UNIVERSITÀ DEGLI STUDI DI PADOVA

Facoltá di Ingegneria
Corso di Laurea Magistrale in Ingegneria dell'Automazione

Analisi di Sistemi Behavior e Applicazione ai Sistemi in Spazio di Stato

Laureando: De Franceschi Igor
Docente Relatore: Bisiacco Mauro

Padova, 5 Dicembre 2011

Contents

Chapter 1

Introduzione

L'approccio iniziale all'analisi e al controllo dei sistemi dinamici adottato in ambito ingegneristico é stato quello cosiddetto a *"black box"*. In quest'approccio si assume che il sistema venga sollecitato da alcune variabili, denominate ingressi, libere di assumere qualsiasi evoluzione, e risponda con delle variabili d'uscita, il cui comportamento é interamente specificato dall'evoluzione degli ingressi (fatto salvo l'effetto delle condizioni iniziali). In seguito é stato proposto l'utilizzo dei sistemi in spazio di stato: essi prevedono l'utilizzo di alcune variabili aggiuntive, le variabili di stato appunto, la cui evoluzione esprime l'intera dinamica del sistema, che ad ogni istante temporale t dipendono dall'evoluzione degli ingressi in $(-\infty, t)$ (in generale) e permettono la valutazione delle uscite in $[t, +\infty)$ (in generale) una volta che sia nota l'evoluzione degli ingressi in tale intervallo di tempo. In entrambi i casi, quindi, non si ha alcun riferimento al fenomeno fisico che governa il comportamento del sistema.

L'interazione del sistema con l'ambiente esterno si realizza quindi attraverso due distinte classi di variabili: gli ingressi e le uscite. Sui primi si ha completa libertá di controllo mentre le seconde vengono viste come le cause dirette dell'evoluzione degli ingressi. In molte situazioni concrete, tuttavia, la distinzione tra ingressi ed uscite non é affatto scontata se non addirittura artificiosa (a seconda delle convenienze o del problema che si vuole risolvere) o impossibile. I metodi di modellizzazione piú utilizzati[1], inoltre, portano a descrivere il comportamento del sistema mediante un insieme di equazioni dinamiche (differenziali nel caso continuo, alle differenze nel caso discreto) che non presentano alcuna distinzione delle variabili, ma esprimono unicamente il modo in cui esse interagiscono tra loro e con l'ambiente esterno. Risulta in questo caso conveniente studiare l'evoluzione del sistema e la sua interazione con l'ambiente esterno concentrandosi sull'insieme delle variabili che le descrivono e sui vincoli che ne determinano le possibili evoluzioni.

Schematicamente tale approccio é illustrato in figura 1.1, dove si nota la

[1] Si pensi ad esempio alle equazioni di *Lagrange* o alla meccanica *Hamiltoniana*.

presenza di q variabili descrittive w_1, w_2, $\cdots w_q$ che esprimono l'interazione tra il sistema Σ e l'ambiente esterno. L'insieme di queste variabili, che verrá indicato come $w = [w_1, w_2, \cdots w_q]^T$, prende il nome di *traiettoria* (o vettore traiettoria) e chiaramente non puó evolvere liberamente, ma sará soggetta a vincoli in funzione del sistema in esame.

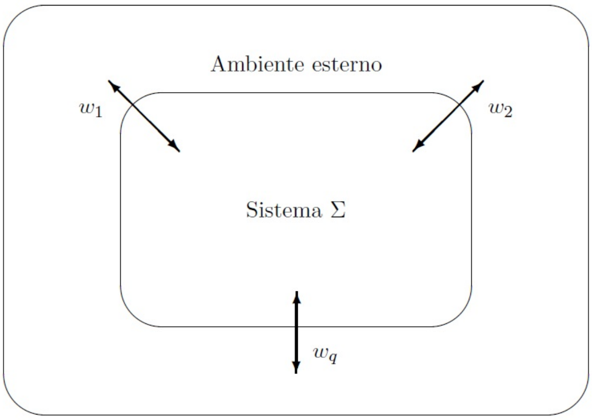

Figure 1.1: Interazione del sistema con l'ambiente esterno

In quest'ottica la dinamica del sistema Σ risulta completamente specificata una volta che sia noto l'insieme $\mathcal{B}$ delle traiettorie ammissibili per w o, equivalentemente, una volta noto il criterio (o i criteri) per determinare se una specifica traiettoria $\bar{w}$ sia o meno un elemento di $\mathcal{B}$.

I modelli in spazio di stato (cosí come quelli ingresso-uscita) sono riconducibili ai modelli behavior una volta che si sia assunto

$$w = \begin{bmatrix} x \\ u \\ y \end{bmatrix} \qquad \textit{oppure} \qquad w = \begin{bmatrix} u \\ y \end{bmatrix}$$

come vettore traiettoria. In questo senso questo approccio alla modellizazione dei sistemi dinamici costituisce una generalizzazione dei due precedenti.

Obiettivo di questa tesi é l'analisi di alcuni aspetti fondamentali della teoria dei behavior e la loro applicazione ai modelli in spazio di stato. In particolare nel secondo capitolo verranno presentati gli strumenti algebrici necessari allo studio dei behavior: le matrici polinomiali; verranno presentate, senza dimostrazioni per le quali si rimanda a [1], le principali definizioni e proprietá di questa struttura algebrica. In seguito questi risultati verranno applicati allo studio dei behavior, di cui si presentano i primi risultati fondamentali riguardanti le loro proprietá di base; anche in questo caso per le dimostrazioni si rimanda a [1].

Il terzo capitolo tratta le trasformazioni tra modelli in spazio di stato e modelli behavior; si vedrá come si possa passare, in maniera immediata, da un sistema in spazio di stato (ma anche da un sistema in forma ingresso-uscita) ad un sistema behavior. La trasformazione inversa, sebbene sempre possibile, non é tuttavia cosí immediata e necessita di alcuni passaggi algebrici non banali che verrano largamente esplorati.

Il quarto capitolo riguarda l'aspetto fondamentale della *stabilitá* in campo behaviorale. Verrá in particolare data una definizione di stabilitá in tal senso e verranno presentati alcuni teoremi a riguardo. In seguito si passerá all'argomento strettamente collegato della *stabilizzabilitá*, ovvero all'introduzione di vincoli su un behavior per fare in modo che questo diventi stabile, quando possibile.

Nel quinto capitolo si riassumeranno e integreranno i risultati fondamentali della teoria degli stimatori in ambito behaviorale, con particolare attenzione alla sintesi di stimatori asintotici e dead-beat.

Infine nell'ultimo capitolo i risultati ottenuti in ambito behaviorale sulla stabilitá e sulla sintesi degli stimatori verranno particolarizzati ai modelli in spazio di stato. Si vedrá come, applicando i risultati dei capitoli 4 e 5, si troveranno delle classi di controllori stabilizzanti e di stimatori che includono strettamente quelle piú comuni dei controllori mediante retroazione dallo stato e degli stimatori di *Luenberger*. In tale senso quindi si ha che l'analisi in ambito behaviorale porta alla sintesi di classi piú vaste di controllori e stimatori rispetto all'analisi classica della teoria dei sistemi. Si vedrá infine come la classe dei controllori ottenuta in ambito behaviorale potrá essere messa in corrispondenza biunivoca con quella ottenuta da *Youla-Kucera* [5].

Chapter 2

Concetti preliminari

In questo primo capitolo si introdurranno i concetti matematici di base necessari allo studio dei sistemi behavior e la nomenclatura in uso.

2.1 Matrici polinomiali

L'elemento matematico principe di questo settore della teoria dei sistemi é rappresentato dalle matrici polinomiali, le cui proprietá verranno ampiamente descritte in questa sezione. Per matrice polinomiale si intende una matrice i cui elementi sono polinomi, generalmente a coefficienti su un campo $\mathbb{F}$, in una indeterminata σ[1]; come di consuetudine si indicherá con $\mathbb{F}^{p\times q}[\sigma]$ l'insieme delle matrici $p \times q$ ad elementi in $\mathbb{F}[\sigma]$.

Una matrice polinomiale quadrata si dice *unimodulare* se ammette un'inversa polinomiale; condizione equivalente alla unimodularitá per una matrice $H(\sigma)$ é che $det(H(\sigma))$ sia una costante non nulla.

Ogni matrice polinomiale $H(\sigma) \in \mathbb{F}^{p\times q}[\sigma]$ di rango r ammette una forma particolare, detta forma di *Smith* $\Gamma_H(\sigma) \in \mathbb{F}^{p\times q}[\sigma]$, ottenibile dalla matrice di partenza tramite pre e post moltiplicazione per due opportune matrici unimodulari $U(\sigma)^{-1} \in \mathbb{F}^{p\times p}[\sigma]$ e $V(\sigma)^{-1} \in \mathbb{F}^{q\times q}[\sigma]$ (in generale non univocamente determinate)[2]:

$$\Gamma_H(\sigma) = U(\sigma)^{-1} H(\sigma) V(\sigma)^{-1} = \left[\begin{array}{ccc|c} \gamma_1(\sigma) & & & \\ & \ddots & & 0 \\ & & \gamma_r(\sigma) & \\ \hline & 0 & & 0 \end{array}\right]$$

dove i polinomi $\gamma_i(\sigma)$ sono monici e $\gamma_i(\sigma)$ divide γ_{i+1} $\forall i$. Inoltre $\Gamma_H(\sigma)$ é unica, pertanto risulta una forma canonica.

[1] Nulla a priori escluderebbe di considerare polinomi in piú indeterminate portando cosí all'analisi di sistemi in piú dimensioni, ma questo esula dagli scopi di questa trattazione.

[2] L'utilizzo di matrici in forma inversa, anch'esse chiaramente unimodulari, é giustificato da questioni di notazione che emergeranno nei prossimi capitoli.

Un'altra forma importante é la forma di *Hermite* per colonne: data $H(\sigma) \in \mathbb{F}^{p\times q}[\sigma]$ a rango di colonne pieno q, esiste almeno una matrice unimodulare $U(\sigma) \in \mathbb{F}^{p\times p}[\sigma]$ tale che:

$$\bar{H}(\sigma) = U(\sigma)H(\sigma) = \left[\begin{array}{cccc} h_{11}(\sigma) & * & * & * \\ 0 & h_{22}(\sigma) & * & * \\ 0 & & \ddots & * \\ 0 & \cdots & 0 & h_{qq}(\sigma) \\ \hline 0 & \cdots & & 0 \end{array}\right]$$

dove i polinomi sulla diagonale sono monici e tali che $deg\ h_{jj} > deg\ h_{ij}$ $\forall i, j : i < j$; se la matrice non ha rango q la forma di *Hermite* é leggermente diversa: detto r il rango di $H(\sigma)$ la matrice $\bar{H}(\sigma) = U(\sigma)H(\sigma)$ avrá solo le prime r righe non nulle soddisfacenti la condizione sui gradi e le rimanenti $p - r$ nulle, oppure potrá essere ricondotta a questa forma attraverso permutazioni di alcune colonne. Analogamente esiste la forma di *Hermite* per righe, ottenibile tramite post moltiplicazione per una matrice unimodulare $V(\sigma) \in \mathbb{F}^{q\times q}[\sigma]$, che presenta le medesime proprietá della forma per colonne una volta che si sia trasposta la matrice.

Una matrice polinomiale $H(\sigma)$ si dice *monomia a destra* se $H(\alpha)$ ha rango di colonne pieno $\forall\alpha \in \bar{\mathbb{F}} \setminus \{0\}$[3]; questo significa che $H(\sigma)$ ha rango di colonne pieno (questa volta inteso come indipendenza lineare delle colonne di $H(\sigma)$ dove i combinatori vanno scelti in $\mathbb{F}[\sigma]$) e il massimo comune divisore dei suoi minori di ordine massimo é un monomio. Condizioni equivalenti alla monomicitá a destra sono l'esistenza di un'inversa sinistra polinomiale in cui si ammetta la presenza anche di termini in $z^{-q}, q > 0$ oppure la risolubilitá dell'equazione $X(\sigma)H(\sigma) = \sigma^N I$ nell'incognita $X(\sigma)$ per un qualche intero N.

Una matrice polinomiale $H(\sigma)$ si dice *prima a destra* se, quando fattorizza nella forma $H(\sigma) = \tilde{H}(\sigma)\Delta(\sigma)$ con $\Delta(\sigma)$ polinomiale quadrata, necessariamente si ha che $\Delta(\sigma)$ é unimodulare. Esistono varie condizioni equivalenti alla primalitá a destra, come:

1. $H(\alpha)$ ha rango di colonne pieno $\forall\alpha \in \bar{\mathbb{F}}$;
2. esiste una matrice polinomiale $L(\sigma) \in \mathbb{F}[\sigma]^{q\times p}$ tale che $L(\sigma)H(\sigma) = I$;
3. $H(\sigma)$ ha rango di colonne pieno e il massimo comune divisore dei suoi minori di ordine massimo é l'unitá.

Esistono analogamente matrici monomie e prime a sinistra.

Un annullatore sinistro di una matrice polinomiale $H(\sigma) \in \mathbb{F}^{p\times q}[\sigma]$ di rango r é una matrice $A(\sigma) \in \mathbb{F}^{\bullet\times p}[\sigma]$ tale che $A(\sigma)H(\sigma) = 0$. Un annullatore sinistro $A_m(\sigma)$ si dice minimo (*minimal left annihilator*, MLA) se

[3] $\bar{\mathbb{F}}$ rappresenta la chiusura algebrica di $\mathbb{F}$.

per ogni altro annullatore sinistro $A(\sigma)$ si ha $A(\sigma) = P(\sigma)A_m(\sigma)$ con $P(\sigma)$ polinomiale. Se la matrice $H(\sigma)$ non é a rango di righe pieno, un MLA esiste sempre (altrimenti gli annullatori sono matrici nulle con un numero arbitrario di righe e quindi un MLA non esiste) ed é una matrice a $(p-r)\times q$ componenti prima a destra, determinata univocamente a meno di un fattore unimodulare. Analogamente esistono gli annullatori destri che godono di proprietá analoghe.

Un ultimo concetto importante nello studio dei behavior é quello riguardante il grado di una matrice. Il grado di un vettore puó essere definito come il massimo dei gradi delle sue componenti (con il formalismo per cui $deg(0) = -\infty$); con questa definizione si puó definire il *grado di riga* (o *grado esterno, extdeg*) di una matrice come la somma dei gradi delle righe che la compongono; un'altra nozione di grado é il *grado interno (intdeg)*, definito come il grado massimo dei suoi minori di ordine p[4]. In genere si ha la disuguaglianza $intdeg(H(\sigma)) \leq extdeg(H(\sigma))$; se i due gradi coincidono la matrice si dice *ridotta per righe* (rpr). Qualora una matrice non sia rpr esiste almeno una matrice unimodulare tale che $U(\sigma)H(\sigma)$ é rpr.

Se si denota con k_i il grado della riga i-esima della matrice $H(\sigma)$ e con $\mathbf{c}_i^T$ il vettore dei coefficenti dei monomi di grado k_i nella riga i-esima, si puó costruire, per impilamento dei vettori $\mathbf{c}_i^T$ la *matrice conduttrice*

$$H_{hc} = \begin{bmatrix} \mathbf{c}_1^T \\ \mathbf{c}_2^T \\ \vdots \\ \mathbf{c}_p^T \end{bmatrix}.$$

$H(\sigma)$ puó allora essere espressa come

$$H(\sigma) = \begin{bmatrix} \sigma^{k_1} & & & \\ & \sigma^{k_2} & & \\ & & \ddots & \\ & & & \sigma^{k_p} \end{bmatrix} H_{hc} + M_{rem}(\sigma).$$

dove la riga i-esima di $M_{rem}(\sigma)$ ha grado strettamente minore di k_i $\forall i$. Si ha che $H(\sigma)$ é rpr se e solo se H_{hc} ha rango p.

2.2 Sistemi behavior

Nel contesto della teoria dei behavior con la parola sistema si intende una terna

$$\Sigma = (T, W, \mathcal{B})$$

[4]Perché questa definizione abbia senso si deve supporre che la matrice abbia rango di righe pieno.

dove T é l'*insieme dei tempi* in cui sono definite le traiettorie, W é l'*alfabeto dei segnali* in cui assumono valori le variabili utilizzate per la descrizione del sistema e $\mathcal{B}$ é il *behavior*, ovvero il sottoinsieme di W^T delle traiettorie compatibili con le leggi che governano il sistema. In seguito si assumeranno $T = \mathbb{Z}_+$ (l'insieme dei tempi discreti non negativi) e $W = \mathbb{R}^q$, dove q rappresenta il numero delle componenti della traiettoria w.

In questa trattazione si fará riferimento a behavior $\mathcal{B}$ definiti dall'insieme delle soluzioni $\mathbf{w} = \{\mathbf{w}(t)\}_{t \in \mathbb{Z}_+}$ di un sistema alle differenze del tipo

$$H_0 w(t) + H_1 w(t+1) + \cdots H_L w(t+L) = 0, \quad t \in \mathbb{Z}_+ \tag{2.1}$$

con $H_i \in \mathbb{R}^{p \times q}$. Definendo l'operatore di traslazione (a sinistra) come segue

$$\sigma : (\mathbb{R}^q)^{\mathbb{Z}_+} \to (\mathbb{R}^q)^{\mathbb{Z}_+} : (w_0, w_1, w_2, \cdots) \to (w_1, w_2, w_3, \cdots),$$

si ha che si puó associare ad ogni matrice polinomiale H l'operatore $H(\sigma) = \sum_{i=0}^{L} H_i \sigma^i$, che permette di esprimere la (2.1) come

$$H(\sigma) w(t) = 0, \tag{2.2}$$

da cui $\mathcal{B} = ker(H)$.

Una descrizione di tale tipo si dice *descrizione a nucleo*. Come si puó vedere in [1] le rappresentazioni a nucleo godono di diverse proprietá. Siano $H_1(\sigma) \in \mathbb{R}^{p \times q}[\sigma]$ e $H_2(\sigma) \in \mathbb{R}^{p \times q}[\sigma]$ due matrici polinomiali. Si ha che $ker(H_1) \subseteq ker(H_2)$ se e solo se esiste una matrice polinomiale $P(\sigma)$ tale che $H_2(\sigma) = P(\sigma) H_1(\sigma)$; se $P(\sigma)$ é matrice unimodulare vale anche il viceversa e si ha l'uguaglianza $ker(H_1) = ker(H_2)$. Se $U(\sigma)$ é un'arbitraria matrice unimodulare si ha che $ker(H) = ker(UH)$. Infine si ha che $\forall\, H(\sigma) \in \mathbb{R}^{p \times q}[\sigma]$ di rango r, $\exists\, \bar{H}(\sigma) \in \mathbb{R}^{r \times q}[\sigma]$ di rango r tale che $ker(H) = ker(\bar{H})$; non c'é quindi perdita di generalitá nel supporre che la matrice descrittiva di una rappresentazione a nucleo sia a rango di righe pieno.

Alcuni behavior $\mathcal{B}$ ammettono anche un altro tipo di rappresentazione, la *rappresentazione ad immagine*:

$$\mathcal{B} = \left\{ \mathbf{w} : w(t) = G_0 u(t) + G_1 u(t+1) + \cdots G_L u(t+L), \quad \mathbf{u} \in (\mathbb{R}^q)^{\mathbb{Z}_+} \right\},$$

da cui $\mathcal{B} = Im(G)$. Se si denota con $H(\sigma)$ un MLA di $G(\sigma)$[5] si ha l'uguaglianza $Im(G) = ker(H)$.

Un behavior descritto come nucleo di una matrice $H(\sigma) \in \mathbb{R}^{p \times q}[\sigma]$ si dice *autonomo* se é un sottospazio a dimensione finita di $(\mathbb{R}^q)^{\mathbb{Z}_+}$, e questo accade se e solo se la matrice $H(\sigma)$ ha rango di colonne pieno. Un behavior autonomo le cui traiettorie siano interamente contenute in un opportuno intervallo finito $[0, N-1]$ é detto *nilpotente* e si puó dimostrare essere il nucleo di una matrice monomia a destra; in particolare se $H(\sigma)$ é quadrata

[5] $H(\sigma)$ sará quindi una matrice prima a sinistra.

e invertibile, $ker(H)$ é nilpotente se e solo se $det(H(\sigma)) = c \cdot \sigma^N$, $c \neq 0$. Se un behavior autonomo non é nilpotente contiene almeno una traiettoria a supporto infinito. Queste particolaritá si hanno solo nel caso di behavior definiti in $\mathbb{Z}_+$, dal momento che che l'unica traiettoria a supporto finito di un behavior autonomo definito in tutto $\mathbb{Z}$ é la traiettoria nulla.

Un concetto in antitesi a quello di behavior autonomo é quello di behavior *controllabile*. I behavior controllabili sono tutti e soli i behavior descrivibili tramite immagine di un'opportuna matrice polinomiale. Se un behavior non é né autonomo né controllabile, esso é esprimibile comme somma di due behavior:

$$\mathcal{B} = \mathcal{B}_a + \mathcal{B}_c$$

dove $\mathcal{B}_c$ é un behavior controllabile univocamente determinato e $\mathcal{B}_a$ é un behavior autonomo. Inoltre $\mathcal{B}_a$ puó essere scelto in modo che la somma sia una somma diretta:

$$\mathcal{B} = \mathcal{B}_a \oplus \mathcal{B}_c.$$

Chapter 3

Sistemi behavior e modelli di stato

Si presentano in questa sezione alcuni risultati ed osservazioni che mostrano come i sistemi behavior possono convenientemente rappresentare i sistemi descritti tramite modelli in spazio di stato. Si vedrá inoltre come sia sempre possibile anche il passaggio inverso, di trasformazione da un modello behaviorale ad un modello ingresso-uscita oppure in forma di matrice di trasferimento.

3.1 Trasformazioni in modelli behavior

Si consideri un sistema MIMO descritto da una matrice di trasferimento $W(\sigma)$. É noto come una qualsiasi matrice di funzioni razionali ammetta una (in realtá infinite) rappresentazione come frazione matriciale sinistra della forma: $W(\sigma) = D^{-1}(\sigma)N(\sigma)$, pertanto il modello di partenza puó essere riscritto come:

$$\begin{aligned} y(t) &= W(\sigma)u(t) \\ y(t) &= D^{-1}(\sigma)N(\sigma)u(t) \\ D(\sigma)y(t) &= N(\sigma)u(t) \\ D(\sigma)y(t) - N(\sigma)u(t) &= 0 \\ [D(\sigma)| - N(\sigma)] \begin{bmatrix} y(t) \\ u(t) \end{bmatrix} &= 0. \end{aligned} \tag{3.1}$$

Definendo quindi come traiettoria del sistema il vettore $[y(t)^T \; u(t)^T]^T$, si ha che il sistema puó essere descritto come nucleo della matrice polinomiale $H(\sigma) = [D(\sigma)| - N(\sigma)]$.

Per un sistema in spazio di stato, invece, si consideri come traiettoria il vettore $[x(t)^T \; u(t)^T \; y(t)^T]^T$ e si considerino i seguenti passaggi:

$$\begin{cases} x(t+1) &= Fx(t) + Gu(t) \\ y(t) &= Hx(t) + Ju(t) \end{cases}$$

$$\begin{cases} \sigma x(t) &= Fx(t) + Gu(t) \\ y(t) &= Hx(t) + Ju(t) \end{cases}$$

$$\begin{cases} (\sigma I - F)x(t) & -Gu(t) & +0y(t) & = & 0 \\ -Hx(t) & -Ju(t) & +y(t) & = & 0 \end{cases}$$

da cui la rappresentazione in senso behavior:

$$\begin{bmatrix} \sigma I - F & -G & 0 \\ -H & -J & I \end{bmatrix} \begin{bmatrix} x(t) \\ u(t) \\ y(t) \end{bmatrix} = 0. \tag{3.2}$$

Si noti che tale rappresentazione puó essere generalizzata al caso di sistemi affetti da disturbi:

$$\begin{cases} x(t+1) &= Fx(t) + Gu(t) + Bd(t) \\ y(t) &= Hx(t) + Ju(t) + Dd(t). \end{cases}$$

Con un procedimento del tutto analogo si arriva a:

$$\begin{bmatrix} \sigma I - F & -G & 0 & -B \\ -H & -J & I & -D \end{bmatrix} \begin{bmatrix} x(t) \\ u(t) \\ y(t) \\ d(t) \end{bmatrix} = 0, \tag{3.3}$$

dove la traiettoria é stata opportunamente aumentata includendovi il termine $d(t)$. Si vedrá poi, qualora sia necessario, come si possa ricavare da (3.2) o (3.3) un behavior che descrive unicamente l'evoluzione delle variabili di ingresso ed uscita, arrivando ad una sorta di proiezione dell'intero vettore traiettoria w sulle variabili $[y(t)^T \; u(t)^T]^T$

Si ha quindi la situazione rappresentata in figura (3.1)

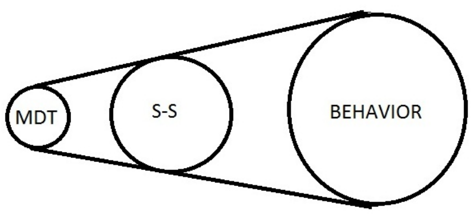

Figure 3.1: Relazione di inclusione tra le rappresentazioni

3.2 Trasformazioni in modelli a matrice di trasferimento e spazio di stato

Si consideri un behavior descritto come $ker(H)$, $H(\sigma) \in \mathbb{R}^{r \times q}[\sigma]$, che senza perdita di generalitá puó essere supposta a rango di righe pieno r. Dal momento che rango di righe e rango di colonne di una matrice coincidono é possibile individuare almeno un insieme di r colonne linearmente indipendenti che, in seguito ad opportune permutazioni (che si traducono in corrispondenti permutazioni degli elementi del vettore traiettoria $w(t)$), é possibile supporre siano le prime r. Ció significa che é possibile partizionare la matrice $H(\sigma)$ nella forma:

$$H(\sigma) = [D(\sigma)| - N(\sigma)]$$

con $D(\sigma)$ invertibile.

A questo punto, partizionando coerentemente il vettore traiettoria $w(t)$ come $[y(t)^T|u(t)^T]^T$, si ha che il sistema behavior puó essere riscritto come un sistema in forma ingresso-uscita caratterizzato dalla matrice di trasferimento:

$$W(\sigma) = D(\sigma)^{-1}N(\sigma). \tag{3.4}$$

É quindi sempre possibile vedere un sistema behavior come un modello ingresso-uscita, una volta che la partizione del vettore traiettoria sia stata scelta correttamente (i.e. che la sottomatrice quadrata $D(\sigma)$ sia invertibile). Da questo modello non é tuttavia sempre possibile passare ad un modello in spazio di stato, dal momento che non é verificato il requisito essenziale della causalitá; un modello ingresso-uscita puó infatti descrivere anche sistemi non causali, qualora alcuni elementi della matrice $W(\sigma)$ non siano funzioni razionali proprie, mentre un modello in spazio di stato é per costruzione causale.

L'analisi della causalitá puó essere facilitata sfruttando alcuni risultati dell'algebra delle matrici polinomiali, per la dimostrazione dei quali si rimanda a [1]. É possibile dimostrare che per una qualsiasi matrice razionale propria[1] della forma $W(\sigma) = D(\sigma)^{-1}N(\sigma)$ si ha: $\deg \text{row}_i\ (N(\sigma)) \leq \deg \text{row}_i\ (D(\sigma))\ \forall i$. Se poi si assume che $D(\sigma)$ sia ridotta per righe (rpr) vale anche il viceversa.

Il fatto che $D(\sigma)$ sia rpr é tuttavia sempre ottenibile. Infatti se una matrice $D(\sigma)$ non é rpr esiste almeno un'opportuna matrice unimodulare $U(\sigma)$ tale che $U(\sigma)D(\sigma)$ é rpr; ma allora basta premoltiplicare la matrice $H(\sigma)$ per la matrice $U(\sigma)$ (che essendo unimodulare non altera il behavior) per ottenere la rappresentazione equivalente come nucleo della matrice:

$$\tilde{H}(\sigma) = U(\sigma)H(\sigma) = [U(\sigma)D(\sigma)| - U(\sigma)N(\sigma)] = [\tilde{D}(\sigma)| - \tilde{N}(\sigma)],$$

[1] Ovvero i cui elementi siano funzioni razionali proprie.

dove questa volta $\tilde{D}(\sigma)$ é rpr.

Appurato quindi che non vi é perdita di generalitá nel supporre $D(\sigma)$ rpr, si puó utilizzare la caratterizzazione delle matrici razionali proprie: il modello (3.4) descrive un sistema causale se e solo se deg row$_i$ $(N(\sigma)) \leq$ deg row$_i$ $(D(\sigma))$ $\forall i$. Si noti che, dal momento che la premoltiplicazione per una matrice unimodulare non altera i gradi di riga (cosa che invece potrebbe succedere qualora si postmoltiplichi per una unimodulare), é possibile controllare questa proprietá giá sulla matrice di partenza $H(\sigma)$ anche qualora $D(\sigma)$ non sia rpr.

Si ha quindi che se la matrice $H(\sigma)$ partiziona, dopo opportune permutazioni di colonne, nella forma $[D(\sigma)| - N(\sigma)]$ dove:

1. $D(\sigma)$ é invertibile
2. deg row$_i$ $(N(\sigma)) \leq$ deg row$_i$ $(D(\sigma))$ $\forall i$

il modello (3.4) descrive un sistema LTI causale, del quale é possibile la costruzione di infinite rappresentazioni in spazio di stato.

Qualora si consideri una partizione che presenti solo il primo requisito, che é stato dimostrato essere sempre ottenibile, si avrá invece che $\exists i$: deg row$_i$ $(N(\sigma)) >$ deg row$_i$ $(D(\sigma))$; sia n la massima differenza tra i gradi di riga di $N(\sigma)$ e i gradi di riga di $D(\sigma)$, che sará sicuramente un valore positivo se la seconda condizione non é rispettata. É chiaramente valida la relazione:

$$[D(\sigma)| - N(\sigma)] \begin{bmatrix} y(t) \\ u(t) \end{bmatrix} = 0 \Leftrightarrow [D(\sigma)| - N(\sigma)\sigma^{-n}] \begin{bmatrix} y(t) \\ \sigma^n u(t) \end{bmatrix} = 0.$$

A questo punto la matrice $\bar{H}(\sigma) = [\bar{D}(\sigma)| - \bar{N}(\sigma)] = [D(\sigma)| - N(\sigma)\sigma^{-n}]$ rispetta sicuramente anche la seconda condizione dal momento che i gradi di riga di $\bar{D}(\sigma)$ sono rimasti invariati, mentre quelli di $\bar{N}(\sigma)$ sono calati della quantitá n. Si ha quindi ora un behavior descritto dalla matrice $\bar{H}(\sigma)$ che puó essere riscritto come un sistema LTI causale e quindi é possibile ricavarne una descrizione in spazio di stato. Il fatto di aver introdotto il termine σ^n anche nel vettore traiettoria in corrispondenza di $u(t)$ significa semplicemente considerare come ingresso $u(t+n)$ al posto di $u(t)$.

Osservazione 3.1. *Esiste un caso particolare in cui un behavior dará vita ad un modello (uno e uno solo) ingresso-uscita sicuramente causale, ovvero quello in cui la matrice $H(\sigma)$ sia quadrata. In tal caso infatti la partizione risultante é $H(\sigma) = D(\sigma)$, da cui $W(\sigma) = 0$; si ha quindi la corrispondente partizione del vettore traiettoria $y(t) = w(t)$ e $u(t) = \phi$. Si tratta in questo caso di un sistema autonomo, che sará sicuramente causale.*

Dalla discussione appena portata a termine si ricava quindi un algoritmo, anche se dal tempo di esecuzione elevato, per individuare se una data partizione del vettore traiettoria da vita ad un modello ingresso-uscita causale.

In realtá si puó dimostrare che almeno una partizione di questo tipo esiste in ogni behavior.

Si consideri infatti un behavior descritto dalla matrice $H(\sigma)$ che senza perdita di generalitá si puó assumere rpr. Ma allora $H(\sigma)$ si scompone nella somma di due termini:

$$H(\sigma) = \begin{bmatrix} \sigma^{\upsilon_1} & & & \\ & \sigma^{\upsilon_2} & & \\ & & \ddots & \\ & & & \sigma^{\upsilon_r} \end{bmatrix} H_0 + R(\sigma)$$

dove H_0 é una matrice costante a rango di righe pieno e $R(\sigma)$ soddisfa la condizione $deg\ row_i(R(\sigma)) < \upsilon_i\ \forall i$.

Si consideri una qualunque sottomatrice quadrata $H_1 \in \mathbb{R}^{r \times r}$ di H_0[2] che, eventualmente dopo opportune permutazioni di colonne, si puó supporre essere composta dalle prime r colonne: $H_0 = [H_1\ H_2]$. Rinominando le prime r componenti di $w(t)$ come $y(t)$ e le rimanenti $q - r$ come $u(t)$ si puó giungere alla rappresentazione

$$\left\{ \begin{bmatrix} \sigma^{\upsilon_1} & & & \\ & \sigma^{\upsilon_2} & & \\ & & \ddots & \\ & & & \sigma^{\upsilon_r} \end{bmatrix} H_1 + R_1(\sigma) \right\} y(t) =$$

$$- \left\{ \begin{bmatrix} \sigma^{\upsilon_1} & & & \\ & \sigma^{\upsilon_2} & & \\ & & \ddots & \\ & & & \sigma^{\upsilon_r} \end{bmatrix} H_2 + R_2(\sigma) \right\} u(t)$$

dove $R(\sigma)$ é stata partizionata in modo opportuno. Il primo termine puó essere rielaborato come segue:

$$\begin{bmatrix} \sigma^{\upsilon_1} & & & \\ & \sigma^{\upsilon_2} & & \\ & & \ddots & \\ & & & \sigma^{\upsilon_r} \end{bmatrix} H_1 \left\{ I_r + H_1^{-1} \begin{bmatrix} \sigma^{-\upsilon_1} & & & \\ & \sigma^{-\upsilon_2} & & \\ & & \ddots & \\ & & & \sigma^{-\upsilon_r} \end{bmatrix} R_1(\sigma) \right\} y(t) =$$

$$= \begin{bmatrix} \sigma^{\upsilon_1} & & & \\ & \sigma^{\upsilon_2} & & \\ & & \ddots & \\ & & & \sigma^{\upsilon_r} \end{bmatrix} H_1 T(\sigma^{-1}) y(t)$$

[2]Ne esiste almeno una dal momento che H_0 ha rango di righe pieno.

con $T(\sigma^{-1})$ polinomiale in σ^{-1}, invertibile e tale che $T(0) = I_r$[3]. Si ha quindi

$$T(\sigma^{-1})y(t) = -[H_1^{-1}H_2 + \sigma^{-1}F(\sigma^{-1})]u(t) = G(\sigma^{-1})u(t)$$

con $F(\sigma^{-1})$ e $G(\sigma^{-1})$ polinomiali in σ^{-1}. La matrice di trasferimento tra $u(t)$ e $y(t)$ sará quindi

$$W(\sigma) = T(\sigma^{-1})^{-1}G(\sigma^{-1}).$$

Se si valuta tale matrice di trasferimento per $\sigma = \infty$ si ha $W(\infty) = T(0)^{-1}G(0) = I_rG(0) = -H_1^{-1}H_2$ ovvero un valore finito, pertanto $W(\sigma)$ risulta propria. In particolare risulta $W(\sigma) = -H_1^{-1}H_2 + W_{sp}(\sigma)$, dove $W_{sp}(\sigma)$ é una matrice di trasferimento strettamente propria. In generale il termine $H_1^{-1}H_2$ non risulterá nullo, dal momento che ció accade se e solo se la matrice H_2 é la matrice nulla, ovvero esiste un'unica scelta della partizione $H_0 = [H_1|H_2]$.

3.2.1 Trasformazioni inverse

Si supponga che da un modello behavior $\mathcal{B}$ caratterizzato dalla matrice $H(\sigma) \in \mathbb{R}^{r\times(m+p)}[\sigma]$ si sia potuto ricavare un sistema in spazio di stato caratterizzato dalle matrici $(F \in \mathbb{R}^{n\times n}, G \in \mathbb{R}^{n\times m}, H \in \mathbb{R}^{p\times n}, J \in \mathbb{R}^{p\times m})$. Convertendo tale modello in un modello behavior $\hat{\mathcal{B}}$ del tipo (3.2) si trova uno spazio di traiettorie aumentato, dove é inclusa anche la componente $x(t)$, caratterizzato dalla matrice $\hat{H}(\sigma) \in \mathbb{R}^{r\times(n+m+p)}[\sigma]$; difatti il behavior $\mathcal{B}$ é equivalente al behavior $\hat{\mathcal{B}}$ solo qualora si considerino solo le ultime $m+p$ componenti di quest'ultimo, ovvero la proiezione di $\hat{\mathcal{B}}$ su $[u^T(t), y^T(t)]^T$ coincide con $\mathcal{B}$. É tuttavia sempre possibile eliminare la dipendenza esplicita dal vettore $x(t)$.

Si partizioni infatti il behavior $\hat{\mathcal{B}}$ (e la traiettoria) nella forma:

$$R(\sigma)w_1(t) = M(\sigma)w_2(t), \tag{3.5}$$

dove $w_1(t)^T = [u(t)^T \; y(t)^T]^T$ e $w_2(t)^T = x(t)^T$ ($R(\sigma)$ e $M(\sigma)$ partizionate coerentemente). Come é dimostrato in [1] per ogni matrice polinomiale vale la decomposizione:

$$M(\sigma) = D(\sigma)\Delta(\sigma)S(\sigma)$$

dove $D(\sigma)$ é prima a destra, $\Delta(\sigma)$ é quadrata e invertibile (di dimensione pari al rango di $M(\sigma)$) e $S(\sigma)$ é prima a sinistra. Essendo $D(\sigma)$ prima a destra esiste una matrice unimodulare $U(\sigma)$ tale che:

$$U(\sigma)D(\sigma) = \left[\begin{array}{c} I \\ \hline 0 \end{array}\right].$$

[3] $T(0)$ corrisponde a $\sigma^{-1} = 0$ ovvero a $\sigma = \infty$.

Si premoltiplichi quindi il behavior (3.5) per tale $U(\sigma)$ (si noti che tale behavior é ancora una rappresentazione a nucleo della traiettoria $w(t)$, pertanto questa operazione é lecita) di modo da giungere alla forma:

$$\begin{bmatrix} R_1(\sigma) \\ \hline R_2(\sigma) \end{bmatrix} w_1(t) = \begin{bmatrix} \Delta(\sigma)R(\sigma) \\ \hline 0 \end{bmatrix} w_2(t) \tag{3.6}$$

Il primo insieme di vincoli $R_1(\sigma)w_1(t) = \Delta(\sigma)R(\sigma)w_2(t)$ puó ora essere rimosso, dal momento che la matrice $\Delta(\sigma)R(\sigma)$ ha rango di righe pieno e pertanto, al variare di $w_2(t)$, mappa tutto lo spazio in cui $R_1(\sigma)w_1(t)$ prende valori; detto in altre parole, comunque si scelga $w_1(t)$ esiste un opportuno $w_2(t)$ che rende il vincolo rispettato. Il behavior $\hat{\mathcal{B}}$, ristretto alle sue componenti $w_1(t)$, puó quindi ora essere descritto come nucleo della matrice $R_2(\sigma)$:

$$\hat{\mathcal{B}}_{w_1} = ker(R_2) = \mathcal{B}.$$

Chapter 4

Cenni sulla stabilitá di sistemi behavior

In questo capitolo si vogliono indagare le proprietá di stabilitá dei sistemi behavior. In particolare verrá data una definizione di stabilitá in senso behaviorale e si vedrá come questa si riduca, nel caso di sistemi corrispondenti a modelli in spazio di stato, alla definizione classica; qualora invece un behavior non risulti stabile si vedrá se e come si possa stabilizzarlo inserendo dei vincoli aggiuntivi. Verranno a questo proposito presentati alcuni teoremi fondamentali riguardanti questo argomento. Infine il capitolo si conclude con l'analisi della stabilitá in senso qualitativo, dove si cercherá, per quanto possibile, di adattare il principio dei poli dominanti usati nella classica teoria dei sistemi anche al caso dei behavior.

Nel seguito si fará a lungo riferimento a polinomi con radici unicamente a modulo strettamente minore dell'unitá; a tal proposito si da la seguente definizione:

Definizione 4.1. *Un polinomio le cui radici siano tutte a modulo strettamente inferiore all'unitá si dice polinomio stabile.*

4.1 Stabilitá

In questa sezione, ogniqualvolta si incontrerá un behavior descritto come nucleo di una matrice $H(\sigma)$, si indicherá con p il numero di righe e con q il numero di colonne di $H(\sigma)$. Senza perditá di generalitá si supporrá poi $rank(H(\sigma)) = p \leq q$.

Definizione 4.2. *Un behavior $\mathcal{B}$ si dice stabile se ogni sua traiettoria tende a zero per $t \to +\infty$.*

Il seguente Teorema caratterizza esaustivamente tutti e soli i behavior stabili.

Teorema 4.1. *Sia $\mathcal{B}$=Ker(H), $H(\sigma) \in \mathbb{R}^{r\times q}[\sigma]$ a rango di righe pieno. $\mathcal{B}$ é stabile se e solo se valgono le due condizioni:*

1. *$\mathcal{B}$ é autonomo, quindi H é quadrata non singolare;*

2. *det($H(\sigma)$) é un polinomio stabile.*

É opportuno premettere un lemma alla dimostrazione del teorema.

Lemma 4.1. *Siano $H(\sigma)$ e $Q(\sigma)$ due matrici polinomiali legate dalla relazione $H(\sigma) = Q(\sigma)V(\sigma)$ con $V(\sigma)$ matrice unimodulare. Si ha che $ker(H)$ é un behavior stabile se e solo se lo é $Ker(Q)$.*

Proof. Si consideri una traiettoria $w \in Ker(H)$; data la relazione tra $H(\sigma)$ e $Q(\sigma)$ si ha che $w \in Ker(H)$ se e solo se $V(\sigma)w(t) \in Ker(Q)$, ovvero si ha un isomorfismo[1] tra le traiettorie di $Ker(H)$ e $Ker(Q)$. Il vettore $V(\sigma)w(t)$ é un vettore le cui componenti sono combinazioni lineari delle componenti di $w(t)$ in un numero finito (anche se tale numero potrebbe essere elevatissimo) di istanti temporali.

Si supponga che $Ker(H)$ sia un behavior stabile, ovvero che valga

$$\lim_{t\to+\infty} w(t) = 0 \qquad \forall w \in ker(H);$$

ma allora anche $\lim_{t\to+\infty} V(\sigma)w(t) = 0$ dal momento che ogni sua componente é combinazione lineare di termini che tendono a zero. Quindi si ha che anche $Ker(Q)$ é un behavior stabile.

Essendo $V(\sigma)$ unimodulare vale chiaramente anche il viceversa ovvero si ha che se $Ker(Q)$ é stabile, lo é anche $Ker(H)$. □

Osservazione 4.1. *Se si rimuove l'ipotesi di unimodularitá su $V(\sigma)$ il lemma non é piú vero, ma il ragionamento sviluppato in precedenza permette di dire che se $Ker(H)$ é un behavior stabile allora anche $Ker(Q)$ lo é, cioé l'implicazione vale solo in un verso.*

Si puó ora passare alla dimostrazione del Teorema 4.1

Proof. Per prima cosa viene dimostrata la *necessitá* delle due condizioni. Si assuma quindi che $\mathcal{B}$ sia un behavior stabile e si supponga per assurdo che $\mathcal{B}$ non sia autonomo. Allora, dal teorema di decomposizione, risulta:

$$\mathcal{B} = \mathcal{B}_a \oplus \mathcal{B}_c,$$

dove $\mathcal{B}_a$ é un behavior autonomo e $\mathcal{B}_c$ (che per l'ipotesi assurda risulta necessariamente diverso dal behavior nullo) é controllabile. L'idea é quella di dimostrare che in un qualunque behavior controllabile esistono traiettorie che non tendono a zero per $t \to +\infty$.

[1] Dal momento che $V(\sigma)$ é una matrice unimodulare.

$\mathcal{B}_c$ puó essere descritto come nucleo di una matrice prima a sinistra[2] $L(\sigma)$ o come immagine di una matrice $M(\sigma)$ che non é restrittivo supporre prima a destra, pertanto a rango di colonne pieno. Vale inoltre la relazione $L(\sigma)M(\sigma)$=0. Tutte (e sole) le traiettorie appartenenti a $\mathcal{B}_c$ si possono quindi ricavare come $w(t) = M(\sigma) \cdot v(t)$ al variare di $v(t)$; $w(t)$ sará quindi della forma:

$$w(t) = M_n v(t+n) + M_{n+1} v(t+n+1) + \cdots + M_N v(t+N).$$

Essendo $M(\sigma)$ di rango colonne pieno, per *quasi ogni*[3] scalare $\sigma_0 \in \mathbb{C}$ esiste (almeno) un vettore v_0 tale che $M(\sigma_0)v_0 = w \neq 0$. Si scelga quindi $v(t) = \sigma_0^t \cdot v_0$ con $|\sigma_0| > 1$:

$$w(t) = M(\sigma)v(t) = M(\sigma)\sigma_0^t v_0 = w\sigma_0^t.$$

La traiettoria $w(t)$ é generalmente complessa, ma per la linearitá di $\mathcal{B}$ (che si riflette su $\mathcal{B}_c$) si ha che sia $w_1(t) := Re[w(t)]$ sia $w_2(t) := Im[w(t)]$ appartengono al behavior. Data la scelta fatta per σ_0 almeno una di queste due traiettorie necessariamente diverge, andando contro la tesi di stabilitá. Pertanto l'ipotesi di non autonomia di $\mathcal{B}$ risulta assurda.

$\mathcal{B}$ quindi é un behavior autonomo e pertanto la matrice $H(\sigma)$ deve avere rango di colonne pieno; avendo anche rango di righe pieno $H(\sigma)$ risulta quadrata e invertibile e la prima condizione é cosí dimostrata.

Per quanto riguarda la seconda condizione é opportuno distinguere due casi:

- *Caso 1:* $H(\sigma)$ in forma di *Smith*, ovvero

  $$H(\sigma) = \begin{bmatrix} \gamma_1(\sigma) & & \\ & \ddots & \\ & & \gamma_q(\sigma) \end{bmatrix},$$

  dove i polinomi sulla diagonale si dividono reciprocamente e sono ordinati secondo gradi decrescenti; i rimanenti elementi sono nulli. Si noti come il fatto che $H(\sigma)$ sia invertibile grantisca che $\gamma_i(\sigma) \neq 0 \ \forall i$.

  La condizione di appartenenza al nucleo di $H(\sigma)$ (i.e. di appartenenza al behavior $\mathcal{B}$) $H(\sigma)w(t) = 0$ si traduce, data la particolare forma della matrice, in n equazioni alle differenze scalari $\gamma_i(\sigma)w_i(t) = 0$ sulle componenti del vettore $w(t)$. Essendo il behavior stabile per ipotesi tutte queste componenti devono tendere a zero al tendere di t a $+\infty$; é ben noto che condizione necessaria e sufficiente affinché un'equazione alle

[2]Si veda a tal proposito [1].

[3]Ovvero l'insieme di scalari per cui non vale questa proprietá costituisce un insieme di misura nulla

differenze come quella in questione ammetta unicamente soluzioni stabili é che le radici dei polinomi $\gamma_i(\sigma)$ siano tutte a modulo strettamente inferiore all'unitá.

Ma allora anche il determinante della matrice $H(\sigma)$, che risulta essere il prodotto di tali polinomi, deve avere radici a modulo strettamente inferiore all'unitá.

- *Caso 2:* $H(\sigma)$ non in forma di *Smith*.

  Detta $\Gamma(\sigma) = U(\sigma)^{-1}H(\sigma)V(\sigma)^{-1}$ la forma di *Smith* di $H(\sigma)$, in questo caso vale $Ker(H) = Ker(U\Gamma V) = Ker(\Gamma V)$, dal momento che $U(\sigma)$ é matrice unimodulare.

  Dal momento che $Ker(H)$ é stabile per ipotesi, per il Lemma 4.1 lo sará anche $Ker(\Gamma)$ e quindi, per quanto dimostrato al *caso 1*, il determinante di $\Gamma(\sigma)$ é un polinomio stabile. Da $\Gamma(\sigma) = U(\sigma)^{-1}H(\sigma)V(\sigma)^{-1}$ si ricava che $det(\Gamma(\sigma)) = det(U(\sigma)^{-1}) \cdot det(H(\sigma)) \cdot det(V(\sigma)^{-1})$, ma il determinante di una matrice unimodulare é una costante diversa da zero, pertanto i due polinomi $det(\Gamma(\sigma))$ e $\det(H(\sigma))$ hanno le stesse radici, differendo unicamente per una costante moltiplicativa non nulla pari a $det(U(\sigma)^{-1}) \cdot det(V(\sigma)^{-1})$. Pertanto anche $det(H(\sigma))$ é un polinomio stabile.

É in questo modo dimostrata la *necessitá* delle due condizioni. Per quanto riguarda la *sufficienza* basta ripercorrere in verso contrario i passaggi appena svolti.

Il fatto che $\mathcal{B}$ sia autonomo implica che $H(\sigma)$ é una matrice quadrata e invertibile, pertanto la sua forma di *Smith*, $\Gamma(\sigma)$, ha le medesime caratteristiche del caso precedente. Il determinante di $\Gamma(\sigma)$ ha le medesime radici di quello di $H(\sigma)$, che hanno modulo inferiore all'unitá per ipotesi. Pertanto i singoli polinomi $\gamma_i(\sigma)$, che sono fattori del determinante di $\Gamma(\sigma)$, hanno radici in modulo inferiore all'unitá.

Si consideri ora un generico elemento $w(t)$ appartenente al behavior $\mathcal{B}$, ovvero soddisfacente la condizione $H(\sigma)w(t) = 0$. Anche in questo caso é opportuno distinguere due casi:

- *Caso 1:* $H(\sigma)$ in forma di *Smith*.

  Con ragionamenti analoghi a quanto fatto nella dimostrazione della necessarietá delle due condizioni, si trova che $H(\sigma)w(t) = 0$ se e solo se $\gamma_i(\sigma)w_i(t) = 0$. Avendo dimostrato che le radici di ogni polinomio $\gamma_i(\sigma)$ hanno modulo inferiore all'unitá si ha che $w_i(t) \to 0$ per $t \to +\infty$ $\forall i$. Data l'arbitrarietá di $w(t)$ la tesi é in questo caso dimostrata.

- *Caso 2:* $H(\sigma)$ non in forma di *Smith*.

  Sia $\Gamma(\sigma) = U(\sigma)^{-1}H(\sigma)V(\sigma)^{-1}$ la forma di *Smith* di $H(\sigma)$ che risulterá quadrata, invertibile e con determinante a radici strettamente inferiori all'unitá (lo si dimostra seguendo un ragionamento analogo a quanto fatto nel caso della necessitá delle due condizioni); il nucleo di $\Gamma(\sigma)$, per quanto dimostrato al *caso 1*, risulta quindi un behavior stabile. Ma allora anche $Ker(H) = Ker(U\Gamma V) = Ker(\Gamma V)$, risulta essere un behavior stabile (per il Lemma 4.1) e in questo modo la tesi é dimostrata.

$\square$

Val la pena di reinterpretare la definizione di stabilitá e il teorema appena dimostrato quando il sistema behavior $\mathcal{B}$ si riferisca ad un modello in spazio di stato, ovvero sia della forma (3.2). La stabilitá asintotica di un sistema in spazio di stato richiede la convergenza a zero per $t \to +\infty$ dell'evoluzione libera del vettore di stato (e quindi anche dell'uscita) a partire da qualunque condizione iniziale; si considera quindi un sistema autonomo, dove l'ingresso $u(t)$ non agisce e puó essere tolto dal modello (difatti la matrice G non gioca alcun ruolo nell'analisi della stabilitá). Si arriva quindi al corrispondente modello behavior:

$$\begin{bmatrix} \sigma I - F & 0 \\ -H & I \end{bmatrix} \begin{bmatrix} x(t) \\ y(t) \end{bmatrix} = 0. \tag{4.1}$$

La stabilitá in ambito behaviorale, che richiede la convergenza a zero per $t \to +\infty$ di qualsiasi traiettoria $w(t)^T = [x(t)^T \; y(t)^T]^T \in \mathcal{B}$, é quindi equivalente alla convergenza a zero del vettore di stato (che implica la convergenza a zero del vettore d'uscita) a partire da qualsiasi condizione iniziale.

Detta $R(\sigma)$ la matrice polinomiale (che si noti essere quadrata) caratteristica del modello (4.1), si applichi il teorema (4.1). Si trova che il sistema é stabile se e solo se:

1. il sistema é autonomo, ovvero $R(\sigma)$ ha rango di colonne pieno;

2. $det(R(\sigma))$ ha unicamente radici a modulo inferiore all'unitá.

La prima condizione é sicuramente verificata dal momento che la matrice $R(\sigma)$ é triangolare a blocchi ed i blocchi sulla diagonale sono entrambi quadrati a rango di colonne pieno. La seconda condizione si traduce invece nel fatto che il polinomio $det(\sigma I - F)$ abbia unicamente radici a mudulo inferiore all'unitá, che é la ben nota caratterizzazione della stabilitá asintotica nel caso di sistemi descritti per mezzo di modelli di stato.

4.2 Stabilizzabilitá

Qualora un behavior non sia stabile é possibile tentare di stabilizzarlo con qualche tecnica. Un'idea semplice e intuitiva é quella di aggiungere vincoli al sistema in modo da ottenere un behavior complessivo stabile: si consideri un behavior descritto come nucleo di una matrice $H(\sigma) \in \mathbb{R}^{p\times q}$ e si consideri una matrice polinomiale $K(\sigma) \in \mathbb{R}^{m\times q}$. Imponendo alla traiettoria del behavior $w(t)$ di soddisfare anche gli ulteriori vincoli $K(\sigma)w(t) = 0$ si ottiene un behavior piú vincolato le cui traiettorie sono tutte e sole quelle soddisfacenti:

$$\begin{bmatrix} H(\sigma) \\ \hline K(\sigma) \end{bmatrix} w(t) = 0. \tag{4.2}$$

Formalizzando queste considerazioni intuitive si giunge alla seguente definizione:

Definizione 4.3. *Sia $\mathcal{B} = Ker(H(\sigma))$ con $H(\sigma) \in \mathbb{R}^{r\times q}[\sigma]$ a rango di righe pieno. $\mathcal{B}$ si dice stabilizzabile se esiste almeno una matrice polinomiale $K(\sigma) \in \mathbb{R}^{(q-r)\times q}[\sigma]$ a rango di righe pieno tale che vincolando la traiettoria del behavior a soddisfare anche $K(\sigma)w(t) = 0$ si abbia $lim_{t\to+\infty} w(t) = 0$.*

L'obiettivo della procedura di stabilizzazione (quando questa sia possibile) sará quindi quello di trovare una matrice polinomiale $K(\sigma)$ tale che la matrice (quadrata)

$$A(\sigma) = \begin{bmatrix} H(\sigma) \\ \hline K(\sigma) \end{bmatrix}$$

descriva un behavior stabile.

Il primo risultato riguarda l'effettiva possibilitá di stabilizzare un behavior quando questo non lo sia giá in partenza; il prossimo teorema caratterizza in maniera esaustiva tutti i behavior per i quali ció sia possibile.

Teorema 4.2. *Un behavior $\mathcal{B} = Ker(H)$ con $H(\sigma)$ a rango di righe pieno é stabilizzabile se e solo se $H(\alpha)$ ha rango di righe pieno $\forall\alpha : |\alpha| \geq 1$.*

Proof. Per prima cosa si assuma che il behavior sia stabilizzabile, dunque per ipotesi esiste $K(\sigma)$ che rende stabile il behavior descritto come nucleo della matrice $A(\sigma)$. Per il teorema (4.1) ció equivale a dire che $A(\sigma)$ é quadrata e invertibile e il suo determinante é un polinomio stabile. Anche in questo caso é opportuno distinguere due casi:

- Caso 1: $A(\sigma)$ in forma di *Smith*

  Se $A(\sigma)$ é giá in forma di *Smith* si ha:

  $$A(\sigma) = \begin{bmatrix} a_1(\sigma) & & \\ & \ddots & \\ & & a_q(\sigma) \end{bmatrix}$$

  e quindi le prime r righe sono la forma di *Smith* di $H(\sigma)$ e le rimanenti $q-r$ la forma di *Smith* di $K(\sigma)$ dopo un'opportuna permutazione delle colonne. Il determinante di $A(\sigma)$ é il prodotto di tutti gli elementi diagonali che pertanto o sono costanti non nulle o sono polinomi stabili.

Non é dunque possibile che per un qualche α a modulo maggiore o uguale a uno qualche elemento della matrice $A(\alpha)$ si annulli e pertanto, data la forma diagonale della matrice, $A(\alpha)$ é di rango pieno $\forall\alpha : |\alpha| \geq 1$. Ma allora anche un qualunque sottoinsieme delle righe di $A(\sigma)$ presenta questa proprietá, in particolare le prime r ovvero la matrice $H(\sigma)$.

- Caso 2: $A(\sigma)$ non in forma di *Smith*

  In questo caso si ha $\Gamma_A(\sigma) = U(\sigma)^{-1}A(\sigma)V(\sigma)^{-1}$; per quanto discusso nel Teorema 4.1 sfruttando il Lemma 4.1 si ha che $A(\sigma)$ é stabile se e solo se lo é $\Gamma_A(\sigma)$. Ma allora $\Gamma_A(\alpha)$, per quanto discusso al caso 1, deve avere rango di righe pieno $\forall\alpha : |\alpha| \geq 1$. Essendo che il rango del prodotto di n matrici é inferiore o uguale al rango di ogni fattore, si ha che $U(\alpha)$, $A(\alpha)$ e $V(\alpha)$ hanno almeno rango di righe pari a q, ovvero pieno. Pertanto un qualunque sottoinsieme di r righe di $A(\alpha)$, in particolare quello corrispondente ad $H(\alpha)$, avrá rango di righe pieno $\forall\alpha : |\alpha| \geq 1$ e questo prova la tesi.

Per quanto riguarda il viceversa si supponga che $H(\alpha)$ abbia rango di righe pieno $\forall\alpha : |\alpha| \geq 1$. Conviene anche il questo caso distinguere due casi:

- Caso 1: $H(\sigma)$ in forma di *Smith*

  In questo caso si ha:

  $$H(\sigma) = \begin{bmatrix} \gamma_1(\sigma) & \cdots & & 0 \\ & \ddots & & 0 \\ & & \gamma_r(\sigma) & 0 \end{bmatrix}$$

  dove nessun polinomio $\gamma_i(\sigma)$ ha radici a modulo maggiore o uguale a uno[4]. Scegliendo una matrice $K(\sigma)$ della forma

  $$K(\sigma) = \begin{bmatrix} 0 & k_{r+1}(\sigma) & & \\ 0 & & \ddots & \\ 0 & & & k_q(\sigma) \end{bmatrix}$$

  dove i polinomi $k_i(\sigma)$ sono non nulli e stabili si ha che la matrice risultante $A(\sigma)$ é quadrata, invertibile e il suo determinante é un polinomio stabile[5]. Pertanto per il Teorema 4.1 il behavior risultante é stabile, quindi il behavior di partenza é stabilizzabile.

[4]Se cosí non fosse almeno una delle righe di $H(\sigma)$ si annullerebbe per almeno un $\alpha : |\alpha| \geq 1$, contraddicendo l'ipotesi.

[5]Si noti che la matrice $A(\sigma)$ non é necessariamente in forma di *Smith* dal momento che non é garantito il requisito della divisibilitá dei polinomi sulla diagonale.

- Caso 2: $H(\sigma)$ non in forma di *Smith*

  Sia allora $\Gamma_H(\sigma) = U(\sigma)^{-1}H(\sigma)V(\sigma)^{-1}$ la forma di *Smith* di $H(\sigma)$. Dal momento che vale anche $H(\sigma) = U(\sigma)\Gamma_H(\sigma)V(\sigma)$ con $U(\sigma)$ e $V(\sigma)$ matrici unimodulari i ranghi di righe di $H(\alpha)$ e $\Gamma_H(\alpha)$ coincidono per ogni α complesso; pertanto anche $\Gamma_H(\alpha)$ ha rango di righe pieno $\forall\alpha : |\alpha| \geq 1$. Si scelga ora una matrice $\Gamma_K(\sigma)$ che abbia le stesse proprietá della matrice $K(\sigma)$ del caso precedente e si consideri la matrice

  $$\Gamma_A(\sigma) = \begin{bmatrix} \Gamma_H(\sigma) \\ \Gamma_K(\sigma) \end{bmatrix} \in \mathbb{R}^{q\times q}.$$

  che si lega alla matrice $A(\sigma)$ nel seguente modo:

  $$\begin{aligned} A(\sigma) &= \left[\begin{array}{c|c} U(\sigma) & 0 \\ \hline 0 & U_K^{-1}(\sigma) \end{array}\right] \cdot \begin{bmatrix} \Gamma_H(\sigma) \\ \Gamma_K(\sigma) \end{bmatrix} \cdot V(\sigma) \\ &= \left[\begin{array}{c} U(\sigma)\Gamma_H(\sigma)V(\sigma) \\ \hline U_K(\sigma)\Gamma_K(\sigma)V(\sigma) \end{array}\right] \\ &= \left[\begin{array}{c} H(\sigma) \\ \hline K(\sigma) \end{array}\right]. \end{aligned}$$

  Dal momento che la matrice $\Gamma_A(\sigma)$ identifica un behavior stabile, tale é anche quello generato dal nucleo di $A(\sigma)$, pertanto il behavior di partenza $Ker(H)$ é stabilizzabile e la tesi é dimostrata. La matrice che assolve al compito di stabilizzare $\mathcal{B}$ é $K(\sigma) = U_K^{-1}(\sigma)\Gamma_K(\sigma)V^{-1}(\sigma)$, dove $U_K^{-1}(\sigma)$ é un'arbitraria matrice unimodulare (ad esempio l'identitá).

$\square$

Il precedente teorema prova quindi l'esistenza di sistemi behavior stabilizzabili e di sistemi behavior non stabilizzabili. É tuttavia opportuno notare che la definizione di stabilizzabilitá e quindi il relativo teorema sono validi unicamente per rappresentazioni a nucleo dove la matrice $H(\sigma)$ ha rango di riga pieno; in caso contrario é infatti sempre possibile stabilizzare un behavior rendendo la matrice $A(\sigma)$ di rango colonne pieno mediante l'aggiunta di un numero opportuno di righe (che possono risultare linearmente dipendenti).

La questione che ora sorge naturale é: i controllori ricavati nella dimostrazione del Teorema 4.2 sono gli unici possibili? Chiaramente no, dal momento che, considerato un behavior stabilizzabile descritto dalla matrice $H(\sigma) = U(\sigma)\Gamma(\sigma)V(\sigma)$ puó essere stabilizzato anche tramite la matrice:

$$\Gamma_K(\sigma) = \begin{bmatrix} 0 & k_{r+1}(\sigma) & * & * \\ 0 & & \ddots & * \\ 0 & & & k_q(\sigma) \end{bmatrix}$$

dove si sia rispettato il vincolo giá esaminato sui polinomi lungo la diagonale, ma gli elementi sopradiagonali sono arbitrari. Essi infatti, data la struttura finale (diagonale a blocchi, con un blocco diagonale e uno triangolare superiore) che la matrice $\Gamma_A(\sigma)$ verrá ad assumere, non ne influenzano il rango che sará determinato unicamente dagli elementi sulla diagonale. Pertanto la matrice $\Gamma_A(\alpha)$ non cala di rango per ogni $\alpha \in \mathbb{C}, |\alpha| \geq 1$, ovvero $\Gamma_A(\sigma)$ identifica un behavior stabile, pertanto anche il behavior finale identificato da $A(\sigma)$ risulta essere stabile. Per gli stessi motivi un'altra matrice che assolve al compito della stabilizzazione é:

$$\Gamma_K(\sigma) = \begin{bmatrix} * & k_{r+1}(\sigma) & 0 & 0 \\ * & * & \ddots & 0 \\ * & * & * & k_q(\sigma) \end{bmatrix}$$

Si deve quindi cercare un'espressione piú generale delle matrici $K(\sigma)$ (o equivalentemente $\Gamma_K(\sigma)$) che possono stabilizzare il behavior, di cui quelle considerate nella dimostrazione del teorema saranno una sottoclasse propria.

Se la matrice $H(\sigma)$ é in forma di *Smith* la caratterizzazione di tutte e sole le matrici $K(\sigma)$ che stabilizzano il sistema é immediata. La matrice finale $A(\sigma)$ sará infatti della forma:

$$A(\sigma) = \left[\begin{array}{ccc|c} h_1(\sigma) & \cdots & 0 & \\ & \ddots & 0 & 0 \\ & & h_r(\sigma) & \\ \hline & K_1(\sigma) & & K_2(\sigma) \end{array}\right]$$

dove $K(\sigma)$ é stata partizionata coerentemente. $A(\sigma)$ descrive un behavior stabile se e solo se $K_2(\sigma) \in \mathbb{R}^{(q-r)\times(q-r)}[\sigma]$ é invertibile e ha un determinante le cui radici sono in modulo inferiore all'unitá. Solo in questo caso infatti la matrice completa $A(\sigma)$ risulterá essere quadrata, invertibile e con determinante pari a $det(A(\sigma)) = (\prod_{i=1}^{r} h_i(\sigma)) \cdot det(K_2(\sigma))$ stabile, soddisfacendo cosí le condizoni del Teorema 4.1

Qualora $H(\sigma)$ non sia in forma di *Smith* si ha $H(\sigma) = U(\sigma)\Gamma(\sigma)V(\sigma)$, da cui

$$A(\sigma) = \begin{bmatrix} H(\sigma) \\ K(\sigma) \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} U(\sigma)\Gamma(\sigma)V(\sigma) \\ K(\sigma) \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} U(\sigma) & 0 \\ 0 & I \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \Gamma(\sigma) \\ K(\sigma)V^{-1}(\sigma) \end{bmatrix} V(\sigma);$$

$ker(A)$ risulta stabile se e solo se lo é il behavior descritto come nucleo della matrice

$$\begin{bmatrix} \Gamma(\sigma) \\ K(\sigma)V^{-1}(\sigma) \end{bmatrix}$$

dove questa volta la matrice di partenza $\Gamma(\sigma)$ é in forma di *Smith*. Pertanto, per quanto giá analizzato, occorre e basta che la matrice $K(\sigma)V^{-1}(\sigma)$ partizioni nella forma $[\bar{K}_1(\sigma)\ \bar{K}_2(\sigma)]$ con $\bar{K}_2(\sigma)$ quadrata non singolare e con determinante stabile; in altre parole, ragionando direttamente sulla matrice $K(\sigma)$, occorre e basta che valga la relazione $K(\sigma) = [\bar{K}_1(\sigma)\ \bar{K}_2(\sigma)]V(\sigma)$ con $\bar{K}_2(\sigma)$ quadrata non singolare e con determinate stabile.

Si ha quindi il seguente teorema di caratterizzazione di tutte e sole le matrici $K(\sigma)$ che stabilizzano un behavior stabilizzabile

Teorema 4.3. *Sia $\mathcal{B} = ker(H(\sigma))$ con $H(\sigma) \in \mathbb{R}^{r\times q}[\sigma]$ a rango di righe pieno un behavior stabilizzabile e sia $\Gamma(\sigma) = U^{-1}(\sigma)H(\sigma)V^{-1}(\sigma)$ la forma di* Smith *di $H(\sigma)$. Tutte e sole le matrici $K(\sigma)$ che stabilizzano il behavior sono della forma*

$$K(\sigma) = [\bar{K}_1(\sigma)|\bar{K}_2(\sigma)]V(\sigma) \tag{4.3}$$

dove $\bar{K}_2(\sigma) \in \mathbb{R}^{(q-r)\times(q-r)}[\sigma]$ é una qualunque matrice invertibile con determinante stabile mentre $\bar{K}_1(\sigma) \in \mathbb{R}^{(q-r)\times r}[\sigma]$ é un'arbitraria matrice polinomiale.

Proof. Segue da quanto sopra. □

Osservazione 4.2. *Il caso particolare in cui $H(\sigma)$ é giá in forma di* Smith *si ha quando vale $V(\sigma) = I$ (e $U(\sigma) = I$).*

Osservazione 4.3. *Le matrici $K(\sigma)$ utilizzate nella dimostrazione del teorema 4.2 risultano essere una sottoclasse propria di tutte le matrici che stabilizzano il sistema, come giá intuitivamente osservato. Esse corrispondono alla scelta $\bar{K}_1(\sigma) = 0$ e $\bar{K}_2(\sigma) = diag(k_i(\sigma))$ con $k_i(\sigma) \neq 0$ e stabile $\forall i$.*

Si noti che il Teorema 4.3 fa riferimento ad una qualunque matrice unimodulare $V(\sigma)$ che, assieme ad un'altra opportuna matrice unimodulare $U(\sigma)$, pone $H(\sigma)$ in forma di *Smith*. La caratterizzazione di tutte e sole le $K(\sigma)$ stabilizzanti, quindi, non dipende dalla particolare scelta effettuata (sono infatti infinte, in generale, le coppie di matrici unimodulari $(U(\sigma), V(\sigma))$ che pongono $H(\sigma)$ in forma di *Smith*), ma identifica univocamente tutte le $K(\sigma)$ stabilizzanti per mezzo di una (non importa quale) matrice $V(\sigma)$. Il teorema rimarrebbe inoltre valido se si considerassero due matrici unimodulari tali che $H(\sigma) = \bar{U}(\sigma)\bar{H}(\sigma)\bar{V}(\sigma)$ con

$$\bar{H}(\sigma) = \begin{bmatrix} H_1(\sigma) & 0 \end{bmatrix}$$

e $H_1(\sigma)$ matrice polinomiale quadrata $r \times r$. $\bar{H}(\sigma)$ é infatti una matrice equivalente ad $H(\sigma)$ e come tale ha i medesimi polinomi invarianti che sono per ipotesi con radici a modulo inferiore all'unitá (per la stabilizzabilitá del behavior). Alla luce di ció si trova che $det(H_1(\sigma))$ é un polinomio stabile, pertanto lo sará anche $det(A(\sigma)) = det(H_1(\sigma)) \cdot det(K_2(\sigma))$ se saranno rispettate le condizioni sulla matrice $K(\sigma)$[6]. Si noti che, dal momento che la

[6] In questo caso, ovviamente, la matrice da considerare é $\bar{V}(\sigma)$, che nulla ha a che fare, in generale, con la forma di *Smith* di $H(\sigma)$.

matrice $H(\sigma)$ ha rango di righe pieno per ipotesi, una forma di questo tipo puó essere ottenuta unicamente tramite postmoltiplicazione per una matrice unimodulare opportuna, e questo spiega perché nel Teorema 4.3 la matrice $U(\sigma)$ non giocasse alcun ruolo.

4.3 Analisi qualitativa della stabilitá di un behavior

Nel corso della dimostrazione del Teorema 4.3 é emersa la costruzione esplicita della matrice $K(\sigma)$ che stabilizza il sistema e tutti i gradi di libertá relativi ad essa: é infatti evidente come ci siano infinite matrici $K(\sigma)$ che assolvono allo scopo di stabilizzare il behavior. Quale di queste matrici si scelga ovviamente avrá degli effetti sul sistema finale caratterizzato dalla matrice $A(\sigma)$, come la velocitá con cui le traiettorie tendono a zero, la raggiungibilitá o l'osservabilitá (intese in ambito behaviorale) del sistema e varie altre caratteristiche. In questa sezione si vogliono indagare le caratteristiche di stabilitá del sistema stabilizzato.

4.3.1 Behavior stabili

In prima battuta si consideri un sistema stabile giá in partenza, e sia $H(\sigma)$ la matrice polinomiale (quadrata e non singolare) che lo rappresenta. Tramite premoltiplicazione per un'opportuna unimodulare si puó giungere alla *forma di Hermite per colonne.*

Si assuma senza perdita di generalitá che $H(\sigma)$ sia in tale forma e si consideri la condizione di appartenenza al behavior di una traiettoria $w(t)$:

$$\begin{bmatrix} h_{11}(\sigma) & * & * & * \\ 0 & h_{22}(\sigma) & * & * \\ 0 & & \ddots & * \\ 0 & \cdots & 0 & h_{qq}(\sigma) \end{bmatrix} \begin{bmatrix} w_1(t) \\ w_2(t) \\ \vdots \\ w_q(t) \end{bmatrix} = 0. \tag{4.4}$$

L'ultima riga della (4.4) impone la condizione $h_{qq}(\sigma)w_q(t) = 0$ che, una volta note le condizioni iniziali su $w_q(t)$ (in numero pari a $deg\ h_{qq}$), identifica univocamente l'andamento dell'ultima componente. In particolare decomponendo il polinomio $h_{qq}(\sigma)$ nel prodotto di polinomi elementari di primo o secondo grado (con le relative molteplicitá) é possibile individuare il polo dominante (o i poli dominanti, nel caso complesso) e quindi la velocitá asintotica con cui la componente $w_q(t)$ tende a zero; si indichi con σ_q il modulo del polo dominante individuato, che si sa essere legato alla velocitá di convergenza (tanto piú il modulo é vicino all'unitá tanto piú lentamente il sistema converge a zero).

Una volta che l'andamento di $w_q(t)$ é stato completamente identificato si puó considerare la penultima riga della matrice $H(\sigma)$:

$$h_{(q-1)(q-1)}(\sigma)w_{q-1}(t) + h_{(q-1)(q)}(\sigma)w_q(t) = 0.$$

Questo vincolo descrive un sistema SISO dove il ruolo dell'ingresso é giocato da w_q e quello dell'uscita da w_{q-1}; é quindi possibile ricavare l'andamento di $w_{q-1}(t)$ una volte note le condizioni iniziali su ingresso e uscita. In particolare ne sono necessarie $deg\ h_{(q-1)(q-1)}$ su w_{q-1} e $deg\ h_{(q-1)(q)}$ su w_q; si noti tuttavia che, grazie alla particolare forma in cui si é posta $H(\sigma)$, si ha che $deg\ h_{(q-1)(q)} < deg\ h_{qq}$ e quindi non é necessaria alcuna condizione iniziale aggiuntiva rispetto a quante ne servono per calcolare l'andamento esplicito di $w_q(t)$.

É ora possibile procedere come nel caso precedente, ovvero decomporre $h_{(q-1)(q-1)}(\sigma)$ nel prodotto di polinomi elementari di primo o secondo grado (con le relative molteplicitá), individuare il polo dominante (o i poli dominanti, nel caso complesso) e quindi la velocitá asintotica con cui la componente $w_{q-1}(t)$ tende a zero; si indichi con σ_{q-1} il modulo del polo dominante individuato.

Iterando questo procedimento si puó ricavare univocamente l'andamento di tutte le rimanenti componenti e individuare, per ognuna di esse, il polo dominante o i poli dominanti che ne descrivono l'andamento asintotico. La traiettoria completa, quindi, tenderá a zero secondo una velocitá individuata dal polo a modulo massimo tra quelli individuati:

$$\bar{\sigma} = max_{\{i=1\cdots q\}}\sigma_i.$$

In questo modo si puó quindi ricavare una stima per eccesso della velocitá con cui la traiettoria tende a zero al tendere di t a $+\infty$. Ma si puó fare anche di piú, ovvero individuare qual é la velocitá asintotica di convergenza di ogni singola componente. L'ultima componente w_q é chiaramente caratterizzata dal polo dominante (o dai poli dominanti) di modulo σ_q come appare evidente dal ragionamento esposto sopra.

Per la dinamica delle rimanenti componenti invece il discorso é piú complesso. Si consideri ad esempio w_{q-1}, la cui dinamica é identificata in parte da una sorta di evoluzione libera legata unicamente alle condizioni iniziali e in parte da una sorta di evoluzione forzata dovuta all'azione di w_q che agisce come ingresso; ragionando in termini di trasformata zeta (assumendo le opportune ipotesi di convergenza) si ha:

$$W_{q-1}(z) = \frac{p_{q-1}(z)}{h_{(q-1)(q-1)}(z)} + \frac{h_{(q-1)(q)}(z)}{h_{(q-1)(q-1)}(z)}W_q(z),$$

dove $p_{q-1}(z)$ é un polinomio legato alle condizioni iniziali. Nell'approssimazione ai poli dominanti si deve quindi tenere in esplicita considerazione anche la dinamica di $w_q(t)$ e quindi la velocitá di convergenza sará legata al polo o ai poli di modulo massimo tra quelli di $h_{(q-1)(q-1)}(\sigma)$ e $h_{qq}(\sigma)$, ovvero a $max\,\{\sigma_q, \sigma_{q-1}\}$.

Analogamente, per una generica componente w_i la velocitá di convergenza sará legata a $max_{\{j:j\geq i\}}\sigma_j$.

4.3.2 Behavior stabilizzabili

Si consideri ora un behavior $\mathcal{B}$ che sia stabilizzabile. Per analizzare l'influenza della matrice $K(\sigma)$ in termini di velocitá di convergenza a zero conviene prima di tutto considerare il caso in cui la matrice $H(\sigma)$ sia in forma di *Smith.* In questo caso le prime r componenti del vettore traiettoria sono univocamente determinate ed evolvono in maniera indipendente, mentre le rimanenti $q-r$ sono completamente arbitrarie. Scegliendo una matrice $K(\sigma)$ della forma indicata nella dimostrazione del teorema (4.3) si rendono anche le rimanenti componenti univocamente determinate, in funzione dell'evoluzione delle prime r. Si consideri una matrice unimodulare $U_k(\sigma)$ che pone $K_2(\sigma)$ in forma di *Hermite* per colonne e si premoltiplichi la matrice completa $A(\sigma)$ per la matrice unimodulare

$$\begin{bmatrix} I & 0 \\ 0 & U_k(\sigma) \end{bmatrix}$$

arrivando ad ottenere la rappresentazione equivalente di $ker(A)$ come nucleo della matrice

$$\begin{aligned} A'(\sigma) &= \begin{bmatrix} \bar{\Gamma}(\sigma) & 0 \\ U_k(\sigma)K_1(\sigma) & K_{2,Herm}(\sigma) \end{bmatrix} \\ &= \left[\begin{array}{ccc|ccc} \gamma_1(\sigma) & & & & & \\ & \ddots & & & 0 & \\ & & \gamma_r(\sigma) & & & \\ \hline & & & k_{r+1}(\sigma) & * & * \\ & U_K(\sigma)K_1(\sigma) & & & \ddots & * \\ & & & & & k_q(\sigma) \end{array}\right] \end{aligned} \tag{4.5}$$

dove $K_{2,Herm}(\sigma)$ é ora una matrice triangolare superiore.

La velocitá di convergenza delle prime r componenti é identificata dai poli dominanti dei polinomi $\gamma_i(\sigma)$, il cui modulo verrá indicato con σ_i.

L'ultima riga della matrice $A'(\sigma)$ esprime l'evoluzione di $w_q(t)$ in funzione dell'evoluzione (nota) delle prime r componenti che possono essere viste come ingressi. La velocitá di convergenza di questa componente sará quindi identificata, come nel caso precedente di behavior stabili, dal massimo tra i σ_i delle prime r componenti e il modulo del polo dominante (o dei poli dominanti nel caso complesso) del polinomio $k_q(\sigma)$; si definisca con σ_q tale valore.

Si puó ora ricavare l'evoluzione della componente $\mathbf{w}_{q-1}$, che risulterá determinata dalle prime r componenti e da $\mathbf{w}_q$, arrivando cosí a definire anche in questo caso la quantitá σ_{q-1}. Iterando il procedimento per le rimanenti componenti si puó arrivare a definire tutti i rimanenti σ_i, identificando cosí la velocitá di convergenza per tutte le componenti del behavior.

Val al pena di osservare fin da ora che le prime r componenti sono univocamente determinate dalla struttura del behavior e non é possibile modificarne l'evoluzione tramite l'aggiunta di un'ulteriore matrice di vincoli $K(\sigma)$; l'effetto di questa matrice si fará sentire solo sulle componenti libere. Se l'obiettivo che si vuole raggiungere é la sola stabilitá del behavior, converrá quindi scegliere una matrice $K(\sigma)$ la cui sottomatrice $K_2(\sigma)$ non introduca dei modi troppo lenti; in particolare scegliendo come $K_2(\sigma)$ una matrice polinomiale la cui forma di *Hermite* abbia sulla diagonale polinomi i cui zeri abbiano modulo minore di σ_i, $i = 1 \cdots r$, si ha la certezza di non rallentare la dinamica del sistema in termini di convergenza asintotica a zero.

Nel caso in cui la matrice $H(\sigma)$ non sia in forma di *Smith* si puó considerare la relazione:

$$A(\sigma) = \begin{bmatrix} H(\sigma) \\ K(\sigma) \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} U(\sigma) & 0 \\ 0 & U_K(\sigma)^{-1} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \bar{\Gamma}(\sigma) & 0 \\ U_K(\sigma)K_1(\sigma) & K_{2,Herm}(\sigma) \end{bmatrix} V(\sigma)$$

dove $\bar{\Gamma}(\sigma)$ é una matrice diagonale e $K_{2,Herm}$ é triangolare superiore. Il behavior descritto come nucleo della matrice centrale, detta $A'(\sigma)$, é nella forma tipica del caso precedente pertanto gli si posssono applicare tutti i relativi ragionamenti, in particolare quelli sulla velocitá di convergenza asintotica. I due behavior $ker(A)$ e $ker(A')$ danno vita a due spazi di traiettorie tra loro isomorfi dal momento che differiscono per una trasformazione unimodulare, pertanto la velocitá di convergenza asintotica rimane la medesima.

Si vede quindi come, in entrambi i casi, gli effetti della matrice $K(\sigma)$ si possono vedere giá dalla scelta iniziale: se nella matrice $K_2(\sigma)$ viene inserito un polinomio invariante[7] avente uno zero a modulo superiore a quelli giá presenti in $H(\sigma)$ la dinamica complessiva risulterá rallentata, mentre in caso contrario (a patto di scegliere zeri in modulo sufficientemente inferiore al massimo giá presente al fine di ovviare agli errori di approssimazione introdotti) la dinamica complessiva del behavior non risulta influenzata (nel senso della velocitá di convergenza asintotica).

[7] Il prodotto dei polinomi invarianti di una matrice polinomiale é pari, a meno di una costante moltiplicativa, al suo determinante, che risulta anche il prodotto dei termini sulla diagonale della forma di *Hermite*.

Chapter 5

Cenni sull'osservabilitá dei sistemi behavior e sulla sintesi degli stimatori

In molte applicazioni di interesse pratico la traiettoria $w(t)$ di un behavior non sará interamente disponibile per motivi che possono spaziare dall'impossibilitá di misurare con precisione certe grandezze alla non accessibilitá di certi dati o agli errori di stima che affliggono il modello. Per questo motivo, quando possibile si deve cercare di ricavare il valore di queste grandezze basandosi sull'informazione contenuta nelle grandezze note a disposizione.

In genere si deve costruire un sistema, detto *stimatore*, che dalla conoscenza parziale dell'evoluzione di $w(t)$ riesca a ricavare la parte ignota, con un grado di precisione variabile a seconda dei casi. Si deve quindi progettare un sistema ingresso-uscita (in ambito behaviorale) che accetti come ingresso alcune componenti del vettore $\mathbf{w}$ e restituisca in uscita una stima, possibilmente esatta, della parte di traiettoria rimanente.

In questo capitolo si vuole esporre la teoria degli stimatori per sistemi behavior, riassumendone i risultati principali, per i cui dettagli si rimanda a [2, 3, 4].

5.1 Osservabilitá, Ricostruibilitá e Rivelabilitá

Si consideri un behavior $\mathcal{B} = Ker(H)$, $H(\sigma) \in \mathbb{R}^{r\times(q_2+q_1)}[\sigma]$, la cui traiettoria possa essere partizionata in due sotto-traiettorie, $w(t) = [w_1(t)\ w_2(t)]$, dove $w_1(t) \in \mathbb{R}^{q_1}$ é nota esattamente $\forall t$ mentre $w_2(t) \in \mathbb{R}^{q_2}$ é completamente sconosciuta. Le leggi che governano il behavior possono essere espresse tramite la relazione:

$$H_1(\sigma)w_1(t) = H_2(\sigma)w_2(t) \tag{5.1}$$

dove la matrice iniziale $H(\sigma)$ é stata coerentemente partizionata.

Definizione 5.1. *Con riferimento al behavior $\mathcal{B}$ nella forma (5.1) si dirá che $\boldsymbol{w}_2$ é:*

- *osservabile da $\boldsymbol{w}_1$ se $(w_1, w_2) \in \mathcal{B}$ e $(w_1, \bar{w}_2) \in \mathcal{B}$ implica*

$$w_2(t) = \bar{w}_2(t) \qquad \forall t;$$

- *ricostruibile da $\boldsymbol{w}_1$ se $(w_1, w_2) \in \mathcal{B}$ e $(w_1, \bar{w}_2) \in \mathcal{B}$ implica che*

$$\exists N_{w_2} \geq 0 : w_2(t) = \bar{w}_2(t) \qquad \forall t \geq N_{w_2};$$

- *rivelabile da $\boldsymbol{w}_1$ se $(w_1, w_2) \in \mathcal{B}$ e $(w_1, \bar{w}_2) \in \mathcal{B}$ implica*

$$\lim_{t \to 0} (w_2(t) - \bar{w}_2(t)) = 0.$$

Se le suddette proprietá valgono per ogni coppia $(w_1, w_2) \in \mathcal{B}$ allora il behavior intero viene detto osservabile/ricostruibile/rivelabile; si puó inoltre dimostrare che, nel caso di un behavior ricostruibile, esiste un indice N comune per cui la proprietá vale per ogni traiettoria. Vale ovviamente la catena di implicazioni *osservabile* $\Rightarrow$ *ricostruibile* $\Rightarrow$ *rivelabile*.

Esiste un importante teorema di caratterizzazione per behavior osservabili e rivelabili:

Teorema 5.1. *Si consideri il behavior $\mathcal{B}$ descritto da (5.1); esso é:*

- *osservabile se e solo se la matrice $H_2(\sigma)$ é prima a destra;*
- *ricostruibile se e solo se la matrice $H_2(\sigma)$ é monomia a destra;*
- *rivelabile se e solo se se la matrice $H_2(\sigma)$ ha rango di colonne pieno e il massimo comune divisore dei suoi minori di ordine massimo é un polinomio stabile; equivalentemente se e solo se la matrice $H_2(\lambda)$ ha rango colonne pieno $\forall \lambda \in \mathbb{C} \setminus \{\lambda : |\lambda| < 1\}$.*

Questi due concetti sono strettamente legati all'esistenza o meno di uno stimatore di w_2 e alle sue caratteristiche di convergenza; si vedrá infatti come a seconda di quali proprietá il behavior presenti si potranno ottenere diversi stimatori con diversi gradi di precisione.

5.2 Accettori e Stimatori

Si consideri un behavior $\mathcal{B}$ del tipo (5.1) dove w_1 sia completamente nota e w_2 sia la variabile da stimare. Uno stimatore di w_2 da w_1 é un sistema dinamico che, innanzitutto, deve accettare come ingresso una qualsiasi evoluzione di w_1 che derivi da un'effettiva traiettoria w di $\mathcal{B}$ e produrre in uscita una stima di w_2, detta $\hat{w}_2$. Questo significa, in altre parole, che lo stimatore non deve aggiungere ulteriori vincoli vincoli rispetto a quelli giá contenuti in $\mathcal{B}$.

Uno stimatore poi, se inizializzato correttamente, dovrebbe fornire una stima esatta della traiettoria w_2 per tutto l'arco temporale futuro. In altre parole, qualora siano note le condizioni iniziali[1] da imporre su w_2[2], lo stimatore deve produrre un'uscita $\hat{w}_2$ tale che $\hat{w}_2(t) = w_2(t)\ \forall t \geq 0$.

Qualora le condizioni iniziali non siano note una proprietá auspicabile per uno stimatore é che la stima $\hat{w}_2(t)$ quantomeno converga verso $w_2(t)$ al tendere di t a $+\infty$. Uno stimatore di questo tipo é detto *stimatore asintotico*. Uno stimatore per cui invece si abbia l'uguaglianza $\hat{w}_2(t) = w_2(t)\ \forall t \geq N$ per un indice N opportuno si dice *stimatore Dead-Beat*. Infine uno stimatore *Dead-Beat* per cui valga $N = 0$ si dice *stimatore esatto*; si noti che nel caso di uno stimatore esatto non ha nessuna influenza la conoscenza o meno delle condizioni iniziali su w_2, ovvero la stima coincide su tutto l'arco temporale anche nel caso in cui le condizioni iniziali siano errate.

Le nozioni appena discusse si possono formalizzare nella seguente definizione.

Definizione 5.2. *Si consideri un behavior $\mathcal{B}$ nella forma (5.1). Il sistema $\hat{\mathcal{B}}$ descritto da*

$$Q(\sigma)\hat{w}_2(t) = P(\sigma)w_1(t) \tag{5.2}$$

con $P(\sigma)$ e $Q(\sigma)$ matrici polinomiali di dimensioni opportune si dice essere:

- *un accettore di w_1 per $\mathcal{B}$ se, $\forall (w_1, w_2) \in \mathcal{B}$, $\exists \hat{w}_2 : (w_1, \hat{w}_2) \in \hat{\mathcal{B}}$;*

- *uno stimatore di w_2 da w_1 per $\mathcal{B}$ se ogniqualvolta $(w_1, w_2) \in \mathcal{B}$ e $(w_1, \hat{w}_2) \in \hat{\mathcal{B}}$ dove le condizioni iniziali su w_2 e $\hat{w}_2$ coincidono, si ha $w_2(t) = \hat{w}_2(t)\ \forall t \geq 0$;*

- *uno stimatore asintotico di w_2 da w_1 per $\mathcal{B}$ se $\forall\ (w_1, w_2) \in \mathcal{B}$ e $\forall$ $(w_1, \hat{w}_2) \in \hat{\mathcal{B}}$ si ha $lim_{t\to+\infty} w_2(t) - \hat{w}_2(t) = 0$;*

- *uno stimatore* dead-beat *di w_2 da w_1 per $\mathcal{B}$ se $\forall\ (w_1, w_2) \in \mathcal{B}$ e $\forall$ $(w_1, \hat{w}_2) \in \hat{\mathcal{B}}$ si ha $w_2(t) = \hat{w}_2(t)\ \forall t \geq N$ per un indice N opportuno (comune a tutte le traiettorie possibili);*

- *uno stimatore esatto di w_2 da w_1 per $\mathcal{B}$ se $\forall\ (w_1, w_2) \in \mathcal{B}$ e $\forall\ (w_1, \hat{w}_2) \in \hat{\mathcal{B}}$ si ha $w_2(t) = \hat{w}_2(t)\ \forall t \geq 0$.*

In seguito, se non diversamente specificato, ci si riferirá ad un accettore di w_1 con il solo termine *accettore* e ad uno stimatore di w_2 con il solo termine *stimatore*.

[1] Per condizioni iniziali, in un contesto behaviorale, si intendono i valori assunti dal vettore traiettoria $\mathbf{w}$ in un opportuno intervallo $[a, b]$ che contiene l'origine; gli estremi di questo intervallo dipendono dai gradi degli elementi della matrice $H(\sigma)$.

[2] La traiettoria w_1 é esattamente nota, pertanto lo sono anche le condizioni iniziali.

Per prima cosa si noti che ogni stimatore esatto é un particolare stimatore dead-bead ($N = 0$), che a sua volta é un particolare stimatore asintotico e via discorrendo per gli altri behavior sopra definiti.

In generale, dato un qualsiasi accettore descritto dalle equazioni (5.2), non si sará interessati al suo intero behavior $\hat{\mathcal{B}}$, ma solamente alle traiettorie generate in corrispondenza ad una sequenza w_1 che sia a sua volta generata da $\mathcal{B}$. Definendo $P_1(\mathcal{B}) := \{w_1 : \exists (w_1, w_2) \in \mathcal{B}\}$[3], l'insieme delle traiettorie dello stimatore a cui si é interessati sará quindi:

$$\left\{ (w_1, \hat{w}_2) \in \hat{\mathcal{B}} : w_1 \in P_1(\mathcal{B}) \right\}.$$

A questo punto appare scontato considerare equivalenti due accettori, in particolare due stimatori, $\hat{\mathcal{B}_1}$ e $\hat{\mathcal{B}_2}$ non quando $\hat{\mathcal{B}_1} = \hat{\mathcal{B}_2}$ ma quando

$$\left\{ (w_1, \hat{w}_2) \in \hat{\mathcal{B}_1} : w_1 \in P_1(\mathcal{B}) \right\} = \left\{ (w_1, \hat{w}_2) \in \hat{\mathcal{B}_2} : w_1 \in P_1(\mathcal{B}) \right\}.$$

Un altro behavior fondamentale nella teoria degli stimatori é quello che descrive l'andamento degli errori di stima:

$$\mathcal{B}_e = \left\{ e = w_2 - \hat{w}_2 \quad : \quad \exists w_1 : (w_1, w_2) \in \mathcal{B} \quad e \quad (w_1, \hat{w}_2) \in \hat{\mathcal{B}} \right\}.$$

Tutte le definizioni sugli stimatori si riflettono su proprietá che questo behavior deve avere:

- uno stimatore é asintotico se e solo se $\mathcal{B}_e$ é un behavior stabile;
- uno stimatore é dead-beat se e solo se $\mathcal{B}_e$ é un behavior consistente di sole traiettorie a supporto finito;
- uno stimatore é esatto se e solo se $\mathcal{B}_e$ é il behavior nullo.

5.3 Sintesi dello stimatore asintotico

In questa sezione si vedrá se e come é possibile costruire uno stimatore asintotico per un behavior $\mathcal{B}$ della forma (5.1).

Per prima cosa ci si deve preoccupare dell'esistenza di un accettore, ma questo non é mai un problema dal momento che almeno un accettore esiste sempre: $\mathcal{B}$ stesso é un accettore per $\mathcal{B}$. Per quanto riguarda l'esistenza di uno stimatore, e in particolare di uno stimatore asintotico, si hanno i seguenti teoremi:

Teorema 5.2. *Il behavior $\mathcal{B}$ ammette uno stimatore se e solo se la matrice $H_2(\sigma)$ ha rango di colonne pieno.*

[3] $P_1(\mathcal{B})$ di fatto é la proiezione di $\mathcal{B}$ sulle componenti w_1.

Teorema 5.3. *Il behavior $\mathcal{B}$ ammette uno stimatore asintotico se e solo se la matrice $H_2(\sigma)$ ha rango di colonne pieno e il massimo comune divisore dei minori di ordine massimo della matrice $H_2(\sigma)$ é un polinomio stabile; ovvero se $\mathcal{B}$ é un behavior rivelabile.*

La dimostrazione puó essere trovata in [2], ma se ne riporta una parte, relativa all'esplicita costruzione di uno stimatore.

Si assuma che $H_2(\sigma)$ abbia rango di colonna pieno; allora esiste una matrice unimodulare $U(\sigma)$[4] tale che

$$U(\sigma)H_2(\sigma) = \begin{bmatrix} D_2(\sigma) \\ 0 \end{bmatrix}$$

con $D_2(\sigma)$ quadrata e non singolare. Premoltiplicando l'intero behavior (5.1) per $U(\sigma)$ e partizionando coerentemente la matrice $U(\sigma)H_1(\sigma)$ come

$$U(\sigma)H_1(\sigma) = \begin{bmatrix} N_1(\sigma) \\ D_1(\sigma) \end{bmatrix}$$

si ottiene una descrizione equivalente di $\mathcal{B}$:

$$D_2(\sigma)w_2(t) = N_1(\sigma)w_1(t) \tag{5.3}$$

$$0 = D_1(\sigma)w_1(t). \tag{5.4}$$

Il behavior $\hat{\mathcal{B}} = \{(w_1, \hat{w}_2) : D_2(\sigma)\hat{w}_2(t) = N_1(\sigma)w_1(t)\}$ rappresenta uno stimatore, eventualmente asintotico, per $\mathcal{B}$. Inoltre $\mathcal{B}_e$ puó essere espresso come nucleo della matrice $D_2(\sigma)$ che nel caso di stimatori asintotici risulterá avere come determinante un polinomio stabile.

Nel caso in cui un behavior sia rivelabile si é quindi trovato un modo per ricavare uno stimatore asintotico. La questione adesso si estende a come trovare, se esistono, tutti gli altri stimatori. A tal fine serve premettere un lemma:

Lemma 5.1. *Se l'insieme di equazioni $Q(\sigma)\hat{w}_2(t) = P(\sigma)w_1(t)$ costituisce un accettore, in particolare uno stimatore, per il behavior $\mathcal{B}$, allora esiste un'accettore, in particolare uno stimatore, equivalente descritto da $\bar{Q}(\sigma)\hat{w}_2(t) = \bar{P}(\sigma)w_1(t)$ in cui la matrice $\bar{Q}(\sigma)$ ha rango di righe pieno.*

Anche in questo caso la dimostrazione si basa sulla premoltiplicazione per una matrice unimodulare $V(\sigma)$ che riduce $Q(\sigma)$ nella sua forma di *Hermite*; si ha allora:

$$V(\sigma)\begin{bmatrix} Q(\sigma) & -P(\sigma) \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \bar{Q}(\sigma) & -\bar{P}(\sigma) \\ 0 & -R(\sigma) \\ 0 & 0 \end{bmatrix}$$

[4] Ad esempio la matrice unimodulare che pone $H_2(\sigma)$ in forma di *Hermite*.

e la descrizione equivalente dell'accettore come:

$$\bar{Q}(\sigma)\hat{w}_2(t) = \bar{P}(\sigma)w_1(t) \tag{5.5}$$
$$0 = R(\sigma)w_1(t) \tag{5.6}$$

dove peró l'ultima equazione puó essere eliminata dal momento che, per definizione di accettore, per ogni sequenza $w_1 \in ker(D_1)$ deve esistere un'opportuna sequenza $\hat{w}_2$ tale che (5.5) e (5.6) risultano verificate, quindi deve valere l'inclusione $ker(D_1) \subseteq ker(R)$. L'equazione (5.6) risulta quindi sempre verificata in corrispondenza ad una sequenza $w_1 \in P_1(\mathcal{B})$.

Si é quindi verificato che non vi é perdita di generalitá nel considerare la matrice $Q(\sigma)$ di un accettore a rango di righe pieno; altresí non vi é perdita di generalitá nel considerare $D_1(\sigma)$ a rango di righe pieno d_1. A questo punto é possibile legare esplicitamente le matrici $Q(\sigma)$ e $P(\sigma)$ di un qualsiasi stimatore alle matrici $D_2(\sigma)$, $D_1(\sigma)$ e $N_1(\sigma)$ [2].

Teorema 5.4. *Si consideri un behavior descritto dalle equazioni*

$$D_2(\sigma)w_2(t) = N_1(\sigma)w_1(t)$$
$$0 = D_1(\sigma)w_1(t).$$

con $D_2(\sigma)$ quadrata, non singolare e con determinante stabile e $D_1(\sigma)$ a rango di righe pieno; siano poi $P(\sigma)$ e $Q(\sigma)$ due matrici polinomiali con $Q(\sigma)$ a rango di righe pieno. L'insieme di equazioni

$$Q(\sigma)\hat{w}_2(t) = P(\sigma)w_1(t)$$

descrive uno stimatore per $\mathcal{B}$ se e solo se esistono una matrice polinomiale $X(\sigma) \in \mathbb{R}^{q_2 \times d_1}[\sigma]$ e una matrice polinomiale quadrata non singolare $Y(\sigma) \in \mathbb{R}^{q_2 \times q_2}[\sigma]$ tali che

$$\begin{bmatrix} Q(\sigma) & P(\sigma) \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} Y(\sigma) & X(\sigma) \end{bmatrix} \begin{bmatrix} D_2(\sigma) & -N_1(\sigma) \\ 0 & -D_1(\sigma) \end{bmatrix}.$$

Inoltre se la matrice $Y(\sigma)$ ha come determinante un polinomio stabile lo stimatore é uno stimatore asintotico, e viceversa.

Infine il behavior $\mathcal{B}_e$ coincide con $ker(Q)$.

Le equazioni che descrivono uno stimatore risultano quindi essere del tipo

$$Y(\sigma)D_2(\sigma)\hat{w}_2(t) = [Y(\sigma)N_1(\sigma) + X(\sigma)D_1(\sigma)]w_1(t) \tag{5.7}$$

In questo modo é possibile fornire una completa parametrizzazione di tutti gli stimatori asintotici e non. Se si perde il vincolo del rango di righe pieno per $Q(\sigma)$ il teorema rimane comunque valido, ma si ricava un insieme piú vasto di rappresentazioni di uno stesso stimatore, dove la matrice che moltiplica $\hat{w}_2$ non ha necessariamente rango di righe pieno.

5.3.1 Stimatori asintotici causali

Il Teorema 5.4 fornisce una parametrizzazione di tutti gli stimatori di un behavior $\mathcal{B}$, tuttavia nulla é garantito riguardo la fisica realizzabilitá degli stimatori stessi. Il requisito fondamentale della causalitá tra w_1 e $\hat{w}_2$ non é infatti a priori garantito. Sará dunque necessario trovare, se esiste, uno stimatore per cui la matrice di trasferimento

$$\hat{W}(z) = [Y(z)D_2(z)]^{-1}[Y(z)N_1(z) + X(z)D_1(z)]$$

risulti propria o addirittura strettamente propria.

Si puó dimostrare [2] che se il behavior é autonomo (i.e. $D_1(\sigma)$ é una matrice quadrata non singolare) esiste sempre uno stimatore asintotico che ammette una matrice di trasferimento strettamente propria. Dato infatti uno stimatore del tipo (5.7) che non abbia una matrice di trasferimento strettamente propria si puó applicare l'algoritmo di divisione matriciale per righe e ottenere

$$Y(\sigma)N_1(\sigma) = A(\sigma)D_1(\sigma) + R(\sigma).$$

Ponendo $X(\sigma) = A(\sigma)$ si ottiene uno stimatore con matrice di trasferimento $\hat{W}(\sigma) = [Y(\sigma)D_2(\sigma)]^{-1}[Y(\sigma)N_1(\sigma)+A(\sigma)D_1(\sigma)] = [Y(\sigma)D_2(\sigma)]^{-1}R(\sigma)$ che si riesce facilmente a dimostrare essere strettamente propria.

Nel caso $\mathcal{B}$ non sia un behavior autonomo si ha il seguente teorema [2]

Teorema 5.5. *Si consideri un behavior $\mathcal{B}$ descritto dalle (5.3)-(5.4) che sia rivelabile e si denoti con $[H_{2hr}\ -H_{1hr}]$ la matrice dei coefficenti conduttori di riga [1] della matrice $[H_2(\sigma)\ -H_1(\sigma)]$. Allora si ha:*

1. *esiste uno stimatore asintotico con matrice di trasferimento propria se e solo se H_{2hr} ha rango di colonne pieno;*

2. *esiste uno stimatore asintotico con matrice di trasferimento strettamente propria se e solo se $\exists\ S$, matrice costante di dimensioni opportune, tale che $S[H_{2hr}\ -H_{1hr}] = [I\ 0]$*

Si puó poi dimostrare che se esiste uno stimatore con matrice di trasferimento propria, allora esiste anche uno stimatore asintotico con matrice di trasferimento strettamente propria.

5.4 Sintesi dello stimatore Dead-Beat

In questa sezione si vedrá invece se e come é possibile costruire uno stimatore dead-beat per un behavior $\mathcal{B}$ della forma (5.1). Inoltre si svilupperá in modo parallelo la sintesi uno stimatore esatto, che altro non é che uno stimatore dead-beat con $N = 0$, pertanto il *design* é simile. In questa sezione inoltre si allargherá la famiglia di behaviors considerata, includendo anche dei modelli in cui siano presenti anche degli ingressi sconosciuti $d(t)$ di cui peró non interessa stimare l'evoluzione (i.e. dei disturbi). Chiaramente si potrá poi adattare quanto esposto alla sintesi degli stimatori asintotici del capitolo precedente.

Si considera quindi un sistema $\mathcal{B}$ della forma

$$H_2(\sigma)w_2(t) = H_1(\sigma)w_1(t) + D(\sigma)d(t) \tag{5.8}$$

con, al solito, $H_2(\sigma) \in \mathbb{R}^{r\times q_2}[\sigma]$, $H_1(\sigma) \in \mathbb{R}^{r\times q_1}[\sigma]$ e $D(\sigma) \in \mathbb{R}^{r\times q_d}[\sigma]$. Come prima cosa conviene porre il sistema in una forma che renda facile studiare le proprietá di osservabilitá e ricostruibilitá. Tramite premoltiplicazione per una matrice unimodulare si puó infatti giungere alla forma

$$H_{22}(\sigma)w_2(t) = H_{21}(\sigma)w_1(t) + D_2(\sigma)d(t), \tag{5.9}$$
$$0 = H_{11}(\sigma)w_1(t) + D_1(\sigma)d(t), \tag{5.10}$$

con $H_{22}(\sigma)$ e $[H_{11}(\sigma)\ D_1(\sigma)]$ matrici a rango di righe pieno.

Con il sistema $\mathcal{B}$ nella forma (5.9)-(5.10) si puó fornire il seguente teorema di caratterrizzazione dei behavior ricostruibili ed osservabili [4], la cui definizione é analoga a quella data per sistemi senza disturbi.

Teorema 5.6. *Sia $\mathcal{B}$ un behavior descritto dalle (5.9)-(5.10). $\mathcal{B}$ é:*

- *ricostruibile se e solo se $H_{22}(\sigma)$ é una matrice polinomiale quadrata non singolare con determinante monomio (necessariamente diverso da zero) e $\exists\ T(\sigma) : ker(D_1) \subseteq ker(T \cdot D_2)$;*
- *osservabile se e solo se $H_{22}(\sigma)$ é una matrice polinomiale unimodulare e $ker(D_1) \subseteq ker(D_2)$:*

Si vede quindi come l'aver introdotto un disturbo aggiunge una condizione in piú sulle matrici polinomiali che descrivono il behavior.

Si puó ora cominciare l'analisi della procedura che porta al *design* di uno stimatore dead-beat. Per prima cosa si presenta un teorema di caratterizzazione dei behavior che ammettono un stimatore dead-beat:

Teorema 5.7. *Si consideri un behavior $\mathcal{B}$ descritto da*

$$H_2(\sigma)w_2(t) = H_1(\sigma) + D(\sigma)d(t) \tag{5.11}$$

e si denoti con $A_d(\sigma)$ un MLA di $D(\sigma)$. I seguenti fatti sono equivalenti:

1. *esiste uno stimatore dead-beat per $\mathcal{B}$;*
2. *$\mathcal{B}$ é ricostruibile;*
3. *$\Gamma(\sigma) = A_d(\sigma)H_2(\sigma)$ é una matrice monomia a destra;*

4. *$\exists N \in \mathbb{Z}_+$ e una matrice polinomiale $L(\sigma)$ tali che*

$$L(\sigma)\begin{bmatrix}H_2(\sigma) & -D(\sigma)\end{bmatrix} = \begin{bmatrix}\sigma^N I_{q_2} & 0\end{bmatrix} \tag{5.12}$$

É possibile trovare la dimostrazione completa in [3], ma anche in questo caso se ne riporta la parte relativa all'esplicita costruzione di uno stimatore dead-beat.

Si consideri la matrice $L(\sigma)$ soddisfacente la condizione (5.12) e si assuma $Q(\sigma) = L(\sigma)H_2(\sigma)$ e $P(\sigma) = L(\sigma)H_1(\sigma)$; il behavior $\hat{\mathcal{B}}$ descritto da $Q(\sigma)\hat{w}_2(t) = P(\sigma)w_1(t)$ costituisce uno stimatore dead-beat per $\mathcal{B}$. Infatti per ogni traiettoria $(w_2(t), w_1(t), d(t)) \in \mathcal{B}$, si ha, tramite premoltiplicazione per $L(\sigma)$ della (5.11)

$$\sigma^N w_2(t) - L(\sigma)H_1(\sigma)w_1(t) = 0. \tag{5.13}$$

Sostituendo $w_2(t)$ con $\hat{w}_2(t)$ si ha, per costruzione, un accettore; inoltre sottraendo tra loro le equazioni (5.13) dove una volta si consideri w_2 e l'altra $\hat{w}_2$ si trova $\sigma^N[w_2(t) - \hat{w}_2(t)] = 0$, ovvero $w_2(t) = \hat{w}_2(t)$ $\forall t \geq N$.

In modo analogo esiste il seguente teorema di caratterizzazione per behavior che ammettono uno stimatore esatto [3]:

Teorema 5.8. *Si consideri un behavior $\mathcal{B}$ descritto da*

$$H_2(\sigma)w_2(t) = H_1(\sigma) + D(\sigma)d(t) \tag{5.14}$$

e si denoti con $A_d(\sigma)$ un MLA di $D(\sigma)$. I seguenti fatti sono equivalenti:

1. *esiste uno stimatore esatto per $\mathcal{B}$;*

2. *$\mathcal{B}$ é osservabile;*

3. *$\Gamma(\sigma) = A_d(\sigma)H_2(\sigma)$ é una matrice prima a destra;*

4. *esiste una matrice polinomiale $L(\sigma)$ tale che*

$$L(\sigma)[H_2(\sigma)| - D(\sigma)] = [I_{q_2}|0] \tag{5.15}$$

I precedenti teoremi caratterizzano in modo esaustivo i behavior per i quali esiste uno stimatore dead-beat o esatto, e quindi ha senso studiare la procedura per costruirli. Pertanto d'ora in poi le condizioni del Teorema 5.7 saranno assunte come ipotesi.

Osservazione 5.1. *Si noti che:*

1. *Se non sono presenti disturbi (i.e. $D(\sigma) = 0$) si ha $A_d(\sigma) = I$ e l'esistenza di uno stimatore dead-beat [esatto] si riduce alla monomicitá [primalitá] a destra di $H_2(\sigma)$;*

2. *Se, al contrario, $D(\sigma)$ é a rango di righe pieno $A_d(\sigma)$ non é definito, quindi la terza condizione del teorema (5.7) non puó essere soddisfatta; pertanto non esiste alcun stimatore dead-beat per il behavior $\mathcal{B}$ (quindi non esiste nemmeno uno stimatore esatto).*

Nel caso in cui un behavior sia ricostruibile [osservabile] si é quindi trovato un modo per ricavare uno stimatore dead-beat [esatto]. La questione, anche in questo caso, adesso si estende a come trovare, se esistono, tutti gli altri stimatori dead-beat [esatti]. A tal fine serve premettere un lemma [3]:

Lemma 5.2. *Se l'insieme di equazioni $Q(\sigma)\hat{w}_2(t) = P(\sigma)w_1(t)$ costituisce uno stimatore dead-beat [esatto], per il behavior $\mathcal{B}$, allora esiste uno stimatore dead-beat [esatto] equivalente descritto da $\bar{Q}(\sigma)\hat{w}_2(t) = \bar{P}(\sigma)w_1(t)$ in cui la matrice $\bar{Q}(\sigma)$ é quadrata e monomia [unimodulare].*

La costruzione esplicita della matrice $\bar{Q}(\sigma)$ puó essere trovata in [3] ed é analoga a quella portata a termine nel caso di stimatori asintotici.

Grazie a questo lemma, quindi, si puó assumere senza perdita di generalitá che la matrice $Q(\sigma)$ che concorre alla descrizione di uno stimatore dead-beat [esatto] sia quadrata e monomia [unimodulare]. Conviene ora, al fine di giungere ad una completa parametrizzazione di tutti gli stimatori dead-beat [esatti] elaborare ulteriormente le equazioni che descrivono il behavior $\mathcal{B}$. Si assuma innanzitutto che la matrice $[H_2(\sigma)\ -H_1(\sigma)\ -D(\sigma)]$ sia a rango di righe pieno r. Se $\mathcal{B}$ soddifa una qualunque delle condizioni (equivalenti) del Teorema 5.7[5] é possibile trovare una matrice $S(\sigma)$ tale che

$$U(\sigma) = \begin{bmatrix} S(\sigma) \\ A_d(\sigma) \end{bmatrix}$$

é unimodulare; premoltiplicando le equazioni che descrivono $\mathcal{B}$ per tale matrice si giunge alla rappresentazione equivalente:

$$\begin{bmatrix} S(\sigma)H_2(\sigma) \\ \Gamma(\sigma) \end{bmatrix} w_2(t) = \begin{bmatrix} S(\sigma)H_1(\sigma) \\ \Phi(\sigma) \end{bmatrix} w_1(t) + \begin{bmatrix} S(\sigma)D(\sigma) \\ 0 \end{bmatrix} d(t), \qquad (5.16)$$

dove $\Gamma(\sigma) = A_d(\sigma)H_2(\sigma)$, $\Phi(\sigma) = A_d(\sigma)H_1(\sigma)$ e $S(\sigma)D(\sigma)$ é a rango di righe pieno. Si consideri ora una matrice unimodulare $V(\sigma)$ tale che

$$V(\sigma)\Gamma(\sigma) = \begin{bmatrix} \Delta(\sigma) \\ 0 \end{bmatrix}$$

con $\Delta(\sigma)$ quadrata e monomia [unimodulare] e si partizioni coerentemente la matrice $V(\sigma)\Phi(\sigma)$ come

$$V(\sigma)\Phi(\sigma) = \begin{bmatrix} L_1(\sigma) \\ L_0(\sigma) \end{bmatrix}.$$

[5] Si noti che un behavior $\mathcal{B}$ per cui esiste uno stimatore esatto soddisfa, a maggior ragione, anche tali condizioni.

Si ottiene quindi la descrizione equivalente di $\mathcal{B}$ come:

$$\begin{bmatrix} S(\sigma)H_2(\sigma) \\ \Delta(\sigma) \\ 0 \end{bmatrix} w_2(t) = \begin{bmatrix} S(\sigma)H_1(\sigma) \\ L_1(\sigma) \\ L_0(\sigma) \end{bmatrix} w_1(t) + \begin{bmatrix} S(\sigma)D(\sigma) \\ 0 \\ 0 \end{bmatrix} d(t). \quad (5.17)$$

Da tale descrizione é immediato ricavare la proiezione di $\mathcal{B}$ sulle componenti w_2 e w_1:

$$P_{1,2}\mathcal{B} = \{(w_2, w_1) : \exists d : (w_2, w_1, d) \in \mathcal{B}\} = ker(\begin{bmatrix} \Gamma & -\Phi \end{bmatrix}) = ker(Z)$$

dove

$$Z(\sigma) = \begin{bmatrix} \Delta(\sigma) & -L_1(\sigma) \\ 0 & -L_2(\sigma) \end{bmatrix}.$$

Si noti che entrambe le matrici $[\Gamma(\sigma)| - \Phi(\sigma)]$ e $Z(\sigma)$ sono, data l'assunzione sul rango di $[H_2(\sigma)| - H_1(\sigma)| - D(\sigma)]$, a rango di righe pieno.

Si puó ora dare il seguente teorema di parametrizzazione di tutti gli stimatori dead-beat [esatti] [4].

Teorema 5.9. *Sia $\mathcal{B}$ un behavior descritto dalle (5.17) con $S(\sigma)D(\sigma)$ a rango di righe pieno e $\Delta(\sigma)$ quadrata e monomia [unimodulare]. Se $Q(\sigma)$ e $P(\sigma)$ sono matrici polinomiali con $Q(\sigma)$ quadrata non singolare monomia [unimodulare], allora $Q(\sigma)\hat{w}_2(t) = P(\sigma)w_1(t)$ descrive uno stimatore dead-beat [esatto] per $\mathcal{B}$ se e solo se esistono due matrici polinomiali $Y(\sigma)$ e $X(\sigma)$ con $Y(\sigma)$ monomia [unimodulare] tali che*

$$\begin{bmatrix} Q(\sigma) & -P(\sigma) \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} Y(\sigma) & X(\sigma) \end{bmatrix} Z(\sigma). \quad (5.18)$$

Si é quindi giunti ad una completa caratterizzazione della famiglia degli stimatori dead-beat [esatti] per il behavior $\mathcal{B}$.Anche in questo caso perdendo il vincolo della monomicitá [unimodularitá] di $Q(\sigma)$ si giunge alla caratterizzazione di una famiglia piú vasta, al cui interno esistono stimatori dead-beat [esatti] tra loro equivalenti.

Osservazione 5.2. *Esiste una parametrizzazione equivalente, che si basa sulla descrizione (5.16) del behavior: la coppia polinomiale $(Q(\sigma), P(\sigma))$ con $Q(\sigma)$ quadrata, invertibile e con determinante stabile descrive uno stimatore dead-beat se e solo se*

$$\begin{bmatrix} Q(\sigma) & -P(\sigma) \end{bmatrix} = Y(\sigma, \sigma^{-1}) \begin{bmatrix} \Gamma(\sigma) & -\Phi(\sigma) \end{bmatrix} \quad (5.19)$$

con $Y(\sigma, \sigma^{-1})$ polinomiale di Laurent[6] *tale che $Y(\sigma, \sigma^{-1})\Gamma(\sigma)$ é polinomiale quadrata e monomia mentre $Y(\sigma, \sigma^{-1})\Phi(\sigma)$ é polinomiale.*

[6] Ovvero in cui é consentita la presenza di termini in σ^{-1}.

5.4.1 Stimatori dead-beat causali

Il Teorema 5.9 fornisce una parametrizzazione di tutti gli stimatori dead-beat [esatti] di un behavior $\mathcal{B}$, tuttavia nulla é garantito riguardo la fisica realizzabilitá degli stimatori stessi. Il requisito fondamentale della causalitá tra w_1 e $\hat{w}_2$ non é infatti a priori garantito. Sará dunque necessario trovare, se esiste, uno stimatore per cui la matrice di trasferimento

$$\hat{W}(z) = Q^{-1}(z)P(z)$$

risulti propria o addirittura strettamente propria, ovvero (essendo un sistema a risposta impulsiva finita, FIR) la matrice $\hat{W}(z)$ risulti polinomiale in z^{-1}.

La matrice di trasferimento $\hat{W}(z)$ puó essere espressa in vari modi, in funzione della descrizione utilizzata per il behavior $\mathcal{B}$. Una forma utile al fine di indagare il requisito della causalitá é:

$$\hat{W}(z) = [Y(z)\Gamma(z)]^{-1}[Y(z)\Phi(z)] \tag{5.20}$$

con $Y(\sigma)$ matrice polinomiale tale che $Y(\sigma)\Gamma(\sigma)$ sia quadrata e monomia. Come si giunga a tale forma puó essere trovato in [3].

Infatti, assumendo la descrizione di $\mathcal{B}$

$$\begin{bmatrix} S(\sigma)H_2(\sigma) \\ \Gamma(\sigma) \end{bmatrix} w_2(t) = \begin{bmatrix} S(\sigma)H_1(\sigma) \\ \Phi(\sigma) \end{bmatrix} w_1(t) + \begin{bmatrix} S(\sigma)D(\sigma) \\ 0 \end{bmatrix} d(t) \tag{5.21}$$

la proiezione di $\mathcal{B}$ stesso sulle componenti w_2 e w_1 é descritta da

$$\Gamma(\sigma)w_2(t) = \Phi(\sigma)w_1(t) \tag{5.22}$$

e quindi la parametrizzazione degli stimatori dead-beat espressa dalla (5.20) risulta immediata ed ottimale. Si ha infatti il seguente teorema [2, 3]:

Teorema 5.10. *Si consideri un behavior $\mathcal{B}$ descritto dalle (5.21) che sia ricostruibile [osservabile]. Si supponga, senza perdita di generalitá, che la matrice $[\Gamma(\sigma)\ -\Phi(\sigma)]$ sia ridotta per righe e si denoti con $[\Gamma_{hr}\ \Phi_{hr}]$ la matrice costante dei coefficienti conduttori, che risulta avere rango di righe pieno. Condizione necessaria e sufficiente affinché la matrice $\hat{W}(z)$ sia polinomilale in z^{-1} é che Γ_{hr} abbia rango di colonne pieno.*

Chapter 6

Applicazione ai modelli in spazio di stato

In questo capitolo conclusivo si vogliono applicare i risultati fin qui ottenuti nell'ambito behaviorale ai sistemi in spazio di stato. Un sistema $\Sigma = (F, G, H, J)$ in spazio di stato si sa essere descritto in ambito behaviorale da

$$H(\sigma)w(t) = \begin{bmatrix} \sigma I - F & -G & 0 \\ H & J & -I \end{bmatrix} \begin{bmatrix} x(t) \\ u(t) \\ y(t) \end{bmatrix} = 0. \tag{6.1}$$

La matrice $H(\sigma)$ ha chiaramente rango di righe pieno, pari a $n + p$, somma della dimensione dei vettori di stato e di uscita, pertanto si ha giá una rappresentazione che non puó essere ulteriormente semplificata.

Conviene fin da ora osservare che la sottomatrice $H_{ux}(\sigma) = [\sigma I - F \quad -G]$ della (6.1) coincide con la matrice del test PBH di raggiungibilitá[1]. É ben noto che la coppia (F, G) é raggiungibile se e solo se $H_{ux}(\alpha)$ non cala di rango $\forall \alpha \in \mathbb{C}$, condizione e quivalente alla primalitá a sinistra; nel caso di sistemi raggiungibili, dunque, la matrice $H_{ux}(\sigma)$ sará prima a sinistra. Per dualitá si avrá ovviamente che il sistema é osservabile se e solo se la matrice

$$\begin{bmatrix} \sigma I - F \\ H \end{bmatrix}$$

é prima a destra.

Si puó poi dimostrare [1] che il sistema é controllabile se e solo se la matrice $[I - \sigma F | - \sigma G]$ é prima a sinistra. Per dualitá quindi si ha che é ricostruibile se e solo se la matrice

$$\begin{bmatrix} I - \sigma F \\ \sigma H \end{bmatrix}$$

é prima a destra.

[1] A meno del segno di G, ma questo corrisponde a considerare $-u(t)$ come ingresso invece di $u(t)$; ció non altera la raggiungibilitá di un qualsiasi sistema lineare.

6.1 Stabilitá asintotica e sintesi del controllore stabilizzante

Il concetto di stabilitá asintotica nell'ambito dei sistemi in spazio di stato si puó riassumere dicendo che un sistema é stabile se e solo se le evoluzioni libere dello stato tendono a zero al tendere di t a $+\infty$ a partire da qualsivoglia condizione iniziale. Un modello in spazio di stato risulta asintoticamente stabile se e solo se la matrice F ha unicamente autovalori a modulo inferiore all'unitá.

Nel contesto behaviorale l'evoluzione libera dello stato é descritta come

$$[\sigma I - F]x(t) = 0, \tag{6.2}$$

e la definizione di stabilitá chiede che qualsiasi traiettoria compatibile con la (6.2) tenda a zero asintoticamente. Il teorema di caratterizzazione dei behavior stabili afferma che affinché tale behavior sia stabile occorre e basta che la matrice $(\sigma I - F)$ sia quadrata non singolare e che il suo determinante sia un polinomio stabile. Dal momento che le radici di $det(\sigma I - F)$ sono esattamente gli autovalori di F si ritrova la classica definizione di stabilitá asintotica (come d'altronde giá osservato nel capitolo dedicato alla stabilitá dei behavior).

Se un sistema Σ non é stabile, la teoria classica del controllo propone un controllo in retroazione dallo stato al fine, se possibile, di stabilizzarlo. Bisogna a tal fine considerare il sistema ingresso-stato, descritto in ambito behaviorale da:

$$\begin{bmatrix} \sigma I - F & -G \end{bmatrix} \begin{bmatrix} x(t) \\ u(t) \end{bmatrix} = 0. \tag{6.3}$$

Tale sistema é stabilizzabile se e solo se gli autovalori di F che non sono allocabili tramite retroazione dallo stato (i.e. gli autovalori non raggiungibili del sistema) hanno modulo inferiore all'unitá. Non é difficile dimostrare che questa condizione coincide con la definizione di stabilizzabilitá data in ambito behaviorale: per ogni $\alpha \in \mathbb{C}$ che non sia un autovalore di F la matrice $H_{ux}(\alpha)$ ha rango di righe pieno; pertanto la condizione di stabilizzabilitá puó essere violata solo se α appartiene allo spettro di F, Λ_F. Sia quindi $\alpha \in \Lambda_F$; se α é un autovalore raggiungibile non é difficile dimostrare, utilizzando la *forma di Jordan*, che la corrispondente riga (o le corrispondenti righe) nella matrice G non sono nulle e mantengono la condizione di rango pieno per la matrice $H_{ux}(\alpha)$. Se α invece non é raggiungibile la matrice cala necessariamente di rango; a questo punto deve succedere che $|\alpha| < 1$ per mantenere la stabilizzabilitá, dal momento che tali sono gli unici valori in corrispondenza ai quali si puó avere un calo di rango. Le due definizioni, pertanto, coincidono.

I controllori della forma $u(t) = Kx(t)$ che stabilizzano il sistema, ovvero che rendono la matrice $(F + GK)$ con autovalori unicamente a modulo inferiore all'unitá, si possono ritrovare in ambito behaviorale come particolari matrici $K(\sigma)$ costanti. Infatti aggiungendo alle equazioni del behavior (6.3) gli ulteriori vincoli:

$$[K| - I]\begin{bmatrix} x(t) \\ u(t) \end{bmatrix} = 0$$

si trova il behavior complessivo

$$\begin{bmatrix} \sigma I - F & -G \\ K & -I \end{bmatrix}\begin{bmatrix} x(t) \\ u(t) \end{bmatrix} = 0. \tag{6.4}$$

La matrice polinomiale che lo caratterizza é quadrata e invertibile, pertanto il behavior é autonomo. Concentrandosi unicamente sull'evoluzione di $x(t)$ si trova

$$\begin{bmatrix} \sigma I - F \\ K \end{bmatrix} x(t) = \begin{bmatrix} G \\ I \end{bmatrix} u(t). \tag{6.5}$$

Se si premoltiplica la (6.5) per la matrice unimodulare

$$U(\sigma) = \begin{bmatrix} 0 & I \\ I & -G \end{bmatrix}$$

si ottiene la descrizione equivalente

$$\begin{bmatrix} K \\ \sigma I - (F + GK) \end{bmatrix} x(t) = \begin{bmatrix} I \\ 0 \end{bmatrix} u(t).$$

Per quanto esposto al capitolo 3 le prime righe, che esprimono esattamente il vincolo $u(t) = Kx(t)$, possono essere rimosse qualora l'obiettivo sia quello di studiare unicamente l'evoluzione di $x(t)$. Allora l'evoluzione del solo stato é espressa dalla classsica $[\sigma I - (F + GK)]x(t) = 0$ che é esattamente quanto si arrivava ad ottenere nell'ambito dei modelli in spazio di stato: la matrice caratteristica della dinamica del sistema passa da F a $F + GK$, matrice di stato del sistema retroazionato. Si ha quindi il behavior complessivo equivalente:

$$\begin{bmatrix} \sigma I - (F + GK) & 0 \\ K & -I \end{bmatrix}\begin{bmatrix} x(t) \\ u(t) \end{bmatrix} = 0 \tag{6.6}$$

caratterizzato da una matrice quadrata invertibile che ha per determinante un polinomio stabile, pari a $\pm det(\sigma I - (F + GK))$.

Dal momento che, come si é appena visto, i controllori stabilizzanti del tipo $u(t) = Kx(t)$ si possono scrivere anche come particolari matrici $K(\sigma)$ costanti da applicare al behavior, essi devono rispettare la condizione esposta nel Teorema 4.3, ovvero:

$$\begin{bmatrix} K & -I \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} K_1(\sigma) & K_2(\sigma) \end{bmatrix} V(\sigma),$$

con $V(\sigma)$ matrice unimodulare che, assieme ad un'opportuna $U(\sigma)$, pone in forma di *Smith* $H_{ux}(\sigma)$ e $K_2(\sigma)$ quadrata, invertibile e con determinante stabile.

Per far vedere ció conviene prima costruire esplicitamente la forma di *Smith* della matrice $H_{ux}(\sigma) = U(\sigma)\Gamma(\sigma)V(\sigma)$.

Se il sistema é completamente raggiungibile la matrice $H_{ux}(\sigma)$ risulta prima a sinistra e quindi la sua forma di *Smith* si sa essere del tipo $[I\ 0]$.

Sia quindi (F, G) una coppia non completamente raggiungibile, che non é restrittivo supporre in forma standard di raggiungibilitá. La matrice $H_{ux}(\sigma)$ risulta quindi nella forma

$$H_{ux}(\sigma) = \begin{bmatrix} \sigma I - F_{11} & -F_{12} & -G_1 \\ 0 & \sigma I - F_{22} & 0 \end{bmatrix}$$

dove (F_{11}, G_1) é una coppia raggiungibile e contiene tutti e soli gli autovalori raggiungibili del sistema di partenza mentre F_{22} é la matrice caratteristica del sottosistema non raggiungibile, i cui autovalori sono gli autovalori non raggiungibili dell'intero sistema.

Con uno scambio di colonne (equivalente alla postmoltiplicazione per una matrice di permutazione Π_1, che risulta unimodulare) si puó giungere alla forma

$$H_1(\sigma) = H_{ux}(\sigma)\Pi_1 = \begin{bmatrix} \sigma I - F_{11} & -G_1 & -F_{12} \\ 0 & 0 & \sigma I - F_{22} \end{bmatrix}.$$

Come giá osservato la coppia (F_{11}, G_1) é raggiungibile, quindi la matrice $[\sigma I - F_{11} \quad - G_1]$ é prima a sinistra ed ammette un'inversa destra $R(\sigma)$ che puó essere partizionata nel seguente modo, coerente con la partizione di $[\sigma I - F_{11} \quad - G_1]$:

$$R(\sigma) = \begin{bmatrix} R_1(\sigma) \\ R_2(\sigma) \end{bmatrix}$$

Si puó ora postmoltiplicare la matrice $H_1(\sigma)$ per una unimodulare che contenga $R(\sigma)$ al fine di ricondursi ad un caso diagonale a blocchi:

$$\begin{aligned} H_2(\sigma) = H_1(\sigma)\bar{R}(\sigma) &= \begin{bmatrix} \sigma I - F_{11} & -G_1 & -F_{12} \\ 0 & 0 & \sigma I - F_{22} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} I & 0 & R_1(\sigma)F_{12} \\ 0 & I & R_2(\sigma)F_{12} \\ 0 & 0 & I \end{bmatrix} \\ &= \begin{bmatrix} \sigma I - F_{11} & -G_1 & 0 \\ 0 & 0 & \sigma I - F_{22} \end{bmatrix}. \end{aligned}$$

In questo modo si possono considerare separatamente le forme di *Smith* dei due blocchi non nulli. La forma di *Smith* del primo blocco é del tipo $[I\ 0]$, dal momento che la coppia (F_{11}, G_1) é raggiungibile, pertanto si ha $[\sigma I - F_{11}| - G_1] = U_1(\sigma)[I\ 0]V_1(\sigma)$. La forma di *Smith* del secondo blocco invece é una matrice diagonale i cui elementi non nulli sono i polinomi invarianti di F_{22}, piú eventualmente degli elementi unitari: $[\sigma I - F_{22}] = U_2(\sigma)\Gamma_2(\sigma)V_2(\sigma)$. Si puó quindi scrivere:

$$H_2(\sigma) = \begin{bmatrix} U_1(\sigma) & 0 \\ 0 & U_2(\sigma) \end{bmatrix} \begin{bmatrix} I & 0 & 0 \\ 0 & 0 & \Gamma_2(\sigma) \end{bmatrix} \begin{bmatrix} V_1(\sigma) & 0 \\ 0 & V_2(\sigma) \end{bmatrix}.$$

Permutando nuovamente gli elementi della matrice centrale si arriva a scrivere

$$H_2(\sigma) = \begin{bmatrix} U_1(\sigma) & 0 \\ 0 & U_2(\sigma) \end{bmatrix} \begin{bmatrix} I & 0 & 0 \\ 0 & \Gamma_2(\sigma) & 0 \end{bmatrix} \Pi_2 \begin{bmatrix} V_1(\sigma) & 0 \\ 0 & V_2(\sigma) \end{bmatrix}.$$

dove questa volta, tra le due matrici unimodulari, si ha la forma di *Smith* di $H_2(\sigma)$. Si ha quindi

$$\begin{aligned} H_1(\sigma) &= H_2(\sigma)\bar{R}(\sigma)^{-1} = \\ &= \begin{bmatrix} U_1(\sigma) & 0 \\ 0 & U_2(\sigma) \end{bmatrix} \begin{bmatrix} I & 0 & 0 \\ 0 & \Gamma_2(\sigma) & 0 \end{bmatrix} \Pi_2 \begin{bmatrix} V_1(\sigma) & 0 \\ 0 & V_2(\sigma) \end{bmatrix} \times \\ &\times \begin{bmatrix} I & 0 & -R_1(\sigma)F_{12} \\ 0 & I & -R_2(\sigma)F_{12} \\ 0 & 0 & I \end{bmatrix} \end{aligned}$$

da cui[2]:

$$\begin{aligned} H_{ux}(\sigma) &= H_1(\sigma)\Pi_1 = U(\sigma)\Gamma(\sigma)V(\sigma) \\ &= \begin{bmatrix} U_1(\sigma) & 0 \\ 0 & U_2(\sigma) \end{bmatrix} \begin{bmatrix} I & 0 & 0 \\ 0 & \Gamma_2(\sigma) & 0 \end{bmatrix} \Pi_2 \begin{bmatrix} V_1(\sigma) & 0 \\ 0 & V_2(\sigma) \end{bmatrix} \times \\ &\times \begin{bmatrix} I & 0 & -R_1(\sigma)F_{12} \\ 0 & I & -R_2(\sigma)F_{12} \\ 0 & 0 & I \end{bmatrix} \Pi_1 \end{aligned}$$

Questa é quindi la forma di *Smith* della matrice $H_{ux}(\sigma)$. Si noti che i polinomi invarianti non unitari sono costituiti dagli autovalori non raggiungibili della coppia (F, G), come era facilmente intuibile; utilizzando una procedura di stabilizzazione tramite matrice $K(\sigma)$ questi polinomi non si possono eliminare, ma resteranno ad influenzare la dinamica del sistema.

La costruzione esplicita della forma di *Smith* della matrice $H_{ux}(\sigma)$ é utile per mettere in relazione la definizione di stabilizzabilitá in senso classico e quella in ambito behaviorale. Un sistema in spazio di stato é stabilizzabile se esiste un controllo in retroazione dallo stato $u(t) = Kx(t)$ che rende asintoticamente stabile il sistema retroazionato; é ben noto che tale definizione é equivalente al fatto che la coppia (F, G) ammetta autovalori non raggiungibili unicamente a modulo inferiore all'unitá. La definizione data in ambito behaviorale nel capitolo dedicato alla stabilitá si é dimostrato essere equivalente al fatto che la matrice $H_{ux}(\alpha)$ non cali di rango $\forall\alpha \in \mathbb{C} : |\alpha| \geq 1$; ma $H_{ux}(\alpha)$ cala di rango se e solo se cala di rango la sua forma di *Smith*, che per quanto esposto durante la sua esplicita costruzione puó calare di

[2] Il primo passaggio deriva dal fatto che l'inversa di una matrice di permutazione Π é Π stessa.

rango solo in corrispondenza agli autovalori non raggiungibili della coppia (F, G). Essi pertanto devono essere necessariamente a modulo minore di uno, dimostrando cosí l'equivalenza delle due definizioni.

Ora é possibile passare alla verifica diretta che i controllori stabilizzanti del tipo $u(t) = Kx(t)$ soddisfano le condizioni del Teorema 4.3. Innanzitutto é necessario supporre la stabilizzabilitá della coppia (F, G), altrimenti non c'é speranza che esistano controllori stabilizzanti. La forma di *Smith* della matrice $H_{ux}(\sigma)$, pertanto, avrá come elementi non nulli unicamente polinomi stabili.

Si consideri ora la matrice caratteristica del behavior retroazionato:

$$\begin{bmatrix} \sigma I - F & -G \\ K & -I \end{bmatrix}$$

e la si pre e post-moltplichi per due le matrici unimodulari

$$\begin{bmatrix} U(\sigma)^{-1} & 0 \\ 0 & I \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \sigma I - F & -G \\ K & -I \end{bmatrix} V(\sigma)^{-1} \tag{6.7}$$

dove $U(\sigma)$ e $V(\sigma)$ sono le consuete matrici unimodulari della forma di *Smith* di $H_{ux}(\sigma)$. Sviluppando i calcoli si trova che la (6.7) é uguale a

$$\begin{bmatrix} U(\sigma)^{-1} H_{ux}(\sigma) V(\sigma)^{-1} \\ K(\sigma) \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \bar{\Gamma}(\sigma) & 0 \\ K_1(\sigma) & K_2(\sigma) \end{bmatrix} \tag{6.8}$$

dove $\Gamma(\sigma)$ é una matrice diagonale i cui elementi non nulli sono polinomi stabili (data l'ipotesi di stabilizzabilitá) e inoltre vale la relazione matriciale $[K_1(\sigma)\ K_2(\sigma)] = [K\ -I]V(\sigma)^{-1}$, da cui la $[K\ -I] = [K_1(\sigma)\ K_2(\sigma)]$ del Teorema 4.3.

Si passi ora ai determinanti nella (6.8) e tenendo conto della (6.7) si trova

$$c_1 \cdot det\left(\begin{bmatrix} \sigma I - F & -G \\ K & -I \end{bmatrix}\right) \cdot c_2 = det(\bar{\Gamma}(\sigma)) \cdot det(K_2(\sigma));$$

dalla (6.6) si trova inoltre che:

$$\begin{aligned} det\left(\begin{bmatrix} \sigma I - F & -G \\ K & -I \end{bmatrix}\right) &= c \cdot det\left(\begin{bmatrix} \sigma I - (F + GK) & 0 \\ K & -I \end{bmatrix}\right) \\ &= \pm c \cdot det(\sigma I - (F + GK)) \end{aligned}$$

che é un polinomio stabile per ipotesi. Ma allora, dal momento che l'anello dei polinomi stabili é chiuso rispetto alla moltiplicazione, si ha che anche $det(K_2(\sigma))$ é un polinomio stabile. Ecco quindi che si é dimostrato come i controllori del tipo $u(t) = Kx(t)$ siano ricavabili come casi particolari di quelli espressi dal Teorema 4.3.

Evidentemente poi esistono molti altri controllori stabilizzanti, che esprimono l'ingresso $u(t)$ come combinazione lineare dello stato $x(t)$ in istanti di tempo diversi, che a priori possono essere anche successivi al tempo corrente $\bar{t}$ dal momento che non é stata fatta nessuna assunzione di causalitá per il controllore.

6.1.1 Sintesi del controllore in ambito behaviorale

In questa sezione l'obiettivo é la costruzione esplicita di un controllore stabilizzante $K(\sigma)$ per sistemi in spazio di stato, pertanto la stabilizzabilitá della coppia (F, G) é assunta come ipotesi.

É possibile legare la parametrizzazione del Teorema 4.3 ad un risultato giá noto come *parametrizzazione Youla-Kucera*:

Teorema 6.1. *[Parametrizzazione Youla-Kucera]*
Sia dato un sistema lineare caratterizzato dalla matrice di trasferimento $P(\sigma) = M(\sigma)^{-1}N(\sigma)$ *espressa come frazione polinomiale matriciale sinistra irriducibile:*

$$y(t) = M(\sigma)^{-1}N(\sigma)u(t);$$

sia $K_0(\sigma) = X(\sigma)^{-1}Y(\sigma)$ *un particolare controllore che stabilizza il sistema tramite la legge* $u(t) = K(\sigma)y(t)$ *(anch'esso espresso mediante una rappresentazione irriducibile). Tutti e soli i controllori stabilizzanti di questo tipo per* $P(\sigma)$ *sono della forma*

$$K(\sigma) = (X(\sigma) + Q(\sigma)N(\sigma))^{-1}(Y(\sigma) + Q(\sigma)M(\sigma))$$

con $Q(\sigma)$ *un'arbitraria matrice razionale i cui elementi siano funzioni razionali stabili.*

Chiaramente le due parametrizzazioni, essendo caratterizzazioni complete, devono coincidere. Ovviamente si deve adattare il Teorema 6.1 al caso ingresso-stato: si avrá $P(\sigma) = [\sigma I - F]^{-1}G$ che peró non é necessariamente una rappresentazione coprima (lo é solo nel caso di sistema completamente raggiungibile). Per ottenere una rappresentzione irriducibile si consideri, senza perdita di generalitá, il sistema posto in forma standard di raggiungibilitá percui la matrice di trasferimento avrá la forma:

$$P(\sigma) = \begin{bmatrix} \sigma I - F_{11} & -F_{12} \\ 0 & \sigma I - F_{22} \end{bmatrix}^{-1} \begin{bmatrix} G_1 \\ 0 \end{bmatrix}.$$

Si considerino ora i seguenti passaggi:

$$\begin{aligned} P(\sigma) &= \begin{bmatrix} (\sigma I - F_{11})^{-1} & (\sigma I - F_{11})^{-1}F_{12}(\sigma I - F_{22})^{-1} \\ 0 & (\sigma I - F_{22})^{-1} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} G_1 \\ 0 \end{bmatrix} \\ &= \begin{bmatrix} (\sigma I - F_{11})^{-1}G_1 \\ 0 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} (\sigma I - F_{11})^{-1} & 0 \\ 0 & I \end{bmatrix} \begin{bmatrix} G_1 \\ 0 \end{bmatrix}, \end{aligned}$$

e quindi

$$P(\sigma) = \begin{bmatrix} \sigma I - F_{11} & 0 \\ 0 & I \end{bmatrix}^{-1} \begin{bmatrix} G_1 \\ 0 \end{bmatrix} \tag{6.9}$$

Dal momento che la coppia (F_{11}, G_1) é raggiungibile, la (6.9) é espressa tramite due matrici tra loro coprime, pertanto la rappresentazione ottenuta é irriducibile.

Per prima cosa si dimostra che *Youla-Kucera* si riduce al Teorema 4.3; a tal proposito si consideri la matrice di trasferimento (6.9) e un controllore $K_0(\sigma) = X(\sigma)^{-1}Y(\sigma)$, espresso tramite una rappresentazione anch'essa irriducibile, che stabilizza il sistema. L'espressione $u(t) = K_0(\sigma)x(t)$ si puó esprimere in contesto behaviorale[3] come

$$\begin{bmatrix} Y(\sigma) & -X(\sigma) \end{bmatrix} \begin{bmatrix} x(t) \\ u(t) \end{bmatrix} = 0.$$

Il behavior

$$ker(A(\sigma)) = ker \left(\begin{bmatrix} \sigma I - F_{11} & -F_{12} & -G_1 \\ 0 & \sigma I - F_{22} & 0 \\ \multicolumn{2}{c}{Y(\sigma)} & -X(\sigma) \end{bmatrix} \right),$$

é dunque stabile per ipotesi[4].

La parametrizzazione di *Youla-Kucera*, riformulata in contesto behaviorale, afferma che tutte e sole le $K(\sigma)$ che stabilizzano il sistema sono della forma

$$K(\sigma) = \left[Y(\sigma) + Q(\sigma) \begin{bmatrix} \sigma I - F_{11} & 0 \\ 0 & I \end{bmatrix} \quad - \left(X(\sigma) + Q(\sigma) \begin{bmatrix} G_1 \\ 0 \end{bmatrix} \right) \right]. \tag{6.10}$$

Questi vincoli non sono peró utilizzabili immediatamente in contesto behaviorale, dal momento che, in generale, gli elementi di $K(\sigma)$ sono funzioni razionali a causa della presenza della matrice $Q(\sigma)$. É quindi necessario trasformare questi vincoli razionali in vincoli polinomiali equivalenti.

Prima di tutto si noti che la matrice $Q(\sigma)$ puó essere riscritta come una matrice polinomiale $Q'(\sigma)$ divisa per un'opportuno polinomio $d(\sigma)$; é possibile scegliere $d(\sigma)$ come il massimo comune divisore dei denominatori degli elementi di $Q(\sigma)$, di modo da renderlo un polinomio stabile. $Q(\sigma)$ puó quindi essere riscritta come

$$Q(\sigma) = \frac{Q'(\sigma)}{d(\sigma)} = \{I \cdot d(\sigma)\}^{-1} Q'(\sigma).$$

A questo punto la matrice $K(\sigma)$ puó essere riscritta come

$$\begin{aligned} K(\sigma) &= \left[Y(\sigma) + \{I \cdot d(\sigma)\}^{-1} Q'(\sigma) \begin{bmatrix} \sigma I - F_{11} & 0 \\ 0 & I \end{bmatrix} \quad - \left(X(\sigma) + \{I \cdot d(\sigma)\}^{-1} Q'(\sigma) \begin{bmatrix} G_1 \\ 0 \end{bmatrix} \right) \right] \\ &= \{I \cdot d(\sigma)\}^{-1} \left[\{I \cdot d(\sigma)\} Y(\sigma) + Q'(\sigma) \begin{bmatrix} \sigma I - F_{11} & 0 \\ 0 & I \end{bmatrix} \quad - \left(\{I \cdot d(\sigma)\} X(\sigma) + Q'(\sigma) \begin{bmatrix} G_1 \\ 0 \end{bmatrix} \right) \right] \\ &= \{I \cdot d(\sigma)\}^{-1} K'(\sigma). \end{aligned}$$

---

[3]Mediante la stessa procedura utilizzata al capitolo III.

[4]Ovviamente il controllore ottenuto va applicato al sistema di partenza, non a quello caratterizzato dalla matrice di trasferimento irriducibile ottenuta.

$K'(\sigma)$ é chiaramente una matrice polinomiale; appare chiaro che, ragionando con matrici di trasferimento tra $x(t)$ e $u(t)$, le matrici $K(\sigma)$ e $K'(\sigma)$ descrivono il medesimo controllore, a causa della cancellazione dei termini comuni. Si consideri quindi il sistema controllato da una qualsiasi di queste matrici; la matrice caratteristica diventa:

$$A(\sigma) = \begin{bmatrix} \sigma I - F_{11} & -F_{12} & -G_1 \\ 0 & \sigma I - F_{22} & 0 \\ \multicolumn{2}{c}{\{I \cdot d(\sigma)\} Y(\sigma) + Q'(\sigma) \begin{bmatrix} \sigma I - F_{11} & 0 \\ 0 & I \end{bmatrix}} & -\left(\{I \cdot d(\sigma)\} X(\sigma) + Q'(\sigma) \begin{bmatrix} G_1 \\ 0 \end{bmatrix}\right) \end{bmatrix}$$

che descrive anch'essa un behavior stabile.

Siano ora $U(\sigma)$ e $V(\sigma)$ le consuete matrici unimodulari relative alla forma di *Smith* della matrice

$$\begin{bmatrix} \sigma I - F_{11} & -F_{12} & -G_1 \\ 0 & \sigma I - F_{22} & 0 \end{bmatrix} \tag{6.11}$$

e si applichi ad $A(\sigma)$ la seguente trasformazione:

$$\begin{bmatrix} U(\sigma)^{-1} & 0 \\ 0 & I \end{bmatrix} A(\sigma) V(\sigma)^{-1} = \begin{bmatrix} I & 0 \\ K_1(\sigma) & K_2(\sigma) \end{bmatrix} \tag{6.12}$$

dove le prime n righe sono la forma di *Smith* della (6.11) mentre le m rimanenti soddisfano la relazione $K(\sigma)V(\sigma)^{-1} = [K_1(\sigma)\ K_2(\sigma)]$, ovvero $K(\sigma) = [K_1(\sigma)\ K_2(\sigma)]V(\sigma)$. Passando ai determinanti nella (6.12) si trova che

$$c_1 \cdot det(A(\sigma)) \cdot c_2 = det(K_2(\sigma));$$

ma $det(A(\sigma))$ é un polinomio stabile per ipotesi, pertanto anche $det(K_2(\sigma))$ é un polinomio stabile e questo é quanto viene espresso nel Teorema 4.3.

Per quanto riguarda il viceversa si puó procedere nel seguente modo.

La forma di *Smith* di $H(\sigma)$ si sa essere del tipo

$$\begin{bmatrix} D(\sigma) & 0 \end{bmatrix}$$

con $D(\sigma)$ polinomiale quadrata ed invertibile[5].

Si premoltiplichi $H(\sigma)$ per $U(\sigma)^{-1}$, dove $(U(\sigma), V(\sigma))$ é la consueta coppia di matrici unimodulari relative alla forma di *Smith* di $H(\sigma)$; allora vale:

$$\begin{aligned} U(\sigma)^{-1} H(\sigma) &= \begin{bmatrix} D(\sigma) & 0 \end{bmatrix} V(\sigma) \\ &= \begin{bmatrix} D(\sigma) & 0 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} V_{11}(\sigma) & V_{12}(\sigma) \\ V_{21}(\sigma) & V_{22}(\sigma) \end{bmatrix} \\ &= \begin{bmatrix} D(\sigma)V_{11}(\sigma) & D(\sigma)V_{12}(\sigma) \end{bmatrix}. \end{aligned} \tag{6.13}$$

[5] $D(\sigma)$ é pari all'identitá, e quindi unimodulare, se e solo se il sistema é completamente raggiungibile.

Il sistema $ker(H) = ker(U^{-1}H)$ puó quindi essere convenientemente rappresentato come $ker([DV_{11} \quad DV_{12}])$. Tale espressione, riletta in termini di matrice di trasferimento ingresso-stato, é equivalente a:

$$x(t) = [D(\sigma)V_{11}(\sigma)]^{-1}D(\sigma)V_{12}(\sigma)u(t) = [V_{11}(\sigma)]^{-1}V_{12}(\sigma)u(t). \tag{6.14}$$

Si é quindi giunti ad una rappresentazione della matrice di trasferimento ingresso-stato in forma irriducibile, dal momento che la matrice polinomiale $[V_{11}(\sigma) \quad V_{12}(\sigma)]$ é prima a sinistra[6].

Si scelga come controllore particolare la matrice

$$K(\sigma) = \begin{bmatrix} 0 & I_m \end{bmatrix} V(\sigma) = \begin{bmatrix} V_{21}(\sigma) & V_{22}(\sigma) \end{bmatrix} \tag{6.15}$$

che rispetta tutti i vincoli del Teorema 4.3. La (6.15) é inoltre una rappresentazione irriducibile per lo stesso motivo per cui lo é la (6.13).

Si consideri ora un qualsiasi controllore della forma espressa dal Teorema 4.3:

$$\begin{aligned} K(\sigma) &= \begin{bmatrix} K_1(\sigma) & K_2(\sigma) \end{bmatrix} V(\sigma) \\ &= \begin{bmatrix} K_1(\sigma) & K_2(\sigma) \end{bmatrix} \begin{bmatrix} V_{11}(\sigma) & V_{12}(\sigma) \\ V_{21}(\sigma) & V_{22}(\sigma) \end{bmatrix} \\ &= \begin{bmatrix} K_1(\sigma)V_{11}(\sigma) + K_2(\sigma)V_{21}(\sigma) & K_1(\sigma)V_{12}(\sigma) + K_2(\sigma)V_{22}(\sigma) \end{bmatrix} \\ &= K_2(\sigma) \begin{bmatrix} K_2(\sigma)^{-1}K_1(\sigma)V_{11}(\sigma) + V_{21}(\sigma) & K_2(\sigma)^{-1}K_1(\sigma)V_{12}(\sigma) + V_{22}(\sigma) \end{bmatrix} \\ &= K_2(\sigma) \begin{bmatrix} Q(\sigma)V_{11}(\sigma) + V_{21}(\sigma) & Q(\sigma)V_{12}(\sigma) + V_{22}(\sigma) \end{bmatrix} \end{aligned}$$

.

La matrice $Q(\sigma)$ sará sicuramente una matrice stabile dal momento che vale:

$$Q(\sigma) = K_2(\sigma)^{-1}K_1(\sigma) = \frac{adj(K_2(\sigma))K_1(\sigma)}{det(K_2(\sigma))} \tag{6.16}$$

e $det(K_2(\sigma))$ é un polinomio stabile per ipotesi.

Esprimendo il vincolo $K(\sigma)w(t) = 0$ in un contesto ingresso-uscita si trova, dopo semplici manipolazioni algebriche, l'espressione

$$u(t) = -\left\{[Q(\sigma)V_{12}(\sigma) + V_{22}(\sigma)]\right\}^{-1}[Q(\sigma)V_{11}(\sigma) + V_{21}(\sigma)]x(t) \tag{6.17}$$

che é esattamente quanto espresso nel Teorema 6.1[7].

É quindi dimostrata, almeno nel caso ingresso-stato, la totale equivalenza della parametrizzazione di *Youla-Kucera* e di quella trovata in ambito behaviorale qualora il behavior descriva un modello in spazio di stato.

La sintesi in ambito behaviorale ha peró alcuni pregi rispetto alla sintesi proposta da *Youla-Kucera*. Innanzitutto non é necessario conoscere a priori l'espressione di un controllore stabilizzante (peraltro in forma irriducibile).

---

[6] Perché é completabile alla matrice unimodulare $V(\sigma)$.

[7] A meno del segno, ma questo non crea problemi in quanto é legato al fatto che la retroazione sia positiva o negativa.

Nota infatti la matrice $V(\sigma)$ relativa alla forma di *Smith* di $H(\sigma)$ (ottenuta tramite procedure al calcolatore) la scelta del controllore stabilizzante é immediata: basta costruire una matrice $K_2(\sigma) \in \mathbb{R}^{m\times m}[\sigma]$ che abbia determinante non nullo e stabile e fare la posizione $K(\sigma) = [K_1(\sigma) \quad K_2(\sigma)]V(\sigma)$ con $K_1(\sigma)$ parametro arbitrario.

L'analisi dell'evoluzione del sistema controllato, almeno in termini di velocitá di convergenza asintotica a zero, é facilitata da quanto esposto nel capitolo ad essa dedicato in ambito behaviorale che si adatta senza modifiche sostanziali anche al caso particolare di sistemi ingresso-stato.

É tuttavia doveroso osservare che la parametrizzazione del Teorema 6.1 si reiferisce al caso piú generale di sistemi ingresso-uscita, dove la matrice di trasferimento da considerare non é $H_{ux}(\sigma)$ ma

$$W(\sigma) = H(\sigma I - F)^{-1}G + J$$

che si riduce al caso particolare considerato quando $H = I$ e $J = 0$. In questo caso piú generale, sicuramente trattabile anche in un contesto behaviorale, il procedimento andrebbe generalizzato e i vantaggi di un metodo rispetto all'altro potrebbero non essere cosí marcati.

6.2 Osservabilitá e sintesi degli stimatori

Il concetto di osservabilitá nel classico ambito della teoria dei sistemi é inteso come la possibilitá di ricostruire l'evoluzione dello stato $x(t)$ una volta note le evoluzioni degli ingressi $u(t)$ e delle uscite $y(t)$. Questo concetto é equivalente a considerare il behavior (6.1) con la partizione $w_2(t) = x(t)$ e $w_1(t) = [u(t)^T \ y(t)^T]^T$; ció porta alla forma

$$\begin{bmatrix} \sigma I - F \\ H \end{bmatrix} x(t) = \begin{bmatrix} G & 0 \\ -J & I \end{bmatrix} \begin{bmatrix} u(t) \\ y(t) \end{bmatrix} \tag{6.18}$$

dove si evidenziano le matrici $H_1(\sigma)$ e $H_2(\sigma)$.

Come afferma il Teorema 5.1 il behavior é osservabile se e solo se la matrice $H_2(\sigma)$ é prima a destra o, equivalentemente, se $H_2(\alpha)$ ha rango di colonne $\forall \alpha \in \mathbb{C}$; si noti che, data la particolare espressione della matrice $H_2(\sigma)$, tale condizione coincide con quella del test PBH di osservabilitá, dimostrato nella classica teoria dei sistemi. Pertanto le due definizioni sono equivalenti. Analogamente anche le condizione di rivelabilitá e ricostruibilitá date nel Teorema 5.1 coincidono con quella del test PBH.

6.2.1 Sintesi dello stimatore asintotico

Si supponga quindi che il sistema sia rivelabile, pertanto esiste uno stimatore asintotico (grazie al Teorema 5.3) del vettore $\mathbf{w}_2 = \mathbf{x}$ dal vettore

$\mathbf{w}_1 = [\mathbf{u}^T\mathbf{y}^T]$. Utilizzando il Teorema 5.4 di caratterizzazione degli stimatori asintotici si trova che uno qualunque di questi stimatori puó essere descritto da

$$Q(\sigma)\hat{x}(t) = \begin{bmatrix} P_u(\sigma) & P_y(\sigma) \end{bmatrix} \begin{bmatrix} u(t) \\ y(t) \end{bmatrix}$$

dove $Q(\sigma)$ é una matrice polinomiale quadrata e con determinante stabile e vale

$$\begin{bmatrix} Q(\sigma) & -P_u(\sigma) & -P_y(\sigma) \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} Y(\sigma) & X(\sigma) \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \sigma I - F & -G & 0 \\ H & J & -I \end{bmatrix}.$$

Tra questi si possono trovare, come caso particolare, gli stimatori di *Luenberger*. Se infatti $L \in \mathbb{R}^{n\times p}$ é una matrice costante tale che $F + LH$ abbia autovalori stabili, basta scegliere $Y(\sigma) = I$ e $X(\sigma) = -L$ per ottenere lo stimatore caratterizzato dalla

$$(\sigma I - F - LH)\hat{x}(t) = \begin{bmatrix} G & -L \end{bmatrix} \begin{bmatrix} u(t) \\ y(t) \end{bmatrix} \tag{6.19}$$

con $Q(\sigma) = \sigma I - (F + LH)$ quadrata, invertibile e con determinante stabile. La (6.19) é esattamente quella che esprime la dinamica di uno stimatore (asintotico, dal momento che $F + LH$ é stabile) di *Luenberger*. La matrice di trasferimento tra $x(t)$ e $[u(t)^T \; y(t)^T]^T$ di uno stimatore di questo tipo é pari a $W(\sigma) = (\sigma I - F - LH)^{-1}[G \; -L]$ e risulta strettamente propria. Il behavior infatti rispetta anche le ipotesi del Teorema 5.5 sull'esistenza di stimatori strettamente propri: la matrice dei gradi conduttori di riga di $H(\sigma) = [H_2(\sigma) \; -H_1(\sigma)]$ risulta essere:

$$[H_{2hr}| - H_{1hr}] = [I|0]$$

giá della forma necessaria a garantire l'esistenza di stimatori asintotici strettamente propri[8].

In generale peró esistono altri stimatori asintotici dello stato che ammettono una funzione di trasferimento $W(\sigma) = Q(\sigma)^{-1}[P_u(\sigma) \; P_y(\sigma)]$ strettamente propria; essi sono stimatori per cui la dinamica della stima $\hat{x}(t)$ risulta combinazione lineare in diversi istanti di tempo di $u(t)$ e $y(t)$.

6.2.2 Sintesi dello stimatore dead-beat

In questa sezione si considereranno sistemi leggermente diversi da quelli descritti dalla (6.18), in cui possono essere presenti anche dei disturbi:

$$\begin{aligned} x(t+1) &= Fx(t) + G_u u(t) + G_d d(t) \\ y(t) &= Hx(t) + J_u u(t) + J_d d(t) \end{aligned}$$

[8] In altre parole la matrice S risulta essere essa stessa l'identitá.

a cui corrisponde il behavior:

$$\begin{bmatrix} \sigma I - F & 0 & -G_u & -G_d \\ H & -I & J_u & J_d \end{bmatrix} \begin{bmatrix} x(t) \\ y(t) \\ u(t) \\ d(t) \end{bmatrix} = 0. \tag{6.20}$$

In questo caso, partizionando il behavior in maniera conforme alla (5.11), si ha:

$$H_2(\sigma) = \begin{bmatrix} \sigma I - F \\ H \end{bmatrix}, \quad H_1(\sigma) = \begin{bmatrix} 0 & -G_u \\ -I & -J_u \end{bmatrix}, \quad D(\sigma) = \begin{bmatrix} -G_d \\ -J_d \end{bmatrix}$$

e corrispondentemente $w_2(t) = x(t)$ e $w_1(t)^T = [y(t)^T | u(t)^T]^T$.

Si supponga, al fine di costruire uno stimatore dead beat, che il behavior sia ricostruibile. Dal momento che tipicamente la matrice $D(\sigma)$ non ha rango di righe pieno (la dimensione dello stato é tipicamente superiore a quella dei disturbi) un MLA esiste sempre e si puó supporre essere una matrice costante: $A_d(\sigma) = [A_{dG} | A_{dJ}]$; in questo caso il behavior é ricostruibile se e solo se la matrice $\Gamma(\sigma) = A_{dG}(\sigma I - F) + A_{dJ}H$ é monomia a destra (Teorema 5.7). Se queste ipotesi sono soddisfatte é possibile costruire uno (in realtá infiniti) stimatore dead-beat seguendo la procedura esposta nel capitolo V. Se inoltre la matrice

$$[\Gamma(\sigma) | -\Phi(\sigma)] = [A_{dG} | A_{dJ}] \begin{bmatrix} \sigma I - F & 0 & -G_u \\ H & -I & J_u \end{bmatrix}$$

risulta essere rpr é possibile trovare anche uno stimatore dead-beat con matrice di trasferimento causale.

Purtroppo la particolarizzazione ai modelli in spazio di stato delle procedure per ricavare questi stimatori non risulta essere piú semplice del caso generale, pertanto non verrá esposta.

Un caso particolare é tuttavia rappresentato da quei sistemi dove non sono presenti disturbi (i.e. $G_d = 0$ e $J_d = 0$); in questo caso $D(\sigma) = 0$ e pertanto un suo annullatore sinistro é una qualsiasi matrice di dimensioni opportune. Si puó quindi assumere $A_d(\sigma) = I_{n+p}$. Ma allora il behavior é ricostruibile, e quindi ammette uno stimatore dead-beat, se e solo se la matrice $H_2(\sigma)$ é monomia a destra; $H_2(\sigma)$ si noti essere, ancora una volta, la matrice del test PBH di osservabilitá, pertanto si ritrova un risultato giá noto nell'ambito della teaoria dei sistemi: un modello in spazio di stato ammete uno stimatore dead-beat se e solo se identifica un sistema ricostruibile (nel senso della teoria dei sistemi).

Si assuma quindi come ipotesi la ricostrubilitá del sistema. In questo caso esistono sia stimatori causali che non: la matrice $[\Gamma(\sigma) \; -\Phi(\sigma)]$ coincide con $[H_2(\sigma) \; -H_1(\sigma)]$, che é rpr, e la matrice $\Gamma_{hr} = [I \;\; H^T]^T$ ha rango di colonne pieno; pertanto le ipotesi del Teorema 5.10 sono rispettate.

Questo risultato era intuitivo, dal momento che uno stimatore dead-beat di *Luenberger* ammette una matrice di trasferimento strettamente propria. Questi infatti sono ottenibili come casi particolari della (5.19) una volta che si sia posto $Y(\sigma, \sigma^{-1}) = [I \ -L]$, dove L é la matrice caratteristica dello stimatore di *Luenberger* che rende $F + LH$ nilpotente.

In generale peró, anche in questo caso, esistono altri stimatori dead-beat (causali o meno) che esprimono la stima $\hat{x}(t)$ come combinazione lineare degli ingressi e delle uscite in diversi istanti di tempo.

Bibliography

[1] E. Fornasini: *Appunti per il corso di sistemi multivariabili* (2010) - http://www.dei.unipd.it/ fornasini

[2] M. E. Valcher, J. C. Willems: *Observer Syntesis in the Behavioral Approach* Automatic Control Vol 44, NO. 12, dicembre 1999

[3] M. Bisiacco, M. E. Valcher, J. C. Willems: *A Behavioral Approach to Estimation and Dead-Beat Observer Design With Applications to State-Space Models* Automatic Control Vol 51, NO. 11, novembre 1999

[4] M. E. Valcher, J. C. Willems: *Dead beat observer synthesis* Syst. Control lett. Vol 37, 1999

[5] D. C. Youla, J. J. Bongiorno: *Modern Wiener-Hopf Designof Optimal Contiders -Part II: TheMultivariable Case* Automatic Control Vol AC-21, NO. 3, giugno 1976