Università degli Studi di Padova

DIPARTIMENTO DI FISICA E ASTRONOMIA "GALILEO GALILEI"
Corso di Laurea in Fisica

Tesi di laurea

Dualità elettromagnetica in teorie con campi di gauge massivi

Candidato:
Davide Billo
Matricola 1053218

Relatore:
Prof. Kurt Lechner

Anno Accademico 2015-2016

Indice

Capitolo 1

Introduzione

1.1 Il concetto di dualità

La dualità è una antica e feconda idea della matematica. La sua storia ha origini che risalgono a centinaia di anni fa e nel tempo è stata adattata e modificata in modo tale da essere applicabile a situazioni sempre nuove. Questa sua versatilità ne fa quasi un "principio", tanto che ritroviamo la dualità in diverse aree del sapere, dalla matematica (ad esempio in geometria e algebra) alla fisica. Se volessimo darne una definizione, in senso lato potremmo dire che *la dualità permette di descrivere un oggetto utilizzando modalità diverse*. Ne diamo ora alcuni esempi.

Dualità nel piano proiettivo. In un piano euclideo abbiamo punti e rette. Due punti distinti individuano una e una sola retta mentre due rette distinte non individuano uno e un solo punto, infatti possono essere parallele. La presenza di questa eccezione ha stimolato le menti del passato a recuperare la "dualità" tra punti e rette: affinché la descrizione di punti e rette diventi perfettamente simmetrica è necessario aggiungere al piano una linea posizionata all'infinito che lo circoscriva (in pratica abbiamo un disco infinitamente esteso). L'identificazione dei punti antipodali di questa specie di circonferenza infinitamente lontana (il bordo del disco) fa si che anche le rette parallele si incontrino in un unico punto. Il risultato è che nella geometria proiettiva del piano i postulati fondamentali si scambiano tra loro per dualità: basta sostituire la parola "punto" con "retta" e viceversa. Ad esempio, dal postulato "due punti distinti individuano una e una sola retta" si passa per dualità al postulato "due rette distinte individuano uno e un solo punto".

Trasformata di Fourier. Nell'analisi matematica uno degli strumenti più potenti che si possano utilizzare è la trasformata di Fourier. Siano $\vec{x} = (x_1, ..., x_n)$ le n variabili e $\vec{k} = (k_1, ..., k_n)$ le corrispondenti "duali". Data una funzione $f(\vec{x})$ definiamo la sua trasformata di Fourier come

$$\hat{f}(\vec{k}) = \int f(\vec{x}) \exp(2\pi i \vec{x} \cdot \vec{k}) d^n \vec{x}.$$

Fisicamente, se $\vec{x}$ indica la posizione e $\vec{k}$ il momento di una particella, possiamo dire che la trasformata di Fourier fa emergere la dualità tra la posizione e il momento della particella.

Meccanica Quantistica. Una tra le più note dualità, se non la più nota, è il dualismo onda-particella della Meccanica Quantistica. Anche in questo caso la dualità sta nel poter trattare la (stessa) teoria in due modi diversi: le particelle possono essere viste o come corpuscoli o come onde. La particolarità è che queste trattazioni, in principio profondamente differenti, descrivono lo stesso sistema fisico. Specifichiamo però che, secondo il Principio di complementarietà, non è possibile osservare contemporaneamente i due comportamenti tra loro duali durante lo stesso esperimento.

1.2 Dualità in fisica

La dualità è un tema che appare in diversi campi della fisica teorica, ad esempio: la dualità elettromagnetica nell'elettromagnetismo maxwelliano; la generalizzazione della precedente alle teorie quantistiche di campo o di stringa, chiamata S-duality, sotto la quale ricade la dualità di Montonen-Olive (si veda [1]); la dualità di Kramers-Wannier della Meccanica Statistica, che collega un modello di Ising 2-dimensionale a bassa temperatura con uno ad alta temperatura (si veda [2]). In questi esempi emerge un fattore comune, che consiste in un concetto di dualità più raffinato rispetto a quello precedentemente introdotto. In questo lavoro diremo che *la dualità è l'equivalenza fisica tra due diverse descrizioni di una teoria.*

La domanda che sorge spontanea a questo punto è: a cosa serve la dualità? In particolare, qual è il vantaggio di avere a disposizione due descrizioni fisicamente equivalenti di una stessa teoria? Uno dei punti di forza della dualità (in particolare parliamo della S-dualità precedentemente nominata) è che tipicamente inverte il regime di accoppiamento di una teoria. Infatti, nelle teorie duali compare una coppia di parametri, noti con il nome di *costanti di accoppiamento*, che sono uno l'inverso dell'altro. Se la costante di accoppiamento è piccola possiamo applicare il metodo perturbativo, il quale ci consente di ricavare ottime approssimazioni della teoria. Se invece la costante di accoppiamento è grande non c'è modo di utilizzare la teoria delle perturbazioni. Se però una teoria fortemente accoppiata ammettesse una teoria duale debolmente accoppiata sarebbe possibile utilizzare la seconda analizzandola con il metodo perturbativo e poi tornare alla prima.

Oltre a motivi di convenienza pratica, tra i quali il poter sfruttare una teoria "più semplice" per analizzarne una più complicata, la dualità è anche utile perché può permettere l'identificazione di due teorie che in principio appaiono differenti. Nella fisica teorica recente si è ad esempio scoperto che teorie apparentemente diverse (per la precisione esistono cinque Teorie di stringa consistenti in 10 dimensioni) in realtà sono collegate attraverso relazioni di dualità e si identificano nella cosiddetta Teoria-M (si veda ad esempio [3]).

Infine, una formulazione duale è necessaria nelle teorie che includono i monopoli magnetici, ad esempio nelle teorie di grande unificazione: in assenza di un potenziale duale a quello dell'Elettrodinamica non sarebbe possibile quantizzare una tale teoria (si veda [4]).

1.3 Contenuto della tesi

In questo lavoro analizzeremo le proprietà di dualità in teorie con potenziali di gauge di grado p completamente antisimmetrici, sia privi di massa che massivi, in spazitempo minkowskiani D-dimensionali. Ricorreremo principalmente al formalismo delle forme differenziali. Analizzeremo teorie libere da sorgenti e mostreremo punto per punto il procedimento di dualizzazione. Per farlo seguiremo il meccanismo di Stueckelberg, che consiste nell'introduzione di un nuovo campo al fine di recuperare l'invarianza di gauge locale in teorie massive, che in partenza la violano esplicitamente. Stabilire la presenza di questo tipo di invarianza è fondamentale nel conteggio dei gradi di libertà fisici associati ad un campo, i quali devono essere preservati nel passaggio da una teoria alla sua duale. Tale metodo, risalente al 1938 (si veda [5] per una panoramica storica, e non solo, sul meccanismo di Stueckelberg), ammette generalizzazioni nel senso che abbiamo anticipato. In particolare, il meccanismo di Stueckelberg in $D = 4$ fornisce una dimostrazione del fatto che un campo di gauge massivo abeliano ammette una formulazione consistente in teoria quantistica di campo, non necessitando dunque del meccanismo di Higgs. Tuttavia, attualmente il meccanismo di Higgs rimane il solo meccanismo noto di generazione della massa per campi non-abeliani in una teoria rinormalizzabile e unitaria e la scoperta della particella di Higgs rafforza ulteriormente il Modello Standard.

Struttura. Nel capitolo 2 presentiamo brevemente l'Elettrodinamica consueta (con un campo di gauge privo di massa in 4 dimensioni) e nel capitolo 3 forniamo gli strumenti necessari per comprendere il formalismo delle forme differenziali. Il capitolo 4 è dedicato alla generalizzazione dell'Elettrodinamica sia al caso con p e D generici sia al caso massivo. Presentiamo infine la dualità e il metodo di dualizzazione nel capitolo 5, partendo da alcuni esempi e passando poi al caso generale mentre il capitolo 6 è dedicato alle conclusioni.

Capitolo 2

Elettrodinamica in D=4

Prima di cominciare a parlare di dualità elettromagnetica è necessario presentare l'Elettrodinamica consueta come punto di partenza. Il contenuto di questo capitolo segue principalmente il libro ([6]).

2.1 Equazioni fondamentali

Presentiamo le equazioni fondamentali dell'Elettrodinamica in forma esplicitamente covariante:

$$\frac{dp^\mu}{ds} = eF^{\mu\nu}u_\nu, \tag{2.1.1}$$

$$\epsilon^{\mu\nu\rho\sigma}\partial_\nu F_{\rho\sigma} = 0, \tag{2.1.2}$$

$$\partial_\mu F^{\mu\nu} = j^\nu. \tag{2.1.3}$$

Rispettivamente, esse sono note come *equazione di Lorentz*, *identità di Bianchi* ed *equazione di Maxwell*.

Poiché nel seguito, come anticipato, si sviluppa l'agomento della dualità in assenza di sorgenti, vediamo nel dettaglio solo le (2.1.2) e (2.1.3) con $j^\nu = 0$.

2.1.1 Identità di Bianchi

Si noti che nelle (2.1.2) non compare alcun riferimento alle sorgenti del campo; al contrario, nelle (2.1.3), i campi sono legati alle sorgenti. Questo è una differenza significativa: l'*identità di Bianchi* vincola i campi ad assumere una determinata forma a prescindere dalla presenza di sorgenti. Il termine *identità* è utilizzato proprio perché esiste una classe di soluzioni che soddisfano la (2.1.2) *identicamente*. Non è difficile accorgersi che introducendo un campo vettoriale A_μ, detto *potenziale vettore* o anche *campo di gauge*, e ponendo

$$F_{\mu\nu} = \partial_\mu A_\nu - \partial_\nu A_\mu \tag{2.1.4}$$

otteniamo una soluzione per la (2.1.2). Viceversa, per ogni campo tensoriale *antisimmetrico* soluzione della (2.1.2) esiste un campo vettoriale A_μ tale che $F_{\mu\nu}$ assuma l'espressione (2.1.4).

Trasformazioni di gauge

Sebbene la (2.1.4) costituisca la soluzione generale dell'identità di Bianchi, esistono diversi potenziali vettori con i quali costruire il tensore $F_{\mu\nu}$. Infatti, introducendo un nuovo campo Λ, questa volta *scalare*, e definendo la *trasformazione di gauge*

$$A'_\mu = A_\mu + \partial_\mu \Lambda \tag{2.1.5}$$

il tensore di Maxwell $F'_{\mu\nu}$ che ne risulta è identico a quello di partenza. Questo fatto costituisce quella che in gergo viene definita *invarianza di gauge*. Dunque, l'identità di Bianchi (2.1.2) ammette la soluzione generale (2.1.4) in termini del potenziale vettore, il quale però è definito solo modulo trasformazioni di gauge. L'invarianza di gauge gioca un ruolo chiave nel determinare il numero di gradi di libertà associati ad un certo campo.

2.1.2 Equazione di Maxwell

La (2.1.3) lega il campo $F_{\mu\nu}$ alle sorgenti (la cui informazione è contenuta nella quadricorrente j^ν) specificando come una generica distribuzione di carica generi un campo elettromagnetico.

Una volta risolta l'identità di Bianchi, l'equazione di Maxwell diventa un'equazione per il potenziale vettore. Si tratta allora di risolvere le quattro equazioni differenziali del secondo ordine

$$\Box A^\nu - \partial^\nu(\partial_\mu A^\mu) = j^\nu$$

nelle quattro incognite A_μ. Sembrerebbe allora che il potenziale vettore abbia quattro gradi di libertà, tuttavia solo due di questi sono "fisici" e questo lo si dimostra con il *gauge fixing*.

2.2 Descrizione lagrangiana

La Lagrangiana dalla quale discende la (2.1.3) è

$$L = -\frac{1}{4} F^{\mu\nu} F_{\mu\nu} - A_\nu j^\nu . \tag{2.2.1}$$

Nel seguito, come anticipato, ci occuperemo prevalentemente di teorie libere da sorgenti. Nel caso $j^\nu = 0$, esplicitando la contrazione tra i tensori di Maxwell si ottiene $L = \frac{E^2 - B^2}{2}$, in cui E e B indicano rispettivamente il campo elettrico e il campo magnetico. Questa relazione è importante perché costituisce un punto di contatto tra l'Elettrodinamica e le sue generalizzazioni, come vedremo nei capitoli successivi. Infatti, introducendo il tensore energia-impulso

$$T^{\mu\nu} = -F^{\mu\alpha} F^\nu{}_\alpha - \eta^{\mu\nu} L \tag{2.2.2}$$

ed esplicitando la componente 00 si ottiene una densità di energia positiva, che in questo caso vale

$$T^{00} = \frac{E^2 + B^2}{2} . \tag{2.2.3}$$

Capitolo 3

Formalismo delle forme differenziali

In questo capitolo si forniscono le basi del formalismo delle forme differenziali. La prima parte fa riferimento a [6] mentre la parte sull'integrale di forme è stata costruita sulla traccia di [7], con particolare attenzione alla scelta di segni e coefficenti.

3.1 Forme differenziali

Adotteremo uno spaziotempo D-dimensionale dotato della metrica $\eta^{\mu\nu} = diag(1, -1, ..., -1)$, dunque con una dimensione temporale e $D - 1$ dimensioni spaziali.

Una *p-forma differenziale* corrisponde ad un campo tensoriale di rango p *completamente antisimmetrico*. Ciò significa che le sue componenti sono identificate da un tensore $\Phi_{\mu_1 \dots \mu_p}(x)$ tale che

$$\Phi_{\mu_1 \mu_2 \dots \mu_p}(x) = -\Phi_{\mu_2 \mu_1 \dots \mu_p}(x) \qquad etc. \tag{3.1.1}$$

L'intero $p \geq 0$ è detto grado della forma: una 0-forma corrisponde a un campo scalare, una 1-forma a un campo vettoriale, una 2-forma a un campo tensoriale di rango 2 completamente antisimmetrico e così via.

Definiamo allora una p-forma come

$$\Phi_p \equiv \frac{1}{p!} dx^{\mu_p} \wedge \dots \wedge dx^{\mu_1} \Phi_{\mu_1 \dots \mu_p}. \tag{3.1.2}$$

Prodotto esterno

Il prodotto esterno $A_p \wedge B_q$ tra una p-forma e una q-forma è una $(p+q)$-forma definita da

$$A_p \wedge B_q = \frac{1}{p!} \frac{1}{q!} dx^{\mu_p} \wedge \dots \wedge dx^{\mu_1} \wedge dx^{\nu_q} \wedge \dots \wedge dx^{\nu_1} A_{[\mu_1 \dots \mu_p} B_{\nu_1 \dots \nu_q]}. \tag{3.1.3}$$

Una proprietà che useremo spesso è la regola di (anti)commutazione:

$$A_p \wedge B_q = (-1)^{pq} B_q \wedge A_p. \tag{3.1.4}$$

Differenziale esterno

Il differenziale esterno è l'operatore che mappa una p-forma Φ_p nella $(p+1)$-forma $d\Phi_p$ definita da

$$d\Phi_p \equiv \frac{1}{p!} dx^{\mu_p} \wedge \cdots \wedge dx^{\mu_1} \wedge dx^{\mu} \partial_{[\mu} \Phi_{\mu_1 \ldots \mu_p]}. \tag{3.1.5}$$

Poiché formalmente possiamo scrivere $d = dx^\mu \partial_\mu$ è immediato verificare che $d^2 = 0$. Si dimostra poi che il differenziale del prodotto tra forme soddisfa la regola di Leibniz modificata

$$d(A_p \wedge B_q) = A_p \wedge dB_q + (-1)^q dA_p \wedge B_q. \tag{3.1.6}$$

In seguito sfrutteremo molto questa formula perché due Lagrangiane che differiscono per una "derivata totale" (il differenziale esterno) sono equivalenti: questo permette di spostare, a meno del segno, l'operatore differenziale da A_p a B_q e viceversa.

3.1.1 Dualità di Hodge

Ricordando l'identità binomiale

$$\binom{D}{p} = \binom{D}{D-p}$$

si deduce che, poiché la dimensione dello spazio vettoriale delle p-forme è $\binom{D}{p}$, anche lo spazio delle $(D-p)$-forme ha la stessa dimensione. La *dualità di Hodge è un isomorfismo tra questi due spazi*, che associa alla p-forma Φ_p la $(D-p)$-forma seguente:

$$\star\Phi_p \equiv \frac{1}{(D-p)!} dx^{\mu_{D-p}} \wedge \cdots \wedge dx^{\mu_1} \tilde{\Phi}_{\mu_1 \ldots \mu_{D-p}}, \tag{3.1.7}$$

le cui componenti sono date da

$$\tilde{\Phi}_{\mu_1 \ldots \mu_{D-p}} = \frac{1}{p!} \epsilon_{\mu_1 \ldots \mu_{D-p} \nu_1 \ldots \nu_p} \Phi^{\nu_1 \ldots \nu_p}. \tag{3.1.8}$$

La dualità di Hodge può essere iterata e applicata due volte restituisce una forma di grado $D - (D-p) = p$. Ne viene che deve essere $\star^2 \Phi \propto \Phi$, ovvero che il quadrato del duale di Hodge è proporzionale all'identità. Si dimostra poi che, con le convenzioni di segnatura e normalizzazione da noi assunte, si ha:

$$\star^2 = (-1)^{(D+1)(p+1)}. \tag{3.1.9}$$

3.1.2 Forme chiuse, forme esatte e lemma di Poincarè

Una p-forma Φ_p si dice **chiusa** se $d\Phi_p = 0$ mentre è detta **esatta** se *esiste* Ψ_{p-1} *tale che* $\Phi_p = d\Psi_{p-1}$. Poiché $d^2 = 0$ è evidente che **ogni forma esatta è anche chiusa**. Il viceversa non è sempre vero, ma è sicuramente valido nel caso di *aperti contraibili*: questo è il contenuto del *lemma di Poincarè*.

3.1.3 Integrale di forme

Premettiamo che l'obiettivo di questa sezione è quello di "tradurre" una Lagrangiana (scalare, 0-forma) in una forma di grado massimale, ovvero in una forma il cui grado coincide con D. Per farlo definiamo l'integrale di una D-forma su uno spazio di dimensione D

$$\int_{M_D} \Phi_D \equiv \int_{M_D} \mathrm{d}^D x \frac{1}{D!} \epsilon^{\mu_1 \dots \mu_D} \Phi_{\mu_1 \dots \mu_D} = \int_{M_D} \mathrm{d}^D x \Phi_{0,1,\dots D-1} \tag{3.1.10}$$

in cui si utilizza la (3.1.2) nel primo membro e si compie poi l'identificazione

$$dx^{D-1} \wedge \cdots \wedge dx^0 \equiv \mathrm{d}^D x. \tag{3.1.11}$$

L'integrale di una forma di grado massimale su uno spazio di dimensione D coincide dunque con l'integrale "alla Lebesgue" del suo duale (una 0-forma). Ricordando ora che l'azione è definita da

$$S = \int_{M_D} \mathrm{d}^D x L_0 \tag{3.1.12}$$

è immediato accorgersi che S si può ottenere anche integrando una opportuna D-forma L_D nel senso della definizione (3.1.10). In quest'ottica possiamo reinterpretare una Lagrangiana scalare come una forma di grado massimale.

Dunque, se in una D-Lagrangiana compare un prodotto $A_p \wedge \star B_p$ quello che si fa per passare alla Lagrangiana scalare è esplicitare il prodotto

$$A_p \wedge \star B_p = \frac{1}{p!} (-1)^{D+1} A_{\mu_1 \dots \mu_p} B^{\mu_1 \dots \mu_p} \mathrm{d}^D x \tag{3.1.13}$$

e integrarlo nel senso della (3.1.10).

A questo punto possiamo tradurre la Lagrangiana scalare dell'Elettrodinamica in assenza di sorgenti in una 4-forma. Utilizzando la (3.1.13) invertita si ottiene, considerando che $F_2 = \frac{1}{2} dx^\mu dx^\nu F_{[\nu\mu]}$,

$$\begin{aligned} \int_{M_4} \mathrm{d}^4 x L_0 &= \int_{M_4} \mathrm{d}^4 x \left(-\frac{1}{4} F^{\mu\nu} F_{\mu\nu} \right) \\ &= -\frac{1}{4} \int_{M_4} 2! (-1)^{4+1} F_2 \wedge \star F_2 \\ &= \int_{M_4} \frac{1}{2} F_2 \wedge \star F_2. \end{aligned}$$

Pertanto $L_0 = -\frac{1}{4} F^{\mu\nu} F_{\mu\nu}$ corrisponde a $L_4 = \frac{1}{2} F_2 \wedge \star F_2$.

Un'importante proprietà che discende dalla (3.1.10) è che l'integrale di una D-forma **esatta** su uno spazio di dimensione D è nullo. Ciò significa che possiamo eliminare le forme **esatte** da una Lagrangiana proprio come in notazione tensoriale si eliminavano le derivate totali. Inoltre è possibile spostare l'operatore differenziale esterno da una forma all'altra a meno del segno, ovvero $A \wedge dB = \pm dA \wedge B$. Nel seguito faremo spesso utilizzo di queste proprietà.

3.2 Elettrodinamica nel formalismo delle forme differenziali

3.2.1 Equazioni fondamentali

L'identità di Bianchi e l'equazione di Maxwell nell'ambito delle forme differenziali sono rispettivamente

$$\partial_{[\mu}F_{\nu\rho]} = 0 \quad \longleftrightarrow \quad dF_2 = 0 \tag{3.2.1}$$

$$\partial_\mu F^{\mu\nu} = 0 \quad \longleftrightarrow \quad d\star F_2 = 0. \tag{3.2.2}$$

Si noti che l'identità di Bianchi coincide con la condizione di chiusura di F_2 e che pertanto la soluzione generale è $F_2 = dA_1$. Le trasformazioni di gauge, sotto le quali F_2 è invariante, si scrivono

$$A'_\mu = A_\mu + \partial_\mu\Lambda \quad \longleftrightarrow \quad A'_1 = A_1 + d\Lambda_0. \tag{3.2.3}$$

3.2.2 Equazioni del moto

Ci poniamo ora l'obiettivo di ricavare l'equazione di Maxwell attraverso il principio di minima azione applicato alla Lagrangiana[1]

$$L_4 = \frac{1}{2}F_2 \wedge \star F_2.$$

Poichè $F_2 = dA_1$ variando rispetto ad A_1 si ottiene

$$\delta L_4 = (\delta dA_1) \wedge \star dA_1 = d(\delta A_1) \wedge \star dA_1.$$

Il termine a secondo membro può essere riscritto sfruttando la (3.1.6)

$$d[\delta A_1 \wedge \star dA_1] = \delta A_1 \wedge (d\star dA_1) + (d\delta A_1) \wedge \star dA_1.$$

In quest'ultima relazione il primo membro è una forma esatta e dunque otteniamo

$$\delta L_4 = -\delta A_1 \wedge (d\star dA_1) = 0 \quad \forall \delta A_1 \quad \Longleftrightarrow \quad d\star dA_1 = 0,$$

che è proprio l'equazione di Maxwell cercata.

[1] Con "variare" una Lagrangiana sottointendiamo variare l'azione relativa. Tale scelta è puramente stilistica e permette di alleggerire la notazione.

Capitolo 4

Generalizzazioni dell'Elettrodinamica

L'Elettrodinamica si presta a diverse generalizzazioni teoricamente consistenti, tra le quali:

- l'introduzione di cariche magnetiche;
- l'estensione spaziale delle sorgenti;
- la sostituzione della 1-forma di potenziale con una generica p-forma;
- la formulazione della teoria in uno spaziotempo di dimensione arbitraria;
- la possibilità di rendere massivo il campo di gauge.

Noi ci occuperemo delle ultime tre in quanto lavoreremo in assenza di sorgenti.

4.1 Equazioni fondamentali per potenziali di grado p

Siano A_p il potenziale di gauge ed F_{p+1} la relativa curvatura[1]. La relazione che li lega è

$$F_{p+1} = dA_p \quad \longleftrightarrow \quad F_{\mu_1 \dots \mu_{p+1}} = (p+1)\partial_{[\mu_1} A_{\mu_2 \dots \mu_{p+1}]}, \tag{4.1.1}$$

mentre le trasformazioni di gauge sono

$$\delta A_{\mu_1 \dots \mu_p} = p \partial_{[\mu_1} \Lambda_{\mu_2 \dots \mu_p]} \quad \longleftrightarrow \quad \delta A_p = d\Lambda_{p-1}. \tag{4.1.2}$$

L'identità di Bianchi e l'equazione di Maxwell generalizzate per una $(p+1)$-forma di curvatura sono rispettivamente

$$\partial_{[\mu_1} F_{\mu_2 \dots \mu_{p+2}]} = 0 \quad \longleftrightarrow \quad dF_{p+1} = 0, \tag{4.1.3}$$

$$\partial_\mu F^{\mu \mu_1 \dots \mu_p} = 0 \quad \longleftrightarrow \quad d \star F_{p+1} = 0. \tag{4.1.4}$$

[1] Termine utilizzato nel linguaggio delle forme differenziali per indicare una forma legata al potenziale di gauge dalla stessa relazione che lega il potenziale vettore al tensore di Maxwell nell'Elettrodinamica. Le curvature sono sempre gauge-invarianti.

Si noti che il tensore di Maxwell generalizzato possiede $\binom{D}{p+1}$ componenti indipendenti. Compiendo le identificazioni

$$F^{i_1 \dots i_p 0} \equiv E^{i_1 \dots i_p} \tag{4.1.5}$$

$$F^{i_1 \dots i_{p+1}} \equiv B^{i_1 \dots i_{p+1}} \tag{4.1.6}$$

otteniamo che il campo elettrico generalizzato corrisponde ad una p-forma spaziale e possiede $\binom{D-1}{p}$componenti indipendenti mentre il campo magnetico generalizzato corrisponde a una $(p+1)$-forma spaziale e possiede $\binom{D-1}{p+1}$ componenti indipendenti.

4.2 Campi massivi

A livello quantistico le interazioni fondamentali sono mediate da particelle chiamate *bosoni vettori*. Così, l'interazione elettromagnetica è mediata dal *fotone*, quella forte dal *gluone* e quella debole dai tre bosoni $W^{\pm}$ e Z^0. Mentre le prime due sono particelle prive di massa, i vettori dell'interazione debole sono particelle massive. Ciò comporta una serie di differenze tra interazioni mediate da particelle massive e non, ad esempio:

- una particella statica di carica Q genera un potenziale che, a differenza di quello coulombiano, decresce esponenzialmente

  $$A^0 = \frac{Q}{4\pi r} e^{-mr}$$

  con la conseguenza che l'interazione risultante è a *corto range* (m essendo la massa del bosone massivo intermedio);

- un bosone vettore massivo ha **tre gradi di libertà** mentre uno privo di massa ne ha solo due (come il fotone);

- viene esplicitamente violata l'invarianza di gauge *locale*.

In questo capitolo studieremo una teoria in cui il campo di gauge sia massivo al fine di costruire un modello base per un'interazione simile all'elettromagnetismo, ma mediata da un bosone vettore massivo.

4.2.1 Dinamica di campi massivi in D=4

Un campo massivo è un campo A_μ la cui dinamica in assenza di sorgenti è descritta dalla Lagrangiana

$$L = -\frac{1}{4} F^{\mu\nu} F_{\mu\nu} + \frac{m^2}{2} A^\mu A_\mu. \tag{4.2.1}$$

Tale Lagrangiana non è gauge-invariante proprio per la presenza del termine massivo. Le equazioni del moto coincidono con le equazioni di Eulero-Lagrange e sono

$$\partial_\mu F^{\mu\nu} + m^2 A^\nu = 0. \tag{4.2.2}$$

Applicando la divergenza ∂_ν a entrambi i membri si trova che vale identicamente $\partial_\nu A^\nu = 0$. Si noti che tale vincolo coincide con la scelta della *gauge di Lorenz*, sebbene in questo contesto emerga dinamicamente e non sia una scelta della gauge. Esplicitando ora il tensore di Maxwell in termini del potenziale di gauge si ottiene

$$\partial_\mu F^{\mu\nu} = \partial_\mu(\partial^\mu A^\nu - \partial^\nu A^\mu) = \Box A^\nu - \partial^\nu \underbrace{(\partial_\mu A^\mu)}_{=0} = \Box A^\nu.$$

L'equazione (4.2.2) equivale pertanto al sistema

$$\begin{cases} (\Box + m^2)A^\mu = 0, \\ \partial_\nu A^\nu = 0. \end{cases} \tag{4.2.3}$$

Avendo quattro equazioni e un solo vincolo concludiamo che il campo di gauge massivo A_μ possiede **tre gradi di libertà**.

Possiamo pensare di formulare una teoria analoga per un tensore di rango 2 completamente antisimmetrico e massivo $A_{\mu\nu}$. Tale tensore possiede sei componenti indipendenti ed è descritto dalla Lagrangiana

$$L = \frac{1}{12} F^{\mu\nu\rho} F_{\mu\nu\rho} - \frac{m^2}{4} A^{\mu\nu} A_{\mu\nu} \tag{4.2.4}$$

in cui $F^{\mu\nu\rho} = 3\partial^{[\nu} A^{\nu\rho]}$. Si noti che, rispetto alla Lagrangiana dell'Elettrodinamica, il segno del termine cinetico è invertito. La ragione si trova nella condizione, già introdotta nella sezione 2.2, $T^{00} > 0$. Applicando alla (4.2.4) con $m = 0$ il Teorema di Noether (il risultato è il tensore energia-impulso (4.3.4) con $p = 2$) e utilizzando le identificazioni (4.1.5) e (4.1.6) otteniamo

$$T^{00} = \frac{E^2}{4} + \frac{B^2}{12},$$

che è evidentemente positiva, come voluto. In generale si deduce che nel caso di potenziali di gauge di rango pari il segno corretto per il termine cinetico è + mentre è - nel caso dispari (una dimostrazione è fornita nella prossima sezione, in cui mostriamo quale sia il segno corretto da anteporre alla Lagrangiana).

L'equazione del moto che discende dalla (4.2.4) è

$$\partial_\mu F^{\mu\nu\rho} + m^2 A^{\nu\rho} = 0. \tag{4.2.5}$$

Operando allo stesso modo di prima emergono il vincolo

$$\partial_\nu A^{\nu\rho} = 0$$

e l'equazione

$$(\Box + m^2)A^{\nu\rho} = 0.$$

Sembrerebbe allora che i gradi di libertà associati a $A^{\mu\nu}$ siano $6 - 4(\textit{vincoli}) = 2$. Tuttavia non è difficile accorgersi che il vincolo è costituito da quattro equazioni funzionalmente dipendenti. Infatti, se definiamo $W^\rho \equiv \partial_\nu A^{\nu\rho}$ vale identicamente $\partial_\rho W^\rho = 0$. Ne viene che basta fissare tre dei quattro vincoli, con il risultato che un campo di gauge massivo $A_{\mu\nu}$ possiede $6-3=3$ gradi di libertà. Si noti a questo punto che un tensore di rango 1 e uno di rango 2 massivi in uno spaziotempo con $D=4$ hanno lo stesso numero di gradi di libertà, fatto sul quale torneremo nel seguito.

4.3 Lagrangiana per potenziali massivi

Presentiamo ora la Lagrangiana che descrive la dinamica di una generica p-forma di potenziale in uno spaziotempo di dimensione D arbitraria. Si tratta delle Lagrangiane presentate in [7] in cui però si è tenuto conto dei segni, consistentemente alle convenzioni specificate al Capitolo 3.

Siano A_p il potenziale di gauge e $F_{p+1} = dA_p$ la sua curvatura. In forma scalare essa si presenta come

$$L_0 = (-1)^{p+1}\left\{-\frac{1}{2}\frac{1}{(p+1)!}F_{\mu_1\ldots\mu_{p+1}}F^{\mu_1\ldots\mu_{p+1}} + \frac{m^2}{2}\frac{1}{p!}A_{\mu_1\ldots\mu_p}A^{\mu_1\ldots\mu_p}\right\} \tag{4.3.1}$$

mentre la traduzione in forma di grado massimale D è

$$L_D = (-1)^{p+D}\left\{-\frac{1}{2}F_{p+1}\wedge\star F_{p+1} + \frac{m^2}{2}A_p\wedge\star A_p\right\}. \tag{4.3.2}$$

Naturalmente tale generalizzazione deve:

- ridursi alla (4.2.1) nel caso $p=1$ e $D=4$ e alla (4.2.4) con $p=2$ e $D=4$;
- avere denistà di energia positiva, nel senso che $T^{00} > 0$;
- riprodurre l'equazione del moto cercata.

La prima condizione è chiaramente soddisfatta inserendo i p e D corretti. Vediamo separatamente le altre due.

Densità di energia

Per ricavare il segno "overall" della (4.3.1) si scrive il tensore energia-impulso (con $m=0$)

$$T^{\mu\nu} = \frac{(-)^p}{p!}F^{\mu\alpha_1\ldots\alpha_p}F^\nu{}_{\alpha_1\ldots\alpha_p} - \eta^{\mu\nu}L, \tag{4.3.3}$$

che risulta simmetrico e gauge-invariante. Si ottiene dunque

$$T^{\mu\nu} = \frac{(-)^p}{p!}\left[F^{\mu\alpha_1\ldots\alpha_p}F^{\nu}{}_{\alpha_1\ldots\alpha_p} - \frac{1}{2(p+1)}\eta^{\mu\nu}F^{\beta_1\ldots\beta_{p+1}}F_{\beta_1\ldots\beta_{p+1}}\right]. \tag{4.3.4}$$

Esplicitando ora la componente 00 e utilizzando le identificazioni (4.1.5) e (4.1.6) otteniamo

$$T^{00} = \frac{1}{2p!}\left[E^2 + \frac{1}{p+1}B^2\right], \tag{4.3.5}$$

che è evidentemente una quantità sempre positiva. Ne viene che il segno "overall" della (4.3.1) è quello corretto.

Equazione del moto

Ricaviamo ora l'equazione del moto discendente dalla Lagrangiana generalizzata. Variando la (4.3.2) rispetto alla forma A_p otteniamo

$$\begin{aligned}\delta L_D &= (-1)^{D+p}\left\{-(\delta dA_p)\wedge \star dA_p + m^2\delta A_p\wedge\star A_p\right\}\\ &= (-1)^{D+p}\left\{(-1)^{D-p+1}\delta A_p\wedge(d\star dA_p) + m^2\delta A_p\wedge\star A_p\right\}\\ &= \delta A_p\wedge\left\{-d\star dA_p + (-1)^{D+p}m^2\star A_p\right\}.\end{aligned}$$

Ma allora

$$\delta L_D = 0 \quad \forall\delta A_p \qquad \Longleftrightarrow \qquad d\star dA_p + (-1)^{D+p+1}m^2\star A_p = 0.$$

A questo punto basta applicare $\star$ ad entrambi i membri e, sfruttando la (3.1.9), si ottiene

$$\star d\star F_{p+1} + (-1)^{pD}m^2A_p = 0 \tag{4.3.6}$$

che equivale a

$$\partial_\mu F^{\mu\alpha_1\ldots\alpha_p} + m^2A^{\alpha_1\ldots\alpha_p} = 0. \tag{4.3.7}$$

Applicando ora alla (4.3.7) la derivata ∂_{α_1} emerge il vincolo $\partial_{\alpha_1}A^{\alpha_1\nu_1\ldots\nu_{p-1}} = 0$ e pertanto l'equazione del moto equivale al sistema

$$\begin{cases}(\Box + m^2)A^{\alpha_1\nu_1\ldots\nu_{p-1}} = 0\\ \partial_{\alpha_1}A^{\alpha_1\nu_1\ldots\nu_{p-1}} = 0\end{cases} \tag{4.3.8}$$

in cui la prima equazione identifica l'equazione del moto con l'equazione di Klein-Gordon.

4.4 Gradi di libertà

Una questione centrale nel trattare l'argomento principale di questo lavoro è il conteggio dei *gradi di libertà*. Sia nel caso di potenziali massivi che in quello di potenziali privi di massa il conteggio sfrutta le equazioni del moto della teoria: nel caso "massless" i gradi di libertà non-fisici si eliminano sulla base dell'invarianza di gauge mentre nel caso massivo emergono dinamicamente dei vincoli che diminuiscono il numero di gradi di libertà fisici.

Queste procedure possono essere generalizzate a p e D generici e si dimostra [7] che il numero di gdl **fisici** associati a una p-forma di potenziale è:

- $$\binom{D-2}{p} \quad \text{nel caso “MASSLESS”;} \tag{4.4.1}$$
- $$\binom{D-1}{p} \quad \text{nel caso MASSIVO.} \tag{4.4.2}$$

Diamo ora una dimostrazione della (4.4.2). Un generico potenziale $A^{\mu_1\cdots\mu_p}$ completamente antisimmetrico possiede $\binom{D}{p}$ componenti indipendenti. Il vincolo $\partial_\mu A^{\mu\alpha_1\ldots\alpha_{p-1}} = 0$ che abbiamo trovato nel caso massivo può essere riscritto sfruttando la Trasformata di Fourier come $k_\mu \tilde{A}^{\mu\alpha_1\ldots\alpha_{p-1}} = 0$, in cui k_μ è tale da soddisfare $k^2 = m^2$, con m massa del potenziale. In particolare si ha

$$k_\mu = (\sqrt{|\vec{k}|^2 + m^2}, \vec{k})$$

ed esiste un sistema di riferimento inerziale in cui $k_\mu = (m, 0)$. In tale sistema di riferimento otteniamo

$$k_\mu \tilde{A}^{\mu\alpha_1\ldots\alpha_{p-1}} = m\tilde{A}^{0 i_1\ldots i_{p-1}} = 0$$

e dunque le uniche componenti fisiche sono $\tilde{A}^{i_1\cdots i_p}$. Poichè le i rappresentano indici spaziali, concludiamo che i gradi di libertà associati ad una p-forma di potenziale massiva sono $\binom{D-1}{p}$.

Capitolo 5

Dualità elettromagnetica

In questo capitolo presentiamo la *dualità elettromagnetica*, mettendo in evidenza le differenze tra i casi di potenziale "**massless**" e **massivo**. Mostreremo che forme di potenziale "duali", che genericamente hanno grado diverso, descrivono la stessa fisica, ovvero danno origine a teorie fisicamente equivalenti (con tutti i vantaggi che ne conseguono). Precisiamo ora che di seguito ometteremo il simbolo "$\wedge$" nel prodotto tra forme poiché è l'unico prodotto tra forme che abbiamo definito. Il lavoro svolto segue principalmente la [8] e la [7], con opportuni accorgimenti su segni e coefficienti. Il procedimento di dualizzazione con la casistica per $D = 4$ in notazione tensoriale si può trovare anche in [9], mentre il caso $p = D - 1$ è descritto nella [10], in cui però si utilizza un formalismo differente da quello utilizzato finora. Pertanto, in questo caso particolare si è cercata una descrizione alternativa e che fosse in linea con il resto del lavoro.

5.1 Dualità per p-forme prive di massa

5.1.1 Equazioni del moto duali

Nei capitoli precedenti abbiamo visto che, nel vuoto, le equazioni di Maxwell e l'identità di Bianchi generalizzate si scrivono rispettivamente:

$$d \star F_{p+1} = 0 \quad \longleftrightarrow \quad \partial_\mu F^{\mu\mu_1 \dots \mu_p} = 0, \tag{5.1.1}$$

$$dF_{p+1} = 0 \quad \longleftrightarrow \quad \partial_{[\mu_1} F_{\mu_2 \dots \mu_{p+2}]} = 0. \tag{5.1.2}$$

Si può notare che la sostituzione di F_{p+1} con il suo duale $\star F_{p+1}$ costituisce una simmetria nelle (5.1.1) e (5.1.2). Accade di più: quella che prima era l'equazione di Maxwell per F_{p+1} diventa l'identità di Bianchi per il duale $\star F_{p+1}$ e viceversa. Per convincersene basta utilizzare la definizione di dualità (di Hodge). Infatti, poiché $\star F_{p+1}$ è una $(D - p - 1)$-forma, ponendo $\tilde{F}_{D-p-1} \equiv \star F_{p+1}$ si ottiene

$$d\tilde{F}_{D-p-1} = 0 \quad \longleftrightarrow \quad \partial_{[\mu_1} \tilde{F}_{\mu_2 \dots \mu_{D-p}]} = 0, \tag{5.1.3}$$

$$d \star \tilde{F}_{D-p-1} = 0 \quad \longleftrightarrow \quad \partial_\mu \tilde{F}^{\mu\mu_1 \dots \mu_{D-p-2}} = 0. \tag{5.1.4}$$

La *dualità elettromagnetica "massless"* consiste proprio in questa simmetria nelle due descrizioni. Si noti poi che la dualità di Hodge e quella elettromagnetica coincidono nel linguaggio delle forme differenziali.

Una tra le più note dualità di questo tipo è la *scalar-tensor duality*, che consiste nella dualità elettromagnetica tra una 2-forma di gauge e un campo scalare (l' "assione") in uno spaziotempo con $D = 4$, entrambi descriventi un solo grado di libertà.

Scalar-tensor duality. Il punto di partenza è il campo di gauge $A_{\mu\nu}$, la cui curvatura è $F_{\mu\nu\rho} = 3\partial_{[\mu} A_{\nu\rho]}$. Il duale di $F_{\mu\nu\rho}$ risulta

$$\tilde{F}_\sigma = \frac{1}{3!} \epsilon_{\mu\nu\rho\sigma} F^{\mu\nu\rho}, \tag{5.1.5}$$

ma è anche possibile esprimere il tensore $F_{\mu\nu\rho}$ in termini del suo duale come

$$F_{\mu\nu\rho} = \epsilon_{\mu\nu\rho\sigma} \tilde{F}^\sigma. \tag{5.1.6}$$

A questo punto è immediato verificare che risolvere l'equazione di Maxwell per $F_{\mu\nu\rho}$, ovvero

$$\partial_\mu F^{\mu\nu\rho} = 0, \tag{5.1.7}$$

corrisponde a risolvere l'identità di Bianchi per $\tilde{F}^\sigma$, ovvero

$$\partial^{[\nu} \tilde{F}^{\rho]} = 0. \tag{5.1.8}$$

Basta infatti inserire la (5.1.6) nella (5.1.7) per ottenere la (5.1.8), la cui soluzione è

$$\tilde{F}^\sigma = \partial^\sigma \tilde{A} \tag{5.1.9}$$

con $\tilde{A}$ scalare. In maniera analoga, utilizzando l'identità di Bianchi per $F_{\mu\nu\rho}$, ovvero

$$\partial_{[\mu} F_{\nu\rho\sigma]} = 0, \tag{5.1.10}$$

e la (5.1.6) si ottiene l'equazione di Maxwell per $\tilde{F}^\sigma$, ovvero

$$\partial_\sigma \tilde{F}^\sigma = 0. \tag{5.1.11}$$

Infine, inserendo la (5.1.9) nella (5.1.11), si ottiene l'equazione del moto in termini del potenziale di gauge duale $\Box \tilde{A} = 0$, che rappresenta dunque un campo scalare privo di massa.

Tale esempio è illuminante e riprodotto per p e D generici[1] permette di dedurre che il *duale elettromagnetico* di una p-forma di gauge "massless" è una $(D-p-2)$-forma, come faremo vedere nella prossima sezione. Segue poi dalla (4.4.1) che forme duali di questo tipo possiedono **lo stesso numero di gradi di libertà fisici**.

[1] In realtà, questo è valido per $p \leq D-2$ e vedremo poco più avanti perché.

5.1.2 Lagrangiane duali

Come abbiamo visto possiamo introdurre la dualità elettromagnetica a livello di equazioni del moto. In questo lavoro ci occupiamo del problema di dualizzare una generica teoria e la descrizione Lagrangiana è quella che meglio mette in evidenza le corrispondenze tra teorie duali, come mostriamo nel seguente esempio.

Teoria duale all'Elettrodinamica. Sia A_1 il potenziale di gauge "massless" la cui dinamica è descritta dalla Lagrangiana

$$L(A) = \frac{1}{2} dA_1 \star dA_1. \tag{5.1.12}$$

Questa è invariante sotto le trasformazioni di gauge $\delta A_1 = \mathrm{d}\Lambda_0$ e possiede $\binom{D-2}{p} = 2$ gradi di libertà.

Introduciamo ora una nuova Lagrangiana

$$\tilde{L}(F, \Phi) = \frac{1}{2} F_2 \star F_2 + \Phi_1 dF_2, \tag{5.1.13}$$

ottenuta dalla precedente sostituendo la curvatura dA_1 con un campo "non-vincolato"[2] F_2 e introducendo un *campo moltiplicatore di Lagrange* Φ_1, rappresentato da una forma il cui grado sia consistente con il fatto che la Lagrangiana è sempre una forma di grado massimale, in questo caso 4. Variando rispetto a Φ_1 si ottiene

$$\delta \tilde{L}(F, \Phi) = \delta \Phi_1 dF_2 = 0 \quad \forall \delta \Phi_1 \quad \Longleftrightarrow \quad dF_2 = 0,$$

la cui soluzione è $F_2 = dA_1$. Basta allora sostituire tale soluzione in $\tilde{L}(F, \Phi)$ per ottenere l'equivalenza con $L(A)$.

Per ottenere la Lagrangiana duale riscriviamo $\tilde{L}(F, \Phi)$ completando il quadrato, ovvero:

$$\begin{aligned}
\tilde{L}(F, \Phi) &= \frac{1}{2} F_2 \star F_2 - d\Phi_1 F_2 \\
&= \frac{1}{2} \left[F_2 \star F_2 - 2 d\Phi_1 F_2 - d\Phi_1 \star d\Phi_1 \right] + \frac{1}{2} d\Phi_1 \star d\Phi_1 \\
&= \frac{1}{2} \left[F_2 + \star d\Phi_1 \right] \star \left[F_2 + \star d\Phi_1 \right] + \frac{1}{2} d\Phi_1 \star d\Phi_1.
\end{aligned}$$

Effettuando la ridefinizione del campo

$$F_2 \quad \longrightarrow \quad F_2 - \star d\Phi_1$$

si ottiene

$$\tilde{L}(F, \Phi) = \frac{1}{2} F_2 \star F_2 + \frac{1}{2} d\Phi_1 \star d\Phi_1$$

e variando rispetto ad F_2 emerge l'equazione del moto $F_2 = 0$. Dunque, la Lagrangiana duale cercata è

$$L(\Phi) = \frac{1}{2} d\Phi_1 \star d\Phi_1, \tag{5.1.14}$$

[2]Con questo intendiamo che $F_2 \neq dA_1$, ovvero il nuovo campo non è la curvatura di A_1.

che risulta fisicamente equivalente a $\tilde{L}(F, \Phi)$ e dunque anche a $L(A)$. Concludiamo che il duale elettromagnetico della 1-forma dell'Elettrodinamica è a sua volta una 1-forma, proprio come ci si aspettava dalla relazione dedotta nella sezione precedente. Banalmente, i gradi di libertà associati a questa nuova 1-forma sono gli stessi, a riprova del fatto che la dualità elettromagnetica preserva il numero di gradi di libertà.

La generalizzazione a p e D qualsiasi è del tutto analoga e mostra che effettivamente il duale di una p-forma di potenziale priva di massa è una $(D-p-2)$-forma. Si parte dalla Lagrangiana

$$L(A) = (-1)^{p+D} \left\{ -\frac{1}{2} dA_p \star dA_p \right\} \tag{5.1.15}$$

e si vuole arrivare alla Lagrangiana duale

$$L(B) = (-1)^{(D-p-2)+D} \left\{ -\frac{1}{2} dB_{D-p-2} \star dB_{D-p-2} \right\}. \tag{5.1.16}$$

Per farlo si introduce la Lagrangiana

$$\tilde{L}(F, \Phi) = (-1)^{D+p+1} \left\{ \frac{1}{2} F_{p+1} \star F_{p+1} + (-1)^{p+1} \Phi_{D-p-2} dF_{p+1} \right\} \tag{5.1.17}$$

e con un procedimento analogo a quello del caso particolare appena visto (cioè completamento del quadrato, ridefinizione del campo ed equazione del moto per eliminarlo dalla Lagrangiana) otteniamo esattamente la (5.1.16) in cui $\Phi \equiv B$.

Si noti però una pecca nel procedimento di dualizzazione proposto: partendo da una $(D-1)$-forma si arriverebbe ad avere dF_D nella (5.1.17) che, essendo una $(D+1)$-forma, è identicamente nulla. Sembrerebbe pertanto che una $(D-1)$-forma non ammetta una descrizione duale. Il problema può essere aggirato modificando la procedura appena descritta, ma vedremo come fare nel caso più generale della dualità di p-forme massive.

5.1.3 Strong-Weak Coupling Duality

Concludiamo la sezione sulla dualità di p-forme prive di massa evidenziando una proprietà fondamentale: lo scambio del regime di accoppiamento. In questa sede lo dimostreremo per un caso quasi triviale ma si ricordi che tale fenomeno assume maggiore importanza in teorie più complesse.

Cominciamo riscrivendo la Lagrangiana (5.1.12) esplicitando la "costante di accoppiamento"[3]

$$L(A) = (-1)^{p+D} \left\{ -\frac{1}{2} \frac{1}{e^2} dA_p \star dA_p \right\}. \tag{5.1.18}$$

[3]Il caso che affrontiamo è triviale nel senso che questa costante di accoppiamento (la carica elettrica) appare semplicemente dalla ridefinizione del campo.

Si introduce dunque la Lagrangiana fisicamente equivalente

$$\tilde{L}(F,\Phi) = (-1)^{D+p+1}\left\{\frac{1}{2}\frac{1}{e^2}F_{p+1}\star F_{p+1} + (-1)^{p+1}\Phi_{D-p-2}dF_{p+1}\right\} \tag{5.1.19}$$

e si ottiene (con il procedimento descritto prima) la Lagrangiana duale

$$L(B) = (-1)^{(D-p-2)+D}\left\{-\frac{1}{2}e^2 dB_{D-p-2}\star dB_{D-p-2}\right\}. \tag{5.1.20}$$

Si noti che la costante di accoppiamento della teoria di partenza, che possiamo chiamare carica elettrica e, è esattamente l'inverso della costante di accoppiamento della teoria duale, che possiamo chiamare carica magnetica g. Poiché $e = \frac{1}{g}$, se una delle due costanti di accoppiamento è piccola l'altra è grande. In virtù della relazione di dualità tra le due teorie è possibile trattare perturbativamente una teoria anche se questa non lo ammette direttamente: basta passare alla teoria duale. Infatti, se $e >> 1$ si ha $g << 1$. Proprio questo fatto rende la *Strong-Weak Coupling Duality* un argomento di grande interesse.

5.2 Dualità per p-forme massive

L'approccio che utilizzeremo per dualizzare una teoria massiva è ancora quello lagrangiano. Partendo da un esempio illuminante ("fotone massivo") illustreremo il metodo di dualizzazione di Stueckelberg. Generalizzeremo poi la procedura a p e D generici, modificandola nel caso "patologico" della $(D-1)$-forma. Dato che la dualità elettromagnetica deve preservare il numero di gradi di libertà, ci aspettiamo, dalla (4.4.2), che il duale di una p-forma A_p massiva sia una $(D-p-1)$-forma B_{D-p-1} massiva.

5.2.1 Teoria duale al "fotone massivo"

Sia A_1 un potenziale di gauge massivo in $D = 4$ la cui dinamica è descritta dalla Lagrangiana

$$L^m(A) = \frac{1}{2}dA_1\star dA_1 - \frac{m^2}{2}A_1\star A_1. \tag{5.2.1}$$

Come già detto, tale Lagrangiana non è esplicitamente gauge-invariante e possiede tre gradi di libertà. Di seguito vogliamo dimostrare che tale Lagrangiana è "duale" alla (5.2.7), descrivente una 2-forma massiva.

Il primo passo della dualizzazione consiste nel trovare una Lagrangiana fisicamente equivalente ad $L^m(A)$ che sia anche gauge-invariante. La soluzione di questo problema è la *Lagrangiana di Stueckelberg*

$$L(A,\phi) = \frac{1}{2}dA_1\star dA_1 - \frac{1}{2}(mA_1 + d\phi_0)\star(mA_1 + d\phi_0) \tag{5.2.2}$$

ottenuta dalla precedente sostituendo il campo di gauge A con $A + \frac{d\phi}{m}$ in cui ϕ è noto come *campo di Stueckelberg*. Si noti che $L(A,\phi)$ è invariante sotto le trasformazioni di gauge congiunte

$\delta A_1 = d\Lambda_0$ e $\delta\phi_0 = -m\Lambda_0$. Inoltre ad essa competono tre gradi di libertà: due provengono dalla 1-forma (per l'invarianza di gauge) e uno dal campo di Stueckelberg. Pertanto $L(A,\phi)$ e $L^m(A)$ possiedono lo stesso numero di gradi di libertà. Per dimostrare l'equivalenza basta porre $\Lambda = \frac{\phi}{m}$: con tale scelta della gauge $L(A,\phi)$ si riduce a $L^m(A)$.

La seconda fase consiste nell'introdurre la Lagrangiana ancora gauge-invariante, fisicamente equivalente a $L^m(A)$ e $L(A,\phi)$,

$$L(A,B) = \frac{1}{2}dA_1 \star dA_1 - \frac{1}{2}dB_2 \star dB_2 + mA_1 dB_2, \tag{5.2.3}$$

in cui il potenziale di gauge B_2 che compare corrisponde al duale elettromagnetico "massless" del campo di Stueckelberg ϕ_0. Tale Lagrangiana è invariante sotto le trasformazioni di gauge $\delta A_1 = d\Lambda_0$ e $\delta B_2 = d\Sigma_1$: infatti, i primi due termini sono curvature mentre la variazione dell'ultimo coincide con una forma esatta. Si noti che la (5.2.3) è simmetrica nei potenziali A e B e vedremo che è una Lagrangiana "intermedia" nella procedura di dualizzazione, nel senso che partendo da essa è possibile ricavare sia la (5.2.1) sia la (5.2.7).

Per mostrare che $L(A,B)$ è equivalente a $L(A,\phi)$ introduciamo una nuova Lagrangiana

$$L(A,H,\phi) = \frac{1}{2}dA_1 \star dA_1 - \frac{1}{2}H_3 \star H_3 + mA_1 H_3 + \phi_0 dH_3, \tag{5.2.4}$$

ottenuta dalla precedente sostituendo la curvatura di B_2 con il campo non-vincolato H_3 e introducendo un campo moltiplicatore di Lagrange ϕ_0 in maniera analoga a quella del caso non massivo. Mostriamo che $L(A,H,\phi)$ è equivalente sia a $L(A,B)$ sia a $L(A,\phi)$.

Variando $L(A,H,\phi)$ rispetto a ϕ_0 otteniamo l'equazione del moto $dH_3 = 0$, la cui soluzione è $H_3 = dB_2$. Inserendo tale soluzione nella Lagrangiana si ottiene l'equivalenza tra $L(A,H,\phi)$ e $L(A,B)$. A questo punto riscriviamo $L(A,H,\phi)$ in modo da completare il quadrato, ovvero:

$$\begin{aligned}
L(A,H,\phi) &= \frac{1}{2}dA_1 \star dA_1 - \frac{1}{2}H_3 \star H_3 + mA_1 H_3 + d\phi_0 H_3 \\
&= \frac{1}{2}dA_1 \star dA_1 - \frac{1}{2}H_3 \star H_3 + (mA_1 + d\phi_0)H_3 \\
&= \frac{1}{2}dA_1 \star dA_1 - \frac{1}{2}\left[H_3 \star H_3 - 2(mA_1 + d\phi_0)H_3\right] \\
&= \frac{1}{2}dA_1 \star dA_1 - \frac{1}{2}\left[H_3 + \star(mA_1 + d\phi_0)\right] \star \left[H_3 + \star(mA_1 + d\phi_0)\right] \\
&- \frac{1}{2}(mA_1 + d\phi_0) \star (mA_1 + d\phi_0).
\end{aligned}$$

Effettuando la ridefinizione del campo

$$H_3 \quad \longrightarrow \quad H_3 - \star(mA_1 + d\phi_0)$$

ed eliminandolo poi con la nuova equazione del moto (cioè $H_3 = 0$) otteniamo l'equivalenza tra $L(A,H,\phi)$ e $L(A,\phi)$. Concludiamo dunque che $L(A,B)$ e $L(A,\phi)$ sono fisicamente equivalenti.

L'ultimo step della dualizzazione prevede l'introduzione di un'ulteriore Lagrangiana, speculare alla (5.2.4),

$$L(B, F, \psi) = \frac{1}{2} F_2 \star F_2 - \frac{1}{2} dB_2 \star dB_2 - mF_2 B_2 + \psi_1 dF_2, \tag{5.2.5}$$

ottenuta sostituendo dA_1 invece di dB_2 e inserendo un opportuno campo moltiplicatore di Lagrange. Ripercorrendo i passaggi della seconda fase (ovvero la ricostruzione del quadrato di F_2, la ridefinizione dello stesso e la sua eliminazione) si ottiene

$$L(B, \psi) = -\frac{1}{2} dB_2 \star dB_2 + \frac{1}{2}(mB_2 + d\psi_1) \star (mB_2 + d\psi_1). \tag{5.2.6}$$

Si noti che tale Lagrangiana ha la stessa struttura di $L(A, \phi)$ in (5.2.2).

Infine, attraverso la trasformazione di gauge $\delta B_2 = -\frac{d\psi_1}{m}$ si ottiene

$$L^m(B) = -\frac{1}{2} dB_2 \star dB_2 + \frac{m^2}{2} B_2 \star B_2. \tag{5.2.7}$$

Si conclude pertanto che la (5.2.1) e la (5.2.7) sono fisicamente equivalenti e dunque che il duale elettromagnetico di una 1-forma massiva è una 2-forma massiva.

Ricordiamo che in sezione 4.2.1 era emerso che la 1-forma massiva e la 2-forma massiva in $D = 4$ avevano gli stessi gradi di libertà, ovvero tre. Come vedremo di seguito, la generalizzazione a p e D qualsiasi mostra che il duale di una p-forma massiva è una $(D-p-1)$-forma massiva e la procedura non comporta alcuna modifica nella struttura delle Lagrangiane: basta introdurre i campi di Stueckelberg ϕ e ψ come forme il cui grado è dettato dalla consistenza. L'unico problema, come anticipato, è il caso della $(D-1)$-forma di potenziale. Infatti, per $D = 4$ ci aspettiamo che il duale di una 3-forma di potenziale sia una 0-forma: eppure $dF_4 = 0$ e il metodo precedente cade in difetto perché l'ultimo step non è percorribile.

5.2.2 Metodo di dualizzazione generalizzato

L'obiettivo di questa sezione è quello di dimostrare l'equivalenza tra la Lagrangiana

$$L^m(A) = (-1)^{p+D} \left\{ -\frac{1}{2} dA_p \star dA_p + \frac{m^2}{2} A_p \star A_p \right\} \tag{5.2.8}$$

e la sua duale

$$L^m(B) = (-1)^{(D-p-1)+D} \left\{ -\frac{1}{2} dB_{D-p-1} \star dB_{D-p-1} + \frac{m^2}{2} B_{D-p-1} \star B_{D-p-1} \right\}. \tag{5.2.9}$$

Per farlo possiamo partire da una Lagrangiana "intermedia" avente la stessa struttura della (5.2.3), ovvero

$$L(A, B) = (-1)^{p+D} \left\{ -\frac{1}{2} dA_p \star dA_p + (-1)^D \frac{1}{2} dB_{D-p-1} \star dB_{D-p-1} - mA_p dB_{D-p-1} \right\}. \tag{5.2.10}$$

Si noti che i segni sono stati scelti in modo da riprodurre quelli che compaiono nelle (5.2.8) e (5.2.9) per i termini di curvatura. Specifichiamo che da ora in avanti non scriveremo più i pedici che indicano il grado delle forme al fine di alleggerire la notazione: se introdurremo una nuova forma indicheremo solo all'inizio il suo grado.

Analogamente a quanto fatto nella sezione precedente, introduciamo la Lagrangiana

$$L(A,H,\phi) = (-1)^{p+D}\left\{-\frac{1}{2}dA\star dA + (-1)^D\frac{1}{2}H\star H - mAH - (-1)^{D-p-1}\phi dH\right\}, \tag{5.2.11}$$

in cui si è formalmente sostituito dB_{D-p-1} con il campo non-vincolato H_{D-p} e si è introdotto un campo moltiplicatore di Lagrange ϕ_{p-1}. Il segno dell'ultimo termine è stato scelto così da poter scrivere

$$L(A,H,\phi) = (-1)^{p+D}\left\{-\frac{1}{2}dA\star dA + (-1)^D\frac{1}{2}H\star H - (mA+d\phi)H\right\}.$$

A questo punto dobbiamo completare il quadrato di H, notando che questa volta

$$[H+\star(mA+d\phi)]\star[H+\star(mA+d\phi)] = H\star H + (-1)^{D+1}2(mA+d\phi)H + (-1)^{D+1}(mA+d\phi)\star(mA+d\phi).$$

Pertanto la (5.2.11) diventa

$$\begin{aligned} L(A,H,\phi) = (-1)^{p+D}\Big\{&-\frac{1}{2}dA\star dA + (-1)^D\frac{1}{2}[H+\star(mA+d\phi)]\star[H+\star(mA+d\phi)] \\ &- (-1)^{D+1}(-1)^D\frac{1}{2}(mA+d\phi)\star(mA+d\phi)\Big\}, \end{aligned} \tag{5.2.12}$$

ed effettuando la ridefinizione del campo

$$H \quad\longrightarrow\quad H - \star(mA+d\phi)$$

possiamo eliminare H con la sua equazione del moto. Ciò che si ottiene è evidentemente la generalizzazione della Lagrangiana di Stueckelberg

$$L(A,\phi) = (-1)^{p+D}\left\{-\frac{1}{2}dA\star dA + \frac{1}{2}(mA+d\phi)\star(mA+d\phi)\right\}, \tag{5.2.13}$$

che è fisicamente equivalente alla (5.2.8).

Sostituendo invece dA_p con il campo non-vincolato F_{p+1} nella (5.2.10) e introducendo il nuovo campo moltiplicatore di Lagrange ψ_{D-p-2} si ottiene una Lagrangiana $L(B,F,\psi)$ analoga alla (5.2.5). Ripetendo il conto appena illustrato (completamento del quadrato di F, ridefinizione del campo e sua eliminazione attraverso le equazioni del moto) si arriva alla Lagrangiana di Stueckelberg per il potenziale duale, ovvero

$$L(B,\psi) = (-1)^{p+D}\left\{(-1)^D\frac{1}{2}dB\star dB + (-1)^{D+1}\frac{1}{2}(mB+d\psi)\star(mB+d\psi)\right\}, \tag{5.2.14}$$

che risulta fisicamente equivalente alla (5.2.9).

5.2.3 Dualità ed equazioni del moto

Dalle procedure di dualizzazione appena descritte sembra che la Lagrangiana

$$L(A,B) = (-1)^{p+D}\left\{-\frac{1}{2}dA\star dA + (-1)^{D}\frac{1}{2}dB\star dB - mAdB\right\} \tag{5.2.15}$$

assuma un ruolo chiave. In particolare si noti che:

- è simmetrica nei potenziali di gauge A e B tra loro duali;
- è invariante sotto le trasformazioni di gauge $\delta A = d\Lambda$ e $\delta B = d\Sigma$;
- rende esplicita la relazione che lega A e B e riproduce le loro equazioni del moto massive.

In questa sezione cercheremo di chiarire quest ultimo punto. Per farlo variamo la (5.2.15) rispetto ai campi che vi compaiono, ottenendo

$$\begin{cases} \delta_A & \rightarrow \quad d\left[\star dA - (-1)^{D-p-1}mB\right] = 0 \\ \delta_B & \rightarrow \quad d\left[\star dB - (-1)^{D-p+pD}mA\right] = 0 \end{cases}$$

Tali equazioni ci dicono che le forme tra parentesi sono chiuse, dunque esatte. Pertanto riscriviamo il sistema come:

$$\begin{cases} \star dA_p - (-1)^{D-p-1}mB_{D-p-1} = d\psi_{D-p-2} \\ \star dB_{D-p-1} - (-1)^{D-p+pD}mA_p = d\phi_{p-1} \end{cases} \tag{5.2.16}$$

in cui abbiamo reintrodotto i gradi delle forme per rendere più chiaro il prossimo passaggio, ovvero il gauge-fixing. Infatti, poichè la (5.2.15) è invariante sotto le trasformazioni di gauge $\delta A_p = d\Lambda_{p-1}$ e $\delta B_{D-p-1} = d\Sigma_{D-p-2}$ possiamo scegliere

$$\begin{cases} \Lambda_{p-1} = -(-1)^{D-p+pD}\frac{1}{m}\phi_{p-1} \\ \Sigma_{D-p-2} = -(-1)^{D-p-1}\frac{1}{m}\psi_{D-p-2} \end{cases}$$

così che le (5.2.16) diventino

$$\begin{cases} \star dA_p - (-1)^{D-p-1}mB_{D-p-1} = 0 \\ \star dB_{D-p-1} - (-1)^{D-p+pD}mA_p = 0 \end{cases} \tag{5.2.17}$$

A questo punto possiamo procedere in due modi per mettere in relazione le forme duali massive A_p e B_{D-p-1}. Ricavando B_{D-p-1} dalla prima delle (5.2.17) si ottiene l'equazione del moto per A_p, ovvero

$$B_{D-p-1} = (-1)^{D-p-1}\frac{1}{m}\star dA_p \quad \longrightarrow \quad \star d\star dA_p + (-1)^{pD}m^2A_p = 0 \tag{5.2.18}$$

mentre ricavando A_p dalla seconda delle (5.2.17) si ottiene l'equazione del moto per B_{D-p-1}, ovvero

$$A_p = (-1)^{D-p+pD} \frac{1}{m} \star dB_{D-p-1} \quad \longrightarrow \quad \star d \star dB_{D-p-1} + (-1)^{(D-p-1)D} m^2 B_{D-p-1} = 0. \quad (5.2.19)$$

Si noti che le equazioni del moto appena ricavate corrispondono alla (4.3.6), che abbiamo visto essere equivalente all'equazione di Klein-Gordon. Pertanto dalla (5.2.15) si ottengono, a seconda della forma che decidiamo di eliminare, sia l'equazione del moto della (5.2.8) sia quella della duale (5.2.9).

5.2.4 Dualizzare una $(D-1)$-forma

Alla luce della patologia emersa nelle sezioni precedenti vogliamo cercare di dualizzare la Lagrangiana

$$L^m(A) = \frac{1}{2} dA_{D-1} \star dA_{D-1} - \frac{m^2}{2} A_{D-1} \star A_{D-1}. \quad (5.2.20)$$

Ripartiamo allora dalla (5.2.15), che in questo caso diventa

$$L(A, B) = \frac{1}{2} dA_{D-1} \star dA_{D-1} + (-1)^{D-1} \frac{1}{2} dB_0 \star dB_0 + m A_{D-1} dB_0. \quad (5.2.21)$$

Come primo passo si introduce la Lagrangiana

$$L(A, F, B, G) = \frac{1}{2} F_D \star F_D + (-1)^{D-1} \frac{1}{2} dB_0 \star dB_0 - m F_D B_0 - G_0(F_D - dA_{D-1}), \quad (5.2.22)$$

ottenuta dalla (5.2.20) sostituendo la curvatura dA_{D-1} con il campo non-vincolato F_D e introducendo un campo (scalare) moltiplicatore di Lagrange G_0. Si noti che variando la (5.2.22) rispetto a G_0 otteniamo l'equazione del moto $F_D = dA_{D-1}$, con la quale possiamo concludere che la (5.2.22) e la (5.2.20) sono fisicamente equivalenti. Inoltre, la (5.2.22) è invariante sotto le trasformazioni di gauge $\delta B_0 = \lambda$ e $\delta G_0 = -m\lambda$, in cui λ è una costante. Ricombinando il quadrato ed eliminando F_D con il solito procedimento si arriva alla Lagrangiana equivalente

$$L(A, B, G) = (-1)^{D-1} \frac{1}{2} dB_0 \star dB_0 - (-1)^{D-1} \frac{1}{2} (mB_0 + G_0) \star (mB_0 + G_0) + G_0 dA_{D-1}. \quad (5.2.23)$$

Variando ora rispetto ad A_{D-1} si ottiene

$$dG_0 = 0 \quad \Longrightarrow \quad G_0 = c = \text{costante}$$

e la (5.2.23) si riduce a

$$L(B, c) = (-1)^D \left\{ -\frac{1}{2} dB_0 \star dB_0 + \frac{1}{2} (mB_0 + c) \star (mB_0 + c) \right\}. \quad (5.2.24)$$

A questo punto sfruttiamo l'invarianza di gauge ponendo $\delta B_0 = \lambda = -\frac{c}{m}$ per ottenere

$$L^m(B) = -\frac{1}{2} dB_0 \star dB_0 + \frac{m^2}{2} B_0 \star B_0, \quad (5.2.25)$$

che è la Lagrangiana duale alla (5.2.20). Concludiamo dunque che una $(D-1)$-forma massiva ammette come duale una 0-forma massiva.

La questione è diversa se invece si prova a dualizzare un potenziale "massless" di grado $p = D - 1$. Infatti, dalla (5.2.20) con $m = 0$ si arriva, con passaggi analoghi a quelli appena descritti, alla Lagrangiana

$$L(A, G) = \frac{1}{2} G_0 \star G_0 + G_0 dA_{D-1}. \tag{5.2.26}$$

Variando rispetto ad A_{D-1} si ottiene che $G_0 = c$ è un campo costante e non un campo scalare come nel caso massivo. Concludiamo che una $(D-1)$-forma di potenziale priva di massa ammette come duale una costante: in particolare, questo genere di forme non propaga gradi di libertà.

5.2.5 Interpretazione dei gradi di libertà

Una rilettura dell'intero procedimento di dualizzazione può essere fatto partendo proprio dalla Lagrangiana $L(A, B)$. Possiamo infatti introdurre una coppia di potenziali di gauge "**massless**" A_p e B_{D-p-1} descritti dalla Lagrangiana

$$L(A, B) = (-1)^{p+D} \left\{ -\frac{1}{2} dA_p \star dA_p + (-1)^D \frac{1}{2} dB_{D-p-1} \star dB_{D-p-1} \right\} \tag{5.2.27}$$

e aggiungere a questa un termine "massivo" $mA_p dB_{D-p-1}$. A questo punto tale Lagrangiana ammette due teorie tra loro duali, come abbiamo mostrato, ma espresse in termini di forme **massive**. Nel caso $p = 1$ in $D = 4$, ad A_1 "massless" corrispondono 2 gradi di libertà mentre a B_2 " massless", duale al campo scalare, corrisponde 1 grado di libertà. In totale quindi $L(A, B)$ possiede 3 gradi di libertà, ma questi possono essere interpretati in due diversi modi:

- come i 3 corrispondenti alle forme **massive** duali A_1 e B_2;
- come i 2+1 corrispondenti alle forme "**massless**".

Nel caso generale tale corrispondenza riflette la nota identità binomiale

$$\binom{D-2}{p} + \binom{D-2}{D-p-1} = \binom{D-1}{p} \tag{5.2.28}$$

attraverso la quale possiamo reinterpretare i gradi di libertà massivi in funzione di quelli "massless".

Capitolo 6

Conclusioni

L'idea di Stueckelberg fu quella di introdurre un campo scalare nella Lagrangiana di un campo vettoriale massivo al fine di recuperare l'invarianza di gauge locale della teoria. Abbiamo visto che il metodo si può generalizzare a p-forme di potenziale in spazitempo minkowskiani D-dimensionali, con p e D generici. Nel farlo, ci siamo accorti che il duale di una p-forma priva di massa è una $(D-p-2)$-forma ancora priva di massa mentre il duale di una p-forma massiva è una $(D-p-1)$-forma, a sua volta massiva. Inoltre, abbiamo visto che il numero di gradi di libertà fisici si preserva nel passare da una descrizione a quella duale. Nell'ultima parte abbiamo notato che una teoria in cui compare una coppia di potenziali di gauge formalmente "massless" A_p e B_{D-p-1}, accoppiati tramite un termine di massa, è equivalente alla teoria massiva descritta da uno dei due potenziali. L'analisi di questo tipo di teorie porta poi alla reinterpretazione dei gradi di libertà di un potenziale massivo come somma di gradi di libertà di potenziali privi di massa.

Bibliografia

[1] C. Montonen and D. Olive, *Magnetic Monopoles As Gauge Particles*, Phys. Lett. B72 (1977) 117-120.

[2] H.A. Kramers and G.H. Wannier, *Statistics of the two-dimensional ferromagnet. Part I and II*, Phys. Rev. 60 (1944) 252, 263.

[3] J. Polchinski, *String Duality: A Colloquium*, Rev. Mod. Phys. 68 (1996), 1245-1258.

[4] R.A. Brandt, F. Neri and D. Zwanziger, *Lorentz Invariance From Classical Particle Paths in Quantum Field Theory of Electric Magnetic Charge*, Phys. Rev. D19 (1979) 1153.

[5] H. Ruegg and M. Ruiz-Altaba, *The Stueckelberg Field*, Int. J. Mod. Phys. A19 (2004) 3265-3348.

[6] K. Lechner, *Elettrodinamica classica*, Springer Science & Business Media (2014).

[7] S. Ferrara and A. Sagnotti, *Massive Born-Infeld and other dual pairs*, JHEP 1504 (2015) 032.

[8] S.E. Hjelmeland and U. Lindström, *Duality for the Non-Specialist*, hep-th/9705122 (1997).

[9] A. Smailagic and E. Spallucci, *Duality of massive gauge invariant theories in arbitrary space-time dimension*, Phys. Rev. D61 (2000) 067701.

[10] S. Ansoldi, A. Aurilia, A. Smailagic and E. Spallucci, *Dualization of Interacting Theories Including $p = d - 1$ Limiting Cases*, Phys. Lett. B471 (1999) 133-139.