# Controllo ottimo di sistemi lineari con indice quadratico

Tesser Federico

22/11/2013

# Indice

# Introduzione

In generale, dato un sistema, la teoria dei sistemi ci consente di effettuare innumerevoli operazioni su esso come retroazione e allocazione di autovalori. Un altro importante problema, al quale questa teoria può dare soluzione, è quello di porsi come obbiettivo la minimizzazione di un funzionale di costo, legato all'uscita, tramite un opportuno segnale di ingresso. Questo problema va sotto il nome di problema del controllo ottimo. In questo breve trattato infatti ci si pone come obbiettivo l'illustrazione della teoria e consegueteмente della soluzione del quesito. Per prima cosa vediamo quali sono gli ingredienti che andremo a manipolare. Innanzitutto serve un sistema, che in questo frangente, sarà un sistema lineare tempo-invariante causale rappresentato tramite modello di stato. In secondo luogo serve, come già accennato prima, un indice, funzione dell'uscita, da minimizzare. Anche in questo caso introduciamo una peculiarità all'indice, infatti ci si restringerà ad indici di tipo quadratico. Il motivo di questa scelta è dettato dal fatto che tipicamente ciò che vogliamo minimizzare sono grandezze legate all'energia impiegata, che generalmente sono rappresentate da funzioni quadratiche, quindi definite positive. Esempi tipici di questo problema si riscontrano in vari ambiti della scienza, dall'elettronica in cui magari ci si pone il problema di ottimizzare il consumo di energia elettrica, all'economia dove ci si pone il voler ottimizzare costi o consumi. Anche nella gestione delle risorse naturali è possibile voler stimare le dinamiche delle specie (animali, vegetali o minerali) e voler ottimizzarne il profitto. La potenza della teoria dei sistemi risiede proprio nella capacità che si ha di astrarre le problematiche, modellizzarle e infine trattarle in metodo rigoroso senza preoccuparsi della natura stessa del problema.

- **Esempio:** Poniamoci il problema di dover pianificare in modo ottimo sull'intervallo $[0, T]$ la gestione di una riserva ittica naturale. Prima di tutto dichiariamo le variabili di interesse, indicando con x(t) la quantità di pesce presente nella riserva al tempo t e h(t) la quantità di pesce pescata nell'unità di tempo. Quindi ora procedendo per astrazione utilizziamo come modello l'equazione logistica di Verhulst:

$$x(t+1) = r - \frac{x(t)}{k} - h(t)$$

$$x(0) = x_0$$

  dove $r, k > 0$ costanti che rappresentano rispettivamente la velocità di crescita e il valore di saturazione. Come si può notare il modello è accettabile in quanto quando, $x(t)$ è piccolo il tasso di crescita è di tipo esponenziale, mentre all'aumentare $x(t)$, il tasso di crescita si riduce fino a zero stabilizzando la quantità di pesci nella riserva al valore k. A tutto questo viene sotratto $h(t) = f(x, u)$ che rappresenta la velocità di pescata che dipende dalla quantità di pesce rimanente e da un fattore u(t) che fornisce in maniera quantitativa l'impegno per effettuare l'operazione (numero di uomini, di barche etc) fungendo da una sorta di manopola su cui possiamo agire arbitrariamente per controllare la popolazione ittica. L'uscita del nostro sistema sarà il guadagno dato da:

$$y(t) = ph(t) - cu(t)$$

dove p e c sono parametri di coversione dell'impegno e della velocità di pescata in guadagno. Proseguendo l'analisi indichiamo ora il nostro indice da ottimizzare che per questo caso sarà:

$$J = \sum_{0}^{T} y^2(t)$$

che quindi rappresenta il guadagno nell'intevallo $[0, T]$ e che ovviamente vogliamo in questo caso massimizzare. **N.B.:** sono sempre stati citati sistemi lineari e il sistema appena proposto non lo è a meno che non sia lineare $h(\cdot\,,\cdot\,)$ in $u(t)$ e $x(t)$.

# Strumenti necessari

Prima di passare all'analisi vera e propria è neccessario prima fare delle brevi riflessioni su alcuni risultati algebrici che andremo ad utilizzare. La prima cosa che andremo ad analizzare sarà un estensione del concetto di matrice inversa. Infatti a differenza dei comuni trattati di questo argomento qui ci si focalizza su una generalizzazione del problema del controllo ottimo. Infatti in genereale ci si restringe a modelli di sistema che, per costruzione, fanno risultare tutte le matrici con le quali si lavora invertibili. Questo fatto potrebbe introdurre delle limitazioni che non sempre siamo disposti ad accettare. Quello che serve a noi è uno strumento che ci consenta di lavorare con matrici non invertibili e inverta tali matrici in un qualche senso. Ecco appunto il motivo di introdurre la matrice pseudo-inversa, che subito ci affrettiamo a dire non ha le proprietà dell'inversa, ma le sue caratteristiche comunque ci consentono di lavorare. Nello specifico utilizzeremo la matrice pseudo-inversa di Moore-Penrose, indicata con †. Si definisce dunque $A^\dagger$ matrice pseudo-inversa secondo Moore-Penrose di $A$, una matrice che soddisfa le seguenti proprietà:

- $AA^\dagger A = A$;
- $A^\dagger AA^\dagger = A^\dagger$;
- $(AA^\dagger)^* = AA^\dagger$;
- $(A^\dagger A)^* = A^\dagger$ A;

Dove le ultime due proprietà indicano l'Hermitianetà di $AA^\dagger$ Notiamo subito che le prime due proprietà non impongono affatto che $AA^\dagger$ si l'identità matriciale ma che nel caso la matrice $A$ sia invertibile allora la pseudo-inversa conincide con l'inversa, confermando l'affermazione che l'una è la generalizzazione dell'altra. Un fatto importante (che non andremo a dimostrare) è che la matrice pseudo-inversa esiste sempre ed è unica per ogni matrice A. Fatto che ci aiuterà nel determinare l'unicità delle soluzioni che troveremo. Esistono un certo numero di proprietà che sono conseguenti dalla definizione appena data, cioè:

- Se $A$ è una matrice a coefficienti reali allora anche $A^\dagger$ ha coefficienti reali.
- Se $A$ è invertibile, come già accennato allora $A^\dagger = A^{-1}$.
- La matrice pseudo-inversa di una matrice nulla è la sua trasposta.

- La pseudo-inversa di una matrice pseudo-inversa è la matrice originale.
- L'operatore di pseudo-inversa commuta con la trasposizione e la coniugazione nel trasposto coniugato:

$$(A^T)^\dagger = (A^\dagger)^T; \qquad (A^*)^\dagger = (A^\dagger)^*$$

- La pseudo-inversa di uno scalare multiplo di A è il reciproco dello scalare moltiplicato per $A^\dagger$:

$$(\alpha A)^\dagger = \alpha^{-1} A^\dagger \qquad \textit{con } \alpha \neq 0$$

Infine:

$$(AB)^\dagger = (B^\dagger A^\dagger)$$

se $A$ e $B$ hanno rango pieno allora anche il prodotto delle pseudo-inverse ha rango pieno. Per quando rigurda le relazioni che intercorrono tra gli spazi e le matrici abbiamo che:

- $Ker(A^\dagger) = Ker(A^*)$;
- $Im(A^\dagger) = Im(A^*)$;

Che in caso di $A$ reale facilità enormemente le cose.

Il prossimo passo sarà quello di analizzare alcune proprietà delle matrici simmetriche semi-definite positive che risulteranno particolarmente utili nel proseguimento della trattazione. Prendiamo dunque una matrice $P$ semidefinita positiva e simmetrica partizionata in questo modo:

$$P = \begin{bmatrix} P_{11} & P_{12} \\ P_{12}^T & P_{22} \end{bmatrix}$$

Allora valgono i seguenti lemmi:

$$(i)\ KerP_{12} \supseteq KerP_{22}, \qquad (ii)\ P_{12}P_{22}^\dagger P_{22} = P_{12}$$

$$(iii)\ P_{12}(I - P_{22}^\dagger P_{22}) = 0 \qquad (iv)\ P_{11} - P_{12}P_{22}^\dagger P_{12}^T \geq 0$$

Dimostrazione:

- (i): Supponiamo che $x \in KerP_{22}$ e prendo un vettore

$$\begin{bmatrix} 0 \\ x \end{bmatrix}$$

cioè:

$$\begin{bmatrix} P_{11} & P_{12} \\ P_{12}^T & P_{22} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 0 \\ x \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} P_{12}x \\ 0 \end{bmatrix}$$

prediamo ora la forma quandrica costruita con la matrice P:

$$\begin{bmatrix} y^T & x^T \end{bmatrix} \begin{bmatrix} P_{11} & P_{12} \\ P_{12}^T & P_{22} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} y \\ x \end{bmatrix}$$

con x come sopra e y generico. Segue:

$$\begin{bmatrix} y^T & x^T \end{bmatrix} \begin{bmatrix} P_{11}y + P_{12}x \\ P_{12}^T y \end{bmatrix}$$

$$y^T P_{11} y + 2y^T P_{12} x \geq 0$$

dove la semidefititività positiva è garantita per ipotesi. Ora si procede per assurdo supponendo che $x \notin KerP_{12}$. Inanzitutto vediamo che $\exists \alpha, \overline{y} : \overline{y}^T P_{12} x = k < 0 \; e \; y = \alpha \overline{y}, \alpha > 0$ tale che:

$$y^T P_{11} y + 2y^T P_{12} x = \alpha^2 \overline{y}^T P_{11} \overline{y} + 2\alpha K =$$

$$\alpha(\alpha h + 2k) < 0$$

se $\alpha < \frac{-2k}{h}$, che è in contrasto con l'ipotesi quindi $x \in KerP_{12}$

NB: abbiamo posto $\overline{y}^T P_{11} \overline{y} = h \geq 0$.

- (ii): Prendiamo la forma quadratica $x^T P x = k \geq 0$. Vogliamo verificare che:

$$x^T P_{11} x + 2x^T P_{12} y + y^T P_{22} y = k$$

$$x^T P_{11} x + 2x^T P_{12} P_{22}^{\dagger} P_{22} y + y^T P_{22} y = k$$

sono la stessa equazione. per farlo procediamo ad una sotrazione membro a membro ottenendo dunque:

$$\star \qquad x^T P_{12} y = x^T P_{12} P_{22}^{\dagger} P_{22} y$$

riducendo così il problema al verificare un identità. Ora sappiamo che è sempre vero che $P_{12}^T x + P_{22} y = a$ dove $a$ è uno vettore noto. Quindi possiamo dire che $P_{12}^T x = a - P_{22} y$ e che (♠) $x^T P_{12} = a^T - y^T P_{22}$ trasponendo entranbi i mebri. Notiamo ora che $a$ è un vettore appartenente all'immagine di $P_{22}$ poichè per la (i) $KerP_{12} \supseteq KerP_{22}$ e inoltre $ImP_{22}^T = ImP_{22} = (KerP_{22})^{\perp}$, da cui segue che $ImP_{12} \subseteq$

$ImP_{22}$. Quindi ogni vettore appartenente all'$ImP_{12}$ appartiene anche all'$ImP_{22}$. Dunque possiamo scrivere $a$ come $P_{22}b$ e la (♠) diventa $x^T P_{12} = (b^T - y^T)P_{22} \equiv \overline{y}^T P_{22}$. Riprendendo ora l'identià $\star$ e applichiamo l'uguaglianza appena ricavata ove possibile:

$$-\overline{y}^T P_{22} y = -\overline{y}^T P_{22} P_{22}^{\dagger} P_{22} y$$

Semplifichiamo a destra e a sinistra e applichiamo la proprietà della pseudo-inversa di moore-penrose. Otteniamo così che l'identià è verificata:

$$P_{22} = P_{22}$$

- (iii): questo fatto è immediatamente conseguenza del lemma precedente in quanto, con semplici passaggi algebrici si arriva alla soluzione:

$$P_{12} P_{22}^{\dagger} P_{22} = P_{12}$$

$$P_{12} P_{22}^{\dagger} P_{22} - P_{12} = 0$$

Raccogliendo a fattor comune si ottiene:

$$P_{12}(I - P_{22}^{\dagger} P_{22}) = 0$$

- (iv): scriviamo la forma quandratica associata a $P$, $\forall x, y$ vale:

$$\begin{bmatrix} y^T & x^T \end{bmatrix} \begin{bmatrix} P_{11} & P_{12} \\ P_{12}^T & P_{22} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} y \\ x \end{bmatrix} \geq 0$$

che produce:

$$x^T P_{11} x + 2x^T P_{12} y + y^T P_{22} y \geq 0$$

essendo che vale per qualsiasi $x, y$ allora possiamo prendere:

$$y = -P_{22}^{\dagger} P_{12}^T x$$

ed andando a sostituire si ottiene:

$$x^T P_{11} x - 2x^T P_{12} P_{22}^{\dagger} P_{12}^T x + x^T P_{12} P_{22}^{\dagger} P_{22} P_{22}^{\dagger} P_{12}^T x \geq 0$$

che per le proprietà della pseudo-inversa risulta:

$$x^T [P_{11} - P_{12} P_{22}^{\dagger} P_{12}^T] x \geq 0$$

e si ottiene la tesi.

# L'indice di costo

In qesta sezione ci preoccuperemo di valutare la struttura dell'indice di costo e di costruire un scrittura che ci consenta di lavorarci. In virtù di questo consideriamo un sistema lineare a tempo discreto $\Sigma$:

$$\Sigma : \qquad \begin{cases} x(t+1) = Ax(t) + Bu(t) \\ y(t) = Cx(t) + Du(t) \end{cases}$$

con $A \in \mathbb{R}^{nxn}$, $B \in \mathbb{R}^{mxn}$, $C \in \mathbb{R}^{nxp}$ e $D \in \mathbb{R}^{mxp}$. Ora come già detto prendiamo un generico indice quadratico funzione dell'uscita:

$$J(u, x_0) = \sum_{t=0}^{+\infty} y^T y$$

e andiamo a sostituirci il valore di y che ritroviamo nelle equazioni del sistema.

$$J(u, x_0) = \sum_{t=0}^{+\infty} (Cx + Du)^T (Cx + Du) = \sum_{t=0}^{+\infty} ((Cx)^T + (Du)^T)(Cx + Du) =$$

$$= \sum_{t=0}^{+\infty} (x^T C^T + u^T D^T)(Cx + Du)$$

$$= \sum_{t=0}^{+\infty} x^T C^T Cx + x^T C^T Du + u^T D^T Cx + u^T D^T Du$$

che notiamo esser subito una forma quadratica che possiamo riscrivere in termini matriciali come:

$$(\star) \qquad J(u, x_0) = \sum_{t=0}^{+\infty} \begin{bmatrix} x^T & u^T \end{bmatrix} \begin{bmatrix} C^T C & C^T D \\ D^T C & D^T D \end{bmatrix} \begin{bmatrix} x \\ u \end{bmatrix} = \sum_{t=0}^{+\infty} \begin{bmatrix} x^T & u^T \end{bmatrix} \begin{bmatrix} Q & S \\ S^T & R \end{bmatrix} \begin{bmatrix} x \\ u \end{bmatrix}$$

dove abbiamo definito $C^T C = Q \in \mathbb{R}^{nxn}$, $C^T D = S \in \mathbb{R}^{mxn}$ e $D^T D = R \in \mathbb{R}^{mxm}$, la matrice risultante la chiameremo $\Pi$:

$$\Pi = \begin{bmatrix} Q & S \\ S^T & R \end{bmatrix}$$

A priori non possiamo dire molto sull'indice, infatti a meno di termini finiti esso è composto da una sommatoria di infiniti termini che potrebbe non convergere. Infatti non siamo in grado di dire se essa converga o meno ma, quello che faremo da ora in avanti, è suppore che vi sia una speranza di convergenza. In pratica assumeremo che per ogni $x_0$ esista una sequenza di ingressi $u(t) \in \mathbb{R}^m$ con $t \in \mathbb{N}$ tale che l'indice $J(x_0, u)$ esista finito. Questo a prima vista sembrerebbe una forzatura ma, in realtà, scopriremo che questo ingresso esiste veramente e saremo pure in grado di darne una definizione quantitativa oltre che qualitativa. In realtà una condizione sufficiente ad aver convergenza è che il sistema sia stabilizzabile.

# Equazione di Riccati

La soluzione del problema del controllo ottimo passa per la soluzione dell'equazione di Riccati (DARE-discrete-time arlgebric Riccati equation):

$$X = A^T XA - (A^T XB + S)(R + B^T XB)^{-1}(B^T XA + S^T) + Q$$

dove $A \in \mathbb{R}^{nxn}$, $B \in \mathbb{R}^{nxm}$, $Q \in \mathbb{R}^{nxn}$, $S \in \mathbb{R}^{nxm}$ e $R \in \mathbb{R}^{mxm}$ ed inoltre la terna $(Q, S, R)$ soddisfa:

$$\Pi = \begin{bmatrix} Q & S \\ S^T & R \end{bmatrix}$$

$\Pi$ è detta matrice di Popov. Notiamo subito che l'equazione di Riccati può non ammettere soluzione a causa dell'opertatore di inversione in $(R + B^T XB)^{-1}$, questo comunque non significa che il problema del controllo ottimo non ammette soluzione ma che semplicemente è necessario passare per una forma più generale dell'equazione chiamata GDARE (generalised discrete-time algebric Riccati equation):

$$X = A^T XA - (A^T XB + S)(R + B^T XB)^{\dagger}(B^T XA + S^T) + Q$$

dove l'operatore di inversione è sostituito con il più generico operatore di pseudo-inversa. In questo modo anche quando la matrice $(R + B^T XB)$ è solo semidefinita positivia si è in grado comunque di trovare una soluzione X accettabile. Inoltre è importate notare che se X è soluzione di DARE allora è anche soluzione di GDARE visto il fatto che la matrice pseudo-inversa è una generalizzazione della matrice inversa e che se ci si mette in condizione di esistenza di quest'ultima, la pseudo-inversa coincide con l'inversa come già visto.

# Soluzione del preoblema del controllo ottimo su orizzonte finito

Passiamo ora al cuore del problema. Siamo arrivati ad analizzare la struttura di un indice di costo che fa riferimento ad una generico sistema:

$$\Sigma : \qquad \begin{cases} x(t+1) = Ax(t) + Bu(t) \\ y(t) = Cx(t) + Du(t) \end{cases}$$

Inoltre è stata ananlizzata l'equazione algebrica di Riccati generalizzata, e abbiamo visto che è in grado di fornirci successioni di matrici che convergono ad un valore limite. Consideriamo ora una successione arbitraria di matrici $M(0), M(1), ..., M(T) \in \mathbb{R}^{nxn}$ simmetriche semidefinite positive e la seguente identià:

$$0 = x^T(0)M(0)x(0) - x^T(T)M(T)x(T)+$$
$$+\sum_{t=0}^{T-1}[x^T(t+1)M(t+1)x(t+1) - x^T(t)M(t)x(T)]$$

e dunque sostituiamo $x(t+1)$ con l'espressione che abbiamo dal sistema ottenendo così l'identità:

$$(\star\star)0 = x(0)^T M(0)x(0) - x^T(T)M(T)x(T)+$$

$$+\sum_{t=0}^{T-1}\begin{bmatrix} x^T(t) & u^T(t) \end{bmatrix}\begin{bmatrix} A^T M(t+1)A - M(t) & A^T M(t+1)B \\ B^T M(t+1)A & B^T M(t+1)B \end{bmatrix}\begin{bmatrix} x(t) \\ u(t) \end{bmatrix}$$

Notiamo ora che esiste una sorta di similarità della scrittura tra $(\star)$ e l'identità appena ricavata, infatti la struttura delle due equazioni e praticamente la stessa a meno del fatto che l'indice contiene termini che vanno fino ad infinito, mentre $(\star\star)$ contiente termini che arrivano fino a $T$, perciò immaginiamo dai fermare l'indice a $T$.Nel farlo però estraiamo il T-esimo termine dall'indice e lo scriviamo esplicitamente, esso dipende esclusivamente da $x(.)$ e lo chiamiamo $x(t)^T W x(t)$. Questo significherebbe che non stiamo più cercando di ottimizzare su un tempo infinito ma bensì che stiamo minimizzando su un tempo finito, cioè disponiamo di una sequenza di ingresso di lunghezza $T$ e vogliamo ottimizzare con essa. In realtà questo non è poi così distante da ciò che vogliamo, infatti una volta che avremo risolto su questo caso più ristretto, per armbitrarietà di $T$, ci potremmo estendere sino ad infinito.

Procediamo quindi con il sommare membro-membro le equazioni $(\star)$ e $(\star\star)$ e otteninamo:

$$J_T(u,x_0) = x(0)^T M(0)x(0) + x^T(T)[W - M(T)]x(T) +$$

$$+\sum_{t=0}^{T-1} \begin{bmatrix} x^T(t) & u^T(t) \end{bmatrix} \begin{bmatrix} Q + A^T M(t+1)A - M(t) & A^T M(t+1)B + S \\ B^T M(t+1)A + S^T & R + B^T M(t+1)B \end{bmatrix} \begin{bmatrix} x(t) \\ u(t) \end{bmatrix}$$

Fino a questo monento ci siamo dati completa libertà di scelta sulla successione di matrici M(t). Una scelta intelligente è quella di sceglie una successione di matrici che soddisfa la GDARE. Infatti non solo Riccati ci fornisce delle matrici simmetriche semidefinite positive ma ci fornisce anche un algoritmo per calcolarle tramine l'equazione ricorsiva all'indietro associata. Inoltre il vantaggio di questa scelta è che il problema si semplifica da sè come vedremo. Riprendiamo dunque la GDARE, e le diamo come condizione iniziale $M(T) = W$:

$$M = A^T MA - (A^T MB + S)(R + B^T MB)^\dagger (B^T MA + S^T) + Q$$

e riscriviamola in una forma più conveniente:

$$Q + A^T MA - M = (A^T MB + S)(R + B^T MB)^\dagger (B^T MA + S^T)$$

l'ultima scrittura ci fa subito balzare all'occhio una sostituzione che possiamo fare nella $J_{T-1}$:

$$J_T(u,x_0) = x(0)^T M(0)x(0) +$$

$$+\sum_{t=0}^{T-1} [x^T(t)\ u^T(t)] \begin{bmatrix} (A^T MB+S)(R+B^T MB)^\dagger (B^T MA+S^T) & A^T M(t+1)B+S \\ B^T M(t+1)A+S^T & R+B^T M(t+1)B \end{bmatrix} \begin{bmatrix} x(t) \\ u(t) \end{bmatrix}$$

Ora riprendiamo i risultati che abbiamo ottenuto nella sezione Strumenti Necessari per ottenere delle importanti identità, infatti per il lemma (ii) possiamo scrivere:

$$(R + B^T MB)(R + B^T MB)^\dagger (B^T MA + S^T) = (B^T MA + S^T)$$

$$(A^T MB + S)(R + B^T MB)^\dagger (R + B^T MB) = (A^T MB + S)$$

questo ci consente di sostituire nell'anti-diagonale della matrice in sommatoria le realzioni appena trovate e quindi ricavare un $(R + B^T MB)$ da tutti gli elementi ottenendo una scrittura equivalente:

$$J_T(u,x_0) = x(0)^T M(0)x(0) +$$

$$+\sum_{t=0}^{T-1}\begin{bmatrix}x^T(t) & u^T(t)\end{bmatrix}\begin{bmatrix}A^TMB+S\\ R+B^TMB\end{bmatrix}[R+B^TMB]^\dagger\begin{bmatrix}B^TMA+S & R+B^TMB\end{bmatrix}\begin{bmatrix}x(t)\\ u(t)\end{bmatrix}$$

Procediamo ora allo sviluppo dei termini che abbiamo ottenuto all'interno della sommatoria:

$$J_T(u,x_0) = x(0)^TM(0)x(0)+$$

$$+\sum_{t=0}^{T-1}[x^T(A^TMB+S)+u^T(R+B^TMB)][R+B^TMB]^\dagger[(B^TMA+S^T)x+(R+B^TMB)u]$$

da qui arriviamo a concludere che se:

$$\overline{u}(t) = -(R+B^TM(t+1)B)^\dagger(B^TM(t+1)A+S^T)x(t)$$

allora tutta la sommatoria si annulla. In realtà la sequenza $\overline{u}(t)$ non è l'unica che annulla quella sommatoria ma esiste un intera famiglia di sequenza u che la annullano, più precisamente sono:

$$u(t)^* = -(R+B^TM(t+1)B)^\dagger(B^TM(t+1)A+S^T)x(t)+$$

$$+(I-(R+B^TM(t+1)B)^\dagger(R+B^TM(t+1)B))v$$

dove $v$ è un vettore arbitrario. Essendo $J_T$ una somma di termini positivi vale il fatto che meno termini sommiamo tra loro più piccolo sarà il valore risultante, ma si è riusciti a trovare una particolare famiglia $u(t)^*$ che annulla tutti i termini eccetto $x(0)^TM(0)x(0)$ sul quale non abbiamo alcuna possibilità di manovra. Quindi $u(t)^*$ è l'ingresso ottimo su $T$ e il valore ottimo dell'ondice è appunto $J_T^*(x(0)) = x(0)^TM(0)x(0)$.

# Convergenza della GDARE

Quello che vogliamo far vedere ora è che la GDARE ammette soluzione che può esser ottenuta come limite delle matrici generate della equazione generalizzata di Riccati con condizione iniziale zero.

Supponiamo che per ogni $x_0$ esiste una sequenza di ingressi $u(t)$ che renda l'indice $J(x_0, u)$ finito. Allora la GGDARE ammentte soluzione $M_\infty = M_\infty^T \geq 0$ che può esser ottenuta come limite della sequenza di matrici generate iterando l'equazione di Riccati generalizzata con zero come condizione iniziale

- Dimostrazione: Sia $X_T(t) = R[X_T(t+1)]$, dove abbiamo definito $R[.]$ come

$$R[X] = A^T XA - (A^T XB + S)(R + B^T XB)^\dagger (B^T XA + S^T) + Q$$

e $X_T(t)$ la matrice ottenuta al passo $t$ su una sequenza di matrici con condizioni iniziali $X_T(T)$. Il valore ottimo dell'indice di costo risulta quindi $J^*(x_0) = x_0^T X_T(0)x_0$. Consideriamo la sequenza di matrici con indice temporale inverso definita come $M_t(t) \equiv X_t(0)$, cioè si è posto il valore finale di $X_t(\cdot)$ come valore finale di $M_t(\cdot)$ e quindi la sequenza $\{M_t\}_{t\in\mathbb{N}}$ è ottenuta tramite l'iterazione in avanti della equazione di Riccati generalizzata. Assumiamo ora per assurdo che $\lim_{t\to\infty} \|M_t\| = \infty$. Costruiamo la sequenza $M_t^1$ definita come $\left\{M_t^1 = \frac{M_t}{\|M_t\|}\right\}_{t\in\mathbb{N}}$ che è sicuramente limitata. Sia $\overline{M}^1$ il suo limite, si ha dunque che $\|M^1\| = 1$. Prendiamo ora un $x_0^1 \in \mathbb{R}^{nxn}$ tale che $\|x_0^1\| = 1$ e che $(x_0^1)^T \overline{M}^1 x_0^1 = 1$. Definiamo $J_t^*(x_0) = (x_0^1)^T M_t x_0^1$ che è una successione monotona non-decrescente. Dato che abbiamo assunto che per ogni $x_0$ esiste una traiettoria che rende l'indice $(\star)$ finito allora esiste una costante $m_0$ e una traiettoria di ingresso $u^1$ tale che:

$$J_t^*(x_0^1) \leq J(x_0^1, u^1) \leq m_0$$

dove la prima disuguaglianza è data dal fatto che per una dato ingresso $u^1$ l'indice di costo è una somma di infiniti termini non negativi, la quale è maggiore o uguale alla somma dei primi $t$ termini della stessa e che $J_t^*$ è ottimo su $t$. Daltro canto sappiamo che:

$$J_t^*(x_0^1) = \|M_t\| \, (x_0^1)^T M_t^1 (x_0)^1 \to \infty$$

questo provoca una contraddizione con l'ipotesi che voleva l'indice $J(\cdot\,,\cdot)$ finito. Dunque $M_t$ ammette limite finito $M_\infty$. Per concludere occorre far vedere che $M_\infty$ è ancora una soluzione semidefinita positiva della GDARE. Per veder ciò è sufficiente far vedere che $\lim_{t\to\infty} R^\dagger_{M(0)} = R^\dagger_{M_\infty}$, dove $R_{M(t)} = (R + B^T M(t) B)$. Infatti la pseudo-inversa è l'unica fonte di discontinuità per il limite. Per provarla, consideriamo la sequenza $\left\{R_{M(t)}\right\}_{t\in\mathbb{N}}$. La sequenza considerata è una sequenza monotona, non-decrescente di matrici semidefinite positive, dunque vale:

$$Ker R_{M(0)} \supseteq Ker R_{M(1)} \supseteq ....$$

chiaramente esiste sicuramente un $\bar{t}$ tale che $\forall t > \bar{t}$ la sequenza di inclusioni diventa stazionaria. Perciò possiamo prendere un cambio di cooridinate indipendenti che ci porta $R_{M(t)} = diag\left\{R^0_t, 0\right\}$ dove $R^0_t$ è una sequenza non decrescente e definita positiva. Chiaramente essendo $R^0_t$ non singolare il suo limite esiste e vale $R^0$. Nella nuova base abbiamo quindi che:

$$R^\dagger_{M(t)} = \begin{bmatrix} (R^0_t)^{-1} & 0 \\ 0 & 0 \end{bmatrix}$$

che per $t$ che tende ad infinito tende a:

$$\begin{bmatrix} (R^0)^{-1} & 0 \\ 0 & 0 \end{bmatrix} = R^\dagger_{M_\infty}$$

# Soluzione del problema del controllo ottimo su orizzonte infinito

Procediamo ora ad estendere il risultato che abbiamo ottenuto sull'orizzonte finito al caso infinito. Per far ciò procediamo in due passi: il primo consiste nel mostrare che il valore del costo ottimo è $x(0)^T M_\infty x(0)$, mentre il secondo passo consiste nel mostrare che l'igresso ottimo che produce il costo ottimo è ancora $u^*$.

Supponiamo che $\forall x_0 \exists u(t) \in \mathbb{R}^m$ tale che $J(x_0, u)$ è finito. Allora il valore del costo ottimo è $x_0^T M_\infty x_0$.

- Dimostrazione: Sia

$$\overline{J}(x_0) = inf\, J_t(x_0, u) \qquad su\ ogni\ u$$

chiaramente $\overline{J} \geq J_t^*(x_0) = x_0^T M(0) x_0$ che è il costo ottimo. Quindi prendendo il limite abbiamo che $\overline{J} \geq x_0^T M_\infty x_0$. Sappiamo, avendolo già dimostrato, che preso l'indice

$$J_{T,M(T)}(u, x_0) = \underbrace{\sum_{t=0}^{T-1} \begin{bmatrix} x^T & u^T \end{bmatrix} \begin{bmatrix} Q & S \\ S^T & R \end{bmatrix} \begin{bmatrix} x \\ u \end{bmatrix}}_{J_T} + x_T^T M_T x_T$$

e la traiettoria ottima $u^*$, il costo ottimo è indipendente dalla lunghezza di $T$ e vale $J_{T,M(T)}^* = x_0^T M(0) x_0$. Possiamo riscrivere l'ultima equazione come:

$$J_T = J_{T,M(T)} - x_T^T M_T x_T$$

e

$$x_0^T M_\infty x_0 \leq \overline{J}(x_0) \leq J(x_0, u^*) = \lim_{T\to\infty} J_T(x_0, u^*) =$$

$$= \lim_{T\to\infty} J_{T,M(T)}(x_0, u^*) - x_T^T M_T x_T \leq \lim_{T\to\infty} x_0^T M(0) x_0 = x_0^T M_\infty x_0$$

dove l'ultima disuguaglianza regge per la proprietà di $M$ di esser semidefinita positiva. Quindi considerando la prima e l'ultima disuguaglianza si evince che il vaore ottimo dell'indice su un orizzonte infinito è:

$$J_T^*(x(0)) = x(0)^T M_\infty x(0)$$

Passiamo ora al secondo passo, facciamo vedere che $u^*$ definito come:

$$u(t)^* = -(R + B^T M(t+1) B)^\dagger (B^T M(t+1) A + S^T) x(t) +$$

$$+(I-(R+B^TM(t+1)B)^\dagger(R+B^TM(t+1)B))v$$

è l'ingresso che minimizza il costo.

Supponiamo che $\forall x_0 \exists u(t) \in \mathbb{R}^m$ tale che $J(x_0,u)$ è finito. Allora la famiglia di ingressi che rende il costo ottimo è $u^*$.

- Dimostrazione: Sia $\mathbb{U}_0$ l'insieme di tutti gli ingressi ottimi con $t=0$. Prendiamo un generico $u_0 \in \mathbb{R}^m$ e sia $x_1$ lo stato al tempo $t=1$, il costo ottimo può esser scritto come:

$$J^* = [x_0^T \;\; u_0^T] \begin{bmatrix} M(0) & 0 \\ 0 & 0 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} x_0 \\ u_0 \end{bmatrix}$$

Allora $u_0 \in \mathbb{U}_0$ se e solo se il costo ottimo può esser riscritto nella seguente forma:

$$J^* = x_0^TM(0)x_0 + [x_0^T \;\; u_0^T]\Pi \begin{bmatrix} x_0 \\ u_0 \end{bmatrix}$$

Sottraendo membro-membro le due equazioni appena scritte abbiamo che $u_0 \in \mathbb{U}_0$ se e solo se:

$$[x_0^T \;\; u_0^T]\Pi \begin{bmatrix} x_0 \\ u_0 \end{bmatrix} = 0$$

cioè:

$$\Pi \begin{bmatrix} x_0 \\ u_0 \end{bmatrix} = 0$$

Se prendiamo $u_0 = u^*$, abbiamo che l'uguaglianza è verificata, infatti:

$$\begin{cases} Qx_0 + Su_0 = 0 \\ S^Tx_0 + Ru_0 = 0 \end{cases}$$

quindi:

$$\underbrace{Qx_0 - SR^\dagger S^Tx_0}_{0} + \underbrace{S(I-R^\dagger R)v}_{0} = 0$$

$$\underbrace{S^Tx_0 - RR^\dagger S^Tx_0}_{0} + \underbrace{R(I-R^\dagger R)v}_{0} = 0$$

che sono entrambe vere per i lemmi sulle matrici semidefinite posisitive. Reiterando il procedimento su tutti i $t$ otteniamo la tesi.

Infine notiamo che estendendo l'orizzonte temporale a infinito saremo costretti a sostituire tutti gli $M(0)$ con gli $M_\infty$ per la convergenza della GDARE.

# Conclusione

Siamo così riusciti alla fine di questo trattato a dare una definizione qualitativa e quantitativa di un ingresso che rende minimo un indice di costo di tipo quadratico su un intervallo finito o infinito, senza alcun vincolo di definita positività sulla matrice $\Pi$ che definisce l'indice e ne associa un'equazione generalizzata di Riccati. Ovviamente lo sviluppo concreto dei calcoli della matrice $M_\infty$ richiede un approccio algoritmico particolare da sviluppare su un calcolatore, cosa che in questo trattato viene tralasciata essendoci concentrati su un'analisi teorica del problema.

# Fonti


- A. Ferrante e L. Ntogramatzidis, *The Generalised Discrete Algebraic Riccati Equation in Linear-Quadratic optimal control*, Articolo.
- A. Ferrante, L. Ntogramatzidis,*Generalized Finite-Horizon Linear Quadratic Control Optimal Control*, Articolo.
- E. Fornasini e G. Marchesini, *Appunti di Teoria dei Sistemi*, Edizioni Libreria Progetto, Padova, 2003.