UNIVERSITÀ DEGLI STUDI DI PADOVA

DIPARTIMENTO DI MATEMATICA TULLIO LEVI-CIVITA

Corso di Laurea Triennale in Matematica

Non conservatività dell'interpretazione di Curry-Howard-Martin-Löf della logica intuizionista con uguaglianza in teoria dei tipi

Relatore:
prof.ssa Maria Emilia Maietti

Candidato:
Giovanna Andrigo

Matricola: **1145543**

ANNO ACCADEMICO 2020/2021

23 Aprile 2021

Indice

Abstract

La teoria dei tipi, introdotta nei primi del Novecento da Bertrand Russell, è attualmente una branca sia della Matematica che dell'Informatica, in quanto fornisce paradigmi fondazionali di carattere matematico, logico e informatico.
In particolare, la teoria dei tipi di Martin-Löf si può considerare sia una teoria degli insiemi che un paradigma di un linguaggio di programmazione funzionale. In questa tesi ci occuperemo di presentare il frammento $\mathbf{MLTT_0}$ della teoria dei tipi di Martin-Löf sufficiente per interpretare la logica intuizionista predicativa con uguaglianza secondo l'interpretazione di Curry-Howard-Martin-Löf degli anni '80.

Nostro scopo è dimostrare la non conservatività dell'interpretazione di Curry-Howard-Martin-Löf della logica intuizionista con uguaglianza in $\mathbf{MLTT_0}$ sulla logica stessa. Nello specifico, dopo aver descritto $\mathbf{MLTT_0}$, descriveremo l'interpretazione di Curry-Howard-Martin-Löf, dimostrando che essa rende valida la deduzione naturale $\mathbf{DNI}_=$ della logica intuizionista predicativa con uguaglianza. Poi proseguiremo con la dimostrazione in $\mathbf{MLTT_0}$ dell'assioma di scelta. Infine, a conclusione del nostro studio, enunceremo e dimostreremo il teorema di non conservatività di $\mathbf{MLTT_0}$ sopra la logica intuizionista con uguaglianza, provando in particolare che la formula detta *choice approximation principle* non è derivabile in $\mathbf{DNI}_=$ ma lo è per l'interpretazione della logica in $\mathbf{MLTT_0}$.

Capitolo 1

Motivazioni allo studio della teoria dei tipi

La teoria dei tipi, originariamente introdotta da Bertrand Russel nei primi del Novecento, è una branca della Matematica e dell'Informatica che si pone come obiettivo quello di scrivere al calcolatore dimostrazioni matematiche corrette per definizione. Lo studio di tale disciplina è quindi importante in quanto essa è alla base della costruzione dei *proof-assistant*, ossia degli assistenti automatici, che servono alla formalizzazione delle dimostrazioni al calcolatore.

La teoria dei tipi è inoltre multifunzionale, in quanto offre una base teorica a fondamento dello sviluppo della Matematica, della Logica e dell'Informatica. Per quanto riguarda la Matematica e la Logica, essa offre rispettivamente una base alla teoria degli insiemi e una trattazione delle dimostrazioni con tecniche di *proof theory* molto raffinate che servono a dimostrarne la non-contraddittorietà; infine, per quanto riguarda l'Informatica, tale disciplina pone un fondamento alla dimostrazione della correttezza dei programmi.

L'importanza dello studio della teoria dei tipi risiede dunque nella necessità di sviluppare metodi formali per la *certified program correctness*. Sottolineiamo l'importanza della correttezza automatica dei programmi ricordando ora alcuni incidenti dovuti ad errori nella programmazione di software. Tra questi annoveriamo l'incidente del lancio dell'Apollo 11 e la tragedia sanitaria in cui, in una serie di incidenti tra il 1985 e il 1987, diversi pazienti ricevettero una massiccia overdose di radiazioni da particolari sistemi e tre di loro morirono. Un altro errore di questo tipo è tratto dalla vita civile: alcuni anni fa una signora danese ricevette, per il suo centosettesimo compleanno, un'email dalle autorità della scuola locale con le istruzioni da seguire per iscriversi alla prima elementare. In seguito risultò che erano state riservate solo due cifre per il campo "età" all'interno del database. Merita infine considerazione un errore dovuto alla programmazione di software rilevato proprio qualche mese fa: si sono verificati bug, legati alla perditá di privacy dei dati degli utenti, nell'app "Immuni" per il tracciamento del Covid-19. Tali episodi rilevano l'importanza della correttezza automatica, certificata, dei programmi tramite l'utilizzo del *proof-assistant*. Ad esempio, il cosiddetto *millenium bug*, un allarme in cui si temevano incidenti software causati dal fatto che alla data 01/01/2000 i computer che usavano solo due cifre per la memorizzazione delle date avrebbero assunto l'anno 2000 come il 1900, fu risolto proprio grazie all'utilizzo del *proof-assistant*.

Per quanto riguarda invece la Matematica, secondo il matematico Vladimir Voevodsky [4] sembra che la correttezza delle dimostrazioni sia irrilevante, ma in realtà è necessaria alla risoluzione di alcuni problemi. Infatti, per Voevodsky non tutti i problemi in matematica si risolvono come il problema del cubo di Rubik, in cui una volta risolto è evidente a tutti la correttezza della sua risoluzione. In alcuni problemi matematici, come quelli per cui lo stesso Voevodsky ha ottenuto in premio la "Fields Medal", la sicurezza della dimostrazione non è totale, cioè manca la certificazione della correttezza della dimostrazione. La soluzione risiede nel formalizzare la dimostrazione al calcolatore, che ne certifica la correttezza al 100% tramite *proof-assistants*.

Esempi attualmente usati di *proof-assistants* efficienti per la formalizzazione delle dimostrazioni matematiche si basano sulla teoria dei tipi, ad esempio sulla teoria dei tipi di Martin-Löf [6] che tratteremo in questa tesi.

1.1 Proprietà distintive della teoria dei tipi

La teoria dei tipi, originariamente introdotta come fondamento affidabile della Matematica di fronte alla contraddittorietà di alcune formulazioni insiemistiche, ha come principale oggetto di studio i sistemi formali che classificano gli enti matematici tramite i *tipi* e i loro elementi, detti *termini*.

La principale novità della teoria dei tipi rispetto alle teorie degli insiemi assiomatiche alla Zermelo-Fraenkel è che, mentre in queste ultime sia gli enti matematici che i loro elementi sono insiemi, in teoria dei tipi i termini non sono generalmente a loro volta tipi. Inoltre, i termini vengono descritti separatamente, così come le uguaglianze tra tipi e termini. Un'altra importante proprietà che distingue molte teorie dei tipi dalla teoria degli insiemi è l'adozione della notazione del *lambda-calcolo* di Church, che permette di definire funzioni in modo primitivo come *lambda-termini*, associando ad esse un tipo che ne stabilisce dominio e codominio.

1.1.1 Molteplici interpretazioni della teoria dei tipi

Alcune teorie dei tipi ammettono più interpretazioni che spiegano la natura dei loro tipi e termini:

- un'interpretazione *logica*, secondo cui i tipi rappresentano proposizioni dipendenti da un contesto, e i loro termini sono *proof-terms*, ovvero codifiche di loro dimostrazioni dipendenti dalle assunzioni del contesto su cui sono definiti i termini stessi. Tale interpretazione consente di considerare la teoria dei tipi come un calcolo logico e di rappresentare i connettivi logici, i quantificatori e l'uguaglianza proposizionale come costruttori di tipi. Tale corrispondenza tra proposizioni e tipi e tra dimostrazioni di una proposizione e termini tipati risulta molto naturale se si adotta il formalismo della *deduzione naturale* di Prawitz come sistema formale per le deduzioni proposizionali;

- un'interpretazione *insiemistica*, secondo cui i tipi non dipendenti da un contesto rappresentano insiemi e i tipi dipendenti da un contesto rappresentano delle famiglie di insiemi indiciate dal contesto, mentre i termini sono pensati come i corrispondenti elementi rispettivamente dell'insieme o della famiglia di insiemi indiciata dal contesto. Tale interpretazione consente di considerare la teoria dei tipi una teoria degli insiemi;

- un'interpretazione *computazionale*, secondo cui i tipi rappresentano tipi di dati di un linguaggio di programmazione e i loro termini programmi che producono output del loro tipo di dati. Tale interpretazione consente di considerare la teoria dei tipi un linguaggio di programazione.

Nel presente percorso analizzeremo in particolare alcuni aspetti riguardanti l'interpretazione logica e l'interpretazione insiemistica di $\mathbf{MLTT_0}$.

Capitolo 2

La teoria dei tipi di Martin-Löf

Negli anni '70 del Novecento Per Martin-Löf ha introdotto una teoria dei tipi, che attualmente prende il suo nome, proponendola sia come paradigma di un linguaggio di programmazione sia al contempo come una teoria degli insiemi adatta a formalizzare la matematica costruttiva. Tale teoria ha ispirato l'introduzione di particolari programmi, detti *proof-assistants*, grazie ai quali si è in grado di formalizzare una dimostrazione matematica al calcolatore utilizzando il linguaggio della teoria stessa.

In questa tesi ci limiteremo a presentare il frammento $\mathbf{MLTT_0}$ della teoria dei tipi di Martin-Löf che contiene i soli costrutti necessari per interpretare la logica intuizionista predicativa con uguaglianza secondo l'interpretazione di Curry-Howard-Martin-Löf.

2.1 Descrizione di tipi e termini tramite giudizi

$\mathbf{MLTT_0}$ è descritta in modo primitivo, a differenza della teoria degli insiemi, alttraverso quattro forme di giudizio:

- il giudizio A *type* $[\Gamma]$, che afferma che A è un tipo nel contesto Γ;
- il giudizio $A = B$ *type* $[\Gamma]$, che afferma che il tipo A è uguale per definizione al tipo B nel contesto Γ;
- il giudizio $a \in A\ [\Gamma]$, che afferma che il termine a è di tipo A nel contesto Γ;
- il giudizio $a = b \in A\ [\Gamma]$, che afferma che il termine a di tipo A è uguale per definizione al termine b, anch'esso di tipo A, nel contesto Γ,

dove Γ è una lista, eventualmente vuota, di assunzioni che servono a tipare le variabili presenti nei tipi A, B ecc.
A tali giudizi se ne aggiunge un quinto, Γ *cont*, per derivare i contesti Γ nella teoria dei tipi dipendenti.
Vedremo in seguito che tali giudizi ammettono un'interpretazione insiemistica e un'interpretazione dei connettivi e dei quantificatori della logica intuizionista, oltre che un'interpretazione computazionale.
La teoria dei tipi di Martin-Löf consta poi di *regole di inferenza* per derivare contesti Γ e giudizi nelle forme sopra elencate.

2.2 Definizione di tipi e termini di $\mathbf{MLTT_0}$

Tipi e termini di $\mathbf{MLTT_0}$ si definiscono induttivamente, seguendo lo schema della *deduzione naturale* di Gentzen-Prawitz, attraverso regole di *introduzione*, regole di *eliminazione* e regole di *uguaglianza definizionale dei costruttori introdotti*. In particolare, dato un generico tipo $\mathcal{T}$, lo schema di produzione delle regole che definiscono $\mathcal{T}$ e i suoi termini è il seguente:

1. innanzitutto si danno le regole di *formazione* del tipo $\mathcal{T}$ (sia esso indipendente o dipendente), che viene descritto come tipo costante o come costruttore a partire da altri tipi;

2. poi si danno le regole di *introduzione*, grazie alle quali si descrivono gli elementi canonici di $\mathcal{T}$;

3. si danno le regole di *eliminazione*, che descrivono i termini definibili su elementi di $\mathcal{T}$ a valori in un altro tipo dipendente come estensioni definite per induzione a partire da termini definiti solo sugli elementi canonici di $\mathcal{T}$. Nello specifico, tali regole definiscono un costruttore $El_{\mathcal{T}}$ a partire da elementi di $\mathcal{T}$ a valori in un tipo $M(z)$ *type* $[\Gamma,\ z \in \mathcal{T}]$, avendo come premessa, ossia come ipotesi, che siano dati degli elementi in $M(z)$ sui valori canonici di $\mathcal{T}$;

4. si danno le regole di *conversione*, che descrivono le regole di computazione di $\mathcal{T}$. In particolare, tali regole stabiliscono che gli eliminatori introdotti al punto 3. sono definiti per ricorsione a partire dalle ipotesi che siano dati degli elementi in $M(z)$ sui valori canonici di $\mathcal{T}$;

5. infine si danno le regole, spesso sottointese, che stabiliscono che i costruttori di $\mathcal{T}$ sia su 2. che su 3. conservano le uguaglianze definite dai termini da cui dipendono. In ultimo si garantisce quindi che i costruttori di $\mathcal{T}$ e dei suoi termini conservino l'uguaglianza tra tipi e l'uguaglianza definizionale tra termini.

Di seguito enuniciamo le principali regole di $\mathbf{MLTT_0}$.

2.3 Regole di MLTT$_0$

In $\mathbf{MLTT_0}$ ci sono due tipi di regole: le regole *strutturali*, proprie del calcolo, che definiscono il calcolo stesso, e le regole *ammissibili*, che permettono di abbreviare le derivazioni.

2.3.1 Regole strutturali

Le regole *strutturali* della teoria dei tipi dipendenti sono così chiamate perchè presenti in tutte le teorie dei tipi, e quindi anche in $\mathbf{MLTT_0}$. Elenchiamole nel dettaglio.

Regole di formazione dei contesti

$$[\,]\ cont,$$

che afferma che il contesto vuoto è un contesto. Tale regola è anche l'unico assioma della teoria dei tipi.

$$\text{F-c)}\ \frac{A\ type\ [\Gamma]}{\Gamma,\ x \in A\ cont}\ ((x \in A)\ \text{not in}\ \Gamma)$$

Regole di assunzione delle variabili

$$\text{var)}\ \frac{\Gamma,\ x \in A,\ \Delta\ cont}{x \in A\ [\Gamma,\ x \in A,\ \Delta]}$$

Regole strutturali addizionali sull'uguaglianza

In $\mathbf{MLTT_0}$ l'uguaglianza tra tipi è una relazione di equivalenza, perciò le seguenti tre regole risultano valide in tale teoria:

$$\text{ref)}\ \frac{A\ type\ [\Gamma]}{A = A\ type\ [\Gamma]}$$

$$\text{sym)}\ \frac{A = B\ type\ [\Gamma]}{B = A\ type\ [\Gamma]}$$

$$\text{tra)}\ \frac{A = B\ type\ [\Gamma] \qquad B = C\ type\ [\Gamma]}{A = C\ type\ [\Gamma]}$$

Analogamente, anche l'*uguaglianza definizionale* tra termini espressa nel giudizio relativo è una relazione di equivalenza, perciò le tre regole seguenti risultano valide in $\mathbf{MLTT_0}$:

$$\text{ref)}\ \frac{a \in A\ [\Gamma]}{a = a \in A\ [\Gamma]}$$

$$\text{sym)}\ \frac{a = b \in A\ [\Gamma]}{b = a \in A\ [\Gamma]}$$

$$\text{tra)}\ \frac{a = b \in A\ [\Gamma] \qquad b = c \in A\ [\Gamma]}{a = c \in A\ [\Gamma]}$$

Regole di conversione dell'uguaglianza per tipi uguali

Le seguenti regole servono ad esprimere che l'appartenenza si conserva con l'uguaglianza di termini e di tipi:

$$\text{conv)}\ \frac{a \in A\ [\Gamma] \qquad A = B\ \mathit{type}\ [\Gamma]}{a \in B\ [\Gamma]}$$

$$\text{conv-eq)}\ \frac{a = b \in A\ [\Gamma] \qquad A = B\ \mathit{type}\ [\Gamma]}{a = b \in B\ [\Gamma]}$$

2.3.2 Regole ammissibili

Le regole ammissibili sono regole la cui validità in $\mathbf{MLTT_0}$ è sempre garantita. Esse possono quindi essere impiegate nelle derivazioni, senza la necessità di aggiungerle esplicitamente tra le regole strutturali.

Prima di enunciare le principali regole ammissibili, ricordiamo la seguente definizione:

Def 2.1. Diciamo che una regola formulata con giudizi della teoria dei tipi è *ammissibile* (o *derivabile*) nella teoria dei tipi $\mathcal{T}$ se e solo se, nel caso i suoi giudizi premessa siano derivabili in $\mathcal{T}$, allora anche il giudizio conclusione è derivabile in $\mathcal{T}$.

Regole di indebolimento

Le regole di *indebolimento* servono ad estendere il contesto di un giudizio, ammesso che il contesto sia estendibile, cioè sia derivabile il contesto di partenza esteso con l'estensione. Vediamo tali regole nel dettaglio:

$$\text{ind-ty)}\ \frac{A\ \textit{type}\ [\Gamma] \qquad \Gamma,\ \Delta\ \textit{cont}}{A\ \textit{type}\ [\Gamma,\ \Delta]}$$

$$\text{ind-ty-eq)}\ \frac{A = B\ \textit{type}\ [\Gamma] \qquad \Gamma,\ \Delta\ \textit{cont}}{A = B\ \textit{type}\ [\Gamma,\ \Delta]}$$

$$\text{ind-te)}\ \frac{a \in A\ [\Gamma] \qquad \Gamma,\ \Delta\ \textit{cont}}{a \in A\ [\Gamma,\ \Delta]}$$

$$\text{ind-te-eq)}\ \frac{a = b \in A\ [\Gamma] \qquad \Gamma,\ \Delta\ \textit{cont}}{a = b \in A\ [\Gamma,\ \Delta]}$$

Regole di sostituzione

L'importanza delle regole di *sostituzione* risiede nel fatto che in un calcolo di tipi si devono necessariamente operare sostituzioni di termini in tipi, termini e loro uguaglianza quando questi sono dipendenti da certi altri tipi. Il calcolo deve essere quindi chiuso sulle seguenti regole:

$$\text{sub-typ)}\ \frac{\begin{array}{c} C(x_1\ ,...,\ x_{\mathrm{n}})\ \textit{type}\ [\Gamma,\ x_1 \in A_1\ ,...,\ x_{\mathrm{n}} \in A_{\mathrm{n}}(x_1,...,x_{\mathrm{n\text{-}1}})] \\ a_1 \in A_1\ [\Gamma]\ ...\ a_{\mathrm{n}} \in A_{\mathrm{n}}(a_1,...,a_{\mathrm{n\text{-}1}})\ [\Gamma] \end{array}}{C(a_1,...,a_{\mathrm{n}})\ \textit{type}\ [\Gamma]}$$

$$\text{sub-eq-typ)}\ \frac{\begin{array}{c} C(x_1\ ,...,\ x_{\mathrm{n}})\ \textit{type}\ [\Gamma,\ x_1 \in A_1\ ,...,\ x_{\mathrm{n}} \in A_{\mathrm{n}}(x_1,...,x_{\mathrm{n\text{-}1}})] \\ a_1 = b_1 \in A_1\ [\Gamma]\ ...\ a_{\mathrm{n}} = b_{\mathrm{n}} \in A_{\mathrm{n}}(a_1,...,a_{\mathrm{n\text{-}1}})\ [\Gamma] \end{array}}{C(a_1,...,a_{\mathrm{n}}) = C(b_1,...,b_{\mathrm{n}})\ \textit{type}\ [\Gamma]}$$

$$\text{sub-Eqtyp)}\ \frac{\begin{array}{c} C(x_1\ ,...,\ x_{\mathrm{n}}) = D\ (x_1\ ,...,\ x_{\mathrm{n}})\ \textit{type}\ [\Gamma,\ x_1 \in A_1\ ,...,\ x_{\mathrm{n}} \in A_{\mathrm{n}}(x_1,...,x_{\mathrm{n\text{-}1}})] \\ a_1 \in A_1\ [\Gamma]\ ...\ a_{\mathrm{n}} \in A_{\mathrm{n}}(a_1,...,a_{\mathrm{n\text{-}1}})\ [\Gamma] \end{array}}{C(a_1,...,a_{\mathrm{n}}) = D(a_1,...,a_{\mathrm{n}})\ \textit{type}\ [\Gamma]}$$

$$\text{sub-eq-Eqtyp)}\ \frac{C(x_1 ,..., x_n) = D\ (x_1 ,..., x_n)\ type\ [\Gamma,\ x_1 \in A_1 ,..., x_n \in A_n(x_1,...,x_{n-1})] \quad a_1 = b_1 \in A_1\ [\Gamma]\ ...\ a_n = b_n \in A_n(a_1,...,a_{n-1})\ [\Gamma]}{C(a_1,...,a_n) = D(a_1,...,a_n)\ type\ [\Gamma]}$$

$$\text{sub-ter)}\ \frac{c(x_1 ,..., x_n) \in C(x_1,..., x_n)\ [\Gamma,\ x_1 \in A_1 ,..., x_n \in A_n(x_1,...,x_{n-1})] \quad a_1 \in A_1\ [\Gamma]\ ...\ a_n \in A_n(a_1,...,a_{n-1})\ [\Gamma]}{c(a_1,...,a_n) \in C(a_1,...,a_n)\ [\Gamma]}$$

$$\text{sub-eqter)}\ \frac{c(x_1,...,x_n) = d(x_1,...,x_n) \in C(x_1,...,x_n)\ type\ [\Gamma,\ x_1 \in A_1 ,..., x_n \in A_n(x_1,...,x_{n-1})] \quad a_1 \in A_1\ [\Gamma]\ ...\ a_n \in A_n(a_1,...,a_{n-1})\ [\Gamma]}{c(a_1,...,a_n) = d(a_1,...,a_n) \in C(a_1,...,a_n)\ type\ [\Gamma]}$$

$$\text{sub-eq-ter)}\ \frac{c(x_1 ,..., x_n) \in C(x_1,..., x_n)\ [\Gamma,\ x_1 \in A_1 ,..., x_n \in A_n(x_1,...,x_{n-1})] \quad a_1 = b_1 \in A_1\ [\Gamma]\ ...\ a_n = b_n \in A_n(a_1,...,a_{n-1})\ [\Gamma]}{c(a_1,...,a_n) = c(b_1,...,b_n) \in C(a_1 ,..., a_n)\ [\Gamma]}$$

$$\text{sub-eq-eqter)}\ \frac{c(x_1,...,x_n) = d\ (x_1,...,x_n) \in C(\mathrm{x}_1,...,x_n)\ [\Gamma,\ x_1 \in A_1 ,..., x_n \in A_n(x_1,...,x_{n-1})] \quad a_1 = b_1 \in A_1\ [\Gamma]\ ...\ a_n = b_n \in A_n(a_1,...,a_{n-1})\ [\Gamma]}{c(a_1,...,a_n) = d(a_1,...,a_n) \in C(a_1 ,..., a_n)\ [\Gamma]}$$

Regole di scambio

In generale la regola di scambio di assunzioni in un contesto in teoria dei tipi dipendenti non è derivabile, a causa della dipendenza del tipo di un'assunzione in un contesto Γ dalle assunzioni in Γ che lo precedono. Tuttavia, si può dimostrare una forma ristretta di regole di scambio come segue:

$$\text{ex-ty)}\ \frac{A\ type\ [\Gamma,\ x \in C,\ y \in D,\ \Delta] \qquad \Gamma,\ y \in D,\ x \in C,\ \Delta\ cont}{A\ type\ [\Gamma,\ y \in D,\ x \in C,\ \Delta]}$$

$$\text{ex-ty-eq)}\ \frac{A = B\ type\ [\Gamma,\ x \in C,\ y \in D,\ \Delta] \qquad \Gamma,\ y \in D,\ x \in C,\ \Delta\ cont}{A = B\ type\ [\Gamma,\ y \in D,\ x \in C,\ \Delta]}$$

$$\text{ex-te)}\ \frac{a \in A\ [\Gamma,\ x \in C,\ y \in D,\ \Delta] \qquad \Gamma,\ y \in D,\ x \in C,\ \Delta\ cont}{a \in A\ [\Gamma,\ y \in D,\ x \in C,\ \Delta]}$$

$$\text{ex-te-eq)}\ \frac{a = b \in A\ [\Gamma,\ x \in C,\ y \in D,\ \Delta] \qquad \Gamma,\ y \in D,\ x \in C,\ \Delta\ cont}{a = b \in A\ [\Gamma,\ y \in D,\ x \in C,\ \Delta]}$$

Regole di sanitary checks sulla correttezza del tipaggio

In $\mathbf{MLTT_0}$ valgono le seguenti regole, che possiamo chiamare di "sanitary check" in quanto assicurano la correttezza del tipaggio dei termini:

1. Se $[\Gamma,\, \Delta]$ *cont* è derivabile, allora $[\Gamma]$ *cont* è derivabile;
2. Se A *type* $[\Gamma]$ è derivabile, allora $[\Gamma]$ *cont* è derivabile;
3. Se $a \in A$ $[\Gamma]$ è derivabile, allora A *type* $[\Gamma]$ è derivabile;
4. Se $A = B$ *type* $[\Gamma]$ è derivabile, allora sia A *type* $[\Gamma]$ che B *type* $[\Gamma]$ sono derivabili;
5. Se $a = b \in A$ $[\Gamma]$ è derivabile, allora sia $a \in A$ $[\Gamma]$ che $b \in A$ $[\Gamma]$ sono derivabili.

2.4 I tipi di $\mathbf{MLTT_0}$

Vediamo in seguito alcuni esempi di tipi di $\mathbf{MLTT_0}$ e le regole ad essi associate.

2.4.1 Tipo vuoto

Il tipo vuoto, che viene indicato con N_0, è definito in modo induttivo dall'assenza di elementi:

$$\text{F-N}_0)\ \frac{[\Gamma]\ \mathit{cont}}{\mathrm{N}_0\ \mathit{type}\ [\Gamma]}$$

$$\text{E-N}_0)\ \frac{t \in \mathrm{N}_0\ [\Gamma] \qquad M(z)\ \mathit{type}\ [\Gamma,\, z \in \mathrm{N}_0]}{\mathit{El}_{\mathrm{N}_0}(t) \in M(t)\ [\Gamma]}$$

Notiamo che il tipo vuoto non ammette regole di introduzione perchè queste introducono un elemento in N_0, ma N_0 è il tipo vuoto.

Tale tipo ammette invece la seguente regola di uguaglianza:

$$\text{eq-E-N}_0)\ \frac{t_1 = t_2 \in \mathrm{N}_0\ [\Gamma] \qquad M(z)\ \mathit{type}\ [\Gamma,\, z \in \mathrm{N}_0]}{\mathit{El}_{\mathrm{N}_0}(t_1) = \mathit{El}_{\mathrm{N}_0}(t_2) \in M(t_1)\ [\Gamma]}$$

2.4.2 Tipo singoletto

Il tipo singoletto, detto **Singleton** e indicato con N_1, contiene un solo elemeto, che è il singoletto appunto. Esso è definito dalle seguenti regole:

$$\text{F-S)}\ \frac{[\Gamma]\ \mathit{cont}}{\mathrm{N}_1\ \mathit{type}\ [\Gamma]}$$

$$\text{I-S)}\ \frac{[\Gamma]\ \mathit{cont}}{\star \in \mathrm{N}_1\ [\Gamma]}$$

$$\text{E-S)}\ \frac{t \in \mathrm{N}_1\ [\Gamma] \qquad M(z)\ \mathit{type}\ [\Gamma,\, z \in \mathrm{N}_1] \qquad c \in M(\star)\ [\Gamma]}{\mathit{El}_{\mathrm{N}_1}(t,c) \in M(t)\ [\Gamma]}$$

$$\text{C-S)}\ \frac{M(z)\ \mathit{type}\ [\Gamma,\, z \in \mathrm{N}_1] \qquad c \in M(\star)\ [\Gamma]}{\mathit{El}_{\mathrm{N}_1}(\star,c) = \mathrm{c} \in M(\star)\ [\Gamma]}$$

$$\text{eq-E-S)}\ \frac{t = s \in \mathrm{N}_1\ [\Gamma] \qquad M(z)\ \mathit{type}\ [\Gamma,\, z \in \mathrm{N}_1] \qquad c = d \in M(\star)\ [\Gamma]}{\mathit{El}_{\mathrm{N}_1}(t,c) = \mathit{El}_{\mathrm{N}_1}(s,d) \in M(t)\ [\Gamma]}\ ,$$

dove $\star$ è detto *elemento canonico*.

Remark 2.1. La scrittura $M(z)$ in $M(z)\mathit{type}\ [\Gamma,\, z \in \mathrm{N}_1]$ è una *metavariabile* per un tipo che può dipendere o meno da **z**. Quindi la scrittura $M(t)$ indica l'effetto della sostituzione in $M(z)$ di z con t, ovvero $M(t)$ sta per $M(z)[z/t] \equiv M(t)$.
Per essere rigorosi si dovrebbe scrivere la regola di eliminazione nel seguente modo:

$$\text{E-N}_1)_{\text{sub}}\ \frac{t \in \mathrm{N}_1\ [\Gamma] \qquad D\ \mathit{type}\ [\Gamma,\, z \in \mathrm{N}_1] \qquad c \in D[z/\star]\ [\Gamma]}{\mathit{El}_{\mathrm{N}_1}(t,c) \in D[z/t]\ [\Gamma]}$$

Per evitare ambiguità, nella pratica della descrizione in testi di teoria dei tipi si usa la scrittura $M(z)$ per agevolare la lettura e la comprensione, mentre in programmazione è preferibile usare la formulazione della regola $\text{E-N}_1)_{\text{sub}}$.

2.4.3 Tipo prodotto cartesiano

Per rappresentare in teoria dei tipi dipendenti il tipo prodotto $B \times C$, dati due tipi semplici B *type*[ ] e C *type*[ ], basta definire $B \times C \equiv \Sigma_{x \in B}\ C$.
Di seguito sono riportate le regole del tipo prodotto cartesiano:

$$\text{F-}\times)\ \frac{B\ \textit{type}\ [\Gamma] \qquad C\ \textit{type}\ [\Gamma]}{B \times C\ \textit{type}\ [\Gamma]}$$

$$\text{I-}\times)\ \frac{b \in B\ [\Gamma] \qquad c \in C\ [\Gamma]}{\langle b,c \rangle \in B \times C\ [\Gamma]}$$

$$\text{E}_1\text{-}\times)\ \frac{d \in B \times C\ [\Gamma]}{\pi_1(d) \in B\ [\Gamma]}$$

$$\text{E}_2\text{-}\times)\ \frac{d \in B \times C\ [\Gamma]}{\pi_2(d) \in C\ [\Gamma]}$$

$$\beta_1\text{-}\times)\ \frac{b \in B\ [\Gamma] \qquad c \in C\ [\Gamma]}{\pi_1(\langle b,c \rangle) = b \in B\ [\Gamma]}$$

$$\beta_2\text{-}\times)\ \frac{b \in B\ [\Gamma] \qquad c \in C\ [\Gamma]}{\pi_2(\langle b,c \rangle) = c \in C\ [\Gamma]}\ ,$$

dove π_1 e π_2 sono la *prima* e la *seconda proiezione*, definite rispettivamente come $\pi_1(\langle b,c \rangle) = b$ e $\pi_2(\langle b,c \rangle) = c$.

2.4.4 Tipo somma (binaria) disgiunta

Il tipo somma binaria si indica con la scrittura $B + C$, dove B *type* [ ] e C *type* [ ] sono tipi semplici. Di seguito sono riportate le sue regole:

$$\text{F-}+)\ \frac{B\ \textit{type}\ [\Gamma] \qquad C\ \textit{type}\ [\Gamma]}{B + C\ \textit{type}\ [\Gamma]}$$

$$\text{I}_1\text{-}+)\ \frac{b \in B\ [\Gamma] \qquad B\ \textit{type}\ [\Gamma] \qquad C\ \textit{type}\ [\Gamma]}{\text{inl}(b) \in B + C\ [\Gamma]}$$

$$\text{I}_2\text{-}+)\ \frac{c \in C\ [\Gamma] \qquad B\ \textit{type}\ [\Gamma] \qquad C\ \textit{type}\ [\Gamma]}{\text{inr}(c) \in B + C\ [\Gamma]}$$

$$\text{E-+)}\ \frac{\begin{array}{cc} M(z)\ \mathit{type}\ [\Gamma,\, z \in B + C] & t \in B + C\ [\Gamma] \\ e_B(x_1) \in M(\mathrm{inl}(x_1))\ [\Gamma,\, x_1 \in B] & e_C(x_2) \in M(\mathrm{inr}(x_2))\ [\Gamma,\, x_2 \in C] \end{array}}{\mathit{El}_+(b, e_B, \mathrm{e_C}) \in M(t)\ [\Gamma]}$$

$$\text{C}_1\text{-+)}\ \frac{\begin{array}{cc} M(z)\ \mathit{type}\ [\Gamma,\, z \in B + C] & b \in B\ [\Gamma] \\ e_B(x_1) \in M(\mathrm{inl}(x_1))\ [\Gamma,\, x_1 \in B] & e_C(x_2) \in M(\mathrm{inr}(x_2))\ [\Gamma,\, x_2 \in C] \end{array}}{\mathit{El}_+(\mathrm{inl}(b), e_B, e_C)) = e_B(b) \in M(\mathrm{inl}(b))\ [\Gamma]}$$

$$\text{C}_2\text{-+)}\ \frac{\begin{array}{cc} M(z)\ \mathit{type}\ [\Gamma,\, z \in B + C] & c \in C\ [\Gamma] \\ e_B(x_1) \in M(\mathrm{inl}(x_1))\ [\Gamma,\, x_1 \in B] & e_C(x_2) \in M(\mathrm{inr}(x_2))\ [\Gamma,\, x_2 \in C] \end{array}}{\mathit{El}_+(\mathrm{inr}(c), e_B, e_C)) = e_C(c) \in M(\mathrm{inr}(c))\ [\Gamma]}$$

Enunciamo ora la regola che garantisce che i costruttori di tipi conservano l'uguaglianza tra tipi:

$$\text{eq-F-+)}\ \frac{B_1 = B_2\ \mathit{type}\ [\Gamma] \qquad C_1 = C_2\ \mathit{type}\ [\Gamma]}{B_1 + C_1 = B_2 + C_2\ \mathit{type}\ [\Gamma]}$$

Infine, enunciamo le regole che garantiscono che i costruttori di termini conservano l'uguaglianza computazionale tra termini:

$$\text{eq-I}_1\text{-+)}\ \frac{b_1 = b_2 \in B\ [\Gamma] \qquad B + C\ \mathit{type}\ [\Gamma]}{\mathrm{inl}(b_1) = \mathrm{inl}(b_2) \in B + C\ [\Gamma]}$$

$$\text{eq-I}_2\text{-+)}\ \frac{c_1 = c_2 \in B\ [\Gamma] \qquad B + C\ \mathit{type}\ [\Gamma]}{\mathrm{inr}(c_1) = \mathrm{inr}(c_2) \in B + C\ [\Gamma]}$$

$$\text{eq-E-+)}\ \frac{\begin{array}{c} M(z)\ \mathit{type}\ [\Gamma,\, z \in B + C] \\ t_1 = t_2 \in B + C\ [\Gamma] \\ (e_B)_1(x_1) = (e_B)_2(x_1) \in M(\mathrm{inl}(x_1))\ [\Gamma,\, x_1 \in B] \\ (e_C)_1(x_2) = (e_C)_2(x_2) \in M(\mathrm{inr}(x_2))\ [\Gamma,\, x_2 \in C] \end{array}}{\mathit{El}_+(t_1, (e_B)_1, (\mathrm{e_C})_1) = \mathit{El}_+(t_2, (e_B)_2, (\mathrm{e_C})_2) \in M(t_1)\ [\Gamma]}$$

In alcune regole si è usata la notazione "inl" e "inr", che sta rispettivamente per inclusione sinistra e destra. Ad esempio, la scrittura $\mathrm{inr}(c) \in B + C\ [\Gamma]$ esprime il fatto che c è incluso in $B + C$.

Remark 2.2. Si noti che nello scrivere il costruttore eliminatore della disgiunzione $\mathit{El}_+(t_1, e_B, \mathrm{e_C}))$ a partire da $e_B(x_1) \in M(\mathrm{inl}(x_1))\ [x_1 \in B]$ e $e_C(x_2) \in M(\mathrm{inr}(x_2))\ [x_2 \in C]$, abbiamo considerato questi ultimi come costanti nella notazione dell'eliminatore astraendo sulle variabili.

2.4.5 Tipo delle funzioni (o tipo freccia)

Il tipo delle funzioni $B \to C$ si definisce in teoria dei tipi come $B \to C \equiv \Pi_{\mathrm{x}\in\mathrm{B}} C$, dati due tipi semplici B *type* [ ] e C *type* [ ]. La scrittura $\Pi_{\mathrm{x}\,\in\,\mathrm{B}} C$ indica il prodotto dipendente, che descriveremo in seguito.
Elenchiamo di seguito le regole del tipo delle funzioni:

$$\text{F-}\!\to)\ \frac{B\ \textit{type}\ [\Gamma] \qquad C\ \textit{type}\ [\Gamma]}{B \to C\ \textit{type}\ [\Gamma]}$$

$$\text{I-}\!\to)\ \frac{c(x) \in C(x)\ [\Gamma,\, x \in B]}{\lambda x^B.c(x) \in B \to C\ [\Gamma]}$$

$$\text{E-}\!\to)\ \frac{b \in B\ [\Gamma] \qquad f \in B \to C\ [\Gamma]}{\mathrm{Ap}(f,b) \in C\ [\Gamma]}$$

$$\text{C-}\!\to)\ \frac{b \in B\ [\Gamma] \qquad c(x) \in C\ [\Gamma,\, x \in B]}{\mathrm{Ap}(\lambda x^B.c(x),b) = c(b) \in C\ [\Gamma]}$$

2.4.6 Tipo dell'uguaglianza proposizionale di Martin-Löf

Il tipo dell'uguaglianza proposizionale è un tipo dipendente, introdotto da Martin-Löf per interpretare l'uguaglianza della logica predicativa intuizionista.
Di seguito elenchiamo le regole del tipo dell'uguaglianza proposizionale:

$$\text{F-Id)}\ \frac{A\ \textit{type}\ [\Gamma] \qquad a \in A\ [\Gamma] \qquad b \in A\ [\Gamma]}{\mathrm{Id}(A,a,b)\ \textit{type}\ [\Gamma]}$$

$$\text{I-Id)}\ \frac{a \in A\ [\Gamma]}{\mathrm{id}(a) \in \mathrm{Id}(A,a,a)\ [\Gamma]}$$

$$\text{E-Id)}\ \frac{\begin{array}{c} M(z_1,z_2,z_3)\ \textit{type}\ [\Gamma,\, z_1 \in A, z_2 \in A, z_3 \in \mathrm{Id}(A,z_1,z_2)] \quad a \in A\ [\Gamma] \\ b \in A\ [\Gamma] \qquad t \in \mathrm{Id}(A,a,b)\ [\Gamma] \qquad e(x) \in M(x,x,\mathrm{id}(x))\ [\Gamma,\, x \in A] \end{array}}{El_{\mathrm{Id}}(t,(x).e(x)) \in M(a,b,t)\ [\Gamma]}$$

$$\text{C-Id)}\ \frac{\begin{array}{c} M(z_1,z_2,z_3)\ \textit{type}\ [\Gamma,\, z_1 \in A, z_2 \in A, z_3 \in \mathrm{Id}(A,z_1,z_2)] \\ a \in A\ [\Gamma] \qquad\qquad e(x) \in M(x,x,\mathrm{id}(x)))\ [\Gamma,\, x \in A] \end{array}}{El_{\mathrm{Id}}(\mathrm{id}(a),e) = e(a) \in M(a,a,\mathrm{id}(a))\ [\Gamma]}$$

Descriviamo ora di seguito la regola che garantisce che i costruttori di tipo conservano l'uguaglianza tra tipi:

$$\text{eq-F-Id)}\ \frac{A_1 = A_2\ \textit{type}\ [\Gamma] \qquad a_1 = a_2 \in A_1\ [\Gamma] \qquad b_1 = b_2 \in A_1\ [\Gamma]}{\mathrm{Id}(A_1,a_1,b_1) = \mathrm{Id}(A_2,a_2,b_2)\ \textit{type}\ [\Gamma]}$$

Infine, diamo le regole che garantiscono che i costruttori di termini conservano l'uguaglianza computazionale tra termini, e che dicono che il tipo $\mathrm{Id}(A,z_1,z_2)$ $\textit{type}\ [\Gamma,z_1 \in A,\ z_2 \in A]$ è il tipo induttivamente generato dalla relazione riflessiva degli elementi di un dato tipo $A\ \textit{type}\ [\Gamma]$:

$$\text{eq-I-Id)}\ \frac{a = b \in A\ [\Gamma]}{\mathrm{id}(a) = \mathrm{id}(b) \in \mathrm{Id}(A,a,b)\ [\Gamma]}$$

$$\text{eq-E-Id)}\ \frac{\begin{array}{c} M(z_1,z_2,z_3)\ \textit{type}\ [\Gamma,\ z_1 \in A, z_2 \in A, z_3 \in \mathrm{Id}(A,z_1,z_2)] \qquad a \in A\ [\Gamma] \\ b \in A\ [\Gamma] \qquad t_1 = t_2 \in \mathrm{Id}(A,a,b)\ [\Gamma] \qquad e_1(x) = e_2(x) \in M(x,x,\mathrm{id}(x)))\ [\Gamma,\ x \in A] \end{array}}{El_{\mathrm{Id}}(t_1,(x).e_1(x)) = El_{\mathrm{Id}}(t_2,(x).e_2(x)) \in M(a,b,t_1)\ [\Gamma]}$$

2.4.7 Tipo prodotto dipendente

Il tipo prodotto dipendente, che è un tipo indiciato, si indica con la scrittura $\Pi_{x\in B}C(x)$, dove $B\ \textit{type}\ [\,]$ e $C\ \textit{type}\ [\,]$ sono tipi.
Elenchiamo di seguito le sue regole:

$$\text{F-}\Pi)\ \frac{C(x)\ \textit{type}\ [\Gamma,\ x \in B]}{\Pi_{x\in B}C(x)\ \textit{type}\ [\Gamma]}$$

$$\text{I-}\Pi)\ \frac{c(x) \in C(x)\ [\Gamma,\ x \in B]}{\lambda x^B.c(x) \in \Pi_{x\in B}C(x)\ [\Gamma]}$$

$$\text{E-}\Pi)\ \frac{b \in B\ [\Gamma] \qquad f \in \Pi_{x\in B}C(x)\ [\Gamma]}{\mathrm{Ap}(f,b) \in C(b)\ [\Gamma]}$$

$$\beta\text{C-}\Pi)\ \frac{b \in B\ [\Gamma] \qquad c(x) \in C(x)\ [\Gamma,\ x \in B]}{\mathrm{Ap}(\lambda x^B.c(x),b) = c(b) \in C(b)\ [\Gamma]}$$

Diamo poi la regola che garantisce che i costruttori di tipo conservano l'uguaglianza tra tipi:

$$\text{eq-list)}\ \frac{B_1 = B_2\ \textit{type}\ [\Gamma] \qquad C_1(x) = C_2(x)\ \textit{type}\ [\Gamma,\ x \in B_1]}{\Pi_{x\in B_1}C_1(x) = \Pi_{x\in B_2}C_2(x)\ \textit{type}\ [\Gamma]}$$

Diamo infine le regole che garantiscono che i costruttori di termini conservano l'uguaglianza computazionale tra termini:

$$\xi)\ \frac{c_1(x) = c_2(x) \in C(x)\ [\Gamma,\ x \in B]}{\lambda x^B.c_1(x) = \lambda x^B.c_2(x) \in \Pi_{x\in B}C(x)\ [\Gamma]}$$

$$\text{eq-E-}\Pi)\ \frac{b_1 = b_2 \in B\ [\Gamma] \qquad f_1 = f_2 \in \Pi_{x\in B}C(x)\ [\Gamma]}{\mathrm{Ap}(f_1,b_1) = \mathrm{Ap}(f_2,b_2) \in C(b)\ [\Gamma]}$$

La scrittura $\lambda x^B.c(x)$ è una notazione del lambda-calcolo di Church e rappresenta la funzione che ad ogni $b \in B$ associa $c(x)[b/c(x)]$, ossia $c(x)$ con x^B considerato come abbreviazione di b.
Con Ap(f,b) si denota invece l'applicazione di una funzione nel tipo dipendente su un argomento.

2.4.8 Tipo somma disgiunta indiciata

Il tipo somma disgiunta indiciata, che è un potenziamento indiciato del tipo somma disgiunta binaria ed è un tipo induttivo (in quanto generato dalle sue regole di introduzione tramite induzione), si indica con la scrittura $\Sigma_{x\in B}C(x)$, dove B *type* [ ] e C *type* [ ] sono tipi semplici. Tale tipo è anche un potenziamento con tipi dipendenti del tipo prodotto cartesiano (basta notare come si è definito quest'ultimo tipo).
Elenchiamo di seguito le sue regole:

$$\text{F-}\Sigma)\ \frac{C(x)\ \mathit{type}\ [\Gamma,\ x \in B]}{\Sigma_{x\in B}C(x)\ \mathit{type}\ [\Gamma]}$$

$$\text{I-}\Sigma)\ \frac{b \in B\ [\Gamma] \qquad c \in C(b)\ [\Gamma] \qquad C(x)\ \mathit{type}\ [\Gamma,\ x \in B]}{\langle b,c\rangle \in \Sigma_{x\in B}C(x)\ [\Gamma]}$$

$$\text{E-}\Sigma)\ \frac{\begin{array}{l} M(z)\ \mathit{type}\ [\Gamma,\ z \in \Sigma_{x\in B}C(x)] \\ t \in \Sigma_{x\in B}C(x)\ [\Gamma] \qquad e(x,y) \in M(\langle x,y\rangle)\ [\Gamma,\ x \in B,\ y \in C(x)] \end{array}}{El_\Sigma(t,e) \in M(t)\ [\Gamma]}$$

$$\text{C-}\Sigma)\ \frac{\begin{array}{l} M(z)\ \mathit{type}\ [\Gamma,\ z \in \Sigma_{x\in B}C(x)] \\ b \in B\ [\Gamma] \qquad c \in C(b)\ [\Gamma] \qquad e(x,y) \in M(\langle x,y\rangle)\ [\Gamma,\ x \in B,\ y \in C(x)] \end{array}}{El_\Sigma(\langle b,c\rangle,e) = e(b,c) \in M(\langle b,c\rangle)\ [\Gamma]}$$

Diamo di seguito la regola che garantisce che i costruttori di tipo conservano l'uguaglianza tra tipi:

$$\text{eq-list)}\ \frac{B_1 = B_2\ \mathit{type}\ [\Gamma] \qquad C_1(x) = C_2(x)\ \mathit{type}\ [\Gamma,\ x \in B_1]}{\Sigma_{x \in B_1} C_1(x) = \Sigma_{x \in B_2} C_2(x)\ \mathit{type}\ [\Gamma]}$$

Diamo infine le regole che garantiscono che i costruttori di termini conservano l'uguaglianza computazionale tra termini:

$$\text{eq-I-}\Sigma)\ \frac{b_1 = b_2 \in B\ [\Gamma] \qquad c_1 = c_2 \in C(b_1)\ [\Gamma] \qquad C(x)\ \mathit{type}\ [\Gamma,\ x \in B]}{\langle b_1, c_1\rangle = \langle b_2, c_2\rangle \in \Sigma_{x \in B} C(x)\ [\Gamma]}$$

$$\text{eq-E-}\Sigma)\ \frac{\begin{array}{l} M(z)\ \mathit{type}\ [\Gamma,\ z \in \Sigma_{x \in B} C(x)] \\ t_1 = t_2 \in \Sigma_{x \in B} C(x)\ [\Gamma] \\ e_1(x,y) = e_2(x,y) \in M(\langle x,y\rangle)\ [\Gamma,\ x \in B,\ y \in C(x)] \end{array}}{El_\Sigma(t_1 e_1) = El_\Sigma(t_2, e_2) \in M(t)\ [\Gamma]}$$

Capitolo 3

L'interpretazione di Curry-Howard-Martin-Löf nella teoria dei tipi MLTT_0

In questo capitolo definiamo l'interpretazione di Curry-Howard-Martin-Löf della logica intuizionista predicativa con uguaglianza nella teoria dei tipi $\mathbf{MLTT_0}$. Tale interpretazione si fonda sull'idea che i tipi rappresentano proposizioni dipendenti da un contesto e i loro elementi sono *proof-terms*. Tale interpretazione consente quindi di considerare $\mathbf{MLTT_0}$ come un calcolo logico e di interpretare i connettivi logici e i quantificatori universali ed esistenziali in teoria dei tipi, a patto però di restringere ad un tipo il dominio di quantificazione delle variabili e dotare ogni termine di un tipo a partire dalle variabili. In particolare, è possibile interpretare le formule della logica predicativa nella teoria dei tipi con i tipi finora descritti (compreso il tipo vuoto).

Nel seguito indichiamo con le metavariabili ϕ, ψ etc. le **formule della logica predicativa** $Form(\Gamma)$, con variabili tipate che occorrono in un contesto Γ della teoria dei tipi di Martin-Löf, generate come segue:

1. la costante falso $\perp$ è una formula in $Form(\Gamma)$;

2. la costante vero tt è una formula in $Form(\Gamma)$;

3. se ϕ e ψ sono formule in $Form(\Gamma)$, allora $\phi \vee \psi$ è una formula in $Form(\Gamma)$;

4. se ϕ e ψ sono formule in $Form(\Gamma)$, allora $\phi \to \psi$ è una formula in $Form(\Gamma)$;

5. se ϕ e ψ sono formule in $\mathit{Form}(\Gamma)$, allora ϕ & ψ è una formula in $\mathit{Form}(\Gamma)$;

6. se ϕ è una formula in $\mathit{Form}(\Gamma)$, allora $\neg\phi$ è una formula in $\mathit{Form}(\Gamma)$;

7. se ϕ è una formula in $\mathit{Form}(\Gamma,\ x{\in}A)$, allora $\forall_{x\in A}\phi$ è una formula in $\mathit{Form}(\Gamma)$;

8. se $t \in A\ [\Gamma]$ e $s \in A\ [\Gamma]$ sono derivabili in $\mathbf{MLTT_0}$, allora $t =_A s$ è una formula in $\mathit{Form}(\Gamma)$.

Indichiamo invece con **Form** l'unione di tutte le formule $\mathit{Form}[\Gamma]$ per ogni contesto Γ in teoria dei tipi, ovvero in $\mathbf{MLTT_0}$ con i costrutti definiti finora.

3.1 Traduzione propositions-as-sets di Curry-Howard-Martin-Löf (CHM)

Def 3.1. Definiamo di seguito l'interpretazione di formule logiche del linguaggio del primo ordine con uguaglianza, a partire dal predicato di uguaglianza proposizionale definito su termini tipati nella teoria dei tipi con i tipi definiti finora:

$$(\perp\ \in \mathit{Form}(\Gamma))^I \equiv \mathrm{N}_0\ \mathit{type}\ [\Gamma]$$

$$(\mathrm{tt} \in \mathit{Form}(\Gamma))^I \equiv \mathrm{N}_1\ \mathit{type}\ [\Gamma]$$

$$(\phi\ \&\ \psi \in \mathit{Form}(\Gamma))^I \equiv \phi^I\ \times\ \psi^I\ \mathit{type}\ [\Gamma]$$

$$(\phi \vee \psi \in \mathit{Form}(\Gamma))^I \equiv \phi^I\ +\ \psi^I\ \mathit{type}\ [\Gamma]$$

$$(\phi \rightarrow \psi \in \mathit{Form}(\Gamma))^I \equiv \Pi_{z\in\phi^I}\ \psi^I\ \mathit{type}\ [\Gamma]$$

$$(\neg\phi \in \mathit{Form}(\Gamma))^I \equiv \Pi_{z\in\phi^I}\ \mathrm{N}_0\ \mathit{type}\ [\Gamma]$$

$$(t = s)^I\ [\Gamma] \equiv \mathrm{Id}(A,t,s)\ \mathit{type}\ [\Gamma],$$
dove t e s sono termini di $A\ [\Gamma]$ derivabili in $\mathbf{MLTT_0}$

$$(\forall_{x\in A}\ \phi)^I\ [\Gamma] \equiv \Pi_{x\in A^I}\ \phi^I\ \mathit{type}\ [\Gamma]$$

$$(\exists_{x\in A}\ \phi)^I\ [\Gamma] \equiv \Sigma_{x\in A^I}\ \phi^I\ \mathit{type}\ [\Gamma].$$

Vogliamo ora provare che tale interpretazione consente di tradurre sequenti derivabili in logica intuizionista predicativa con uguaglianza (senza altri predicati atomici aggiunti) in sequenti derivabili in teoria dei tipi.
Per prima cosa, enunciamo alcuni risultati utili a tal scopo:

Def 3.2. Indichiamo con il giudizio α *prop* $[\Gamma]$, dove α è la traduzione di una formula del linguaggio predicativo con uguaglianza, un tipo α *type* $[\Gamma]$ derivabile nella teoria dei tipi finora descritta.

Def 3.3. Date le proposizioni derivabili in teoria dei tipi ϕ *prop* $[\Gamma]$ e α_i *prop* $[\Gamma]$, per i=1,...,n, introduciamo un nuovo giudizio ϕ *true* $[\Gamma, \alpha_1$ *true*,...,α_n *true*$]$ e lo diciamo derivabile nella teoria dei tipi $\mathcal{T}$ se in $\mathcal{T}$ esiste un *proof-term* **pf** tale che pf $\in \phi\ [\Gamma, x_1{\in}\alpha_1,...,x_n{\in}\alpha_n]$ è derivabile in $\mathcal{T}$.
Interpretiamo poi un sequente della logica del primo ordine con uguaglianza a partire dai predicati su termini tipati come $(\Sigma \vdash \Delta)^I \equiv (\Delta^\vee)^I$ *type* $[\Gamma,\ x \in (\Sigma^\&)^I]$, supposto che le variabili delle formule in Σ e Δ siano tipate nel contesto Γ (anche se $(\Delta^\vee)^I$ come tipo non dipende dall'assunzione $x \in (\Sigma^\&)^I$).
Ricordiamo infine che:
$\Sigma^\& \equiv$ tt   se Σ è la lista vuota
$\Sigma^\& \equiv \phi_1\ \&\ \phi_2\ ...\ \&\ \phi_n$ se $\Sigma \equiv \phi_1,...,\phi_n$
$\Delta^\& \equiv \bot$ se Δ è la lista vuota
$\Delta^\& \equiv \phi_1 \vee \phi_2\ ...\ \vee \phi_n$ se $\Delta \equiv \phi_1,...,\phi_n$.

Teorema 1. Date Σ e Δ liste di formule in $\mathit{Form}(\Gamma)$ con Γ contesto in teoria dei tipi, l'interpretazione *CHM* di un sequente di formule predicative con uguaglianza $\Sigma \vdash \Delta$ data dal giudizio $(\Delta^\vee)^I$ *type* $[\Gamma,\ x \in (\Sigma^\&)^I]$ risulta ben definita, nel senso che tale giudizio è derivabile nella teoria dei tipi descritta finora.

Supponiamo ora di avere un numero numerabile di variabili della logica intuizionista indicate con x_i, per $i \in$ Nat, e tipate con un tipo X qualsiasi ($x_i \in$ X).

Sia valido il seguente

Lemma 1. Date due liste di variabili $\Gamma \equiv x_{i1} \in$ X, ... , $x_{in} \in$ X e $\Delta \equiv x_{j1} \in$ X, ... , $x_{in} \in$ X, è sempre possibile costruire la lista, che denotiamo con Γ

$* \Delta$, di tutte le variabili in Γ e Δ senza ripetizioni in modo tale che ogni x_m $\in \Gamma * \Delta$ compare in Γ o in Δ e, viceversa, ogni $x_{ik} \in \Gamma$ compare in $\Gamma * \Delta$ e analogamente ogni $x_{jk} \in \Delta$ compare in $\Gamma * \Delta$ e le variabili in $\Gamma * \Delta$ sono ordinate per indice.

Possiamo ora dimostrare il **Teorema 1**:

Dimostrazione. Procediamo per induzione sulla formazione delle formule predicative con uguaglianza, supponendo di tradurre formule α con variabili x_i in un tipo A *type* $[\Gamma]$ con variabili $x_i \in$ X.
Innanzitutto, i casi base sono ben definiti: la costante $\perp^I$ si interpreta con il tipo N_0 *type* $[\ ]$, che è davvero un tipo in $\mathbf{MLTT_0}$, mentre la costante tt^I si interpreta con N_1 *type* $[\ ]$, che è anch'esso un tipo.
Ora, supponiamo che le formule α^I e β^I siano interpretate rispettivamente in un tipo A *type* $[\Gamma]$ e in un tipo B *type* $[\Sigma]$. Allora la formula $(\alpha \ \& \ \beta)^I$ è interpretata nel tipo $A \times B$ *type* $[\Gamma * \Sigma]$, che si deriva in $\mathbf{MLTT_0}$ in quanto A *type* $[\Gamma * \Sigma]$ e B *type* $[\Gamma * \Sigma]$ si derivano rispettivamente da A *type* $[\Gamma]$ e B *type* $[\Sigma]$ applicando le opportune regole di scambio e indebolimento descritte al capitolo 2.
Analogamente, si conclude che anche l'interpretazione delle formule $(\alpha \vee \beta)^I$ e $(\alpha \to \beta)^I$ rispettivamente come $A + B$ *type* $[\Gamma * \Sigma]$ e $A \to B$ *type* $[\Gamma * \Sigma]$ è ben definita, nel senso che entrambi i giudizi sono derivabili in $\mathbf{MLTT_0}$.
Infine, se la formula $(\alpha(x))^I$ è interpretata nel tipo $A(x)$ *type* $[\Gamma, x \in B]$ (dove B è un tipo), si ha che le formule $(\forall_x \alpha(x))^I$ ed $(\exists_x \alpha(x))^I$ si interpretano rispettivamente nei tipi $\Pi_{x \in B} A(x)$ *type* $[\Gamma]$ e $\Sigma_{x \in B} A(x)$ *type* $[\Gamma]$, entrambi ben definiti per le regole di formazione rispettivamente del tipo prodotto dipendente e del tipo somma disgiunta indiciata. $\square$

Def 3.4. Date Σ e Δ liste di formule in $Form(\Gamma)$ con Γ contesto in teoria dei tipi, si dice che il sequente $\Sigma \vdash \Delta$ è valido in $\mathbf{MLTT_0}$ se e solo se esiste un *proof-term* pf tale che $\mathrm{pf} \in (\Delta^\vee)^I$ $[\Gamma, x \in (\Sigma^\&)^I]$ è derivabile in $\mathbf{MLTT_0}$.

Remark 3.1. Si noti che il sequente logico $\Delta \vdash \phi$ si interpreta nell'esistenza di un *proof-term* di ϕ^I $[(\Delta^\&)^I]$.

Teorema 2. I sequenti derivabili nella deduzione naturale $\mathbf{DNI}_=$ sono tutti validi nella teoria dei tipi finora descritta.

A questo punto abbiamo tutti gli strumenti necessari a dimostrare che l'interpretazione delle formule data consente di tradurre sequenti derivabili in logica intuizionista predicativa con uguaglianza (senza altri predicati atomici aggiunti) in sequenti derivabili in teoria dei tipi.

In particolare, prima mostriamo che opportune regole di $\mathbf{MLTT_0}$ hanno una corrispondenza con regole del calcolo dei sequenti per la deduzione naturale intuizionista con uguaglianza, e poi che anche da tali regole di $\mathbf{DNI}_=$ ricaviamo le corrispondenti regole di $\mathbf{MLTT_0}$, provando così anche il **Teorema 2**:

1. $(\perp \in \mathit{Form}(\Gamma))^I \equiv \mathrm{N}_0 \ \mathit{type} \ [\Gamma]$

   Dimostrazione. Consideriamo il giudizio $\psi \ \mathit{prop} \ [\Gamma]$.

   Guardiamo alla regola di eliminazione del tipo vuoto:

$$\text{E-N}_0)\ \frac{t \in \mathrm{N}_0 \ [\Gamma] \qquad M(z) \ \mathit{type} \ [\Gamma, \, z \in \mathrm{N}_0]}{El_{\mathrm{N}_0}(t) \in M(t) \ [\Gamma]}$$

   Questa, per la Def. 3.1, equivale alla regola:

$$\text{E-N}_0)\ \frac{t \in \perp^I \ [\Gamma] \qquad \psi \ \mathit{prop} \ [\Gamma, \, z \in \perp^I]}{El_\perp(t) \in \psi \ [\Gamma]}$$

   Applicando ora la Def. 3.2, tale regola si riscrive come segue:

$$\text{E-N}_0)\ \frac{\perp^I \ \mathit{true} \ [\Gamma] \qquad \psi \ \mathit{prop} \ [\Gamma, \, \perp^I \ \mathit{true}]}{\psi \ \mathit{true} \ [\Gamma]}$$

   Si conclude notando che quest'ultima regola corrisponde, in deduzione naturale, alla regola "ex-f-q":

$$\frac{\vdash_\Gamma \perp}{\vdash_\Gamma \psi}\ \text{ex-f-q}$$

   Viceversa, consideriamo la regola "ex-f-q" di $\mathbf{DNI}_=$:

$$\frac{\vdash \perp}{\vdash \psi}\ \text{ex-f-q}$$

   Essa, per la Def. 3.2, si riscrive come

$$\frac{\mathrm{N}_0 \ \mathit{true} \ [\,]}{\psi^I \ \mathit{true} \ [x \in A]}\ \text{ex-f-q}$$

dove A è un tipo fissato a cui appartengono tutte le variabili di ψ (in tal caso x).
Poichè i giudizi premessa e conclusione di tale regola sono entrambi derivabili in **MLTT** per il Teorema 1, applicando la Def. 3.2 si ottiene la regola

$$\frac{t \in \mathrm{N}_0\ [\,]}{El_{\mathrm{N}_0}(t) \in \psi^I\ [x \in A]}\ \text{ex-f-q}$$

che corrisponde alla regola E-N_0) di eliminazione del tipo vuoto. □

2. $(\mathrm{tt} \in \mathit{Form}(\Gamma))^I \equiv \mathrm{N}_1\ \mathit{type}\ [\Gamma]$

Dimostrazione. Partiamo dalla regola di introduzione del tipo singoletto:

$$\text{I-S)}\ \frac{[\Gamma]\ \mathit{cont}}{\star \in \mathrm{N}_1\ [\Gamma]}$$

Questa, utilizzando la Def. 3.1, si riscrive nel seguente modo:

$$\text{I-S)}\ \frac{[\Gamma]\ \mathit{cont}}{\star \in \mathrm{tt}^I\ [\Gamma]}$$

Essa, a sua volta, per la Def. 3.2 equivale alla regola:

$$\text{I-S)}\ \frac{[\Gamma]\ \mathit{cont}}{\mathrm{tt}^I\ \mathit{true}\ [\Gamma]}$$

che corrisponde, in deduzione naturale, all'assioma del vero $\overset{\text{ax-tt}}{\vdash_\Gamma \mathrm{tt}}$.

P.S. La regola di eliminazione del tipo singoletto non aggiunge nuove regole dal punto di vista logico, dal momento che il tipo singoletto, pensato come proposizione, è la proposizione vera; la regola di eliminazione serve per rappresentare l'uguaglianza sulle dimostrazioni, o meglio, è una sorta di unicità delle dimostrazioni.

Consideriamo ora l'assioma $\overset{\text{ax-tt}}{\vdash \mathrm{tt}}$ di $\mathbf{DNI}_=$.
Applicando la Def. 3.2, esso si riscrive come $\mathrm{tt}^I\ \mathit{true}\ [\,]$; per il Teorema 1 tale giudizio è derivabile in **MLTT**, perciò per la Def. 3.2 esiste un *proof term* appartenente a $\mathrm{N}_1\ [\,]$. Ricordando che $\star \in \mathrm{N}_1\ [\,]$ e che $[\,]$

cont è assioma in **MLTT**, si ricava la regola di introduzione del tipo singoletto:

$$\text{I-S)}\ \frac{[\ ]\ \mathit{cont}}{\star \in \mathrm{N}_1\ [\ ]}$$

$\square$

3. $(\phi \ \&\ \psi \in \mathit{Form}(\Gamma))^I \equiv \phi^I \times \psi^I\ \mathit{type}\ [\Gamma]$

Dimostrazione. Consideriamo due giudizi $\phi\ \mathit{prop}\ [\Gamma]$ e $\psi\ \mathit{prop}\ [\Gamma]$.

Guardiamo alla regola di introduzione del prodotto cartesiano:

$$\text{I-}\times)\ \frac{b \in B\ [\Gamma] \qquad c \in C\ [\Gamma]}{\langle b,c\rangle \in B \times C\ [\Gamma]}$$

Essa, utilizzando la Def. 3.1, ossia pensando a ϕ e ψ come tipi anzichè come *prop*, si può riscrivere nel seguente modo:

$$\text{I-}\times)\ \frac{b \in \phi^I\ [\Gamma] \qquad c \in \psi^I\ [\Gamma]}{\langle b,c\rangle \in \phi^I \times \psi^I\ [\Gamma]}$$

Ora, per la Def. 3.2, b $\in \phi^I\ [\Gamma]$ significa $\phi^I\ \mathit{true}\ [\Gamma]$, c $\in \psi^I\ [\Gamma]$ significa $\psi^I\ \mathit{true}\ [\Gamma]$ e $\langle b,c\rangle \in \phi^I \times \psi^I\ [\Gamma]$ significa $\phi^I\ \&\ \psi^I\ \mathit{true}\ [\Gamma]$.

Allora la regola I-$\times$) diventa:

$$\text{I-}\times)\ \frac{\phi^I\ \mathit{true}\ [\Gamma] \qquad \psi^I\ \mathit{true}\ [\Gamma]}{(\phi\ \&\ \psi)^I\ \mathit{true}\ [\Gamma]}$$

Tale regola corrisponde, in deduzione naturale, alla regola"&–D":

$$\frac{\vdash_\Gamma \phi \qquad \vdash_\Gamma \psi}{\vdash_\Gamma \phi\ \&\ \psi}\ \text{\&–D}$$

Partiamo ora dalle due regole di eliminazione del tipo prodotto cartesiano:

$$\text{E}_1\text{-}\times)\ \frac{d \in B \times C\ [\Gamma]}{\pi_1(d) \in B\ [\Gamma]}$$

$$\text{E}_2\text{-}\times)\ \frac{d \in B \times C\ [\Gamma]}{\pi_2(d) \in C\ [\Gamma]}\ ,$$

che, per la Def. 3.1, si riscrivono nel seguente modo:

$$\text{E}_1\text{-}\times)\ \frac{d \in \phi^I \times \psi^I\ [\Gamma]}{\pi_{\mathit{1}}(d) \in \phi^I\ [\Gamma]}$$

$$\text{E}_2\text{-}\times)\ \frac{d \in \phi^I \times \psi^I\ [\Gamma]}{\pi_{\mathit{2}}(d) \in \psi^I\ [\Gamma]}\ .$$

Utilizzando invece la Def. 3.2, tali regole si riformulano come segue:

$$\text{E}_1\text{-}\times)\ \frac{(\phi\ \&\ \psi)^I\ \mathit{true}\ [\Gamma]}{\phi^I\ \mathit{true}\ [\Gamma]}$$

$$\text{E}_2\text{-}\times)\ \frac{(\phi\ \&\ \psi)^I\ \mathit{true}\ [\Gamma]}{\psi^I\ \mathit{true}\ [\Gamma]}\ ,$$

Si conclude notando che queste ultime due regole corrispondono, in deduzione naturale, alle regole "&–Sn_1" e "&–Sn_1":

$$\frac{\vdash_\Gamma \phi\ \&\ \psi}{\vdash_\Gamma \phi}\ \&\text{–Sn}_1$$

$$\frac{\vdash_\Gamma \phi\ \&\ \psi}{\vdash_\Gamma \psi}\ \&\text{–Sn}_2\ ,$$

Partiamo ora invece dalla regola &–D della deduzione naturale:

$$\frac{\vdash \phi \qquad \vdash \psi}{\vdash \phi\ \&\ \psi}\ \&\text{–D}$$

Per la Def. 3.2 essa si riscrive come segue:

$$\frac{\phi^I\ \mathit{true}\ [x \in A] \qquad \psi^I\ \mathit{true}\ [y \in A]}{\phi^I \times \psi^I\ \mathit{true}\ [x \in A,\ y \in A]}\ \&\text{–D}\ ,$$

dove A è un tipo fissato a cui supponiamo che appartengano tutte le variabili di ϕ e ψ.
Ora, per il Teorema 1 e la Def. 3.2, tale regola diventa

$$\frac{b \in \phi^I\ [x \in A] \qquad c \in \psi^I\ [y \in A]}{\langle b,c\rangle \in \phi^I \times \psi^I\ [x \in A,\ y \in A]}\ \&\text{–D}\ ,$$

che corrisponde alla regola I-$\times$) del tipo prodotto cartesiano.
Considerando infine le regole di $\mathbf{DNI}_=$

$$\frac{\vdash \phi \;\&\; \psi}{\vdash \phi}\;\&\text{–Sn}_1$$

$$\frac{\vdash \phi \;\&\; \psi}{\vdash \psi}\;\&\text{–Sn}_2\;,$$

e applicando la Def. 3.2, si ottengono le regole

$$\frac{\phi^I \times \psi^I \; true \; [\, x \in A,\, y \in A]}{\phi^I \; true \; [x \in A]}\;\&\text{–Sn}_1$$

$$\frac{\phi^I \times \psi^I \; true \; [x \in A,\, y \in A]}{\psi^I \; true \; [y \in A]}\;\&\text{–Sn}_2\;,$$

dove A è un tipo fissato a cui appartengono le variabili di ϕ e ψ.
Allora, per il Teorema 1 e la Def. 3.2, le regole si riscrivono come segue:

$$\frac{d \in \phi^I \times \psi^I \; [x \in A,\, y \in A]}{\pi_1(d) \in \phi^I \; [x \in A]}\;\&\text{–Sn}_1$$

$$\frac{d \in \phi^I \times \psi^I \; [x \in A,\, y \in A]}{\pi_2(d) \in \psi^I \; [y \in A]}\;\&\text{–Sn}_2\;,$$

che sono rispettivamente le regole E$_1$-$\times$) e E$_2$-$\times$) di eliminazione del tipo prodotto cartesiano. $\square$

4. $\phi \vee \psi \in \mathit{Form}(\Gamma) \equiv \phi + \psi \; \mathit{type} \; [\Gamma]$

   Dimostrazione. Siano $\phi \; \mathit{prop} \; [\Gamma]$, $\psi \; \mathit{prop} \; [\Gamma]$ e $\gamma \; \mathit{prop} \; [\Gamma]$ tre giudizi.

   Partendo dalle due regole di introduzione del tipo somma disgiunta

$$\text{I}_1\text{-+)}\;\frac{b \in B \; [\Gamma] \qquad B \; \mathit{type} \; [\Gamma] \qquad C \; \mathit{type} \; [\Gamma]}{\mathrm{inl}(b) \in B + C \; [\Gamma]}$$

$$\text{I}_2\text{-+)}\;\frac{c \in C \; [\Gamma] \qquad B \; \mathit{type} \; [\Gamma] \qquad C \; \mathit{type} \; [\Gamma]}{\mathrm{inr}(c) \in B + C \; [\Gamma]}$$

e applicando la Def. 3.1, si ottengono le regole:

$$\mathrm{I_1\text{-}+)}\ \frac{b \in \phi\ [\Gamma] \qquad \phi\ \mathit{prop}\ [\Gamma] \qquad \psi\ \mathit{prop}\ [\Gamma]}{\mathrm{inl}(b) \in \phi + \psi\ [\Gamma]}$$

$$\mathrm{I_2\text{-}+)}\ \frac{c \in \psi\ [\Gamma] \qquad \phi\ \mathit{prop}\ [\Gamma] \qquad \psi\ \mathit{prop}\ [\Gamma]}{\mathrm{inr}(c) \in \phi + \psi\ [\Gamma]}$$

Queste, per la Def. 3.2, equivalgono alle seguenti regole:

$$\mathrm{I_1\text{-}+)}\ \frac{\phi\ \mathit{true}\ [\Gamma] \qquad \phi\ \mathit{prop}\ [\Gamma] \qquad \psi\ \mathit{prop}\ [\Gamma]}{\phi \vee \psi\ \mathit{true}\ [\Gamma]}$$

$$\mathrm{I_2\text{-}+)}\ \frac{\psi\ \mathit{true}\ [\Gamma] \qquad \phi\ \mathit{prop}\ [\Gamma] \qquad \psi\ \mathit{prop}\ [\Gamma]}{\phi \vee \psi\ \mathit{true}\ [\Gamma]}$$

In deduzione naturale tali regole corrispondono alle regole "$\vee$–Dn_1" e "$\vee$–Dn_2":

$$\frac{\vdash_\Gamma \phi}{\vdash_\Gamma \phi \vee \psi}\ \vee\text{–}\mathrm{Dn}_1$$

$$\frac{\vdash_\Gamma \psi}{\vdash_\Gamma \phi \vee \psi}\ \vee\text{–}\mathrm{Dn}_2$$

Consideriamo poi la regola di eliminazione del tipo somma disgiunta:

$$\mathrm{E\text{-}+)}\ \frac{\begin{array}{cc} M(z)\ \mathit{type}\ [\Gamma, z \in B + C] & t \in B + C\ [\Gamma] \\ e_B(x_1) \in M(\mathrm{inl}(x_1))\ [\Gamma, x_1 \in B] & e_C(x_2) \in M(\mathrm{inr}(x_2))\ [\Gamma, x_2 \in C] \end{array}}{El_+(b, e_B, \mathrm{e_C}) \in M(t)\ [\Gamma]}$$

Essa, utilizzando la Def. 3.1, si riscrive come segue:

$$\mathrm{E\text{-}+)}\ \frac{\begin{array}{cc} \gamma\ \mathit{prop}\ [\Gamma, z \in \phi^I + \psi^I] & t \in \phi^I + \psi^I\ [\Gamma] \\ e_B(x_1) \in \gamma\ [\Gamma, x_1 \in \phi^I] & e_C(x_2) \in \gamma\ [\Gamma, x_2 \in \psi^I] \end{array}}{El_+(b, e_B, \mathrm{e_C}) \in \gamma\ [\Gamma]}$$

Questa, per la Def. 3.2, equivale alla seguente regola:

$$\text{E-+)}\ \frac{\gamma\ prop\ [\Gamma,\ (\phi \vee \psi)^I\ true] \qquad (\phi \vee \psi)^I\ true\ [\Gamma] \qquad \gamma\ true\ [\Gamma,\ \phi^I\ true] \qquad \gamma\ true\ [\Gamma,\ \psi^I\ true]}{\gamma\ true\ [\Gamma]}$$

Si conclude notando che tale regola corrisponde, in deduzione naturale, alla regola "$\vee$–Sn":

$$\frac{\vdash_\Gamma \phi \vee \psi \qquad \phi \vdash_\Gamma \gamma \qquad \psi \vdash_\Gamma \gamma}{\vdash_\Gamma \gamma}\ \vee\text{–Sn}$$

Viceversa, consideriamo le regole "$\vee$–Dn$_1$" e "$\vee$–Dn$_2$" di $\mathbf{DNI}_=$:

$$\frac{\vdash \phi}{\vdash \phi \vee \psi}\ \vee\text{–Dn}_1$$

$$\frac{\vdash \psi}{\vdash \phi \vee \psi}\ \vee\text{–Dn}_2$$

Esse, per la Def. 3.2, si riscrivono nel seguente modo:

$$\frac{\phi^I\ true\ [x \in A]}{\phi^I + \psi^I\ true\ [x \in A,\ y \in A]}\ \vee\text{–Dn}_1$$

$$\frac{\psi^I\ true\ [y \in A]}{\phi^I + \psi^I\ true\ [\ x \in A,\ y \in A]}\ \vee\text{–Dn}_2\ ,$$

dove A è un tipo fissato cui appartengono le variabili di ϕ e ψ.
Applicando il Teorema 1 e la Def. 3.2 tali regole diventano:

$$\frac{b \in \phi^I\ [x \in A]}{\text{inl}(b) \in \phi^I + \psi^I\ [x \in A,\ y \in A]}\ \vee\text{–Dn}_1$$

$$\frac{c \in \psi^I\ [y \in A]}{\text{inr}(c) \in \phi^I + \psi^I\ [x \in A,\ y \in A]}\ \vee\text{–Dn}_2\ .$$

Essendo ϕ^I e ψ^I tipi, le regole ottenute assomigliano alle regole I$_1$-+) e I$_2$-+) di introduzione del tipo somma disgiunta.
Partendo invece dalla regola di $\mathbf{DNI}_=$

$$\frac{\vdash \phi \vee \psi \qquad \phi \vdash \gamma \qquad \psi \vdash \gamma}{\vdash \gamma}\ \vee\text{–Sn}$$

e utilizzando la Def. 3.2, si ricava la regola

$$\frac{\phi^I{+}\psi^I\,true[x{\in}A,y{\in}A] \qquad \gamma^I\,true[x{\in}A,z{\in}A,\phi^I\,true] \qquad \gamma^I\,true[y{\in}A,z{\in}A,\psi^I\,true]}{\gamma^I\ true\ [z{\in}A]}\ \vee\text{–Sn}$$

Per il Teorema 1 e la Def. 3.2, tale regola si riscrive come segue:

$$\frac{t{\in}\phi^I{+}\psi^I[x{\in}A,y{\in}A] \qquad e_\phi(x_1){\in}\gamma^I[x{\in}A,z{\in}A,x_1{\in}\phi^I] \qquad e_\psi(x_2){\in}\gamma^I[y{\in}A,z{\in}A,x_2{\in}\psi^I]}{El_+(t,e_\phi,e_\psi)\ \in\ \gamma^I\ \ [z{\in}A]}$$

che corrisponde alla regola E-+) di eliminazione del tipo somma disgiunta. □

5. $(\phi \to \psi \in \mathit{Form}(\Gamma))^I \equiv \Pi_{z \in \phi^I}\ \psi^I\ \mathit{type}\ [\Gamma]$

   Dimostrazione. Siano ϕ *prop* $[\Gamma]$ e ψ *prop* $[\Gamma]$ due giudizi.

   Consideriamo la regola di introduzione del tipo delle funzioni:

$$\text{I-}{\to})\ \frac{c(x)\ \in\ C(x)\ [\Gamma,\ x\ \in\ B]}{\lambda x^B.c(x)\ \in\ B\ \to\ C\ [\Gamma]}$$

   Applicando la Def. 3.1, essa si riscrive come segue:

$$\text{I-}{\to})\ \frac{c(x)\ \in\ \psi^I\ \ [\Gamma,\ x\ \in\ \phi^I]}{\lambda x^B.c(x)\ \in\ (\phi\ \to\ \psi)^I\ \ [\Gamma]}$$

   Tale regola, per la Def. 3.2, equivale alla seguente:

$$\text{I-}{\to})\ \frac{\psi^I\ \ true\ [\Gamma,\ \phi^I\ \ true]}{(\phi\ \to\ \psi)^I\ \ true\ [\Gamma]}\ ,$$

   che, in deduzione naturale, corrisponde alla regola "→–D":

$$\frac{\phi \vdash_\Gamma \psi}{\vdash_\Gamma\ \phi \to \psi}\ \to\text{–D}$$

   Partendo ora dalla regola di eliminazione del tipo delle funzioni

$$\text{E-}{\to})\ \frac{b\ \in\ B\ [\Gamma] \qquad f\ \in\ B\ \to\ C\ [\Gamma]}{\mathrm{Ap}(f,b)\ \in\ C\ \ [\Gamma]}$$

e applicando la Def. 3.1, si ottiene la seguente regola:

$$\text{E-}\rightarrow)\ \frac{b \in \phi^I\ [\Gamma] \qquad f \in (\phi \rightarrow \psi)^I\ [\Gamma]}{\mathrm{Ap}(f,b) \in \psi^I\ [\Gamma]}$$

Per la Def. 3.2, essa equivale alla regola che segue:

$$\text{E-}\rightarrow)\ \frac{\phi^I\ \mathit{true}\ [\Gamma] \qquad (\phi \rightarrow \psi)^I\ \mathit{true}\ [\Gamma]}{\psi^I\ \mathit{true}\ [\Gamma]}\ ,$$

che, in deduzione naturale, corrisponde al *modus ponens*:

$$\frac{\vdash_\Gamma \phi \qquad \vdash_\Gamma \phi \rightarrow \psi}{\vdash_\Gamma \psi}\ ,$$

Viceversa, consideriamo la regola "→–D" di $\mathbf{DNI}_=$:

$$\frac{\phi \vdash \psi}{\vdash \phi \rightarrow \psi}\ \rightarrow\text{–D}$$

Utilizzando la Def. 3.2, essa si riscrive come segue:

$$\frac{\psi^I\ \mathit{true}\ [x \in A,\ y \in A,\ \phi^I\ \mathit{true}]}{(\phi \rightarrow \psi)^I\ \mathit{true}\ [x \in A,\ y \in A]}\ \rightarrow\text{–D}\ ,$$

dove A è un tipo fissato contenente le variabili di ϕ e ψ.
Per il Teorema 1 e la Def. 3.2, si ottiene la regola

$$\frac{c(x') \in \psi^I\ [x \in A,\ y \in A,\ x' \in \phi^I]}{\lambda x'.c(x') \in (\phi \rightarrow \psi)^I\ [x \in A,\ y \in A]}\ \rightarrow\text{–D}\ ,$$

che è la regola I-→) di introduzione del tipo freccia.
Partendo invece dal *modus ponens*

$$\frac{\vdash \phi \qquad \vdash \phi \rightarrow \psi}{\vdash \psi}$$

e applicando la Def. 3.2, si ricava la regola

$$\frac{\phi^I\ \mathit{true}\ [x \in A] \qquad (\phi \rightarrow \psi)^I\ \mathit{true}\ [x \in A,\ y \in A]}{\psi^I\ \mathit{true}\ [y \in A]}\ .$$

Per il Teorema 1 e la Def. 3.2, essa si riscrive come

$$\frac{b \in \phi^I\ [x \in A] \qquad f \in (\phi \to \psi)^I\ [x \in A,\ y \in A]}{\mathrm{Ap}(f,b) \in \psi^I\ [y \in A]}\ ,$$

che corrisponde alla regola E-$\to$) di eliminazione del tipo freccia.
Ciò conclude la prova. $\square$

6. $(\neg\phi \in \mathit{Form}(\Gamma))^I \equiv \Pi_{z \in \phi^I}\ \mathrm{N}_0\ \mathit{type}\ [\Gamma]$

   Dimostrazione. Sappiamo che $\neg\phi \equiv \phi \to \bot$ per definizione, $\bot^I \equiv \mathrm{N}_0$ dalla *Dimostrazione* di 1. e $(\phi \to \psi)^I \equiv \Pi_{z \in \phi^I}\ \psi^I$ dalla *Dimostrazione* di 5. Si conclude dunque che $(\neg\phi \in \mathit{Form}(\Gamma))^I \equiv \Pi_{z \in \phi^I}\ \mathrm{N}_0\ \mathit{type}\ [\Gamma]$. $\square$

7. $(t = s)^I\ [\Gamma] \equiv \mathrm{Id}(A,t,s)\ \mathit{type}\ [\Gamma]$

   Dimostrazione. Consideriamo il giudizio $\phi\ \mathit{prop}\ [\Gamma]$.

   Guardiamo alla regola di introduzione del tipo dell'uguaglianza proposizionale:

$$\text{I-Id)}\ \frac{a \in A\ [\Gamma]}{\mathrm{id}(a) \in \mathrm{Id}(A,a,a)\ [\Gamma]}$$

   Questa, utilizzando la Def. 3.2 (applicando la Def. 3.1 si ottiene la stessa regola), diventa:

$$\text{I-Id)}\ \frac{a \in A\ [\Gamma]}{(a = a)^I\ \mathit{true}\ [\Gamma]}\ ,$$

   che corrisponde all'assioma dell'uguaglianza $\overset{=-\mathrm{ax}}{\vdash_\Gamma a = a}$ in deduzione naturale.

   Partendo invece dalla regola di eliminazione del tipo dell'uguaglianza proposizionale

$$\text{E-Id)}\ \frac{\begin{array}{c} M(z_1,z_2,z_3)\ \mathit{type}\ [\Gamma,\ z_1 \in A, z_2 \in A, z_3 \in \mathrm{Id}(A,z_1,z_2)] \quad a \in A\ [\Gamma] \\ b \in A\ [\Gamma] \qquad t \in \mathrm{Id}(A,a,b)\ [\Gamma] \qquad e(x) \in M(x,x,\mathrm{id}(x))\ [\Gamma,\ x \in A] \end{array}}{\mathit{El}_{\mathrm{Id}}(t,(x).e(x)) \in M(a,b,t)\ [\Gamma]}$$

   e applicando la Def. 3.1, si ottiene la regola seguente:

$$\text{E-Id)}\ \frac{\phi(z_1,z_2)\ prop\ [\Gamma,\ z_1 \in A, z_2 \in A, z_3 \in \mathrm{Id}(A,z_1,z_2)] \qquad a \in A\ [\Gamma] \qquad b \in A\ [\Gamma] \qquad t \in \mathrm{Id}(A,a,b)\ [\Gamma] \qquad e(x) \in \phi(x,x)\ [\Gamma,\ x \in A]}{El_{\mathrm{Id}}(t,(x).e(x)) \in \phi(a,b)\ [\Gamma]}$$

Tale regola, per la Def. 3.2, equivale alla regola:

$$\text{E-Id)}\ \frac{\phi(z_1,z_2)\ prop\ [\Gamma,\ z_1 \in A, z_2 \in A,\ z_1{=}z_2\ true)] \qquad a \in A\ [\Gamma] \qquad b \in A\ [\Gamma] \qquad (a{=}b)^I\ true\ [\Gamma] \qquad \phi(x,x)\ true\ [\Gamma,\ x \in A]}{\phi(a,b)\ true\ [\Gamma]}$$

che, in deduzione naturale, assomiglia alla regola "=–Sn":

$$\frac{a \in A\ [\Gamma] \qquad b \in A\ [\Gamma] \qquad \vdash_\Gamma a{=}b \qquad \vdash_\Gamma \phi(a,a)}{\vdash_\Gamma \phi(b,b)}\ .$$

Viceversa, consideriamo l'assioma dell'uguaglianza $\overline{\vdash a = a}^{\,= -\,\mathrm{ax}}$ della deduzione naturale.
Utilizzando la Def. 3.2 esso si riscrive come

$$\mathrm{Id}(A,a,a)\ true\ [a \in A],$$

dova A è un tipo fissato a cui appartengono a e b.
Per il Teorema 1 e ancora per la Def. 3.2 tale giudizio diventa

$$\mathrm{id}(a) \in \mathrm{Id}(A,a,a)\ [a \in A].$$

Notiamo che tale scrittura corrisponde alla regola I-Id) di introduzione del tipo dell'uguaglianza proposizionale di Martin-Löf:

$$\text{I-Id)}\ \frac{a \in A\ [\Gamma]}{\mathrm{id}(a) \in \mathrm{Id}(A,a,a)\ [\Gamma]}$$

Infine, partendo dalla regola "=–Sn" di $\mathbf{DNI}_=$

$$\frac{\vdash a{=}b \qquad \vdash \phi(a,a)}{\vdash \phi(b,b)}\ {=}\text{–Sn}$$

e applicando la Def. 3.2, si ottiene la regola

$$\frac{\mathrm{Id}(A,a,b)\ \mathit{true}\ [a \in A,\ b \in A] \qquad \phi(a,a)^I\ \mathit{true}\ [a \in A,\ x \in A]}{\phi(b,b)^I\ \mathit{true}\ [b \in A,\ x \in A]}\ =\text{–Sn}$$

Essa, per il Teorema 1 e la Def. 3.2, si riscrive come segue:

$$\frac{t \in \mathrm{Id}(A,a,b)\ [a \in A,\ b \in A] \qquad e(x) \in \phi(x,x)^I\ [a \in A,\ x \in A]}{El_{\mathrm{Id}}(t,(x).e(x)) \in \phi(a,b)^I\ [b \in A,\ x \in A]}\ =\text{–Sn}$$

che corrisponde alla regola E-Id) di eliminazione del tipo dell'uguaglianza proposizionale di Martin-Löf. □

8. $(\forall_{x \in A}\ \phi)^I\ [\Gamma] \equiv \Pi_{x \in A^I}\ \phi^I\ \mathit{type}\ [\Gamma]$

   Dimostrazione. Sia ϕ *prop* $[\Gamma]$ un giudizio.

   Guardiamo alla regola di introduzione del tipo prodotto dipendente:

$$\text{I-}\Pi)\ \frac{c(x) \in C(x)\ [\Gamma,\ x \in B]}{\lambda x^B.c(x) \in \Pi_{x \in B}\ C(x)\ [\Gamma]}$$

   Questa, per la Def. 3.1, equivale alla regola

$$\text{I-}\Pi)\ \frac{c(x) \in \phi(x)^I\ [\Gamma,\ x \in B]}{\lambda x^B.c(x) \in \Pi_{x \in B}\ \phi(x)^I\ [\Gamma]}\ ,$$

   che, applicando la Def. 3.2, diventa

$$\text{I-}\Pi)\ \frac{\phi(x)^I\ \mathit{true}\ [\Gamma,\ x \in B]}{\forall_{x \in B}\ \phi(x)^I\ \mathit{true}\ [\Gamma]}$$

   Essa, in deduzione naturale, corrisponde alla regola "∀–D":

$$\frac{\vdash_{\Gamma, x \in B}\ \phi(x)}{\vdash_{\Gamma}\ \forall_{x \in B}\ \phi(x)}\ \forall\text{–D}$$

   Partendo invece dalla regola di eliminazione del tipo prodotto dipendente

$$\text{E-}\Pi)\ \frac{b \in B\ [\Gamma] \qquad f \in \Pi_{x \in B}\ C(x)\ [\Gamma]}{\mathrm{Ap}(f,b) \in C(b)\ [\Gamma]}$$

   e applicando la Def. 3.1, si ottiene la regola seguente:

$$\text{E-}\Pi)\ \frac{b \in B\ [\Gamma] \qquad f \in \Pi_{x\in B}\ \phi(x)^I\ [\Gamma]}{\mathrm{Ap}(f,b) \in \phi(b)^I\ [\Gamma]}$$

Questa, per la Def. 3.2, equivale alla regola che segue:

$$\text{E-}\Pi)\ \frac{b \in B\ [\Gamma] \qquad \forall_{x\in B}\ \phi(x)^I\ \mathit{true}\ [\Gamma]}{\phi(b)^I\ \mathit{true}\ [\Gamma]}\ ,$$

che corrisponde, in deduzione naturale, alla regola di eliminazione

$$\frac{b \in B\ [\Gamma] \qquad \vdash_\Gamma \forall_{x\in B}\ \phi(x)}{\vdash_\Gamma \phi(b)}$$

Viceversa, consideriamo la regola "∀–D" di $\mathbf{DNI}_=$:

$$\frac{\vdash \phi(x)}{\vdash \forall_x\ \phi(x)}\ \forall\text{–D}$$

Essa, per la Def. 3.2, corrisponde alla regola

$$\frac{\phi(x)^I\ \mathit{true}\ [y \in A,\ x \in B]}{\Pi_{x\in B}\ \phi(x)^I\ \mathit{true}\ [y \in A]}\ \forall\text{–D}\ ,$$

dove A è un tipo fissato cui appartengono le variabili di ϕ.
A sua volta, per il Teorema 1 e la Def. 3.2, essa corrisponde alla regola E-Π di eliminazione del tipo prodotto dipendente:

$$\frac{c(x) \in \phi(x)^I\ [y \in A,\ x \in B]}{\lambda x.c(x) \in \Pi_{x\in B}\ \phi(x)^I\ [y \in A]}\ .$$

Consideriamo infine la regola "∀–Sn" della deduzione naturale: $\mathbf{DNI}_=$:

$$\frac{\vdash \forall_x\ \phi(x)}{\vdash \phi(b)}\ \forall\text{–Sn}$$

Essa, applicando la Def. 3.2, diventa

$$\frac{\Pi_{x\in B}\ \phi(x)^I\ \mathit{true}\ [y \in A]}{\phi(b)^I\ \mathit{true}\ [y \in A,\ b \in B]}\ \forall\text{–Sn}$$

Per il Teorema 1 e la Def. 3.2 tale regola si riscrive come segue:

$$\frac{f \in \Pi_{x\in B}\ \phi(x)^I\ [y \in A]}{\mathrm{Ap}(f,b) \in \phi(b)^I\ [y \in A,\ b \in B]}\ \forall\text{–Sn}\ ,$$

che assomiglia alla regola E-Π) di eliminazione del tipo prodotto cartesiano. $\square$

9. $(\exists_{x\in A}\ \phi)^I\ [\Gamma] \equiv \Sigma_{x\in A^I}\ \phi^I\ type\ [\Gamma]$

   Dimostrazione. Siano $\phi\ prop\ [\Gamma]$ e $\psi\ prop\ [\Gamma]$ due giudizi.

   Consideriamo la regola di introduzione del tipo somma indiciata:

$$\text{I-}\Sigma)\ \frac{b \in B\ [\Gamma] \qquad c \in C(b)\ [\Gamma] \qquad C(x)\ type\ [\Gamma,\ x \in B]}{\langle b,c\rangle \in \Sigma_{x\in B}\ C(x)\ [\Gamma]}$$

   Utilizzando la Def. 3.1, tale regola si riscrive come segue:

$$\text{I-}\Sigma)\ \frac{b \in B\ [\Gamma] \qquad c \in \phi(b)\ [\Gamma] \qquad \phi(x)\ prop\ [\Gamma,\ x \in B]}{\langle b,c\rangle \in \Sigma_{x\in B}\ \phi(x)\ [\Gamma]}$$

   Essa, per la Def. 3.2, equivale alla regola

$$\text{I-}\Sigma)\ \frac{b \in B\ [\Gamma] \qquad \phi(b)\ true\ [\Gamma] \qquad \phi(x)\ prop\ [\Gamma,\ x \in B]}{\exists_{x\in B}\ \phi(x)\ true\ [\Gamma]}\ ,$$

   che corrisponde, in deduzione naturale, alla regola "$\exists$–Dn":

$$\frac{b \in B\ [\Gamma] \qquad \vdash_\Gamma \phi(b)}{\vdash_\Gamma \exists_{x\in B}\ \phi(x)}\ \exists\text{–Dn}$$

   Partiamo ora invece dalla regola di eliminazione del tipo somma indiciata:

$$\text{E-}\Sigma)\ \frac{\begin{array}{l} M(z)\ type\ [\Gamma,\ z \in \Sigma_{x\in B}\ C(x)] \\ t \in \Sigma_{x\in B}\ C(x)\ [\Gamma] \qquad e(x,y) \in M(\langle x,y\rangle)\ [\Gamma,\ x \in B,\ y \in C(x)] \end{array}}{El_\Sigma(t,e) \in M(t)\ [\Gamma]}$$

   Utilizzando la Def. 3.1, is ottiene la seguente regola:

$$\text{E-}\Sigma)\ \frac{\begin{array}{l} \psi\ prop\ [\Gamma,\ z \in \Sigma_{x\in B}\ \phi(x)^I] \\ t \in \Sigma_{x\in B}\ \phi(x)^I\ [\Gamma] \qquad e(x,y) \in \psi\ [\Gamma,\ x \in B,\ y \in \phi^I] \end{array}}{El_\Sigma(t,e) \in \psi\ [\Gamma]}$$

   Essa, per la def. 3.2, equivale alla regola

$$\text{E-}\Sigma)\ \frac{\begin{array}{l} \psi\ prop\ [\Gamma,\ \exists_{x\in B}\ \phi(x)^I\ true] \\ \exists_{x\in B}\ \phi(x)^I\ true\ [\Gamma] \qquad \psi\ true\ [\Gamma,\ x \in B,\ \phi(x)^I\ true] \end{array}}{\psi\ true\ [\Gamma]}$$

che corrisponde, in deduzione naturale, alla regola "∃–Sn":

$$\frac{\vdash_{\Gamma} \exists_{x \in B}\ \phi(x) \qquad \phi(x) \vdash_{\Gamma,\ x \in B} \psi}{\vdash_{\Gamma} \psi}\ \exists\text{–Sn}$$

Viceversa, partendo dalla regola "∃–Dn" di **DNI$_=$**:

$$\frac{\vdash \phi(b)}{\vdash \exists_x\ \phi(x)}\ \exists\text{–Dn}$$

e utilizzando la Def. 3.2, si ottiene la regola:

$$\frac{\phi(b)^I\ true\ [y \in A,\ b \in B]}{\Sigma_{x \in B}\ \phi(x)^I\ true\ [y \in A]}\ \exists\text{–Dn}\ ,$$

dove A è un tipo fissato cui appartengono le variabili di ϕ.
Ora, per il Teorema 1 e la Def. 3.2, essa corrisponde alla seguente regola:

$$\frac{c \in \phi(b)^I\ [y \in A,\ b \in B]}{\langle b,c \rangle \in \Sigma_{x \in B}\ \phi(x)^I\ [y \in A]}\ \exists\text{–Dn}\ ,$$

che è la regola I-Σ) di introduzione del tipo somma indiciata.
Infine, consideriamo la regola "∃–Sn" della deduzione naturale:

$$\frac{\vdash \exists x\ \phi(x) \qquad \phi(x) \vdash \psi}{\vdash \psi}\ \exists\text{–Sn}$$

Essa, per la Def. 3.2, diventa

$$\frac{\Sigma_{x \in B}\ \phi(x)^I\ true\ [y \in A] \qquad \psi^I\ true\ [y \in A,\ z \in A,\ x \in B,\ \phi(x)^I\ true]}{\psi^I\ true\ [z \in A]}\ \exists\text{–Sn}$$

Applicando il teorema 1 e la Def. 3.2 tale regola si riscrive nel seguente modo:

$$\frac{t \in \Sigma_{x \in B}\ \phi(x)^I\ [y \in A] \qquad e(x,w) \in \psi^I\ [y \in A,\ z \in A,\ x \in B,\ w \in \phi(x)^I]}{El_{\Sigma}(t,e) \in \psi^I\ [z \in A]}\ \exists\text{–Sn}$$

che corrisponde alla regola E-Σ) di eliminazione del tipo somma indiciata. □

Capitolo 4

Principi di scelta in teoria dei tipi MLTT_0

In questo capitolo mostriamo come nella teoria dei tipi $\mathbf{MLTT_0}$ si dimostra un principio di scelta simile a quello di Zermelo della teoria classica assiomatica degli insiemi. Si dimostra pure anche una regola di scelta analoga. Il tutto segue dal considerare $\mathbf{MLTT_0}$ una teoria degli insiemi in cui i tipi non dipendenti rappresentano insiemi e i tipi dipendenti famiglie di insiemi, mentre i termini sono pensati come i corrispondenti elementi rispettivamente dell'insieme o della famiglia di insiemi.

4.1 La regola e l'assioma della scelta

Una proprietà peculiare di $\mathbf{MLTT_0}$, interna alla teoria stessa, valida per ogni contesto e dovuta al fatto che $\exists_{x\in A}\ \phi \equiv \Sigma_{x\in A}\phi\ \mathit{type}\ [\Gamma]$, è la possibilità di estrarre programmi (intesi come funzioni) da dimostrazioni di validità di specifiche date.
Grazie a questa corrispondenza, possiamo introdurre la **regola della scelta**:

Def 4.1. Data $R(x,y)\ \mathit{prop}\ [\Gamma,\ x\in A,\ y\in B]$, vale che
$\forall_{x\in A}\ \exists_{y\in B}\ R(x,y)\ \mathit{true}\ [\Gamma] \implies$ esiste $f\in A\rightarrow B$ tale che $\forall_{x\in A}\ R(x,f(x))\ \mathit{true}$ $[\Gamma]$

La regola della scelta afferma dunque che l'applicazione di f in x "sceglie" l'y tale per cui la relazione R, che si può pensare come programma, contiene il grafo di f.

Possiamo "rafforzare" la regola della scelta, definendo l'**assioma della scelta**:

Def 4.2. Per ogni relazione totale $R(x,y)$ da un insieme A a un insieme B, esiste una funzione f (detta *funzione di scelta*) da A in B il cui grafo è contenuto in $R(x,y)$, ovvero vale

$$\text{(AC)} \qquad \forall_{x\in A}\ \exists_{y\in B}\ R(x,y) \ \longrightarrow\ \exists_{f\in A\to B}\forall_{x\in A}\ R(x, f(x)),$$

supposto che con $A \to B$ si intenda l'insieme delle funzioni da A in B e che $R(x,y)$ sia una relazione tra gli elementi di A e quelli di B.

4.1.1 La validità dell'assioma e della regola della scelta

Enunciamo innanzitutto un importante lemma che tornerà utile per dimostrare i risultati che seguiranno:

Lemma 1. Per ogni tipo dipendente $C(x)$ *type* $[\Gamma, x\in B]$, è possibile definire le due proiezioni

$$\pi_1(w) \in B\ [\Gamma, w \in \Sigma_{x\in B}C(x)] \qquad \pi_2(w) \in C(\pi_1(w))\ [\Gamma, w \in \Sigma_{x\in B}C(x)]$$

tali che si derivano

$$\pi_1(\langle x,y\rangle) = x \in B\ [\Gamma, x\in B, y\in C(x)] \qquad \pi_2(\langle x,y\rangle) = y \in C(x)\ [\Gamma, x\in B, y\in C(x)].$$

Ora abbiamo tutti gli strumenti per dimostrare la seguente

Prop 1. L'assioma della scelta è valido in $\mathbf{MLTT_0}$.

Dimostrazione. Ricordiamo innanzitutto che, per quanto visto nel capitolo precedente, in $\mathbf{MLTT_0}$ si può interpretare la quantificazione universale come prodotto dipendente, la quantificazione esistenziale come somma disgiunta indiciata e l'implicazione come prodotto dipendente tra le proposizioni pensate come insiemi.
Per provare la validità dell'assioma della scelta, supponiamo che $\forall_{x\in A}\ \exists_{y\in B}\ R(x,y)$ sia derivabile in $\mathbf{MLTT_0}$, e dimostriamo che $\exists_{f\in A\to B}\forall_{x\in A}\ R(x, f(x))$ è anch'esso derivabile in $\mathbf{MLTT_0}$.
Assumiamo dunque che esista un *proof-term* $z \in \Pi_{x\in A}\ \Sigma_{y\in B}\ R(x,y)$.
Ora, se x è un arbitrario elemento di A, per la regola di eliminazione del tipo prodotto dipendente E-Π), si ha che $z(x) \in \Sigma_{y\in B}\ R(x,y)$, dove $z(x) \equiv \mathrm{Ap}(z,x)$. Applicando il lemma 1 otteniamo che $\pi_1(z(x)) \in B$ e $\pi_2(z(x)) \in R(x,\pi_1(z(x)))$.
Allora, per la regola di introduzione del tipo prodotto dipendente I-Π) si ha che $\lambda x.\pi_1(z(x)) \in \Pi_{x\in A}B$, e per la regola βC-Π) si ha che $\lambda x.\pi_1(z(x))(x) = \pi_1(z(x)) \in B$.

Da ciò si ricava che $R(x,\lambda x.\pi_1(z(x))(x)) = R(x,\pi_1(z(x)))$, e quindi dal lemma 1 si ottiene che $\pi_2(z(x)) \in R(x,\pi_1(z(x)))$, dove $\lambda x.\pi_1(z(x))$ è indipendente da x.
Ora, dalla regola di introduzione del tipo prodotto dipendente I-Π), si ricava che $\lambda x.\pi_2(z(x)) \in \Pi_{x\in A} R(x,\pi_1(z(x)))$, con $x{\in}A$.
A questo punto, sostituendo alla scrittura $\lambda x.\pi_1(z(x))$ la nuova variabile f e applicando la regola di introduzione del tipo somma indiciata I-Σ), otteniamo che

$$\langle\ \lambda x.\pi_1(z(x)),\ \lambda x.\pi_2(z(x))\ \rangle \in (\Sigma f \in \Pi_{x\in A} B)\ \Pi_{x\in A} R(x,f(x)).$$

Infine, dalla regola di introduzione del tipo freccia I-$\longrightarrow$) si conclude che

$$\lambda z.\langle\ \lambda x.\pi_1(z(x)),\ \lambda x.\pi_2(z(x))\ \rangle \in \Pi_{x\in A}\ \Sigma_{y\in B}\ R(x,y)\ \ \longrightarrow\ \ (\Sigma f \in \Pi_{x\in A} B)\ \Pi_{x\in A} R(x,f(x)).$$

Poichè abbiamo trovato un *proof-term* appartenente a

$$\Pi_{x\in A}\ \Sigma_{y\in B}\ R(x,y)\ \ \longrightarrow\ \ (\Sigma f \in \Pi_{x\in A} B)\ \Pi_{x\in A} R(x,f(x)),$$

che è l'assioma della scelta riscritto utilizzando l'interpretazione logica di $\mathbf{MLTT_0}$, possiamo concludere che l'assioma della scelta è valido in $\mathbf{MLTT_0}$. $\square$

Vale inoltre la seguente proposizione:

Prop 2. La regola della scelta è valida in $\mathbf{MLTT_0}$.

Dimostrazione. La validità della regola della scelta deriva dalla validità dell'assioma della scelta. Dalla dimostrazione della validità dell'assioma della scelta sappiamo infatti che $\Pi_{x\in A}\ \Sigma_{y\in B}\ R(x,y)$ e $\Pi_{x\in A}\ \Sigma_{y\in B}\ R(x,y) \longrightarrow (\Sigma f \in \Pi_{x\in A} B)\ \Pi_{x\in A} R(x,f(x))$ si derivano in $\mathbf{MLTT_0}$. Allora, per modus ponens, anche $(\Sigma f \in \Pi_{x\in A} B)\ \Pi_{x\in A} R(x,f(x))$ si deriva in $\mathbf{MLTT_0}$.
Possiamo così concludere che la regola della scelta è valida in $\mathbf{MLTT_0}$. $\square$

4.1.2 La regola della scelta implica l'assioma della scelta

Vogliamo ora provare che la regola della scelta implica l'assioma della scelta in $\mathbf{MLTT_0}$.
Tuttavia, è sufficiente dimostrare tale tesi in $\mathbf{DT}_\Sigma$, teoria dei tipi dipendente che descriviamo di seguito.

La teoria dei tipi $\mathbf{DT}_\Sigma$

La teoria dei tipi cosidetta della *Minimalist Foundation* [8], in breve **MF**, è un esempio di fondazione per la matematica costruttiva basata su una teoria dei tipi dove la quantificazionne esistenziale è data primitivamente. **MF** è dotata di due livelli: un livello *intensionale*, adatto all'estrazione di contenuti computazionali dalle loro dimostrazioni, e un livello *estensionale*, ottenuto per astrazione dal primo.
Uno dei livelli intensionali di **MF** è la *Minimalist Type theory* [8], in breve **mTT**, che si può utilizzare come base per la formalizzzazione al calcolatore di dimostrazioni eseguite al livello estensionale di **MF**.
$\mathbf{DT}_\Sigma$ è un frammento della **mTT** scritta nello stile della teoria dei tipi di Martin-Löf, tramite le stesse le forme di giudizio di $\mathbf{MLTT_0}$ ma con la differenza che la parola *type* è una meta-variabile che indica due entità, insiemi e *small propositions*:

$$type \in \{set,\ prop_s\}.$$

In $\mathbf{DT}_\Sigma$ i tipi si formano utilizzando i seguenti giudizi:

$$A\ set\ [\Gamma] \quad \text{e} \quad \phi\ prop_s\ [\Gamma],$$

dove A è un insieme e ϕ una *small proposition* di $\mathbf{DT}_\Sigma$.
In **mTT** definiamo *small propositions* le proposizioni che sono chiuse per quantificazione su insiemi. Sono dunque *small propositions* tutti i costrutti logici della logica predicativa intuizionista, con le quantificazioni e l'uguaglianza ristrette a insiemi: $\phi\ prop_s \equiv \bot$; $\phi \wedge \psi$; $\phi \vee \psi$; $\phi \rightarrow \psi$; $\forall_{x\in A}\phi$; $\exists_{x\in A}\phi$; $\mathrm{Id}(A,a,b)$, dove A è un insieme.
Per definire le operazioni in questi insiemi, è necessario pensare le proposizioni come tipi delle loro dimostrazioni:

$$\text{prop}_\text{s}\text{-into-set)}\ \frac{\phi\ prop_s}{\phi\ set}$$

Per quanto riguarda gli insiemi, in $\mathbf{DT}_\Sigma$ si ha $A\ set \equiv \phi\ prop\ [\Gamma]$; $\Sigma_{x\in A}B$; $\Pi_{x\in A}B$, dove la notazione $\Sigma_{x\in A}B$ rappresenta la somma indiciata della famiglia di insiemi $B\ set\ [x{\in}A]$ indiciata sull'insieme A e $\Pi_{x\in A}B$ rappresenta

l'insieme prodotto dipendente della famiglia di insiemi B *set* $[x{\in}A]$ indiciata sull'insieme A.
Per quanto concerne alle regole, quelle relative alle *small propositions* sono quelle delle corrispondenti *small propositions* in **mTT**, così come le regole degli insiemi in $\mathbf{DT}_\Sigma$ sono quelle dei corrispondenti insiemi in **mTT**.

Diamo ora alcune definizioni che torneranno utili in seguito:

Def 4.3. La *regola della scelta* è la seguente *small proposition*:

$$\forall_{x\in A}\ \exists_{y\in B}\ R(x,y) \implies \exists_{f\in A\to B}\forall_{x\in A}\ R(x, f(x)),$$

definita per ogni *small proposition* $R(x,y)$ $prop_s$ $[x{\in}A,\ y{\in}B]$.

Def 4.4. La teoria dei tipi $\mathbf{DT}_\Sigma$ soddisfa la regola della scelta se, per ogni *small proposition* $R(x,y)$ $prop_s$ $[x{\in}A,\ y{\in}B]$ derivabile in $\mathbf{DT}_\Sigma$ e per ogni giudizio derivabile della forma $p(x) \in \exists_{y\in B}\ R(x,y)$ $[x{\in}A]$, esiste in $\mathbf{DT}_\Sigma$ un termine tipato $f(x) \in B$ $[x{\in}A]$ per il quale possiamo trovare un *proof-term* $q(x)$ e derivare in $\mathbf{DT}_\Sigma$ $q(x) \in R(x, f(x))$ $[x{\in}A]$.

Def 4.5. L'*assioma della scelta* è la seguente *small proposition*:

$$\text{(AC)} \qquad \forall_{x\in A}\ \exists_{y\in B}\ R(x,y) \longrightarrow \exists_{f\in A\to B}\forall_{x\in A}\ R(x, f(x)),$$

definita per ogni *small proposition* $R(x,y)$ $prop_s$ $[x{\in}A,\ y{\in}B]$.

Def 4.6. La teoria dei tipi $\mathbf{DT}_\Sigma$ soddisfa l'assioma della scelta se, per ogni *small proposition* $R(x,y)$ $prop_s$ $[x{\in}A,\ y{\in}B]$ derivabile in $\mathbf{DT}_\Sigma$ e per ogni giudizio derivabile della forma $p(x) \in \exists_{y\in B}\ R(x,y)$ $[x{\in}A]$, possiamo estrarre un programma $f \in A \to B$ il cui grafo è contenuto nel grafo di $R(x,y)$, cioè esiste in $\mathbf{DT}_\Sigma$ un termine tipato $f(x) \in A \to B$ per il quale possiamo trovare un *proof-term* $q(x)$ e derivare in $\mathbf{DT}_\Sigma$ $q(x) \in R(x, f(x))$ $[x{\in}A]$.

A questo punto, possiamo enunciare e dimostrare la proposizione che segue:

Prop 3. Se $\mathbf{DT}_\Sigma$ soddisfa la regola della scelta, allora $\mathbf{DT}_\Sigma$ soddisfa l'assioma della scelta.

Dimostrazione. Supponiamo che $R(x,y)$ $prop_s$ $[x{\in}A,\ y{\in}B]$ sia derivabile in $\mathbf{DT}_\Sigma$.
Inoltre, assumiamo che la regola della scelta sia valida in $\mathbf{DT}_\Sigma$.
Osserviamo che, per il lemma 1, possiamo derivare in $\mathbf{DT}_\Sigma$

$$\pi_2(z) \in \exists_{y\in B}\ R(\pi_1(z),y)\ [z \in \Sigma_{\ x\in A}\ \exists_{y\in B}\ R(x,y)],$$

dal momento che $\exists_{y\in B}\ R(x,y)\ [x\in A,\ y\in B]$ è derivabile in $\mathbf{DT}_\Sigma$ per ipotesi.
Ora, per la Def. 4.4 esiste un termine tipato

$$f(z) \in B\ [z \in \Sigma_{x\in A}\ \exists_{y\in B}\ R(x,y)]$$

e un *proof-term* $q(z)$ in $\mathbf{DT}_\Sigma$ per il quale possiamo derivare

$$q(z) \in R(\pi_1(z),f(x))\ [z \in \Sigma_{x\in A}\ \exists_{y\in B}\ R(x,y)].$$

Poi, dal momento che per ipotesi la regola della scelta è valida in $\mathbf{DT}_\Sigma$, sappiamo che

$$\exists_{g\in A\to B}\forall_{x\in A}\ R(x,\ g(x))\ [w \in \forall_{x\in A}\ \exists_{y\in B}\ R(x,y)]$$

è derivabile in $\mathbf{DT}_\Sigma$, ossia esiste un *proof-term* appartenente a tale scrittura: determiniamolo.
Ricordiamo innanzitutto che, per quanto visto nel capitolo precedente, in $\mathbf{MLTT_0}$ si può interpretare la quantificazione universale come prodotto dipendente, la quantificazione esistenziale come somma disgiunta indiciata e l'implicazione come prodotto dipendente tra le proposizioni pensate come insiemi.
Alla luce di ciò, utilizzando la regola I-Σ) di introduzione del tipo somma indiciata, ricaviamo che il *proof-term* cercato è una coppia di elementi, dove il primo elemento appartiene a $\forall_{x\in A}B\ [w \in \forall_{x\in A}\ \exists_{y\in B}\ R(x,y)]$ e il secondo a $\forall_{x\in A}R(x,g(x))\ [w \in \forall_{x\in A}\ \exists_{y\in B}\ R(x,y)]$.
Ora, ricordando che $f(z) \in B\ [z \in \Sigma_{x\in A}\ \exists_{y\in B}\ R(x,y)]$ e applicando le regole di introduzione del tipo somma indiciata I-Σ) e di introduzione del tipo prodotto dipendente I-Π), otteniamo che

$$m(w) \equiv \lambda x'.f(\langle x',w(x')\rangle) \in \forall_{x\in A}B\ [w \in \forall_{x\in A}\ \exists_{y\in B}\ R(x,y)],$$

dove $x'\in A$, $w(x') \in \exists_{y\in B}\ R(x,y)\ [w \in \forall_{x\in A}\ \exists_{y\in B}\ R(x,y)]$ e

$$\langle x',w(x')\rangle \in \forall_{x\in A}\ \exists_{y\in B}\ R(x,y)\ [w \in \forall_{x\in A}\ \exists_{y\in B}\ R(x,y),\ x'\in A].$$

Analogamente, ricordando che $q(z) \in R(\pi_1(z),f(x))\ [z \in \Sigma_{x\in A}\ \exists_{y\in B}\ R(x,y)]$ e utilizzando la definizione di π_1 e la regola βC-Π) del tipo prodotto dipendente, si ricava che

$$q(\langle x'',w(x'')\rangle) \in R(\pi_1(\langle x'',w(x'')\rangle),\ f(\langle x'',w(x'')\rangle)) = R(x'',m(w)(x'')),$$

dove $x''\in A$ e $w(x'') \in \exists_{y\in B}\ R(x,y)\ [w \in \forall_{x\in A}\ \exists_{y\in B}\ R(x,y)]$.
Allora

$$h(w) \equiv \lambda x''.q(\langle x'',w(x'')\rangle) \in \forall_{x\in A}\ R(x,m(w)(x)),$$

Dunque il *proof-term* cercato è

$$\langle m(w),h(w)\rangle \in \exists_{g\in A\to B}\forall_{x\in A}\ R(x,\ g(x))\ [w \in \forall_{x\in A}\ \exists_{y\in B}\ R(x,y)].$$

Ora, per la regola I-$\rightarrow$) di introduzione del tipo delle funzioni, si ha che

$$\lambda w.\langle m(w), h(w)\rangle \in \forall_{x\in A}\ \exists_{y\in B}\ R(x,y) \ \longrightarrow\ \exists_{f\in A\rightarrow B}\forall_{x\in A}\ R(x, f(x)).$$

Abbiamo dunque mostrato che esiste un *proof-term* appartenente a

$$\forall_{x\in A}\ \exists_{y\in B}\ R(x,y) \ \longrightarrow\ \exists_{f\in A\rightarrow B}\forall_{x\in A}\ R(x, f(x)),$$

e possiamo quindi concludere che l'assioma della scelta è derivabile in $\mathbf{DT}_\Sigma$.

$\square$

Notiamo che, poichè $\mathbf{DT}_\Sigma$ è per definizione un frammento di **mTT**, allora tale dimostrazione vale anche in **mTT**. Quest'ultima, però, essendo il primo dei livelli intensionali della *Minimalist Foundation* **MF**, può essere facilmente interpretata in teorie intensionali, ad esempio in $\mathbf{MLTT_0}$. Infatti, **MF** consta di sistemi di tipi basati sulla versione della teoria dei tipi di Martin-Löf con l'aggiunta della nozione primitiva di proposizione.
Si conclude dunque che in $\mathbf{MLTT_0}$ la regola della scelta implica l'assioma della scelta.

Capitolo 5

Non conservatività di MLTT_0

A conclusione di questo percorso dimostriamo che la teoria dei tipi di Martin-Löf non è conservativa sopra l'interpretazione della logica intuizionista con uguaglianza. Nello specifico, proviamo che la formula detta *choice approximation principle* non è derivabile all'interno della logica intuizionista predicativa con uguaglianza (in breve $\mathbf{LI}_=$), ma si deriva invece in $\mathbf{MLTT_0}$.

Per prima cosa diamo la definizione di conservatività di una teoria logica sopra un'altra teoria e introduciamo la formula detta *choice approximation principle*:

Def 5.1. Date due teorie logiche $\mathcal{T}_1$ e $\mathcal{T}_2$, estensioni con assiomi extra logici di un medesimo calcolo logico fissato, tali per cui il linguaggio formale di $\mathcal{T}_1$ estende quello di $\mathcal{T}_2$ e gli assiomi di $\mathcal{T}_2$ sono validi in $\mathcal{T}_1$, si dice che $\mathcal{T}_1$ è *conservativa sopra* $\mathcal{T}_2$ se e solo se per ogni ϕ del linguaggio $\mathcal{T}_2$ vale che ϕ è teorema di $\mathcal{T}_2$ se e solo se ϕ è teorema di $\mathcal{T}_1$.
Ciò significa che gli assiomi di $\mathcal{T}_1$ non comportano nuovi teoremi per $\mathcal{T}_2$.

Def 5.2. Definiamo *choice approximation principle* il seguente giudizio, suggerito da Thierry Coquand:

$$\text{(CAP)} \quad \forall_{x\in A}\ \exists_{y\in B}\ R(x,y) \ \longrightarrow\ \forall_{x_1\in A}\ \forall_{x_2\in A}\ \exists_{y_1\in B}\ \exists_{y_2\in B}\ ((R(x_1,\, y_1)\ \&\ R(x_2,\, y_2))\ \&\ (x_1 =_A x_2 \to y_1 =_B y_2))\ [\Gamma],$$

dove A *type* $[\Gamma]$, B *type* $[\Gamma]$ e $R(x,y)$ *type* $[\Gamma]$ sono derivabili in $\mathbf{MLTT_0}$.

A questo punto possiamo enunciare e dimostrare il teorema di non conservatività di $\mathbf{MLTT_0}$ sopra l'interpretazione della logica intuizionista con uguaglianza:

Teorema 3. $\mathbf{MLTT_0}$ con la logica interpretata secondo Curry-Howard-Martin-Löf non è conservativa sulla logica intuizionista predicativa con uguaglianza rappresentata da $\mathbf{DNI}_=$.

Dimostrazione. La dimostrazione del teorema si articola in due parti: prima dimostreremo, utilizzando il calcolo dei sequenti, che la formula detta *choice approximation principle* è derivabile in $\mathbf{LC}_=$ ma non lo è in $\mathbf{LI}_=$, e poi mostreremo che invece è derivabile secondo l'interpretazione della logica in $\mathbf{MLTT_0}$.

La derivazione del sequente $\vdash$ (CAP) in $\mathbf{LC}_=$ porge il seguente albero di derivazione:

$$
\begin{array}{cl}
R(w_1,z_1),\forall_x\exists_y R(x,y),R(w_2,z_2)\vdash(R(w_1,z_1)\&R(w_2,z_1))\&(w_1{=}w_2\to z_1{=}z_1),\exists_{y_2}...,\exists_{y_1}... & \\ \cline{1-1}
R(w_1,z_1),\forall_x\exists_y R(x,y),\ R(w_2,z_2)\vdash\ \exists_{y_2}((R(w_1,z_1)\&R(w_2,y_2))\&(w_1{=}w_2\to z_1{=}y_2)),\exists_{y_1}... & \exists\text{–D} \\ \cline{1-1}
R(w_1,z_1),\forall_x\exists_y R(x,y),\ R(w_2,z_2)\vdash\ \exists_{y_1}\exists_{y_2}((R(w_1,y_1)\&R(w_2,y_2))\&(w_1{=}w_2\to y_1{=}y_2)) & \exists\text{–D} \\ \cline{1-1}
R(w_1,z_1),\forall_x\exists_y R(x,y),\exists_y R(w_2,y)\vdash\ \exists_{y_1}\exists_{y_2}((R(w_1,y_1)\&R(w_2,y_2))\&(w_1{=}w_2\to y_1{=}y_2)) & \exists\text{–S}(z_2...) \\ \cline{1-1}
R(w_1,z_1),\forall_x\exists_y R(x,y)\vdash\ \exists_{y_1}\exists_{y_2}((R(w_1,y_1)\&R(w_2,y_2))\&(w_1{=}w_2\to y_1{=}y_2)) & \forall\text{–S} \\ \cline{1-1}
\forall_x\exists_y R(x,y),R(w_1,z_1)\vdash\ \exists_{y_1}\exists_{y_2}((R(w_1,y_1)\&R(w_2,y_2))\&(w_1{=}w_2\to y_1{=}y_2)) & \mathrm{sc_{sx}} \\ \cline{1-1}
\forall_x\exists_y R(x,y),\exists_y R(w_1,y)\vdash\ \exists_{y_1}\exists_{y_2}((R(w_1,y_1)\&R(w_2,y_2))\&(w_1{=}w_2\to y_1{=}y_2)) & \exists\text{–S}(z_1\notin VL...) \\ \cline{1-1}
\forall_x\exists_y R(x,y)\vdash\ \exists_{y_1}\exists_{y_2}((R(w_1,y_1)\&R(w_2,y_2))\&(w_1{=}w_2\to y_1{=}y_2)) & \forall\text{–S} \\ \cline{1-1}
\forall_x\exists_y R(x,y)\ \vdash\ \forall_{x_2}\exists_{y_1}\exists_{y_2}((R(w_1,y_1)\&R(x_2,y_2))\&(w_1{=}x_2\to y_1{=}y_2)) & \forall\text{–D}(w_2\notin VL(...)) \\ \cline{1-1}
\forall_x\exists_y R(x,y)\vdash\ \forall_{x_1}\forall_{x_2}\exists_{y_1}\exists_{y_2}((R(x_1,y_1)\&R(x_2,y_2))\&(x_1{=}x_2\to y_1{=}y_2)) & \forall\text{–D}(w_1\notin VL(...)) \\ \cline{1-1}
\vdash\ \forall_x\exists_y R(x,y)\ \longrightarrow\ \forall_{x_1}\forall_{x_2}\exists_{y_1}\exists_{y_2}((R(x_1,y_1)\&R(x_2,y_2))\&(x_1{=}x_2\to y_1{=}y_2)) & \to\text{–D}
\end{array}
$$

Ora, applicando alla foglia ottenuta la regola "&–D", si ottengono i due sequenti
$R(w_1,z_1),\ \forall_x\exists_y R(x,y),\ R(w_2,z_2)\vdash R(w_1,z_1)\&R(w_2,z_1),\ \exists_{y_2}...,\ \exists_{y_1}...$
$R(w_1,z_1),\ \forall_x\exists_y R(x,y),\ R(w_2,z_2)\vdash w_1{=}w_2\to z_1{=}z_1,\ \exists_{y_2}...,\ \exists_{y_1}....$

Proseguendo con la derivazione del secondo sequente si ricava che esso è derivabile in $\mathbf{LC}_=$:

$$
\dfrac{\dfrac{=\text{–ax}}{R(w_1,z_1),\ \forall_x\exists_y R(x,y),\ R(w_2,z_2),\ w_1{=}w_2\vdash z_1{=}z_1,\ \exists_{y_2}...,\ \exists_{y_1}....}}{R(w_1,z_1),\ \forall_x\exists_y R(x,y),\ R(w_2,z_2)\vdash w_1{=}w_2\to z_1{=}z_1,\ \exists_{y_2}...,\ \exists_{y_1}....}\ \to\text{–D}
$$

Applicando invece la regola "&–D" al primo sequente, otteniamo i due sequenti che seguono:

$$
\dfrac{\text{ax–id}}{R(w_1,z_1),\ \forall_x\exists_y R(x,y),\ R(w_2,z_2)\vdash R(w_1,z_1),\ \exists_{y_2}...,\ \exists_{y_1}...}
$$

$$
\text{e}\ \ R(w_1,z_1),\ \forall_x\exists_y R(x,y),\ R(w_2,z_2)\vdash R(w_2,z_1),\ \exists_{y_2}...,\ \exists_{y_1}...
$$

Proviamo che il sequente $R(w_1,z_1),\ \forall_x\exists_y R(x,y),\ R(w_2,z_2)\vdash R(w_2,z_1),\ \exists_{y_2}((R(w_1,z_1)\&R(w_2,y_2))\&(w_1{=}w_2\to z_1{=}y_2)),\ \exists_{y_1}...$ è derivabile in $\mathbf{LC}_=$:

$$
\begin{array}{c l}
R(w_1,z_1),\forall_x\ldots,R(w_2,z_2)\vdash(R(w_1,z_1)\&R(w_2,z_2))\&(w_1{=}w_2\to z_1{=}z_2),\exists_{y_2}\ldots,R(w_2,z_1),\exists_{y_1}\ldots & \\ \hline
R(w_1,z_1),\forall_x\ldots,R(w_2,z_2)\vdash \exists_{y_2}((R(w_1,z_1)\&R(w_2,y_2))\&(w_1{=}w_2\to z_1{=}y_2)),R(w_2,z_1),\exists_{y_1}\ldots & \exists\text{–D} \\ \hline
R(w_1,z_1),\forall_x\ldots,R(w_2,z_2)\vdash R(w_2,z_1),\exists_{y_2}((R(w_1,z_1)\&R(w_2,y_2))\&(w_1{=}w_2\to z_1{=}y_2)),\exists_{y_1}\ldots & \mathrm{sc}_{\mathrm{dx}}
\end{array}
$$

Applicando ora la regola "&–D" alla foglia di tale albero di derivazione, ricaviamo i due sequenti:
$R(w_1,z_1),\ \forall_x\exists_y R(x,y),\ R(w_2,z_2)\vdash R(w_1,z_1)\&R(w_2,z_2),\ \exists_{y_2}\ldots,\ R(w_2,z_1),\ \exists_{y_1}\ldots$
$R(w_1,z_1),\ \forall_x\exists_y R(x,y),\ R(w_2,z_2)\vdash w_1{=}w_2\ \to\ z_1{=}z_2,\ \exists_{y_2}\ldots,\ R(w_2,z_1),\ \exists_{y_1}\ldots$
Riapplicando la regola "&–D" al primo sequente, otteniamo due sequenti entrambi derivabili in $\mathbf{LC}_=$:

$$
\begin{array}{c}
\text{ax–id} \\
R(w_1,z_1),\ \forall_x\exists_y R(x,y),\ R(w_2,z_2)\vdash R(w_1,z_1),\ \exists_{y_2}\ldots,\ R(w_2,z_1),\ \exists_{y_1}\ldots
\end{array}
$$

$$
\begin{array}{c}
\text{ax–id} \\
R(w_1,z_1),\ \forall_x\exists_y R(x,y),\ R(w_2,z_2)\vdash R(w_2,z_2),\ \exists_{y_2}\ldots,\ R(w_2,z_1),\ \exists_{y_1}\ldots
\end{array}
$$

Infine, mostriamo che anche il secondo sequente è derivabile in $\mathbf{LC}_=$:

$$
\begin{array}{c l}
\text{ax–id} & \\
R(w_1,z_1),\ \forall_x\exists_y R(x,y),\ w_1{=}w_2,\ R(w_1,z_2)\vdash R(w_1,z_1),\ z_1{=}z_2,\ \exists_{y_2}\ldots,\ \exists_{y_1}\ldots & \\ \hline
R(w_1,z_1),\ \forall_x\exists_y R(x,y),\ R(w_2,z_2),\ w_1{=}w_2\vdash R(w_2,z_1),\ z_1{=}z_2,\ \exists_{y_2}\ldots,\ \exists_{y_1}\ldots & =\text{–S}_1 \\ \hline
R(w_1,z_1),\ \forall_x\exists_y R(x,y),\ R(w_2,z_2),\ w_1{=}w_2\vdash z_1{=}z_2,\ \exists_{y_2}\ldots,\ R(w_2,z_1),\ \exists_{y_1}\ldots & \mathrm{sc}_{\mathrm{dx}} \\ \hline
R(w_1,z_1),\ \forall_x\exists_y R(x,y),\ R(w_2,z_2)\vdash w_1{=}w_2\ \to\ z_1{=}z_2,\ \exists_{y_2}\ldots,\ R(w_2,z_1),\ \exists_{y_1}\ldots & \to\text{–D}
\end{array}
$$

Concludiamo allora che il sequente $\vdash$ (CAP) è derivabile in $\mathbf{LC}_=$.

La derivazione del sequente $\vdash$ (CAP) in $\mathbf{LI}_=$ porge invece il seguente albero di derivazione:

$$
\begin{array}{c l}
R(w_1,z_1),\forall_x\exists_y R(x,y),R(w_2,z_2)\vdash(R(w_1,z_1)\&R(w_2,z_1))\&(w_1{=}w_2\to z_1{=}z_1) & \\ \hline
R(w_1,z_1),\forall_x\exists_y R(x,y),\ R(w_2,z_2)\vdash\exists_{y_2}((R(w_1,z_1)\&R(w_2,y_2))\&(w_1{=}w_2\to z_1{=}y_2)) & \exists\text{–D} \\ \hline
R(w_1,z_1),\forall_x\exists_y R(x,y),\ R(w_2,z_2)\vdash\exists_{y_1}\exists_{y_2}((R(w_1,y_1)\&R(w_2,y_2))\&(w_1{=}w_2\to y_1{=}y_2)) & \exists\text{–D} \\ \hline
R(w_1,z_1),\forall_x\exists_y R(x,y),\exists_y R(w_2,y)\vdash\exists_{y_1}\exists_{y_2}((R(w_1,y_1)\&R(w_2,y_2))\&(w_1{=}w_2\to y_1{=}y_2)) & \exists\text{–S}(z_2\ldots) \\ \hline
R(w_1,z_1),\forall_x\exists_y R(x,y)\vdash\exists_{y_1}\exists_{y_2}((R(w_1,y_1)\&R(w_2,y_2))\&(w_1{=}w_2\to y_1{=}y_2)) & \forall\text{–S} \\ \hline
\forall_x\exists_y R(x,y),R(w_1,z_1)\vdash\exists_{y_1}\exists_{y_2}((R(w_1,y_1)\&R(w_2,y_2))\&(w_1{=}w_2\to y_1{=}y_2)) & \mathrm{sc}_{\mathrm{sx}} \\ \hline
\forall_x\exists_y R(x,y),\exists_y R(w_1,y)\vdash\exists_{y_1}\exists_{y_2}((R(w_1,y_1)\&R(w_2,y_2))\&(w_1{=}w_2\to y_1{=}y_2)) & \exists\text{–S}(z_1\not\in\ldots) \\ \hline
\forall_x\exists_y R(x,y)\vdash\exists_{y_1}\exists_{y_2}((R(w_1,y_1)\&R(w_2,y_2))\&(w_1{=}w_2\to y_1{=}y_2)) & \forall\text{–S} \\ \hline
\forall_x\exists_y R(x,y)\vdash\forall_{x_2}\exists_{y_1}\exists_{y_2}((R(w_1,y_1)\&R(x_2,y_2))\&(w_1{=}x_2\to y_1{=}y_2)) & \forall\text{–D}(w_2\not\in VL(\ldots)) \\ \hline
\forall_x\exists_y R(x,y)\vdash\forall_{x_1}\forall_{x_2}\exists_{y_1}\exists_{y_2}((R(x_1,y_1)\&R(x_2,y_2))\&(x_1{=}x_2\to y_1{=}y_2)) & \forall\text{–D}(w_1\not\in VL(\ldots)) \\ \hline
\vdash\forall_x\exists_y R(x,y)\longrightarrow\forall_{x_1}\forall_{x_2}\exists_{y_1}\exists_{y_2}((R(x_1,y_1)\&R(x_2,y_2))\&(x_1{=}x_2\to y_1{=}y_2)) & \to\text{–D}
\end{array}
$$

Applicando ora la regola "&–D" alla foglia di tale albero di derivazione, ricaviamo i due sequenti:
$R(w_1,z_1),\forall_x\exists_y R(x,y),R(w_2,z_2) \vdash R(w_1,z_1)\&R(w_2,z_1)$ e
$R(w_1,z_1),\forall_x\exists_y R(x,y),R(w_2,z_2) \vdash w_1{=}w_2 \to z_1{=}z_1$.
Notiamo che il secondo sequente è derivabile in $\mathbf{LI}_=$, infatti:

$$\dfrac{\dfrac{}{R(w_1,z_1),\forall_x\exists_y R(x,y),R(w_2,z_2),\ w_1{=}w_2 \vdash z_1{=}z_1}\,{=}\text{–ax}}{R(w_1,z_1),\forall_x\exists_y R(x,y),R(w_2,z_2) \vdash w_1{=}w_2 \to z_1{=}z_1}\,\to\text{–D}$$

Proseguiamo poi con la derivazione del primo sequente:

$$\dfrac{\dfrac{}{R(w_1,z_1),\forall_x\exists_y R(x,y),R(w_2,z_2)\vdash R(w_1,z_1)}\,\text{ax–id} \qquad \dfrac{R(w_1,z_1),\forall_x\exists_y R(x,y),R(w_2,z_2)\vdash \neg R(w_2,z_2)}{R(w_1,z_1),\forall_x\exists_y R(x,y),R(w_2,z_2)\vdash R(w_2,z_1)}\,\neg\text{–S}}{R(w_1,z_1),\forall_x\exists_y R(x,y),R(w_2,z_2) \vdash R(w_1,z_1)\&R(w_2,z_1)}\,\&\text{–D}$$

Proviamo che il sequente $R(w_1,z_1)$, $\forall_x\exists_y R(x,y)$, $R(w_2,z_2) \vdash \neg R(w_2,z_2)$ non è derivabile in $\mathbf{LC}_=$ esibendo un contromodello classico.
Consideriamo dunque il dominio $\mathcal{D} = \{\text{Luca}\}$ e definiamo la valutazione classica bivalente predicativa ν: $\mathcal{D} \to \{0,1\}$ ponendo $\nu(R(x,y))(\text{Luca}) \equiv 1$ per ogni x e y (tale ν è univocamente determinata).
Per definizione di contro-modello, per concludere che il sequente $R(w_1,z_1)$, $\forall_x\exists_y R(x,y)$, $R(w_2,z_2) \vdash \neg R(w_2,z_2)$ non è derivabile in $\mathbf{LC}_=$, occorre mostrare che $\nu((R(w_1,z_1)\ \&\ \forall_x\exists_y R(x,y)\ \&\ R(w_2,z_2)) \to (\neg R(w_2,z_2))) = 0$.
Ora, poichè $\nu(R(w_1,z_1))(\text{Luca}) = 1$, $\nu(\forall_x\exists_y R(x,y)) = \bigwedge_{d\in\mathcal{D}}(\bigvee_{d\in\mathcal{D}}(\nu(R(x,y)))$ $= \nu(R(x,y))(\text{Luca}) = 1$ e $\nu(R(w_2,z_2))(\text{Luca}) = 1$, si ha che $\nu(R(w_1,z_1)\ \&\ \forall_x\exists_y R(x,y)\ \&\ R(w_1,z_1))(\text{Luca}) = \min\{\ 1,\ 1,\ 1\ \} = 1$.
Invece, $\nu(\neg R(w_2,z_2))(\text{Luca}) = 1 - \nu(R(w_2,z_2))(\text{Luca}) = 1 - 1 = 0$.
Dunque $\nu((R(w_1,z_1)\ \&\ \forall_x\exists_y R(x,y)\ \&\ R(w_2,z_2)) \to (\neg R(w_2,z_2)))(\text{Luca}) = \nu(\neg(R(w_1,z_1)\ \&\ \forall_x\exists_y R(x,y)\ \&\ R(w_2,z_2)) \vee (\neg R(w_2,z_2)))(\text{Luca}) = \max\{\ \nu(\neg(R(w_1,z_1)\ \&\ \forall_x\exists_y R(x,y)\ \&\ R(w_2,z_2)))(\text{Luca}),\ \nu(\neg R(w_2,z_2))(\text{Luca})\ \} = \max\{\ 1 - \nu(R(w_1,z_1)\ \&\ \forall_x\exists_y R(x,y)\ \&\ R(w_2,z_2))(\text{Luca}),\ 0\ \} = \max\{\ 1 - 1,\ 0\ \} = 0$.
Allora il sequente $R(w_1,z_1)$, $\forall_x\exists_y R(x,y)$, $R(w_2,z_2) \vdash \neg R(w_2,z_2)$ non è derivabile in $\mathbf{LC}_=$, e quindi nemmeno in $\mathbf{LI}_=$.
Concludiamo quindi che anche il sequente di partenza $\vdash$ (CAP) è non derivabile in $\mathbf{LI}_=$.

Corollario 1. Il *choice approximation principle* non è derivabile in $\mathbf{DNI}_=$.

Dimostrazione. Dalle dispense di logica in [5] sappiamo che $\mathbf{LI}_=$ è equivalente come sistema logico a $\mathbf{DNI}_=$. Perciò, se il *choice approximation principle* non è derivabile in $\mathbf{LI}_=$, allora non lo è neanche in $\mathbf{DNI}_=$. □

Proviamo infine che la formula detta *choice approximation principle* è derivabile secondo l'interpretazione della logica in $\mathbf{MLTT_0}$; mostriamo quindi che esiste un *proof-term* appartenente a (CAP).
Ricordiamo innanzitutto che, per quanto visto al capitolo 3, in $\mathbf{MLTT_0}$ si può interpretare la congiunzione come prodotto cartesiano, la quantificazione universale come prodotto dipendente, la quantificazione esistenziale come somma disgiunta indiciata e l'implicazione come prodotto dipendente tra le proposizioni pensate come insiemi.
Supponiamo che $\forall_{x \in A}\ \exists_{y \in B}\ R(x,y)$ sia derivabile in $\mathbf{MLTT_0}$, cioè che esista un *proof term* $z \in \forall_{x \in A}\ \exists_{y \in B}\ R(x,y)$, e dimostriamo che $\forall_{x_1 \in A}\ \forall_{x_2 \in A}\ \exists_{y_1 \in B}\ \exists_{y_2 \in B}\ ((R(x_1,\ y_1)\ \&\ R(x_2,\ y_2))\ \&\ (x_1 =_A x_2 \to y_1 =_B y_2))$ è anch'esso derivabile in $\mathbf{MLTT_0}$.
Possiamo sfruttare la dimostrazione della validità dell'assioma della scelta in $\mathbf{MLTT_0}$ per trovare un *proof term* $q(x_1,x_2) \in \forall_{x_1 \in A}\ \forall_{x_2 \in A}\ \exists_{y_1 \in B}\ \exists_{y_2 \in B}\ ((R(x_1,y_1))\ \&\ R(x_2,y_2)))\ \&\ (x_1 =_A x_2 \to y_1 =_B y_2))$, dato che dall'ipotesi si deduce subito che $\exists_{f \in A \to B}\ \forall_{x \in A}\ R(x,\ f(x))$ è derivabile in $\mathbf{MLTT_0}$.
Per la regola I-Π) di introduzione del tipo prodotto dipendente si ricava che $q(x_1,x_2) = \lambda x_1.(\lambda x_2.p(x_1,x_2))$, con $p(x_1,x_2) \in \exists_{y_1 \in B}\ \exists_{y_2 \in B}\ ((R(x_1,\ y_1)\ \&\ R(x_2,\ y_2))\ \&\ (x_1 =_A x_2 \to y_1 =_B y_2))$.
Determiniamo tale *proof term* $p(x_1,x_2)$: per la regola I-Σ) di introduzione del tipo somma indiciata si ha che $p(x_1,x_2) = \langle\ f(x_1),\ c(x_1,x_2)\ \rangle$, dove f è la funzione dell'assioma della scelta e $c(x_1,x_2) \in \exists_{y_2 \in B}\ ((R(x_1,\ f(x_1))\ \&\ R(x_2,\ y_2))\ \&\ (x_1 =_A x_2 \to f(x_1) =_B y_2))$.
Determiniamo dunque il *proof term* $c(x_1,x_2)$: sempre per la regola I-Σ) si ha che $c(x_1,x_2) = \langle\ f(x_2),\ m(x_1,x_2)\ \rangle$, con $m(x_1,x_2) \in ((R(x_1,\ f(x_1))\ \&\ R(x_2,\ f(x_2)))\ \&\ (x_1 =_A x_2 \to f(x_1) =_B f(x_2)))$.
Troviamo il *proof term* $m(x_1,x_2)$: per la regola I-$\times$) di introduzione del tipo prodotto cartesiano si ha che $m(x_1,x_2) = \langle\ g(x_1,x_2),\ h(x_1,x_2)\ \rangle$, con $g(x_1,x_2) \in R(x_1,\ f(x_1))\ \&\ R(x_2,\ f(x_2))$ e $h(x_1,x_2) \in x_1 =_A x_2 \to f(x_1) =_B f(x_2)$.
Per la regola I-$\times$) e ricordando quanto visto nella dimostrazione della validità dell'assioma della scelta, si ha che $g(x_1,x_2) = \langle\ \pi_2(z(x_1)),\ \pi_2(z(x_2))\ \rangle$, mentre per le regole I-$\to$) di introduzione del tipo freccia e I-Id) di introduzione del tipo dell'uguaglianza proposizionale si ottiene che $h(x_1,x_2) = \lambda \mathrm{id}(x_1,x_2).\mathrm{id}(f(x_1),\ f(x_2))$.
Allora $q(x_1,x_2) = \lambda x_1.(\lambda x_2.\langle\ f(x_1),\ \langle\ f(x_2),\ \langle\ \langle\ \pi_2(z(x_1)),\ \pi_2(z(x_2))\ \rangle,\ \lambda \mathrm{id}(x_1,x_2).\ \mathrm{id}(f(x_1),\ f(x_2))\ \rangle\ \rangle\ \rangle)$.
Per la regola I-$\to$) di introduzione del tipo freccia si conclude che $\lambda z.q(x_1,x_2) \in \forall_{x \in A}\ \exists_{y \in B}\ R(x,y) \to \forall_{x_1 \in A}\ \forall_{x_2 \in A}\ \exists_{y_1 \in B}\ \exists_{y_2 \in B}\ ((R(x_1,\ y_1)\ \&\ R(x_2,\ y_2))\ \&\ (x_1 =_A x_2 \to y_1 =_B y_2))$, cioè che la formula detta *choice approximation axiom* è derivabile in $\mathbf{MLTT_0}$, dal momento che esiste un *proof-term* appartenente a tale scrittura. $\square$

Abbiamo quindi provato che la teoria dei tipi di Martin-Löf è non conservativa sulla logica intuizionista predicativa con uguaglianza rappresentata da $\mathbf{DNI}_=$.
Tuttavia, questa proprietà non è valida in tutte le teorie dei tipi: la teoria dei tipi dei topoi, ad esempio, risulta conservativa sopra l'interpretazione della logica intuizionista con uguaglianza.

Conclusioni

Abbiamo dimostrato che la logica intuizionista predicativa con uguaglianza nella forma della deduzione naturale $\mathbf{DNI}_{=}$ (in appendice) si interpreta secondo Curry-Howard-Martin-Löf nel frammento $\mathbf{MLTT_0}$ della teoria dei tipi di Martin-Löf in maniera non conservativa. Il motivo è che con i costrutti logici interpretati in $\mathbf{MLTT_0}$ si dimostra il principio *choice approximation principle* che invece non e' dimostrabile in $\mathbf{DNI}_{=}$.
Concludiamo quindi che l'interpretazione logica di Curry-Howard-Martin-Löf in teoria dei tipi è molto più espressiva di quella della deduzione naturale usuale.

Appendice

Calcolo dei sequenti per la deduzione naturale intuizionista con uguaglianza DNI$_=$

$$\text{ax-id} \quad \Gamma, A, \Gamma' \vdash A \qquad \text{ax-tt} \quad \Gamma \vdash \mathrm{tt} \qquad =\text{-ax} \quad \Gamma \vdash t{=}t$$

$$\frac{\Gamma \vdash \bot}{\Gamma \vdash A}\ \text{ex-f-q} \qquad \frac{\Sigma,\Gamma,\Theta,\Gamma',\Delta \vdash C}{\Sigma,\Gamma',\Theta,\Gamma,\Delta \vdash C}\ \text{sc}_{\text{sx}}$$

$$\frac{\Gamma \vdash A \,\&\, B}{\Gamma \vdash A}\ \&\text{–Sn}_1 \qquad \frac{\Gamma \vdash A \qquad \Gamma \vdash B}{\Gamma \vdash A \,\&\, B}\ \&\text{–D} \qquad \frac{\Gamma \vdash A \,\&\, B}{\Gamma \vdash B}\ \&\text{–Sn}_2$$

$$\frac{\Gamma \vdash A}{\Gamma \vdash A \vee B}\ \vee\text{–Dn}_1$$

$$\frac{\Gamma \vdash A \vee B \qquad \Gamma,A \vdash C \qquad \Gamma,B \vdash C}{\Gamma \vdash C}\ \vee\text{–Sn}$$

$$\frac{\Gamma \vdash B}{\Gamma \vdash A \vee B}\ \vee\text{–Dn}_2$$

$$\frac{\Gamma \vdash A \to B \qquad \Gamma \vdash A}{\Gamma \vdash B}\ \to\text{–Sn} \qquad \frac{\Gamma,A \vdash B}{\Gamma \vdash A \to B}\ \to\text{–D}$$

$$\frac{\Gamma \vdash \forall x\ A(x)}{\Gamma \vdash A(t)}\ \forall\text{–Sn} \qquad \frac{\Gamma \vdash A(w)}{\Gamma \vdash \forall x\ A(x)}\ \forall\text{–D}\ (w \notin VL(\Gamma,\forall x A(x)))$$

$$\frac{\Gamma \vdash \exists x\ A(x) \qquad \Gamma, A(w) \vdash C}{\Gamma \vdash C}\ \exists\text{–Sn}\ (w \notin VL(\Gamma,\exists x A(x), C)) \qquad \frac{\Gamma \vdash A(t)}{\Gamma \vdash \exists x\ A(x)}\ \exists\text{–D}$$

$$\frac{\Gamma \vdash t{=}s \qquad \Gamma \vdash A(t)}{\Gamma \vdash A(s)}\ =\text{–Sn}$$

Ricordiamo infine che $\neg A \equiv A \to \bot$.

Calcolo dei sequenti $\mathrm{LI}_=$ per la logica intuizionista predicativa con uguaglianza

$$\overset{\text{ax}-\text{id}}{\Gamma,A,\Gamma' \vdash A} \qquad \overset{\text{ax-}\bot}{\Gamma,\bot,\Gamma' \vdash C} \qquad \overset{\text{ax-}\top}{\Gamma \vdash \top} \qquad \overset{=-\text{ax}}{\Gamma \vdash t{=}t}$$

$$\frac{\Sigma,\Gamma,\Theta,\Gamma',\Delta \vdash C}{\Sigma,\Gamma',\Theta,\Gamma,\Delta \vdash C}\ \text{sc}_{\text{sx}}$$

$$\frac{\Gamma,\ A,\ B \vdash C}{\Gamma,\ A\ \&\ B \vdash C}\ \&\text{–S} \qquad \frac{\Gamma \vdash A \qquad \Gamma \vdash B}{\Gamma \vdash A\ \&\ B}\ \&\text{–D}$$

$$\frac{\Gamma \vdash A}{\Gamma \vdash A \vee B}\ \vee\text{–D}_1$$

$$\frac{\Gamma,\ A \vdash C \qquad \Gamma,\ B \vdash C}{\Gamma,\ A \vee B \vdash C}\ \vee\text{–S}$$

$$\frac{\Gamma \vdash B}{\Gamma \vdash A \vee B}\ \vee\text{–D}_2$$

$$\frac{\Gamma\ \neg\ A \vdash A}{\Gamma,\ \neg\ A \vdash B}\ \neg\text{–S} \qquad \frac{\Gamma,\ A \vdash \bot}{\Gamma \vdash \neg\ A}\ \neg\text{–D}$$

$$\frac{\Gamma,\ A \to B \vdash A \qquad \Gamma,\ B \vdash C}{\Gamma,\ A \to B \vdash C}\ \to\text{–S} \qquad \frac{\Gamma,\ A \vdash B}{\Gamma \vdash A \to B}\ \to\text{–D}$$

$$\frac{\Gamma,\ \forall x\ A(x),\ A(t) \vdash C}{\Gamma,\ \forall x\ A(x) \vdash C}\ \forall\text{–S} \qquad \frac{\Gamma \vdash A(w)}{\Gamma \vdash \forall x\ A(x)}\ \forall\text{–D}\ (w \notin VL(\Gamma,\forall x\ A(x)))$$

$$\frac{\Gamma,\ A(w) \vdash C}{\Gamma,\ \exists x\ A(x) \vdash C}\ \exists\text{–S}\ (w \notin VL(\Gamma,\exists x A(x),C)) \qquad \frac{\Gamma \vdash A(t)}{\Gamma \vdash \exists x\ A(x)}\ \exists\text{–D}$$

$$\frac{\Sigma,\ t{=}s,\ \Gamma(t) \vdash C(t)}{\Sigma,\ \Gamma(s),\ t{=}s \vdash C(s)}\ =\text{–S}_1 \qquad \frac{\Sigma,\ s{=}t,\ \Gamma(t) \vdash C(t)}{\Sigma,\ \Gamma(s),\ s{=}t \vdash C(s)}\ =\text{–S}_2$$

Calcolo dei sequenti $LC_=$ per la logica classica predicativa con uguaglianza

$$\overset{\text{ax}-\text{id}}{\Gamma,A,\Gamma' \vdash \Delta,A,\Delta'} \qquad \overset{\text{ax-}\bot}{\Gamma,\bot,\Gamma' \vdash \nabla} \qquad \overset{\text{ax-}\top}{\Gamma \vdash \nabla,\top,\nabla'} \qquad \overset{=-\text{ax}}{\Gamma \vdash t=t,\Delta}$$

$$\frac{\Sigma,\Gamma,\Theta,\Gamma',\Delta \vdash \Sigma'}{\Sigma,\Gamma',\Theta,\Gamma,\Delta \vdash \Sigma'}\ \text{sc}_{\text{sx}} \qquad \frac{\Gamma, \vdash \Sigma,\Delta,\Theta,\Delta',\nabla}{\Gamma' \vdash \Sigma,\Delta',\Theta,\Delta,\nabla}\ \text{sc}_{\text{dx}}$$

$$\frac{\Gamma,\ A,\ B \vdash \Delta}{\Gamma,\ A\ \&\ B \vdash \Delta}\ \&\text{–S} \qquad \frac{\Gamma \vdash A,\ \Delta \qquad \Gamma \vdash B,\ \Delta}{\Gamma \vdash A\ \&\ B,\ \Delta}\ \&\text{–D}$$

$$\frac{\Gamma,\ A \vdash \Delta \qquad \Gamma,\ B \vdash \Delta}{\Gamma,\ A \vee B \vdash \Delta}\ \vee\text{–S} \qquad \frac{\Gamma \vdash A,\ B,\ \Delta}{\Gamma \vdash A \vee B,\ \Delta}\ \vee\text{–D}$$

$$\frac{\Gamma \vdash A,\ \Delta}{\Gamma,\ \neg\ A \vdash \Delta}\ \neg\text{–S} \qquad \frac{\Gamma,\ A \vdash \Delta}{\Gamma \vdash \neg\ A,\ \Delta}\ \neg\text{–D}$$

$$\frac{\Gamma \vdash A,\ \Delta \qquad \Gamma,\ B \vdash \Delta}{\Gamma,\ A \to B \vdash \Delta}\ \to\text{–S} \qquad \frac{\Gamma,\ A \vdash B,\ \Delta}{\Gamma \vdash A \to B,\ \Delta}\ \to\text{–D}$$

$$\frac{\Gamma,\ \forall x\ A(x),\ A(t) \vdash \nabla}{\Gamma,\ \forall x\ A(x) \vdash \nabla}\ \forall\text{–S} \qquad \frac{\Gamma \vdash A(w),\ \nabla}{\Gamma \vdash \forall x\ A(x),\ \nabla}\ \forall\text{–D}\ (w \notin VL(\Gamma,\forall x\ A(x),\ \nabla))$$

$$\frac{\Gamma,\ A(w) \vdash \nabla}{\Gamma,\ \exists x\ A(x) \vdash \nabla}\ \exists\text{–S}(w \notin VL(\Gamma,\exists x A(x),\nabla)) \qquad \frac{\Gamma \vdash A(t),\ \exists x\ A(x),\ \nabla}{\Gamma \vdash \exists x\ A(x),\ \nabla}\ \exists\text{–D}$$

$$\frac{\Sigma,\ t=s,\ \Gamma(t) \vdash \Delta(t),\ \nabla}{\Sigma,\ \Gamma(s),\ t=s \vdash \Delta(s),\ \nabla}\ =\text{–S}_1 \qquad \frac{\Sigma,\ s=t,\ \Gamma(t) \vdash \Delta(t),\ \nabla}{\Sigma,\ \Gamma(s),\ s=t \vdash \Delta(s),\ \nabla}\ =\text{–S}_2$$

Bibliografia

[1] Jean-Yves Girard, translated and with appendices by Paul Taylor, Yves Lafont, *Proofs and types*, Cambridge University Press, 1989

[2] Per Martin-Löf, notes by Giovanni Sambin of a series of lectures given in Padova, *Intuitionistic type theory*, Giugno 1980. Bibliopolis, Napoli, 1984.

[3] Steve Awodey, Department of Philosophy - Carnegie Mellon University, USA, Andrej Bauer, Department of Mathematics and Physics - University of Ljubljana, Slovenia, *Propositions as [Types]*, 2004

[4] Vladimir Voevodsky, *How I became interested in foundations of mathematics*, 2015, vedi slide V. Voevodsky in https://www.math.unipd.it/∼maietti/typ21.html

[5] Maria Emilia Maietti, *Note di Logica Matematica*, 2018

[6] Maria Emilia Maietti, *Note di teoria dei tipi*, 2020

[7] Maria Emilia Maietti, *La teoria dei tipi*, "Direzioni della ricerca logica in Italia 2", ETS 2018, H.Hosni, G. Lolli, C. Toffalori eds., 2018

[8] Maria Emilia Maietti, *On choice rules in dependent type theory*, In Theory and Applications of Models of Computation - 14th Annual Conference, TAMC 2017, Bern, Switzerland, April 20-22, 2017, Proceedings. Lecture Notes in Computer Science, 2017

Ringraziamenti

Giunta alla conclusione di questo percorso di studi, vorrei ringraziare la mia famiglia e rivolgere in particolare a mia sorella Vittoria un sentito Grazie per essere stata in questi anni un riferimento, per avermi sempre ascoltato e compreso e per aver sempre tifato per me.

Giovanna Andrigo