ g cm}^{-3}, \quad (3.59)$$

dove $S = 1 - \exp(-\epsilon/(k_B T))$, $\epsilon_1 = \epsilon/(1 \text{ keV})$ e $T_6 = T/(10^6 \text{ K})$. Ciò implica che, in generale, i fotoni X vengano prodotti in zone più in profondità e più calde dell'atmosfera, divenendo quindi i principali responsabili del flusso di raggi X.

Considerando ora la polarizzazione del vuoto (e di conseguenza la mode conversion), la posizione della vacuum resonance rispetto alle fotosfere diventa determinante. Per poterla stimare, è necessario considerare l'influenza del campo magnetico. Definito il valore limite

$$B_l \approx 6.6 \times 10^{13} T_6^{-1/8} \epsilon_1^{-1/4} S^{-1/4} \text{ G}, \quad (3.60)$$

si presentano due possibilità: il regime di campo normale ($B < B_l$) ed il regime di magnetar ($B > B_l$), mostrati in figura [3.6](#).

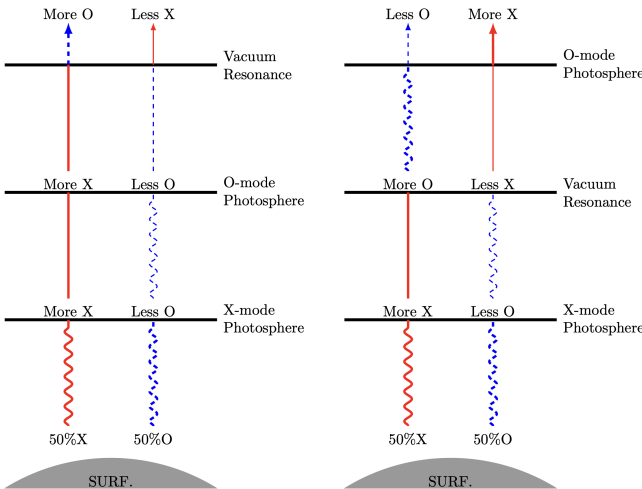


Figura 3.6: Diagramma schematico (non in scala) che illustra l'effetto della mode conversion dovuta alla polarizzazione del vuoto sui modi di polarizzazione dei fotoni emessi dalla superficie di una stella di neutroni nel regime di campo normale (*sinistra*) e nel regime di magnetar (*destra*). In ambo i grafici il colore rosso indica il modo X, mentre il blu il modo O e si considera la mode conversion completa.

Nel regime di campo normale ($B < B_l$) la vacuum resonance è più esterna rispetto ad ambo le fotosfere ($\rho_V < \rho_O^{(nv)} < \rho_X^{(nv)}$). In questo caso, allora, le densità delle fotosfere dei fotoni X ed O valgono

$$\rho_X \simeq \rho_X^{(nv)} \sqrt{1 - (B/B_l)^4}, \quad \rho_O \simeq \rho_O^{(nv)} \sqrt{1 + (B/B_l)^4}. \quad (3.61)$$

Per $(B/B_l)^4 \ll 1$, quindi, tali equazioni si semplificano alla forma vista in eq. 3.59 e non si osserva un cambio netto nello spettro totale di emissione ed una prevalenza di fotoni O emessi.

Per il regime di magnetar ($B > B_l$), invece, la vacuum resonance si trova tra le due fotosfere ($\rho_O^{(nv)} < \rho_V < \rho_X^{(nv)}$). Analogamente a quanto fatto in precedenza, è possibile calcolare le densità delle fotosfere dei fotoni X ed O come

$$\rho_X \simeq \rho_X^{(nv)} \sqrt{1 + (B_l/B)^4}, \quad \rho_O \simeq \rho_O^{(nv)}. \quad (3.62)$$

Per $(B_l/B)^4 \gg 1$, quindi, la fotosfera del modo O non viene modificata dalla presenza della vacuum resonance, mentre i fotoni X ne subiscono maggiormente l'influenza. Infatti, si osserva (8) che la sezione di alta energia dello spettro è ridotta (ossia la maggior parte del flusso si concentra ad energie più basse, in quanto c'è meno emissione ad alte energie) e di conseguenza più vicina all'emissione di corpo nero, mentre la linea di ciclotrone dei protoni è soppressa. Questi effetti sono ben visibili confrontando il flusso totale in figura 3.7.

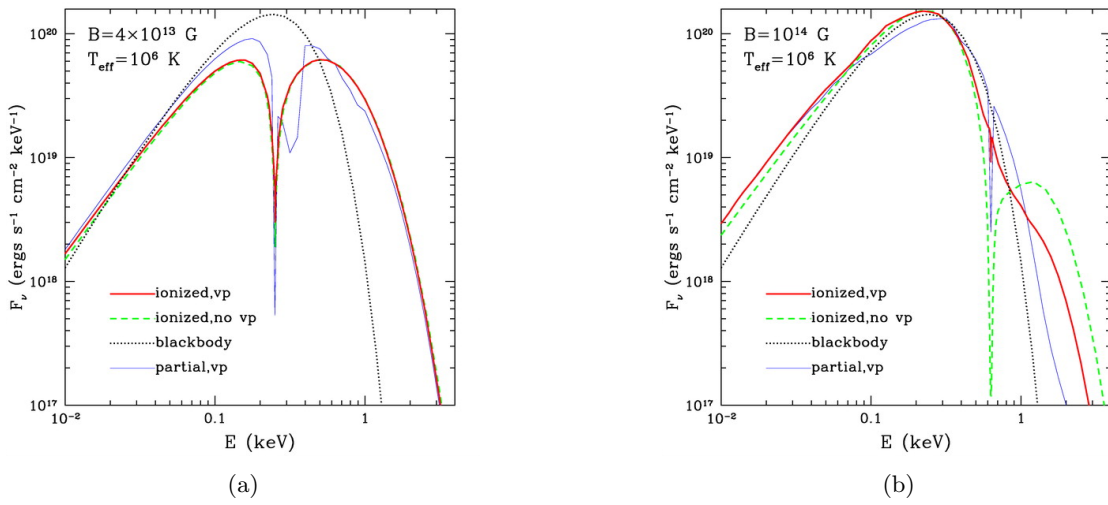


Figura 3.7: Spettri di emissione totali per atmosfere di idrogeno completamente ionizzato per $T_{eff} = 10^6$ K e $B = 4 \times 10^{13}$ G (a) e $B = 10^{14}$ G (b). Immagini tratte da 8.

Tuttavia, questa trattazione discrimina solo tra il caso senza polarizzazione del vuoto e quello con mode conversion completa, ignorando quindi la probabilità di un salto non adiabatico introdotta nella sezione 3.1.3. Inoltre, viene solo considerato lo spettro totale di emissione, senza discernere tra i contributi dei singoli modi.

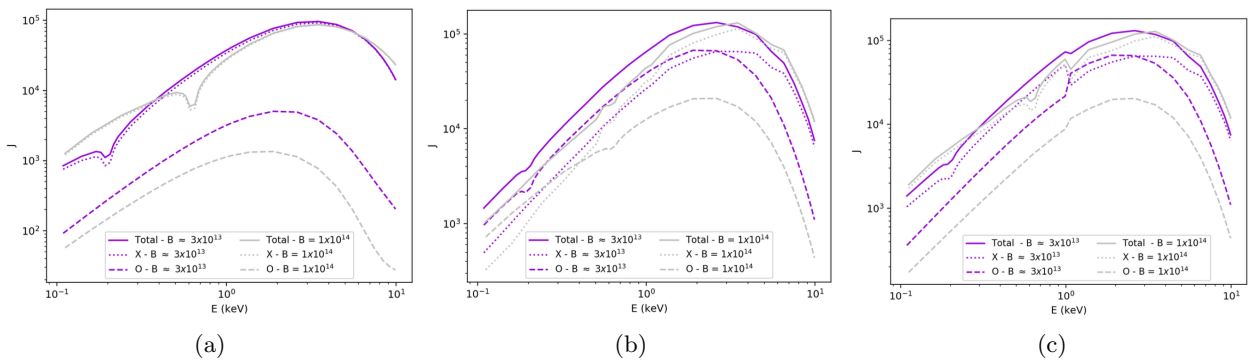


Figura 3.8: Spettro di intensità media della radiazione che emerge perpendicolarmente dall'atmosfera in funzione dell'energia E dei fotoni nel caso di nessun effetto di vuoto (a), mode conversion completa (b) e mode conversion parziale (c). In tutti i casi si fissa $T = 10^7$ K e si considera il regime di campo normale ($B = 3^{13}$ G, in viola) ed il regime di magnetar ($B = 10^{14}$ G, in grigio). Immagini tratte da 12.

Risulta quindi opportuno visualizzare lo spettro di intensità media dei modi X ed O, insieme a quella totale, in funzione dell'energia dei fotoni nei casi di nessun effetto di vuoto, mode conversion completa e mode conversion parziale, per i due regimi di campo (normale e di magnetar) come mostrato in figura 3.8.

Nel caso senza effetti di vuoto (fig. 3.8a) l'intensità del modo X è circa uguale a quella totale per entrambi i regimi di campo magnetico, mentre l'intensità del modo O è più bassa, in quanto l'opacità di tale modo è maggiore. La differenza maggiormente apprezzabile è la linea di ciclotrone, maggiormente accentuata e ad energie più alte nel regime di magnetar.

Nel caso di mode conversion completa (fig. 3.8b) le intensità dei due modi sono molto vicine, con quella del modo O maggiore ad energie più basse, salvo poi diventare minore ad alte energie. Questo cambio è dovuto alla posizione della vacuum resonance rispetto alle fotosfere dei modi: infatti è più esterna per energie minori, abbassandosi gradualmente fino a scivolare tra le due fotosfere per alte energie. In questo frangente la differenza tra i due regimi di campo rispecchia la discussione precedente (riassunta in figura 3.6): all'aumentare del campo, infatti, il punto di "switch" tra l'intensità dei due modi si trova ad energie man mano inferiori. In questo caso, la linea di ciclotrone è ridotta dagli effetti di vuoto.

Infine vi è il caso di mode conversion parziale (fig. 3.8c), con probabilità di conversione scelta pari a $P_{con} = 1 - P_{jump} = 0.1$ (dove P_{jump} assume la forma dell'eq. 3.34). In questo caso, per basse energie, si osserva che l'intensità degli X è molto maggiore di quella degli O, con tale differenza che aumenta nel regime di magnetar. Raggiunta l'energia $E_{con} = 1$ keV, ossia l'energia cui si raggiunge la probabilità di conversione fissata, la conversione dei fotoni è completa e si osserva un repentino decremento dell'intensità del modo X in favore del modo O. Per il regime di magnetar si osserva solo tale avvicinamento delle intensità dei due modi. Al contrario, nel regime di campo normale, ad E_{con} si osserva il primo punto di "switch", ossia l'intensità O passa dall'essere minore di quella X ad essere maggiore. Tale situazione persiste fino al secondo punto di "switch", che si incontra ad $E = 3$ keV ed è dovuto, come nel caso di conversione completa, allo spostarsi della vacuum resonance, che passa dall'essere più esterna all'essere tra le fotosfere dei due modi.

3.4 Effetto Mikheyev–Smirnov–Wolfenstein

Come anticipato, il fenomeno di mode conversion è analogo all'effetto Mikheyev–Smirnov–Wolfenstein (MSW) per i neutrini. Tale similitudine verrà approfondita nelle discussioni.

L'effetto MSW viene definito come la conversione adiabatica di sapore dei neutrini causata dal cambio di mixing durante la propagazione attraverso materia con densità variabile. I tre elementi di base dell'effetto sono la rifrazione dei neutrini nella materia, la risonanza (*level crossing*) e l'adiabaticità.

Per prima cosa, è necessario introdurre il concetto di mixing. Gli stati di sapore di un neutrino sono definiti come gli stati corrispondenti ad un certo leptone carico, ossia $\nu_f = (\nu_e, \nu_\mu, \nu_\tau)$. Al contrario, gli stati di massa (ν_1, ν_2, ν_3 con masse m_1, m_2, m_3) sono gli autostati tanto della matrice di massa quanto dell'Hamiltoniana nel vuoto. Per mixing nel vuoto si intende, quindi, il fatto che gli stati di sapore non coincidono con gli autostati di massa, ma ne sono una combinazione secondo

$$\nu_l = U_{li}\nu_i, \quad l = e, \mu, \tau, \quad i = 1, 2, 3, \quad (3.63)$$

dove U_{li} sono i parametri di mixing che formano la matrice di Pontecorvo-Maki-Nakagawa-Sakata. Considerato il caso del mixing a due neutrini $\nu_e - \nu_a$, dove quest'ultimo è un qualsiasi neutrino non-elettronico (nel caso a tre neutrini, quest'ultimo risulta essere una miscela quantistica di ν_μ e ν_τ), si ha

$$\nu_e = \cos \theta \nu_1 + \sin \theta \nu_2, \quad \nu_a = \cos \theta \nu_2 - \sin \theta \nu_1, \quad (3.64)$$

dove θ è l'angolo di mixing nel vuoto. Ciò vuol dire che gli stati di sapore sono una combinazione *coerente* degli autostati di massa. Invertendo l'eq. 3.64 si ottiene la relazione

$$\nu_1 = \cos \theta \nu_e - \sin \theta \nu_a, \quad \nu_2 = \cos \theta \nu_a + \sin \theta \nu_e, \quad (3.65)$$

che determina la composizione di sapore degli autostati di massa, secondo la quale le probabilità che ν_1 appaia come ν_e o ν_a sono rispettivamente $\cos^2 \theta$ e $\sin^2 \theta$.

Dal momento che nel vuoto gli autostati di massa sono autostati dell'Hamiltoniana, la dinamica della propagazione ha le seguenti caratteristiche: la miscela quantistica di autostati di massa in un dato stato non cambia (ossia ν_1 e ν_2 propagano indipendentemente l'uno dall'altro), così come il sapore degli autostati, mentre la fase relativa aumenta in maniera monotona. Quest'ultima rappresenta quindi l'unico grado di libertà, e varia a causa della differenza di massa, essendo definito come

$$\Delta\phi = \Delta v_{phase} t, \quad \text{dove } \Delta v_{phase} \approx \frac{\Delta m^2}{2E}, \quad \Delta m^2 = m_2^2 - m_1^2, \quad (3.66)$$

dove E è l'energia del neutrino che si propaga. È l'aumento della fase a causare le oscillazioni: quando $\Delta\phi = \pi$ l'interferenza delle parti non-elettroniche è costruttiva e quindi è massima la probabilità di trovare ν_a ; quando invece $\Delta\phi = 2\pi$ il sistema si ritrova allo stato iniziale ν_e . La distanza alla quale si verifica quest'ultima condizione è detta lunghezza di oscillazione e si calcola come

$$l_\nu = \frac{2\pi}{\Delta\phi} = \frac{4\pi E}{\Delta m^2}. \quad (3.67)$$

In presenza di materia, invece, la propagazione dei neutrini è influenzata dalle interazioni, in particolare dallo scattering elastico in avanti (a basse energie prevale su quello inelastico, trascurabile) che può essere descritto, in un generico mezzo, dalla differenza tra i potenziali relativi a ν_e e ν_a (differenza dovuta allo scattering della corrente carica degli ν_e sugli elettroni). Tale differenza V è data da

$$V = V_e - V_a = \sqrt{2} G_F n_e, \quad (3.68)$$

dove G_F è la costante di accoppiamento di Fermi ed n_e è la densità numerica di elettroni. Tale differenza di potenziale genera un nuovo termine di fase nel sistema e permette di determinare la lunghezza di rifrazione (ossia la distanza a cui la "fase di materia" vale 2π), rispettivamente

$$\Delta\phi_{matter} = Vt, \quad l_0 = \frac{2\pi}{V} = \frac{\sqrt{2}\pi}{G_F n_e}. \quad (3.69)$$

Nella materia, cambia anche l'Hamiltoniana del sistema, e di conseguenza i suoi autostati, secondo

$$H_0 \longrightarrow H = H_0 + V, \quad \nu_1, \nu_2 \longrightarrow \nu_{1m}, \nu_{2m}. \quad (3.70)$$

Di conseguenza, il mixing nella materia è determinato dai nuovi autostati e, similmente a [3.64](#), dall'angolo θ_m come

$$\nu_e = \cos \theta_m \nu_{1m} + \sin \theta_m \nu_{2m}, \quad \nu_a = \cos \theta_m \nu_{2m} - \sin \theta_m \nu_{1m}. \quad (3.71)$$

La dipendenza del parametro di mixing effettivo $\sin^2 2\theta_m$ dal rapporto x tra lunghezza di oscillazione e di rifrazione assume il carattere di una funzione di Breit-Wigner: si tratta quindi di una risonanza, il cui massimo si trova per $\sin^2 2\theta_m = 1$ (e viene detta condizione di risonanza)

$$l_\nu = l_0 \cos 2\theta \quad (3.72)$$

grazie alla quale è possibile definire la densità di risonanza

$$n_e^R = \frac{\Delta m^2 \cos 2\theta}{2E \sqrt{2} G_F}. \quad (3.73)$$

A livello fisico, nella risonanza il mixing di sapore è massimo, mentre è minimo lo splitting tra i livelli ed è qui che, per materiali a densità variabile, avviene il cambio di sapore.

L'effetto MSW interessa, come detto, la propagazione nella materia, e in particolare in mezzi di densità non uniforme. Nel caso la densità sia costante, infatti, si ha una situazione simile a quella del vuoto, con miscela quantistica e sapore degli autostati che non cambia nella propagazione.

Al contrario, in un mezzo in cui $n_e = n_e(t)$, anche l'Hamiltoniana dipenderà dal tempo, e conseguentemente nel corso della propagazione l'angolo di mixing cambia ($\theta_m = \theta_m(n_e(t))$) e gli autostati istantanei dell'Hamiltoniana non sono più autostati di propagazione, permettendo la transizione $\nu_{1m} \leftrightarrow \nu_{2m}$. Tuttavia, tale transizione può essere trascurata se vale la cosiddetta condizione di adiabaticità, ossia se la densità varia abbastanza lentamente. L'adiabaticità quindi implica che i due autostati propagano indipendentemente. Le proprietà dinamiche allora diventano:

- il sapore degli autostati cambia nello stesso modo in cui cambia la densità, in quanto la composizione di sapore degli autostati dipende da $\theta_m = \theta_m(t)$;
- le miscele quantistiche degli autostati di un neutrino in propagazione non cambiano (per l'adiabaticità, appunto) e sono date dall'angolo di mixing nel punto di produzione (θ_m^0);
- la differenza di fase aumenta in quanto dipende dalla velocità di fase, legata a sua volta alla densità.

Si hanno quindi due gradi di libertà: il cambio di autostato di sapore dei neutrini e la differenza di fase. Il primo è ciò che genera l'effetto MSW, mentre il secondo genera gli effetti di oscillazione che vanno ad aggiungersi alla conversione adiabatica.

3.5 Metodi numerici

Per tracciare i grafici delle figure [3.1](#) e [3.2](#) e per calcolare i valori riportati in tabella [3.1](#) è stato utilizzato un codice numerico in C++. Tale codice, dichiarate tutte le costanti necessarie, si basa su tre parametri fondamentali, che caratterizzano ogni set di dati: il campo magnetico (B), l'energia del fotone (ϵ) e l'angolo tra campo magnetico e direzione di propagazione (θ_B).

A partire dall'energia, invertendo la relazione $\epsilon = \hbar\omega$, si è ricavata la pulsazione ω del fotone, fondamentale per stimare i parametri espressi in eq. [3.4](#). Grazie a quest'ultimi, è stato possibile calcolare le componenti del tensore di plasma nell'approssimazione di damping nullo, ossia sfruttando l'eq. [3.9](#). Tale approssimazione semplifica i conti, rendendo reale il parametro β_p e di conseguenza l'ellitticità K_{\pm} in eq. [3.21](#). Proprio K_{\pm} , che compaiono sulle ordinate nei grafici sopracitati, sono stati calcolati seguendo il ragionamento spiegato nelle sezioni [3.1.1](#) e [3.1.2](#), sfruttando i parametri scelti per calcolare tutte le quantità necessarie.

Per quanto concerne la densità, che si trova nell'asse delle ascisse, è stata usata una griglia equispaziata di 100 valori centrati intorno alla vacuum resonance, quest'ultima calcolata (per ogni set di parametri) sfruttando l'eq. [3.25](#). Tali valori della densità rientrano nel calcolo dell'ellitticità attraverso ω_{pe} ed ω_{pi} in quanto, per un mezzo non omogeneo, la densità numerica di elettroni (e di conseguenza quella degli ioni) dipende esplicitamente da ρ secondo

$$n_e(\rho) = \frac{\rho}{m_p}, \quad (3.74)$$

come anticipato nella sezione [3.1.1](#). Si genera, quindi, un array di valori che permette di calcolare le quantità necessarie a costruire i grafici sopracitati: a partire dai parametri caratteristici forniti in input, il programma restituisce in output un file di testo contenete gli array di densità e di ellitticità, e riporta a schermo i parametri iniziali e tutte le quantità riportate nella tabella [3.1](#).

Ogni valore è stato calcolato sfruttando la massima precisione possibile dal compilatore, ossia virgola mobile a precisione doppia estesa (80 bit), anche se nella tabella [3.1](#) sono state riportate massimo 5 cifre significative per ρ_V e massimo 4 per ϵ_{ad} .

Discussione e Conclusioni

Lo scopo di questa tesi è fornire una visione d'insieme degli effetti di campi magnetici molto intensi sulla propagazione della radiazione, con particolare focus sulle stelle di neutroni e sugli effetti che l'atmosfera di quest'ultime ha sulla polarizzazione dei fotoni.

Il ruolo della mode conversion nello studio della radiazione emessa da una stella di neutroni è, infatti, fondamentale. Come visto nelle sezioni precedenti, il caso d'interesse sono le magnetar, che presentano campo magnetico molto intenso, ereditato dalla stella progenitrice o generato mediante amplificazione per effetto dinamo. L'intensità di tali campi è sufficiente da rendere, come predetto dalla QED, il vuoto birfrangente. L'unione di tale effetto con gli effetti legati alla magnetizzazione del plasma che compone gli strati atmosferici di una NS, ed in particolare l'equilibrio tra tali fattori, genera il fenomeno della mode conversion: un fotone uscente cambia il proprio modo normale di polarizzazione (che in origine può essere X oppure O) in maniera adiabatica attraversando la vacuum resonance, ossia la densità in cui effetti di plasma e di vuoto si cancellano a vicenda.

Questo mode switching è analogo all'effetto Mikheyev–Smirnov–Wolfenstein (MSW) teorizzato per i neutrini solari. La similitudine è evidente: se per la mode conversion (MC) si osserva un cambio nel modo di polarizzazione normale dei fotoni, per l'effetto MSW è il sapore dei neutrini a venire modificato. In ambo i casi, poi, la presenza di un mezzo diverso dal vuoto è fondamentale: la MC non potrebbe avvenire senza gli effetti di plasma, mentre i neutrini nel vuoto presentano un'Hamiltoniana indipendente dal tempo, rendendo impossibile il cambio di autostato di sapore. Similmente, il mezzo in questione deve essere non uniforme, ossia presentare una variazione di densità non troppo repentina al fine di garantire la conversione, in quanto tanto l'angolo di mixing dei neutrini quanto la polarizzazione dei fotoni dipendono dalla densità del mezzo. La similitudine fondamentale, tuttavia, si trova nell'adiabaticità di entrambi i processi: la conversione rispettivamente dei modi di polarizzazione o del sapore è adiabatica e avviene, quindi, solo al verificarsi di specifiche condizioni. Lo strato la cui densità soddisfa le condizioni di adiabaticità è il luogo in cui avviene la conversione: per la MC si tratta della vacuum resonance, ossia la densità in cui gli effetti di vuoto e di plasma si equilibrano, rendendo la polarizzazione da lineare a circolare; al contrario, per l'effetto MSW, la risonanza è la densità in cui il mixing di sapore raggiunge il suo massimo, mentre lo splitting tra i livelli energetici è minimo.

L'unica differenza evidente, ascrivibile tuttavia alla natura intrinseca dei due processi, è la necessità di un campo magnetico molto intenso (per lo meno paragonabile al campo critico quantistico B_Q) per la MC.

La comprensione della mode conversion è fondamentale per lo studio dello spettro di emissione di una stella di neutroni. Come analizzato nella sezione [3.3](#), infatti, diversi fattori influiscono sul flusso uscente dall'atmosfera: in primo luogo la posizione della vacuum resonance rispetto alle fotosfere del modo X e del modo O, poi la percentuale di conversione legata alla probabilità di effettuare un salto non adiabatico tra le curve di ellitticità. Entrambi questi fattori sono legati ai parametri caratteristici della stella, come il campo magnetico, e dei fotoni, come l'energia o l'angolo tra la direzione di propagazione ed il campo.

Ad esempio, qualora la vacuum resonance si trovasse ad essere tra le due fotosfere, si osserva l'indurimento dello spettro e viene soppressa la linea di ciclotrone. Tali effetti potrebbero spiegare l'impossibilità di rilevare, ad ora, righe nello spettro termico osservato di alcune SGR (Soft Gamma-ray

Repeater, (13), il campo delle quali è presunto essere $B \gtrsim 10^{14}$ G.

Questo è solo un esempio di quanto lo studio dell'effetto di mode conversion possa essere fondamentale per comprendere meglio la natura delle stelle di neutroni (in particolare delle magnetar), la loro struttura e le loro caratteristiche.

Bibliografia

- [1] Stephen L. Adler. «Photon splitting and photon dispersion in a strong magnetic field». In: *Annals of Physica* 67 (2 1971), pp. 599–647. DOI: [10.1016/0003-4916\(71\)90154-0](https://doi.org/10.1016/0003-4916(71)90154-0).
- [2] J. Bally e B. Reipurth. «The Birth of Stars and Planets». In: Cambridge UP, 2006. Cap. 14.
- [3] D. Bhattacharya e E.P.J van den Heuvel. «Formation and evolution of binary and millisecond radio pulsars». In: *Physics Reports* 203 (1 1991).
- [4] P. Haensel, A.Y. Potekhin e D.G. Yankovlev. «Neutron Stars 1 - Equation of state and structure». In: Springer, 2007. Cap. 1-2.
- [5] Alice Harding e Dong Lai. «Physics of Strongly Magnetized Neutron Stars». In: *Reports on Progress in Physics* 69.9 (2006), pp. 2631–2708. DOI: [10.1088/0034-4885/69/9/R03](https://doi.org/10.1088/0034-4885/69/9/R03).
- [6] J. S. Heyl, N. J. Shaviv e D. Lloyd. «The high-energy polarization-limiting radius of neutron star magnetospheres». In: *Monthly Notices of the Royal Astronomical Society* 342.1 (2003).
- [7] Jeremy S. Heyl e Lars Hernquist. «Birefringence and dichroism of the QED vacuum». In: *J. Phys. A: Math. Gen.* 30 (1997), p. 6485.
- [8] C.G. Ho e D. Lai. «Spectral features in the thermal emission from insulated neutron stars: dependence on magnetic fields strengths». In: *The Astrophysical Journal* 607 (2004).
- [9] P. B. Jones. «Amorphous and Heterogeneous Phase of Neutron Star Matter». In: *Phys. Rev. Lett.* 83 (18 1999), pp. 3589–3592. DOI: [10.1103/PhysRevLett.83.3589](https://doi.org/10.1103/PhysRevLett.83.3589).
- [10] Victoria M. Kaspi. «Grand unification of neutron stars». In: *PNAS* 107.16 (2010).
- [11] E. F. Keane e M. Kramer. «On the birthrates of Galactic neutron stars». In: *Monthly Notices of the Royal Astronomical Society* 391.4 (2008), pp. 2009–2016.
- [12] R. Kelly et al. «X-ray Polarisation in Magnetar Atmospheres - Effects of Adiabatic Mode Conversion». In: *MNRAS* (2023), to appear.
- [13] S.R. Kulkarni e al. «The Quiescent Counterpart of the Soft Gamma-Ray Repeater SGR 0526–66». In: *The Astrophysical Journal* 585.2 (2003).
- [14] Dong Lai. «Matter in strong magnetic fields». In: *Rev. Mod. Phys.* 73 (3 2001), pp. 629–662.
- [15] Dong Lai e Wynn C. G. Ho. «Resonant Conversion of Photon Modes Due to Vacuum Polarization in a Magnetized Plasma: Implications for X-Ray Emission from Magnetars». In: *The Astrophysical Journal* 566.1 (2002), pp. 373–377. DOI: [10.1086/338074](https://doi.org/10.1086/338074).
- [16] P. Meszaros. «High-energy radiation from magnetized neutron stars». In: University of Chicago press, 1992. Cap. 3.
- [17] NASA. *Imaging X-ray Polarimetry Explorer (IXPE)*. URL: <https://ixpe.msfc.nasa.gov/> (visitato il 05/09/2023).
- [18] Alexander Y. Potekhin e Gilles Chabrier. «Equation of State and Opacities for Hydrogen Atmospheres of Magnetars». In: *The Astrophysical Journal* 600 (1 2004), p. 317.
- [19] M. Salaris e S. Cassisi. «Evolution of stars and stellar populations». In: John Wiley e Sons, 2005. Cap. 5.
- [20] A. Yu. Smirnov. «The MSW effect and solar neutrinos». In: *10th International Workshop on Neutrino Telescopes*. Mag. 2003, pp. 23–43. eprint: [hep-ph/0305106](https://arxiv.org/abs/hep-ph/0305106).
- [21] M. Soffel et al. «Propagation of high frequency waves in strongly magnetized plasmas - Mode ambiguities due to vacuum polarization.» In: *Astronomy and Astrophysics* 126 (1983).
- [22] R. Taverna e al. «Polarized x-rays from a magnetar». In: *Science* 378 (6620 2022), pp. 646–650.
- [23] R. Turolla, S. Zane e A. Watts. «Magnetars: The physics behind observations. A review». In: *Reports on progress in physics. Physical Society (Great Britain)* 78 (2015).