UNIVERSITÀ DEGLI STUDI DI PADOVA

Dipartimento di Fisica e Astronomia "Galileo Galilei"

Corso di Laurea in Fisica

Tesi di Laurea

La regolarizzazione di Levi-Civita

e le variabili di azione-angolo

Relatore

Prof. Massimiliano Guzzo

Laureanda

Gemma Ghezzi

Anno Accademico 2022/2023

Abstract

Il problema dei tre corpi ristretto è il problema del moto di un punto P di massa trascurabile soggetto all'attrazione gravitazionale di due corpi massicci P_1 e P_2, di massa m_1 ed m_2 rispettivamente. Nel caso in cui P_1 e P_2 si muovano di moto circolare l'uno relativamente all'altro, è usuale considerare l'hamiltoniana per il moto del punto P in un sistema di riferimento rotante in cui entrambi i corpi massicci sono a riposo. Inoltre, nella sua formulazione piana, il problema può essere formulato utilizzando la regolarizzazione di Levi-Civita relativamente a P_1 o P_2. Nel caso in cui la massa m_2 sia piccola rispetto alla massa m_1, conviene allora considerare l'hamiltoniana del problema regolarizzato nella forma:

$$K = K_0 + m_2 K_1$$

in cui K_0 è integrabile e regolare rispetto alle collisioni con P_1. Lo scopo della prova finale è effettuare una revisione della costruzione delle variabili di azione-angolo per K_0, seguendo il procedimento fornito in [1].

Indice

Introduzione

L'avvento della teoria della gravitazione universale di Newton nel diciottesimo secolo ha condotto matematici, fisici e astronomi ad interessarsi al problema dei tre corpi, che vede il movimento di tre punti materiali attratti mutuamente l'uno dall'altro attraverso la legge di gravitazione universale di Newton. Il loro moto è descritto da nove equazioni differenziali scalari del secondo ordine in cui le nove coordinate dei tre punti sono funzioni incognite del tempo e risulta non integrabile alla Liouville-Arnold, essendo noti solamente 7 integrali indipendenti: l'energia meccanica, le tre componenti dei vettori momento angolare e quantità di moto. Nelle espressioni delle forze compaiono inoltre le mutue distanze, che interrompono la regolarità con singolarità dovute alle possibili collisioni tra due oppure tutti e tre i corpi.

In questa tesi si ripercorre dapprima il ragionamento di Levi-Civita [2], che nel caso del problema ristretto in cui un corpo P_3 ha massa infinitamente piccola rispetto a quella di P_1, P_2, introduce un'hamiltoniana non più singolare nel punto di collisione con P_1. Il processo di regolarizzazione prende in esame le orbite circolari dei corpi massivi attorno al loro baricentro, per poi definire la lagrangiana di un punto P che si muove nel piano di P_1, P_2 nel campo gravitazionale da questi generato. Attraverso un cambio di coordinate ci si sposta nel sistema di riferimento rotante il cui asse x contiene P_1, P_2 per tutti i tempi, così da eliminare la dipendenza temporale e giungere all'espressione dell'hamiltoniana H. Si opera allora una trasformazione delle coordinate cartesiane che viene estesa in modo canonico ai momenti, una riparametrizzazione temporale ed una procedura di riduzione iso-energetica che portano alla definizione di un'hamiltoniana K non singolare rispetto alla collisione con P_1. Nel caso in cui la massa m_2 sia piccola rispetto alla massa m_1, conviene allora considerare l'hamiltoniana del problema regolarizzato nella forma:

$$K = K_0 + m_2 K_1$$

in cui K_0 è integrabile e regolare rispetto alle collisioni con P_1.

Nella seconda parte dell'elaborato si introduce l'equazione ridotta di Hamilton-Jacobi, che verrà usata, seguendo quanto riportato in [1], per definire una funzione generatrice di trasformazione canonica che coniuga l'hamiltoniana K_0 ad un'hamiltoniana dipendente unicamente dai nuovi momenti. La trasformazione canonica scelta sarà quella che muta le variabili canoniche cartesiane in variabili di azione-angolo (I, φ); la sua esistenza è garantita dal teorema di Liouville-Arnold [3].

La terza e ultima parte riporta l'analisi della procedura descritta nell'articolo [1]. Per cominciare si rappresenta K_0 utilizzando le coordinate polari nel piano delle variabili regolarizzanti, e si scrive l'equazione di Hamilton-Jacobi per K_0. Operando un'ulteriore sostituzione minimale di variabile nell'equazione di Hamilton-Jacobi, essa assume una forma che permette di riconoscere il problema di Keplero piano. Dopo aver stabilito una forma dell'integrale completo W in cui si separa la dipendenza angolare da quella radiale, si restringe lo studio alle orbite la cui distanza da P_1 oscilla tra due valori (periapside e apside). Si opera pertanto una scelta delle variabili d'azione L, G che sia congrua con le espressioni di periapside e apside scritte in termini di semi-asse maggiore a ed eccentricità e. Dalle derivate parziali dell'integrale completo W rispetto alle azioni L e G si ricavano quindi le variabili angolari l e g.

Le variabili di azione-angolo che si ottengono per K_0 sono analoghe alle variabili di Delaunay per il problema di Keplero, mentre l'espressione finale di K_0 in tali variabili risulta diversa. Il metodo descritto in [1] si rivela dunque efficace per costruire variabili di azione-angolo relative alla parte integrabile del problema, poi estese al contributo perturbativo tramite sostituzione, consentendo un'analisi perturbativa del problema dei tre corpi.

Capitolo 1

La regolarizzazione di Levi-Civita

1.1 Il problema ristretto dei tre corpi

1.1.1 Ipotesi di fondo

Il problema dei tre corpi consiste nella determinazione del moto di un sistema formato da tre corpi massivi P_1, P_2, P_3 la cui interazione è gravitazionale e le cui condizioni iniziali sono note.
Assumendo che una delle masse sia molto inferiore rispetto alle altre due

$$m_1, m_2 >> m_3$$

il campo gravitazionale viene generato solo dai corpi P_1, P_2 nel quale P_3 si muove: pertanto P_1, P_2 non risultano attratti gravitazionalmente da P_3 e costituiscono il problema dei due corpi, che risulta integrabile; il problema della determinazione del moto di P_3 (che d'ora in poi indicheremo con P) nel campo gravitazionale generato da P_1, P_2 costituisce invece il cosiddetto problema ristretto dei tre corpi, non integrabile. Questa assunzione è ad esempio utilizzata per lo studio del moto di asteroidi, meteoriti, comete, spacecrafts sotto l'effetto gravitazionale del Sole e di Giove. Per semplificare ulteriormente il problema si può restringere la trattazione al piano orbitale di P_1, P_2.

1.1.2 Il problema dei due corpi gravitazionale

Denotando con $r_1 = P_1 - O, r_2 = P_2 - O$ i vettori posizione di P_1, P_2 rispetto ad un sistema di riferimento inerziale con origine O, si hanno le seguenti equazioni di Newton:

$$m_1\underline{\ddot{r}_1} = -\frac{\mathcal{G}m_1m_2}{||\underline{r_2} - \underline{r_1}||^3}(\underline{r_1} - \underline{r_2})$$

$$m_2\underline{\ddot{r}_2} = -\frac{\mathcal{G}m_1m_2}{||\underline{r_2} - \underline{r_1}||^3}(\underline{r_2} - \underline{r_1})$$

ove $\mathcal{G}$ denota la costante di gravitazione universale.

Con l'introduzione dei vettori baricentro e posizione relativa:

$$\underline{b} = \frac{m_1\underline{r_1} + m_2\underline{r_2}}{m_1 + m_2} = B - O$$
$$\underline{R} = \underline{r_2} - \underline{r_1}$$

si avranno

$$\ddot{\underline{b}} = 0 \tag{1.1}$$

$$\ddot{\underline{R}} = -\frac{\mathcal{G}(m_1 + m_2)}{||\underline{R}||^3}\underline{R}. \tag{1.2}$$

Poiché la (1.1) indica che il baricentro si muove di moto rettilineo uniforme conviene considerare $B \equiv O$ e operare in un sistema solidale al baricentro, anch'esso inerziale.
La (1.2) stabilisce che la dinamica per $\underline{R}$ è equivalente al problema di Keplero.

Tra le ben note soluzioni del problema di Keplero, consideriamo una soluzione circolare di raggio assegnato:

$$||\underline{R}(t)|| = r_* \quad \forall t.$$

Si scelgono allora delle unità di misura più convenienti:

- $r_* = 1$;
- $m_1 + m_2 = 1$ che equivale a porre $m_1 = 1 - \mu,\ m_2 = \mu$;
- l'unità di misura del tempo viene fissata in modo che il periodo di $R(t)$, ovvero il periodo di rivoluzione di P_1, P_2, sia uguale a 2π.

Con tali scelte la costante di gravità $\mathcal{G}$ risulta unitaria.

1.1.3 La restrizione circolare

Si considera ora il moto circolare uniforme di P_1, P_2 attorno al loro baricentro:

$$\underline{\tilde{r_1}}(t) = -\mu(\cos t, \sin t)$$

$$\underline{\tilde{r_2}}(t) = (1 - \mu)(\cos t, \sin t)$$

in cui il tempo t è anche misura angolare viste le unità di misura introdotte in precedenza.
L'energia potenziale gravitazionale per massa unitaria risentita da un punto $P = (\tilde{x}, \tilde{y})$ sarà

$$V_g(\tilde{x}, \tilde{y}; t) = -\frac{1 - \mu}{||P - P_1||} - \frac{\mu}{||P - P_2||} = -\frac{1 - \mu}{\tilde{d_1}} - \frac{\mu}{\tilde{d_2}}$$

ove

$$\tilde{d_i} = ||P - P_i|| = ||(\tilde{x}, \tilde{y}) - \underline{\tilde{r_i}}(t)|| \qquad i = 1, 2.$$

La lagrangiana per il moto di P, in cui sia energia cinetica che energia potenziale sono definite per massa unitaria, risulta:

$$\tilde{L}(\tilde{x}, \tilde{y}, \dot{\tilde{x}}, \dot{\tilde{y}}, t) = \frac{1}{2}(\dot{\tilde{x}}^2 + \dot{\tilde{y}}^2) + \frac{1 - \mu}{\tilde{d_1}} + \frac{\mu}{\tilde{d_2}}.$$

Si noti che $\tilde{L}$ dipende esplicitamente dal tempo t attraverso le distanze $\tilde{d_1}$, $\tilde{d_1}$. L'inconvenienza di un'energia potenziale dipendente dal tempo si risolve introducendo un sistema di riferimento rotante il cui asse x contenga P_1, P_2 per tutti i tempi, tramite la trasformazione $(x, y) = \mathcal{R}(t)(\tilde{x}, \tilde{y})$ ove $\mathcal{R}(t)$ è la matrice di rotazione:

$$\mathcal{R}(t) = \begin{pmatrix} \cos t & \sin t \\ -\sin t & \cos t \end{pmatrix}.$$

Applicando $\mathcal{R}(t)$ ai raggi vettori di $\underline{\tilde{r_1}}(t)$, $\underline{\tilde{r_2}}(t)$ si ottiene:

$$\underline{r_1} = \mathcal{R}(t)\underline{\tilde{r_1}}(t) = -\mu(1, 0)$$

$$\underline{r_2} = \mathcal{R}(t)\underline{\tilde{r_2}}(t) = (1 - \mu)(1, 0)$$

mentre l'espressione delle distanze diventa:

$$d_1 = ||\mathcal{R}^T(x, y) - \mathcal{R}^T\underline{r_1}|| = ||(x, y) - \underline{r_1}|| = \sqrt{(x + \mu)^2 + y^2}$$

$$d_2 = ||\mathcal{R}^T(x, y) - \mathcal{R}^T\underline{r_2}|| = ||(x, y) - \underline{r_2}|| = \sqrt{(x - 1 + \mu)^2 + y^2}.$$

Ricordando che $\mathcal{R}(t)$ è una matrice ortogonale a determinante unitario, si calcola

$$||(\dot{\tilde{x}}, \dot{\tilde{y}})||^2 = ||\mathcal{R}^T(\dot{x}, \dot{y}) + \dot{\mathcal{R}}^T(x, y)||^2 = ||\mathcal{R}^T(\dot{x}, \dot{y})|| + ||\dot{\mathcal{R}}^T(x, y)|| + 2\mathcal{R}^T(\dot{x}, \dot{y}) \cdot \dot{\mathcal{R}}^T(x, y) =$$
$$= (\dot{x}^2 + \dot{y}^2) + (x^2 + y^2) + 2(\dot{y}x - \dot{x}y).$$

Per cui la lagrangiana per il moto di P nel sistema di riferimento rotante è

$$L(x, y, \dot{x}, \dot{y}) = \frac{1}{2}(\dot{x}^2 + \dot{y}^2) + \frac{1}{2}(x^2 + y^2) + (\dot{y}x - \dot{x}y) + \frac{1 - \mu}{d_1} + \frac{\mu}{d_2} =$$
$$= \frac{1}{2}(\dot{x}^2 + \dot{y}^2) + (\dot{y}x - \dot{x}y) - V(x, y),$$

le cui equazioni di Lagrange sono

$$\ddot{x} = 2\dot{y} - \frac{\partial V}{\partial x}$$
$$\ddot{y} = -2\dot{x} - \frac{\partial V}{\partial y}$$

avendo definito il potenziale efficace

$$V(x, y) = -\frac{1}{2}(x^2 + y^2) - \frac{1 - \mu}{d_1} - \frac{\mu}{d_2}.$$

Essendo ora la lagrangiana indipendente dal tempo, l'integrale di Jacobi è (l'unico noto) integrale primo per il problema dei tre corpi:

$$J(x, y, \dot{x}, \dot{y}) = (\dot{x}, \dot{y}) \cdot \left(\frac{\partial L}{\partial \dot{x}}, \frac{\partial L}{\partial \dot{y}}\right) - L(x, y, \dot{x}, \dot{y}) =$$
$$= (\dot{x}, \dot{y}) \cdot (\dot{x} - y, \dot{y} + x) - L(x, y, \dot{x}, \dot{y}) =$$
$$= \frac{1}{2}(\dot{x}^2 + \dot{y}^2) - \frac{1}{2}(x^2 + y^2) - \frac{1 - \mu}{d_1} - \frac{\mu}{d_2}.$$

Si computano ora i momenti coniugati alla lagrangiana:

$$p_x = \frac{\partial L}{\partial \dot{x}} = \dot{x} - y \longrightarrow \dot{x} = p_x + y$$

$$p_y = \frac{\partial L}{\partial \dot{y}} = \dot{y} + x \longrightarrow \dot{y} = p_y - x$$

che sarà infine coniugata attraverso la trasformata di Legendre all'hamiltoniana

$$H(x, y, p_x, p_y) = [(p_x, p_y) \cdot (\dot{x}, \dot{y}) - L(x, y, \dot{x}, \dot{y})]\big|_{(\dot{x},\dot{y})=(p_x+y, p_y-x)} =$$

$$= p_x(p_x + y) + p_y(p_y - x) - \frac{1}{2}((p_x + y)^2 + (p_y - x)^2) - (p_y - x)x + (p_x + y)y + V(x, y) =$$

$$= \frac{1}{2}(p_x^2 + p_y^2) + yp_x - xp_y - \frac{1-\mu}{\sqrt{(x+\mu)^2 + y^2}} - \frac{\mu}{\sqrt{(x-1+\mu)^2 + y^2}}.$$

1.2 L'hamiltoniana di Levi-Civita

L'hamiltoniana precedentemente introdotta presenta due singolarità in corrispondenza di $(x_1, y_1) = (-\mu, 0)$ e $(x_2, y_2) = (1-\mu, 0)$, che rappresentano le eventuali collisioni con P_1 e P_2, rispettivamente. T. Levi-Civita propose, nell'articolo [2] del 1906, una celebre trasformazione che rende il problema circolare ristretto dei tre corpi non-singolare rispetto alla eventuale collisione con P_1 (oppure con P_2). In questa sezione ripercorriamo l'introduzione della trasformazione di Levi-Civita, che comprende una trasformazione delle coordinate x, y estesa canonicamente ai momenti, una trasformazione della variabile temporale, ed una procedura di riduzione iso-energetica.
Si inizia traslando nello spazio delle fasi (x, y, p_x, p_y):

$$X = x - x_1, \qquad P_X = p_x$$

$$Y = y, \qquad P_Y = p_y - x_1$$

per poi introdurre le variabili di Levi-Civita (ξ_1, ξ_2), coniugate in modo canonico ai momenti (π_1, π_2):

$$X = \xi_1^2 - \xi_2^2, \qquad P_X = \frac{\pi_1\xi_1 - \pi_2\xi_2}{2||\underline{\xi}||^2}$$

$$Y = 2\xi_1\xi_2, \qquad P_Y = \frac{\pi_1\xi_2 + \pi_2\xi_1}{2||\underline{\xi}||^2}.$$

Si osservi che la parte in coordinate della trasformazione di Levi-Civita si può riscrivere utilizzando la notazione complessa

$$X + iY = (\xi_1 + i\xi_2)^2$$

ed in particolare si ottiene anche

$$\sqrt{X^2 + Y^2} = \xi_1^2 + \xi_2^2.$$

La composizione delle due trasformazioni canoniche porta all'hamiltoniana:

$$h(\xi,\pi) = H(X(\xi)+x_1, Y(\xi), P_X(\xi,\pi), P_Y(\xi,\pi)+x_1)$$

che ancora presenta una singolarità per $\underline{\xi} = (0,0)$.
Si sostituisce allora la variabile indipendente t con il tempo fittizio τ tale che

$$dt = ||\underline{\xi}||^2 d\tau.$$

Si considerano quindi valori iniziali di (ξ,π) tali che $h(\xi,\pi) = C$, ovvero aventi lo stesso valore di h. Levi-Civita dimostra che le soluzioni delle equazioni di Hamilton:

$$\frac{\partial \xi_i}{\partial \tau} = \frac{\partial K(\xi,\pi)}{\partial \pi_i} \qquad \frac{\partial \pi_i}{\partial \tau} = -\frac{\partial K(\xi,\pi)}{\partial \xi_i} \qquad i = 1,2$$

ottenute dall'hamiltoniana $K(\xi,\pi)$ (dipendente dal parametro C) definita da

$$K(\xi,\pi) = \ ||\underline{\xi}||^2 \left(h(\xi,\pi) - C\right)$$

sono coniugate alle soluzioni del problema dei tre corpi con valore C dell'hamiltoniana previa sostituzione della variabile τ con la variabile t attraverso

$$t = \int_0^\tau ||\underline{\xi}(s)||^2 \, ds,$$

almeno finché $\underline{\xi}(\tau) \neq (0,0)$. Il vantaggio di tale procedura consiste nel fatto che la nuova hamiltoniana K risulta non singolare rispetto alle collisioni con P_1, e viene oggi indicata come riduzione iso-energetica.

Infatti, da semplici conti algebrici, si ottiene:

$$\begin{aligned}
K(\xi,\pi) = & \ ||\underline{\xi}||^2 \Big[h(\xi,\pi) - C\Big] = \\
= & \ ||\underline{\xi}||^2 \Big[H\big(X(\xi)+x_1, Y(\xi), P_X(\xi,\pi), P_Y(\xi,\pi)+x_1\big) - C\Big] = \\
= & \ ||\underline{\xi}||^2 \left[\frac{1}{2}\Big((P_X)^2 + (P_Y+x_1)^2\Big) + YP_X - (X+x_1)(P_Y+x_1) + \right. \\
& \left. - \frac{1-\mu}{\sqrt{(X+x_1+\mu)^2+Y^2}} - \frac{\mu}{\sqrt{(X+x_1-1+\mu)^2+Y^2}} - C\right] =
\end{aligned}$$

$$= \frac{\pi_1^2\xi_1^2 + \pi_2^2\xi_2^2 + \pi_1^2\xi_2^2 + \pi_2^2\xi_1^2}{8||\underline{\xi}||^2} + \frac{1}{2}(\pi_1\xi_1^2\xi_2 - \pi_2\xi_1^3 + \pi_1\xi_2^3 - \pi_2\xi_1\xi_2^2) +$$

$$- ||\underline{\xi}||^2\left(C + \frac{x_1^2}{2}\right) - x_1||\underline{\xi}||^2(\xi_1^2 - \xi_2^2) - \frac{(1-\mu)||\underline{\xi}||^2}{\sqrt{||\underline{\xi}||^4 + 2(x_1+\mu)(\xi_1^2 - \xi_2^2) + (x_1+\mu)^2}} +$$

$$- \frac{\mu||\underline{\xi}||^2}{\sqrt{||\underline{\xi}||^4 + 2(x_1 - 1 + \mu)(\xi_1^2 - \xi_2^2) + (x_1 - 1 + \mu)^2}} =$$

$$= \frac{||\underline{\pi}||^2}{8} + \frac{||\underline{\xi}||^2}{2}(\pi_1\xi_2 - \pi_2\xi_1) - ||\underline{\xi}||^2\left(C + \frac{x_1^2}{2}\right) - x_1||\underline{\xi}||^2(\xi_1^2 - \xi_2^2) +$$

$$- \frac{(1-\mu)||\underline{\xi}||^2}{\sqrt{||\underline{\xi}||^4 + 2(x_1+\mu)(\xi_1^2 - \xi_2^2) + (x_1+\mu)^2}} - \frac{\mu||\underline{\xi}||^2}{\sqrt{||\underline{\xi}||^4 + 2(x_1 - 1 + \mu)(\xi_1^2 - \xi_2^2) + (x_1 - 1 + \mu)^2}} =$$

$$\stackrel{1}{=} \frac{||\underline{\pi}||^2}{8} + \frac{||\underline{\xi}||^2}{2}(\pi_1\xi_2 - \pi_2\xi_1 - 2C) - 1 + \mu\left(1 - ||\underline{\xi}||^2\left(\xi_2^2 - \xi_1^2 + \frac{1}{\sqrt{||\underline{\xi}||^4 + 2(\xi_2^2 - \xi_1^2) + 1}} + \frac{\mu}{2}\right)\right)$$

Pertanto

$$K(\xi, \pi) = \frac{||\underline{\pi}||^2}{8} + \frac{||\underline{\xi}||^2}{2}(\pi_1\xi_2 - \pi_2\xi_1 - 2C) - 1 + \mu\left(1 - ||\underline{\xi}||^2\left(\xi_2^2 - \xi_1^2 + \frac{1}{\Delta_1} + \frac{\mu}{2}\right)\right)$$

ove

$$\Delta_1 := \sqrt{||\underline{\xi}||^4 + 2(\xi_2^2 - \xi_1^2) + 1}$$

[1] $x_1 = -\mu$

Capitolo 2

Le variabili di azione-angolo

La trattazione eseguita finora ha portato ad un'hamiltoniana regolarizzata ma dalla forma piuttosto complessa, in cui posizioni generalizzate e relativi momenti si mescolano in più modi.
Ci si chiede quindi se è possibile trovare una forma di essa che dipenda esplicitamente solo dai momenti. Oggi è noto che il problema ristretto dei tre corpi non risulta integrabile, pertanto non sarà possibile coniugare l'hamiltoniana K ad un'hamiltoniana dipendente solo da variabili momento. Si opta allora per un approccio perturbativo, che consiste di rappresentare K come:

$$K = K_0 + \mu K_1$$

ove K_0 è hamiltoniana integrabile che rappresenta il problema di Keplero nel sistema di riferimento rotante, e poi definire le variabili di azione-angolo per K_0, cosicché si possano utilizzare i metodi standard della teoria hamiltoniana delle perturbazioni per muovere ad ordini superiori la dipendenza non integrabile.
La costruzione delle variabili di azione-angolo per K_0 è fatta nel dettaglio nell'articolo [1], che verrà descritto nel capitolo 3 di questa tesi. Nell'articolo sopra citato, le variabili di azione angolo sono introdotte mediante una funzione generatrice di seconda specie costruita con il metodo di Hamilton-Jacobi. In questo capitolo ricordiamo le basi di tale metodo, che verrà utilizzato per la costruzione delle variabili di azione-angolo. Cominciamo dando le seguenti definizioni

Definizione 1. *Data la funzione di Hamilton $H(q, p)$ con (q, p) variabili canoniche in $\mathbb{R}^{2n}$, si dice equazione ridotta di Hamilton-Jacobi per H l'equazione a derivate parziali*

$$H\left(\frac{\partial W}{\partial q_1}, ..., \frac{\partial W}{\partial q_n}, q_1, ..., q_n\right) = h$$

in cui sia la funzione $W(q_1, ..., q_n)$ che la costante h sono incognite.

L'idea è quella di utilizzare una famiglia di soluzioni dell'equazione di Hamilton-Jacobi dipendente da n parametri $\tilde{p_1}, ..., \tilde{p_n}$ da utilizzare come funzione generatrice di seconda specie di trasformazioni canoniche secondo la seguente definizione:

Definizione 2. *Si dice integrale completo dell'equazione ridotta di Hamilton-Jacobi ogni famiglia di soluzioni* $W(\tilde{p_1}, ..., \tilde{p_n}, q_1, ..., q_n)$, $h(\tilde{p_1}, ..., \tilde{p_n})$ *t.c.*

$$\det\left(\frac{\partial^2 W}{\partial \tilde{p_i} \partial q_j}\right) \neq 0$$

con $\tilde{p_1}, ..., \tilde{p_n}$ *parametri reali.*

Un integrale completo dell'equazione di Hamilton-Jacobi consente di definire una trasformazione canonica, considerando la funzione stessa $W(\tilde{p}, q)$ come funzione generatrice di seconda specie della trasformazione $(\tilde{p}, \tilde{q}) = w(p, q)$ che si ottiene dal sistema:

$$p_i = \frac{\partial W}{\partial q_i}, \qquad \tilde{q_i} = \frac{\partial W}{\partial \tilde{p_i}} \qquad i = 1, ..., n.$$

Ne deriva pertanto la facile proposizione:

Proposizione 1. *Sia* $W(\tilde{p_1}, ..., \tilde{p_n}, q_1, ..., q_n)$, $h(\tilde{p_1}, ..., \tilde{p_n})$ *integrale completo dell'equazione ridotta di Hamilton-Jacobi. Allora la funzione generatrice di seconda specie*

$$S(\tilde{p_1}, ..., \tilde{p_n}, q_1, ..., q_n) = W(\tilde{p_1}, ...\tilde{p_n}, q_1, ..., q_n)$$

genera implicitamente una trasformazione canonica $(p, q) = w(\tilde{p}, \tilde{q})$ *che coniuga* $H(q, p)$ *a*

$$\tilde{H}(\tilde{p_1}, ...\tilde{p_n}, \tilde{q_1}, ...\tilde{q_n}) = h(\tilde{p_1}, ...\tilde{p_n}).$$

Il fatto che la trasformazione sia canonica implica che le hamiltoniane $H(q, p)$ e $h(\tilde{p})$ descrivano lo stesso problema. Le orbite di $h(\tilde{p})$ saranno quindi rette con equazione parametrica

$$(\tilde{p}, \tilde{q}) = (\tilde{p_0}, \tilde{q_0}) + t\left(0, \frac{\partial h}{\partial \tilde{p}}(\tilde{p_0})\right) \qquad \forall t \in \mathbb{R}.$$

Tale processo di rettificazione è particolarmente interessante se si considerano trasformazioni w definite in un aperto invariante $\mathcal{D} \subseteq D \subseteq \mathbb{R}^{2n}$ (D dominio aperto di (q, p)) t.c.

$$w : \mathcal{D} \to \mathcal{A} \times \mathbb{T}^n$$

$$(q, p) \mapsto (\tilde{p}, \tilde{q}) = (I, \varphi)$$

dove $\mathcal{A} \subseteq \mathbb{R}^n$ è il dominio (aperto) delle azioni I, mentre il dominio degli angoli φ è l'insieme $\mathbb{R}^n$ dotato della relazione di equivalenza tra i multipli interi di 2π, ovvero il toro standard n dimensionale $\mathbb{T}^n = \mathbb{R}^n/(2\pi\mathbb{Z})^n$; in due dimensioni ($n$=2) si tratta della toroide bidimensionale.

L'esistenza di questa trasformazione è garantita dal teorema di Liouville-Arnold:

Teorema 1. *Si supponga che il sistema di hamiltoniana $H : D \to \mathbb{R}$, ove $\subseteq D \subseteq \mathbb{R}^{2n}$ è insieme aperto munito delle coordinate canoniche q, p, possieda n integrali primi indipendenti $F_1, ..., F_n : D \to \mathbb{R}$ in involuzione mutua rispetto alle parentesi di Poisson.*
Sia $\hat{f} \in \mathbb{R}^n$ t.c. la superficie di livello

$$M_{\hat{f}} = \{(q,p) \in D \mid F_i(q,p) = \hat{f}_i,\ i = 1, ...n\}$$

sia compatta e connessa. Allora $M_{\hat{f}}$ è diffeomorfa al toro $\mathbb{T}^n$ ed $\exists \mathcal{F}$ intorno di $\hat{f}$, un insieme aperto $\mathcal{A} \subseteq \mathbb{R}^n$ e un diffeomorfismo canonico

$$w : \cup_{f \in \mathcal{F}} M_f \to \mathcal{A} \times \mathbb{T}^n$$

$$(q,p) \mapsto (I, \varphi)$$

t.c. $H(w^{-1}(I,\varphi)) = h(I)$.

Si ricercano nel seguito tali variabili per l'hamiltoniana K valutata per $\mu = 0$. Si osserva che l'applicazione del metodo di Hamilton-Jacobi conduce a variabili di azione-angolo solamente per speciali scelte dei parametri $\tilde{p}$ che definiscono l'integrale completo. Infatti, per scelte generiche, la Proposizione 1 rimane ancora vera, ma non è garantito che le variabili $\tilde{q}$ coniugate alle $\tilde{p}$ siano periodiche con periodo 2π, condizione necessaria per avere delle variabili di azione-angolo.

Capitolo 3

Le variabili di azione-angolo per l'hamiltoniana di Levi-Civita

In questo capitolo si ripercorre il procedimento descritto in [1] per il calcolo delle variabili di azione-angolo per l'hamiltoniana K_0.

3.1 Le coordinate polari del piano regolarizzato

Cominciamo scrivendo K nella forma quasi-integrabile

$$K = K_0 + \mu K_1$$

ove si sostituisce anche $C = C_0 + \mu C_1$:

$$K(\xi,\pi) = \frac{||\underline{\pi}||^2}{8} + \frac{||\underline{\xi}||^2}{2}(\pi_1\xi_2 - \pi_2\xi_1 - 2C_0) - 1 + \mu\left(1 - ||\underline{\xi}||^2\left(\xi_2^2 - \xi_1^2 + \frac{1}{\Delta_1} + \frac{\mu}{2} + C_1\right)\right),$$

da cui si definiscono

$$\begin{aligned} K_0 &= \frac{||\underline{\pi}||^2}{8} + \frac{||\underline{\xi}||^2}{2}(\pi_1\xi_2 - \pi_2\xi_1 - 2C_0) - 1, \\ K_1 &\overset{2}{=} 1 - ||\underline{\xi}||^2\left(\xi_2^2 - \xi_1^2 + \frac{1}{\Delta_1} + \frac{\mu}{2} + C_1\right). \end{aligned}$$

K_1 potrà essere trattata come la perturbazione al prim'ordine di K_0, e il problema completo potrà essere considerato come quasi-integrabile.

Ci occuperemo perciò di trovare le variabili di azione-angolo solo per K_0 seguendo quanto riportato nell'articolo [1].

[2] La definizione di K_1 è diversa nell'articolo [1], ma la trattazione per K_0 rimane inalterata.

Dal momento che K_0 è invariante per rotazioni del piano (ξ_1, ξ_2), consideriamo la trasformazione canonica

$$(\xi_1, \xi_2, \pi_1, \pi_2) \mapsto (r, \varphi, p_r, p_\varphi)$$

t.c.

$$\underline{\xi} = (\xi_1, \xi_2) = (r\cos\varphi, r\sin\varphi).$$

Definendo la funzione:

$$u(\xi) = \left(\sqrt{\xi_1^2 + \xi_2^2}\ ,\ \arcsin\frac{\xi_2}{\sqrt{\xi_1^2 + \xi_2^2}}\right),$$

si ottiene la trasformazione fra momenti:

$$\underline{\pi} = (\pi_1, \pi_2) = \left(\frac{\partial u(\xi)}{\partial \xi}\right)^T (p_r, p_\varphi) = \begin{pmatrix} \frac{\partial r}{\partial \xi_1} & \frac{\partial r}{\partial \xi_2} \\ \frac{\partial \varphi}{\partial \xi_1} & \frac{\partial \varphi}{\partial \xi_2} \end{pmatrix}^T (p_r, p_\varphi) = \begin{pmatrix} \frac{\partial r}{\partial \xi_1} & \frac{\partial \varphi}{\partial \xi_1} \\ \frac{\partial r}{\partial \xi_2} & \frac{\partial \varphi}{\partial \xi_2} \end{pmatrix} (p_r, p_\varphi) =$$

$$= \begin{pmatrix} \cos\varphi & -r^{-1}\sin\varphi \\ \sin\varphi & r^{-1}\cos\varphi \end{pmatrix} (p_r, p_\varphi) = \left(p_r\cos\varphi - p_\varphi\frac{\sin\varphi}{r}\ ,\ p_r\sin\varphi + p_\varphi\frac{\cos\varphi}{r}\right).$$

Tale trasformazione coniuga K_0 all'hamiltoniana

$$H_0 = \frac{1}{8}\left(p_r^2 + \frac{p_\varphi^2}{r^2}\right) + \frac{r^2}{2}(-p_\varphi - 2C_0) - 1.$$

Risolviamo l'equazione ridotta di Hamilton-Jacobi nelle variabili r, φ:

$$\frac{1}{8}\left(\left(\frac{\partial W}{\partial r}\right)^2 + \frac{1}{r^2}\left(\frac{\partial W}{\partial \varphi}\right)^2\right) + \frac{r^2}{2}\left(-\frac{\partial W}{\partial \varphi} - 2C_0\right) - 1 = -\epsilon.$$

Dal momento che φ è coordinata ignorabile, si cercano soluzioni nella forma separata

$$W(\varphi, r) = U(r) + 2G\varphi$$

ove G rappresenta il primo parametro che renderà W un integrale completo. Ponendo $\alpha = 1 - \epsilon$, si ottiene:

$$\frac{1}{8}\left(\frac{dU}{dr}\right)^2 + \frac{G^2}{2r^2} + \frac{r^2}{2}(-2G - 2C_0) = \alpha.$$

Effettuiamo ora il cambio di variabili $z = r^2$ così da ritrovare una forma di questa equazione che sia analoga all'equazione di Hamilton-Jacobi per un problema di Keplero piano; da

$$\frac{dU}{dr} = \pm 2\sqrt{z}\cdot\frac{dU}{dz}$$

si ottiene:

$$\left(\frac{dU}{dz}\right)^2 = -\frac{G^2}{z^2} + \frac{2\alpha}{z} + 2(G + C_0) = -2(G + C_0)\cdot\frac{F(z)}{z^2}$$

dove
$$F(z) = \frac{G^2}{2(G+C_0)} - \frac{\alpha z}{G+C_0} - z^2.$$

Supponendo ora $G + C_0 < 0$ ($F(z)$ avrà due soluzioni nel semipiano positivo), è possibile definire
$$\beta_G := \sqrt{-2(G+C_0)}$$
quindi
$$\frac{dU}{dz} = \beta_G \frac{\sqrt{F(z)}}{z} \tag{3.1}$$
ove:
$$F(z) = -\frac{G^2}{\beta_G^2} + \frac{2\alpha z}{\beta_G^2} - z^2.$$

Se si computano le radici di $F(z)$
$$z_{1,2} = \frac{1}{\beta_G^2}\left(\alpha \mp \sqrt{\alpha^2 - \beta_G^2 G^2}\right)$$
si vede che
$$z_1 z_2 = \frac{G^2}{\beta_G^2} > 0 \qquad z_1 + z_2 = \frac{2\alpha}{\beta_G^2} > 0$$
che implica [3]
$$F'(z_1) \neq 0 \qquad F'(z_2) \neq 0$$

Dalle orbite
$$\frac{dU}{dr} = p_r = \pm\frac{2\beta_G}{r}\sqrt{F(r)} = \pm 2\sqrt{-G^2 r^{-2} + 2\alpha - \beta_G^2 r^2}$$
con
$$p_r(r(z_1)) = p_r(r(z_2)) = 0$$

si evince che r ha carattere oscillatorio in $[r(z_1), r(z_2)]$.

La soluzione della 3.1 è
$$U(z,\alpha,G) = \beta_G \int_{z_1}^{z} \frac{\sqrt{F(\zeta)}}{\zeta}\, d\zeta.$$

3.2 Introduzione dei parametri a, e, l

Denotando con a il semi-asse maggiore dell'orbita e con e la sua eccentricità t.c. $0 < e < 1$, poiché z_1, z_2 sono la distanza al pericentro e all'apocentro, rispettivamente, avremo
$$z_1 = a(1-e)$$
$$z_2 = a(1+e).$$

[3] Si esclude il caso dell'orbita circolare $z_1 = z_2 = \frac{\alpha}{\beta_G^2}$, cioè quando $\alpha^2 = \beta_G^2 G^2$.

Introduciamo poi l'anomalia eccentrica l:

$$z \overset{4}{=} z_1 \left(\cos\frac{l}{2}\right)^2 + z_2 \left(\sin\frac{l}{2}\right)^2 = a(1 - e\cos l)$$

L'idea è quella di sostituire i parametri α, G da cui dipendono le soluzioni W dell'equazione di Hamilton-Jacobi, con variabili d'azione L, G in modo che le coordinate $\tilde{l}, \tilde{g}$ ad esse coniugate siano angoli. Ci aiuteremo con la conoscenza delle soluzioni del problema di Keplero, e quindi innanzitutto esprimeremo α, G in funzione dei parametri a, e per poi sostituire la variabile di integrazione ζ con la variabile di integrazione l sopra definita.

Confrontando le espressioni

$$z_{1,2} = \frac{\alpha}{\beta_G^2}\left(1 \mp \sqrt{1 - \left(\frac{\beta_g}{\alpha}G\right)^2}\right)$$

con le espressioni

$$z_{1,2} = a(1 \mp e)$$

si identificano:

$$a = \frac{\alpha}{\beta_G^2}, \qquad e = \sqrt{1 - \left(\frac{\beta_g}{\alpha}G\right)^2}.$$

Con l'aiuto di queste identità, dimostriamo che il tempo fittizio τ che il flusso dell'hamiltoniana K_0 impiega a muovere il punto P dal pericentro, caratterizzato dal valore z_1, ad una distanza dal centro caratterizzata dal valore z, è facilmente esprimibile per mezzo dell'anomalia eccentrica l nel modo seguente:

$$\beta_G \tau = l.$$

Infatti, sostituendo α, G con le espressioni in termini di a, e per poi convertire la variabile ζ con l'espressione in funzione di a, e, l si ottiene:

$$F(l) = a^2 e^2 \sin^2 l.$$

Inoltre, dall'equazione:

$$\frac{dz}{d\tau} = 2\underline{\xi} \cdot \frac{d\underline{\xi}}{d\tau} \overset{5}{=} 2\left(\xi_1 \frac{d\xi_1}{d\tau} + \xi_2 \frac{d\xi_2}{d\tau}\right) = 2\left(\xi_1\left(\frac{\pi_1}{4} + \frac{\xi^2}{2}\xi_2\right) + \xi_2\left(\frac{\pi_2}{4} - \frac{\xi^2}{4}\xi_1\right)\right) \overset{6}{=}$$

$$= \frac{1}{2}\left(\xi_1 \frac{\partial U}{\partial \xi_1} + \xi_2 \frac{\partial U}{\partial \xi_2}\right) = \xi_1^2 \frac{dU}{dz} + \xi_2^2 \frac{dU}{dz} = z\frac{dU}{dz} = \beta_G \sqrt{F(z)}$$

risulta

$$\int_{z_1}^{z} \frac{d\zeta}{\sqrt{F(\zeta)}} = \beta_G \tau$$

[4] $z = z_1 \iff l = 0$

[5] $d\xi_i/d\tau = \partial K_0/\partial \pi_i$

[6] $\pi_i = \partial W/\partial \xi_i = dU/d\xi_i$

avendo associato il tempo $\tau_0 = 0$ al valore z_1. Ma siccome $dz = ae \sin l dl$:

$$\int_0^l \frac{ae \sin \lambda d\lambda}{ae \sin \lambda} = l = \beta_G \tau,$$

da cui $\beta_G \tau = l$.

Deriviamo ora una sostituzione di α con una variabile L, in modo che i parametri L, G da cui dipende l'integrale completo dell'equazione di Hamilton-Jacobi siano variabili d'azione. Ovvero, le quantità:

$$\tilde{l} = \frac{\partial W}{\partial L}, \qquad \tilde{g} = \frac{\partial W}{\partial G}$$

sono periodiche di periodo 2π.
Torniamo all'espressione:

$$W(\alpha, G, r, \varphi) = \left[\beta_G \int_{z_1}^{z} \frac{\sqrt{F(\zeta)}}{\zeta} d\zeta + 2G\varphi \right]_{z=r^2}$$

e cerchiamo una sostituzione $\alpha = \alpha(L, G)$ con la proprietà descritta sopra. Osserviamo che risulta [7]:

$$\tilde{l} \equiv \frac{\partial W}{\partial L} = \beta_G \int_{z_1}^{z} \frac{1}{2\zeta \sqrt{F(\zeta)}} \frac{\partial F}{\partial \alpha} \frac{\partial \alpha}{\partial L} d\zeta,$$

da cui:

$$\tilde{l} = \frac{1}{\beta_G} \frac{\partial \alpha}{\partial L} \int_{z_1}^{z} \frac{d\zeta}{\sqrt{F(\zeta)}} = \frac{\partial \alpha}{\partial L} \tau = \frac{\partial \alpha}{\partial L} \frac{l}{\beta_G}.$$

Dal momento che l'anomalia eccentrica è periodica di periodo 2π, si ottiene quanto voluto ponendo $\frac{\partial \alpha}{\partial L} = \beta_G$, perciò:

$$\alpha = \beta_G L;$$

inoltre

$$\tilde{l} \equiv l.$$

Dimostriamo ora che anche la quantità

$$\tilde{g} = \frac{\partial W}{\partial G} = 2\varphi + \frac{\partial U}{\partial G}$$

è un angolo.

Si ha l'espressione:

$$U = \beta \int_{z_1}^{z} \sqrt{-\frac{G^2}{\beta^2} + \frac{2\alpha\zeta}{\beta^2} - \zeta^2}\, \frac{d\zeta}{\zeta} = \int_{z_1}^{z} \sqrt{-G^2 + 2\beta L \zeta + 2(G + C_0)\zeta^2}\, \frac{d\zeta}{\zeta},$$

e derivando rispetto a G:

[7] Applicando il teorema di derivazione degli integrali dipendenti da parametri, il contributo che si ottiene dal fatto che l'estremo di derivazione z_1 dipende L, in realtà si annulla in quando $F(z_1) = 0$.

$$\frac{\partial U}{\partial G}=\int_{z_1}^{z}\frac{1}{2\beta_G\sqrt{F(\zeta)}}\left(-2G-2\frac{L}{\beta_G}\zeta+2\zeta^2\right)\,\frac{d\zeta}{\zeta}=$$

$$\overset{8}{=}\int_0^l\frac{1}{2\beta_G ae\sin\lambda}\left(-2G-2\frac{L}{\beta_G}a(1-e\cos\lambda)+2a^2(1-e\cos\lambda)^2\right)\frac{ae\sin\lambda d\lambda}{a(1-e\cos\lambda)}=$$

$$=-\frac{G}{\beta_G}\int_0^l\frac{d\lambda}{a(1-e\cos\lambda)}-\frac{L}{\beta_G^2}l+\frac{a}{\beta_G}\int_0^l(1-e\cos\lambda)d\lambda=$$

$$=-\frac{G}{L}\int_0^l\frac{d\lambda}{1-e\cos\lambda}-\frac{L}{\beta_G^2}e\sin l=-f-\frac{L}{\beta_G^2}e\sin l,$$

detta

$$f:=\frac{G}{L}\int_0^l\frac{d\lambda}{1-e\cos\lambda}=\sqrt{1-e^2}\int_0^l\frac{d\lambda}{1-e\cos\lambda}$$

anomalia vera, di periodo 2π. Si ricava:

$$\tilde{g}=2\varphi-f-\frac{L}{\beta_G^2}e\sin l,$$

per cui $\tilde{g}$ è un angolo e possiamo identificarlo con g.

3.3 Espressione delle variabili di azione-angolo per K_0

L'hamiltoniana K_0 nelle variabili (L,G,l,g) diventa:

$$K_0=\alpha-1=\beta_G L-1$$

da cui seguono [9]:

$$\frac{\partial L}{\partial\tau}=-\frac{\partial K_0}{\partial l}=0\to L=L_0$$
$$\frac{\partial G}{\partial\tau}=-\frac{\partial K_0}{\partial g}=0\to G=G_0$$
$$\frac{\partial l}{\partial\tau}=\frac{\partial K_0}{\partial L}=\beta_{G_0}=n_l\to l=l_0+n_l\tau$$
$$\frac{\partial g}{\partial\tau}=\frac{\partial K_0}{\partial G}=-\frac{L}{\beta_{G_0}}=n_g\to g=g_0+n_g\tau$$

[8]Si effettua una cambio di variabili di integrazione.
[9]$\tau_0=0$ per $l=l_0$ e $g=g_0$.

Bibliografia

[1] G. E. O. Giacaglia, “Periodic orbits of collision in the restricted problem of three bodies,” , vol. 72, p. 386, Apr. 1967.

[2] T. Levi-Civita, “Sur la résolution qualitative du problème restreint des trois corps,” *Acta Mathematica*, vol. 30, pp. 305–327, 1906.

[3] V. I. Arnol'd, R. Bernieri, and B. Tirozzi, *Metodi matematici della meccanica classica.* Editori riuniti, 1979.

[4] M. Guzzo, *Meccanica Analitica.* 2021/2022.

[5] G. Benettin, *Appunti per il corso di Meccanica Analitica*, pp. 46–51. 2013/2014.

[6] F. Fassò, *Istituzioni Di Fisica Matematica.* Padova: C.L.E.U.P., 2021.