

UNIVERSITÀ DEGLI STUDI DI PADOVA

Dipartimento di Fisica e Astronomia "Galileo Galilei"

Corso di Laurea Magistrale in Fisica

Tesi di Laurea Magistrale

TEMPERATURA CRITICA NEL CROSSOVER BCS-BEC CON
ACCOPIAMENTO SPIN-ORBITALE

Laureando

STEFANO GRAVA

Matricola 1058814

Relatore

LUCA DELL'ANNA

ANNO ACCADEMICO 2015/2016

UNIVERSITÀ DEGLI STUDI DI PADOVA
Dipartimento di Fisica e Astronomia "Galileo Galilei"

CRITICAL TEMPERATURE IN BCS-BEC CROSSOVER WITH
SPIN-ORBIT COUPLING

Stefano Grava

ABSTRACT

The thesis analyze thermodynamic properties of a system of Fermions with a spin-orbit coupling, whose strength can be tuned continuously in a crossover from BCS theory of superconductivity to a Bose-Einstein condensate (BEC). Below the critical temperature T_c both system are characterized by an order parameter. Generally a mean field approximation cannot reproduce the correct behavior of the critical temperature T_c over the whole crossover; this happen instead if inclusions of quantum Gaussian fluctuations are considered. So the aim of the thesis is to study Gaussian fluctuations beyond mean field and to find the T_c over the whole crossover also in the presence of a spin-orbit coupling.

UNIVERSITÀ DEGLI STUDI DI PADOVA
Dipartimento di Fisica e Astronomia "Galileo Galilei"

TEMPERATURA CRITICA NEL CROSSOVER BCS-BEC CON
ACCOPIAMENTO SPIN-ORBITALE

Stefano Grava

ABSTRACT

Il lavoro di tesi sarà quello di analizzare le proprietà termodinamiche di un sistema di Fermioni con accoppiamento di tipo spin-orbita, in cui la forza attrattiva può essere variata in modo continuo, ovvero nel crossover tra uno descritto dalla teoria BCS della superconduttività e un condensato di Bose-Einstein (BEC). Entrambi i regimi sono caratterizzati, al di sotto della temperatura critica T_c , da un parametro d'ordine. In generale l'approssimazione di campo medio non è in grado di riprodurre la temperatura critica T_c lungo tutto il crossover, cosa che avviene se si considerano anche le fluttuazioni quantistiche a livello Gaussiano del parametro d'ordine. Lo scopo della tesi sarà quindi quello di studiare le fluttuazioni Gaussiane oltre il campo medio e determinare la T_c in tutto il crossover BEC-BCS anche in presenza di accoppiamento spin-orbitale.

Indice

Abstract	ii
1 Introduzione: Crossover BCS-BEC e gas ultrafreddi	1
1.1 Fisica Atomica	5
1.2 Trappole atomiche	7
1.3 Tecniche di raffreddamento	9
1.4 Imaging del gas	11
1.5 Interazione spin-orbita nei gas ultrafreddi	12
2 Fisica a due corpi	13
2.1 Hamiltoniana libera	14
2.1.1 Espansione in onde parziali	16
2.1.2 Gas ultrafreddi	21
2.1.3 Matrice di scattering a due corpi	25
2.1.4 Rinormalizzazione del potenziale di contatto	27
2.2 Accoppiamento Spin-Orbita	28
2.2.1 Rinormalizzazione nel caso spin-orbita	31
2.3 Risonanza Fano-Feshbach	33
2.4 Approssimazione di densità locale	38
3 Gas di Fermi con potenziale attrattivo	40
3.1 Gap equation	42
3.2 Espansione dell'azione effettiva	44
3.2.1 Campo medio	45
3.2.2 Campo medio, $\mathbf{T} = \mathbf{T}_c$	46
3.2.3 Inclusione delle fluttuazioni Gaussiane, $\mathbf{T} = \mathbf{T}_c$	46
4 Il crossover BCS-BEC	51
4.1 Campo medio, ordine 0	52
4.1.1 Accoppiamento debole	52
4.1.2 Accoppiamento forte	56
4.2 Inclusione delle fluttuazioni Gaussiane	58
4.2.1 Calcolo di $\mathbf{\Gamma}(\mathbf{q})^{-1}$	58
4.2.2 Accoppiamento debole	60
4.2.3 Accoppiamento forte	61
4.3 Calcolo Numerico	63

4.3.1	Campo medio	63
4.3.2	Fluttuazioni Gaussiane	65
4.4	Conclusioni	67
5	Gas di Fermi con interazione Spin-Orbita e potenziale attrattivo	69
5.1	Gap equation	73
5.2	Espansione della azione effettiva	74
5.2.1	Campo medio	75
5.2.2	Campo medio, $\mathbf{T} = \mathbf{T}_c$	76
5.2.3	Inclusione delle fluttuazioni Gaussiane, $\mathbf{T} = \mathbf{T}_c$	76
5.3	Calcolo di $\chi(\mathbf{q})$	79
5.4	Densità di particelle	83
6	Il crossover BCS-BEC con accoppiamento spin-orbita	84
6.1	Campo medio	84
6.1.1	Accoppiamento debole	85
6.1.2	Accoppiamento forte	86
6.2	Inclusione delle fluttuazioni Gaussiane	88
6.2.1	Accoppiamento debole	88
6.2.2	Accoppiamento forte	89
6.3	Calcolo Numerico	94
6.3.1	Campo medio	94
6.3.2	Inclusione delle fluttuazioni Gaussiane	98
6.3.3	Stato legato	98
6.3.4	Masse Efficaci	99
6.4	Conclusioni	101
A	Funzione di Green	103
B	Massa efficace	104
	Bibliografia	109

Capitolo 1

Introduzione: Crossover BCS-BEC e gas ultrafreddi

I recenti sviluppi nel campo del confinamento, del raffreddamento e del controllo della forza dell'interazione tra atomi alcalini hanno portato nuova attenzione sul problema di un crossover continuo tra due paradigmi importantissimi della fisica a molti corpi, la condensazione di Bose-Einstein e la superconduttività nella teoria BCS.

Si consideri un sistema di Fermioni debolmente interagenti in maniera attrattiva. È noto come questo sistema può essere catturato dalla teoria BCS¹, nata originariamente per spiegare la superconduttività in alcuni metalli. Gli autori mostrarono che una forza efficace *attrattiva* tra due elettroni può emergere dall'interazione elettrone-reticolo nel materiale. In particolare questo sistema ha una transizione di fase alla formazione delle coppie di Cooper² e dall'apparizione di una *gap* nello spettro di singola particella. Qualitativamente questo stato BCS di N Fermioni consiste di $N/2$ coppie debolmente legate delle quali una frazione macroscopica occupa lo stato a momento nullo. Tuttavia queste coppie debolmente interagenti sono anche spazialmente separate, ovvero la loro lunghezza di correlazione è molto più grande della distanza media tra le particelle. Per questo motivo non possono essere considerate Bosoni e lo stato BCS una vera e propria condensazione di Bose-Einstein. L'idea successiva è che se fosse possibile restringere la larghezza della coppia o aumentare la forza di questa interazione si realizzerebbe un sistema di coppie di Cooper molto localizzate, tanto da poter essere considerati Bosoni che occupano macroscopicamente lo stato a momento nullo, ovvero una condensazione di Bose-Einstein (limite BEC). Poiché non vi è alcuna rottura di simmetria evidente nel

¹Per lo sviluppo di una teoria della superconduttività (teoria BCS), J. Bardeen, L. N. Cooper e J. R. Schrieffer ricevettero il premio Nobel per la fisica del 1972.

²Nel 1956 Cooper trovò che in presenza di una attrazione arbitrariamente debole due Fermioni con energia al di sopra del mare di Fermi possono formare uno stato legato.

variare in maniera continua la distanza tra i Fermioni delle coppie ci si aspetta di trovare una transizione continua tra i due stati, ovvero un *crossover*. L'idea di un crossover tra questi due stati precede di molti anni la sua realizzazione sperimentale [1]. Questi studi erano motivati dalla volontà di comprendere cosa sarebbe successo in un limite a bassissime densità elettroniche in un materiale superconduttivo; diminuendo la densità aumenta la distanza media tra gli elettroni; in un regime estremamente diluito anche le dimensioni di una coppia di Cooper sarebbero risultate puntiformi e quindi trattabili come Bosoni. La teoria di campo medio ricavata da questi autori sarà la stessa che verrà ricavata più avanti, pur riferendosi a sistemi fisici differenti. Di particolare rilevanza, anche per questa tesi, è stato lo studio di P. Nozières e S. Shmitt-Rink[2]. Ciò che lo rende importante dal punto di vista teorico è il livello di astrazione utilizzato rispetto ad altri lavori; l'articolo infatti tratta in generale di un modello di Fermioni interagenti e viene valutata l'evoluzione della temperatura critica del sistema tra il limite BEC e BCS, partendo da un'approccio diagrammatico per il calcolo della funzione di partizione. Durante la tesi verranno ricavati gli stessi risultati ma con l'approccio del path-integral. Un'altro punto interessante nella storia del problema del crossover fu la scoperta nel 1986 del primo superconduttore ad alta temperatura³. Si trovò che l'accoppiamento tra gli elettroni in questi sistemi è più forte che nei normali superconduttori e che le dimensioni delle coppie di Cooper sono solo leggermente più grandi della distanza media elettronica. In questo contesto si pone il lavoro di C. A. R. Sa de Melo, M. Randeria, e J. R. Engelbrech del 1993 [3] che verrà estensivamente riprodotto nella tesi. Il loro contributo fu importante per tre motivi:

- Implementazione del problema nel formalismo del path-integral
- Crossover variando l'intensità dell'interazione
- Importanza di andare oltre l'approssimazione di campo medio per riprodurre correttamente il crossover

Fino a questo punto della storia, l'interesse per il crossover era rimasto tema puramente teorico, principalmente per il fatto che nei solidi e nei liquidi in cui si studiavano superconduttività e superfluidità la densità e la forza tra i costituenti non sono parametri facilmente modificabili. La situazione cambiò radicalmente dopo le prime realizzazioni di gas alcalini ultrafreddi. Un gas ultrafreddo di atomi alcalini realizzabile in laboratorio è formato tipicamente da $10^5 \div 10^9$ atomi, con una densità numerica al centro, per una trappola realistica, di $n \approx 10^{12} \div 10^{15} \text{cm}^{-3}$. Una proprietà importante è la loro

³I ricercatori G. Bednorz e K. A. Müller ricevettero il premio Nobel per la fisica del 1987 per la loro scoperta della superconduttività in materiali ceramici

diluizione. Le densità ottenibili sono tali che la distanza media tra le particelle è tipicamente più grande della scala di lunghezza associata al potenziale atomo-atomo; questo significa che le interazioni a due corpi sono dominanti. In più, a basse temperature e basse velocità, le proprietà di scattering tra gli atomi possono essere caratterizzate da un singolo parametro, la *lunghezza di scattering*. Al di sotto di tale finestra in densità la ritormalizzazione del gas dopo una perturbazione diventa praticamente troppo lenta, mentre a densità maggiori gli urti a tre corpi diventano rilevanti. Questi ultimi eventi si vogliono evitare, oltre che per semplicità, anche perché contribuiscono all'instabilità del gas favorendo la liquefazione e la formazione di stati legati. Tale gas può inoltre essere raffreddato a temperature tali da entrare nel regime di degenerazione quantistica, dove la lunghezza d'onda di De Broglie è dello stesso ordine della distanza interatomica.

$$\Lambda = \left(\frac{2\pi\hbar^2}{mk_B T} \right) \sim n^{-1/3} \quad (1.1)$$

A tali densità, corrisponde una temperatura, tale ad ottenere un regime degenero, nel range $T_d \sim 100nK \div \mu K$, raggiunto per esempio nella celebre realizzazione dei primi condensati di Bose-Einstein del 1995 [4]. Per questo motivo i gas ultrafreddi, oggi realizzabili in laboratorio, sono facilmente gli oggetti più freddi nell'universo. Il loro punto di forza come sistema sperimentale tuttavia non risiede tanto in queste condizioni estreme, ma nella possibilità di manipolare con precisione i pochi parametri che lo descrivono. In particolare il meccanismo della *risonanza di Feshbach* permette con un campo magnetico di controllare la lunghezza di scattering e dunque l'intensità dell'interazione tra atomi rendendola per esempio sufficientemente forte da supportare un nuovo stato legato. Osservato per la prima volta nel 1998 [5, 6] in sistemi Bosonici rese concreta la possibilità di osservare un crossover. Era necessario però estendere le tecniche per creare gas ultrafreddi ai sistemi Fermionici motivati dalla possibilità di poter ottenere sia una fase superfluida, interessante di per sé, sia di poter variare l'interazione tramite la risonanza di Feshbach; ciò richiede che gli atomi Fermionici formino delle coppie, analoghe alle coppie di Cooper di elettroni, con spin opposto, nei fenomeni superconduttivi. L'idea era che ciò si sarebbe potuto realizzare in gas atomici a due componenti, ovvero una miscela bilanciata di atomi in due stati iperfini differenti. In questo spirito il primo gas di Fermi ultrafreddo fu realizzato nel 1999 [7]. La degenerazione raggiunta è osservabile dal diverso andamento in temperatura dell'energia del sistema, tra un regime classico ed uno quantistico; per un gas di Fermi infatti ci si aspetta che $E_{MQ} \sim \text{cost.}$ mentre in un regime classico $E_{cl} \sim k_B T$. Già nel 2002 molti gruppi riuscirono a confinare otticamente un gas a due componenti di spin e, manipolando un campo magnetico esterno e ad osservare una risonanza di Feshbach nel 2003. Come detto l'interazione può essere resa sufficientemente forte da permettere uno stato legato, chiamato *molecola di Feshbach*. Si trovò che le molecole di Feshbach create a partire da Fermioni erano molto

più stabili di quelle Bosoniche e compatibili dunque con i tempi necessari alla condensazione di queste. In seguito l'osservazione della condensazione di coppie di Fermioni fu estesa a tutto il crossover [8, 9] e rimane ad oggi l'unico campo della fisica in cui tale fenomeno è stato osservato. Negli anni successivi si aprì la strada alla misurazione delle proprietà termodinamiche di questi gas, lungo tutto il crossover [10, 11]. L'ultimo, ma non per importanza, risultato ottenuto nel contesto dei gas ultrafreddi è la creazione di un'interazione spin-orbita per il singolo atomo, detta *sintetica* [12, 13]. Ancora, in netto contrasto con l'interazione spin-orbita presente nei sistemi a stato solido, nel contesto dei gas ultrafreddi questo tipo di interazione può essere manipolata in intensità e studiata in un ambiente del tutto controllabile. I sistemi di gas atomici ultrafreddi costituiscono un importante setup sperimentale in cui testare modelli semplici, le bassissime temperature e la grande diluizione semplificano le interazioni tra le componenti, che possono essere descritte grazie a *pochi parametri modificabili*. In particolare, come si vedrà nel formalismo del path-integral, l'azione utilizzata sarà composta da Fermioni con una interazione attrattiva a due corpi, che in linea di principio, può descrivere una grande varietà di sistemi: stelle a neutroni, superconduttori, superconduttività di colore in QCD, sistemi a stato solido. Inoltre l'introduzione di un termine di spin-orbita completamente controllabile in questo contesto moltiplica le possibili applicazioni ed è ad oggi oggetto di numerose ricerche, come riassunto in [14].

In questo contesto lo scopo della tesi sarà quello di riprodurre molti risultati noti nell'ambito del crossover per un gas di Fermioni a due componenti e sfruttare questa conoscenza acquisita per provare a dire qualcosa sullo stesso problema in presenza di una interazione spin-orbita. Capitoli 1 e 2 sono pensati per giustificare, più o meno rigorosamente, l'Hamiltoniana di un sistema di Fermioni interagenti che verrà impiegata nei capitoli successivi. Ciò offrirà la possibilità di rivedere alcune proprietà basilari degli atomi alcalini e di capire come possano essere sfruttate per realizzare le condizioni estreme dei gas ultrafreddi. Il potenziale di contatto utilizzato per approssimare quello reale che verrà utilizzato è noto per dare luogo a divergenze, quindi una procedura di rinormalizzazione elegante è presentata per risolvere questo problema. Viene inoltre mostrato che la stessa rinormalizzazione può essere sfruttata nel caso spin-orbita. I capitoli 3 e 4 invece hanno la pretesa, tramite il formalismo del path-integral, di riprodurre la teoria *classica* del crossover BCS-BEC per il calcolo della temperatura critica del sistema. Due ordini diversi di approssimazione sono tenuti in considerazione, il campo medio e l'inclusione delle fluttuazioni Gaussiane mostrando che la prima fallisce nel catturare la fisica nel limite BEC. Nei limiti di accoppiamento debole e forte è possibile ricavare dei risultati analitici che confermano ulteriormente l'idea di crossover. Il capitolo 5 è dedicato alla soluzione computazionale al problema. Dal capitolo 6 le stesse tematiche vengono affrontate, fin dove è stato possibile, con l'introduzione di un termine di spin-orbita.

In generale tutti i risultati analitici che verranno ottenuti sono dedotti estensivamente mostrando i vari passaggi matematici. Ciò perché questi calcoli costituiscono parte del lavoro di tesi e perché spesso la letteratura risulta carente in questo aspetto. Il lettore interessato solo ai risultati può tranquillamente saltare queste parti.

1.1 Fisica Atomica

Per comprendere la struttura di un atomo è necessario capire le forze tra gli oggetti in gioco. Nel caso degli atomi alcalini (Li, Na, K, Rb...), che possono essere considerati simil-idrogeno, si tratta dell'interazione Coulombiana fra l'unico elettrone off-shell e la carica efficace del nucleo. Come è noto tale forza a simmetria centrale dà luogo allo spettro di Bohr

$$E_n = -\frac{\mu c^2}{2} \frac{\alpha}{(n+1)^2} \quad \alpha = \frac{e^2}{4\pi\epsilon_0\hbar c} \approx \frac{1}{137} \quad \mu \approx m_e \quad (1.2)$$

degenere in ℓ e m , numeri quantici associati agli operatori \hat{L}^2 e \hat{L}_z . Interazioni aggiuntive possono essere considerate come l'interazione dello spin dell'elettrone con il momento angolare o con lo spin del nucleo, il cui effetto è quello di rimuovere le degenerazioni e introdurre piccole correzioni allo spettro. Altre invece, come le correzioni relativistiche o come il Lamb shift (quantizzazione del campo elettromagnetico) non verranno considerate in questa tesi. Comprendere tali contributi all'Hamiltoniana atomica risulta fondamentale per intrappolare gli atomi senza l'utilizzo di pareti e per regolarne l'interazione tramite la risonanza di Feshbach.

Struttura fine

L'interazione Coulombiana, dipendendo solo dalla distanza relativa tra elettrone e nucleo conserva il momento angolare del sistema e lo spin dell'elettrone, separatamente. In realtà poiché questi risultano accoppiati nel termine di spin-orbita

$$\hat{H}_{so} = \frac{\alpha_{so}}{\hbar^2} \hat{L} \cdot \hat{S} \quad (1.3)$$

solo il momento angolare totale $\hat{J} = \hat{L} + \hat{S}$ risulta conservato. Tale termine aggiuntivo porta una correzione allo spettro nota come *struttura fine*

$$\Delta E_j = \frac{\alpha_{so}}{2} [j(j+1) - \ell(\ell+1) - s(s+1)] \quad (1.4)$$

I gas che considereremo si trovano a temperature sufficientemente basse da poter considerare ogni atomo nello stato fondamentale, in cui tutti gli elettroni occupano shell

chiuse e l'unico elettrone di valenza negli atomi alcalini si trova in onda s ($\ell = 0$). In tale stato allora $j = s$ e la struttura fine dovuta all'interazione spin-orbita svanisce, $\Delta E_j = 0$.

Struttura iperfine

Tuttavia un'ulteriore rimozione della degenerazione si ha, in questo stato fondamentale, considerando l'interazione dipolo-dipolo tra gli spin di elettrone e nucleo:

$$\hat{H}_{hf} = \frac{\alpha_{hf}}{\hbar^2} \hat{I} \cdot \hat{S} \quad (1.5)$$

Questo termine, di nuovo, non permette la conservazione di \hat{I} e \hat{S} separatamente, ma solo quella dello spin totale $\hat{F} = \hat{I} + \hat{S}$. Sarà possibile allora indicare gli stati di atomi alcalini nello stato fondamentale ($n=0$, $\ell=0$) con i numeri quantici f e m_f associati agli operatori \hat{F}^2 e \hat{F}_z . La struttura iperfine sarà allora

$$\Delta E_f = \frac{\alpha_{hf}}{2} [f(f+1) - i(i+1) - s(s+1)] \quad (1.6)$$

Poiché $s = \frac{1}{2}$ e per le proprietà delle somme dei momenti angolari, il numero quantico f potrà assumere solo i valori $f = i \pm \frac{1}{2}$, dunque la correzione iperfine

$$\Delta E_{f=i\pm\frac{1}{2}} = \frac{\alpha_{hf}}{2} \left[\pm i \pm \frac{1}{2} - \frac{1}{2} \right] \quad (1.7)$$

Effetto Zeeman

In presenza di un campo magnetico, l'accoppiamento di questo con lo spin elettronico e quello nucleare causa un'ulteriore spostamento dei livelli energetici; in particolare risulta rimossa anche la degenerazione in m_f . In totale dunque, considerando un'atomo alcalino nello stato fondamentale e in presenza di un campo magnetico, l'Hamiltoniana rilevante per la descrizione del sistema è la seguente:

$$\hat{H} = \hat{H}_{hf} - \gamma_N B \hat{I}_z + \gamma B \hat{S}_z \quad (1.8)$$

In pratica poiché l'accoppiamento di Zeeman è inversamente proporzionale alla massa dell'oggetto, $\gamma_N \ll \gamma$. Finché il campo magnetico è piccolo i numeri quantici f e m_f possono essere considerati buoni in senso perturbativo, tuttavia gli autostati del problema sopra descritto sono labellati da m_i e m_s , associati a \hat{I}_z e \hat{S}_z . Diagonalizzando l'Hamiltoniana scritta è così possibile ricavare il contributo energetico totale; senza entrare nel

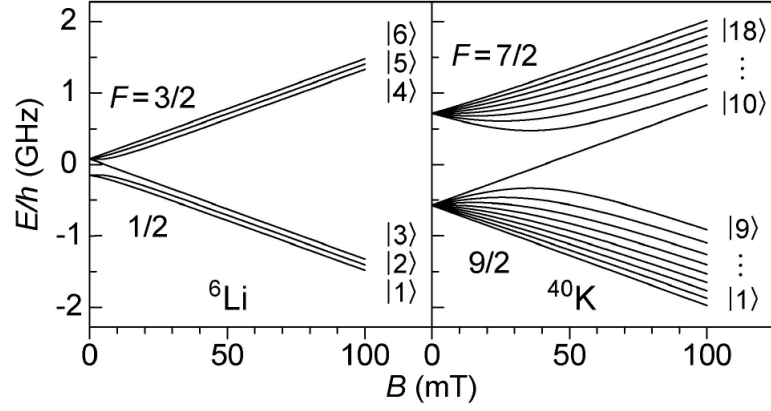


FIGURA 1.1: Dipendenza dal campo magnetico e classificazione dei livelli energetici per atomi alcalini nello stato fondamentale

dettaglio nel caso più semplice dell'atomo di idrogeno $i = \frac{1}{2}$:

$$\Delta E_{\pm} = -\frac{\alpha_{hf}}{4} \pm \frac{\alpha_{hf}}{2} \sqrt{1 + \left(\frac{\hbar(\gamma_N + \gamma)B}{\alpha_{hf}} \right)^2} \quad (1.9)$$

con una dipendenza quadratica nel campo magnetico a basse intensità e lineare ad alte. Variando dunque l'intensità del campo magnetico è possibile variare l'energia del singolo atomo. In figura 1.1 sono mostrati i livelli energetici per le due specie Fermioniche ^6Li e ^{40}K , nello stato fondamentale, in funzione del campo magnetico. Questa proprietà può essere sfruttata per indurre un potenziale confinante per l'atomo nella realizzazione di trappole atomiche

1.2 Trappole atomiche

I due principali tipi di trappole atomiche oggi disponibili sono le trappole magnetiche e le trappole ottiche, che qui vengono descritte brevemente.

Trappole magnetiche

Si consideri la possibilità di poter creare campi magnetici dipendenti dalla posizione, è possibile allora anche rendere l'energia dell'atomo, nei vari stati iperfini, dipendente da questa. L'atomo alcalino dunque avrà una propria energia cinetica ed un termine che può essere pensato come un potenziale; esso modellato opportunamente potrà dare luogo ad un potenziale confinante per il gas

$$E_{\text{atomo}}(\mathbf{r}) = \frac{\hbar^2 p^2}{2m} + V(B(\mathbf{r})) \quad (1.10)$$

con una forza $\mathbf{F}(\mathbf{r}) = -\nabla V(\mathbf{r})$. Intrappolare un gas in un campo magnetico si è rivelato essere uno dei tasselli fondamentali per il raggiungimento delle temperature di degenerazione; in queste condizioni il gas si trova isolato dal mondo esterno, eliminando così una delle principali fonti di scambio di calore, le pareti del contenitore. Tipicamente la scelta ricade su di un potenziale armonico ma le possibilità sperimentali sono pressoché infinite poiché dipendono solamente dalla capacità e dalla precisione con cui è possibile realizzare campi magnetici non omogenei [15]. In particolare tale potenziale dipende fortemente dallo stato iperfino in cui si trova l'atomo e tale caratteristica può essere sfruttata per selezionare nella trappola solo gli stati desiderati. Un'altra possibilità interessante è quella di creare potenziali armonici fortemente anisotropi, restringendo la trappola in una o più dimensioni è possibile realizzare sistemi mono o bidimensionali. Altri punti a favore sono l'elevata compatibilità con le tecniche di raffreddamento del gas oggi disponibili e che verranno affrontate più avanti: il *raffreddamento laser* e il *raffreddamento evaporativo*. Per queste proprietà tale trappola è stata tra le prime ad essere realizzata, anche nel traguardo fondamentale delle prime condensazioni di Bose-Einstein del 1995 per atomi alcalini. Una forte restrizione è invece l'incompatibilità con il meccanismo della *risonanza di Feshbach* magnetica, in cui un campo magnetico viene impiegato per modificare l'interazione tra gli atomi; esso necessita infatti di più stati iperfini accessibili e un campo magnetico omogeneo.

Trappole ottiche

Le trappole ottiche⁴ si basano sull'interazione di dipolo dell'atomo con la luce. Le peculiarità di questo meccanismo sono la stabilità del gas intrappolato e la grande varietà di geometrie possibili, come nel caso delle trappole magnetiche. Sotto appropriate condizioni (*far-detuning*) inoltre, il confinamento è indipendente dallo stato interno dell'atomo. Quantitativamente la forza conservativa indotta sugli atomi può essere dedotta da un semplice modello di interazione dipolo-campo elettromagnetico. Quando un atomo è posto in un fascio laser, il campo elettrico $\mathbf{E}(\mathbf{r})$, induce un momento di dipolo elettrico $\mathbf{p}(\mathbf{r})$:

$$\begin{aligned}\mathbf{E} &= \mathbf{E}_0 \text{sen}(\omega t) \\ \mathbf{p} &= \alpha(\omega)\mathbf{E} = \mathbf{E}_0\alpha(\omega)\text{sen}(\omega t)\end{aligned}\tag{1.11}$$

dove $\alpha(\omega) \in \mathbb{C}$ è detta *polarizzabilità*. Il potenziale efficace tra il dipolo indotto e lo stesso campo elettrico è dato dalla media temporale

$$V = -\frac{1}{2}\langle \mathbf{p} \cdot \mathbf{E} \rangle = -\frac{\Re(\alpha)}{2\epsilon_0 c} I\tag{1.12}$$

⁴Una review sulle trappole ottiche [16] da cui è presa in parte questa sezione

È possibile costruire un vero e proprio potenziale considerando una focalizzazione del laser dipendente dalla posizione e quindi una forza sul singolo atomo

$$\mathbf{F}_{\text{dip}}(\mathbf{r}) = -\nabla V(\mathbf{r}) \propto \nabla I(\mathbf{r}) \quad (1.13)$$

La determinazione di $\alpha(\omega)$ dipende dallo specifico modello in considerazione; in generale però questa quantità presenta dei poli semplici alle energie di eccitazione dell'atomo, che corrispondono a delle risonanze. Questa proprietà viene sfruttata nel raffreddamento laser, ma nelle trappole ottiche non viene considerata in quanto si lavora nel cosiddetto regime di *far-detuning*, ovvero lontano dalle risonanze. In questa regione il laser non risolve la struttura dell'atomo e il suo effetto confinante diventa indipendente dallo stato interno dell'atomo. Ciò è importante se si è interessati ad intrappolare diversi stati di spin dello stesso atomo, magari in percentuali diverse o persino miscele di atomi diversi. Come realizzare questo tipo di sistemi è al di fuori dello scopo della tesi, per un approfondimento ci si riferisce a [17]. Nella tesi verrà considerato un sistema di questo tipo, una miscela bilanciata di due stati (due pseudo-spin) di una specie atomica Fermionica. Con questa tecnica è possibile creare potenziali anche più interessanti di un potenziale armonico, in particolare usando due fasci contro propaganti in più dimensioni è possibile costruire potenziali 1d/2d/3d periodici detti *reticoli ottici*; questo tipo di sistemi sono molto interessanti poiché possono essere impiegati per simulare sistemi a stato solido.

1.3 Tecniche di raffreddamento

Il gas intrappolato deve essere raffreddato fino a raggiungere la temperatura di degenerazione; ciò è fatto tipicamente in due fasi: il raffreddamento laser e il raffreddamento per evaporazione forzata.

Raffreddamento laser/Doppler

Il raffreddamento laser è principalmente usato per creare gas ultrafreddi in laboratorio e il termine si riferisce a più tecniche con cui i campioni sono raffreddati grazie all'interazione con la luce laser. La principale di queste tecniche è l'unica che discuteremo è quella che sfrutta l'effetto Doppler, teoricamente prevista da T. Hansch e A. Schawlow nel 1975 e realizzata nel laboratorio AT&T Bell da S. Chu et. al. nel 1985 per atomi di sodio⁵. Altre tecniche laser di raffreddamento, sempre ad un livello introduttivo, si

⁵per il loro contributo al raffreddamento laser e alle trappole atomiche S. Chu, C. Cohen-Tannoudji e W. D. Phillips ricevettero il premio Nobel per la fisica del 1997

possono trovare in [15]. L'idea di base è piuttosto semplice; un atomo, colpito da un fotone di energia pari a quella di una transizione elettronica potrà assorbirlo, passando ad uno stato eccitato e ricevendo una variazione di momento pari a quella del fotone. L'atomo nello stato eccitato potrà ora emettere spontaneamente un fotone. A tale processo sarà associata una variazione di momento in modulo pari a quella precedente ma lungo una direzione causale poiché il processo di emissione spontanea è isotropo. L'effetto netto su più atomi sarà allora quello di aumentare il momento medio degli atomi del gas nelle direzione di propagazione del laser. Questa tecnica può essere sfruttata sia per decelerare un fascio di atomi diretta lungo la sorgente del laser, ma anche per accelerarlo se puntato nella direzione opposta. Per poter applicare questa tecnica in un gas per rallentarne le componenti si dovrebbe realizzare una situazione in cui si abbia più assorbimento quando un'atomo si muove verso il fascio e meno nella direzione opposta. Questo può essere realizzato regolando la frequenza del laser leggermente sotto la frequenza di risonanza della transizione elettronica. L'atomo per effetto Doppler (da qui il nome della tecnica) vedrà tale frequenza del fotone più vicina alla risonanza muovendosi contro il fascio e la probabilità di assorbimento sarà maggiore; la situazione opposta si realizza nell'altra direzione. Tre coppie di fasci contro propaganti, nelle tre dimensioni, sono in grado di realizzare una *melassa ottica*, come battezzata da S. Chu, in cui si può mostrare che l'atomo subisce una forza effettiva di tipo viscoso $\mathbf{F} = -\gamma\mathbf{v}$. Tale processo di raffreddamento ovviamente non può essere portato avanti all'infinito poiché è contrastato dal riassorbimento dei fotoni emessi spontaneamente. Una condizione di equilibrio tra questi due processi permette perciò di stabilire la minima temperatura raggiungibile con il raffreddamento Doppler:

$$k_{\text{B}}T_{\text{Dopp}} = \frac{\hbar\Gamma}{2} \sim 100\mu\text{K} \quad (1.14)$$

Con Γ la larghezza della transizione sfruttata. Si tratta di un limite sulla velocità quadratica media delle particelle, che può essere riproposto in temperatura grazie al fatto che la distribuzione, nonostante le temperature sia ancora essenzialmente Maxwelliana. Altre tecniche [16] permettono di raggiungere temperature addirittura inferiori ($T \sim \mu\text{K}$) tuttavia non ancora sufficienti al raggiungimento di un gas degenere.

Raffreddamento evaporativo

Le temperature ottenute tramite varie tecniche di raffreddamento laser sono incredibilmente basse ma non abbastanza da produrre un gas nel regime di degenerazione per le densità sperimentalmente raggiungibili. Ciò è possibile invece implementando l'evaporazione forzata. Una proprietà importante di tutte le trappole atomiche discusse precedentemente è la possibilità di variarne la profondità, definita come la differenza

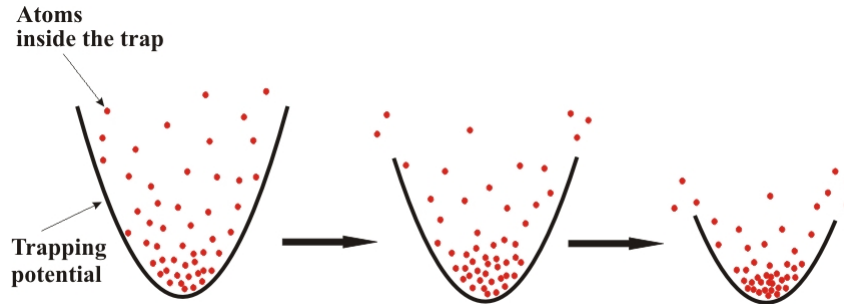


FIGURA 1.2: Raffreddamento per evaporazione

di energia tra il fondo e quella alla quale le particelle possono fuggire dalla trappola. Schematicamente questa procedura è riportata in figura 1.2. Abbassando la profondità della trappola è possibile far fuoriuscire gli atomi più energetici; semplicemente quindi, si estrae energia dal sistema al costo di perdere una quantità considerevole di atomi. Dopo la ritermalizzazione del gas si ottiene una temperatura inferiore a quella precedente. Il processo può essere ripetuto e in questo caso un limite inferiore alla temperatura raggiungibile è dato dalla quantità iniziale di gas disponibile. Un altro limite più importante è dato dal rapporto tra le collisioni anelastiche, che fissano il tempo di vita del campione, e le collisioni elastiche, che assicurano la ritermalizzazione; questo deve essere piccolo per permettere che la procedura venga realizzata e dipende dalla specie di atomi che si considerano. Questo schema permette non solo di raggiungere le temperature di degerazione ma di andare ben oltre; per specie come gli atomi alcalini i limiti inferiori in temperatura previsti per questa tecnica sono dell'ordine del $T \sim \text{pK}$ [18]⁶. Raffreddamento laser e evaporazione forzata sono risultate essere le chiavi per la realizzazione dei primi condensati di Bose-Einstein nel 1995⁷.

1.4 Imaging del gas

Il più importante metodo per osservare il gas ultrafreddo creato si basa sull'utilizzo di telecamere CCD per registrare lo spettro di assorbimento del gas; è possibile inoltre regolando la frequenza del fascio incidente misurare le distribuzioni di componenti specifiche. Per ottenere una migliore risoluzione è possibile anche spegnere la trappola e permettere al gas di espandersi. Si ottengono con questa tecnica dei profili bidimensionali di densità spaziale del gas, importanti per il confronto con la teoria.

⁶In questa review è possibile trovare sia tale limite inferiore sia le temperature minime raggiunte fino al 1996 per varie specie atomiche

⁷Per la realizzazione della condensazione di Bose-Einstein in gas diluiti di atomi alcalini e per i loro studi sulle proprietà dei condensati nel 2001 E. A. Cornell, W. Ketterle e C. E. Wieman ricevettero il premio Nobel per la fisica

1.5 Interazione spin-orbita nei gas ultrafreddi

Le tecniche laser possono essere portate ad un livello successivo costruendo *ad-hoc* nuovi termini nell'Hamiltoniana di singola particella. Si è visto nella trattazione precedente come il termine di spin-orbita per atomi nello stato fondamentale ($\ell = 0$) sia nullo, così come la struttura fine che ne deriva. Per poterlo indurre in laboratorio è necessario selezionare un gas a due componenti. Nella prima realizzazione di questo sistema [12] furono scelti due stati ($|F, m_f\rangle$) di ^{87}Rb scelti come pseudo-spin: $|\uparrow\rangle = |1, 0\rangle$ e $|\downarrow\rangle = |1, -1\rangle$. Supponiamo che l'atomo si trovi nello stato iniziale $|\downarrow\rangle$, due laser possono essere regolati di modo da provocare una transizione ad uno stato eccitato e un'altro, ad una frequenza diversa, per indurre una emissione stimolata dallo stato eccitato a $|\uparrow\rangle$. Il processo inverso è ugualmente permesso. Come visto, a causa dell'effetto Doppler, questo effetto dovrà dipendere necessariamente dal momento dell'atomo. Seguendo sempre [12] si può mostrare come l'accoppiamento generato sia equivalente agli accoppiamenti SO di una particella con spin in moto in un campo elettrico statico, per esempio lungo l'asse z

$$H_R = -\mu_s \cdot \mathbf{B}_{SO} = v_R(\sigma_x k_y - \sigma_y k_x) \quad (1.15)$$

dove B_{SO} è il campo magnetico visto dalla particella in movimento. Tale è detto accoppiamento di Rashba, tipico nei sistemi cristallini. In maniera simile possono essere creati in laboratorio anche interazioni di Dresselhaus, $H_D = v_D(\sigma_x k_y + \sigma_y k_x)$ e le più particolari interazioni di Weyl, $H_W = \lambda \boldsymbol{\sigma} \cdot \mathbf{k}$. Ciò che rende preferibile lo studio di questi sistemi nel contesto dei gas ultrafreddi è la possibilità di manipolare l'intensità dell'accoppiamento, in genere non possibile nei sistemi a stato solido. Durante la tesi verrà studiata una combinazione dei primi due accoppiamenti per cui la novità immediatamente riconoscibile è quella di rompere la simmetria per rotazioni del sistema, al contrario del termine di Weyl.

Capitolo 2

Fisica a due corpi

È importante ai fini della trattazione del problema fare qualche considerazione sul problema a due corpi interagenti con un potenziale dipendente solo dalla distanza tra le due particelle. In generale i potenziali interatomici non sono noti analiticamente e le loro approssimazioni sono poco trattabili sia nei conti che computazionalmente. Un potenziale approssimato o *pseudo-potenziale* viene allora impiegato quando quello reale non è noto o è poco agevole. Per capire se la scelta di un nuovo potenziale approssimi bene l'interazione è necessario studiare le proprietà di scattering in generale. Vi sono molti libri specifici sull'argomento [19, 20] e trattazioni più attinenti al mondo dei gas ultrafreddi come in [21]. Un'altra questione delicata è come questi pseudo-potenziali si comportino in presenza di potenziali esterni, tipici nella realizzazione sperimentale dei gas ultrafreddi. La teoria dello scattering fornisce gli strumenti adatti a caratterizzare l'interazione fra particelle in base a pochi parametri che possono essere sfruttati per determinare potenziali approssimati opportuni. In altri termini sfrutteremo l'equazione di Schrödinger per determinare funzione d'onda e ampiezza di scattering, per imporre che il nostro nuovo potenziale riproduca gli stessi risultati, nel limite a basse energie (gas ultrafreddo). Vedremo inoltre che una condizione necessaria a tutto il ragionamento è che il potenziale reale abbia determinate caratteristiche, ovvero a *corto raggio* e una *simmetria sferica*. Le proprietà di scattering inoltre si riferiscono tipicamente alle collisioni a due corpi; ciò sottintende che le interazioni a tre corpi siano trascurabili, ovvero che la probabilità di trovare tre particelle all'interno del range efficace del potenziale sia bassa. Questo dipende in ultima analisi dalla densità del gas e dal range dell'interazione nel senso che la distanza tipica tra le particelle dovrà essere più grande della lunghezza caratteristica del potenziale intermolecolare. Tale condizione è tipicamente soddisfatta negli esperimenti con i gas ultrafreddi diluiti. Se un potenziale esterno (come una trappola) è presente questo non dovrà variare molto sulle scale dell'interazione, altrimenti questa dovrà essere

presa in considerazione nel calcolo delle proprietà di scattering (si veda l'approssimazione di densità locale trattata più avanti).

2.1 Hamiltoniana libera

È noto come l'equazione di Schrödinger per la funzione d'onda a due particelle sia scomponibile in una parte che descriva il moto del centro di massa, un'equazione di particella libera di massa $M = m_1 + m_2$, e in un'altra che descriva il moto relativo, con $m = \frac{m_1 m_2}{m_1 + m_2}$, la massa ridotta:

$$\left[-\frac{\hbar^2 \nabla^2}{m} + V(\mathbf{r}) \right] \psi(\mathbf{r}) = \left[\hat{H}_0 + V(\mathbf{r}) \right] \psi(\mathbf{r}) = E \psi(\mathbf{r}) \quad (2.1)$$

Assumiamo che il potenziale sia a corto raggio, ovvero che esista una lunghezza caratteristica r^* oltre la quale il potenziale sia trascurabile

$$V(\mathbf{r}) \approx 0 \quad \forall |\mathbf{r}| > r^* \quad (2.2)$$

Al di fuori del raggio di questa sfera dunque il potenziale può essere trascurato e la (2.1) diventa una equazione di Schrödinger libera, la cui soluzione è data dal generico inviluppo di onde piane. Cerchiamo in particolare una soluzione che sia formata da un'onda piana di momento \mathbf{p} entrante ed uno stato di scattering caratterizzato da un momento \mathbf{p}' . Se richiediamo inoltre che l'urto sia elastico possiamo fissare $E = 2\epsilon_{\mathbf{p}} = \frac{p^2}{m}$, l'energia dell'onda entrante. In una base indipendente dalla rappresentazione dunque lo stato cercato è determinato da

$$\left[2\epsilon_{\mathbf{p}} - \hat{H}_0 \right] |\psi_{\mathbf{p}}^{(+)}\rangle = \hat{V} |\psi_{\mathbf{p}}^{(+)}\rangle \quad (2.3)$$

La soluzione all'equazione omogenea ($\hat{V} = 0$) è semplicemente $|\psi_{\mathbf{p}}^{(+)}\rangle = |\mathbf{p}\rangle$, possiamo allora scrivere una soluzione implicita data da

$$|\psi_{\mathbf{p}}^{(+)}\rangle = |\mathbf{p}\rangle + \frac{1}{2\epsilon_{\mathbf{p}} - \hat{H}_0 + i\epsilon} \hat{V} |\psi_{\mathbf{p}}^{(+)}\rangle \quad (2.4)$$

Questa è nota in letteratura come equazione di Lippmann-Schwinger. In rappresentazione \mathbf{r} :

$$\begin{aligned}
\psi_{\mathbf{p}}^{(+)}(\mathbf{r}) &= \langle \mathbf{r} | \mathbf{p} \rangle + \langle \mathbf{r} | \frac{1}{2\epsilon_{\mathbf{p}} - \hat{H}_0 + i\epsilon} \hat{V} | \psi_{\mathbf{p}}^{(+)} \rangle = \\
&= \frac{e^{\frac{i}{\hbar} \mathbf{r} \cdot \mathbf{p}}}{(2\pi\hbar)^{3/2}} + \int d^3 r' \langle \mathbf{r} | \frac{1}{2\epsilon_{\mathbf{p}} - \hat{H}_0 + i\epsilon} | \mathbf{r}' \rangle \langle \mathbf{r}' | \hat{V} | \psi_{\mathbf{p}}^{(+)} \rangle = \\
&= \frac{e^{\frac{i}{\hbar} \mathbf{r} \cdot \mathbf{p}}}{(2\pi\hbar)^{3/2}} + \int d^3 r' \langle \mathbf{r}' | \hat{V} | \psi_{\mathbf{p}}^{(+)} \rangle \int d^3 p' \frac{\langle \mathbf{r} | \mathbf{p}' \rangle \langle \mathbf{p}' | \mathbf{r}' \rangle}{2\epsilon_{\mathbf{p}} - 2\epsilon_{\mathbf{p}'} + i\epsilon} = \\
&= \frac{e^{\frac{i}{\hbar} \mathbf{r} \cdot \mathbf{p}}}{(2\pi\hbar)^{3/2}} + \int d^3 r' \langle \mathbf{r}' | \hat{V} | \psi_{\mathbf{p}}^{(+)} \rangle \frac{m}{(2\pi\hbar)^3} \int d^3 p' \frac{e^{\frac{i}{\hbar} \mathbf{p}' \cdot (\mathbf{r} - \mathbf{r}')}}{p^2 - p'^2 + i\epsilon} =
\end{aligned}$$

L'integrale a destra è risolto in appendice A e porta a

$$\psi_{\mathbf{p}}^{(+)}(\mathbf{r}) = \frac{e^{\frac{i}{\hbar} \mathbf{r} \cdot \mathbf{p}}}{(2\pi\hbar)^{3/2}} - \frac{m}{4\pi\hbar^2} \int d^3 r' \frac{e^{\frac{i}{\hbar} p |\mathbf{r} - \mathbf{r}'|}}{|\mathbf{r} - \mathbf{r}'|} \langle \mathbf{r}' | \hat{V} | \psi_{\mathbf{p}}^{(+)} \rangle$$

È possibile ricavare la soluzione a grandi distanze $r' \gg r$, sfruttando le espansioni

$$|\mathbf{r} - \mathbf{r}'| = r \sqrt{1 - 2 \frac{\mathbf{r} \cdot \mathbf{r}'}{r^2} + \frac{r'^2}{r^2}} = r - \frac{\mathbf{r} \cdot \mathbf{r}'}{r} + o(r^{-2}) \quad (2.5)$$

$$\frac{1}{|\mathbf{r} - \mathbf{r}'|} = \frac{1}{r} + o(r^{-2}) \quad (2.6)$$

$$\psi_{\mathbf{p}}^{(+)}(\mathbf{r}) = \frac{e^{\frac{i}{\hbar} \mathbf{r} \cdot \mathbf{p}}}{(2\pi\hbar)^{3/2}} - \frac{m}{4\pi r \hbar^2} e^{\frac{i}{\hbar} p r} \int d^3 r' e^{-\frac{i}{\hbar} p \frac{\mathbf{r} \cdot \mathbf{r}'}{r}} \langle \mathbf{r}' | \hat{V} | \psi_{\mathbf{p}}^{(+)} \rangle + o(r^{-2}) =$$

definendo $\mathbf{q} = \frac{p}{r} \mathbf{r}$ si ottiene

$$\begin{aligned}
&= \frac{e^{\frac{i}{\hbar} \mathbf{r} \cdot \mathbf{p}}}{(2\pi\hbar)^{3/2}} - \frac{m}{4\pi r \hbar^2} e^{\frac{i}{\hbar} p r} \int d^3 r' e^{-\frac{i}{\hbar} \mathbf{q} \cdot \mathbf{r}'} \langle \mathbf{r}' | \hat{V} | \psi_{\mathbf{p}}^{(+)} \rangle + o(r^{-2}) = \\
&= \frac{e^{\frac{i}{\hbar} \mathbf{r} \cdot \mathbf{p}}}{(2\pi\hbar)^{3/2}} - \frac{m(2\pi\hbar)^{3/2}}{4\pi r \hbar^2} e^{\frac{i}{\hbar} p r} \int d^3 r' \langle \mathbf{q} | \mathbf{r}' \rangle \langle \mathbf{r}' | \hat{V} | \psi_{\mathbf{p}}^{(+)} \rangle + o(r^{-2}) = \\
&= \frac{e^{\frac{i}{\hbar} \mathbf{r} \cdot \mathbf{p}}}{(2\pi\hbar)^{3/2}} - \frac{m(2\pi\hbar)^{3/2}}{4\pi r \hbar^2} e^{\frac{i}{\hbar} p r} \langle \mathbf{q} | \hat{V} | \psi_{\mathbf{p}}^{(+)} \rangle + o(r^{-2}) := \\
&:= \frac{1}{(2\pi\hbar)^{3/2}} \left\{ e^{\frac{i}{\hbar} \mathbf{r} \cdot \mathbf{p}} + f(\mathbf{q}, \mathbf{p}) \frac{e^{\frac{i}{\hbar} p r}}{r} \right\} + o(r^{-2})
\end{aligned}$$

Dove viene definita l'ampiezza di scattering

$$f(\mathbf{q}, \mathbf{p}) := -2\pi^2 \hbar m \langle \psi_{\mathbf{q}}^{(0)} | \hat{V} | \psi_{\mathbf{p}}^{(+)} \rangle \quad (2.7)$$

La soluzione al problema dello scattering a grandi distanze è dunque formata da un'onda

piana entrante ed un'onda sferica uscente, modulata dall'ampiezza di scattering. Definita un'ampiezza di scattering è possibile anche calcolare la sezione d'urto differenziale per il processo, sempre valutata a grandi distanze

$$\frac{d\sigma}{d\Omega} = |f(\mathbf{q}, \mathbf{p})|^2 \quad (2.8)$$

2.1.1 Espansione in onde parziali

Lo stato di scattering, come visto, per il problema a due corpi può essere scritto a grandi distanze come

$$\psi_{\mathbf{k}}^{(+)}(\mathbf{r}) = e^{i\mathbf{k}\cdot\mathbf{r}} + f(\mathbf{k}', \mathbf{k}) \frac{e^{ikr}}{r} + o(r^{-2}) \quad (2.9)$$

Restringendo la trattazione al caso di un **urto elastico** ($k = |\mathbf{k}| = |\mathbf{k}'|$) e di un **potenziale a simmetria sferica** allora l'ampiezza di scattering potrà dipendere solamente dal modulo k e dall'angolo $\theta = \arccos(\frac{\mathbf{k}'\cdot\mathbf{k}}{k^2})$. È lecita dunque una espansione in onde sferiche dell'ampiezza di scattering

$$f(\mathbf{k}', \mathbf{k}) = f(k, \theta) = \sum_{\ell=0}^{\infty} (2\ell + 1) f_{\ell}(k) P_{\ell}(\cos(\theta)) \quad (2.10)$$

dove P_{ℓ} sono i noti polinomi di Legendre. È nota anche l'espansione dell'onda piana

$$e^{i\mathbf{k}\cdot\mathbf{r}} = \sum_{\ell=0}^{\infty} (2\ell + 1) i^{\ell} j_{\ell}(kr) P_{\ell}(\cos(\theta)) \quad (2.11)$$

dove le $j_{\ell}(kr)$ sono le funzioni sferiche di Bessel. A grandi distanze è nota la loro espansione

$$i^{\ell} j_{\ell}(kr) = i^{\ell} \frac{e^{ikr - \frac{\ell\pi}{2}} - e^{-ikr + \frac{\ell\pi}{2}}}{2ikr} + o(r^{-2}) = \frac{e^{ikr} - e^{-i(kr - \ell\pi)}}{2ikr} + o(r^{-2}) \quad (2.12)$$

La funzione d'onda di scattering risulta dunque una sovrapposizione di onde sferiche entranti e uscenti

$$\psi_{\mathbf{k}}^{(+)}(\mathbf{r}) = \frac{1}{2ikr} \sum_{\ell=0}^{\infty} (2\ell + 1) \left[-e^{-i(kr - \ell\pi)} + (1 + 2ikf_{\ell}(k))e^{ikr} \right] P_{\ell}(\cos(\theta)) + o(r^{-2}) \quad (2.13)$$

L'ampiezza complessa dell'onda sferica uscente è allora modificata dalla presenza dell'interazione, tuttavia il suo modulo deve rimanere costante, per preservare la normalizzazione. Un modo semplice di implementare questa condizione è di definire una fase

$$|1 + 2ikf_{\ell}(k)| = 1 \quad \longrightarrow \quad 1 + 2ikf_{\ell}(k) := e^{2i\delta_{\ell}(k)} \quad (2.14)$$

Questa relazione impone che a momento relativo nullo si debba avere $\delta_\ell(0) = 0$. L'ampiezza di scattering a momento angolare fissato si può riscrivere come

$$f_\ell(k) = \frac{1}{\cot(\delta_\ell(k))k - ik} \quad (2.15)$$

In conclusione l'effetto sulla funzione d'onda a grandi distanze di un potenziale centrale è quello di modificare la fase delle onde sferiche uscenti:

$$\psi_{\mathbf{k}}^{(+)}(\mathbf{r}) = \frac{1}{2ikr} \sum_{\ell=0}^{\infty} (2\ell+1)i^\ell \left[e^{2i\delta_\ell(k)} e^{i(kr + \frac{\ell\pi}{2})} - e^{-i(kr - \frac{\ell\pi}{2})} \right] P_\ell(\cos(\theta)) + o(r^{-2}) \quad (2.16)$$

È possibile riscrivere il tutto esplicitando le componenti della funzione d'onda a ℓ fissato

$$\begin{aligned} \psi_{\mathbf{k}}^{(+)}(\mathbf{r}) &= \sum_{\ell=0}^{\infty} (2\ell+1)i^\ell e^{i\delta_\ell(k)} \frac{\sin(kr - \ell\pi + \delta_\ell(k))}{kr} P_\ell(\cos(\theta)) + o(r^{-2}) = \\ &= \sum_{\ell=0}^{\infty} (2\ell+1)i^\ell \psi_{\ell, \mathbf{k}}^{(+)}(\mathbf{r}) P_\ell(\cos(\theta)) + o(r^{-2}) \end{aligned} \quad (2.17)$$

Le proprietà di scattering delle particelle sono definite in base al caso non interagente tramite la fase relativa tra onda scatterata e onda non scatterata; ciò ha senso solo nel limite a grandi distanze, in cui la fase δ_ℓ contiene tutte le informazioni sullo scattering. L'ampiezza di scattering e la sezione d'urto possono allora essere riscritte, sfruttando l'espansione in onde parziali, come

$$f(k, \theta) = \frac{1}{2ik} \sum_{\ell=0}^{\infty} (2\ell+1) \left(e^{2i\delta_\ell(k)} - 1 \right) P_\ell(\cos(\theta)) = \sum_{\ell=0}^{\infty} (2\ell+1) f_\ell(k) P_\ell(\cos(\theta)) \quad (2.18)$$

$$\text{con} \quad f_\ell(k) = \frac{e^{i\delta_\ell(k)} \sin(\delta_\ell(k))}{k} \quad (2.19)$$

$$\sigma(k) = \sum_{\ell=0}^{\infty} \sigma_\ell(k) \quad \sigma_\ell(k) = \frac{4\pi}{k^2} (2\ell+1) \sin^2(\delta_\ell(k)) \quad (2.20)$$

Per particelle identiche senza spin (o polarizzate) inoltre è necessario imporre alla funzione d'onda un principio di (anti)simmetrizzazione tramite

$$\Psi(\mathbf{r}_1, \mathbf{r}_2) = \xi \Psi(\mathbf{r}_2, \mathbf{r}_1) \longrightarrow \psi_{\mathbf{k}}^{(+)}(\mathbf{r}) = \xi \psi_{\mathbf{k}}^{(+)}(-\mathbf{r}) \quad (2.21)$$

$$\xi = \begin{cases} +1 & \text{Bosoni} \\ -1 & \text{Fermioni} \end{cases}$$

Dunque la funzione d'onda dovrà essere riscritta come

$$\psi_{\mathbf{k}}^{(+)}(\mathbf{r}) = e^{i\mathbf{k}\cdot\mathbf{r}} + \xi e^{-i\mathbf{k}\cdot\mathbf{r}} + f(k, \theta) \frac{e^{ikr}}{r} + \xi f(k, \pi - \theta) \frac{e^{-ikr}}{r} + o(r^{-2}) \quad (2.22)$$

Questo modifica la sezione d'urto differenziale

$$\begin{aligned} \frac{d\sigma_\ell}{d\Omega} &= |f(k, \theta) + \xi f(k, \pi - \theta)|^2 = \\ &= \frac{(2\ell + 1)^2}{k^2} \text{sen}^2(\delta_\ell(k)) [P_\ell \cos(\theta) - \xi P_\ell(-\cos(\theta))]^2 \end{aligned} \quad (2.23)$$

Poichè i polinomi di Legendre hanno parità $(-1)^\ell$ tali sezioni d'urto differenziali si annullano a seconda di ℓ e della statistica. In conclusione si trova che

$$\begin{aligned} \sigma(k) &= \frac{8\pi}{k^2} \sum_{\ell \text{ pari}} (2\ell + 1) \text{sen}^2(\delta_\ell(k)) \quad \text{Bosoni} \\ \sigma(k) &= \frac{8\pi}{k^2} \sum_{\ell \text{ disp.}} (2\ell + 1) \text{sen}^2(\delta_\ell(k)) \quad \text{Fermioni} \end{aligned} \quad (2.24)$$

In presenza di spin invece è necessario tenere conto della relativa parte della funzione d'onda nell'(anti)simmetrizzazione. Per dei Fermioni per esempio, se l'urto avviene in uno stato di sigoletto (antisimmetrico) dovremmo imporre la simmetria della parte relativa alla posizione della funzione d'onda

$$|\psi_{\mathbf{k}}^{(+)}(\mathbf{r})\rangle = \left[e^{i\mathbf{k}\cdot\mathbf{r}} + e^{-i\mathbf{k}\cdot\mathbf{r}} + f(k, \theta) \frac{e^{ikr}}{r} + f(k, \pi - \theta) \frac{e^{-ikr}}{r} \right] |S\rangle \quad (2.25)$$

Così le sezioni d'urto polarizzate, di sigoletto e di tripletto per Fermioni con spin 1/2 risultano

$$\begin{aligned} \sigma_S(k) &= \frac{8\pi}{k^2} \sum_{\ell \text{ pari}} (2\ell + 1) \text{sen}^2(\delta_\ell(k)) \\ \sigma_{T_i}(k) &= \frac{8\pi}{k^2} \sum_{\ell \text{ disp.}} (2\ell + 1) \text{sen}^2(\delta_\ell(k)) \end{aligned} \quad (2.26)$$

A lungo raggio dunque, tutta la fisica è contenuta nella fase di shift e ciò può essere imposto richiedendo che la soluzione al problema dello scattering abbia la forma in eq.(2.17). Per determinare lo shift $\delta_\ell(k)$ completamente è necessario risolvere l'equazione di Schrödinger; questa può essere scritta in coordinate sferiche a causa dell'isotropia del problema:

$$\begin{aligned} \left[-\frac{\nabla^2}{m} + \hat{V}(r) \right] \psi(\mathbf{r}) &= E\psi(\mathbf{r}) \\ \left[\frac{1}{r^2} \frac{\partial}{\partial r} \left(r^2 \frac{\partial}{\partial r} \right) - \frac{\hat{L}^2}{r^2} + k^2 - \hat{U}(r) \right] \psi(\mathbf{r}) &= 0 \end{aligned}$$

con $\hat{U} = m\hat{V}$. La funzione d'onda può essere espansa negli autostati di \hat{L}^2 e \hat{L}_z

$$\psi_{\mathbf{k}}^{(+)}(\mathbf{r}) = \sum_{\ell=0}^{\infty} \sum_{m=-\ell}^{\ell} Y_\ell^m(\theta, \varphi) \frac{u_{k,\ell,m}(r)}{r} \quad (2.27)$$

da cui equazione di Schrödinger radiale

$$\left[\frac{1}{r^2} \frac{d}{dr} \left(r^2 \frac{d}{dr} \right) + k^2 + \frac{\ell(\ell+1)}{r^2} - U(r) \right] \frac{u_{k,\ell}(r)}{r} = 0 \quad (2.28)$$

espandendo il primo termine

$$\begin{aligned} \frac{1}{r^2} \frac{d}{dr} \left(r^2 \frac{d}{dr} \frac{u_{k,\ell}(r)}{r} \right) &= \frac{1}{r^2} \frac{d}{dr} \left[r \frac{du_{k,\ell}(r)}{dr} + r^2 u_{k,\ell}(r) \frac{d}{dr} \left(\frac{1}{r} \right) \right] = \\ &= \frac{1}{r^2} \left[\frac{du_{k,\ell}(r)}{dr} + r \frac{d^2 u_{k,\ell}(r)}{dr^2} + r^2 u_{k,\ell}(r) \frac{d}{dr} \left(\frac{1}{r} \right) + r u_{k,\ell}(r) \frac{d}{dr} \left(\frac{1}{r} \right) \right. \\ &\quad \left. + r^2 \frac{du_{k,\ell}(r)}{dr} \frac{d}{dr} \left(\frac{1}{r} \right) + r^2 u_{k,\ell}(r) \frac{d^2}{dr^2} \left(\frac{1}{r} \right) \right] = \\ &= \frac{1}{r} \frac{d^2 u_{k,\ell}(r)}{dr^2} + u_{k,\ell}(r) \frac{1}{r^2} \left[2r \frac{d}{dr} + r^2 \frac{d^2}{dr^2} \right] \left(\frac{1}{r} \right) \end{aligned}$$

l'equazione di Schrödinger radiale viene riscritta nella forma

$$\frac{1}{r} \frac{d^2 u_{k,\ell}(r)}{dr^2} + \frac{u_{k,\ell}(r)}{r^2} (-\delta(r)) + \left[k^2 + \frac{\ell(\ell+1)}{r^2} - U(r) \right] \frac{u_{k,\ell}(r)}{r} = 0 \quad (2.29)$$

La presenza del termine contenente la delta di Dirac è stata notata solo recentemente in [22]. Se il potenziale non contiene tale distribuzione l'equazione si scompone in due, la nota equazione radiale e una condizione al contorno

$$-\delta(r) \frac{u_{k,\ell}(r)}{r^2} = 0 \quad (2.30)$$

quest'ultima se integrata:

$$\int d^3 r \frac{u_{k,\ell}(r)}{r^2} \delta(r) = -4\pi \int dr r^2 \frac{u_{k,\ell}(r)}{r^2} \delta(r) = -4\pi u_{k,\ell}(0) = 0$$

e dunque otteniamo il sistema

$$\begin{cases} \frac{d^2 u_{k,\ell}(r)}{dr^2} + \left[k^2 + \frac{\ell(\ell+1)}{r^2} - U(r) \right] u_{k,\ell}(r) = 0 & (r > 0) \\ u_{k,\ell}(0) = 0 \end{cases} \quad (2.31)$$

Se consideriamo un potenziale a **corto raggio**, ovvero tale che possa essere trascurato oltre un certo range:

$$V(r) \approx 0 \quad \forall r > r^* \quad (2.32)$$

così il problema può essere riscritto come

$$\begin{cases} \frac{d^2 u_{k,\ell}(r)}{dr^2} + \left[k^2 + \frac{\ell(\ell+1)}{r^2} \right] u_{k,\ell}(r) = 0 & (r > r^*) \\ \frac{d^2 u_{k,\ell}(r)}{dr^2} + \left[k^2 + \frac{\ell(\ell+1)}{r^2} - U(r) \right] u_{k,\ell}(r) = 0 & (r < r^*) \\ u_{k,\ell}(0) = 0 \end{cases} \quad (2.33)$$

L'equazione di Schrödinger radiale, per $r > r^*$ è una equazione differenziale lineare e del secondo ordine, in sostanza dunque ci aspettiamo due soluzioni indipendenti. Queste sono le funzioni di Riccati, tra cui le funzioni di Riccati-Bessel $\hat{j}_\ell(z)$, con $z = kr$

$$\hat{j}_\ell(z) = z j_\ell(z) = \left(\frac{\pi z}{2} \right)^{1/2} J_{\ell+1/2}(z) = z^{\ell+1} \sum_{n=0}^{\infty} \frac{(-z^2/2)^n}{n!(2\ell+2n+1)!!} \quad (2.34)$$

dove $j_\ell(z)$ sono le funzioni sferiche di Bessel e $J_\lambda(z)$ le funzioni di Bessel ordinarie. I loro comportamenti asintotici rilevanti sono

$$\begin{aligned} \hat{j}_\ell(z) &\underset{z \rightarrow 0}{\sim} \frac{z^{\ell+1}}{(2\ell+1)!!} \\ \hat{j}_\ell(z) &\underset{z \rightarrow \infty}{\sim} \sin\left(z - \frac{\ell\pi}{2}\right) \quad z \in \mathbb{R} \end{aligned} \quad (2.35)$$

Una seconda soluzione è data dalle funzioni di Riccati-Neumann $\hat{n}_\ell(z)$:

$$\hat{n}_\ell(z) = z n_\ell(z) = (-)^{\ell} \left(\frac{\pi z}{2} \right)^{1/2} J_{-\ell-1/2}(z) = z^{-\ell} \sum_{n=0}^{\infty} \frac{(-z^2/2)^n (2\ell+2n-1)!!}{n!} \quad (2.36)$$

con comportamenti noti nei limiti

$$\begin{aligned} \hat{n}_\ell(z) &\underset{z \rightarrow 0}{\sim} z^{-\ell} (2\ell-1)!! \\ \hat{n}_\ell(z) &\underset{z \rightarrow \infty}{\sim} \cos\left(z - \frac{\ell\pi}{2}\right) \quad z \in \mathbb{R} \end{aligned} \quad (2.37)$$

La soluzione sarà dunque una composizione delle due

$\ell = 0$	$\ell = 1$	$\ell = 2$
$\hat{j}_\ell(z)$ $sen(z)$	$\frac{1}{z} sen(z) - cos(z)$	$\left(\frac{3}{z^2} - 1\right) sen(z) - \frac{3}{z} cos(z)$
$\hat{n}_\ell(z)$ $cos(z)$	$\frac{1}{z} cos(z) - sen(z)$	$\left(\frac{3}{z^2} - 1\right) cos(z) - \frac{3}{z} sen(z)$

TABELLA 2.1

$$u_{k,\ell}(r) = A(k) \hat{j}_\ell(kr) + B(k) \hat{n}_\ell(kr) \quad r > r^* \quad (2.38)$$

Nel problema libero la soluzione è fissata dalla condizione al contorno $u_{k,\ell}(0) = 0$, che esclude la soluzione $\hat{n}_\ell(kr)$ a causa della suo comportamento divergente all'origine. Quindi avremo

$$u_{k,\ell}^{(0)}(r) \propto \hat{j}_\ell(kr) \underset{r \rightarrow \infty}{\sim} \sin\left(kr - \frac{\ell\pi}{2}\right) \quad (2.39)$$

In questo caso invece si dovrebbe risolvere l'equazione di Schrödinger per $r < r^*$ e imporre delle condizioni di continuità della funzione d'onda e della sua derivata prima; tale problema purtroppo è affrontabile solo nel caso di pochi potenziali semplici. Tuttavia nelle sezioni precedenti è stato mostrato come la soluzione al problema di scattering debba comportarsi a grandi distanze, proprietà che può essere imposta alla soluzione trovata. Essa ha un comportamento asintotico

$$\begin{aligned} u_{k,\ell}(k) \underset{r \rightarrow \infty}{\sim} A(k)\sin\left(kr - \frac{\ell\pi}{2}\right) + B(k)\cos\left(kr - \frac{\ell\pi}{2}\right) = \\ = \Gamma(k)\sin\left(kr - \frac{\ell\pi}{2} + \alpha(k)\right) \end{aligned} \quad (2.40)$$

Dal confronto con la soluzione asintotica troviamo che $\alpha_\ell(k) = \delta_\ell(k)$. Dunque a meno di una costante di proporzionalità la soluzione all'equazione radiale in tutto $r > r^*$ è data da

$$u_{k,\ell}(k) \propto \hat{j}_\ell(kr) + \tan(\delta_\ell(k))\hat{n}_\ell(kr) \quad r > r^* \quad (2.41)$$

2.1.2 Gas ultrafreddi

Fino ad ora si è trattato di riprodurre risultati noti nel contesto della teoria dello scattering; il passo successivo sarà quello di sfruttare l'ipotesi di gas *ultrafreddo*. Guardando l'equazione di Schrödinger radiale si nota che per $\ell \neq 0$ al potenziale $V(r)$ si sovrappone la cosiddetta *barriera centrifuga*. L'idea è che per momenti angolari diversi da zero $\ell \neq 0$ e a temperature sufficientemente basse gli atomi non abbiano abbastanza energia per superare la barriera centrifuga; in questo modo risulterà dominante a determinare l'ampiezza di scattering solo l'urto in onda s ($\ell = 0$). Per dare una stima possiamo valutare il momento angolare di un tipico urto nei gas ultrafreddi

$$\hbar\ell \approx \hbar \frac{R}{\Lambda} \quad (2.42)$$

Nei gas ultrafreddi $T \sim nK$ e poiché la lunghezza d'onda termica dipende dalla temperatura $\Lambda \sim T^{-1/2}$ allora si avrà $\ell \approx 0$ e

$$f(\mathbf{k}', \mathbf{k}) \approx f_0(k) = \frac{1}{\cot(\delta_0(k))k - ik} \quad (2.43)$$

Ciò implica che urti con energia minore del massimo del potenziale radiale non sentono l'effetto del potenziale $V(r)$. Ci aspettiamo qualitativamente che i processi di scattering dovuti a $V(r)$ per $\ell \neq 0$ siano soppressi a energie sufficientemente basse. Più precisamente come mostrato in [20] si trova che a basse energie è possibile definire la lunghezza di scattering. Questa è definita di solito in onda s ma in generale¹:

$$f_\ell(k) \underset{k \rightarrow 0}{\sim} -a_\ell k^{2\ell} \quad (2.44)$$

e dunque dalla definizione della fase di shift

$$\delta_\ell(k) \underset{k \rightarrow 0}{\sim} k^{2\ell+1} \quad (2.45)$$

Allora le sezioni d'urto parziali possono essere valutate come

$$\sigma_{\ell \neq 0}(k) = \frac{8\pi}{k^2} (2\ell + 1) \text{sen}^2(\delta_\ell) \underset{k \rightarrow 0}{\sim} 8\pi (2\ell + 1) k^{4\ell} \quad (2.46)$$

$$\sigma_{\ell=0}(k) \underset{k \rightarrow 0}{\sim} 8\pi a_s^2 \quad (2.47)$$

Riassumendo a seconda della statistica e del sistema in esame:

$$\begin{array}{ll} \sigma(k) \underset{k \rightarrow 0}{\sim} 8\pi a_s^2 & \text{Bosoni polarizzati} \\ \sigma(k) \underset{k \rightarrow 0}{\sim} k^4 & \text{Fermioni polarizzati} \\ \sigma_S(k) \underset{k \rightarrow 0}{\sim} 8\pi a_s^2 & \text{Fermioni } (\uparrow, \downarrow), \text{ singoletto} \\ \sigma_{T_i}(k) \underset{k \rightarrow 0}{\sim} k^4 & \text{Fermioni } (\uparrow, \downarrow), \text{ tripletto} \end{array}$$

Un importante risultato è che Fermioni polarizzati a basse temperature interagiscono poco, mentre l'interazione tra particelle con spin opposto è quella dominante nello stesso limite. Ciò riflette nient'altro che il principio di esclusione di Pauli. Una proprietà fondamentale dei gas ultrafreddi è che *possono essere raffreddati a tal punto che solo un'onda parziale diventi dominante*. A basse energie ($k \sim 1/\Lambda$) possiamo espandere la fase $\delta_0(k) = -a_s k + o(k^2)$, dove risulta definita la lunghezza di scattering a_s

$$a_s := - \lim_{k \rightarrow 0} \frac{\delta_0(k)}{k} \quad (2.48)$$

Possiamo portare avanti il calcolo sfruttando la seguente espansione

$$k \cot(\delta_0(k)) \approx -\frac{1}{a_s} + \frac{r^{\text{eff}}}{2} k^2 \quad (2.49)$$

¹solo nel caso $\ell = 0$ a_s ha le dimensioni di una lunghezza

L'ampiezza di transizione sarà allora, a basse energie:

$$f(\mathbf{k}', \mathbf{k}) \approx f_0(k) \approx -\frac{a_s}{1 - a_s \frac{r_{\text{eff}}}{2} k^2 + i a_s k} \quad (2.50)$$

Ciò mostra esplicitamente come per i gas ultrafreddi diluiti, con le ipotesi fatte sul potenziale di interazione l'ampiezza di scattering e quindi delle interazioni a due corpi dipendano solo da due parametri: a_s e r_{eff} . È particolarmente interessante valutare il limite a basse energie anche la soluzione (2.41) dove solo la componente a $\ell = 0$ è rilevante

$$u_{k,0}(k) \underset{k \rightarrow 0}{\propto} 1 - \frac{r}{a_s} \quad r > r^* \quad (2.51)$$

e quindi la soluzione di scattering nello stesso limite sarà

$$\psi^{(+)}(r) \underset{k \rightarrow 0}{\propto} \frac{1}{r} - \frac{1}{a_s} \quad r > r^* \quad (2.52)$$

Questa forma può essere anche ottenuta imponendo alla funzione d'onda nel limite a basse energie le cosiddette condizioni al contorno di Bethe-Peierls, ovvero che

$$\left. \frac{d}{dr} \left(r \psi^{(+)}(r) \right) \right|_{r=0} = \frac{1}{a_s} \quad (2.53)$$

La lunghezza di scattering a_s e il range effettivo r_{eff} hanno dimensioni di una lunghezza ma in generale a_ℓ no; inoltre tali nomi sono fuorvianti perchè in generale il loro collegamento con le lunghezze caratteristiche di un potenziale non sono ovvie. Il passo successivo sarebbe quello di calcolare la lunghezza di scattering per un potenziale interatomico realistico, tuttavia ciò porta immediatamente a complicare i conti. La soluzione a tale problema è quella di utilizzare un potenziale effettivo tale per cui a basse energie venga riprodotta la stessa ampiezza di scattering a due corpi. A causa della notevole semplificazione che porta alla trattazione del problema spesso si sceglie di utilizzare un potenziale di contatto.

Delta regolarizzata

Si vuole calcolare la fase di shift per il potenziale

$$V(\mathbf{r}) = g \delta^3(\mathbf{r}) \frac{\partial}{\partial r} r \quad (2.54)$$

Scriviamo allora l'equazione radiale in onda s per questo potenziale, dall'eq. (2.29):

$$\frac{1}{r} \frac{d^2 u_{k,\ell}(r)}{dr^2} + \frac{u_{k,\ell}(r)}{r^2} (-\delta(r)) + \left[k^2 + \frac{\ell(\ell+1)}{r^2} - \frac{mg}{4\pi r^2 \hbar^2} \delta(r) \frac{\partial}{\partial r} r \right] \frac{u_{k,\ell}(r)}{r} = 0 \quad (2.55)$$

$$\frac{1}{r} \frac{d^2 u_{k,\ell}(r)}{dr^2} + \frac{u_{k,\ell}(r)}{r^2} (-\delta(r)) + \left[k^2 + \frac{\ell(\ell+1)}{r^2} \right] \frac{u_{k,\ell}(r)}{r} - \frac{mg}{4\pi r^2 \hbar^2} \delta(r) \frac{du_{k,\ell}(r)}{dr} = 0 \quad (2.56)$$

da cui si ottengono in onda s ($\ell = 0$)

$$\begin{cases} \frac{d^2 u_k(r)}{dr^2} + k^2 u_k(r) = 0 \\ 4\pi u_k(0) + \frac{mg}{\hbar^2} \frac{du_k}{dr}(0) = 0 \end{cases} \quad (2.57)$$

Si ricordi la soluzione alla prima equazione trovata precedentemente ($\ell = 0$)

$$u_k(r) \propto \frac{1}{2ik} \left(-e^{-ikr} + e^{2i\delta_0(k)} e^{ikr} \right) = \frac{e^{i\delta_0(k)}}{k} \text{sen}(kr + \delta_0(k)) \quad (2.58)$$

La condizione al contorno si può allora riscrivere come

$$\frac{u'_k(0)}{u_k(0)} = k \cot(\delta_0(k)) = -\frac{4\pi\hbar^2}{mg} \equiv -\frac{1}{a_s} \quad (2.59)$$

Questo potenziale è interessante perchè tale relazione vale per ogni valore di k e non solo nel limite a basse energie. Inoltre questo potenziale non ha un range efficace, l'unica sua caratteristica è appunto la lunghezza di scattering. Per modellare un potenziale reale a basse energie è dunque sufficiente la sostituzione

$$g = \frac{4\pi\hbar^2}{m} a_s \quad (2.60)$$

Delta nuda

Un altro potenziale interessante è quello di contatto:

$$V(\mathbf{r}) = g\delta(\mathbf{r}) \quad (2.61)$$

Esso verrà impiegato estensivamente per tutto il resto della tesi. Il suo vantaggio rispetto al potenziale di contatto regolarizzato, come mostreremo, non sarà evidente subito.

L'equazione da risolvere come nel caso precedente è:

$$\begin{aligned} \frac{1}{r} \frac{d^2 u_{k,\ell}(r)}{dr^2} + \frac{u_{k,\ell}(r)}{r^2} (-\delta(r)) + \left[k^2 + \frac{\ell(\ell+1)}{r^2} - \frac{mg}{4\pi r^2 \hbar^2} \delta(r) \right] \frac{u_{k,\ell}(r)}{r} &= 0 \\ -\frac{\delta(r)}{r^2} \left[u_{k,\ell}(r) + \frac{mg}{4\pi\hbar^2} \frac{u_{k,\ell}(r)}{r} \right] + \frac{1}{r} \frac{d^2 u_{k,\ell}(r)}{dr^2} + \left[k^2 + \frac{\ell(\ell+1)}{r^2} \right] \frac{u_{k,\ell}(r)}{r} &= 0 \end{aligned}$$

Da cui si ottengono in onda s le due equazioni

$$\begin{cases} \frac{d^2 u_k(r)}{dr^2} + k^2 u_k(r) = 0 \\ -\frac{\delta(r)}{r^2} \left[u_k(r) + \frac{mg}{4\pi\hbar^2} \frac{u_k(r)}{r} \right] = 0 \end{cases} \quad (2.62)$$

La seconda se integrata

$$-4\pi \int dr \delta(r) \left[u_k(r) + \frac{mg}{4\pi\hbar^2} \frac{u_k(r)}{r} \right] = 0 \quad (2.63)$$

$$u_k(0) + \frac{mg}{4\pi\hbar^2} \int dr \delta(r) \frac{u_k(r)}{r} = 0 \quad (2.64)$$

provare imponendo tutta la soluzione (2.58) Questa forma risulta complicata da trattare e questa strada per ottenere uno pseudo-potenziale corretto va abbandonata. È necessario introdurre un nuovo formalismo, quello della matrice di scattering a due corpi T^{2B} .

2.1.3 Matrice di scattering a due corpi

L'idea è quella di riuscire a dimostrare come per gas ultrafreddi le interazioni a due corpi siano caratterizzate da un singolo parametro, la lunghezza di scattering, quantità che può essere misurata sperimentalmente. Avendo trattato prima il caso dello scattering a due corpi è possibile introdurre l'operatore \hat{T}^{2B} detto matrice di transizione a due corpi

$$\hat{V}|\psi_{\mathbf{p}}^{(+)}\rangle = \hat{T}^{2B}|\mathbf{p}\rangle \quad (2.65)$$

Grazie a tale definizione si può riscrivere l'ampiezza di scattering in funzione di \hat{T}^{2B}

$$f(\mathbf{q}, \mathbf{p}) = -\frac{m(2\pi\hbar)^3}{4\pi\hbar^2} \langle \mathbf{q} | \hat{V} | \psi_{\mathbf{p}}^{(+)} \rangle = -\frac{m(2\pi\hbar)^3}{4\pi\hbar^2} \langle \mathbf{q} | \hat{T}^{2B} | \mathbf{p} \rangle \quad (2.66)$$

È conveniente riscalarlo i momenti con $\mathbf{k} = \mathbf{p}/\hbar$ e utilizzare la normalizzazione $\langle \mathbf{r} | \mathbf{k} \rangle = e^{i\mathbf{r}\cdot\mathbf{k}}$, allora

$$f(\mathbf{k}', \mathbf{k}) = -\frac{m}{4\pi\hbar^2} \langle \mathbf{k}' | \hat{T}^{2B} | \mathbf{k} \rangle \quad (2.67)$$

Allo stesso modo possiamo anche riscrivere l'equazione di Lippmann-Schwinger precedentemente ricavata

$$\hat{T}^{2B}(z) = \hat{V} + \hat{V} \frac{1}{z - \hat{H}_0 + i\epsilon} \hat{T}^{2B}(z) \quad (2.68)$$

Manipolando questa equazione si può ottenere una soluzione formale, infatti

$$\begin{aligned}
\hat{T}^{2B}(z) &= \hat{V} + \hat{V} \frac{1}{z - \hat{H}_0 + i\epsilon} \hat{T}^{2B}(z) \\
[\mathbb{I} - \hat{V} \frac{1}{z - \hat{H}_0 + i\epsilon}] \hat{T}^{2B}(z) &= \hat{V} \\
[z - \hat{H}_0 + i\epsilon - \hat{V}] \frac{1}{z - \hat{H}_0 + i\epsilon} \hat{T}^{2B}(z) &= \hat{V} \\
[z - \hat{H} + i\epsilon] \frac{1}{z - \hat{H}_0 + i\epsilon} \hat{T}^{2B}(z) &= \hat{V} \\
\frac{1}{z - \hat{H}_0 + i\epsilon} \hat{T}^{2B}(z) &= \frac{1}{z - \hat{H} + i\epsilon} \hat{V} \\
\hat{T}^{2B}(z) &= [z - \hat{H}_0 + i\epsilon] \frac{1}{z - \hat{H} + i\epsilon} \hat{V} \\
\hat{T}^{2B}(z) &= \hat{V} + \hat{V} \frac{1}{z - \hat{H} + i\epsilon} \hat{V}
\end{aligned}$$

Un'altra forma interessante dell'operatore T^{2B} è la sua espansione nel potenziale \hat{V}

$$\hat{T}^{2B}(z) = \hat{V} \sum_{n=0}^{\infty} \left[\frac{1}{z - \hat{H}_0 + i\epsilon} \hat{V} \right]^n \quad (2.69)$$

Sia ora $\{|\psi_\alpha\rangle\}_\alpha$ un set completo di autostati di \hat{H} , inserendo una relazione di completezza nell'espressione appena trovata

$$\hat{T}^{2B}(z) = \hat{V} + \sum_{\alpha} \hat{V} \frac{|\psi_\alpha\rangle\langle\psi_\alpha|}{z - \epsilon_\alpha} \hat{V} + \frac{V}{(2\pi)^3} \int d^3k \hat{V} \frac{|\psi_{\mathbf{k}}^{(+)}\rangle\langle\psi_{\mathbf{k}}^{(+)}|}{z - 2\epsilon_{\mathbf{k}}} \hat{V} \quad (2.70)$$

Con $\epsilon_\alpha < 0$ relative alle energie degli stati legati e $|\psi_{\mathbf{k}}^{(+)}\rangle$ gli stati di scattering. È chiaro dunque che in generale la matrice di transizione a due corpi $T^{2B}(z)$ ha poli corrispondenti agli stati legati ed un taglio sull'asse reale dovuto agli stati di scattering. L'ampiezza di transizione sarà allora

$$f(\mathbf{k}', \mathbf{k}) \approx - \frac{a_s}{1 - a_s \frac{r_{\text{eff}}}{2} k^2 + ia_s k} \quad (2.71)$$

Questa può essere ulteriormente riscritta in termini dell'energia dell'onda incidente $E = \frac{\hbar^2 k^2}{m}$, così a basse energie

$$T^{2B}(E) = \frac{4\pi\hbar^2}{m} \frac{a_s}{1 - ia_s \sqrt{\frac{mE}{\hbar^2}} - \frac{ma_s r_{\text{eff}}}{2\hbar^2} E} \quad (2.72)$$

A basse energie ($E \rightarrow 0^-$) si trova che, per lunghezze di scattering positive, questa quantità ha un polo a

$$E_b = - \frac{\hbar^2}{ma_s^2} \quad (2.73)$$

ma allora ricordando la forma generica della matrice di transizione $T^{2B}(z)$ tale polo indica la presenza di uno stato legato a energie piccole, in prossimità della soglia degli stati di scattering $E = 0$.

2.1.4 Rinormalizzazione del potenziale di contatto

Si consideri allora il potenziale a due corpi in rappresentazione delle posizioni

$$\hat{V}_{\text{eff}}(\mathbf{r}) = -g \delta^{(3)}(\mathbf{r}) \quad (2.74)$$

L'azione sugli autostati dello spazio dei momenti è facilmente calcolabile:

$$\langle \mathbf{q} | \hat{V}_{\text{eff}} | \mathbf{k} \rangle = \langle \mathbf{q} | \int d^3r \hat{V}_{\text{eff}}(\mathbf{r}) | \mathbf{r} | \mathbf{k} \rangle = -g \langle \mathbf{q} | 0 \rangle \langle 0 | \mathbf{k} \rangle = -g \quad (2.75)$$

È possibile implementare la richiesta sul comportamento a basse energie di questo potenziale sfruttando l'equazione di Lipmann-Schwinger per T^{2B} scritta in (2.68). L'equazione per l'elemento di matrice si esplicita inserendo una relazione di completezza nei momenti:

$$\langle \mathbf{k}' | \hat{T}^{2B} | \mathbf{k} \rangle = \langle \mathbf{k}' | \hat{V}_{\text{eff}} | \mathbf{k} \rangle + \int d^3p \langle \mathbf{k}' | \hat{V}_{\text{eff}} \frac{1}{E - \hat{H}_0 + i\epsilon} | \mathbf{p} \rangle \langle \mathbf{p} | \hat{T}^{2B} | \mathbf{k} \rangle \quad (2.76)$$

Vogliamo imporre che per il potenziale di contatto il limite a energia zero e a grandi distanze dell'ampiezza di scattering valga

$$T^{2B}(E = 0) = \frac{4\pi\hbar^2 a_s}{m} \quad (2.77)$$

allora si ricava la condizione

$$\frac{1}{g} = -\frac{m}{4\pi\hbar^2 a_s} + \int d^3p \frac{1}{2\epsilon_{\mathbf{p}}} \quad (2.78)$$

La relazione (2.78) può sembrare a prima vista intrattabile a causa della presenza della divergenza nel termine di destra. Verrà mostrato più avanti come tale relazione invece possa essere sfruttata per eliminare la divergenza creata sempre dal potenziale di contatto, ma in un'altra equazione, risultando in una procedura di rinormalizzazione di $\hat{V}(\mathbf{r}) = -g\delta(\mathbf{r})$ elegante.

2.2 Accoppiamento Spin-Orbita

Durante la tesi verranno indagate le proprietà di un sistema di Fermioni con spin (o pseudo-spin) 1/2 caratterizzati da una Hamiltoniana di singola particella

$$\hat{H}_{1b} = \frac{\hbar^2 \hat{P}^2}{2m} + \lambda \mathbf{M} \cdot \hat{\mathbf{P}} + Z \quad (2.79)$$

con $\mathbf{M} = (\sum_i a_i \sigma_i, \sum_i b_i \sigma_i, \sum_i c_i \sigma_i)$ e σ_i le usuali matrici di Pauli nella base di \hat{S}_z . Il termine $Z = \sum_i d_i \sigma_i$ inoltre tiene conto di una possibile dipendenza dallo spin ma non dai momenti. Verrà trattato più avanti nello specifico solo il caso $\lambda = 1$, $\mathbf{M} = (v_D \sigma_y, v_R \sigma_x, 0)$ e $Z = 0$, ovvero un termine di Rashba e uno di Dresselhaus. Tuttavia si possono ottenere risultati per l'Hamiltoniana (2.79), che di fatto è il caso più generale di accoppiamento spin-momento lineare. Seguendo [23, 24] lo spazio di Hilbert del problema può essere espresso come

$$\mathcal{H} = \mathcal{H}_r \otimes \mathcal{H}_{s_1} \otimes \mathcal{H}_{s_2} \quad (2.80)$$

con \mathcal{H}_r lo spazio del moto relativo. Si associano anche agli stati dei vari spazi parentesi diverse

$$|\cdot\rangle\rangle \in \mathcal{H} \quad |\cdot\rangle \in \mathcal{H}_r \quad |\cdot\rangle \in \mathcal{H}_{s_1} \otimes \mathcal{H}_{s_2} \quad (2.81)$$

poiché in particolare l'interesse è verso stati di spin dipendenti dalla posizione ($\mathbf{r}|\psi\rangle\rangle = |\psi(\mathbf{r})\rangle$). L'idea è quella di studiare il problema a due corpi, come fatto nel caso precedente, per un potenziale a simmetria sferica indipendente dallo spin $\hat{U}(\hat{X}^{(1)} - \hat{X}^{(2)})$ e dunque una Hamiltoniana del tipo

$$\hat{H} = \hat{H}_{1b}^{(1)} + \hat{H}_{1b}^{(2)} + \hat{U}(\hat{X}^{(1)} - \hat{X}^{(2)}) \quad (2.82)$$

L'Hamiltoniana del moto relativo è data da

$$\hat{H} = \frac{\hat{p}^2}{m} + \lambda \mathbf{c} \cdot \hat{\mathbf{p}} + B(\mathbf{K}) + \hat{U}(\mathbf{r}) \equiv \hat{H}_0 + \hat{U}(\mathbf{r}) \quad (2.83)$$

con le sostituzioni

$$\hat{\mathbf{p}} = \frac{\hat{\mathbf{P}}^{(1)} - \hat{\mathbf{P}}^{(2)}}{2}, \quad \hat{\mathbf{K}} = \hat{\mathbf{P}}^{(1)} + \hat{\mathbf{P}}^{(2)}, \quad \mathbf{r} = \hat{\mathbf{X}}^{(1)} - \hat{\mathbf{X}}^{(2)}, \quad \mathbf{c} = \mathbf{M}^{(1)} - \mathbf{M}^{(2)}$$

$$B(\hat{\mathbf{K}}) = Z^{(1)} + Z^{(2)} + \lambda \mathbf{K} \cdot (\mathbf{M}^{(1)} + \mathbf{M}^{(2)}), \quad m = \frac{m_1 m_2}{m_1 + m_2}$$

Il momento totale \mathbf{K} è conservato durante il processo di scattering e dunque può essere trattato come una costante. Una base di autostati per l'Hamiltoniana libera sarà data dal prodotto di autostati dell'operatore momento e stati di spin a loro volta dipendenti

dal momento, $|\mathbf{k}\rangle \otimes |\mathbf{k}, \alpha\rangle$ con $\alpha = 0, 1, 2, 3$ che in rappresentazione della distanza relativa

$$(\mathbf{r}|\psi_{\mathbf{k},\alpha}^{(0)}\rangle\rangle = |\psi_{\mathbf{k},\alpha}^{(0)}(\mathbf{r})\rangle = \frac{1}{(2\pi)^{3/2}} e^{i\mathbf{k}\mathbf{r}} |\mathbf{k}, \alpha\rangle \quad (2.84)$$

Poiché la parte nei momenti dell'autostato è nota si può restringere il problema agli autovalori alla sola parte di spin. Nelle coordinate relative l'Hamiltoniana libera è chiaramente ancora scomponibile nella forma

$$\hat{H}_0 = \hat{H}_{1b}^{(1)} \otimes \mathbb{I}_{2 \times 2} + \mathbb{I}_{2 \times 2} \otimes \hat{H}_{1b}^{(2)} \quad (2.85)$$

con

$$\begin{aligned} \hat{H}_{1b}^{(1)} &= \frac{p^2}{2m} \mathbb{I}_{2 \times 2} + \lambda \hat{\mathbf{M}} \cdot \mathbf{p} + Z + \frac{\lambda}{2} \hat{\mathbf{M}} \cdot \mathbf{K} \\ \hat{H}_{1b}^{(2)} &= \frac{p^2}{2m} \mathbb{I}_{2 \times 2} - \lambda \hat{\mathbf{M}} \cdot \mathbf{p} + Z + \frac{\lambda}{2} \hat{\mathbf{M}} \cdot \mathbf{K} \end{aligned} \quad (2.86)$$

A causa della struttura degli operatori $\hat{\mathbf{M}}$ e Z l'Hamiltoniana di singola particella può essere scritta, con $\xi = (\mathbf{K}, \lambda, a_i, b_i, c_i, d_i)$, come

$$\hat{H}_{1b}^{(1)} = \frac{p^2}{2m} \mathbb{I}_{2 \times 2} + \beta(\mathbf{p}, \xi) \sigma_x + \gamma(\mathbf{p}, \xi) \sigma_y + \alpha(\mathbf{p}, \xi) \sigma_z = \begin{pmatrix} \frac{p^2}{2m} + \alpha & \beta - i\gamma \\ \beta + i\gamma & \frac{p^2}{m} - \alpha \end{pmatrix} \quad (2.87)$$

formata quindi da una matrice diagonale e una espansione a coefficienti reali nelle matrici di Pauli (un elemento di $U(2)$). In questo caso i coefficienti sono campi che dipendono dai parametri del modello e dal momento relativo in maniera lineare; a titolo di esempio il campo α dovrà avere la forma $\alpha(\mathbf{p}, \xi) = \mathbf{v}(\xi) \cdot \mathbf{p} + q(\xi)$, per qualche \mathbf{v} e q dipendenti dal set di parametri del modello. Posta in questo modo risulta semplice calcolare i due autovalori di $\hat{H}_{1b}^{(1)}$:

$$\begin{aligned} \det \begin{pmatrix} \frac{p^2}{2m} + \alpha - E^{(1)} & \beta - i\gamma \\ \beta + i\gamma & \frac{p^2}{2m} - \alpha - E^{(1)} \end{pmatrix} &= 0 \\ \Downarrow \\ E_{\pm}^{(1)} &= \frac{p^2}{2m} \pm \sqrt{\alpha^2 + \beta^2 + \gamma^2} := \frac{p^2}{2m} \pm \varepsilon(\mathbf{p}, \xi) \end{aligned} \quad (2.88)$$

È possibile anche ricavare il loro comportamento asintotico a grandi momenti; poiché α, β, γ sono lineari nei momenti

$$\varepsilon(\mathbf{p}, \xi) = \sqrt{\alpha^2 + \beta^2 + \gamma^2} \underset{p \rightarrow \infty}{\sim} \mathbf{m}(\xi) \cdot \mathbf{p} \quad (2.89)$$

Per convenzione viene chiamato $|\uparrow\rangle_1$ l'autovettore associato a E_+ e $|\downarrow\rangle_1$ quello associato a E_- . Lo stesso problema agli autovalori può essere risolto per $H_{1b}^{(2)}$ ad eccezione di incorporare un segno nei momenti. Gli autovalori avranno dunque la stessa forma ma

con un segno invertito

$$E_{\pm}^{(2)} = \frac{p^2}{2m} \pm \varepsilon(-\mathbf{p}, \xi) \quad (2.90)$$

Gli autostati $|\uparrow\rangle_2$ e $|\downarrow\rangle_2$ sono assegnati in maniera analoga al caso precedente. Quindi con una opportuna trasformazione unitaria è sempre possibile porre l'Hamiltoniana (2.85) nella forma diagonale

$$\hat{H}_0 = \begin{pmatrix} \frac{p^2}{2m} + \varepsilon(\mathbf{p}, \xi) & 0 \\ 0 & \frac{p^2}{2m} - \varepsilon(\mathbf{p}, \xi) \end{pmatrix} \otimes \mathbb{I}_2 + \mathbb{I}_2 \otimes \begin{pmatrix} \frac{p^2}{2m} + \varepsilon(-\mathbf{p}, \xi) & 0 \\ 0 & \frac{p^2}{2m} - \varepsilon(-\mathbf{p}, \xi) \end{pmatrix} \quad (2.91)$$

Gli autovalori del sistema totale si possono ottenere costruendo una base di autostati per l'Hamiltoniana totale. Ponendo $|m\rangle_i = |m_i\rangle$, con $m = \uparrow, \downarrow$ la base cercata è data da

$$|m_1, m_2\rangle = |m_1\rangle \otimes |m_2\rangle \quad (2.92)$$

Gli autovalori associati sono dati da

$$\begin{cases} \hat{H}_0|\uparrow, \uparrow\rangle = \left[\frac{p^2}{m} + \varepsilon(\mathbf{p}, \xi) + \varepsilon(-\mathbf{p}, \xi) \right] |\uparrow, \uparrow\rangle \\ \hat{H}_0|\uparrow, \downarrow\rangle = \left[\frac{p^2}{m} + \varepsilon(\mathbf{p}, \xi) - \varepsilon(-\mathbf{p}, \xi) \right] |\uparrow, \downarrow\rangle \\ \hat{H}_0|\downarrow, \uparrow\rangle = \left[\frac{p^2}{m} - \varepsilon(\mathbf{p}, \xi) + \varepsilon(-\mathbf{p}, \xi) \right] |\downarrow, \uparrow\rangle \\ \hat{H}_0|\downarrow, \downarrow\rangle = \left[\frac{p^2}{m} - \varepsilon(\mathbf{p}, \xi) - \varepsilon(-\mathbf{p}, \xi) \right] |\downarrow, \downarrow\rangle \end{cases} \quad (2.93)$$

I quattro stati di spin vengono labellati con $\alpha = 0, 1, 2, 3$ e per compattezza si può indicare con $t = (\alpha, \mathbf{k}, \xi)$ lo specifico autostato di Hamiltoniana libera. Viene scritta allora l'equazione di Lipmann-Schwinger per lo stato di scattering stazionario:

$$|\psi_t^{(+)}(\mathbf{r})\rangle = |\psi_t^{(0)}(\mathbf{r})\rangle + (\mathbf{r}) \frac{1}{E_t - \hat{H}_0 + i0^+} \hat{V} |\psi_t^{(+)}\rangle \quad (2.94)$$

Inserendo una relazione di completezza nelle posizioni

$$\begin{aligned} |\psi_t^{(+)}(\mathbf{r})\rangle &= |\psi_t^{(0)}(\mathbf{r})\rangle + \int d^3r' (\mathbf{r}) \frac{1}{E_t - \hat{H}_0 + i0^+} |\mathbf{r}'\rangle \hat{V}(\mathbf{r}') |\psi_t^{(+)}(\mathbf{r}')\rangle = \\ &= |\psi_t^{(0)}(\mathbf{r})\rangle + \int d^3r' G_0(E_t; \mathbf{r}, \mathbf{r}') \hat{V}(\mathbf{r}') |\psi_t^{(+)}(\mathbf{r}')\rangle \end{aligned} \quad (2.95)$$

La difficoltà principale in presenza del termine di spin orbita risiede nel non essere in grado di calcolare esattamente la funzione di Green, esplicitandola

$$\begin{aligned} G_0(E; \mathbf{r}, \mathbf{r}') &= \sum_{\alpha} \int d^3k (\mathbf{r}) \frac{1}{E - \hat{H}_0 + i0^+} |k, \alpha\rangle \langle\langle k, \alpha | \mathbf{r}' \rangle = \\ &= \sum_{\alpha} \int d^3k \frac{e^{i\mathbf{k} \cdot (\mathbf{r} - \mathbf{r}')}}{E - E_t + i0^+} |\alpha\rangle \langle\alpha| \end{aligned} \quad (2.96)$$

La rottura della simmetria per rotazioni indotta dal termine di spin-orbita rende difficile il calcolo della funzione di Green, così come il suo comportamento asintotico a grandi distanze. da completare questa parte Nell'articolo [23] è dimostrato come l'ampiezza di scattering per il problema a due corpi con accoppiamento spin-orbita nel limite a basse energie sia, sempre per un potenziale realistico a corto raggio r^*

$$\begin{aligned} f(t' \leftarrow t) &= -(2\pi)^3 \langle \psi_{t'}^{(0)}(0) | \frac{|S\rangle\langle S|}{1/a_R + iE_t^{1/2} - 4\pi\langle S|F(E_t)|S\rangle} | \psi_t^{(0)}(0) \rangle = \\ &= -\frac{\langle \alpha'|S\rangle\langle S|\alpha\rangle}{1/a_R + iE_t^{1/2} - 4\pi\langle S|F(E_t)|S\rangle} \end{aligned} \quad (2.97)$$

Gli autori riescono a provare che il limite a basse energie, nelle regioni $rk \ll 1$, $r^*k \ll 1$ e $\lambda r^* \ll 1$, con λ introdotto in (2.83), la funzione d'onda di scattering deve avere la forma

$$|\psi_t^{(+)}(\mathbf{r})\rangle \propto \left(\frac{1}{r} - \frac{1}{a_R}\right) |S\rangle - i\frac{\lambda}{2} \cdot \left(\frac{\mathbf{r}}{r}\right) |S\rangle \quad (2.98)$$

Di fatto si tratta di una generalizzazione delle condizioni al contorno di Bethe-Peierls introdotte brevemente in (2.53). Imponendo questa condizione alla soluzione al problema di scattering a distanze maggiori del range efficace si può ricavare la forma della ampiezza di scattering. Particolarmente interessanti sono l'esistenza di uno stato legato per E_b che soddisfa

$$1/a_R + iE_b^{1/2} - 4\pi\langle S|F(E_b)|S\rangle = 0 \quad (2.99)$$

la cui esistenza verrà mostrata più avanti nella tesi e il caso a energia nulla dove il risultato è esatto

$$f(t' \leftarrow t) \underset{k \rightarrow 0}{=} -a_R \langle \alpha'|S\rangle\langle S|\alpha\rangle \quad (2.100)$$

2.2.1 Rinormalizzazione nel caso spin-orbita

Come nel caso libero per ricavare la corretta relazione di rinormalizzazione in presenza di un accoppiamento spin-orbita è possibile sfruttare l'equazione di Lipmann-Schwinger, imponendo che lo pseudo-potenziale, scelto opportunamente, riproduca la stessa ampiezza di scattering di un potenziale interatomico realistico nel limite di basse energie. Quest'ultima è stata presentata nella sezione precedente (eq.(2.97)) e dunque la scelta è quella di un potenziale che agisca solo sugli stati di singoletto $|S\rangle = \frac{1}{\sqrt{2}}(|\uparrow, \downarrow\rangle - |\downarrow, \uparrow\rangle)$

$$\hat{V}_{\text{eff}}(\mathbf{r}) = -g\delta(\mathbf{r}) \otimes |S\rangle\langle S| \quad (2.101)$$

Dunque data l'equazione di Lipmann-Schwinger con il potenziale efficace

$$\hat{T}^{2B}(z) = \hat{V}_{\text{eff}} + \hat{V}_{\text{eff}} \frac{1}{z - \hat{H}_0 + i0^+} \hat{T}^{2B}(z) \quad (2.102)$$

e definita l'ampiezza di scattering

$$f(t' \leftarrow t) = -2\pi^2 m \langle\langle \psi_{t'}^{(0)} | T^{2B}(E) | \psi_t^{(0)} \rangle\rangle \quad (2.103)$$

Applicando due autostati dell'Hamiltoniana libera a destra e a sinistra si ottiene

$$\begin{aligned} -\frac{1}{2\pi^2 m} f(t' \leftarrow t) &= -\frac{g}{(2\pi)^3} \langle \alpha' | S \rangle \langle S | \alpha \rangle + \\ &+ \frac{g}{(2\pi)^3} \langle \alpha' | S \rangle \left(\sum_{\alpha''} \int d^3 k'' \frac{\langle S | \alpha'' \rangle}{z - E_{t''} + i0^+} \frac{1}{2\pi^2 m} f(t'' \leftarrow t) \right) \end{aligned} \quad (2.104)$$

Imponendo il risultato discusso prima $f(t' \leftarrow t) \underset{k \rightarrow 0}{=} -a_R \langle \alpha' | S \rangle \langle S | \alpha \rangle$ si ottiene

$$\begin{aligned} \frac{a_R}{2\pi^2 m} \langle \alpha' | S \rangle \langle S | \alpha \rangle &= -\frac{g}{(2\pi)^3} \langle \alpha' | S \rangle \langle S | \alpha \rangle + \\ &+ \frac{g}{(2\pi)^3} \langle \alpha' | S \rangle \left(+ \sum_{\alpha''} \int d^3 k'' \frac{\langle S | \alpha'' \rangle}{E_{t''}} \frac{a_R}{2\pi^2 m} \langle \alpha'' | S \rangle \langle S | \alpha \rangle \right) \\ \frac{a_R}{2\pi^2 m} &= -\frac{g}{(2\pi)^3} + \frac{g}{(2\pi)^3} \frac{a_R}{2\pi^2 m} \left(+ \sum_{\alpha''} \int d^3 k'' \frac{\langle \alpha'' | S \rangle \langle S | \alpha'' \rangle}{E_{t''}} \right) \end{aligned}$$

che semplificando ed esplicitando lo stato di singoletto può essere facilmente posta nella forma

$$\frac{1}{g} = -\frac{m}{4\pi a_R} + \frac{1}{(2\pi)^3} \int d^3 k \frac{1}{2} \left(\frac{1}{E_{\uparrow, \downarrow}} + \frac{1}{E_{\downarrow, \uparrow}} \right) \quad (2.105)$$

Questa forma non è ancora la più semplice possibile poiché a determinare la rinormalizzazione è il comportamento dell'integrale a destra della relazione e non tanto lo specifico autovalore. Infatti $E_{\downarrow, \uparrow}(-\mathbf{k}) = E_{\uparrow, \downarrow}(\mathbf{k})$ allora

$$\int d^3 k \frac{1}{2} \left(\frac{1}{E_{\uparrow, \downarrow}} + \frac{1}{E_{\downarrow, \uparrow}} \right) = \int d^3 k \frac{1}{E_{\uparrow, \downarrow}} = \int d^3 k \frac{1}{k^2/m + \varepsilon(\mathbf{k}, \xi) - \varepsilon(-\mathbf{k}, \xi)} = \quad (2.106)$$

Passando in coordinate sferiche

$$\begin{aligned}
&= m \int d\Omega \int_0^\infty dk \frac{k^2/m}{k^2/m + \varepsilon(\mathbf{k}, \xi) - \varepsilon(-\mathbf{k}, \xi)} = \\
&\quad m \int d^3k \frac{1}{k^2} + m \int d\Omega \int_0^\infty dk \left(\frac{k^2/m}{k^2/m + \varepsilon(\mathbf{k}, \xi) - \varepsilon(-\mathbf{k}, \xi)} - 1 \right) = \\
&\quad m \int d^3k \frac{1}{k^2} + \int d\Omega \int_0^\infty dk \left(\frac{\varepsilon(-\mathbf{k}, \xi) - \varepsilon(\mathbf{k}, \xi)}{k^2 + \varepsilon(\mathbf{k}, \xi) - \varepsilon(-\mathbf{k}, \xi)} \right) =
\end{aligned} \tag{2.107}$$

A causa del comportamento asintotico degli autovalori esposto in (2.89) l'integrando a destra a grandi momenti avrà un comportamento proporzionale a $1/k^2$ e dunque l'integrale risulta convergente ad una costante.

$$\int d^3k \frac{1}{k^2/m + \varepsilon(\mathbf{k}, \xi) - \varepsilon(-\mathbf{k}, \xi)} = m \int d^3k \frac{1}{k^2} + C \tag{2.108}$$

Questa costante può essere facilmente incorporata nella definizione dell'accoppiamento g . Allora la relazione di rinormalizzazione risulta essere:

$$\frac{1}{g} = -\frac{m}{4\pi a_R} + \frac{m}{(2\pi)^3} \int d^3k \frac{1}{k^2} \tag{2.109}$$

Troviamo dunque che un'accoppiamento di spin-orbita non cambia la relazione di rinormalizzazione dello pseudo-potenziale di contatto a meno di sostituire a_S con a_R , una lunghezza di scattering che dipende sia dal potenziale atomico che dai dettagli del termine di spin-orbita.

2.3 Risonanza Fano-Feshbach

Nella trattazione della teoria dello scattering sono stati considerati prima, atomi senza una struttura di spin e successivamente l'effetto di un termine di spin-orbita tra il momento dell'atomo e una coppia di *pseudo-spin*. In entrambi i casi quindi, è stato trascurato il fatto che l'atomo possiede una struttura interna di spin più complicata e che questa possa cambiare durante un urto; come affrontato nell'introduzione si tratta della somma di uno spin nucleare e di uno elettronico. Quello che ci interessa ancora è la possibilità per questi due di interagire, tramite il termine iperfino:

$$\hat{H}_{hf} = \frac{\alpha_{hf}}{\hbar^2} \hat{I} \cdot \hat{S}$$

Tale permette non solo all'atomo di cambiare il proprio spin, nucleare o elettronico, che dunque non sono più costanti del moto, ma anche che durante un urto, gli stati

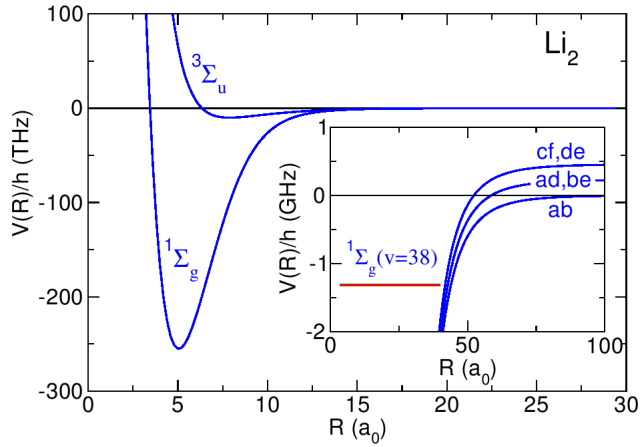


FIGURA 2.1: Potenziali molecolari per i due stati elettronici. Immagine presa da [25]

interni dell'atomo possano cambiare, aprendo nuovi canali per lo scattering. L'urto tra oggetti di questo tipo sarà dunque intrinsecamente un processo multicanale descritto da più equazioni di Schrödinger accoppiate. Meno fondamentale ma utile a capire la realizzazione pratica di questi sistemi è il fatto che canali diversi sperimentano anche potenziali diversi [25]. Le collisioni fra due atomi dipendono a brevi distanze dalla parte di spin elettronico, ciò può essere compreso se si considera che due elettroni nello stesso stato di spin non possono condividere la stessa posizione a causa dell'esclusione di Pauli. Detto ciò ci aspetteremo che i due atomi che collidono, vedano due potenziali diversi a seconda della loro funzione d'onda di spin e che, il potenziale associato allo stato di singoletto sia più profondo. A larghe distanze invece due atomi interagiscono tramite una più debole forza di Van Der Waals (interazione dipolo-dipolo). In figura 2.1 sono riportati questi potenziali per l'interazione tra due atomi di ${}^6\text{Li}$ nello stato fondamentale; per altri atomi alcalini come il ${}^6\text{Li}$ i potenziali sono simili. Una proprietà chiave è che il potenziale di singoletto supporti uno stato legato, che vedremo essere il responsabile della risonanza. Tipicamente l'energia dello stato legato non coincide con l'energia disponibile allo scattering, perciò tale canale viene spesso denominato *chiuso*. Questo stato molecolare ha inoltre un momento magnetico diverso rispetto a quello dei due atomi che collidono, la differenza in energia può dunque essere manipolata da un campo magnetico

$$\Delta E = \Delta\mu B \quad (2.110)$$

Modulando il campo B è allora possibile variare la differenza tra energia delle particelle nel processo di scattering e l'energia dello stato legato, più quest'ultimo si avvicina all'energia dello scattering, più sarà probabile per le particelle interagenti compiere una transizione allo stato legato per poi decadere di nuovo e più lo scattering nel canale di entrata verrà modificato. Ad energie uguali ci si aspetta di ottenere una risonanza e che

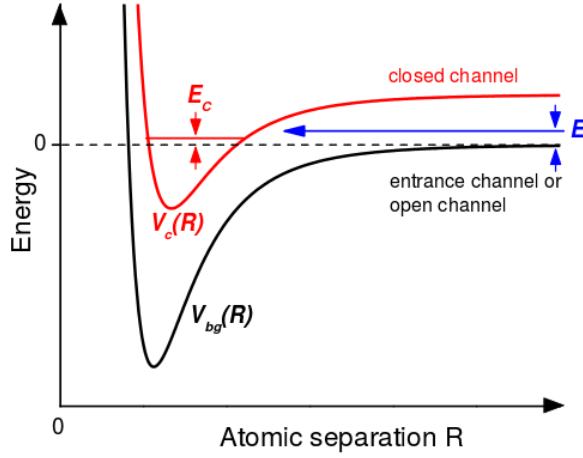


FIGURA 2.2: Semplice modello a due canali. Immagine presa da [25]

la lunghezza di scattering diverga. Questo, a parole, è il meccanismo base della cosiddetta risonanza di Feshback; una review su questo argomento nel caso specifico dei gas ultrafreddi si può trovare in [25]. Si consideri dunque uno stato nel canale entrante/aperto, asintoticamente nello stato di tripletto. L'urto potrà essere così caratterizzato in base alla funzione d'onda di spin elettronico, rispettivamente singoletto o tripletto, così che il modello più semplice scrivibile per una risonanza di questo tipo sia un sistema a due canali:

$$\begin{bmatrix} H_0 + V_T - E & V_{hf} \\ V_{hf} & H_0 + \Delta\mu B + V_S - E \end{bmatrix} \begin{pmatrix} |\psi_T\rangle \\ |\psi_S\rangle \end{pmatrix} = 0 \quad V_{hf} = \langle \psi_T | H_{hf} | \psi_S \rangle \quad (2.111)$$

Schematicamente rappresentato in figura 2.2. L'influenza di un canale sull'altro può essere vista risolvendo formalmente l'equazione per $|\psi_S\rangle$:

$$|\psi_S\rangle = \frac{1}{H_0 + \Delta\mu B + V_S - E + i0^+} V_{hf} |\psi_T\rangle \quad (2.112)$$

sostituendo questo risultato, l'equazione di Schrödinger e dunque l'equazione di Lipmann-Schwinger per il canale entrante risulta modificata

$$\left[E - H_0 - \frac{V_{hf}^2}{H_0 + \Delta\mu B + V_S - E + i0^+} \right] |\psi_T\rangle = V_T |\psi_T\rangle \quad (2.113)$$

$$[E - H_0] |\psi_T\rangle = (\tilde{V} + V_T) |\psi_T\rangle \quad (2.114)$$

Dove l'effetto del canale chiuso può essere riassunto in un potenziale efficace \tilde{V} . In [15](cap.5) è mostrato come a partire da questa equazione si possa ricavare una relazione tra la lunghezza di scattering del sistema e una lunghezza di scattering di *background*

a_{bg} , associata all'urto nel canale entrante in assenza di accoppiamento tra i due canali

$$\frac{4\pi\hbar^2}{m}a_s = \frac{4\pi\hbar^2}{m}a_{bg} + \frac{g^2}{E + \Delta\mu B - E_m} \quad (2.115)$$

Ciò viene fatto sfruttando:

- l'ipotesi di gas ultrafreddo (basse energie), $T^{2B} \underset{k \rightarrow 0}{\sim} \frac{4\pi\hbar^2}{m}a$
- il potenziale di singoletto supporta uno stato legato di energia E_m
- per campi magnetici per cui $E + \Delta\mu B - E_m \rightarrow 0$
- approssimazione al primo ordine nel termine \tilde{V}

Tale teoria a due canali prevede inoltre che *sufficientemente* vicino alla risonanza la matrice di scattering a due corpi possa essere espressa in maniera analoga a quanto trovato nei capitoli precedenti

$$T^{2B}(E) = \frac{4\pi\hbar^2}{m}a_s(B) \frac{1}{1 + ia_s(B)\sqrt{\frac{mE}{\hbar^2}}} \quad (2.116)$$

ma con una lunghezza di scattering dipendente dal campo magnetico; conseguentemente anche l'esistenza, per $a_s > 0$, di uno stato legato a basse energie:

$$E_b(B) = -\frac{\hbar^2}{m[a_s(B)]^2} \quad (2.117)$$

Queste molecole vestite (dressed) sono formate da una sovrapposizione degli stati molecolari nudi (bare) del canale che supporta uno stato legato e dalle coppie di atomi nel canale entrante; più precisamente il loro stato è determinato dalla sovrapposizione

$$|\Psi_{dressed}\rangle = \sqrt{Z}\psi_m|T\rangle + \sqrt{1-Z}\psi_{aa}|S\rangle \quad (2.118)$$

La probabilità Z gioca un ruolo fondamentale nella descrizione del crossover BCS-BEC poiché quantifica la presenza di molecole nude rispetto alle coppie nel canale di entrata. Essa deve essere una funzione del campo magnetico infatti, quando B è tale per cui E_m è molto al di sotto dell'energia di scattering delle due particelle $Z \approx 1$, viceversa avvicinandosi alla risonanza ci si aspetta che $Z \rightarrow 0$. Questa probabilità può essere sia misurata sperimentalmente [26] che calcolata teoricamente [27]² e i risultati sono riportati in figura 2.3. Si può vedere che lungo tutta la regione del crossover $Z < 10^{-3}$ indicando che il canale aperto domina nello scattering. Risonanze di questo tipo sono dette *larghe* (broad)

²Teoricamente questo modello a due canali può essere implementato in una teoria a molti corpi, nello specifico, nel formalismo del path-integral [21](cap.17).

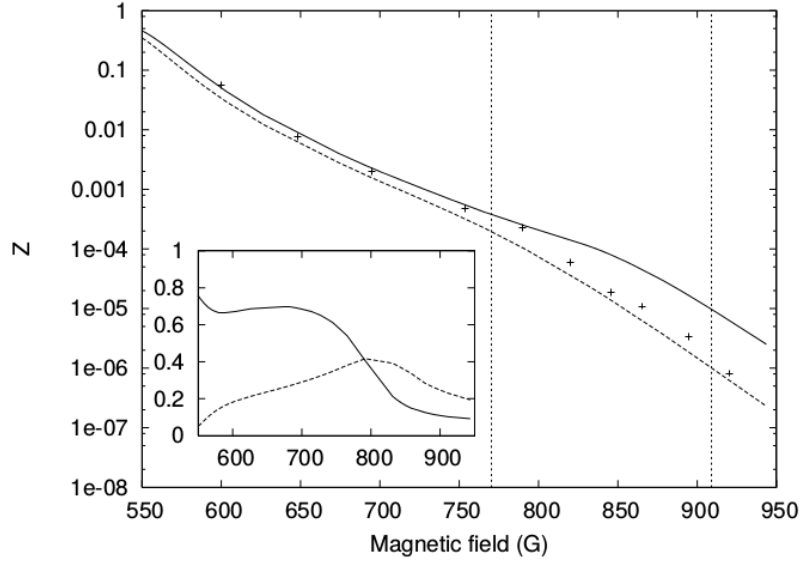


FIGURA 2.3: Probabilità Z in un gas di ${}^6\text{Li}$.

La curva continua è il risultato teorico proposto in [27]. I punti sono il risultato sperimentale ottenuto in [26]. Le linee verticali spezzate indicano il range $k_F|a_s| \geq 1$, dove si realizza il crossover.

e per un sistema vicino ad essa è lecito trascurare il canale molecolare e considerare una teoria a canale singolo in cui la lunghezza di scattering sia magneticamente regolabile. L'effetto complessivo è poter utilizzare tutti i risultati dei capitoli precedenti ma con una lunghezza di scattering dipendente dal campo magnetico. Per non entrare nei dettagli del modello è meglio focalizzare l'attenzione sui risultati sperimentali. Sfruttando una trappola ottica la risonanza di Feshbach è stata sperimentalmente osservata nel 1998 [5, 6] in gas Bosonici. La prima risonanza di Feshbach osservata per gas Fermionici ultrafreddi a due componenti fu trovata in un gas di ${}^{40}\text{K}$ [28], quanto fatto è semplicemente riassunto nell'abstract dell'articolo citato:

We have loaded an ultracold gas of fermionic atoms into a far-off resonance optical dipole trap and precisely controlled the spin composition of the trapped gas. We have measured a magnetic-field Feshbach resonance between atoms in the two lowest energy spin states, $|9/2, -9/2\rangle$ and $|9/2, -7/2\rangle$. The resonance peaks at a magnetic field of $201.5 \pm 1.4\text{G}$ and has a width of $8. \pm 1.1\text{G}$. Using this resonance, we have changed the elastic collision cross section in the gas by nearly 3 orders of magnitude.

Si noti che in tutti questi esperimenti viene impiegata una trappola ottica per confinare il gas, infatti in esse è possibile applicare un campo magnetico omogeneo senza alterare la trappola. In una trappola magnetica invece, la dipendenza dalla posizione del campo realizzerebbe un sistema in cui l'interazione tra atomi è dipendente dalla posizione, cosa

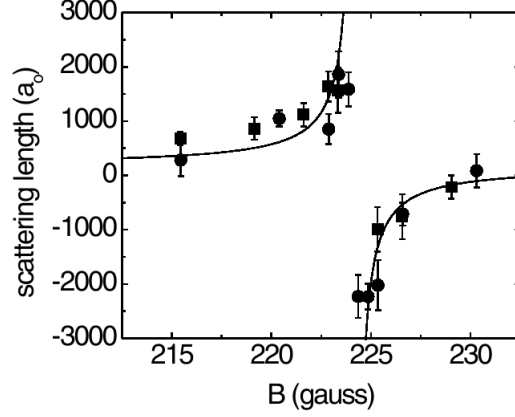


FIGURA 2.4: Lunghezza di scattering in funzione del campo B nell'esperimento [29]

che, sebbene sia suggestiva, tipicamente non si vuole ottenere. Riassumendo, trappole magnetiche e risonanza di Fano-Feshbach non sono compatibili. Si trova sperimentalmente la dipendenza dal campo magnetico della lunghezza di scattering, vicino alla risonanza è caratterizzato da una *lunghezza di scattering di background*, legata al processo nel canale aperto in assenza dell'accoppiamento con il canale chiuso, da una larghezza (width) ΔB e da una posizione della risonanza B_0

$$a_s(B) = a_{bg} \left(1 - \frac{\Delta B}{B - B_0} \right) \quad (2.119)$$

Ciò mostra esplicitamente come la lunghezza di scattering del canale aperto e quindi che la forza dell'interazione può essere manipolate variando il campo magnetico. Per risonanze *larghe* inoltre è possibile trascurare il canale molecolare nudo. In figura 2.4 è mostrata per esempio la lunghezza di scattering in onda s tra i due stati di pseudo-spin $|9/2, 9/2\rangle$ e $|9/2, 5/2\rangle$ di ^{40}K misurata in [29]. Essa mostra chiaramente come a_s possa essere variata su un ampio range.

2.4 Approssimazione di densità locale

Durante la tesi verrà trattato un sistema omogeneo di Fermioni interagenti. Tuttavia, come visto, nel contesto sperimentale il gas deve essere confinato nello spazio, tipicamente da un potenziale armonico. Ci sono due modi di trattare questo problema, il primo è quello di considerare come Hamiltoniana di singola particella quella di oscillatore armonico. Questa via non permette di applicare tutti i risultati ottenuti finora, in particolare la teoria dello scattering, la modellizzazione dell'interazione tramite uno pseudo-potenziale e il fenomeno della risonanza di Feshbach dovrebbero essere riviste considerando questa nuova Hamiltoniana. Queste problematiche, sebbene molto interessanti, non troveranno spazio nella tesi. Un modo conveniente di affrontare la questione è quello di sfruttare

l'**approssimazione di densità locale (LDA)**. L'idea è che se il potenziale varia significativamente su scale molto più grandi di quelle su cui varia la funzione d'onda di singola particella, quest'ultima vedrà localmente un potenziale omogeneo. In pratica tale condizione è soddisfatta se la lunghezza d'onda termica $\Lambda_{th} = \sqrt{\frac{2\pi\hbar^2}{mk_B T}}$ è molto più piccola della lunghezza caratteristica della trappola armonica $\lambda = \sqrt{\frac{\hbar}{m\omega}}$

$$\Lambda_{th} \ll \lambda \iff \beta\hbar\omega \ll 1 \quad (2.120)$$

Se ciò accade è lecito considerare un volume infinitesimo di lato intermedio tra queste due lunghezze in cui il potenziale può essere considerato omogeneo; in tale volume il gas è equivalente ad un gas omogeneo con un potenziale chimico $\mu \rightarrow \mu - V_0$. In totale allora il gas in un potenziale che soddisfa il criterio per l'approssimazione di densità locale può essere trattato come un gas omogeneo con un potenziale chimico dipendente dalla posizione

$$\mu_{LDA}(\mathbf{r}) = \mu - V(\mathbf{r}) \quad (2.121)$$

dove la posizione è una variabile classica. Un grande vantaggio di questa approssimazione è la possibilità di calcolare facilmente i profili di densità del gas in funzione di \mathbf{r} . Per esempio, in un regime non degenere il gas seguirà una statistica di Maxwell-Boltzman

$$n(\mathbf{r}) = \frac{1}{2\pi^2} \int e^{-\beta(\varepsilon_k - \mu_{LDA}(\mathbf{r}))} k^2 dk = \frac{e^{\beta\mu}}{\Lambda^3} e^{-\beta V(\mathbf{r})} \quad (2.122)$$

Questi profili sono importanti per due motivi, sono facilmente accessibili sperimentalmente tramite immagini di assorbimento e riflettono la statistica del sistema. A livello pratico dunque è possibile trattare teoricamente un sistema omogeneo e considerare la dipendenza spaziale del potenziale chimico solo alla fine.

Capitolo 3

Gas di Fermi con potenziale attrattivo

I capitoli precedenti sono serviti, oltre che da introduzione al mondo dei gas ultrafreddi, anche a giustificare le varie approssimazioni tipiche nella trattazione teorica. In particolare i regimi a cui sono soggetti sperimentalmente questi gas, estrema diluizione e bassissime temperature permettono di considerare solo esclusivamente la fisica a due corpi, ma anche di mimare l'interazione con un potenziale di contatto che replichi le stesse proprietà di scattering del potenziale realistico. Infine l'approssimazione di densità locale, quando corretta, permette di trattare il gas come omogeneo. Si considera dunque un sistema di Fermioni in 3d descritti dalla Hamiltoniana di tipo BCS

$$H = H_0 + H_I = \int d^3r \left\{ \sum_{\sigma} \psi_{\sigma}^{\dagger}(\vec{r}) \left(-\frac{\nabla^2}{2m} \right) \psi_{\sigma}(\vec{r}) - g \psi_{\uparrow}^{\dagger}(\vec{r}) \psi_{\downarrow}^{\dagger}(\vec{r}) \psi_{\downarrow}(\vec{r}) \psi_{\uparrow}(\vec{r}) \right\} \quad (3.1)$$

con $g > 0$ per ottenere un potenziale attrattivo. Lo scopo della trattazione successiva sarà quella di studiare questo modello valutando la temperatura critica lungo una variazione dell'intensità dell'accoppiamento g per dimostrare l'esistenza di un *crossover*. È stato anticipato precedentemente che verrà impiegato il formalismo del path-integral¹ per trattare questo problema a molti corpi poiché oltre all'eleganza essa un controllo più semplice sull'espansione della funzione di partizione nel parametro d'ordine della teoria. All'Hamiltoniana (3.1) è associata la seguente funzione di partizione grancanonica e azione nel formalismo del path-integral

$$\mathcal{Z} = Tr \left(e^{-\beta(H - \mu N)} \right) = \int [D\psi^{\dagger}][D\psi] e^{-S[\psi^{\dagger}, \psi]} \quad (3.2)$$

¹Il testo di riferimento è [21], da cui è presa anche la notazione

$$S[\psi^\dagger, \psi] = \int d^3r \int_0^\beta d\tau \left\{ \sum_\sigma \psi_\sigma^\dagger(\vec{r}) \left(\partial_\tau - \frac{\nabla^2}{2m} - \mu \right) \psi_\sigma(\vec{r}) - g \psi_\uparrow^\dagger(\vec{r}) \psi_\downarrow^\dagger(\vec{r}) \psi_\downarrow(\vec{r}) \psi_\uparrow(\vec{r}) \right\} \quad (3.3)$$

Si possono sfruttare le proprietà degli integrali Gaussiani (sempre da [21]) per manipolare tale funzionale, introducendo un campo ausiliare complesso $\Delta(\mathbf{r}, \tau)$.

$$e^{g \int d^3r \int_0^\beta d\tau \psi_\uparrow^\dagger \psi_\downarrow^\dagger \psi_\downarrow \psi_\uparrow} \propto \int [D\Delta^*][D\Delta] e^{\int d^3r \int_0^\beta d\tau \left[-\frac{|\Delta|^2}{g} + \Delta^* \psi_\downarrow \psi_\uparrow + \Delta \psi_\uparrow^\dagger \psi_\downarrow^\dagger \right]} \quad (3.4)$$

La funzione di partizione gran canonica può dunque essere riscritta come

$$\mathcal{Z} = \int [D\psi^\dagger][D\psi] \int [D\Delta^*][D\Delta] e^{-S[\psi^\dagger, \psi, \Delta^* \Delta]} \quad (3.5)$$

con l'uso di una nuova azione dipendente ora anche dal campo ausiliare introdotto

$$S[\psi^\dagger, \psi, \Delta^* \Delta] = \int d^3r \int_0^\beta d\tau \left\{ \sum_\sigma \psi_\sigma^\dagger \left(\partial_\tau - \frac{\nabla^2}{2m} - \mu \right) \psi_\sigma + \frac{|\Delta|^2}{g} - \Delta^* \psi_\downarrow \psi_\uparrow - \Delta \psi_\uparrow^\dagger \psi_\downarrow^\dagger \right\} \quad (3.6)$$

Il significato fisico di Δ potrà emergere dalla sua equazione del moto. L'equazione (3.4) esprime un altro modo in cui effettuare una nota trasformazione di Hubbard-Stratonovich. Definendo gli spinori di Nambu:

$$\psi = \begin{pmatrix} \psi_\uparrow \\ \psi_\downarrow^\dagger \end{pmatrix} \quad \psi^\dagger = \begin{pmatrix} \psi_\uparrow^\dagger & \psi_\downarrow \end{pmatrix}$$

l'azione del sistema può essere riscritta nel formalismo di Nambu in maniera particolarmente compatta

$$S[\psi^\dagger, \psi, \Delta^*, \Delta] = \int d^3r \int_0^\beta d\tau \left[\frac{|\Delta|^2}{g} + \psi^\dagger \mathcal{G}^{-1} \psi \right] + \beta \sum_{\mathbf{k}} \xi_{\mathbf{k}} \quad (3.7)$$

Avendo cura di definire l'operatore \mathcal{G}^{-1} , l'inversa della funzione di Green interagente, come

$$\mathcal{G}^{-1}(\vec{r}, \tau) = \begin{pmatrix} -\partial_\tau + \frac{\nabla^2}{2m} + \mu & \Delta \\ \Delta^* & -\partial_\tau - \frac{\nabla^2}{2m} - \mu \end{pmatrix}$$

Per poter riscrivere $S[\psi^\dagger, \psi, \Delta^*, \Delta]$ come forma quadratica nei nuovi spinori introdotti è necessario sfruttare le proprietà di anticommutazione dei campi di Grassmann facendo comparire il termine a destra nell'azione. Ne risulta l'aggiunta di tale pezzo che nella maggior parte dei casi è irrilevante, tranne nel caso in cui si debba derivare rispetto al potenziale chimico, come accade nel calcolo del numero di particelle.

Definendo $z = e^{-\beta \sum_{\mathbf{k}} \xi_{\mathbf{k}}}$ questo termine può essere portato al di fuori dell'integrale funzionale ed essere ignorato per ora. Otteniamo dunque che la funzione di partizione grancanonica del sistema può essere riscritta come

$$\mathcal{Z} = z \int [D\Delta^*][D\Delta] e^{-\int d^3r \int_0^\beta d\tau \frac{\Delta^2}{g}} \int [D\bar{\psi}][D\psi] e^{-\int d^3r \int_0^\beta d\tau \psi^\dagger \mathcal{G}^{-1} \psi} \quad (3.8)$$

è possibile dunque sfruttare ancora le proprietà degli integrali gaussiani nelle variabili di Grassmann e integrare sui gradi di libertà Fermionici ottenendo una teoria effettiva nel campo ausiliare Δ

$$\begin{aligned} \mathcal{Z} &= z \int [D\Delta^*][D\Delta] e^{-\int d^3r \int_0^\beta d\tau \frac{|\Delta|^2}{g}} \det(\mathcal{G}^{-1}) = \\ &= z \int [D\Delta^*][D\Delta] e^{-\int d^3r \int_0^\beta d\tau \frac{|\Delta|^2}{g} + \ln(\det(\mathcal{G}^{-1}))} = \\ &= z \int [D\Delta^*][D\Delta] e^{-\int d^3r \int_0^\beta d\tau \frac{|\Delta|^2}{g} + \text{Tr}(\ln(\mathcal{G}^{-1}))} \end{aligned} \quad (3.9)$$

e dunque il sistema ammette una azione effettiva

$$S_{eff}[\Delta^*, \Delta] = \int d^3r \int_0^\beta d\tau \frac{|\Delta(\vec{r}, \tau)|^2}{g} - \text{Tr}(\ln(\mathcal{G}^{-1})) + \beta \sum_{\mathbf{k}} \xi_{\mathbf{k}} \quad (3.10)$$

3.1 Gap equation

A partire da questa azione è possibile calcolare l'equazione del moto. Si cerca la soluzione omogenea alla equazione del moto associata. Ponendo $\Delta(\vec{r}, \tau) = \Delta$ l'azione effettiva risulta:

$$S_{eff}[\Delta^*, \Delta] = \frac{\beta\Omega}{g} |\Delta|^2 - \text{Tr}(\ln(\mathcal{G}^{-1})) + \beta \sum_{\mathbf{k}} \xi_{\mathbf{k}} \quad (3.11)$$

e da questa la gap omogenea $\Delta(T)$ dovrà soddisfare: $\frac{\delta S_{eff}}{\delta \Delta} = 0$

$$\begin{aligned} \frac{\beta\Omega}{g} \Delta^* - \text{Tr}(\mathcal{G} \frac{\delta \mathcal{G}^{-1}}{\delta \Delta}) &= 0 \\ \frac{\beta\Omega}{g} \Delta^* - \text{Tr} \left(\mathcal{G} \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 0 & 0 \end{pmatrix} \right) &= 0 \\ \frac{\beta\Omega}{g} \Delta^* - \sum_{\mathbf{k}, \omega_n} \mathcal{G}_{21}(\mathbf{k}, \omega_n) &= 0 \end{aligned} \quad (3.12)$$

Nello spazio dei momenti e nelle frequenze di Matsubara la matrice \mathcal{G}^{-1} definita in (3) è semplicemente

$$\mathcal{G}^{-1}(\mathbf{k}, i\omega_n) = \begin{pmatrix} i\omega_n - \frac{\mathbf{k}^2}{2m} + \mu & \Delta \\ \Delta^* & i\omega_n + \frac{\mathbf{k}^2}{2m} - \mu \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} i\omega_n - \xi_{\mathbf{k}} & \Delta \\ \Delta^* & i\omega_n + \xi_{\mathbf{k}} \end{pmatrix} \quad (3.13)$$

In questa forma è facile calcolare il determinante

$$\det(\mathcal{G}^{-1}) = -\omega_n^2 - \xi_{\mathbf{k}}^2 - \Delta^2 := -\omega_n^2 - E_{\mathbf{k}}^2 \quad (3.14)$$

dove viene definito lo spettro di particella singola

$$E_{\mathbf{k}} = \sqrt{\xi_{\mathbf{k}}^2 + \Delta^2} \quad (3.15)$$

Si noti che il minimo nello spettro energetico è situato in $\epsilon_{\mathbf{k}} = \mu$ ed è $E_{min} = |\Delta|$ e possiede dunque una *gap*, rispetto al minimo di uno spettro di particella libera, che è zero. Il risultato è che creare una eccitazione elementare ha un costo energetico minimo. l'interpretazione fisica di questo risultato è che per rompere una coppia la minima energia richiesta è $2|\Delta|$.

L'elemento della funzione di Green cercato nell'equazione per la gap è dunque

$$\mathcal{G}_{21}(\mathbf{k}, \omega_n) = \frac{-\mathcal{G}_{21}^{-1}(\mathbf{k}, \omega_n)}{\det(\mathcal{G}^{-1})} = \frac{\Delta^*}{\omega_n^2 + E_{\mathbf{k}}^2} \quad (3.16)$$

quindi la (3.12) può essere riscritta come

$$\frac{1}{g} = \frac{1}{\beta\Omega} \sum_{\mathbf{k}, i\omega_n} \frac{1}{\omega_n^2 + E_{\mathbf{k}}^2} \quad (3.17)$$

È possibile svolgere ora la somma sulle frequenze di Matsubara Fermioniche; il denominatore nella sommatoria ha due poli in $i\omega_n = \pm E_{\mathbf{k}}$:

$$\begin{aligned} \frac{1}{\beta\Omega} \sum_{\mathbf{k}, i\omega_n} \frac{1}{\omega_n^2 + E_{\mathbf{k}}^2} &= \frac{1}{\beta\Omega} \sum_{\mathbf{k}, i\omega_n} \frac{-1}{(i\omega_n + E_{\mathbf{k}})(i\omega_n - E_{\mathbf{k}})} = \\ &= -\frac{1}{\Omega} \sum_{\mathbf{k}} \left(\frac{n_{\text{F}}(E_{\mathbf{k}})}{2E_{\mathbf{k}}} - \frac{n_{\text{F}}(-E_{\mathbf{k}})}{2E_{\mathbf{k}}} \right) = \frac{1}{\Omega} \sum_{\mathbf{k}} \left(\frac{\tanh(\beta E_{\mathbf{k}}/2)}{2E_{\mathbf{k}}} \right) \end{aligned}$$

Passando al limite del continuo $\frac{1}{\Omega} \sum_{\mathbf{k}} \rightarrow \frac{1}{(2\pi)^3} \int d^3k$ la gap equation assume la forma definitiva:

$$\frac{1}{g} = \frac{1}{(2\pi)^3} \int d^3k \frac{\tanh(\beta E_{\mathbf{k}}/2)}{2E_{\mathbf{k}}} \quad (3.18)$$

Il potenziale di contatto introdotto nella teoria è una notevole semplificazione del modello, tuttavia esso dà luogo a divergenze ultraviolette; in particolare il termine di destra

nell'equazione appena scritta ha una divergenza lineare.

$$\int d^3k \frac{\tanh(\beta E_{\mathbf{k}}/2)}{2E_{\mathbf{k}}} = \lim_{\Lambda \rightarrow \infty} \int_0^\Lambda dk k^2 \frac{\tanh(\beta E_{\mathbf{k}}/2)}{2E_{\mathbf{k}}} \sim \Lambda \quad (3.19)$$

Tale questione verrà affrontata nel prossimo capitolo. L'Hamiltoniana e la gap equation ottenuta sono le stesse della teoria BCS classica (sempre con l'approssimazione di potenziale attrattivo di contatto). Tuttavia in quest'ultima, il comportamento ultravioletto è regolato dall'esistenza di un *cut-off* naturale alla frequenza di Debye ω_D del reticolo del materiale. È utile mostrare brevemente i risultati che si possono ottenere dallo studio della gap equation nei materiali, una trattazione più completa invece si può trovare in [30]. Nei superconduttori classici tipicamente si ha che $\hbar\omega_D \ll \epsilon_F$ e che una gap finita può esistere solo per particelle con energia superiore a quella di Fermi; si può allora, a basse temperature considerare il potenziale chimico costante $\mu \approx \epsilon_F$ e sfruttare l'approssimazione sulla densità degli stati $\frac{1}{(2\pi)^3} \int d^3k \approx \nu(0) \int d\xi$ per riscrivere l'integrale, semplificandolo di molto:

$$\frac{1}{g} = \int d^3k \frac{\tanh(\beta E_{\mathbf{k}}/2)}{2E_{\mathbf{k}}} \approx \nu(0) \int_0^{\omega_D} d\xi \frac{\tanh\left(\frac{(\xi^2 + \Delta^2)^{1/2}}{2T_c}\right)}{(\xi^2 + \Delta^2)^{1/2}}$$

Sfruttando la gap equation si possono ricavare dei risultati molto interessanti

- La dipendenza dall'accoppiamento g della gap a $T = 0$

$$\Delta_0 = 2\hbar\omega_D e^{-\frac{1}{\nu(0)g}} \quad (3.20)$$

- La dipendenza dall'accoppiamento della temperatura critica della transizione superconduttiva

$$T_c = 2\frac{\gamma}{\pi}\omega_D e^{-\frac{1}{\nu(0)g}} \quad (3.21)$$

- L'andamento a potenza della gap vicino al punto critico

$$\Delta(T) \sim (T - T_c)^\beta \quad \beta = 1/2 \quad (3.22)$$

3.2 Espansione dell'azione effettiva

La seconda equazione che possiamo ricavare è quella per la densità di particelle. Vista la difficoltà di lavorare con l'azione effettiva ricavata in (3.10), si effettua una espansione attorno alla soluzione della gap equation. Si considera dunque $\Delta(x) = \bar{\Delta} + \delta\Delta(x)$ e si

espande l'azione nelle fluttuazioni del campo ausiliare, fermandosi all'ordine desiderato. Verranno trattati l'ordine 0, equivalente ad una approssimazione di campo medio e l'inclusione delle fluttuazioni Gaussiane. Attorno a $\bar{\Delta}$ si ottiene

$$S_{eff}[\Delta] = S_{eff}[\bar{\Delta}] + \underbrace{\int dx \frac{\delta S_{eff}[\Delta]}{\delta \Delta(x)} \Big|_{\bar{\Delta}}}_{=0} \delta \Delta(x) + \frac{1}{2} \int dx_1 dx_2 \frac{\delta^2 S_{eff}[\Delta]}{\delta \Delta(x_1) \delta \Delta(x_2)} \Big|_{\bar{\Delta}} \delta \Delta(x_1) \delta \Delta(x_2) + o(\Delta^3) \quad (3.23)$$

3.2.1 Campo medio

Tipicamente il primo approccio è quello di effettuare una approssimazione di campo medio sull'azione considerando una gap omogenea:

$$S_{eff}[\Delta] \approx S_{eff}[\bar{\Delta}] = \frac{\beta \Omega}{g} \bar{\Delta}^2 - Tr(\ln(\mathcal{G}^{-1}))|_{\Delta=\bar{\Delta}} + \beta \sum_{\mathbf{k}} \xi_{\mathbf{k}} \quad (3.24)$$

a cui sarà associata la funzione di granpartizione

$$G[\bar{\Delta}] = \frac{\Omega}{g} \bar{\Delta}^2 - \frac{1}{\beta} Tr(\ln(\mathcal{G}^{-1}))|_{\Delta=\bar{\Delta}} + \sum_{\mathbf{k}} \xi_{\mathbf{k}} \quad (3.25)$$

da questa si ricava l'equazione per il numero di particelle

$$\begin{aligned} N &= -\frac{\partial G}{\partial \mu} = -\sum_{\mathbf{k}} \frac{\partial \xi_{\mathbf{k}}}{\partial \mu} + \frac{1}{\beta} \sum_{\mathbf{k}, i\omega_n} Tr \left(\frac{\partial}{\partial \mu} \ln(\mathcal{G}^{-1}) \right) = \\ &= \sum_{\mathbf{k}} 1 + \frac{1}{\beta} \sum_{\mathbf{k}, i\omega_n} Tr \left(\mathcal{G} \frac{\partial \mathcal{G}^{-1}}{\partial \mu} \right) = \\ &= \sum_{\mathbf{k}} 1 + \frac{1}{\beta} \sum_{\mathbf{k}, i\omega_n} (\mathcal{G}_{11} - \mathcal{G}_{22}) = \\ &= \sum_{\mathbf{k}} 1 + \frac{1}{\beta} \sum_{\mathbf{k}, i\omega_n} \left[\frac{-2\xi_{\mathbf{k}}}{\omega_n^2 + E_{\mathbf{k}}^2} \right] \end{aligned}$$

Sommando sulle frequenze di Matsubara si ottiene

$$N = \sum_{\mathbf{k}} \left[1 - \frac{2\xi_{\mathbf{k}}}{2E_{\mathbf{k}}} (-n_{\mathbf{F}}(E_{\mathbf{k}}) + n_{\mathbf{F}}(-E_{\mathbf{k}})) \right] = \sum_{\mathbf{k}} \left[1 - \frac{\xi_{\mathbf{k}}}{E_{\mathbf{k}}} \tanh \left(\frac{E_{\mathbf{k}}}{2T} \right) \right] \quad (3.26)$$

A livello di campo medio dunque le due equazioni da risolvere sono dunque

$$\begin{cases} \frac{1}{g} = \frac{1}{\Omega} \sum_{\mathbf{k}} \frac{\tanh\left(\frac{E_{\mathbf{k}}}{2T}\right)}{2E_{\mathbf{k}}} \\ n = \frac{1}{\Omega} \sum_{\mathbf{k}} \left[1 - \frac{\xi_{\mathbf{k}}}{E_{\mathbf{k}}} \tanh \left(\frac{E_{\mathbf{k}}}{2T} \right) \right] \end{cases} \quad (3.27)$$

Una possibilità può essere per esempio studiare l'andamento della gap in funzione dell'accoppiamento a $T = 0$, ciò viene fatto tipicamente all'ordine 0 dell'espansione sopra ricavata. Sia $\Delta_0 = \Delta(0)$, le due equazioni diventano

$$\begin{cases} \frac{1}{g} = \frac{1}{\Omega} \sum_{\mathbf{k}} \frac{1}{2E_{\mathbf{k}}} \\ n = \frac{1}{\Omega} \sum_{\mathbf{k}} \left(1 - \frac{\xi_{\mathbf{k}}}{E_{\mathbf{k}}}\right) \end{cases} \quad (3.28)$$

Questo caso può essere affrontato analiticamente [31] e permette di ricavare la *gap residua* (a $T = 0$) in funzione dell'accoppiamento. Nella tesi verrà indagato un altro aspetto, ovvero il ricavare la temperatura critica e il potenziale chimico (a $T = T_c$) del sistema in funzione dell'accoppiamento. La semplificazione più grande deriva dal fatto che, come mostrato sopra, la gap si annulla se valutata alla temperatura critica, $\Delta(T_c) = 0$. Nel nostro caso $\bar{\Delta} = 0$ e dunque $\delta\Delta(x) = \Delta(x)$ è la fluttuazione

$$S_{eff}[\Delta] = S_{eff}[0] + \frac{1}{2} \int dx_1 dx_2 \frac{\delta^2 S_{eff}[\Delta]}{\delta\Delta(x_1)\delta\Delta(x_2)} \Big|_0 \Delta(x_1)\Delta(x_2) + o(\Delta^3) \quad (3.29)$$

3.2.2 Campo medio, $\mathbf{T} = \mathbf{T}_c$

All'ordine 0 otteniamo che la funzione di partizione e il potenziale grancanonico sono quelli di un sistema di Fermioni liberi.

$$S_{eff}^{(0)}[\Delta] = S_{eff}[0] = -Tr(\ln(\mathcal{G}^{-1}))|_{\Delta=0} + \beta \sum_{\mathbf{k}} \xi_{\mathbf{k}} \quad (3.30)$$

$$G^{(0)} = \frac{1}{\beta} S_{eff}[0] = -\frac{1}{\beta} Tr(\ln(\mathcal{G}_0^{-1})) + \sum_{\mathbf{k}} \xi_{\mathbf{k}} \quad (3.31)$$

Le equazioni da risolvere sono semplicemente le due ricavate precedentemente valutate alla temperatura critica:

$$\begin{cases} \frac{1}{g} = \frac{1}{\Omega} \sum_{\mathbf{k}} \frac{\tanh(\frac{\xi_{\mathbf{k}}}{2T_c})}{2\xi_{\mathbf{k}}} \\ n = \frac{1}{\Omega} \sum_{\mathbf{k}} \left[1 - \tanh\left(\frac{\xi_{\mathbf{k}}}{2T_c}\right)\right] \end{cases} \quad (3.32)$$

3.2.3 Inclusione delle fluttuazioni Gaussiane, $\mathbf{T} = \mathbf{T}_c$

Sempre lavorando a temperatura fissata ($T = T_c$) si vuole calcolare il termine successivo dell'espansione

$$S_{eff}[\Delta] = S_{eff}^{(0)} + S_{eff}^{(2)} \quad (3.33)$$

L'azione efficace totale ha già un termine quadratico, si tratterà dunque di espandere solo il contenuto del termine con la traccia dell'azione totale

$$S_{eff}[\Delta^*, \Delta] = \int d^3r \int_0^\beta d\tau \frac{\Delta(\vec{r}, \tau)^2}{g} - Tr(\ln(\mathcal{G}^{-1})) + \beta \sum_{\mathbf{k}} \xi_{\mathbf{k}} \quad (3.34)$$

\mathcal{G}^{-1} può essere scritto, nello spazio dei momenti, come

$$\begin{aligned} \mathcal{G}^{-1}(\mathbf{k}, i\omega_n) &= \begin{pmatrix} i\omega_n - \xi_{\mathbf{k}} & \Delta \\ \Delta^* & i\omega_n + \xi_{\mathbf{k}} \end{pmatrix} = \\ &= \begin{pmatrix} i\omega_n - \xi_{\mathbf{k}} & 0 \\ 0 & i\omega_n + \xi_{\mathbf{k}} \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} 0 & \Delta \\ \Delta^* & 0 \end{pmatrix} = \mathcal{G}_0^{-1} + \tilde{\Delta} \end{aligned} \quad (3.35)$$

Sfruttando lo sviluppo in serie del logaritmo

$$\begin{aligned} \ln(\mathcal{G}^{-1}) &= \ln(\mathcal{G}_0^{-1} + \tilde{\Delta}) = \ln(\mathcal{G}_0^{-1}(\mathbb{I} + \mathcal{G}_0\tilde{\Delta})) = \\ &= \ln(\mathcal{G}_0^{-1}) + \ln(\mathbb{I} + \mathcal{G}_0\tilde{\Delta}) = \ln(\mathcal{G}_0^{-1}) + \mathcal{G}_0\tilde{\Delta} - \frac{1}{2}\mathcal{G}_0\tilde{\Delta}\mathcal{G}_0\tilde{\Delta} + o(\Delta^3) = \\ &= \ln(\mathcal{G}_0^{-1}) + \mathcal{G}_0\tilde{\Delta} - \frac{1}{2}\mathcal{G}_0\tilde{\Delta}\mathcal{G}_0\tilde{\Delta} + o(\Delta^3) \end{aligned} \quad (3.36)$$

Il primo termine ha traccia nulla è dunque al secondo ordine l'azione è data da

$$S_{eff}[\Delta] = S_{eff}^{(0)} + \int d^3r \int_0^\beta d\tau \frac{\Delta(\vec{r}, \tau)^2}{g} + \frac{1}{2}Tr(\mathcal{G}_0\tilde{\Delta}\mathcal{G}_0\tilde{\Delta}) + o(\Delta^3) \quad (3.37)$$

Esplicitando il termine quadratico in Δ :

$$\mathcal{G}_0\tilde{\Delta}\mathcal{G}_0\tilde{\Delta} = \begin{pmatrix} 0 & \mathcal{G}_0^{11}\Delta \\ \mathcal{G}_0^{22}\Delta^* & 0 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 0 & \mathcal{G}_0^{11}\Delta \\ \mathcal{G}_0^{22}\Delta^* & 0 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \mathcal{G}_0^{11}\Delta\mathcal{G}_0^{22}\Delta^* & \dots \\ \dots & \mathcal{G}_0^{22}\Delta^*\mathcal{G}_0^{11}\Delta \end{pmatrix}$$

Tutta l'azione può essere valutata nello spazio dei momenti in maniera più agevole

$$\begin{aligned} \frac{1}{2}Tr(\mathcal{G}_0\tilde{\Delta}\mathcal{G}_0\tilde{\Delta}) &= Tr(\mathcal{G}_0^{22}\Delta^*\mathcal{G}_0^{11}\Delta) = \\ &= \frac{1}{\beta\Omega} \sum_q \Delta^*(q) \left[\sum_k \mathcal{G}_0^{11}(k)\mathcal{G}_0^{22}(k-q) \right] \Delta(q) = \end{aligned}$$

$\mathcal{G}_0(k)$ è stato valutato prima

$$\mathcal{G}_0 = \begin{pmatrix} \frac{1}{i\omega_n - \xi_{\mathbf{k}}} & 0 \\ 0 & \frac{1}{i\omega_n + \xi_{\mathbf{k}}} \end{pmatrix}$$

e i suoi elementi soddisfano le semplici proprietà dei propagatori Fermionici che è possibile sfruttare

$$\mathcal{G}_0^{22}(-k) = \frac{1}{-i\omega_n + \xi_{\mathbf{k}}} = -\mathcal{G}_0^{11}(k)$$

$\mathcal{G}_0^{22}(k - q) = -\mathcal{G}_0^{11}(q - k)$ Allora parte del termine quadratico della azione può essere riscritto come

$$\frac{1}{2}Tr(\mathcal{G}_0\tilde{\Delta}\mathcal{G}_0\tilde{\Delta}) = \sum_q \Delta^*(q) \left[-\frac{1}{\beta\Omega} \sum_k \mathcal{G}_0(k)\mathcal{G}_0(q - k) \right] \Delta(q) := \sum_q \Delta^*(q)\chi(q)\Delta(q)$$

È possibile semplificare il risultato svolgendo la somma sulle frequenze di Matsubara $i\omega_n$ che presenta due poli: $i\omega_n = \xi_{\mathbf{k}}$ e $i\omega_n = i\alpha - \xi_{\mathbf{q}-\mathbf{k}}$.

$$\begin{aligned} \chi(q) &= -\frac{1}{\beta\Omega} \sum_k \mathcal{G}_0(k)\mathcal{G}_0(q - k) = \frac{1}{\beta\Omega} \sum_{\mathbf{k}, i\omega_n} \frac{1}{i\omega_n - \xi_{\mathbf{k}}} \cdot \frac{1}{i\omega_n - i\alpha + \xi_{\mathbf{q}-\mathbf{k}}} = \\ &= \frac{1}{\Omega} \sum_{\mathbf{k}} \left[\frac{n_F(\xi_{\mathbf{k}})}{-i\alpha + \xi_{\mathbf{k}} + \xi_{\mathbf{q}-\mathbf{k}}} + \frac{n_F(-\xi_{\mathbf{q}-\mathbf{k}})}{i\alpha - \xi_{\mathbf{k}} - \xi_{\mathbf{q}-\mathbf{k}}} \right] = \frac{1}{\Omega} \sum_{\mathbf{k}} \frac{1 - n_F(\xi_{\mathbf{k}}) - n_F(\xi_{\mathbf{q}-\mathbf{k}})}{i\alpha - \xi_{\mathbf{k}} - \xi_{\mathbf{q}-\mathbf{k}}} \end{aligned}$$

In conclusione l'azione al secondo ordine in Δ può essere scritta come

$$S_{\text{eff,Gauss}}[\Delta] = S_{\text{eff}}^{(0)} + \sum_q \Delta^*(q)\Gamma^{-1}(q)\Delta(q) \quad (3.38)$$

dove il nuovo termine introdotto è

$$\Gamma^{-1}(q) = \frac{1}{g} + \frac{1}{\Omega} \sum_{\mathbf{k}} \frac{1 - n_F(\xi_{\mathbf{k}}) - n_F(\xi_{\mathbf{k}-\mathbf{q}})}{i\alpha - \xi_{\mathbf{k}} - \xi_{\mathbf{k}-\mathbf{q}}} \quad (3.39)$$

Da questo risultato ricavare l'equazione per per il numero di particelle sarà più complicato rispetto all'ordine precedente; viene seguita la procedura adottata da P. Nozières e S. Schmitt-Rink in [2]. L'azione al secondo ordine è una forma quadratica nelle fluttuazioni $\Delta(q)$ attorno alla soluzione omogenea e la funzione di partizione può essere calcolata facilmente come integrale Gaussiano

$$\mathcal{Z}_{Gauss} = \mathcal{Z}_0 \int [D\Delta^*][D\Delta] e^{-\sum_q \Delta^*(q)\Gamma^{-1}(q)\Delta(q)} \quad (3.40)$$

Si tratta di un integrale Gaussiano su variabili Bosoniche, con $\mathcal{Z}_0 = e^{-S_{\text{eff}}^{(0)}}$

$$\begin{aligned} \mathcal{Z}_{Gauss} &= \mathcal{Z}_0 \det(\Gamma^{-1})^{-1} = \mathcal{Z}_0 \det(\Gamma) = \\ &= \mathcal{Z}_0 e^{-\ln(\det(\Gamma^{-1}))} = \mathcal{Z}_0 e^{-Tr(\ln(\Gamma^{-1}))} = e^{-S_{\text{eff}}[0] - Tr(\ln(\Gamma^{-1}))} \end{aligned} \quad (3.41)$$

Il potenziale grancanonico risulta dunque

$$G_{Gauss} = -\frac{1}{\beta} \ln(\mathcal{Z}_{Gauss}) = \frac{1}{\beta} S_{\text{eff}}[0] + \frac{1}{\beta} Tr(\ln(\Gamma^{-1})) \quad (3.42)$$

da cui è possibile ricavare la densità di particelle come fatto precedentemente. Il primo termine non è altro che la densità di particelle in campo medio

$$n_{Gauss} = -\frac{1}{\Omega} \frac{\partial G_{Gauss}}{\partial \mu} = n^{(0)} + n^{(2)} \quad (3.43)$$

$$n^{(2)} = -\frac{1}{\beta\Omega} \frac{\partial}{\partial \mu} Tr(\ln(\Gamma^{-1})) = -\frac{1}{\beta\Omega} \frac{\partial}{\partial \mu} \sum_{\mathbf{q}, i\nu_n} \ln(\Gamma^{-1}(\mathbf{q}, i\nu_n)) \quad (3.44)$$

Se la funzione da sommare sulle frequenze, $\ln(\Gamma^{-1})$, ha dei poli semplici nel piano complesso in $z = z_i$ ($i = 0, 1, 2, \dots$) e un *taglio*, ovvero un insieme continuo di poli semplici sull'asse reale, la somma sulle frequenze di Matsubara può essere riscritta come

$$\begin{aligned} \frac{1}{\beta} \sum_{i\nu_n} \ln(\Gamma^{-1}(\mathbf{q}, i\nu_n)) &= \sum_i n_B(z_i) Res [\ln(\Gamma^{-1}(\mathbf{q}, z_i))] - \\ &- \frac{1}{2\pi i} \int_{-\infty}^{+\infty} d\omega n_B(\omega) [\ln(\Gamma^{-1}(\mathbf{q}, \omega + i\epsilon)) - \ln(\Gamma^{-1}(\mathbf{q}, \omega - i\epsilon))] \end{aligned} \quad (3.45)$$

se in particolare l'integrando ha poli solo sull'asse reale questa si riduce a

$$\frac{1}{\beta} \sum_{i\nu_n} \ln(\Gamma^{-1}(\mathbf{q}, i\nu_n)) = -\frac{1}{2\pi i} \int_{-\infty}^{+\infty} d\omega n_B(\omega) [\ln(\Gamma^{-1}(\mathbf{q}, \omega + i\epsilon)) - \ln(\Gamma^{-1}(\mathbf{q}, \omega - i\epsilon))] \quad (3.46)$$

Poiché sull'asse reale $\Gamma(\mathbf{q}, \omega)$ è reale quest'ultima può essere riscritta come modulo per una fase, definendo la quantità $\delta(q)$, come in [2],

$$\Gamma(\mathbf{q}, \omega \pm i\epsilon)^{-1} = |\Gamma(\mathbf{q}, \omega \pm i\epsilon)^{-1}| e^{\pm i\delta(\mathbf{q}, \omega + i\epsilon)} \quad (3.47)$$

allora

$$\begin{aligned} \frac{1}{\beta} \sum_{i\nu_n} \ln(\Gamma^{-1}(\mathbf{q}, i\nu_n)) &= \\ &= -\frac{1}{2\pi} \int_{-\infty}^{+\infty} d\omega n_B(\omega) [\delta(\mathbf{q}, \omega + i\epsilon) + \delta(\mathbf{q}, \omega - i\epsilon)] = \\ &= -\frac{1}{\pi} \int_{-\infty}^{+\infty} d\omega n_B(\omega) \delta(\mathbf{q}, \omega) \end{aligned} \quad (3.48)$$

Dunque la correzione Gaussiana alla densità di particelle può essere riscritta come

$$n^{(2)} = +\frac{1}{\beta\Omega} \frac{\partial}{\partial \mu} Tr(\ln(\Gamma^{-1})) = +\frac{1}{\pi\Omega} \sum_{\mathbf{q}} \int_{-\infty}^{+\infty} d\omega n_B(\omega) \frac{\partial \delta(\mathbf{q}, \omega)}{\partial \mu} \quad (3.49)$$

$$n_{Gauss} = n^{(0)} + \frac{1}{\pi\Omega} \sum_{\mathbf{q}} \int_{-\infty}^{+\infty} d\omega n_B(\omega) \frac{\partial \delta(\mathbf{q}, \omega)}{\partial \mu} \quad (3.50)$$

Sono state ricavate dunque l'azione effettiva e la densità di particelle a due ordini di approssimazione, più la gap equation. Quest'ultima e l'equazione numero (nei due ordini) devono essere risolte simultaneamente per ricavare la dipendenza di $\mu(T_c)$ e T_c dall'accoppiamento g . Tuttavia ciò non è immediatamente possibile a causa della divergenza introdotta dal potenziale di contatto. Nei due capitoli successivi verrà trattata la soluzione a questo sistema, prima analiticamente fin dove possibile e poi computazionalmente.

Capitolo 4

Il crossover BCS-BEC

Il riferimento principale a quanto verrà svolto in questo capitolo è [3], partendo dalla teoria sviluppata precedentemente. L'obiettivo è riuscire a ricavare gli andamenti di potenziale chimico e temperatura critica del sistema nei limiti di accoppiamento debole e forte. Ciò verrà fatto sfruttando la **gap equation** e l'espansione ottenuta per il potenziale gran canonico del sistema, al primo e al secondo ordine. Nella sezione 2.1.4 si è mostrato come un potenziale di contatto efficace come quello usato nel capitolo precedente ($V(\mathbf{r}) = -g\delta(\mathbf{r})$) riproduca le stesse proprietà di scattering di un potenziale realistico, nel limite a basse energie, se g soddisfa la seguente relazione con la lunghezza di scattering a_s :

$$\frac{m}{4\pi a_s} = -\frac{1}{g} + \frac{1}{\Omega} \sum_{\mathbf{k}} \frac{1}{2\epsilon_{\mathbf{k}}} \quad (4.1)$$

Sostituire l'accoppiamento g nella gap equation (3.18) significa perciò connettere il modello giocattolo trattato finora con un gas ultrafreddo realistico; questo tramite la lunghezza di scattering a_s , parametro sperimentalmente misurabile. Tale sostituzione nella gap equation porta a:

$$-\frac{m}{4\pi a_s} = \frac{1}{\Omega} \sum_{\mathbf{k}} \left(\frac{\tanh(\xi_{\mathbf{k}}/2T_c)}{2\xi_{\mathbf{k}}} - \frac{1}{2\epsilon_{\mathbf{k}}} \right) \quad (4.2)$$

Un punto altrettanto importante è che la divergenza nella gap equation è cancellata esattamente dalla divergenza in (4.1); tale sostituzione dunque rappresenta anche una procedura di rinormalizzazione del potenziale di contatto piuttosto elegante. I limiti di accoppiamento forte ($g \rightarrow \infty$) e debole ($g \rightarrow 0$) devono essere rivisti in funzione di a_s e per farlo è utile introdurre un cut-off Λ

$$\frac{m}{4\pi a_s} = -\frac{1}{g} + \frac{1}{\Omega} \sum_{|\mathbf{k}| < \Lambda} \frac{1}{2\epsilon_{\mathbf{k}}} \quad (4.3)$$

Nel limite $g \rightarrow 0$ il cut-off può essere mandato all'infinito e la lunghezza di scattering, come funzione di g , tende a:

$$\text{Limite BCS} \quad \frac{1}{a_s} \rightarrow -\infty \quad (4.4)$$

. Nel limite $g \rightarrow \infty$ si ottiene invece:

$$\frac{m}{4\pi a_s} = \frac{1}{\Omega} \sum_{|k| < \Lambda} \frac{1}{2\epsilon_{\mathbf{k}}} = \frac{1}{2\pi^2} \int_0^\Lambda dk \frac{k^2}{2\epsilon_{\mathbf{k}}} = \frac{m}{2\pi^2} \int_0^\Lambda dk = \frac{m}{2\pi^2} \Lambda$$

Mandando il cut-off all'infinito il limite di interazione forte può essere catturato considerando

$$\text{Limite BEC} \quad \frac{1}{a_s} \rightarrow +\infty \quad (4.5)$$

La lunghezza di scattering è una proprietà intrinseca di un potenziale e dunque a priori non modificabile; tuttavia nei capitoli introduttivi si è visto come sfruttando il meccanismo della risonanza di Feshback (sezione 2.3), ovvero variando un campo magnetico omogeneo a cavallo di una risonanza *larga*, la lunghezza di scattering effettiva possa essere variata su un ampio intervallo.

4.1 Campo medio, ordine 0

L'obiettivo è dunque risolvere contemporaneamente le due equazioni nei due limiti.

$$-\frac{m}{4\pi a_s} = \frac{1}{\Omega} \sum_{\mathbf{k}} \left(\frac{\tanh(\xi_{\mathbf{k}}/2T_c)}{2\xi_{\mathbf{k}}} - \frac{1}{2\epsilon_{\mathbf{k}}} \right) \quad (4.6)$$

$$N = \sum_{\mathbf{k}} \left[1 - \tanh \left(\frac{\xi_{\mathbf{k}}}{2T_c} \right) \right] \quad (4.7)$$

4.1.1 Accoppiamento debole

Si comincia col trattare l'equazione (4.7) che a causa del livello di approssimazione risulta nient'altro che l'equazione per il numero di particelle di un gas di Fermioni liberi per cui, a basse temperature è ben nota l'espansione di Sommerfield. Si effettua il passaggio al

limite del continuo $\sum_{\mathbf{k}} \rightarrow \frac{\Omega}{2\pi^3} \int d^3k$, il cambio variabili $\epsilon = \frac{k^2}{2m}$ e la ridefinizione $x_0 = \frac{\mu}{T_c}$

$$\begin{aligned} &= \frac{(2m)^{\frac{3}{2}}}{2\pi^2} \int_0^\infty \frac{\sqrt{\epsilon}}{e^{\frac{\epsilon-\mu}{T_c}} + 1} d\epsilon = \\ &= \frac{(2mT_c)^{\frac{3}{2}}}{2\pi^2} \int_0^\infty \frac{\sqrt{x}}{e^{x-x_0} + 1} dx = \frac{(2mT_c)^{\frac{3}{2}}}{2\pi^2} \int_{-x_0}^\infty \frac{(y+x_0)^{\frac{1}{2}}}{e^y + 1} dy = \\ &= \frac{(2mT_c)^{\frac{3}{2}}}{2\pi^2} \left[\int_0^\infty \frac{(y+x_0)^{\frac{1}{2}}}{e^y + 1} dy + \int_0^{x_0} \frac{(x_0-y)^{\frac{1}{2}}}{e^{-y} + 1} dy \right] = \end{aligned}$$

dove l'integrale è stato spezzato in due. Si sfrutta inoltre la relazione

$$(e^{-y} + 1)^{-1} = 1 - (e^y + 1)^{-1}$$

ottenendo

$$\begin{aligned} &= \frac{(2mT_c)^{\frac{3}{2}}}{2\pi^2} \left[\int_0^\infty \frac{(y+x_0)^{\frac{1}{2}}}{e^y + 1} dy + \int_0^{x_0} (x_0-y)^{\frac{1}{2}} dy - \int_0^{x_0} \frac{(x_0-y)^{\frac{1}{2}}}{e^y + 1} dy \right] = \\ &= \frac{(2mT_c)^{\frac{3}{2}}}{2\pi^2} \left[\int_0^\infty \frac{(x_0+y)^{\frac{1}{2}} - (x_0-y)^{\frac{1}{2}}}{e^y + 1} dy + \int_0^{x_0} (x_0-y)^{\frac{1}{2}} dy - \int_{x_0}^\infty \frac{(x_0-y)^{\frac{1}{2}}}{e^y + 1} dy \right] = \end{aligned}$$

Si cercano nel limite $T \rightarrow 0$ o $x_0 \rightarrow \infty$ i contributi più rilevanti. Per questo motivo l'ultimo integrale, proporzionale a e^{-x_0} , verrà trascurato.

$$\begin{aligned} &= \frac{(2mT_c)^{\frac{3}{2}}}{2\pi^2} \left[\int_0^\infty x_0^{\frac{1}{2}} \frac{1 + \frac{y}{2x_0} - 1 + \frac{y}{2x_0} + o(x_0^{-3})}{e^y + 1} dy - \frac{2}{3} (x_0-y)^{\frac{3}{2}} \Big|_0^{x_0} \right] = \\ &= \frac{(2mT_c)^{\frac{3}{2}}}{2\pi^2} \left[\frac{2}{3} x_0^{\frac{3}{2}} + x_0^{-\frac{1}{2}} \int_0^\infty \frac{y}{e^y + 1} dy + o(x_0^{-\frac{5}{2}}) \right] = \\ &= \frac{(2mT_c)^{\frac{3}{2}}}{2\pi^2} \left[\frac{2}{3} x_0^{\frac{3}{2}} + \frac{\pi^2}{12} x_0^{-\frac{1}{2}} + o(x_0^{-\frac{5}{2}}) \right] \end{aligned}$$

sostituendo $x_0 = \mu/T_c$ otteniamo l'espansione per la densità di particelle nel limite a basse temperature

$$n = (2m)^{\frac{3}{2}} \left[\frac{1}{3\pi^2} \mu^{\frac{3}{2}} + \frac{1}{24} \frac{T_c^2}{\mu^{1/2}} + o(T_c^4) \right] \quad (4.8)$$

A densità fissata $n = \frac{(2m\epsilon_F)^{3/2}}{3\pi^2}$ questa equazione di stato implica una relazione tra potenziale chimico e temperatura

$$\epsilon_F^{3/2} = \mu^{\frac{3}{2}} + \frac{\pi^2}{8} \frac{T_c^2}{\mu^{1/2}} + o(T_c^4)$$

esplicitando la dipendenza del potenziale chimico a basse temperature

$$\mu = \epsilon_F - \frac{\pi^2 T_c^2}{12 \epsilon_F} + o(T_c^4)$$

Al primo ordine dunque il potenziale chimico risulta $\mu = \epsilon_F$. È possibile sfruttare questo risultato per risolvere la gap equation (4.6), come mostrato in [21]. Se il potenziale chimico può essere considerato costante, l'equazione diventa autoconsistente nel determinare l'andamento della temperatura critica in funzione della lunghezza di scattering. Partendo dalla gap equation si effettuano i cambi di variabile $\epsilon = \frac{k^2}{2m}$ e $x = \frac{\epsilon}{2T_c}$ e la sostituzione $\tilde{\mu} = \frac{\mu}{2T_c}$

$$\begin{aligned} -\frac{m}{4\pi a_s} &= \frac{1}{\Omega} \sum_{\mathbf{k}} \left(\frac{\tanh(\xi_{\mathbf{k}}/2T_c)}{2\xi_{\mathbf{k}}} - \frac{1}{2\epsilon_{\mathbf{k}}} \right) = \\ &= \frac{1}{2\pi^2} \int_0^\infty dk k^2 \left(\frac{\tanh(\xi_{\mathbf{k}}/2T_c)}{2\xi_{\mathbf{k}}} - \frac{1}{2\epsilon_{\mathbf{k}}} \right) = \\ &= \frac{\sqrt{2}m^{3/2}}{4\pi^2} \int_0^\infty d\epsilon \sqrt{\epsilon} \left(\frac{\tanh((\epsilon - \epsilon_F)/2T_c)}{\epsilon - \epsilon_F} - \frac{1}{\epsilon} \right) = \\ &= \frac{m^{3/2}T_c^{1/2}}{2\pi^2} \int_0^\infty dx \sqrt{x} \left(\frac{\tanh(x - \tilde{\mu})}{x - \tilde{\mu}} - \frac{1}{x} \right) = \\ &= \frac{m^{3/2}T_c^{1/2}}{2\pi^2} \sqrt{\tilde{\mu}} \int_0^\infty dy \sqrt{y} \left(\frac{\tanh(\tilde{\mu}(y - 1))}{y - 1} - \frac{1}{y} \right) \end{aligned}$$

Il risultato si semplifica ulteriormente esplicitando $\tilde{\mu} = \epsilon_F/2T_c$

$$-\frac{\pi}{k_F a_s} = \int_0^\infty dy \sqrt{y} \left(\frac{\tanh(\tilde{\mu}(y - 1))}{y - 1} - \frac{1}{y} \right)$$

Si fissa un cut-off Λ che successivamente verrà mandato all'infinito e si sfrutta l'identità

$$\frac{\sqrt{y}}{y - 1} = \frac{1}{\sqrt{y} + 1} + \frac{1}{y - 1}$$

L'integrale può essere allora spezzato in due

$$\begin{aligned} \int_0^\Lambda dy \sqrt{y} \left(\frac{\tanh(\tilde{\mu}(y - 1))}{y - 1} - \frac{1}{y} \right) &= \\ &= \underbrace{\int_0^\Lambda dy \left(\frac{\tanh(\tilde{\mu}(y - 1))}{\sqrt{y} + 1} - \frac{1}{\sqrt{y}} \right)}_{\mathbf{A}} + \underbrace{\int_0^\Lambda dy \frac{\tanh(\tilde{\mu}(y - 1))}{y - 1}}_{\mathbf{B}} = \end{aligned}$$

integrale A: Nel limite in cui $\tilde{\mu}$ è grande

$$\tanh(\tilde{\mu}(y - 1)) \underset{\tilde{\mu} \rightarrow \infty}{\sim} 1 - 2\theta(1 - y) \quad (4.9)$$

Tale approssimazione per valutare l'integrale ha senso solo se il resto dell'integrando è regolare dove la $\theta(1-y)$ ha una discontinuità. Con un po' di passaggi

$$\begin{aligned}
& \int_0^\Lambda dy \left(\frac{\tanh(\tilde{\mu}(y-1))}{\sqrt{y}+1} - \frac{1}{\sqrt{y}} \right) \underset{\tilde{\mu} \rightarrow \infty}{\sim} \int_0^\Lambda dy \left(\frac{1-2\theta(1-y)}{\sqrt{y}+1} - \frac{1}{\sqrt{y}} \right) = \\
& = - \int_0^1 dy \left(\frac{1}{\sqrt{y}+1} + \frac{1}{\sqrt{y}} \right) + \int_1^\Lambda dy \left(\frac{1}{\sqrt{y}+1} - \frac{1}{\sqrt{y}} \right) = \\
& = -2 \int_0^1 dz z \left(\frac{1}{z+1} + \frac{1}{z} \right) = - \int_1^\Lambda dy \left(\frac{1}{\sqrt{y}(\sqrt{y}+1)} \right) = \\
& = -2 \int_0^1 dz \left(2 - \frac{1}{z+1} \right) = -2 \ln(1+\sqrt{y}) \Big|_1^\Lambda = \\
& = -4 + 2\ln(2) - 2\ln(1+\sqrt{\Lambda}) + 2\ln(2) \approx -4 + 4\ln(2) - 2\ln(1+\sqrt{\Lambda})
\end{aligned}$$

integrale B:

$$\begin{aligned}
& \int_0^\Lambda dy \frac{\tanh(\tilde{\mu}(y-1))}{y-1} = \\
& = \int_0^1 dy \frac{\tanh(\tilde{\mu}y)}{y} + \int_0^{\Lambda-1} dy \frac{\tanh(\tilde{\mu}y)}{y} = \\
& = \ln(|y|) \tanh(\tilde{\mu}y) \Big|_0^1 - \tilde{\mu} \int_0^1 dy \frac{\ln(x)}{\cosh^2(\tilde{\mu}y)} + \\
& = \ln(|y|) \tanh(\tilde{\mu}y) \Big|_0^{\Lambda-1} - \tilde{\mu} \int_0^{\Lambda-1} dy \frac{\ln(x)}{\cosh^2(\tilde{\mu}y)} \approx \\
& \approx - \int_0^{\tilde{\mu}} dz \frac{\ln(z/\tilde{\mu})}{\cosh^2(z)} + \ln(|\Lambda-1|) - \int_0^{\tilde{\mu}(\Lambda-1)} dz \frac{\ln(z/\tilde{\mu})}{\cosh^2(z)} \approx \\
& \approx 2\ln(\sqrt{\Lambda-1}) - 2 \int_0^\infty dz \frac{\ln(z)}{\cosh^2(z)} + 2\ln(\tilde{\mu}) \int_0^\infty dz \frac{1}{\cosh^2(z)} = \\
& = 2\ln(\sqrt{\Lambda-1}) - 2\ln\left(\frac{4\pi}{\gamma}\right) + 2\ln(\tilde{\mu}) = \\
& = 2\ln(\sqrt{\Lambda-1}) + 2\ln\left(\frac{\tilde{\mu}\gamma}{4\pi}\right)
\end{aligned}$$

Con $\gamma = e^{\gamma_{\text{EM}}} \approx 1,781$ e $\gamma_{\text{EM}} = - \int_0^\infty \ln(x)e^{-x} \approx 0.577$ la nota costante di Eulero-Mascheroni. Il risultato è dunque, a $\mu = \epsilon_F$ e $T_c \rightarrow 0$

$$\begin{aligned}
& \int_0^\Lambda dy \sqrt{y} \left(\frac{\tanh(\tilde{\mu}(y-1))}{y-1} - \frac{1}{y} \right) = \\
& = -4 + 4\ln(2) - 2\ln(1+\sqrt{\Lambda}) + 2\ln(\sqrt{\Lambda-1}) + 2\ln\left(\frac{4\tilde{\mu}\gamma}{\pi}\right) \Big|_{\Lambda \rightarrow \infty} = 2\ln\left(\frac{16\gamma\tilde{\mu}e^{-2}}{\pi}\right)
\end{aligned}$$

Mettendo insieme tutti i passaggi il risultato:

$$-\frac{\pi}{2k_F a_s} = \ln\left(\frac{8\gamma\epsilon_F e^{-2}}{\pi T_c}\right)$$

$$T_c = 8 \frac{\gamma}{\pi} e^{-2} \epsilon_F e^{\frac{\pi}{2k_F a_s}}$$

da cui, nel limite $1/k_F a_s \rightarrow -\infty$ risulta:

$$T_c = 8e^{-2} \gamma \pi^{-1} \epsilon_F e^{-\frac{\pi}{2k_F |a_s|}} \quad (4.10)$$

Si trova dunque una temperatura critica esponenzialmente soppressa nel limite di accoppiamento debole, compatibilmente con la teoria BCS classica.

4.1.2 Accoppiamento forte

Nel caso dell'accoppiamento forte il ruolo delle due equazioni risulta invertito, verrà sfruttata (4.6) per ricavare il potenziale chimico del sistema. In questo caso ci si attende di trovare un μ grande e negativo, tipico di un sistema di bosoni liberi; in particolare che $|\mu(T_c)| \gg T_c$. In maniera simile al caso precedente si definisce $\tilde{\mu} = -\frac{\mu(T_c)}{2T_c}$. Sfruttando questo ansatz, la cui validità verrà verificata a posteriori vogliamo risolvere

$$-\frac{m}{4\pi a_s} = \frac{m^{3/2} T_c^{1/2}}{2\pi^2} \int_0^\infty dx \sqrt{x} \left(\frac{\tanh(x + \tilde{\mu})}{x + \tilde{\mu}} - \frac{1}{x} \right) \quad (4.11)$$

Sull'intervallo di integrazione e per $\tilde{\mu} \gg 1$ è lecito approssimare l'integrando a

$$\frac{\tanh(x + \tilde{\mu})}{x + \tilde{\mu}} \approx \frac{1}{x + \tilde{\mu}}$$

dunque

$$\begin{aligned} -\frac{m}{4\pi a_s} &\approx \frac{m^{3/2} T_c^{1/2}}{2\pi^2} \int_0^\infty dx \sqrt{x} \left(\frac{1}{x + \tilde{\mu}} - \frac{1}{x} \right) = \\ &= \frac{m^{3/2} T_c^{1/2}}{2\pi^2} \sqrt{\tilde{\mu}} \int_0^\infty dy \sqrt{y} \left(\frac{1}{y+1} - \frac{1}{y} \right) = \frac{m^{3/2}}{2\pi^2} \sqrt{-\mu} \int_0^\infty dy \frac{\sqrt{y}}{y(y+1)} = \end{aligned}$$

L'integrale a destra è noto

$$\int_0^\infty dy \frac{\sqrt{y}}{y(y+1)} = 2 |\arctan(\sqrt{y})|_0^\infty = \pi$$

Semplificando

$$-\frac{1}{\sqrt{2} m^{1/2} a_s} \approx \sqrt{-\mu}$$

Si ottiene la relazione tra potenziale chimico e lunghezza di scattering nel limite di accoppiamento forte

$$\mu = -\frac{1}{2ma_s^2} \quad (4.12)$$

Si ricorda inoltre quanto ottenuto nella sezione 2.1.3, dove si è mostrato che per lunghezze di scattering negative, il problema a due corpi nel regime a basse energie ammette l'esistenza di uno stato legato di energia $E_b = -\frac{1}{ma_s^2}$. Quanto ottenuto dunque mostra che il potenziale chimico $\mu = -\frac{1}{2ma_s^2} := -\frac{E_b}{2}$. Tale risultato può essere sfruttato nell'equazione per il numero di particelle per ricavare la temperatura critica. Riscrivendo l'equazione (4.7) e sfruttando il risultato ottenuto precedentemente

$$n = \frac{(2m)^{\frac{3}{2}}}{2\pi^2} \int \frac{\sqrt{\epsilon}}{e^{\frac{\epsilon-\mu}{T_c}} + 1} d\epsilon = \frac{(2mT_c)^{\frac{3}{2}}}{2\pi^2} \int_0^{\tilde{x}} \frac{\sqrt{x}}{e^{x+\tilde{\mu}} + 1} dx =$$

nel limite in cui $\tilde{\mu} \gg 1$

$$\begin{aligned} &= \frac{(2mT_c)^{\frac{3}{2}}}{2\pi^2} \int_0^{\tilde{x}} \frac{\sqrt{x}}{e^{x+\tilde{\mu}} + 1} dx \approx \frac{(2mT_c)^{\frac{3}{2}}}{2\pi^2} e^{-\tilde{\mu}} \int_0^{\tilde{x}} \sqrt{x} e^{-x} dx = \\ &= \frac{(2mT_c)^{\frac{3}{2}}}{2\pi^2} e^{-\tilde{\mu}} \underbrace{\int_0^{\tilde{x}} \sqrt{x} e^{-x} dx}_{\frac{\pi}{2}} = \frac{(2mT_c)^{\frac{3}{2}}}{4\pi} e^{-\frac{E_b}{2T_c}} \end{aligned}$$

A densità di particelle fissata lungo il crossover $n = \frac{(2m\epsilon_F)^{3/2}}{3\pi^2}$

$$\begin{aligned} \frac{(2m\epsilon_F)^{\frac{3}{2}}}{3\pi^2} &= \frac{(2mT_c)^{\frac{3}{2}}}{4\pi} e^{-\frac{E_b}{2T_c}} \\ \left(\frac{\epsilon_F}{E_b}\right)^{\frac{3}{2}} &\propto \left(\frac{T_c}{E_b}\right)^{\frac{3}{2}} e^{-\frac{E_b}{2T_c}} \end{aligned}$$

Nel limite di accoppiamento forte $\frac{\epsilon_F}{E_b} \ll 1$ domina l'andamento esponenziale e approssimativamente

$$\left(\frac{\epsilon_F}{E_b}\right)^{\frac{3}{2}} \approx e^{-\frac{E_b}{2T_c}}$$

ovvero un andamento della temperatura critica

$$\frac{T_c}{\epsilon_F} \approx \frac{E_b/\epsilon_F}{2 \ln \left[(E_b/\epsilon_F)^{\frac{3}{2}} \right]} \quad (4.13)$$

Non è interessante raffinare tale risultato nel caso di accoppiamento forte poiché non descrive una transizione di fase, ma la temperatura alla quale le coppie di Cooper si rompono a causa delle fluttuazioni termiche; la condizione a cui è stata ricavata infatti corrisponde all'annullarsi della gap omogenea, $\Delta(T_c) = 0$ in un sistema di fermioni liberi descritto dall'equazione numero (4.7). È naturale dunque che all'aumentare della forza dell'interazione questa approssimazione fallisca. Questo è confermato da un rapido conto di meccanica statistica. Ad accoppiamenti forti, in questa approssimazione infatti si otterrebbe $T_c/\epsilon_F > 1$ portando il gas fuori dal regime di degenerazione. È possibile

stimare allora la temperatura alla quale una frazione fissata di coppie di Fermioni risultano slegate. Ad alte temperature si può descrivere questo sistema a due componenti con delle distribuzioni di Boltzmann e imporre la condizione di equilibrio chimico $\mu_b = 2\mu_f$; quello che si trova è che questa temperatura di dissociazione risulta

$$\frac{T_{\text{diss}}}{\epsilon_F} \approx \frac{E_b/\epsilon_F}{\ln \left[(E_b/\epsilon_F)^{\frac{3}{2}} \right]}$$

Quanto ottenuto in (4.13) è in realtà frutto della nostra approssimazione sull'azione del sistema. Risulta necessario dunque andare a guardare le fluttuazioni Gaussiane del campo Δ attorno alla soluzione di *saddle point*.

4.2 Inclusione delle fluttuazioni Gaussiane

L'azione al second'ordine è stata ricavata precedentemente

$$S_{\text{Gauss}}[\Delta] = S_{\text{eff}}[0] + \sum_q \Gamma^{-1}(q) \Delta^2(q) \quad (4.14)$$

con

$$\Gamma^{-1}(q) = \frac{1}{g} + \frac{1}{\Omega} \sum_{\mathbf{k}} \frac{1 - n_F(\xi_{\mathbf{k}}) - n_F(\xi_{\mathbf{k}-\mathbf{q}})}{i\alpha_n - \xi_{\mathbf{k}} - \xi_{\mathbf{k}-\mathbf{q}}} \quad (4.15)$$

Applicando la sostituzione (4.1), in funzione della lunghezza di scattering

$$\Gamma^{-1}(q) = \frac{1}{\Omega} \sum_{\mathbf{k}} \left[\frac{1 - n_F(\xi_{\mathbf{k}}) - n_F(\xi_{\mathbf{k}-\mathbf{q}})}{i\alpha_n - \xi_{\mathbf{k}} - \xi_{\mathbf{k}-\mathbf{q}}} + \frac{1}{2\epsilon_{\mathbf{k}}} \right] - \frac{m}{4\pi a_s} \quad (4.16)$$

4.2.1 Calcolo di $\Gamma(q)^{-1}$

È possibile riscrivere la $\Gamma^{-1}(q)$ con un po' di passaggi. Tale manipolazione è importante sia ai fini del calcolo delle proprietà del gas nei due limiti valutabili analiticamente sia per calcolarla computazionalmente.

$$\Gamma^{-1}(q) = - \left\{ \frac{m}{4\pi a_s} + \frac{1}{\Omega} \sum_{\mathbf{k}} \left[\frac{1 - n_F(\xi_{\mathbf{k}}) - n_F(\xi_{\mathbf{k}-\mathbf{q}})}{\xi_{\mathbf{k}} + \xi_{\mathbf{k}-\mathbf{q}} - i\alpha_n} - \frac{1}{2\epsilon_{\mathbf{k}}} \right] \right\} \quad (4.17)$$

Esplicitando il denominatore

$$\xi_{\mathbf{k}} + \xi_{\mathbf{k}-\mathbf{q}} - i\alpha_n = \frac{k^2}{m} - \frac{kq \cos(\theta)}{m} + \frac{q^2}{2m} - 2\mu - i\alpha_n \quad (4.18)$$

Con un cambio di variabili è possibile rendere il denominatore indipendente dal prodotto scalare $\mathbf{k} \cdot \mathbf{q} = kq \cos(\theta)$, infatti ponendo $\tilde{\mathbf{k}} = \mathbf{k} - \mathbf{q}/2$ e successivamente rinominando

$\tilde{\mathbf{k}} \rightarrow \mathbf{k}$ si ottiene, operando solo sul primo termine ¹

$$\Gamma^{-1}(q) = - \left\{ \frac{m}{4\pi a_s} + \frac{1}{\Omega} \sum_{\mathbf{k}} \left[\frac{1 - n_{\mathbb{F}}(\xi_{\mathbf{k}+\mathbf{q}/2}) - n_{\mathbb{F}}(\xi_{\mathbf{k}-\mathbf{q}/2})}{\xi_{\mathbf{k}+\mathbf{q}/2} + \xi_{\mathbf{k}-\mathbf{q}/2} - i\alpha_n} - \frac{1}{2\epsilon_{\mathbf{k}}} \right] \right\} \quad (4.19)$$

Il tutto risulta invariante sotto la sostituzione $\mathbf{k} \rightarrow -\mathbf{k}$. Riscrivendo in modo più compatto.

$$\begin{aligned} \Gamma^{-1}(q) &= - \left\{ \frac{m}{4\pi a_s} + \frac{1}{\Omega} \sum_{\mathbf{k}} \left[\frac{1 - 2n_{\mathbb{F}}(\xi_{\mathbf{k}+\mathbf{q}/2})}{\xi_{\mathbf{k}+\mathbf{q}/2} + \xi_{\mathbf{k}-\mathbf{q}/2} - i\alpha_n} - \frac{1}{2\epsilon_{\mathbf{k}}} \right] \right\} = \\ &= - \left\{ \frac{m}{4\pi a_s} + \frac{1}{\Omega} \sum_{\mathbf{k}} \left[\frac{\tanh\left(\frac{\xi_{\mathbf{k}+\mathbf{q}/2}}{2T_c}\right)}{\xi_{\mathbf{k}+\mathbf{q}/2} + \xi_{\mathbf{k}-\mathbf{q}/2} - i\alpha_n} - \frac{1}{2\epsilon_{\mathbf{k}}} \right] \right\} \end{aligned} \quad (4.20)$$

avendo sfruttato la nota relazione $1 - 2n_{\mathbb{F}}(x) = \tanh(x/2)$. Passando al limite del continuo

$$\begin{aligned} \Gamma^{-1}(q) &= - \left\{ \frac{m}{4\pi a_s} + \frac{1}{(2\pi)^3} \int d^3k \left[\frac{\tanh\left(\frac{\xi_{\mathbf{k}+\mathbf{q}/2}}{2T_c}\right)}{\xi_{\mathbf{k}+\mathbf{q}/2} + \xi_{\mathbf{k}-\mathbf{q}/2} - i\alpha_n} - \frac{1}{2\epsilon_{\mathbf{k}}} \right] \right\} = \\ &= - \left\{ \frac{m}{4\pi a_s} + \frac{2\pi}{(2\pi)^3} \int_{-1}^1 d(\cos(\theta)) \int dk k^2 \left[\frac{\tanh\left(\frac{\xi_{\mathbf{k}+\mathbf{q}/2}}{2T_c}\right)}{\xi_{\mathbf{k}+\mathbf{q}/2} + \xi_{\mathbf{k}-\mathbf{q}/2} - i\alpha_n} - \frac{1}{2\epsilon_{\mathbf{k}}} \right] \right\} \end{aligned} \quad (4.21)$$

esplicitando la dipendenza da k :

$$\begin{aligned} \Gamma^{-1}(q) &= - \left\{ \frac{m}{4\pi a_s} + \right. \\ &\quad \left. \frac{m}{(2\pi)^2} \int_{-1}^1 d(\cos(\theta)) \int dk k^2 \left[\frac{\tanh\left(\frac{k^2+q^2/4-2m\mu+kq \cos(\theta)}{4mT_c}\right)}{k^2 + q^2/4 - 2m\mu - im\alpha_n} - \frac{1}{k^2} \right] \right\} \end{aligned} \quad (4.22)$$

La dipendenza dal $\cos(\theta)$ è solo nella tangente iperbolica, è possibile dunque valutare l'integrale:

$$\begin{aligned} \int_{-1}^1 d(\cos(\theta)) \tanh\left(\frac{\xi_{\mathbf{k}+\mathbf{q}/2}}{2T_c}\right) &= \\ &= \int_{-1}^1 d(\cos(\theta)) \tanh\left(\frac{k^2 + \frac{q^2}{4} + kq \cos(\theta) - 2m\mu}{4mT_c}\right) = \\ &= \frac{4mT_c}{kq} \left[\ln\left(\cosh\left(\frac{(k+q/2)^2}{2m} - \mu\right)\right) - \ln\left(\cosh\left(\frac{(k-q/2)^2}{2m} - \mu\right)\right) \right] \end{aligned} \quad (4.23)$$

¹La sommatoria è su tutti i \mathbf{k} , risulta dunque equivalente sommare su $\mathbf{k} + \mathbf{q}/2$.

poiché è noto l'integrale

$$\int_{-1}^1 dx \tanh(a + bx) = \frac{1}{b} [\ln(\cosh(a + b)) - \ln(\cosh(a - b))] \quad (4.24)$$

Per semplificare la notazione è possibile definire

$$\ln \left(\cosh \left(\frac{\frac{(k+q/2)^2}{2m} - \mu}{2T_c} \right) \right) := A(k, q) \quad (4.25)$$

Allora sostituendo questi risultati

$$\Gamma^{-1}(q) = - \left\{ \frac{m}{4\pi a_s} + \frac{m}{(2\pi)^2} \int_0^{+\infty} dk k^2 \left[\frac{4mT_c}{kq} \frac{A(k, q) - A(k, -q)}{k^2 + q^2/4 - 2m\mu - im\alpha_n} - \frac{2}{k^2} \right] \right\} \quad (4.26)$$

L'integrale scritto sopra va trattato con i metodi dell'analisi complessa, in particolare l'integrando presenta un polo semplice in $k_0 = \sqrt{2m\mu + im\alpha_n - \frac{q^2}{4}}$

$$\begin{aligned} \Gamma^{-1}(q) &= - \left\{ \frac{m}{4\pi a_s} + \frac{m}{(2\pi)^2} \int_0^{+\infty} dk k^2 \left[\frac{4mT_c}{kq} \frac{A(k, q) - A(k, -q)}{k^2 - k_0^2} - \frac{2}{k^2} \right] \right\} = \\ &= - \left\{ \frac{m}{4\pi a_s} + \frac{m}{q(2\pi)^2} \int_0^{+\infty} dk \left[\frac{4mT_c k (A(k, q) - A(k, -q)) - 2q(k^2 - k_0^2)}{k^2 - k_0^2} \right] \right\} = \\ &= - \left\{ \frac{m}{4\pi a_s} + \frac{m}{q(2\pi)^2} i\pi \operatorname{Res}(\cdot, k_0) \right\} = \\ &= - \left\{ \frac{m}{4\pi a_s} + \frac{m}{q(2\pi)^2} (i\pi) \frac{4mT_c k_0 [A(k_0, q) - A(k_0, -q)]}{2k_0} \right\} = \\ &= - \left(\frac{m}{4\pi} \right) \left\{ \frac{1}{a_s} + i \frac{2mT_c}{q} [A(k_0, q) - A(k_0, -q)] \right\} \quad (4.27) \end{aligned}$$

con $A(k_0, q) = \log(\cosh(\frac{(k_0+q/2)^2 - 2m\mu}{4mT_c})) = \log(\cosh(\frac{im\alpha_n \pm k_0 q}{4mT_c}))$ Il risultato è particolarmente interessante perché da questo i limiti che ci interessano sono facilmente ottenibili.

4.2.2 Accoppiamento debole

In questo limite il potenziale chimico è finito e la temperatura critica e la lunghezza di scattering vengono mandati a zero ($a_s \rightarrow 0^-$). È possibile in particolare sfruttare l'andamento asintotico

$$\ln(\cosh(x)) \underset{x \rightarrow \infty}{\sim} x \quad (4.28)$$

Allora:

$$A(k_0, q) - A(k_0, -q) \underset{T \rightarrow 0}{\sim} \left| \frac{\frac{(k_0+q/2)^2}{2m} - \mu}{2T_c} \right| - \left| \frac{\frac{(k_0-q/2)^2}{2m} - \mu}{2T_c} \right| = \frac{|\cdot| - |\cdot|}{2T_c} \quad (4.29)$$

Inserendo questo risultato in $\Gamma^{-1}(q)$ si ottiene

$$\Gamma^{-1}(q) \approx - \left(\frac{m}{4\pi} \right) \left\{ \frac{1}{a_s} + i \frac{m}{q} (|\cdot| - |\cdot|) \right\} \quad (4.30)$$

Questa non dipende più dalla temperatura critica. Con x e y opportunamente definiti si riscrive $\Gamma^{-1}(q) = \frac{1}{a_s} + y + ix$. La parte reale è dominante nel limite di accoppiamento debole ($\frac{1}{k_F a_s} \rightarrow -\infty$). Esplicitando la correzione alla densità di particelle:

$$\begin{aligned} n^{(2)} &= \frac{1}{\beta\Omega} \frac{\partial}{\partial\mu} \sum_{\mathbf{q}, i\nu_n} \ln(\Gamma^{-1}(\mathbf{q}, i\nu)) = \frac{1}{\beta\Omega} \sum_{\mathbf{q}, i\nu_n} \frac{1}{\Gamma^{-1}} \frac{\partial\Gamma^{-1}}{\partial\mu} = \\ &= \frac{1}{\beta\Omega} \sum_{\mathbf{q}, i\nu_n} \frac{1}{\frac{1}{a_s} + y + ix} \frac{\partial(y + ix)}{\partial\mu} \underset{a_s \rightarrow 0^-}{\sim} \frac{a_s}{\beta\Omega} \sum_{\mathbf{q}, i\nu_n} \frac{\partial(y + ix)}{\partial\mu} \propto a_s \end{aligned} \quad (4.31)$$

In tale limite la correzione alla densità di particelle risulta proporzionale alla lunghezza di scattering e dunque trascurabile. Il potenziale chimico che ci si aspetta di trovare è dunque ancora $\mu \approx \epsilon_F$ e poiché l'equazione della gap è la stessa dell'approssimazione di campo medio, nel limite $\frac{1}{k_F a_s} \rightarrow -\infty$ ritroveremo la stessa temperatura critica. L'inclusione delle fluttuazioni Gaussiane cioè non influisce sui risultati ad accoppiamento debole, affermazione che verrà verificata anche computazionalmente.

4.2.3 Accoppiamento forte

Come visto l'equazione per la densità di particelle può risultare complicata da trattare; tuttavia è possibile mostrare che nel limite BEC la funzione di partizione tende a quella di un set di bosoni liberi per il quale la temperatura critica è nota. Ciò, in conclusione sarà la prova definitiva dell'esistenza del crossover. Per dimostrarlo è richiesto un ulteriore sforzo nella manipolazione di Γ^{-1} , ovvero l'applicazione del limite BEC ($\beta\mu \rightarrow -\infty$ e $1/k_F a_s \rightarrow \infty$) al risultato ottenuto in (4.27):

$$\Gamma^{-1}(q) = - \left(\frac{m}{4\pi} \right) \left\{ \frac{1}{a_s} + i \frac{2mT_c}{q} [A(k_0, q) - A(k_0, -q)] \right\} \quad (4.32)$$

Per un potenziale chimico negativo e grande

$$A(k_0, q) = \ln \left(\cosh \left(\frac{(k_0+q/2)^2}{2m} - \mu \right) \right) \underset{\mu \rightarrow -\infty}{\sim} \frac{(k_0+q/2)^2}{2m} - \mu \quad (4.33)$$

Allora

$$A(k_0, q) - A(k_0, -q) \underset{\mu \rightarrow -\infty}{\sim} \frac{(k_0+q/2)^2}{2m} - \mu - \frac{(k_0-q/2)^2}{2m} - \mu = \frac{k_0 q}{2mT_c} \quad (4.34)$$

Inserendo questo risultato in $\Gamma^{-1}(q)$ si ottiene

$$\Gamma^{-1}(q) \approx - \left(\frac{m}{4\pi} \right) \left\{ \frac{1}{a_s} + ik_0 \right\} \quad (4.35)$$

Sfruttando la definizione di energia di legame della coppia $E_b = -\frac{1}{ma_s^2}$, esplicitando k_0 e definendo $\mu_b = 2\mu + E_b$

$$\begin{aligned} \Gamma^{-1}(q) &\approx - \left(\frac{m^{3/2}}{4\pi} \right) \left\{ \sqrt{-E_b} + i\sqrt{2\mu + i\alpha_n - \frac{q^2}{4m}} \right\} = \\ &= - \left(\frac{m^{3/2}}{4\pi} \right) \left\{ \frac{-E_b + 2\mu + i\alpha_n - \frac{q^2}{4m}}{\sqrt{-E_b} - i\sqrt{2\mu + i\alpha_n - \frac{q^2}{4m}}} \right\} \end{aligned} \quad (4.36)$$

in conclusione razionalizzando nel limite di accoppiamento forte e definendo un potenziale chimico effettivo per i bosoni $\mu_B := 2\mu - E_b$

$$\Gamma^{-1}(q) \approx \frac{i\alpha_n - \left(\frac{q^2}{4m} - \mu_B \right)}{R(q)} \quad (4.37)$$

La funzione di partizione assume dunque la forma

$$\begin{aligned} \mathcal{Z}_{Gauss} &= \mathcal{Z}_0 \int [D\Delta^*][D\Delta] e^{-\sum_q \Gamma^{-1}(q) \Delta^2(q)} \approx \\ &\approx \mathcal{Z}_0 \int [D\Delta^*][D\Delta] e^{-\sum_q \Delta^*(q) \frac{i\alpha_n - \left(\frac{q^2}{4m} - \mu_B \right)}{R(q)} \Delta(q)} \end{aligned} \quad (4.38)$$

Riscalando i campi $\phi(q) = \frac{\Delta(q)}{\sqrt{R(q)}}$ e definendo $m_B = 2m$ la funzione di partizione che ne risulta è proporzionale a quella di un set di bosoni liberi di massa m_B

$$\mathcal{Z}_{Gauss} \propto \int [D\phi^*][D\phi] e^{-\sum_q \phi^*(q) \left[i\alpha_n - \left(\frac{q^2}{2m_B} - \mu_B \right) \right] \phi(q)} \quad (4.39)$$

È nota la temperatura di condensazione di Bose-Einstein per questo tipo di sistemi in funzione della densità e della massa:

$$T_c = \frac{2\pi}{m_B} \left(\frac{n_B}{2\zeta(3/2)} \right)^{\frac{2}{3}} \quad (4.40)$$

Se nel regime BEC tutti i Fermioni sono accoppiati $n_B = n/2$; nel nostro caso inoltre se la densità di Fermioni è fissata da $n = \frac{(2m\epsilon_F)^{2/3}}{3\pi^2}$, allora

$$T_c = \frac{2\pi}{m_B} \left(\frac{n_B}{2\zeta(3/2)} \right)^{\frac{2}{3}} = \frac{\pi}{m} \left(\frac{(2m\epsilon_F)^{3/2}}{6\pi^2\zeta(3/2)} \right)^{\frac{2}{3}} \quad (4.41)$$

$$T_c = 2\pi \left(\frac{1}{6\pi^2 \zeta(3/2)} \right)^{\frac{2}{3}} \epsilon_F \approx 0.218 \epsilon_F \quad (4.42)$$

Consistente con queste conclusioni è anche che il potenziale chimico Bosonico nel limite di accoppiamento forte

$$\mu_B(T_c) = 2\mu(T_c) - E_b \xrightarrow{\frac{1}{k_F a_s} \rightarrow \infty} 0 \quad (4.43)$$

consistentemente a quanto ci si aspetta per un set di Bosoni liberi nel punto critico.

4.3 Calcolo Numerico

Questa sezione è dedicata agli algoritmi implementati per risolvere l'equazione numero e l'equazione gap. Per tutti gli integrali da risolvere numericamente sono stati scelti i metodi implementati nelle librerie del progetto GSL - GNU Scientific Library ². In particolare si tratta di una traduzione in linguaggio C delle routine di QUADPACK, libreria del FORTRAN 77 per l'integrazione numerica di funzioni a variabile singola.

4.3.1 Campo medio

Le due equazioni

$$-\frac{m}{4\pi a_s} = \frac{1}{\Omega} \sum_{\mathbf{k}} \left(\frac{\tanh(\xi_{\mathbf{k}}/2T_c)}{2\xi_{\mathbf{k}}} - \frac{1}{2\epsilon_{\mathbf{k}}} \right) \quad (4.44)$$

$$n = \frac{1}{\Omega} \sum_{\mathbf{k}} \left[1 - \tanh\left(\frac{\xi_{\mathbf{k}}}{2T_c}\right) \right] \quad (4.45)$$

vengono manipolate passando al limite del continuo e definendo $y = \frac{1}{k_F a_s}$, $\tilde{\mu} = \frac{\mu}{2T_c}$ a densità costante $n = \frac{(2m\epsilon_F)^{3/2}}{3\pi^2}$, ottenendo

$$y \left(\frac{T_c}{\epsilon_F} \right)^{-1/2} = -\frac{\sqrt{2}}{\pi} \int_0^\infty \sqrt{x} \left(\frac{\tanh(x - \tilde{\mu})}{x - \tilde{\mu}} - \frac{1}{x} \right) dx := -\frac{\sqrt{2}}{\pi} F(\tilde{\mu}) \quad (4.46)$$

$$\left(\frac{\epsilon_F}{T_c} \right)^{3/2} = \frac{3\sqrt{2}}{2} \int_0^\infty (1 - \tanh(x - \tilde{\mu})) dx := \frac{3\sqrt{2}}{2} G(\tilde{\mu}) \quad (4.47)$$

Si risolvono allora numericamente questi integrali per vari valori di $\tilde{\mu}$ e si costruiscono le coppie $\left(\frac{\mu}{\epsilon_F}, y \right)$ e $\left(\frac{T_c}{\epsilon_F}, y \right)$ ottenendo i grafici riportati nelle figure 4.1 e 4.2 e confermano tutti i risultati ottenuti analiticamente a livello di campo medio.

²<http://www.gnu.org/software/gsl>

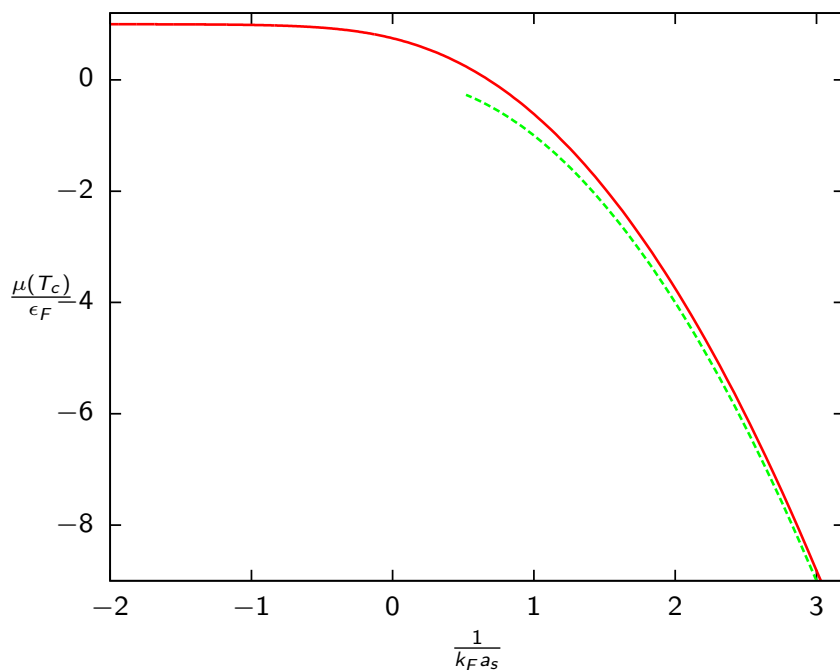


FIGURA 4.1: Potenziale chimico
La linea spezzata mostra il risultato analitico ottenuto in (4.12)

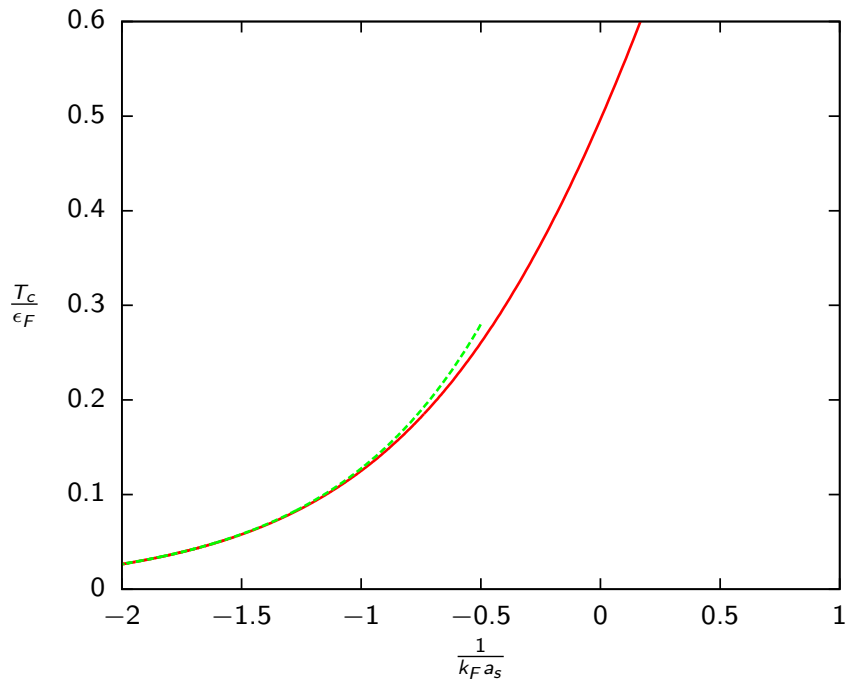


FIGURA 4.2: Temperatura critica
La linea spezzata nel grafico della temperatura critica mostra il risultato analitico ottenuto in (4.10)

4.3.2 Fluttuazioni Gaussiane

Le due equazioni da risolvere sono ora

$$-\frac{m}{4\pi a_s} = \frac{1}{\Omega} \sum_{\mathbf{k}} \left(\frac{\tanh(\xi_{\mathbf{k}}/2T_c)}{2\xi_{\mathbf{k}}} - \frac{1}{2\epsilon_{\mathbf{k}}} \right) \quad (4.48)$$

$$n = n^{(0)} + n^{(2)} = \frac{1}{\Omega} \sum_{\mathbf{k}} \left[1 - \tanh \left(\frac{\xi_{\mathbf{k}}}{2T_c} \right) \right] + \frac{1}{\pi\Omega} \sum_{\mathbf{q}} \int_{-\infty}^{+\infty} d\omega n_B(\omega) \frac{\partial \delta(\mathbf{q}, \omega)}{\partial \mu} \quad (4.49)$$

con $\delta(\mathbf{q}, \omega) = -\text{Arg}(\Gamma^{-1}(\mathbf{q}, \omega + i\epsilon))$.

Di solito questi problemi sono risolti con algoritmi di *root-finding*; ad accoppiamento fissato (cioé a $\frac{1}{k_F a_s}$) le due equazioni vengono valutate su molte coppie (μ, T_c) trovando quella che meglio risolve il sistema.

In questa tesi invece si é tentato un approccio diverso. Si fanno le stesse sostituzioni di prima e si sfrutta la stessa forma dell'equazione della gap ricavata. Bisogna manipolare la funzione $\Gamma^{-1}(\mathbf{q}, \omega + i\epsilon)$ e lo si fa partendo da quanto ottenuto nell'equazione (4.26). Si può far vedere prima che la funzione $A(k, q)$ definita precedentemente assume una forma più semplice con le sostituzioni $\tilde{\mu} = \frac{\mu}{2T_c}$, $p = \frac{k}{\sqrt{4mT_c}}$, $Q = \frac{q}{\sqrt{4mT_c}}$, infatti

$$A(k, q) = \ln \left(\cosh \left(\frac{(k+q/2)^2}{2m} - \mu \right) \right) = \ln \left(\cosh \left((p+Q/2)^2 - \tilde{\mu} \right) \right) = B(p, Q) \quad (4.50)$$

Le stesse sostituzioni fatte nella funzione Γ^{-1}

$$\begin{aligned} \Gamma^{-1}(\mathbf{q}, \omega + i\epsilon) &= - \left\{ \frac{m}{4\pi a_s} + \frac{m}{(2\pi)^2} \int_0^\infty dk k^2 \left[\frac{4mT_c}{kq} \frac{A(k, q) - A(k, -q)}{k^2 + q^2/4 - 2m\mu - m\omega - i\epsilon} - \frac{2}{k^2} \right] \right\} = \\ &= - \left(\frac{m}{4\pi} \right) \left\{ \frac{1}{a_s} + \frac{\sqrt{4mT_c}}{\pi Q} \int_0^\infty dp \left[\frac{p[B(p, Q) - B(p, -Q)]}{p^2 + Q^2/4 - \tilde{\mu} - \frac{\omega}{4T_c} - i\epsilon} - 2Q \right] \right\} = \\ &= \tilde{\Gamma}^{-1}(Q, \nu + i\epsilon) \quad (4.51) \end{aligned}$$

Si fa una ulteriore sostituzione, $\nu = \frac{\omega}{4T_c}$. Chiaramente di queste sostituzioni bisognerà tenerne conto anche dopo. Ciò che ci interessa della funzione $\tilde{\Gamma}^{-1}(Q, \nu + i\epsilon)$ è il suo

argomento, è dunque lecito calcolarla a meno di costanti moltiplicative:

$$\begin{aligned}
\tilde{\Gamma}^{-1}(Q, \nu + i\epsilon) &= - \left(\frac{m}{4\pi} \right) \left\{ \frac{1}{a_s} + \frac{\sqrt{4mT_c}}{\pi Q} \int_0^{+\infty} dp \left[\frac{p[B(p, Q) - B(p, -Q)]}{p^2 + Q^2/4 - \tilde{\mu} - \nu - i\epsilon} - 2Q \right] \right\} \propto \\
&\propto - \left\{ \frac{1}{k_F a_s} + \frac{\sqrt{4mT_c}}{\pi Q k_F} \int_0^{+\infty} dp \left[\frac{p[B(p, Q) - B(p, -Q)]}{p^2 + Q^2/4 - \tilde{\mu} - \nu - i\epsilon} - 2Q \right] \right\} = \\
&= - \left\{ y + \frac{\sqrt{2}}{\pi Q} \left(\frac{T_c}{\epsilon_F} \right)^{1/2} \int_0^{+\infty} dp \left[\frac{p[B(p, Q) - B(p, -Q)]}{p^2 + Q^2/4 - \tilde{\mu} - \nu - i\epsilon} - 2Q \right] \right\} \propto \\
&\propto - \left\{ yQ \left(\frac{T_c}{\epsilon_F} \right)^{-1/2} + \frac{\sqrt{2}}{\pi} \int_0^{+\infty} dp \left[\frac{p[B(p, Q) - B(p, -Q)]}{p^2 + Q^2/4 - \tilde{\mu} - \nu - i\epsilon} - 2Q \right] \right\} \quad (4.52)
\end{aligned}$$

Nell'intervallo di integrazione l'integrando ha un polo in $p_0 = \sqrt{\tilde{\mu} + \nu - Q^2/4}$, definendo la funzione

$$t(p, Q) = \frac{p[B(p, Q) - B(p, -Q)]}{p + p_0} \quad (4.53)$$

allora

$$\tilde{\Gamma}^{-1}(Q, \nu + i\epsilon) \propto - \left\{ yQ \left(\frac{T_c}{\epsilon_F} \right)^{-1/2} + \frac{\sqrt{2}}{\pi} \int_0^{+\infty} \left[\frac{t(p, Q)}{p - p_0 - i\epsilon} - 2Q \right] dp \right\} \quad (4.54)$$

L'integrale all'interno andrà quindi valutato calcolandone la parte principale

$$\int_0^{+\infty} \left[\frac{t(p, Q)}{p - p_0 - i\epsilon} - 2Q \right] dp = \mathcal{P} \left(\frac{t(p, Q)}{p - p_0} - 2Q \right) + i\pi t(p_0, Q) \quad (4.55)$$

Si ottiene dunque che

$$\begin{aligned}
\tilde{\Gamma}^{-1}(Q, \nu + i\epsilon) &\propto - \left\{ yQ \left(\frac{T_c}{\epsilon_F} \right)^{-1/2} + \frac{\sqrt{2}}{\pi} \left[\mathcal{P} \left(\frac{t(p, Q)}{p - p_0} - 2Q \right) + i\pi t(p_0, Q) \right] \right\} = \\
&= - \left\{ Qy \left(\frac{T_c}{\epsilon_F} \right)^{-1/2} + \frac{\sqrt{2}}{\pi} \mathcal{P} \left(\frac{t(p, Q)}{p - p_0} - 2Q \right) + i\sqrt{2} t(p_0, Q) \right\} = \\
&\hspace{20em} (4.56)
\end{aligned}$$

Grazie a questo risultato si riesce a separare parte immaginaria e complessa e dunque a calcolare agevolmente l'argomento di tale funzione complessa. Un'altro aspetto importante è che la sua dipendenza da temperatura critica e coupling è in un solo termine della parte reale, nel prodotto $y \left(\frac{T_c}{\epsilon_F} \right)^{-1/2}$ che è proprio ciò che si calcola nella gap equation

(4.46). Tornando al contributo al secondo ordine ed effettuando le sostituzioni

$$\begin{aligned}
n^{(2)} &= \frac{1}{\pi\Omega} \sum_{\mathbf{q}} \int_{-\infty}^{+\infty} d\omega n_{\text{B}}(\omega) \frac{\partial \delta(q, \omega)}{\partial \mu} = \\
&= \frac{(4mT_c)^{3/2}}{\pi^3} \int_0^{+\infty} dQ Q^2 \int_{-\infty}^{+\infty} d\nu n_{\text{B}}(4T_c\nu) \frac{\partial \delta((4mT_c)^{1/2}Q, 4T_c\nu)}{\partial \tilde{\mu}} = \\
&= \frac{(4mT_c)^{3/2}}{\pi^3} \int_0^{+\infty} dQ Q^2 \int_{-\infty}^{+\infty} d\nu \frac{1}{e^{4\nu} - 1} \frac{\partial \tilde{\delta}(Q, \nu)}{\partial \tilde{\mu}} := \\
&:= \frac{(4mT_c)^{3/2}}{\pi^3} H \left(\tilde{\mu}, y \left(\frac{T_c}{\epsilon_{\text{F}}} \right)^{-\frac{1}{2}} \right) \quad (4.57)
\end{aligned}$$

l'equazione numero può essere allora riscritta come

$$\left(\frac{\epsilon_{\text{F}}}{T_c} \right)^{3/2} = \frac{3\sqrt{2}}{2} G(\tilde{\mu}) + \frac{6\sqrt{2}}{\pi} H \left(\tilde{\mu}, y \left(\frac{T_c}{\epsilon_{\text{F}}} \right)^{-\frac{1}{2}} \right) \quad (4.58)$$

Ricordando l'equazione della gap

$$y \left(\frac{T_c}{\epsilon_{\text{F}}} \right)^{-1/2} = -\frac{\sqrt{2}}{\pi} F(\tilde{\mu}) \quad (4.59)$$

vediamo subito che essa può essere imposta all'interno dell'altra equazione. possiamo così riproporre la stessa idea di soluzione trovata prima, imporre vari valori di $\tilde{\mu}$ e costruire le coppie con le equazioni

$$y \left(\frac{T_c}{\epsilon_{\text{F}}} \right)^{-1/2} = -\frac{\sqrt{2}}{\pi} F(\tilde{\mu}) \quad (4.60)$$

$$\left(\frac{\epsilon_{\text{F}}}{T_c} \right)^{3/2} = \frac{3\sqrt{2}}{2} G(\tilde{\mu}) + \frac{6\sqrt{2}}{\pi} H \left(\tilde{\mu}, -\frac{\sqrt{2}}{\pi} F(\tilde{\mu}) \right) \quad (4.61)$$

Vari tentativi di implementare queste equazioni sono falliti a causa delle complicazioni nel calcolo della fase $\delta(q, \omega)$ e di mancanza di tempo. Tuttavia questa trattazione permette di ottenere, con delle sostituzioni varie equazioni analitiche tra coppie di y, μ e T_c . In particolare l'equazione (4.61), una equazione di stato critica, oppure una equazione che legghi direttante T_c e y . Quest'ultima può essere importante poiché ottenere una forma analitica di $T_c(y)$ lungo il crossover in presenza delle fluttuazioni Gaussiane é tuttora un problema aperto.

4.4 Conclusioni

È stato mostrato dunque come la stessa teoria sia in grado di riprodurre due paradigmi, apparentemente diversi, della fisica a molti corpi, regolando la forza dell'interazione, in

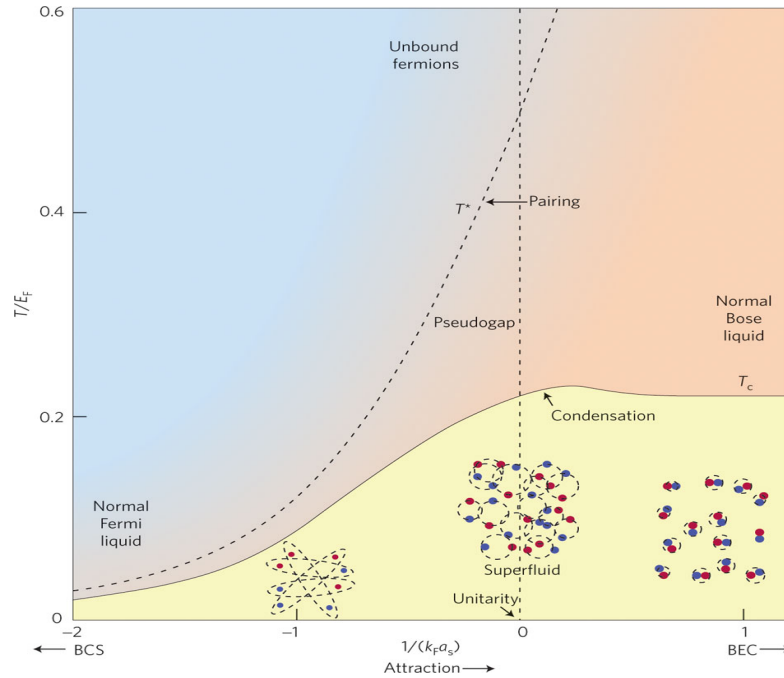


FIGURA 4.3: Diagramma degli stati

Rappresentazione schematica del crossover nel diagramma degli stati ottenuto numericamente, per esempio in [3]. Immagine presa da [32].

un crossover continuo. Si è vista anche l'inadeguatezza della approssimazione di campo medio nel riprodurre correttamente l'andamento della temperatura critica lungo il crossover. In ultima analisi questo fallimento dipende dal fatto che in tale schema, l'equazione numero descrive un set di Fermioni non intragenti, non tenendo conto della corretta fisica a due corpi all'aumentare dell'attrazione tra Fermioni. Un rimedio efficace a ciò è includere nella teoria le fluttuazioni del campo Δ , attorno alla soluzione classica. così è stato mostrato come nel limite di accoppiamento forte la funzione di partizione del sistema tenda a quella di un set di Bosoni liberi per i quali la temperatura di transizione è ben nota.

In figura 4.3 é mostrato infine il diagramma degli stati che si può ottenere computazionalmente lungo tutto il crossover e che cattura i due limiti principali discussi analiticamente.

Capitolo 5

Gas di Fermi con interazione Spin-Orbita e potenziale attrattivo

Lo scopo della trattazione successiva sarà vedere come il crossover BCS-BEC mostrato nei capitoli precedenti venga modificato dalla presenza di un termine di spin-orbita, discusso nella sezione 1.5, con particolare enfasi nello studio della temperatura critica. Il termine aggiuntivo, come si vedrà, complicherà notevolmente la trattazione teorica.

Si consideri dunque, nello spazio dei momenti, l'Hamiltoniana $H = H_0 + H_I$

$$H_0 = \sum_{\mathbf{k}} \left(\psi_{\uparrow}^{\dagger}(\mathbf{k}), \psi_{\downarrow}^{\dagger}(\mathbf{k}) \right) \left\{ \frac{k^2}{2m} \mathbb{I} + v_R(\sigma_x k_y - \sigma_y k_x) + v_D(\sigma_x k_y + \sigma_y k_x) \right\} \begin{pmatrix} \psi_{\uparrow}(\mathbf{k}) \\ \psi_{\downarrow}(\mathbf{k}) \end{pmatrix} \quad (5.1)$$

$$H_I = -\frac{g}{\Omega} \sum_{\mathbf{k}, \mathbf{k}', \mathbf{q}} \psi_{\uparrow}^{\dagger}(\mathbf{k} + \mathbf{q}) \psi_{\downarrow}^{\dagger}(-\mathbf{k}) \psi_{\downarrow}(\mathbf{q} - \mathbf{k}') \psi_{\uparrow}(-\mathbf{k}') \quad (5.2)$$

con $\sigma_x = \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix}$ e $\sigma_y = \begin{pmatrix} 0 & -i \\ i & 0 \end{pmatrix}$ le usuali matrici di Pauli.

L'elemento aggiuntivo rispetto al caso trattato precedentemente è l'interazione di spin-orbita contenuta nei due termini dell'Hamiltoniana di singola particella rispettivamente detti di Rashba e di Dresselhaus. A questa Hamiltoniana è associata la funzione di partizione nel formalismo del path-integral:

$$\mathcal{Z} = Tr \left(e^{-\beta(H - \mu N)} \right) = \int [D\psi^{\dagger}] [D\psi] e^{-S[\psi^{\dagger}, \psi]} \quad (5.3)$$

e l'azione

$$\begin{aligned}
S[\psi^\dagger, \psi] &= \sum_{k, \gamma} \psi_\gamma^\dagger(k) \left\{ -i\omega_n + \frac{k^2}{2m} - \mu \right\} \psi_\gamma(k) + \\
&+ \sum_k \left(\psi_\uparrow^\dagger(k), \psi_\downarrow^\dagger(k) \right) \left\{ v_R(\sigma_x k_y - \sigma_y k_x) + v_D(\sigma_x k_y + \sigma_y k_x) \right\} \begin{pmatrix} \psi_\uparrow(k) \\ \psi_\downarrow(k) \end{pmatrix} - \\
&- \frac{g}{\Omega} \sum_{k, k', q} \psi_\uparrow^\dagger(k+q) \psi_\downarrow^\dagger(-k) \psi_\downarrow(q-k') \psi_\uparrow(k') \quad (5.4)
\end{aligned}$$

Esplicitando il nuovo operatore introdotto é possibile scegliere una notazione più compatta

$$\begin{aligned}
v_R(\sigma_x k_y - \sigma_y k_x) + v_D(\sigma_x k_y + \sigma_y k_x) &= \\
&= v_R \begin{pmatrix} 0 & k_x + ik_y \\ k_x - ik_y & 0 \end{pmatrix} + v_D \begin{pmatrix} 0 & k_x - ik_y \\ k_x + ik_y & 0 \end{pmatrix} = \\
&= \begin{pmatrix} 0 & v_R(k_x + ik_y) + v_D(k_x - ik_y) \\ v_R(k_x - ik_y) + v_D(k_x + ik_y) & 0 \end{pmatrix} := \begin{pmatrix} 0 & \gamma(\mathbf{k}) \\ \gamma^*(\mathbf{k}) & 0 \end{pmatrix}
\end{aligned}$$

Con la definizione $\gamma(\mathbf{k}) := v_R(k_x + ik_y) + v_D(k_x - ik_y)$. Più semplicemente l'azione può dunque essere riscritta come

$$\begin{aligned}
S[\psi^\dagger, \psi] &= \sum_{k, \gamma} \psi_\gamma^\dagger(k) \{ -i\omega_n + \xi_{\mathbf{k}} \} \psi_\gamma(k) + \\
&+ \sum_k \left(\psi_\uparrow^\dagger(k), \psi_\downarrow^\dagger(k) \right) \begin{pmatrix} 0 & \gamma(\mathbf{k}) \\ \gamma^*(\mathbf{k}) & 0 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} \psi_\uparrow(k) \\ \psi_\downarrow(k) \end{pmatrix} - \\
&- \frac{g}{\beta\Omega} \sum_{k, k', q} \psi_\uparrow^\dagger(k+q) \psi_\downarrow^\dagger(-k) \psi_\downarrow(q-k') \psi_\uparrow(-k') = \\
&= \sum_{k, \gamma} \psi_\gamma^\dagger(k) \{ -i\omega_n + \xi_{\mathbf{k}} \} \psi_\gamma(k) + \\
&+ \sum_k \psi_\downarrow^\dagger(k) \gamma^*(\mathbf{k}) \psi_\uparrow(k) + \sum_k \psi_\uparrow^\dagger(k) \gamma(\mathbf{k}) \psi_\downarrow(k) + \\
&- \frac{g}{\beta\Omega} \sum_{k, k', q} \psi_\uparrow^\dagger(k+q) \psi_\downarrow^\dagger(-k) \psi_\downarrow(q-k') \psi_\uparrow(k') \quad (5.5)
\end{aligned}$$

Come nel caso precedente il termine a quattro spinori può essere disaccoppiato con una

trasformazione di Hubbard-Stratonovich, introducendo il campo ausiliare $\Delta(q)$

$$\begin{aligned}
e^{\frac{g}{\beta\Omega} \sum_{k,k',q} \psi_{\uparrow}^{\dagger}(k+q) \psi_{\downarrow}^{\dagger}(-k) \psi_{\downarrow}(-k') \psi_{\uparrow}(k'+q)} &= e^{\frac{g}{\beta\Omega} \sum_q \phi^{\dagger}(q) \phi(q)} = \\
&= \int [D\Delta^*][D\Delta] e^{\sum_q \left[-\frac{\beta\Omega}{g} \Delta^2 + \Delta^*(q) \phi(q) + \phi^{\dagger}(q) \Delta(q) \right]} = \\
&= \int [D\Delta^*][D\Delta] e^{\sum_q \left[-\frac{\beta\Omega}{g} \Delta^2 + \sum_k \Delta^*(q) \psi_{\downarrow}(-k) \psi_{\uparrow}(k+q) + \sum_k \psi_{\uparrow}^{\dagger}(k+q) \psi_{\downarrow}^{\dagger}(-k) \Delta(q) \right]} \quad (5.6)
\end{aligned}$$

L'azione con l'introduzione di questo nuovo campo diventa

$$\begin{aligned}
S[\psi^{\dagger}, \psi, \Delta^*, \Delta] &= \sum_{k,\gamma} \psi_{\gamma}^{\dagger}(k) \{-i\omega_n + \xi_{\mathbf{k}}\} \psi_{\gamma}(k) \\
&\quad + \sum_k \psi_{\downarrow}^{\dagger}(k) \gamma^*(\mathbf{k}) \psi_{\uparrow}(k) + \sum_k \psi_{\uparrow}^{\dagger}(k) \gamma(\mathbf{k}) \psi_{\downarrow}(k) \\
&\quad + \sum_q \frac{\beta\Omega}{g} \Delta^2(q) - \sum_{q,k} \Delta^*(q) \psi_{\downarrow}(-k) \psi_{\uparrow}(k+q) - \sum_{q,k} \psi_{\uparrow}^{\dagger}(k+q) \psi_{\downarrow}^{\dagger}(-k) \Delta(q) \quad (5.7)
\end{aligned}$$

Ogni termine viene manipolato sfruttando le proprietà di anticommutazione dei campi di Grassmann e ridefinendo i momenti; lo è scopo ottenere una azione quadratica nei multispinori

$$\psi(k) = \begin{pmatrix} \psi_{\uparrow}(k) \\ \psi_{\downarrow}^{\dagger}(-k) \\ \psi_{\downarrow}(k) \\ \psi_{\uparrow}^{\dagger}(-k) \end{pmatrix} \quad \psi^{\dagger}(k) = \left(\psi_{\uparrow}^{\dagger}(k), \psi_{\downarrow}(-k), \psi_{\downarrow}^{\dagger}(k), \psi_{\uparrow}(-k) \right)$$

naturale generalizzazione del formalismo di Nambu. Servono un certo numero di passaggi, giustificati da un risultato finale particolarmente elegante.

$$\begin{aligned}
&\sum_{k,\gamma} \psi_{\gamma}^{\dagger}(k) \{-i\omega_n + \xi_{\mathbf{k}}\} \psi_{\gamma}(k) = \\
&\sum_{k,p} \psi_{\uparrow}^{\dagger}(k) (-i\omega_n + \xi_{\mathbf{k}}) \delta_{k,p} \psi_{\uparrow}(p) + \psi_{\downarrow}^{\dagger}(k) (-i\omega_n + \xi_{\mathbf{k}}) \delta_{k,p} \psi_{\downarrow}(p) = \\
&= \frac{1}{2} \sum_{k,p} \left\{ \psi_{\uparrow}^{\dagger}(k) (-i\omega_n + \xi_{\mathbf{k}}) \delta_{k,p} \psi_{\uparrow}(p) + \psi_{\uparrow}(k) (i\omega_n - \xi_{\mathbf{k}}) \delta_{k,p} \psi_{\uparrow}^{\dagger}(p) \right. \\
&\quad \left. + \psi_{\downarrow}^{\dagger}(k) (-i\omega_n + \xi_{\mathbf{k}}) \delta_{k,p} \psi_{\downarrow}(p) + \psi_{\downarrow}(k) (i\omega_n - \xi_{\mathbf{k}}) \delta_{k,p} \psi_{\downarrow}^{\dagger}(p) \right\} + \beta \sum_{\mathbf{k}} \xi_{\mathbf{k}} = \\
&= \frac{1}{2} \sum_{k,p} \left\{ \psi_{\uparrow}^{\dagger}(k) (-i\omega_n + \xi_{\mathbf{k}}) \delta_{k,p} \psi_{\uparrow}(p) + \psi_{\uparrow}(-k) (-i\omega_n - \xi_{\mathbf{k}}) \delta_{k,p} \psi_{\uparrow}^{\dagger}(-p) + \right. \\
&\quad \left. + \psi_{\downarrow}^{\dagger}(k) (-i\omega_n + \xi_{\mathbf{k}}) \delta_{k,p} \psi_{\downarrow}(p) + \psi_{\downarrow}(-k) (-i\omega_n - \xi_{\mathbf{k}}) \delta_{k,p} \psi_{\downarrow}^{\dagger}(-p) \right\} + \beta \sum_{\mathbf{k}} \xi_{\mathbf{k}} = \\
&= \frac{1}{2} \sum_{k,p} \psi^{\dagger}(k) \mathcal{A}^{-1}(k,p) \psi(p) + \beta \sum_{\mathbf{k}} \xi_{\mathbf{k}}
\end{aligned}$$

dove si definisce

$$\mathcal{A}^{-1}(k, p) = \begin{pmatrix} -i\omega_n + \xi_{\mathbf{k}} & 0 & 0 & 0 \\ 0 & -i\omega_n - \xi_{\mathbf{k}} & 0 & 0 \\ 0 & 0 & -i\omega_n + \xi_{\mathbf{k}} & 0 \\ 0 & 0 & 0 & -i\omega_n - \xi_{\mathbf{k}} \end{pmatrix} \delta_{k,p} \quad (5.8)$$

$$\begin{aligned} & \sum_k \psi_{\downarrow}^{\dagger}(k) \gamma^*(\mathbf{k}) \psi_{\uparrow}(k) + \sum_k \psi_{\uparrow}^{\dagger}(k) \gamma(\mathbf{k}) \psi_{\downarrow}(k) = \\ & = \frac{1}{2} \sum_{k,p} \left\{ \psi_{\downarrow}^{\dagger}(k) \gamma^*(\mathbf{k}) \delta_{k,p} \psi_{\uparrow}(p) - \psi_{\uparrow}(k) \gamma^*(\mathbf{k}) \delta_{k,p} \psi_{\downarrow}^{\dagger}(p) + \psi_{\uparrow}^{\dagger}(k) \gamma(\mathbf{k}) \delta_{k,p} \psi_{\downarrow}(p) - \right. \\ & \left. \psi_{\downarrow}(k) \gamma(\mathbf{k}) \delta_{k,p} \psi_{\uparrow}^{\dagger}(p) \right\} = \\ & = \frac{1}{2} \sum_{k,p} \left\{ \psi_{\downarrow}^{\dagger}(k) \gamma^*(\mathbf{k}) \delta_{k,p} \psi_{\uparrow}(p) + \psi_{\uparrow}(-k) \gamma^*(\mathbf{k}) \delta_{k,p} \psi_{\downarrow}^{\dagger}(-p) \right. \\ & \left. + \psi_{\uparrow}^{\dagger}(k) \gamma(\mathbf{k}) \delta_{k,p} \psi_{\downarrow}(p) + \psi_{\downarrow}(-k) \gamma(\mathbf{k}) \delta_{k,p} \psi_{\uparrow}^{\dagger}(-p) \right\} = \\ & = \frac{1}{2} \sum_{k,p} \psi^{\dagger}(k) \mathcal{B}^{-1}(k, p) \psi(p) \text{ dove si definisce} \end{aligned}$$

$$\mathcal{B}^{-1}(k, p) = \begin{pmatrix} 0 & 0 & \gamma(\mathbf{k}) & 0 \\ 0 & 0 & 0 & \gamma(\mathbf{k}) \\ \gamma^*(\mathbf{k}) & 0 & 0 & 0 \\ 0 & \gamma^*(\mathbf{k}) & 0 & 0 \end{pmatrix} \delta_{k,p} \quad (5.9)$$

$$\begin{aligned} & - \sum_{q,k} \Delta^*(q) \psi_{\downarrow}(-k) \psi_{\uparrow}(k+q) = - \sum_{k,p} \Delta^*(k-p) \psi_{\downarrow}(-k) \psi_{\uparrow}(p) = \\ & = - \sum_{k,p} \psi_{\downarrow}(-k) \Delta^*(k-p) \psi_{\uparrow}(p) = \\ & = \frac{1}{2} \sum_{k,p} \left\{ - \psi_{\downarrow}(-k) \Delta^*(k-p) \psi_{\uparrow}(p) + \psi_{\uparrow}(-k) \Delta^*(p-k) \psi_{\downarrow}(p) \right\} \\ & - \sum_{q,k} \psi_{\uparrow}^{\dagger}(k+q) \psi_{\downarrow}^{\dagger}(-k) \Delta(q) = - \sum_{k,p} \psi_{\uparrow}^{\dagger}(k) \Delta(k-p) \psi_{\downarrow}^{\dagger}(-p) = \\ & = \frac{1}{2} \sum_{k,p} \left\{ \psi_{\uparrow}^{\dagger}(k) \Delta(k-p) \psi_{\downarrow}^{\dagger}(-p) - \psi_{\downarrow}^{\dagger}(k) \Delta(p-k) \psi_{\uparrow}^{\dagger}(-p) \right\} = \\ & = \frac{1}{2} \sum_{k,p} \psi^{\dagger}(k) \mathcal{C}^{-1}(k, p) \psi(p) \text{ dove si definisce} \end{aligned}$$

$$\mathcal{C}^{-1}(k, p) = \begin{pmatrix} 0 & -\Delta(p-k) & 0 & 0 \\ -\Delta^*(k-p) & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & \Delta(p-k) \\ 0 & 0 & \Delta^*(k-p) & 0 \end{pmatrix} \quad (5.10)$$

Mettendo tutto insieme l'azione è riscrivibile in modo compatto:

$$S[\psi^{\dagger}, \psi, \Delta^*, \Delta] = \frac{\beta\Omega}{g} \sum_q \Delta^2(q) + \frac{1}{2} \sum_{k,q} \psi^{\dagger}(k) \mathcal{G}^{-1}(k, q) \psi(q) + \beta \sum_{\mathbf{k}} \xi_{\mathbf{k}} \quad (5.11)$$

definendo l'inversa della funzione di Green del problema come

$$\mathcal{G}^{-1}(k, p) = \begin{pmatrix} (-i\omega_n + \xi_{\mathbf{k}})\delta_{k,q} & -\Delta(p-k) & \gamma(\mathbf{k})\delta_{k,q} & 0 \\ -\Delta^*(p-k) & (-i\omega_n - \xi_{\mathbf{k}})\delta_{k,q} & 0 & \gamma(\mathbf{k})\delta_{k,q} \\ \gamma^*(\mathbf{k})\delta_{k,q} & 0 & (-i\omega_n + \xi_{\mathbf{k}})\delta_{k,q} & \Delta(k-p) \\ 0 & \gamma^*(\mathbf{k})\delta_{k,q} & \Delta^*(k-p) & (-i\omega_n - \xi_{\mathbf{k}})\delta_{k,q} \end{pmatrix} \quad (5.12)$$

Essendo l'azione quadratica nei campi Fermionici é possibile svolgere l'integrale Gaussiano e ottenere una teoria effettiva per il solo campo ausiliare

$$\begin{aligned} \mathcal{Z} &= \int [D\psi^\dagger][D\psi][D\Delta^*][D\Delta] e^{-S[\psi^\dagger, \psi, \Delta^*, \Delta]} = \\ &= \int [D\Delta^*][D\Delta] e^{-\frac{\beta\Omega}{g} \sum_q \Delta^2(q) - \beta \sum_{\mathbf{k}} \xi_{\mathbf{k}}} \int [D\psi^\dagger][D\psi] e^{-\frac{1}{2} \psi^\dagger \mathcal{G}^{-1} \psi} \propto \\ &\propto \int [D\Delta^*][D\Delta] e^{-\frac{\beta\Omega}{g} \sum_q \Delta^2(q) - \beta \sum_{\mathbf{k}} \xi_{\mathbf{k}}} \sqrt{\det(\mathcal{G}^{-1})} = \\ &= \int [D\Delta^*][D\Delta] e^{-\frac{\beta\Omega}{g} \sum_q \Delta^2(q) - \beta \sum_{\mathbf{k}} \xi_{\mathbf{k}} + \frac{1}{2} \ln(\det(\mathcal{G}^{-1}))} \quad (5.13) \end{aligned}$$

e dunque viene determinata l'azione effettiva per il sistema

$$S_{eff}[\Delta^*, \Delta] = \frac{\beta\Omega}{g} \sum_q \Delta^2(q) - \frac{1}{2} \ln(\det(\mathcal{G}^{-1})) + \beta \sum_{\mathbf{k}} \xi_{\mathbf{k}} \quad (5.14)$$

5.1 Gap equation

Esattamente come nel caso precedente viene ricavato il valore omogeneo della gap che minimizza l'azione. Questo si può fare selezionando solo il contributo a $q = 0$ nello spazio dei momenti. Sia $\Delta(q = 0) = \bar{\Delta}$, l'azione risulta

$$S_{eff}[\bar{\Delta}^*, \bar{\Delta}] = \frac{\beta\Omega}{g} \bar{\Delta}^2 - \frac{1}{2} \ln(\det(\mathcal{G}^{-1})) \Big|_{\Delta=\bar{\Delta}} + \beta \sum_{\mathbf{k}} \xi_{\mathbf{k}} \quad (5.15)$$

con

$$\mathcal{G}^{-1}(k, p) = \begin{pmatrix} -i\omega_n + \xi_{\mathbf{k}} & -\bar{\Delta} & \gamma(\mathbf{k}) & 0 \\ -\bar{\Delta}^* & -i\omega_n - \xi_{\mathbf{k}} & 0 & \gamma(\mathbf{k}) \\ \gamma^*(\mathbf{k}) & 0 & -i\omega_n + \xi_{\mathbf{k}} & \bar{\Delta} \\ 0 & \gamma^*(\mathbf{k}) & \bar{\Delta}^* & -i\omega_n - \xi_{\mathbf{k}} \end{pmatrix} \delta_{k,q} \quad (5.16)$$

Il determinante può dunque essere calcolato conoscendo gli autovalori

$$\det(\mathcal{G}^{-1}) = \prod_{\mathbf{k}, i\omega_n, i} (i\omega_n - E_i(\mathbf{k})) \quad (5.17)$$

con $E_1 = \sqrt{(\xi_{\mathbf{k}} - |\gamma_{\mathbf{k}}|)^2 + \bar{\Delta}^2}$, $E_2 = \sqrt{(\xi_{\mathbf{k}} + |\gamma_{\mathbf{k}}|)^2 + \bar{\Delta}^2}$, $E_3 = -E_1$ e $E_4 = -E_2$.
Dunque l'azione efficace assume la forma Si ottengono contemporaneamente anche gli
spettri di particella singola

$$S_{eff}[\bar{\Delta}^*, \bar{\Delta}] = \frac{\beta\Omega}{g} \bar{\Delta}^2 - \frac{1}{2} \sum_{\mathbf{k}, i\omega_n, i} \ln(i\omega_n - E_i(\mathbf{k})) + \beta \sum_{\mathbf{k}} \xi_{\mathbf{k}} \quad (5.18)$$

$$\frac{\partial S_{eff}}{\partial \bar{\Delta}} = 0$$

$$\frac{\beta\Omega}{g} \bar{\Delta}^* - \frac{1}{2} \frac{\partial}{\partial \bar{\Delta}} \ln(\det(\mathcal{G}^{-1})) = 0$$

$$\begin{aligned} \frac{\partial}{\partial \bar{\Delta}} \ln(\det(\mathcal{G}^{-1})) &= \sum_{\mathbf{k}, i\omega_n, i} \frac{\partial}{\partial \bar{\Delta}} \ln(i\omega_n - E_i(\mathbf{k})) = \\ &= - \sum_{\mathbf{k}, i\omega_n, i} \frac{1}{i\omega_n - E_i(\mathbf{k})} \frac{\partial E_i(\mathbf{k})}{\partial \bar{\Delta}} = - \sum_{\mathbf{k}, i\omega_n, i} \frac{1}{i\omega_n - E_i(\mathbf{k})} \frac{\bar{\Delta}^*}{2E_i(\mathbf{k})} = \end{aligned}$$

Sommando sulle frequenze di Matsubara

$$\begin{aligned} &= -\bar{\Delta}^* \beta \sum_{\mathbf{k}, i} \frac{n_F(E_i(\mathbf{k}))}{2E_i(\mathbf{k})} = \\ &= -\bar{\Delta}^* \beta \sum_{\mathbf{k}} \left\{ \frac{n_F(E_1(\mathbf{k})) - n_F(-E_1(\mathbf{k}))}{2E_1(\mathbf{k})} + \frac{n_F(E_2(\mathbf{k})) - n_F(-E_2(\mathbf{k}))}{2E_2(\mathbf{k})} \right\} = \\ &= \bar{\Delta}^* \beta \sum_{\mathbf{k}} \left\{ \frac{\tanh(\beta E_1(\mathbf{k})/2)}{2E_1(\mathbf{k})} + \frac{\tanh(\beta E_2(\mathbf{k})/2)}{2E_2(\mathbf{k})} \right\} \end{aligned}$$

La gap equation risulta dunque

$$\frac{1}{g} = \frac{1}{4\Omega} \sum_{\mathbf{k}} \left\{ \frac{\tanh(\beta E_1(\mathbf{k})/2)}{E_1(\mathbf{k})} + \frac{\tanh(\beta E_2(\mathbf{k})/2)}{E_2(\mathbf{k})} \right\} \quad (5.19)$$

5.2 Espansione della azione effettiva

Come nel caso precedente si effettua una espansione dell'azione effettiva attorno alla
soluzione omogenea della gap equation, $\Delta(q) = \bar{\Delta} + \delta\Delta(q)$

$$\begin{aligned} S_{eff}[\Delta] &= S_{eff}[\bar{\Delta}] + \underbrace{\int dx \frac{\delta S_{eff}[\Delta]}{\delta \Delta(x)} \Big|_{\bar{\Delta}}}_{=0} \delta\Delta(x) + \\ &+ \frac{1}{2} \int dx_1 dx_2 \frac{\delta^2 S_{eff}[\Delta]}{\delta \Delta(x_1) \delta \Delta(x_2)} \Big|_{\bar{\Delta}} \delta\Delta(x_1) \delta\Delta(x_2) + o(\Delta^3) = \quad (5.20) \end{aligned}$$

5.2.1 Campo medio

L'azione effettiva a livello di campo medio non è altro che l'azione (5.14) valutata sulla soluzione omogenea della gap equation

$$S_{eff}[\Delta^*, \Delta] \approx S_{eff}[\bar{\Delta}^*, \bar{\Delta}] = \frac{\beta\Omega}{g} \bar{\Delta}^2 - \frac{1}{2} \ln(\det(\mathcal{G}^{-1})) \Big|_{\Delta=\bar{\Delta}} + \beta \sum_{\mathbf{k}} \xi_{\mathbf{k}} \quad (5.21)$$

La funzione di partizione associata sarà

$$G[\bar{\Delta}^*, \bar{\Delta}] = \frac{1}{\beta} S_{eff}[\bar{\Delta}^*, \bar{\Delta}] = \frac{\Omega}{g} \bar{\Delta}^2 - \frac{1}{2\beta} \ln(\det(\mathcal{G}^{-1})) \Big|_{\Delta=\bar{\Delta}} + \sum_{\mathbf{k}} \xi_{\mathbf{k}} \quad (5.22)$$

È possibile dunque calcolare l'equazione per il numero di particelle $N = -\frac{\partial G}{\partial \mu}$

$$N = \frac{1}{2\beta} \frac{\partial}{\partial \mu} \ln(\det(\mathcal{G}^{-1})) \Big|_{\Delta=\bar{\Delta}} - \frac{\partial}{\partial \mu} \sum_{\mathbf{k}} \xi_{\mathbf{k}} \quad (5.23)$$

Viene trattato separatamente il termine con la derivata rispetto al potenziale chimico

$$\begin{aligned} \frac{\partial}{\partial \mu} \ln(\det(\mathcal{G}^{-1})) \Big|_{\Delta=\bar{\Delta}} &= \frac{\partial}{\partial \mu} \sum_{\mathbf{k}, i\omega_n, i} \ln(i\omega_n - E_i(\mathbf{k})) = \\ &= - \sum_{\mathbf{k}, i\omega_n, i} \frac{1}{i\omega_n - E_i(\mathbf{k})} \frac{\partial E_i(\mathbf{k})}{\partial \mu} = \end{aligned} \quad (5.24)$$

Sommando sulle frequenze di Matsubara (i poli sono evidenti)

$$\begin{aligned} - \sum_{\mathbf{k}, i} n_{\mathbb{F}}(E_i(\mathbf{k})) \frac{\partial E_i(\mathbf{k})}{\partial \mu} &= \\ &= - \sum_{\mathbf{k}} n_{\mathbb{F}}(E_1) \frac{\partial E_1}{\partial \mu} + n_{\mathbb{F}}(E_2) \frac{\partial E_2}{\partial \mu} + n_{\mathbb{F}}(E_3) \frac{\partial E_3}{\partial \mu} + n_{\mathbb{F}}(E_4) \frac{\partial E_4}{\partial \mu} = \\ &= - \sum_{\mathbf{k}} n_{\mathbb{F}}(E_1) \frac{\partial E_1}{\partial \mu} + n_{\mathbb{F}}(E_2) \frac{\partial E_2}{\partial \mu} + -n_{\mathbb{F}}(-E_1) \frac{\partial E_1}{\partial \mu} + -n_{\mathbb{F}}(-E_2) \frac{\partial E_2}{\partial \mu} = \\ &= + \sum_{\mathbf{k}} \left\{ \tanh(\beta E_1/2) \frac{\partial E_1}{\partial \mu} + \tanh(\beta E_1/2) \frac{\partial E_1}{\partial \mu} \right\} = \\ &= - \sum_{\mathbf{k}} \left\{ \tanh(\beta E_1/2) \frac{\xi_{\mathbf{k}} - |\gamma_{\mathbf{k}}|}{E_1} + \tanh(\beta E_2/2) \frac{\xi_{\mathbf{k}} + |\gamma_{\mathbf{k}}|}{E_2} \right\} \end{aligned} \quad (5.25)$$

L'equazione per la densità di particelle, a livello di campo medio risulta dunque:

$$n = \frac{1}{\Omega} \sum_{\mathbf{k}} \left\{ 1 - \tanh(\beta E_1/2) \frac{\xi_{\mathbf{k}} - |\gamma_{\mathbf{k}}|}{2E_1} + \tanh(\beta E_2/2) \frac{\xi_{\mathbf{k}} + |\gamma_{\mathbf{k}}|}{2E_2} \right\} \quad (5.26)$$

Il set di equazioni da risolvere è dunque

$$\begin{aligned} \frac{1}{g} &= \frac{1}{4\Omega} \sum_{\mathbf{k}} \left\{ \frac{\tanh(\beta E_1(\mathbf{k})/2)}{E_1(\mathbf{k})} + \frac{\tanh(\beta E_2(\mathbf{k})/2)}{E_2(\mathbf{k})} \right\} \\ n &= \frac{1}{\Omega} \sum_{\mathbf{k}} \left\{ 1 - \tanh(\beta E_1/2) \frac{\xi_{\mathbf{k}} - |\gamma_{\mathbf{k}}|}{2E_1} + \tanh(\beta E_2/2) \frac{\xi_{\mathbf{k}} + |\gamma_{\mathbf{k}}|}{2E_2} \right\} \end{aligned} \quad (5.27)$$

che possono essere studiate per esempio a $T = 0$ con $\bar{\Delta}(T=0) = \Delta_0$

$$\begin{aligned} \frac{1}{g} &= \frac{1}{4\Omega} \sum_{\mathbf{k}} \left\{ \frac{1}{E_1(\mathbf{k})} + \frac{1}{E_2(\mathbf{k})} \right\} \\ n &= \frac{1}{\Omega} \sum_{\mathbf{k}} \left\{ 1 - \frac{\xi_{\mathbf{k}} - |\gamma_{\mathbf{k}}|}{2E_1(\mathbf{k})} + \frac{\xi_{\mathbf{k}} + |\gamma_{\mathbf{k}}|}{2E_2(\mathbf{k})} \right\} \end{aligned} \quad (5.28)$$

per ricavare gli andamenti del potenziale chimico e della gap lungo il crossover. Ciò è fatto in [33]. In questa tesi invece si concentrerà l'attenzione sul caso a temperatura finita, in linea con i capitoli precedenti.

5.2.2 Campo medio, $\mathbf{T} = \mathbf{T}_c$

Si suppone allora che esista una temperatura critica $T = T_c$ alla quale la il parametro d'ordine della teoria si annulli $\Delta(T = T_c) = 0$. Imponendo questa condizione alle due equazioni scritte sopra si ottiene un sistema che, se risolto, ci permette di trovare la dipendenza della temperatura critica e del potenziale chimico (a $T = T_c$) in funzione dell'accoppiamento g .

$$\begin{aligned} \frac{1}{g} &= \frac{1}{4\Omega} \sum_{\mathbf{k}} \left\{ \frac{\tanh\left(\frac{\xi_{\mathbf{k}} - |\gamma_{\mathbf{k}}|}{2T_c}\right)}{\xi_{\mathbf{k}} - |\gamma_{\mathbf{k}}|} + \frac{\tanh\left(\frac{\xi_{\mathbf{k}} + |\gamma_{\mathbf{k}}|}{2T_c}\right)}{\xi_{\mathbf{k}} + |\gamma_{\mathbf{k}}|} \right\} \\ n &= \frac{1}{\Omega} \sum_{\mathbf{k}} \left\{ 1 - \frac{1}{2} \tanh\left(\frac{\xi_{\mathbf{k}} - |\gamma_{\mathbf{k}}|}{2T_c}\right) - \frac{1}{2} \tanh\left(\frac{\xi_{\mathbf{k}} + |\gamma_{\mathbf{k}}|}{2T_c}\right) \right\} \end{aligned} \quad (5.29)$$

5.2.3 Inclusione delle fluttuazioni Gaussiane, $\mathbf{T} = \mathbf{T}_c$

Deve essere calcolato il termine successivo dell'espansione

$$S_{eff}[\Delta] = S_{eff}^{(0)} + S_{eff}^{(2)} \quad (5.30)$$

L'azione efficace totale ha già un termine quadratico, si tratterà dunque di espandere solo il contenuto del termine con la traccia dell'azione totale

$$S_{eff}[\Delta^*, \Delta] = \int d^3r \int_0^\beta d\tau \frac{\Delta(\vec{r}, \tau)^2}{g} - \frac{1}{2} Tr(\ln(\mathcal{G}^{-1})) + \beta \sum_{\mathbf{k}} \xi_{\mathbf{k}} \quad (5.31)$$

L'inversa della funzione di Green può essere scritta, nello spazio dei momenti e delle frequenze di Matsubara, come

$$\begin{aligned}
\mathcal{G}^{-1}(k, p) &= \begin{pmatrix} (-i\omega_n + \xi_{\mathbf{k}})\delta_{k,q} & -\Delta(p-k) & \gamma_{\mathbf{k}}\delta_{k,q} & 0 \\ -\Delta^*(p-k) & (-i\omega_n - \xi_{\mathbf{k}})\delta_{k,q} & 0 & \gamma_{\mathbf{k}}\delta_{k,q} \\ \gamma_{\mathbf{k}}^*\delta_{k,q} & 0 & (-i\omega_n + \xi_{\mathbf{k}})\delta_{k,q} & \Delta(k-p) \\ 0 & \gamma_{\mathbf{k}}^*\delta_{k,q} & \Delta^*(k-p) & (-i\omega_n - \xi_{\mathbf{k}})\delta_{k,q} \end{pmatrix} = \\
&= \begin{pmatrix} (-i\omega_n + \xi_{\mathbf{k}}) & 0 & \gamma_{\mathbf{k}} & 0 \\ 0 & (-i\omega_n - \xi_{\mathbf{k}}) & 0 & \gamma_{\mathbf{k}} \\ \gamma_{\mathbf{k}}^* & 0 & (-i\omega_n + \xi_{\mathbf{k}}) & 0 \\ 0 & \gamma_{\mathbf{k}}^* & 0 & (-i\omega_n - \xi_{\mathbf{k}}) \end{pmatrix} \delta_{k,q} + \\
&\quad + \begin{pmatrix} 0 & -\Delta(p-k) & 0 & 0 \\ -\Delta^*(p-k) & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & \Delta(k-p) \\ 0 & 0 & \Delta^*(k-p) & 0 \end{pmatrix} = \mathcal{G}_0^{-1} + \tilde{\Delta} \quad (5.32)
\end{aligned}$$

Sfruttando lo sviluppo in serie del logaritmo

$$\begin{aligned}
\ln(\mathcal{G}^{-1}) &= \ln(\mathcal{G}_0^{-1} + \tilde{\Delta}) = \ln(\mathcal{G}_0^{-1}(\mathbb{I} + \mathcal{G}_0\tilde{\Delta})) = \\
&= \ln(\mathcal{G}_0^{-1}) + \ln(\mathbb{I} + \mathcal{G}_0\tilde{\Delta}) = \ln(\mathcal{G}_0^{-1}) + \mathcal{G}_0\tilde{\Delta} - \frac{1}{2}\mathcal{G}_0\tilde{\Delta}\mathcal{G}_0\tilde{\Delta} + o(\Delta^3) = \\
&= \ln(\mathcal{G}_0^{-1}) + \mathcal{G}_0\tilde{\Delta} - \frac{1}{2}\mathcal{G}_0\tilde{\Delta}\mathcal{G}_0\tilde{\Delta} + o(\Delta^3) \quad (5.33)
\end{aligned}$$

Il primo termine ha traccia nulla e dunque al secondo ordine l'azione è

$$S_{eff}[\Delta] = S_{eff}^{(0)} + \int d^3r \int_0^\beta d\tau \frac{\Delta(\vec{r}, \tau)^2}{g} + \frac{1}{4}Tr(\mathcal{G}_0\tilde{\Delta}\mathcal{G}_0\tilde{\Delta}) + o(\Delta^3) \quad (5.34)$$

È necessario dunque valutare l'inversa di \mathcal{G}_0^{-1} , ovvero la funzione di Green non interagente. È immediato mostrare che

$$\mathcal{G}_0(k, p) = \begin{pmatrix} \frac{-i\omega_n + \xi_{\mathbf{k}}}{(i\omega_n - \xi_{\mathbf{k}})^2 - |\gamma_{\mathbf{k}}|^2} & 0 & \frac{-\gamma_{\mathbf{k}}}{(i\omega_n - \xi_{\mathbf{k}})^2 - |\gamma_{\mathbf{k}}|^2} & 0 \\ 0 & \frac{-i\omega_n - \xi_{\mathbf{k}}}{(i\omega_n + \xi_{\mathbf{k}})^2 - |\gamma_{\mathbf{k}}|^2} & 0 & \frac{-\gamma_{\mathbf{k}}}{(i\omega_n + \xi_{\mathbf{k}})^2 - |\gamma_{\mathbf{k}}|^2} \\ \frac{-\gamma_{\mathbf{k}}^*}{(i\omega_n - \xi_{\mathbf{k}})^2 - |\gamma_{\mathbf{k}}|^2} & 0 & \frac{-i\omega_n + \xi_{\mathbf{k}}}{(i\omega_n - \xi_{\mathbf{k}})^2 - |\gamma_{\mathbf{k}}|^2} & 0 \\ 0 & \frac{-\gamma_{\mathbf{k}}^*}{(i\omega_n + \xi_{\mathbf{k}})^2 - |\gamma_{\mathbf{k}}|^2} & 0 & \frac{-i\omega_n - \xi_{\mathbf{k}}}{(i\omega_n + \xi_{\mathbf{k}})^2 - |\gamma_{\mathbf{k}}|^2} \end{pmatrix} \delta_{k,p} \quad (5.35)$$

Esplicitando il termine lineare si mostra che esso non contribuisce a causa dell'annullarsi della traccia:

$$\mathcal{G}_0 \tilde{\Delta} = \begin{pmatrix} 0 & -\mathcal{G}_0^{11} \Delta & 0 & \mathcal{G}_0^{13} \Delta \\ -\mathcal{G}_0^{22} \Delta^* & 0 & \mathcal{G}_0^{24} \Delta^* & 0 \\ 0 & -\mathcal{G}_0^{31} \Delta & 0 & \mathcal{G}_0^{33} \Delta \\ -\mathcal{G}_0^{42} \Delta^* & 0 & \mathcal{G}_0^{44} \Delta^* & 0 \end{pmatrix} \quad (5.36)$$

Il termine quartico in Δ diventa ingombrante, tuttavia per il calcolo della traccia è necessario valutarne solo i termini diagonali

$$\begin{aligned} & \mathcal{G}_0 \tilde{\Delta} \mathcal{G}_0 \tilde{\Delta} = \\ = & \begin{pmatrix} \mathcal{G}_0^{11} \Delta \mathcal{G}_0^{22} \Delta^* - \mathcal{G}_0^{13} \Delta \mathcal{G}_0^{42} \Delta^* & 0 & \dots & 0 \\ 0 & \mathcal{G}_0^{22} \Delta^* \mathcal{G}_0^{11} \Delta - \mathcal{G}_0^{24} \Delta^* \mathcal{G}_0^{31} \Delta & 0 & \dots \\ \dots & 0 & \mathcal{G}_0^{33} \Delta \mathcal{G}_0^{44} \Delta^* - \mathcal{G}_0^{31} \Delta \mathcal{G}_0^{24} \Delta^* & 0 \\ 0 & \dots & 0 & \mathcal{G}_0^{44} \Delta^* \mathcal{G}_0^{33} \Delta - \mathcal{G}_0^{42} \Delta^* \mathcal{G}_0^{13} \Delta \end{pmatrix} \end{aligned} \quad (5.37)$$

Allora

$$\begin{aligned} Tr(\mathcal{G}_0 \tilde{\Delta} \mathcal{G}_0 \tilde{\Delta}) = tr & (\mathcal{G}_0^{11} \Delta \mathcal{G}_0^{22} \Delta^* - \mathcal{G}_0^{13} \Delta \mathcal{G}_0^{42} \Delta^* + \mathcal{G}_0^{22} \Delta^* \mathcal{G}_0^{11} \Delta \\ & - \mathcal{G}_0^{24} \Delta^* \mathcal{G}_0^{31} \Delta + \mathcal{G}_0^{33} \Delta \mathcal{G}_0^{44} \Delta^* - \mathcal{G}_0^{31} \Delta \mathcal{G}_0^{24} \Delta^* \\ & + \mathcal{G}_0^{44} \Delta^* \mathcal{G}_0^{33} \Delta - \mathcal{G}_0^{42} \Delta^* \mathcal{G}_0^{13} \Delta) \end{aligned} \quad (5.38)$$

Sfruttando la proprietà di ciclicità della traccia, $Tr(ABCD) = Tr(CDAB)$

$$Tr(\mathcal{G}_0 \tilde{\Delta} \mathcal{G}_0 \tilde{\Delta}) = 2tr (\mathcal{G}_0^{22} \Delta^* \mathcal{G}_0^{11} \Delta - \mathcal{G}_0^{24} \Delta^* \mathcal{G}_0^{31} \Delta + \mathcal{G}_0^{44} \Delta^* \mathcal{G}_0^{33} \Delta - \mathcal{G}_0^{42} \Delta^* \mathcal{G}_0^{13} \Delta)$$

Poiché $\mathcal{G}_0^{11} = \mathcal{G}_0^{33}$ e $\mathcal{G}_0^{22} = \mathcal{G}_0^{44}$

$$Tr(\mathcal{G}_0 \tilde{\Delta} \mathcal{G}_0 \tilde{\Delta}) = 4tr (\mathcal{G}_0^{22} \Delta^* \mathcal{G}_0^{11} \Delta) - 2tr (\mathcal{G}_0^{24} \Delta^* \mathcal{G}_0^{31} \Delta) - 2tr (\mathcal{G}_0^{42} \Delta^* \mathcal{G}_0^{13} \Delta)$$

Singolarmente ogni termine deve essere trattato per ottenere esplicitamente una forma quadratica nel campo $\Delta(q)$

$$\begin{aligned} tr (\mathcal{G}_0^{22} \Delta^* \mathcal{G}_0^{11} \Delta) &= \frac{1}{\beta \Omega} \sum_{k_1, k_2, k_3, k_4} \mathcal{G}_{0; k_1, k_2}^{22} \Delta_{k_2, k_3}^* \mathcal{G}_{0; k_3, k_4}^{11} \Delta_{k_4, k_1} = \\ &= \frac{1}{\beta \Omega} \sum_{k_1, k_3} \mathcal{G}_0^{22}(k_1) \Delta^*(k_3 - k_1) \mathcal{G}_0^{11}(k_3) \Delta(k_3 - k_1) = \frac{1}{\beta \Omega} \sum_q \Delta^*(q) \left[\sum_k \mathcal{G}_0^{11}(k) \mathcal{G}_0^{22}(k - q) \right] \Delta(q) = \\ & \quad \frac{1}{\beta \Omega} \sum_q \Delta^*(q) \left[- \sum_k \mathcal{G}_0^{11}(k) \mathcal{G}_0^{11}(q - k) \right] \Delta(q) \end{aligned} \quad (5.39)$$

Alcune proprietà degli elementi di matrice del propagatore \mathcal{G} possono essere sfruttate per valutare i termini successivi

$$\mathcal{G}_0^{24}(-k) = \frac{-\gamma_{-\mathbf{k}}}{(-i\omega_n + \xi_{\mathbf{k}})^2 - |\gamma_{-\mathbf{k}}|^2} = \frac{\gamma_{\mathbf{k}}}{(i\omega_n - \xi_{\mathbf{k}})^2 - |\gamma_{\mathbf{k}}|^2} = -\mathcal{G}_0^{13}(k) \quad (5.40)$$

$$\begin{aligned} \text{tr} (\mathcal{G}_0^{24} \Delta^* \mathcal{G}_0^{31} \Delta) &= \frac{1}{\beta\Omega} \sum_q \Delta^*(q) \left[\sum_k \mathcal{G}_0^{31}(k) \mathcal{G}_0^{24}(k-q) \right] \Delta(q) = \\ &= \frac{1}{\beta\Omega} \sum_q \Delta^*(q) \left[- \sum_k \mathcal{G}_0^{31}(k) \mathcal{G}_0^{13}(q-k) \right] \Delta(q) \quad (5.41) \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} \text{tr} (\mathcal{G}_0^{42} \Delta^* \mathcal{G}_0^{13} \Delta) &= \frac{1}{\beta\Omega} \sum_q \Delta^*(q) \left[\sum_k \mathcal{G}_0^{13}(k) \mathcal{G}_0^{42}(k-q) \right] \Delta(q) = \\ &= \frac{1}{\beta\Omega} \sum_q \Delta^*(q) \left[- \sum_k \mathcal{G}_0^{13}(k) \mathcal{G}_0^{31}(q-k) \right] \Delta(q) \quad (5.42) \end{aligned}$$

Mettendo tutto assieme si ottiene una forma piú compatta

$$\begin{aligned} \frac{1}{4} \text{Tr}(\mathcal{G}_0 \tilde{\Delta} \mathcal{G}_0 \tilde{\Delta}) &= \\ -\frac{1}{\beta\Omega} \sum_q \Delta^*(q) \left[\sum_k \mathcal{G}_0^{11}(k) \mathcal{G}_0^{11}(q-k) - \frac{1}{2} \mathcal{G}_0^{31}(k) \mathcal{G}_0^{13}(q-k) - \frac{1}{2} \mathcal{G}_0^{13}(k) \mathcal{G}_0^{31}(q-k) \right] \Delta(q) &:= \\ &:= \sum_q \Delta^*(q) \chi(\mathbf{q}) \Delta(q) \quad (5.43) \end{aligned}$$

Dunque l'azione efficace al secondo ordine può essere scritta come

$$S_{\text{eff}} = S_{\text{eff}}^{(0)} + \sum_q \Delta^*(q) \Gamma^{-1}(\mathbf{q}) \Delta(q) \quad (5.44)$$

con $\Gamma^{-1}(\mathbf{q}) = \frac{1}{g} + \chi(\mathbf{q})$. Senza evidenti ambiguità viene impiegata la stessa notazione del caso precedente.

5.3 Calcolo di $\chi(\mathbf{q})$

Valutare la funzione $\chi(\mathbf{q})$ risulta fondamentale per comprendere le proprietà del sistema in esame e ricavare il corretto sistema di equazioni che il potenziale chimico e la temperatura critica devono soddisfare in presenza di una interazione spin-orbita. Per il calcolo sono stati di grande aiuto degli appunti forniti dal Prof. Luca Dell'Anna. Esplicitando

le espressioni degli elementi di matrice di \mathcal{G}_0 si ottiene

$$\begin{aligned}\chi(q) &= \frac{1}{\beta\Omega} \sum_{i\omega_n, \mathbf{k}} \left[-\mathcal{G}_0^{11}(k)\mathcal{G}_0^{11}(q-k) + \frac{1}{2}\mathcal{G}_0^{31}(k)\mathcal{G}_0^{13}(q-k) + \frac{1}{2}\mathcal{G}_0^{13}(k)\mathcal{G}_0^{31}(q-k) \right] = \\ &= \frac{1}{\beta\Omega} \sum_{i\omega_n, \mathbf{k}} \left[\frac{(i\omega_n - \xi_{\mathbf{k}})(i\omega_n - i\nu + \xi_{\mathbf{q}-\mathbf{k}}) + \Re\epsilon(\gamma_{\mathbf{k}}^* \gamma_{\mathbf{q}-\mathbf{k}})}{[(i\omega_n - \xi_{\mathbf{k}})^2 - |\gamma_{\mathbf{k}}|^2][(i\omega_n - i\nu + \xi_{\mathbf{q}-\mathbf{k}})^2 - |\gamma_{\mathbf{q}-\mathbf{k}}|^2]} \right]\end{aligned}$$

È possibile inoltre sommare su $-\mathbf{k}$ invece che su \mathbf{k}

$$\chi(q) = \frac{1}{\beta\Omega} \sum_{i\omega_n, \mathbf{k}} \left[\frac{(i\omega_n - \xi_{\mathbf{k}})(i\omega_n - i\nu + \xi_{\mathbf{k}+\mathbf{q}}) - \Re\epsilon(\gamma_{\mathbf{k}}^* \gamma_{\mathbf{k}+\mathbf{q}})}{[(i\omega_n - \xi_{\mathbf{k}})^2 - |\gamma_{\mathbf{k}}|^2][(i\omega_n - i\nu + \xi_{\mathbf{k}+\mathbf{q}})^2 - |\gamma_{\mathbf{k}+\mathbf{q}}|^2]} \right]$$

così come sommare su $\mathbf{k} \rightarrow \mathbf{k} - \mathbf{q}/2$

$$\chi(q) = \frac{1}{\beta\Omega} \sum_{i\omega_n, \mathbf{k}} \left[\frac{(i\omega_n - \xi_{\mathbf{k}-\mathbf{q}/2})(i\omega_n - i\nu + \xi_{\mathbf{k}+\mathbf{q}/2}) - \Re\epsilon(\gamma_{\mathbf{k}-\mathbf{q}/2}^* \gamma_{\mathbf{k}+\mathbf{q}/2})}{[(i\omega_n - \xi_{\mathbf{k}-\mathbf{q}/2})^2 - |\gamma_{\mathbf{k}-\mathbf{q}/2}|^2][(i\omega_n - i\nu + \xi_{\mathbf{k}+\mathbf{q}/2})^2 - |\gamma_{\mathbf{k}+\mathbf{q}/2}|^2]} \right]$$

Per compattezza si pone $\Re\epsilon(\gamma_{\mathbf{k}-\mathbf{q}/2}^* \gamma_{\mathbf{k}+\mathbf{q}/2}) = \Re\epsilon_{\mathbf{k}, \mathbf{q}}$. In parallelo al caso libero per ottenere una forma trattabile sia analiticamente che numericamente é necessario svolgere la somma sulle frequenze di Matsubara Fermioniche $i\omega_n$. Questa somma ha 4 poli:

$$\begin{aligned}z_{\pm} &= \xi_{\mathbf{k}-\mathbf{q}/2} \pm |\gamma_{\mathbf{k}-\mathbf{q}/2}| \\ z_{\nu, \pm} &= i\nu - \xi_{\mathbf{k}+\mathbf{q}/2} \pm |\gamma_{\mathbf{k}+\mathbf{q}/2}|\end{aligned}\tag{5.45}$$

e può essere svolta similmente a quanto fatto nel caso in assenza di interazione spin-orbita.

$$\begin{aligned}\chi(q) &= \frac{1}{\Omega} \sum_{\mathbf{k}} \frac{|\gamma_{\mathbf{k}-\mathbf{q}/2}|(\xi_{\mathbf{k}-\mathbf{q}/2} + |\gamma_{\mathbf{k}-\mathbf{q}/2}| - i\nu + \xi_{\mathbf{k}+\mathbf{q}/2}) - \Re\epsilon_{\mathbf{k}, \mathbf{q}}}{2|\gamma_{\mathbf{k}-\mathbf{q}/2}|[(\xi_{\mathbf{k}-\mathbf{q}/2} + |\gamma_{\mathbf{k}-\mathbf{q}/2}| - i\nu + \xi_{\mathbf{k}+\mathbf{q}/2})^2 - |\gamma_{\mathbf{k}+\mathbf{q}/2}|^2]} n_{\text{F}}(\xi_{\mathbf{k}-\mathbf{q}/2} + |\gamma_{\mathbf{k}-\mathbf{q}/2}|) + \\ &+ \frac{1}{\Omega} \sum_{\mathbf{k}} \frac{-|\gamma_{\mathbf{k}-\mathbf{q}/2}|(\xi_{\mathbf{k}-\mathbf{q}/2} - |\gamma_{\mathbf{k}-\mathbf{q}/2}| - i\nu + \xi_{\mathbf{k}+\mathbf{q}/2}) - \Re\epsilon_{\mathbf{k}, \mathbf{q}}}{-2|\gamma_{\mathbf{k}-\mathbf{q}/2}|[(\xi_{\mathbf{k}-\mathbf{q}/2} - |\gamma_{\mathbf{k}-\mathbf{q}/2}| - i\nu + \xi_{\mathbf{k}+\mathbf{q}/2})^2 - |\gamma_{\mathbf{k}+\mathbf{q}/2}|^2]} n_{\text{F}}(\xi_{\mathbf{k}-\mathbf{q}/2} - |\gamma_{\mathbf{k}-\mathbf{q}/2}|) + \\ &+ \frac{1}{\Omega} \sum_{\mathbf{k}} \frac{(i\nu - \xi_{\mathbf{k}+\mathbf{q}/2} + |\gamma_{\mathbf{k}+\mathbf{q}/2}| - \xi_{\mathbf{k}-\mathbf{q}/2})|\gamma_{\mathbf{k}+\mathbf{q}/2}| - \Re\epsilon_{\mathbf{k}, \mathbf{q}}}{2[(i\nu - \xi_{\mathbf{k}+\mathbf{q}/2} + |\gamma_{\mathbf{k}+\mathbf{q}/2}| - \xi_{\mathbf{k}-\mathbf{q}/2})^2 - |\gamma_{\mathbf{k}-\mathbf{q}/2}|^2]|\gamma_{\mathbf{k}+\mathbf{q}/2}|} n_{\text{F}}(-\xi_{\mathbf{k}+\mathbf{q}/2} + |\gamma_{\mathbf{k}+\mathbf{q}/2}|) + \\ &+ \frac{1}{\Omega} \sum_{\mathbf{k}} \frac{-(i\nu - \xi_{\mathbf{k}+\mathbf{q}/2} - |\gamma_{\mathbf{k}+\mathbf{q}/2}| - \xi_{\mathbf{k}-\mathbf{q}/2})|\gamma_{\mathbf{k}+\mathbf{q}/2}| - \Re\epsilon_{\mathbf{k}, \mathbf{q}}}{-2[(i\nu - \xi_{\mathbf{k}+\mathbf{q}/2} - |\gamma_{\mathbf{k}+\mathbf{q}/2}| - \xi_{\mathbf{k}-\mathbf{q}/2})^2 - |\gamma_{\mathbf{k}-\mathbf{q}/2}|^2]|\gamma_{\mathbf{k}+\mathbf{q}/2}|} n_{\text{F}}(-\xi_{\mathbf{k}+\mathbf{q}/2} - |\gamma_{\mathbf{k}+\mathbf{q}/2}|)\end{aligned}$$

Espandendo il denominatore

$$\begin{aligned}&= -\frac{1}{2\Omega} \sum_{\mathbf{k}} \frac{i\nu - \xi_{\mathbf{k}-\mathbf{q}/2} - \xi_{\mathbf{k}+\mathbf{q}/2} - |\gamma_{\mathbf{k}-\mathbf{q}/2}| + \Re\epsilon_{\mathbf{k}, \mathbf{q}}/|\gamma_{\mathbf{k}-\mathbf{q}/2}|}{[i\nu - \xi_{\mathbf{k}-\mathbf{q}/2} - \xi_{\mathbf{k}+\mathbf{q}/2} - |\gamma_{\mathbf{k}-\mathbf{q}/2}| + |\gamma_{\mathbf{k}+\mathbf{q}/2}|][i\nu - \xi_{\mathbf{k}-\mathbf{q}/2} - \xi_{\mathbf{k}+\mathbf{q}/2} - |\gamma_{\mathbf{k}-\mathbf{q}/2}| - |\gamma_{\mathbf{k}+\mathbf{q}/2}|]} n_{\text{F}}(\xi_{\mathbf{k}-\mathbf{q}/2} + |\gamma_{\mathbf{k}-\mathbf{q}/2}|) + \\ &- \frac{1}{2\Omega} \sum_{\mathbf{k}} \frac{i\nu - \xi_{\mathbf{k}-\mathbf{q}/2} - \xi_{\mathbf{k}+\mathbf{q}/2} + |\gamma_{\mathbf{k}-\mathbf{q}/2}| - \Re\epsilon_{\mathbf{k}, \mathbf{q}}/|\gamma_{\mathbf{k}-\mathbf{q}/2}|}{[i\nu - \xi_{\mathbf{k}-\mathbf{q}/2} - \xi_{\mathbf{k}+\mathbf{q}/2} + |\gamma_{\mathbf{k}-\mathbf{q}/2}| + |\gamma_{\mathbf{k}+\mathbf{q}/2}|][i\nu - \xi_{\mathbf{k}-\mathbf{q}/2} - \xi_{\mathbf{k}+\mathbf{q}/2} + |\gamma_{\mathbf{k}-\mathbf{q}/2}| - |\gamma_{\mathbf{k}+\mathbf{q}/2}|]} n_{\text{F}}(\xi_{\mathbf{k}-\mathbf{q}/2} - |\gamma_{\mathbf{k}-\mathbf{q}/2}|) + \\ &+ \frac{1}{2\Omega} \sum_{\mathbf{k}} \frac{i\nu - \xi_{\mathbf{k}-\mathbf{q}/2} - \xi_{\mathbf{k}+\mathbf{q}/2} + |\gamma_{\mathbf{k}+\mathbf{q}/2}| - \Re\epsilon_{\mathbf{k}, \mathbf{q}}/|\gamma_{\mathbf{k}+\mathbf{q}/2}|}{[i\nu - \xi_{\mathbf{k}-\mathbf{q}/2} - \xi_{\mathbf{k}+\mathbf{q}/2} + |\gamma_{\mathbf{k}-\mathbf{q}/2}| + |\gamma_{\mathbf{k}+\mathbf{q}/2}|][i\nu - \xi_{\mathbf{k}-\mathbf{q}/2} - \xi_{\mathbf{k}+\mathbf{q}/2} - |\gamma_{\mathbf{k}-\mathbf{q}/2}| + |\gamma_{\mathbf{k}+\mathbf{q}/2}|]} n_{\text{F}}(-\xi_{\mathbf{k}+\mathbf{q}/2} + |\gamma_{\mathbf{k}+\mathbf{q}/2}|) + \\ &+ \frac{1}{2\Omega} \sum_{\mathbf{k}} \frac{i\nu - \xi_{\mathbf{k}-\mathbf{q}/2} - \xi_{\mathbf{k}+\mathbf{q}/2} - |\gamma_{\mathbf{k}+\mathbf{q}/2}| + \Re\epsilon_{\mathbf{k}, \mathbf{q}}/|\gamma_{\mathbf{k}+\mathbf{q}/2}|}{[i\nu - \xi_{\mathbf{k}-\mathbf{q}/2} - \xi_{\mathbf{k}+\mathbf{q}/2} - |\gamma_{\mathbf{k}-\mathbf{q}/2}| - |\gamma_{\mathbf{k}+\mathbf{q}/2}|][i\nu - \xi_{\mathbf{k}-\mathbf{q}/2} - \xi_{\mathbf{k}+\mathbf{q}/2} + |\gamma_{\mathbf{k}-\mathbf{q}/2}| - |\gamma_{\mathbf{k}+\mathbf{q}/2}|]} n_{\text{F}}(-\xi_{\mathbf{k}+\mathbf{q}/2} - |\gamma_{\mathbf{k}+\mathbf{q}/2}|)\end{aligned}$$

Ogni termine può essere diviso in due sfruttando la relazione

$$\frac{A}{[\cdots + |\gamma_{\mathbf{p}}|][\cdots - |\gamma_{\mathbf{p}}|]} = \frac{1}{2} \frac{-A}{|\gamma_{\mathbf{p}}|[\cdots + |\gamma_{\mathbf{p}}|]} + \frac{1}{2} \frac{A}{|\gamma_{\mathbf{p}}|[\cdots - |\gamma_{\mathbf{p}}|]} \quad (5.46)$$

Quindi

$$\begin{aligned} &= -\frac{1}{4\Omega} \sum_{\mathbf{k}} \frac{i\nu - \xi_{\mathbf{k}-\mathbf{q}/2} - \xi_{\mathbf{k}+\mathbf{q}/2} - |\gamma_{\mathbf{k}-\mathbf{q}/2}| + \Re \mathbf{e}_{\mathbf{k},\mathbf{q}}/|\gamma_{\mathbf{k}-\mathbf{q}/2}|}{|\gamma_{\mathbf{k}+\mathbf{q}/2}|[i\nu - \xi_{\mathbf{k}-\mathbf{q}/2} - \xi_{\mathbf{k}+\mathbf{q}/2} - |\gamma_{\mathbf{k}-\mathbf{q}/2}| - |\gamma_{\mathbf{k}+\mathbf{q}/2}|]} n_{\text{F}}(\xi_{\mathbf{k}-\mathbf{q}/2} + |\gamma_{\mathbf{k}-\mathbf{q}/2}|) + \\ &\quad + \frac{1}{4\Omega} \sum_{\mathbf{k}} \frac{i\nu - \xi_{\mathbf{k}-\mathbf{q}/2} - \xi_{\mathbf{k}+\mathbf{q}/2} - |\gamma_{\mathbf{k}-\mathbf{q}/2}| + \Re \mathbf{e}_{\mathbf{k},\mathbf{q}}/|\gamma_{\mathbf{k}-\mathbf{q}/2}|}{|\gamma_{\mathbf{k}+\mathbf{q}/2}|[i\nu - \xi_{\mathbf{k}-\mathbf{q}/2} - \xi_{\mathbf{k}+\mathbf{q}/2} - |\gamma_{\mathbf{k}-\mathbf{q}/2}| + |\gamma_{\mathbf{k}+\mathbf{q}/2}|]} n_{\text{F}}(\xi_{\mathbf{k}-\mathbf{q}/2} + |\gamma_{\mathbf{k}-\mathbf{q}/2}|) + \\ &\quad - \frac{1}{4\Omega} \sum_{\mathbf{k}} \frac{i\nu - \xi_{\mathbf{k}-\mathbf{q}/2} - \xi_{\mathbf{k}+\mathbf{q}/2} + |\gamma_{\mathbf{k}-\mathbf{q}/2}| - \Re \mathbf{e}_{\mathbf{k},\mathbf{q}}/|\gamma_{\mathbf{k}-\mathbf{q}/2}|}{|\gamma_{\mathbf{k}+\mathbf{q}/2}|[i\nu - \xi_{\mathbf{k}-\mathbf{q}/2} - \xi_{\mathbf{k}+\mathbf{q}/2} + |\gamma_{\mathbf{k}-\mathbf{q}/2}| - |\gamma_{\mathbf{k}+\mathbf{q}/2}|]} n_{\text{F}}(\xi_{\mathbf{k}-\mathbf{q}/2} - |\gamma_{\mathbf{k}-\mathbf{q}/2}|) + \\ &\quad + \frac{1}{4\Omega} \sum_{\mathbf{k}} \frac{i\nu - \xi_{\mathbf{k}-\mathbf{q}/2} - \xi_{\mathbf{k}+\mathbf{q}/2} + |\gamma_{\mathbf{k}-\mathbf{q}/2}| - \Re \mathbf{e}_{\mathbf{k},\mathbf{q}}/|\gamma_{\mathbf{k}-\mathbf{q}/2}|}{|\gamma_{\mathbf{k}+\mathbf{q}/2}|[i\nu - \xi_{\mathbf{k}-\mathbf{q}/2} - \xi_{\mathbf{k}+\mathbf{q}/2} + |\gamma_{\mathbf{k}-\mathbf{q}/2}| + |\gamma_{\mathbf{k}+\mathbf{q}/2}|]} n_{\text{F}}(\xi_{\mathbf{k}-\mathbf{q}/2} - |\gamma_{\mathbf{k}-\mathbf{q}/2}|) + \\ &\quad + \frac{1}{4\Omega} \sum_{\mathbf{k}} \frac{i\nu - \xi_{\mathbf{k}-\mathbf{q}/2} - \xi_{\mathbf{k}+\mathbf{q}/2} + |\gamma_{\mathbf{k}+\mathbf{q}/2}| - \Re \mathbf{e}_{\mathbf{k},\mathbf{q}}/|\gamma_{\mathbf{k}+\mathbf{q}/2}|}{|\gamma_{\mathbf{k}-\mathbf{q}/2}|[i\nu - \xi_{\mathbf{k}-\mathbf{q}/2} - \xi_{\mathbf{k}+\mathbf{q}/2} - |\gamma_{\mathbf{k}-\mathbf{q}/2}| + |\gamma_{\mathbf{k}+\mathbf{q}/2}|]} n_{\text{F}}(-\xi_{\mathbf{k}+\mathbf{q}/2} + |\gamma_{\mathbf{k}+\mathbf{q}/2}|) + \\ &\quad - \frac{1}{4\Omega} \sum_{\mathbf{k}} \frac{i\nu - \xi_{\mathbf{k}-\mathbf{q}/2} - \xi_{\mathbf{k}+\mathbf{q}/2} + |\gamma_{\mathbf{k}+\mathbf{q}/2}| - \Re \mathbf{e}_{\mathbf{k},\mathbf{q}}/|\gamma_{\mathbf{k}+\mathbf{q}/2}|}{|\gamma_{\mathbf{k}-\mathbf{q}/2}|[i\nu - \xi_{\mathbf{k}-\mathbf{q}/2} - \xi_{\mathbf{k}+\mathbf{q}/2} + |\gamma_{\mathbf{k}-\mathbf{q}/2}| + |\gamma_{\mathbf{k}+\mathbf{q}/2}|]} n_{\text{F}}(-\xi_{\mathbf{k}+\mathbf{q}/2} + |\gamma_{\mathbf{k}+\mathbf{q}/2}|) + \\ &\quad + \frac{1}{4\Omega} \sum_{\mathbf{k}} \frac{i\nu - \xi_{\mathbf{k}-\mathbf{q}/2} - \xi_{\mathbf{k}+\mathbf{q}/2} - |\gamma_{\mathbf{k}+\mathbf{q}/2}| + \Re \mathbf{e}_{\mathbf{k},\mathbf{q}}/|\gamma_{\mathbf{k}+\mathbf{q}/2}|}{|\gamma_{\mathbf{k}-\mathbf{q}/2}|[i\nu - \xi_{\mathbf{k}-\mathbf{q}/2} - \xi_{\mathbf{k}+\mathbf{q}/2} - |\gamma_{\mathbf{k}-\mathbf{q}/2}| - |\gamma_{\mathbf{k}+\mathbf{q}/2}|]} n_{\text{F}}(-\xi_{\mathbf{k}+\mathbf{q}/2} - |\gamma_{\mathbf{k}+\mathbf{q}/2}|) + \\ &\quad - \frac{1}{4\Omega} \sum_{\mathbf{k}} \frac{i\nu - \xi_{\mathbf{k}-\mathbf{q}/2} - \xi_{\mathbf{k}+\mathbf{q}/2} - |\gamma_{\mathbf{k}+\mathbf{q}/2}| + \Re \mathbf{e}_{\mathbf{k},\mathbf{q}}/|\gamma_{\mathbf{k}+\mathbf{q}/2}|}{|\gamma_{\mathbf{k}-\mathbf{q}/2}|[i\nu - \xi_{\mathbf{k}-\mathbf{q}/2} - \xi_{\mathbf{k}+\mathbf{q}/2} + |\gamma_{\mathbf{k}-\mathbf{q}/2}| - |\gamma_{\mathbf{k}+\mathbf{q}/2}|]} n_{\text{F}}(-\xi_{\mathbf{k}+\mathbf{q}/2} - |\gamma_{\mathbf{k}+\mathbf{q}/2}|) \end{aligned}$$

Definita la quantità $C_{\mathbf{k},\mathbf{q}} = \frac{\Re(\gamma_{\mathbf{k}-\mathbf{q}/2}^* \gamma_{\mathbf{k}+\mathbf{q}/2})}{|\gamma_{\mathbf{k}-\mathbf{q}/2}| |\gamma_{\mathbf{k}+\mathbf{q}/2}|}$, con

$$\begin{aligned} \Re(\gamma_{\mathbf{k}}^* \gamma_{\mathbf{p}}) &= \Re \{ [v_{\text{R}}(k_x - ik_y) + v_{\text{D}}(k_x + ik_y)] [v_{\text{R}}(p_x + ip_y) + v_{\text{D}}(p_x - ip_y)] \} = \\ &= (v_{\text{D}} + v_{\text{R}})^2 k_x p_x + (v_{\text{D}} - v_{\text{R}})^2 k_y p_y \end{aligned}$$

Nel caso in esame dunque la quantità $C_{\mathbf{k},\mathbf{q}}$ è

$$C_{\mathbf{k},\mathbf{q}} = \frac{(v_{\text{D}} + v_{\text{R}})^2 (k_x^2 - q_x^2/4) + (v_{\text{D}} - v_{\text{R}})^2 (k_y^2 - q_y^2/4)}{|\gamma_{\mathbf{k}-\mathbf{q}/2}| |\gamma_{\mathbf{k}+\mathbf{q}/2}|} \quad (5.47)$$

Su ogni termine è possibile sommare e sottrarre un termine del tipo $|\gamma|$ di modo da

ottenere un termine che eguagli il denominatore

$$\begin{aligned}
&= -\frac{1}{4\Omega} \sum_{\mathbf{k}} \frac{n_{\text{F}}(\xi_{\mathbf{k}-\mathbf{q}/2} + |\gamma_{\mathbf{k}-\mathbf{q}/2}|)}{|\gamma_{\mathbf{k}+\mathbf{q}/2}|} - \frac{1}{4\Omega} \sum_{\mathbf{k}} \frac{(1 + C_{\mathbf{k},\mathbf{q}})n_{\text{F}}(\xi_{\mathbf{k}-\mathbf{q}/2} + |\gamma_{\mathbf{k}-\mathbf{q}/2}|)}{[i\nu - \xi_{\mathbf{k}-\mathbf{q}/2} - \xi_{\mathbf{k}+\mathbf{q}/2} - |\gamma_{\mathbf{k}-\mathbf{q}/2}| - |\gamma_{\mathbf{k}+\mathbf{q}/2}|]} + \\
&\quad + \frac{1}{4\Omega} \sum_{\mathbf{k}} \frac{n_{\text{F}}(\xi_{\mathbf{k}-\mathbf{q}/2} + |\gamma_{\mathbf{k}-\mathbf{q}/2}|)}{|\gamma_{\mathbf{k}+\mathbf{q}/2}|} - \frac{1}{4\Omega} \sum_{\mathbf{k}} \frac{(1 - C_{\mathbf{k},\mathbf{q}})n_{\text{F}}(\xi_{\mathbf{k}-\mathbf{q}/2} + |\gamma_{\mathbf{k}-\mathbf{q}/2}|)}{[i\nu - \xi_{\mathbf{k}-\mathbf{q}/2} - \xi_{\mathbf{k}+\mathbf{q}/2} - |\gamma_{\mathbf{k}-\mathbf{q}/2}| + |\gamma_{\mathbf{k}+\mathbf{q}/2}|]} + \\
&\quad - \frac{1}{4\Omega} \sum_{\mathbf{k}} \frac{n_{\text{F}}(\xi_{\mathbf{k}-\mathbf{q}/2} - |\gamma_{\mathbf{k}-\mathbf{q}/2}|)}{|\gamma_{\mathbf{k}+\mathbf{q}/2}|} - \frac{1}{4\Omega} \sum_{\mathbf{k}} \frac{(1 - C_{\mathbf{k},\mathbf{q}})n_{\text{F}}(\xi_{\mathbf{k}-\mathbf{q}/2} - |\gamma_{\mathbf{k}-\mathbf{q}/2}|)}{[i\nu - \xi_{\mathbf{k}-\mathbf{q}/2} - \xi_{\mathbf{k}+\mathbf{q}/2} + |\gamma_{\mathbf{k}-\mathbf{q}/2}| - |\gamma_{\mathbf{k}+\mathbf{q}/2}|]} - \\
&\quad + \frac{1}{4\Omega} \sum_{\mathbf{k}} \frac{n_{\text{F}}(\xi_{\mathbf{k}-\mathbf{q}/2} - |\gamma_{\mathbf{k}-\mathbf{q}/2}|)}{|\gamma_{\mathbf{k}+\mathbf{q}/2}|} - \frac{1}{4\Omega} \sum_{\mathbf{k}} \frac{(1 + C_{\mathbf{k},\mathbf{q}})n_{\text{F}}(\xi_{\mathbf{k}-\mathbf{q}/2} - |\gamma_{\mathbf{k}-\mathbf{q}/2}|)}{[i\nu - \xi_{\mathbf{k}-\mathbf{q}/2} - \xi_{\mathbf{k}+\mathbf{q}/2} + |\gamma_{\mathbf{k}-\mathbf{q}/2}| + |\gamma_{\mathbf{k}+\mathbf{q}/2}|]} + \\
&\quad + \frac{1}{4\Omega} \sum_{\mathbf{k}} \frac{n_{\text{F}}(-\xi_{\mathbf{k}+\mathbf{q}/2} + |\gamma_{\mathbf{k}+\mathbf{q}/2}|)}{|\gamma_{\mathbf{k}-\mathbf{q}/2}|} + \frac{1}{4\Omega} \sum_{\mathbf{k}} \frac{(1 - C_{\mathbf{k},\mathbf{q}})n_{\text{F}}(-\xi_{\mathbf{k}+\mathbf{q}/2} + |\gamma_{\mathbf{k}+\mathbf{q}/2}|)}{[i\nu - \xi_{\mathbf{k}-\mathbf{q}/2} - \xi_{\mathbf{k}+\mathbf{q}/2} - |\gamma_{\mathbf{k}-\mathbf{q}/2}| + |\gamma_{\mathbf{k}+\mathbf{q}/2}|]} + \\
&\quad - \frac{1}{4\Omega} \sum_{\mathbf{k}} \frac{n_{\text{F}}(-\xi_{\mathbf{k}+\mathbf{q}/2} + |\gamma_{\mathbf{k}+\mathbf{q}/2}|)}{|\gamma_{\mathbf{k}-\mathbf{q}/2}|} + \frac{1}{4\Omega} \sum_{\mathbf{k}} \frac{(1 + C_{\mathbf{k},\mathbf{q}})n_{\text{F}}(-\xi_{\mathbf{k}+\mathbf{q}/2} + |\gamma_{\mathbf{k}+\mathbf{q}/2}|)}{[i\nu - \xi_{\mathbf{k}-\mathbf{q}/2} - \xi_{\mathbf{k}+\mathbf{q}/2} + |\gamma_{\mathbf{k}-\mathbf{q}/2}| + |\gamma_{\mathbf{k}+\mathbf{q}/2}|]} + \\
&\quad + \frac{1}{4\Omega} \sum_{\mathbf{k}} \frac{n_{\text{F}}(-\xi_{\mathbf{k}+\mathbf{q}/2} - |\gamma_{\mathbf{k}+\mathbf{q}/2}|)}{|\gamma_{\mathbf{k}-\mathbf{q}/2}|} + \frac{1}{4\Omega} \sum_{\mathbf{k}} \frac{(1 + C_{\mathbf{k},\mathbf{q}})n_{\text{F}}(-\xi_{\mathbf{k}+\mathbf{q}/2} - |\gamma_{\mathbf{k}+\mathbf{q}/2}|)}{[i\nu - \xi_{\mathbf{k}-\mathbf{q}/2} - \xi_{\mathbf{k}+\mathbf{q}/2} - |\gamma_{\mathbf{k}-\mathbf{q}/2}| - |\gamma_{\mathbf{k}+\mathbf{q}/2}|]} - \\
&\quad - \frac{1}{4\Omega} \sum_{\mathbf{k}} \frac{n_{\text{F}}(-\xi_{\mathbf{k}+\mathbf{q}/2} - |\gamma_{\mathbf{k}+\mathbf{q}/2}|)}{|\gamma_{\mathbf{k}-\mathbf{q}/2}|} + \frac{1}{4\Omega} \sum_{\mathbf{k}} \frac{(1 - C_{\mathbf{k},\mathbf{q}})n_{\text{F}}(-\xi_{\mathbf{k}+\mathbf{q}/2} - |\gamma_{\mathbf{k}+\mathbf{q}/2}|)}{[i\nu - \xi_{\mathbf{k}-\mathbf{q}/2} - \xi_{\mathbf{k}+\mathbf{q}/2} + |\gamma_{\mathbf{k}-\mathbf{q}/2}| - |\gamma_{\mathbf{k}+\mathbf{q}/2}|]}
\end{aligned}$$

Si nota dunque che tutti i primi termini per ogni riga se sommati si cancellano. Gli altri con uguale denominatore possono essere sommati. Considerando in ultimo per la distribuzione di Fermi-Dirac vale $n_{\text{F}}(-x) = 1 - n_{\text{F}}(x)$, si ottiene che

$$\begin{aligned}
\chi(\mathbf{q}) &= \frac{1}{4\Omega} \sum_{\mathbf{k}} (1 + C_{\mathbf{k},\mathbf{q}}) \frac{1 - n_{\text{F}}(\xi_{\mathbf{k}-\mathbf{q}/2} + |\gamma_{\mathbf{k}-\mathbf{q}/2}|) - n_{\text{F}}(\xi_{\mathbf{k}+\mathbf{q}/2} + |\gamma_{\mathbf{k}+\mathbf{q}/2}|)}{[i\nu - \xi_{\mathbf{k}-\mathbf{q}/2} - \xi_{\mathbf{k}+\mathbf{q}/2} - |\gamma_{\mathbf{k}-\mathbf{q}/2}| - |\gamma_{\mathbf{k}+\mathbf{q}/2}|]} \\
&\quad + \frac{1}{4\Omega} \sum_{\mathbf{k}} (1 + C_{\mathbf{k},\mathbf{q}}) \frac{1 - n_{\text{F}}(\xi_{\mathbf{k}-\mathbf{q}/2} - |\gamma_{\mathbf{k}-\mathbf{q}/2}|) - n_{\text{F}}(\xi_{\mathbf{k}+\mathbf{q}/2} - |\gamma_{\mathbf{k}+\mathbf{q}/2}|)}{[i\nu - \xi_{\mathbf{k}-\mathbf{q}/2} - \xi_{\mathbf{k}+\mathbf{q}/2} + |\gamma_{\mathbf{k}-\mathbf{q}/2}| + |\gamma_{\mathbf{k}+\mathbf{q}/2}|]} \\
&\quad + \frac{1}{4\Omega} \sum_{\mathbf{k}} (1 - C_{\mathbf{k},\mathbf{q}}) \frac{1 - n_{\text{F}}(\xi_{\mathbf{k}-\mathbf{q}/2} + |\gamma_{\mathbf{k}-\mathbf{q}/2}|) - n_{\text{F}}(\xi_{\mathbf{k}+\mathbf{q}/2} - |\gamma_{\mathbf{k}+\mathbf{q}/2}|)}{[i\nu - \xi_{\mathbf{k}-\mathbf{q}/2} - \xi_{\mathbf{k}+\mathbf{q}/2} - |\gamma_{\mathbf{k}-\mathbf{q}/2}| + |\gamma_{\mathbf{k}+\mathbf{q}/2}|]} \\
&\quad + \frac{1}{4\Omega} \sum_{\mathbf{k}} (1 - C_{\mathbf{k},\mathbf{q}}) \frac{1 - n_{\text{F}}(\xi_{\mathbf{k}-\mathbf{q}/2} - |\gamma_{\mathbf{k}-\mathbf{q}/2}|) - n_{\text{F}}(\xi_{\mathbf{k}+\mathbf{q}/2} + |\gamma_{\mathbf{k}+\mathbf{q}/2}|)}{[i\nu - \xi_{\mathbf{k}-\mathbf{q}/2} - \xi_{\mathbf{k}+\mathbf{q}/2} + |\gamma_{\mathbf{k}-\mathbf{q}/2}| - |\gamma_{\mathbf{k}+\mathbf{q}/2}|]}
\end{aligned}$$

poiché ogni termine della sommatoria è simmetrico sotto l'inversione $\mathbf{k} \rightarrow -\mathbf{k}$ tale oggetto

può anche essere riscritto come

$$\begin{aligned}\chi(\mathbf{q}) &= \frac{1}{4\Omega} \sum_{\mathbf{k}} (1 + C_{\mathbf{k},\mathbf{q}}) \frac{\tanh((\xi_{\mathbf{k}+\mathbf{q}/2} + |\gamma_{\mathbf{k}+\mathbf{q}/2}|)/2T_c)}{[i\nu - \xi_{\mathbf{k}-\mathbf{q}/2} - \xi_{\mathbf{k}+\mathbf{q}/2} - |\gamma_{\mathbf{k}-\mathbf{q}/2}| - |\gamma_{\mathbf{k}+\mathbf{q}/2}|]} + \\ &\quad + \frac{1}{4\Omega} \sum_{\mathbf{k}} (1 + C_{\mathbf{k},\mathbf{q}}) \frac{\tanh((\xi_{\mathbf{k}+\mathbf{q}/2} - |\gamma_{\mathbf{k}+\mathbf{q}/2}|)/2T_c)}{[i\nu - \xi_{\mathbf{k}-\mathbf{q}/2} - \xi_{\mathbf{k}+\mathbf{q}/2} + |\gamma_{\mathbf{k}-\mathbf{q}/2}| + |\gamma_{\mathbf{k}+\mathbf{q}/2}|]} + \\ &\quad + \frac{1}{4\Omega} \sum_{\mathbf{k}} (1 - C_{\mathbf{k},\mathbf{q}}) \frac{\tanh((\xi_{\mathbf{k}+\mathbf{q}/2} - |\gamma_{\mathbf{k}+\mathbf{q}/2}|)/2T_c) + \tanh((\xi_{\mathbf{k}-\mathbf{q}/2} + |\gamma_{\mathbf{k}-\mathbf{q}/2}|)/2T_c)}{[i\nu - \xi_{\mathbf{k}-\mathbf{q}/2} - \xi_{\mathbf{k}+\mathbf{q}/2} + |\gamma_{\mathbf{k}+\mathbf{q}/2}| - |\gamma_{\mathbf{k}-\mathbf{q}/2}|]}\end{aligned}$$

5.4 Densità di particelle

Si trova dunque che $\Gamma^{-1}(q)$ è inevitabilmente più complicata del caso in assenza di spin-orbita. La funzione di partizione tuttavia si mantiene inalterata in forma ((3.40)) ed è possibile applicare gli stessi ragionamenti fatti precedentemente nella sezione 3.2.3 per trovare il potenziale grancanonico e l'equazione per la densità di particelle a causa del fatto che la continuazione analitica $\Gamma^{-1}(\mathbf{q}, z)$ non ha poli sul piano complesso, ma solo un taglio per $z \in \mathbb{R}$. La correzione al secondo ordine per la densità di particelle sarà data allora da

$$n^{(2)} = +\frac{1}{\beta\Omega} \frac{\partial}{\partial\mu} Tr(\ln(\Gamma^{-1})) = +\frac{1}{\pi\Omega} \sum_{\mathbf{q}} \int_{-\infty}^{+\infty} d\omega n_B(\omega) \frac{\partial\delta(\mathbf{q}, \omega)}{\partial\mu} \quad (5.48)$$

con $n = n^{(0)} + n^{(2)}$ e la fase $\delta(q)$ definita analogamente

$$\delta(\mathbf{q}, \omega) = \lim_{\epsilon \rightarrow 0} Arg(\Gamma(\mathbf{q}, \omega + i\epsilon)^{-1}) \quad (5.49)$$

Dunque il sistema di equazioni da risolvere in presenza delle fluttuazioni Gaussiane sarà formato dalla gap equation, valida a tutti gli ordini e dall'equazione numero scritta precedentemente (5.29), con la correzione $n^{(2)}$:

$$\begin{aligned}\frac{1}{g} &= \frac{1}{4\Omega} \sum_{\mathbf{k}} \left\{ \frac{\tanh(\frac{\xi_{\mathbf{k}} - |\gamma_{\mathbf{k}}|}{2T_c})}{\xi_{\mathbf{k}} - |\gamma_{\mathbf{k}}|} + \frac{\tanh(\frac{\xi_{\mathbf{k}} + |\gamma_{\mathbf{k}}|}{2T_c})}{\xi_{\mathbf{k}} + |\gamma_{\mathbf{k}}|} - \frac{2}{\epsilon_{\mathbf{k}}} \right\} \\ n &= n^{(0)} + \frac{1}{\pi\Omega} \sum_{\mathbf{q}} \int_{-\infty}^{+\infty} d\omega n_B(\omega) \frac{\partial\delta(\mathbf{q}, \omega)}{\partial\mu}\end{aligned} \quad (5.50)$$

È stato ottenuto dunque l'analogo set di equazioni per determinare il potenziale chimico e la temperatura critica in presenza di un accoppiamento spin-orbita; queste, insieme alla forma esplicita della funzione $\Gamma^{-1}(q)$, costituiscono il fondamentale punto di partenza per una trattazione analitica e numerica del problema, affrontata nei capitoli successivi.

Capitolo 6

Il crossover BCS-BEC con accoppiamento spin-orbita

Per gli stessi motivi discussi nel caso precedente il potenziale di contatto introdotto dà luogo a divergenze che possono essere regolarizzate con la stessa procedura di rinormalizzazione. Questo è stato fatto in 2.2.1, mostrando come la relazione di rinormalizzazione nel caso spin-orbita rimanga inalterata in forma:

$$\frac{m}{4\pi a_R} = -\frac{1}{g} + \frac{1}{\Omega} \sum_{\mathbf{k}} \frac{1}{2\epsilon_{\mathbf{k}}} \quad (6.1)$$

avendo cura di sostituire $a_s \rightarrow a_R$ dove a_R indica una lunghezza di scattering che oltre che a dipendere dalla forma di un potenziale realistico contiene anche i dettagli dell'interazione di spin-orbita. Anche le considerazioni sull'implementazione dei limiti BCS e BEC in funzione della lunghezza di scattering rimangono dunque inalterate.

6.1 Campo medio

A livello dell'approssimazione di campo medio il sistema di equazioni da trattare nei limiti BCS e BEC è quello trovato in (5.29) con le sostituzioni dettate dalla procedura di rinormalizzazione (6.1).

$$\begin{aligned} -\frac{m}{4\pi a_R} &= \frac{1}{4\Omega} \sum_{\mathbf{k}} \left\{ \frac{\tanh\left(\frac{\xi_{\mathbf{k}} - |\gamma_{\mathbf{k}}|}{2T_c}\right)}{\xi_{\mathbf{k}} - |\gamma_{\mathbf{k}}|} + \frac{\tanh\left(\frac{\xi_{\mathbf{k}} + |\gamma_{\mathbf{k}}|}{2T_c}\right)}{\xi_{\mathbf{k}} + |\gamma_{\mathbf{k}}|} - \frac{2}{\epsilon_{\mathbf{k}}} \right\} \\ n &= \frac{1}{\Omega} \sum_{\mathbf{k}} \left\{ 1 - \frac{1}{2} \tanh\left(\frac{\xi_{\mathbf{k}} - |\gamma_{\mathbf{k}}|}{2T_c}\right) - \frac{1}{2} \tanh\left(\frac{\xi_{\mathbf{k}} + |\gamma_{\mathbf{k}}|}{2T_c}\right) \right\} \end{aligned} \quad (6.2)$$

L'equazione numero anche in questo caso descrive un set di Fermioni liberi e quindi che l'approssimazione di campo medio fallisca nel riprodurre le quantità termodinamiche nel caso di un'accoppiamento forte.

6.1.1 Accoppiamento debole

A basse temperature ci si aspetta che il potenziale chimico di un sistema di Fermioni debolmente interagente sia costante

$$\mu \underset{T \rightarrow 0}{\approx} E_F = E_F(\epsilon_F, v_R, v_D) \quad (6.3)$$

e dunque che in questo regime $\frac{\mu}{T} \gg 1$. Anche qui, nel limite di accoppiamento debole, l'equazione numero può essere tralasciata ed è possibile imporre l'ansatz (6.3) alla gap equation. Si ottiene così una equazione autoconsistente per determinare la temperatura critica in funzione di a_R . Si passa al limite del continuo e si effettuano un cambio variabili e le sostituzioni

$$\vec{p} = \frac{1}{k_F} \vec{k} \quad \tilde{\mu} = \frac{\mu}{\epsilon_F} \quad \tilde{T}_c = \frac{T_c}{\epsilon_F} \quad \tilde{v}_R = \frac{v_R}{v_F} \quad \tilde{v}_D = \frac{v_D}{v_F} \quad \tilde{\gamma}(\mathbf{p}, \tilde{v}_R, \tilde{v}_D) = 2\gamma(\mathbf{k}, v_R, v_D)$$

Al contario del caso in assenza di spin orbita la massa dei costituenti del gas non si può eliminare dalle equazioni ma deve essere incorporata ridefinendo l'accoppiamento $\tilde{v}_D = \frac{v_D}{v_F} = \frac{m v_D}{k_F}$ e similmente per v_R . La gap equation può essere riscritta come

$$\begin{aligned} -\frac{m}{4\pi a_R} &= \frac{1}{4\Omega} \sum_{\mathbf{k}} \left\{ \frac{\tanh\left(\frac{\xi_{\mathbf{k}} - |\gamma_{\mathbf{k}}|}{2\tilde{T}_c}\right)}{\xi_{\mathbf{k}} - |\gamma_{\mathbf{k}}|} + \frac{\tanh\left(\frac{\xi_{\mathbf{k}} + |\gamma_{\mathbf{k}}|}{2\tilde{T}_c}\right)}{\xi_{\mathbf{k}} + |\gamma_{\mathbf{k}}|} - \frac{2}{\epsilon_{\mathbf{k}}} \right\} = \\ &= \frac{k_F^3}{2(2\pi)^3 \epsilon_F} \int d^3 p \left\{ \frac{1}{2} \frac{\tanh\left(\frac{p^2 - \tilde{\mu} - |\tilde{\gamma}_{\mathbf{p}}|}{2\tilde{T}_c}\right)}{p^2 - \tilde{\mu} - |\tilde{\gamma}_{\mathbf{p}}|} + \right. \\ &\quad \left. + \frac{1}{2} \frac{\tanh\left(\frac{p^2 - \tilde{\mu} + |\tilde{\gamma}_{\mathbf{p}}|}{2\tilde{T}_c}\right)}{p^2 - \tilde{\mu} + |\tilde{\gamma}_{\mathbf{p}}|} - \frac{1}{p^2} \right\} \end{aligned}$$

Si può sfruttare la parità dell'integrando rispetto alle inversioni $p_i \rightarrow -p_i$ per dimezzare la regione di integrazione per ogni integrale moltiplicando tutto per 8. Semplificando ulteriormente e considerando l'accoppiamento adimensionale $y = \frac{1}{k_F a_R}$ otteniamo una

forma compatta dell'equazione

$$y = -\frac{4}{\pi^2} \int_0^\infty dp_x \int_0^\infty dp_y \int_0^\infty dp_z \left\{ \frac{1}{2} \frac{\tanh\left(\frac{p^2 - \tilde{\mu} - |\tilde{\gamma}_{\mathbf{p}}|}{2\tilde{T}_c}\right)}{p^2 - \tilde{\mu} - |\tilde{\gamma}_{\mathbf{p}}|} + \frac{1}{2} \frac{\tanh\left(\frac{p^2 - \tilde{\mu} + |\tilde{\gamma}_{\mathbf{p}}|}{2\tilde{T}_c}\right)}{p^2 - \tilde{\mu} + |\tilde{\gamma}_{\mathbf{p}}|} - \frac{1}{p^2} \right\} \quad (6.4)$$

La tentazione è quella di riportare questo integrale triplo alla forma degli integrali noti dalla trattazione precedente. La forma di $|\tilde{\gamma}_{\mathbf{p}}|$ tuttavia

$$|\tilde{\gamma}_{\mathbf{p}}| = 2\sqrt{(\tilde{v}_R + \tilde{v}_D)^2 p_x^2 + (\tilde{v}_R - \tilde{v}_D)^2 p_y^2} \quad (6.5)$$

rompendo l'invarianza per rotazioni del sistema, rende questa procedura difficoltosa. Si può sperare di ottenere qualche risultato in più considerando un accoppiamento di Rashba puro ($v_D = 0$). In questo caso $|\tilde{\gamma}_{\mathbf{p}}| = 2\tilde{v}_R \sqrt{p_x^2 + p_y^2} := 2\tilde{v}_R p_\perp$. Passando a coordinate cilindriche l'integrale nella gap equation si può riscrivere come

$$y = -\frac{2}{\pi} \int_0^\infty dp_z \int_0^\infty dp_\perp p_\perp \left\{ \frac{1}{2} \frac{\tanh\left(\frac{p_z^2 + p_\perp^2 - 2\tilde{v}_R p_\perp - \tilde{\mu}}{2\tilde{T}_c}\right)}{p_z^2 + p_\perp^2 - 2\tilde{v}_R p_\perp - \tilde{\mu}} + \frac{1}{2} \frac{\tanh\left(\frac{p_z^2 + p_\perp^2 + 2\tilde{v}_R p_\perp - \tilde{\mu}}{2\tilde{T}_c}\right)}{p_z^2 + p_\perp^2 + 2\tilde{v}_R p_\perp - \tilde{\mu}} - \frac{1}{p_z^2 + p_\perp^2} \right\} \quad (6.6)$$

Anche in questo caso una trattazione analitica risulta troppo complicata ed è lasciata ad un futuro sviluppo. L'equazione (6.4) è tuttavia risolta numericamente più avanti. Il risultato principale che si ottiene è che la temperatura critica del sistema nel lato BCS ha un andamento simile a quello esponenziale classico ma può essere incrementata notevolmente aumentando la forza dell'accoppiamento spin-orbita. Nelle sezioni successive verrà mostrato che tali risultati non vengono modificati dall'inclusione delle fluttuazioni Gaussiane.

6.1.2 Accoppiamento forte

Nel limite di accoppiamento forte $\mu/T_c \rightarrow -\infty$ la gap equation (6.4) può essere sfruttata per determinare il potenziale chimico del sistema, infatti la dipendenza dalla temperatura critica svanisce nell'approssimazione

$$\tanh\left(\frac{p^2 - \tilde{\mu} - \tilde{\gamma}_{\mathbf{p}}}{2\tilde{T}_c}\right) \approx 1 \quad (6.7)$$

$$y = -\frac{4}{\pi^2} \int_0^\infty dp_x \int_0^\infty dp_y \int_0^\infty dp_z \left\{ \frac{1}{2} \frac{1}{p^2 - \tilde{\mu} - |\tilde{\gamma}_{\mathbf{p}}|} + \frac{1}{2} \frac{1}{p^2 - \tilde{\mu} + |\tilde{\gamma}_{\mathbf{p}}|} - \frac{1}{p^2} \right\} \quad (6.8)$$

Questa equazione è risolta numericamente nel caso generale; in questa sezione c'è l'interesse invece a ricavare un risultato analitico, ottenibile semplificando la trattazione. Per un'accoppiamento di Rashba puro infatti si può trovare, sempre nel limite di accoppiamento forte

$$y = -\frac{2}{\pi} \int_0^\infty dp_z \int_0^\infty dp_\perp p_\perp \left\{ \frac{1}{2} \frac{1}{p_z^2 + p_\perp^2 - 2\tilde{v}_R p_\perp - \tilde{\mu}} + \frac{1}{2} \frac{1}{p_z^2 + p_\perp^2 + 2\tilde{v}_R p_\perp - \tilde{\mu}} - \frac{1}{p_z^2 + p_\perp^2} \right\} \quad (6.9)$$

Con le sostituzioni $p_\perp \rightarrow p_\perp \pm \tilde{v}_R$

$$y = -\frac{2}{\pi} \int_0^\infty dp_z \left\{ \frac{1}{2} \int_{-\tilde{v}_R}^\infty dp_\perp \frac{p_\perp + \tilde{v}_R}{p_z^2 + p_\perp^2 - \tilde{v}_R^2 - \tilde{\mu}} + \frac{1}{2} \int_{\tilde{v}_R}^\infty dp_\perp \frac{p_\perp - \tilde{v}_R}{p_z^2 + p_\perp^2 - \tilde{\mu}} - \int_0^\infty dp_\perp \frac{p_\perp}{p_z^2 + p_\perp^2} \right\} \quad (6.10)$$

che può essere riscritta come

$$y = -\frac{2}{\pi} \int_0^\infty dp_z \left\{ \int_{\tilde{v}_R}^\infty dp_\perp \frac{p_\perp}{p_z^2 + p_\perp^2 - \tilde{v}_R^2 - \tilde{\mu}} + \frac{\tilde{v}_R}{2} \int_{-\tilde{v}_R}^{\tilde{v}_R} dp_\perp \frac{1}{p_z^2 + p_\perp^2 - \tilde{v}_R^2 - \tilde{\mu}} - \int_0^\infty dp_\perp \frac{p_\perp}{p_z^2 + p_\perp^2} \right\} \quad (6.11)$$

questi integrali sono risolvibili, fissando un cut-off

$$\begin{aligned} \int_0^\Lambda dp_z \int_{\tilde{v}_R}^\infty dp_\perp \frac{p_\perp}{p_z^2 + p_\perp^2 - \tilde{v}_R^2 - \tilde{\mu}} &= \frac{\pi}{4} \int_{\tilde{v}_R}^\Lambda dp_\perp \frac{p_\perp}{\sqrt{p_\perp^2 - \tilde{v}_R^2 - \tilde{\mu}}} = \\ &= \frac{\pi}{2} \sqrt{p_\perp^2 - \tilde{v}_R^2 - \tilde{\mu}} \Big|_{\tilde{v}_R}^\Lambda = \frac{\pi}{2} \Lambda - \frac{\pi}{2} \sqrt{-\tilde{\mu}} \end{aligned} \quad (6.12)$$

$$\begin{aligned} -\frac{\tilde{v}_R}{2} \int_0^\infty dp_z \int_{-\tilde{v}_R}^{\tilde{v}_R} dp_\perp \frac{1}{p_z^2 + p_\perp^2 - \tilde{v}_R^2 - \tilde{\mu}} &= -\frac{\pi \tilde{v}_R}{4} \int_{-\tilde{v}_R}^{\tilde{v}_R} dp_\perp \frac{1}{\sqrt{p_\perp^2 - \tilde{v}_R^2 - \tilde{\mu}}} = \\ &= -\frac{\pi \tilde{v}_R}{2} \sinh^{-1} \left(\frac{\tilde{v}_R}{\sqrt{-\tilde{v}_R^2 - \tilde{\mu}}} \right) \approx -\frac{\pi \tilde{v}_R^2}{2} \frac{1}{\sqrt{-\tilde{\mu}}} \end{aligned} \quad (6.13)$$

$$-\int_0^\infty dp_z \int_0^\Lambda dp_\perp \frac{p_\perp}{p_z^2 + p_\perp^2} = -\frac{\pi}{2} \Lambda \quad (6.14)$$

Mettendo tutto assieme

$$y = \sqrt{-\tilde{\mu}} + \tilde{v}_R^2 \frac{1}{\sqrt{-\tilde{\mu}}} \Leftrightarrow \tilde{\mu} \approx 2\tilde{v}_R^2 - y^2 + o(y^4) \quad (6.15)$$

Per $\tilde{\mu} \gg 1$ (lato BEC) si trova dunque che $\mu = \epsilon_F \tilde{\mu} \sim -\epsilon_F y^2 = -\frac{1}{2ma_R^2}$. Nel limite di accoppiamento forte i dettagli dell'interazione spin-orbita possono essere trascurati e si ottiene la stessa forma del potenziale chimico trovata nel caso di Hamiltoniana di particella singola libera.

Si attende che anche in questo caso che la temperatura critica determinata nel limite di accoppiamento forte non riproduca correttamente il crossover ma piuttosto la temperatura associata alla rottura delle coppie di Cooper. Per questa tesi dunque non é rilevante studiare tale limite. I Risultati verranno ottenuti direttamente dal calcolo numerico.

6.2 Inclusione delle fluttuazioni Gaussiane

Con l'inclusione delle fluttuazioni Gaussiane il set di equazioni da risolvere per ricavare gli andamenti del potenziale chimico e della temperatura critica in funzione dell'accoppiamento è stato ricavato in (5.50). Entrambe le equazioni vengono modificate dalla procedura di rinormalizzazione (6.1) e si ottiene

$$\begin{aligned} -\frac{m}{4\pi a_R} &= \frac{1}{4\Omega} \sum_{\mathbf{k}} \left\{ \frac{\tanh(\frac{\xi_{\mathbf{k}} - |\gamma_{\mathbf{k}}|}{2T_c})}{\xi_{\mathbf{k}} - |\gamma_{\mathbf{k}}|} + \frac{\tanh(\frac{\xi_{\mathbf{k}} + |\gamma_{\mathbf{k}}|}{2T_c})}{\xi_{\mathbf{k}} + |\gamma_{\mathbf{k}}|} - \frac{2}{\epsilon_{\mathbf{k}}} \right\} \\ n &= n^{(0)} + \frac{1}{\pi\Omega} \sum_{\mathbf{q}} \int_{-\infty}^{+\infty} d\omega n_B(\omega) \frac{\partial \delta(\mathbf{q}, \omega)}{\partial \mu} \end{aligned} \quad (6.16)$$

con le definizioni

$$\begin{aligned} \delta(\mathbf{q}, \omega) &= \text{Arg}(\Gamma^{-1}(\mathbf{q}, \omega + i0^+)) \\ \Gamma^{-1}(q) &= -\frac{m}{4\pi a_R} + \chi(q) + \frac{1}{\Omega} \sum_{\mathbf{k}} \frac{1}{2\epsilon_{\mathbf{k}}} \end{aligned} \quad (6.17)$$

6.2.1 Accoppiamento debole

In questo limite il potenziale chimico è finito e la temperatura critica e la lunghezza di scattering vengono mandati a zero ($a_R \rightarrow 0^-$). Non verrà fatto un calcolo piú approfondito della funzione $\Gamma^{-1}(q)$, come fatto in 4.2.1; questo aveva permesso di mostrare esplicitamente come le correzioni all'equazione numero siano trascurabili nel limite di accoppiamento debole. Gli stessi ragionamenti tuttavia sono applicabili anche in questa sezione, poiché la struttura di $\Gamma^{-1}(q)$ é la stessa. Con x e y opportunamente definiti si

riscrive.

$$\Gamma^{-1}(q) = \frac{1}{a_R} + y + ix \quad (6.18)$$

La parte reale è dominate nel limite di accoppiamento debole ($\frac{1}{k_F a_R} \rightarrow -\infty$). Esplicitando la correzione alla densità di particelle:

$$\begin{aligned} n^{(2)} &= \frac{1}{\beta\Omega} \frac{\partial}{\partial\mu} \sum_{\mathbf{q}, i\nu_n} \ln(\Gamma^{-1}(\mathbf{q}, i\nu)) = \frac{1}{\beta\Omega} \sum_{\mathbf{q}, i\nu_n} \frac{1}{\Gamma^{-1}} \frac{\partial\Gamma^{-1}}{\partial\mu} = \\ &= \frac{1}{\beta\Omega} \sum_{\mathbf{q}, i\nu_n} \frac{1}{\frac{1}{a_R} + y + ix} \frac{\partial(y + ix)}{\partial\mu} \underset{a_R \rightarrow 0^-}{\sim} \frac{a_R}{\beta\Omega} \sum_{\mathbf{q}, i\nu_n} \frac{\partial(y + ix)}{\partial\mu} \propto a_R \end{aligned} \quad (6.19)$$

In tale limite la correzione alla densità di particelle risulta proporzionale alla lunghezza di scattering e dunque trascurabile. Il potenziale chimico sarà ancora $\mu \approx E_F$ e poiché l'equazione della gap è la stessa dell'approssimazione di campo medio, nel limite $\frac{1}{k_F a_R} \rightarrow -\infty$ ci si aspetta la stessa temperatura critica. L'inclusione delle fluttuazioni Gaussiane cioè non influisce sui risultati ad accoppiamento debole. In questo regime si potranno considerare affidabili i risultati ottenuti nell'approssimazione di campo medio.

6.2.2 Accoppiamento forte

È stato mostrato come la gap equation, valida a tutti gli ordini, nel limite di un potenziale chimico molto grande e negativo (limite BEC) diventi una equazione autoconsistente per determinare sempre μ , in funzione dell'accoppiamento e in questo regime, trovando

$$\mu \underset{y \rightarrow \infty}{\sim} -\frac{1}{2ma_R} \quad (6.20)$$

In questa sezione si vuole determinare invece la dipendenza della temperatura critica del sistema in funzione dell'accoppiamento. In assenza di un termine di spin-orbita è stato mostrato in 4.2.3, manipolando l'inversa del vertice della teoria, $\Gamma^{-1}(q)$, come la funzione di partizione tenda nel limite BEC (da cui appunto il nome) a quella di una set di Bosoni liberi, per i quali la T_c è ben nota. In particolare si è mostrato che

$$\Gamma^{-1}(\mathbf{q}, i\alpha_n) \underset{\frac{1}{k_F a_S} \rightarrow +\infty}{\propto} i\alpha_n - \left(\frac{q^2}{4m} - \mu_B \right) \quad \text{con} \quad \mu_B := 2\mu - E_b \quad (6.21)$$

Ripercorrere gli stessi ragionamenti è arduo in presenza di un accoppiamento spin-orbita a causa della rottura della simmetria per rotazioni, tuttavia è possibile seguire l'approccio utilizzato in una serie di articoli [34–36], ovvero una espansione fino al secondo ordine di $\Gamma^{-1}(\mathbf{q}, i\alpha_n)$ nei momenti, sempre nel limite BEC. L'obiettivo è dimostrare che in tale regime una relazione simile a (6.21) è soddisfatta.

Conoscere $\Gamma^{-1}(q)$ nella forma ottenuta, offre la possibilità di conoscere la fisica a due corpi del sistema esattamente. Come fatto in [34–36] ciò è possibile considerando l'inversa della funzione di vertice calcolata in precedenza

$$\begin{aligned}
\Gamma(\mathbf{q}, i\nu)^{-1} = & -\frac{m}{4\pi a_R} + \frac{1}{\Omega} \sum_{\mathbf{k}} \frac{1}{2\epsilon_{\mathbf{k}}} + \\
& + \frac{1}{4\Omega} \sum_{\mathbf{k}} (1 + C_{\mathbf{k},\mathbf{q}}) \frac{\tanh(\beta_c(\xi_{\mathbf{k}+\mathbf{q}/2} + |\gamma_{\mathbf{k}+\mathbf{q}/2}|)/2)}{[i\nu - \xi_{\mathbf{k}-\mathbf{q}/2} - \xi_{\mathbf{k}+\mathbf{q}/2} - |\gamma_{\mathbf{k}-\mathbf{q}/2}| - |\gamma_{\mathbf{k}+\mathbf{q}/2}|]} + \\
& + \frac{1}{4\Omega} \sum_{\mathbf{k}} (1 + C_{\mathbf{k},\mathbf{q}}) \frac{\tanh(\beta_c(\xi_{\mathbf{k}+\mathbf{q}/2} - |\gamma_{\mathbf{k}+\mathbf{q}/2}|)/2)}{[i\nu - \xi_{\mathbf{k}-\mathbf{q}/2} - \xi_{\mathbf{k}+\mathbf{q}/2} + |\gamma_{\mathbf{k}-\mathbf{q}/2}| + |\gamma_{\mathbf{k}+\mathbf{q}/2}|]} + \\
& + \frac{1}{4\Omega} \sum_{\mathbf{k}} (1 - C_{\mathbf{k},\mathbf{q}}) \frac{\tanh(\beta_c(\xi_{\mathbf{k}+\mathbf{q}/2} - |\gamma_{\mathbf{k}+\mathbf{q}/2}|)/2) + \tanh(\beta_c(\xi_{\mathbf{k}-\mathbf{q}/2} + |\gamma_{\mathbf{k}-\mathbf{q}/2}|)/2)}{[i\nu - \xi_{\mathbf{k}-\mathbf{q}/2} - \xi_{\mathbf{k}+\mathbf{q}/2} + |\gamma_{\mathbf{k}+\mathbf{q}/2}| - |\gamma_{\mathbf{k}-\mathbf{q}/2}|]}
\end{aligned} \tag{6.22}$$

nel cosiddetto *vacuum limit*, ovvero scartando le distribuzioni di Fermi, $n_F \rightarrow 0$, e a potenziale chimico nullo $\mu = 0$

$$\begin{aligned}
\Gamma^{-1}(\mathbf{q}, i\nu)|_{n_F, \mu=0} = & T_{2B}^{-1}(\mathbf{q}, i\nu) = -\frac{m}{4\pi a_R} + \frac{1}{\Omega} \sum_{\mathbf{k}} \frac{1}{2\epsilon_{\mathbf{k}}} + \\
& + \frac{1}{4\Omega} \sum_{\mathbf{k}} \frac{(1 + C_{\mathbf{k},\mathbf{q}})}{[i\nu - \epsilon_{\mathbf{k}-\mathbf{q}/2} - \epsilon_{\mathbf{k}+\mathbf{q}/2} - |\gamma_{\mathbf{k}-\mathbf{q}/2}| - |\gamma_{\mathbf{k}+\mathbf{q}/2}|]} + \\
& + \frac{1}{4\Omega} \sum_{\mathbf{k}} \frac{(1 + C_{\mathbf{k},\mathbf{q}})}{[i\nu - \epsilon_{\mathbf{k}-\mathbf{q}/2} - \epsilon_{\mathbf{k}+\mathbf{q}/2} + |\gamma_{\mathbf{k}-\mathbf{q}/2}| + |\gamma_{\mathbf{k}+\mathbf{q}/2}|]} + \\
& + \frac{1}{2\Omega} \sum_{\mathbf{k}} \frac{(1 - C_{\mathbf{k},\mathbf{q}})}{[i\nu - \epsilon_{\mathbf{k}-\mathbf{q}/2} - \epsilon_{\mathbf{k}+\mathbf{q}/2} + |\gamma_{\mathbf{k}+\mathbf{q}/2}| - |\gamma_{\mathbf{k}-\mathbf{q}/2}|]}
\end{aligned} \tag{6.23}$$

Conoscendo la matrice di scattering a due corpi é possibile calcolare lo spettro di singola particella, é stato mostrato infatti in 2.1.3, $T_{2B}(z)$ abbia dei poli semplici in corrispondenza degli stati legati e un taglio continuo sugli stati di scattering. Per provare l'esistenza di uno stato legato in presenza di un termine di spin-orbita é sufficiente dunque imporre a momento nullo

$$T_{2B}^{-1}(\mathbf{q} = 0, z = E_b) = 0 \tag{6.24}$$

che corrisponde all'equazione

$$-\frac{m}{4\pi a_R} + \frac{1}{2\Omega} \sum_{\mathbf{k}} \left\{ \frac{1}{[E_b - 2\epsilon_{\mathbf{k}} - 2|\gamma_{\mathbf{k}}|]} + \frac{1}{[E_b - 2\epsilon_{\mathbf{k}} + 2|\gamma_{\mathbf{k}}|]} + \frac{1}{\epsilon_{\mathbf{k}}} \right\} = 0 \tag{6.25}$$

da cui si può ricavare l'energia dello stato legato a due corpi in funzione dell'intensità della forza di interazione. Questa equazione può essere risolta numericamente, come mostrato nella sezione successiva. Nel limite del continuo e in variabili adimensionali (le

stesse usate in precedenza) questa equazione può essere posta nella forma

$$y + \frac{4}{\pi^2} \int_0^\infty dp_x \int_0^\infty dp_y \int_0^\infty dp_z \left\{ \frac{1}{2} \frac{1}{[p^2 + |\tilde{\gamma}_{\mathbf{p}}| - E_b/2]} + \frac{1}{2} \frac{1}{[p^2 - |\tilde{\gamma}_{\mathbf{p}}| - E_b/2]} - \frac{1}{p^2} \right\} = 0 \quad (6.26)$$

Questa equazione è già stata incontrata e risolta (6.8). Potenziale chimico e stato legato del problema a due corpi soddisfano dunque la stessa equazione e nel limite ad accoppiamento forte e sono legate dalla relazione $\mu = E_b/2$, lo stesso risultato trovato in assenza di un accoppiamento di spin-orbita. I risultati sono sempre mostrati nella sezione sul calcolo numerico. La proprietà più importante che si trova è che uno stato legato del problema a due corpi esiste anche per lunghezze di scattering negative, ovvero nel lato BCS. L'effetto è molto pronunciato per un accoppiamento di Rashba puro mentre risulta soppresso in tutti i casi in cui $v_D \neq 0$. Il passo successivo è quello di calcolare un'altra importante proprietà dello stato legato appena trovato, ovvero la sua massa efficace. Essa può essere ricavata, a bassi momenti sfruttando un ansatz sulla relazione di dispersione. Nel regime di interazione forte ($\frac{1}{k_F a_s} \rightarrow +\infty$) ci si aspetta che la coppia di Fermioni sia spazialmente confinata e trattabile come un Bosone puntiforme di spettro

$$\epsilon_b(\mathbf{q}) = E_b + \frac{q_x^2}{2m_x} + \frac{q_y^2}{2m_y} + \frac{q_z^2}{4m} \quad (6.27)$$

nel quale E_b, m_x e m_y dipendono dai contributi di spin orbita dei costituenti; la massa lungo l'asse x e l'asse y risultano differenti poiché una composizione generica di un termine di Rashba e uno di Dresselhaus accoppia lo spin e i momenti lungo tali direzioni in maniera diversa. Il caso specifico di un puro accoppiamento di Rashba è studiato in [34] in cui $m_x = m_y$. Le masse efficaci possono essere ricavate imponendo che l'inversa della matrice di scattering si annulli sullo spettro (6.27)

$$T_{2B}^{-1}(\mathbf{q}, z = \epsilon_b(\mathbf{q})) = 0 \quad (6.28)$$

Sempre a basse energie e bassi momenti è sufficiente che tale condizione sia verificata al secondo ordine, in una espansione attorno a $|\mathbf{q}| = 0$

$$\begin{aligned} T_{2B}^{-1}(\mathbf{q}, z = \epsilon_b(\mathbf{q})) &\approx \\ &\approx T_{2B}^{-1}(\mathbf{q} = 0, z = E_b) + \alpha(E_b, m_x)q_x^2 + \beta(E_b, m_y)q_y^2 + \gamma(E_b, m)q_z^2 = 0 \\ &\quad \Updownarrow \\ &\left\{ \begin{array}{l} T_{2B}^{-1}(\mathbf{q} = 0, z = E_b) = 0 \\ \alpha(E_b, m_x) = 0 \\ \beta(E_b, m_y) = 0 \\ \gamma(E_b) = 0 \end{array} \right. \end{aligned}$$

La prima delle quattro equazioni è naturalmente quella incontrata sopra ed è risolta per le energie di stato legato incontrate prima. Si trova inoltre che C è identicamente nullo poiché non vi sono effetti lungo l'asse z . Le altre due equazioni permettono dunque di ricavare le masse efficaci. Questa espansione è fatta nell'appendice B. Quello che si trova è che

$$\frac{2m}{m_x} = 1 - 8m(v_D^2 - v_R^2)^2 \frac{B_x}{A} \quad (6.29)$$

$$\frac{2m}{m_y} = 1 - 8m(v_D^2 - v_R^2)^2 \frac{B_y}{A} \quad (6.30)$$

con le definizioni

$$A = \frac{1}{\Omega} \sum_{\mathbf{k}} \left\{ \frac{1}{[E_b - 2\epsilon_{\mathbf{k}} + 2|\gamma_{\mathbf{k}}|]^2} + \frac{1}{[E_b - 2\epsilon_{\mathbf{k}} - 2|\gamma_{\mathbf{k}}|]^2} \right\} \quad (6.31)$$

$$B_x = \frac{1}{\Omega} \sum_{\mathbf{k}} \frac{k_y^2}{|\gamma_{\mathbf{k}}|^2} \left\{ \frac{1}{[(E_b - 2\epsilon_{\mathbf{k}})^2 - 4|\gamma_{\mathbf{k}}|^2][E_b - 2\epsilon_{\mathbf{k}}]} - \frac{(E_b - 2\epsilon_{\mathbf{k}})}{[(E_b - 2\epsilon_{\mathbf{k}})^2 - 4|\gamma_{\mathbf{k}}|^2]^2} \right\} \quad (6.32)$$

$$B_y = \frac{1}{\Omega} \sum_{\mathbf{k}} \frac{k_x^2}{|\gamma_{\mathbf{k}}|^2} \left\{ \frac{1}{[(E_b - 2\epsilon_{\mathbf{k}})^2 - 4|\gamma_{\mathbf{k}}|^2][E_b - 2\epsilon_{\mathbf{k}}]} - \frac{(E_b - 2\epsilon_{\mathbf{k}})}{[(E_b - 2\epsilon_{\mathbf{k}})^2 - 4|\gamma_{\mathbf{k}}|^2]^2} \right\} \quad (6.33)$$

La prima cosa che si può notare è che nel caso specifico di accoppiamenti di Rashba e Dresselhaus bilanciati ($v_R = \pm v_D$) l'effetto di poter considerare una massa efficace svanisce, inoltre lo stato legato che si trova in questa configurazione è identico a quello di Hamiltoniana di singola particella libera; non verrà trattato questo caso ma è preso in considerazione in [24, 36]. Quanto visto finora può essere riassunto dicendo che l'inversa della matrice di scattering, in una espansione attorno a $|\mathbf{q}|=0$ a due corpi deve avere la forma

$$T_{2B}^{-1}(\mathbf{q}, i\nu) \approx i\nu - \epsilon_b(\mathbf{q}) = i\nu - E_b - \frac{q_x^2}{2m_x} - \frac{q_y^2}{2m_y} - \frac{q_z^2}{4m} \quad (6.34)$$

con E_b, m_x e m_y dipendenti da $y = -\frac{1}{k_F a_s}$. È possibile far vedere ora come la conoscenza acquisita nel problema a due corpi possa essere sfruttata per determinare le proprietà

del sistema totale. Nel limite di accoppiamento forte

$$\begin{aligned}
\Gamma^{-1}(\mathbf{q}, i\nu) \Big|_{\mu \rightarrow -\infty} &\approx -\frac{m}{4\pi a_R} + \sum_{\mathbf{k}} \frac{1}{2\epsilon_{\mathbf{k}}} + \\
&+ \frac{1}{4\Omega} \sum_{\mathbf{k}} \frac{(1 + C_{\mathbf{k}, \mathbf{q}})}{[i\nu + 2\mu - \epsilon_{\mathbf{k}-\mathbf{q}/2} - \epsilon_{\mathbf{k}+\mathbf{q}/2} - |\gamma_{\mathbf{k}-\mathbf{q}/2}| - |\gamma_{\mathbf{k}+\mathbf{q}/2}|]} + \\
&+ \frac{1}{4\Omega} \sum_{\mathbf{k}} \frac{(1 + C_{\mathbf{k}, \mathbf{q}})}{[i\nu + 2\mu - \epsilon_{\mathbf{k}-\mathbf{q}/2} - \epsilon_{\mathbf{k}+\mathbf{q}/2} + |\gamma_{\mathbf{k}-\mathbf{q}/2}| + |\gamma_{\mathbf{k}+\mathbf{q}/2}|]} + \\
&+ \frac{1}{2\Omega} \sum_{\mathbf{k}} \frac{(1 - C_{\mathbf{k}, \mathbf{q}})}{[i\nu + 2\mu - \epsilon_{\mathbf{k}-\mathbf{q}/2} - \epsilon_{\mathbf{k}+\mathbf{q}/2} + |\gamma_{\mathbf{k}+\mathbf{q}/2}| - |\gamma_{\mathbf{k}-\mathbf{q}/2}|]} = T_{2B}^{-1}(\mathbf{q}, i\nu + 2\mu) \quad (6.35)
\end{aligned}$$

Allora, nello stesso regime, l'inverso del vertice della teoria avrà la struttura

$$\begin{aligned}
\Gamma^{-1}(\mathbf{q}, i\nu) &\approx i\nu + 2\mu - \epsilon_b(\mathbf{q}) = \\
i\nu + 2\mu - E_b - \frac{q_x^2}{2m_x} - \frac{q_y^2}{2m_y} - \frac{q_z^2}{4m} &= i\nu - \left(\frac{q_x^2}{2m_x} + \frac{q_y^2}{2m_y} + \frac{q_z^2}{4m} - \mu_B \right) \quad (6.36)
\end{aligned}$$

La funzione di partizione tende allora a quella di un set di Bosoni liberi con masse diverse lungo diverse direzioni del momento. È immediato ricavare che la temperatura critica di condensazione risulta riscalata con le masse efficaci

$$T_c = \frac{2\pi}{m_b} \left(\frac{n_b}{2\zeta(3/2)} \right)^{\frac{2}{3}} \left(\frac{m_b}{m_x} \right)^{\frac{1}{3}} \left(\frac{m_b}{m_y} \right)^{\frac{1}{3}} \quad (6.37)$$

Nel caso in considerazione $m_b = 2m$ e $n_b = n/2 = \frac{1}{2} \frac{(2m\epsilon_F)^{3/2}}{3\pi^2}$, dunque

$$\frac{T_c}{\epsilon_F} \approx 0.218 \left(\frac{2m}{m_x} \right)^{\frac{1}{3}} \left(\frac{2m}{m_y} \right)^{\frac{1}{3}} \quad (6.38)$$

La soluzione numerica presentata nella sezione successiva mostra che nel limite BEC

$$\frac{2m}{m_{x,y}} \xrightarrow{BEC} 1 \quad (6.39)$$

e questo avviene *indipendentemente* dalla composizione degli accoppiamenti di Rashba e Dresselhaus. In ultima analisi questo fatto poteva essere previsto. Quando lo stato legato può essere considerato un bosone puntiforme i suoi costituenti Fermionici contribuiscono equamente con un momento $\mathbf{q}/2$ al momento della particella composta \mathbf{q} . In questo regime dunque i Fermioni condividono lo stesso momento e si trovano in uno stato di singoletto; avendo spin opposto i contributi energetici di spin-orbita al Bosone totale si cancellano, facendo emergere uno spettro di particella libera con massa $m_B = 2m$.

6.3 Calcolo Numerico

Il termine di spin-orbita rompe la simmetria per rotazioni del sistema, è dunque impossibile ridurre la soluzione delle equazioni ricavate in questo caso alla soluzione di integrali 1-dimensionali. Il problema viene dunque affrontato sfruttando la libreria *cubature* di Steven G. Johnson¹; essa fornisce una maniera conveniente di risolvere integrali multidimensionali in cui la regione di integrazione viene suddivisa in cubi di dimensione diversa in base al peso dell'integrando. Usa oggetti e metodi di GSL.

6.3.1 Campo medio

Vengono modificate allora le equazioni (6.2). Si può partire dalla forma già manipolata ottenuta in (6.4).

$$y = -\frac{4}{\pi^2} \int_0^\infty dp_x \int_0^\infty dp_y \int_0^\infty dp_z f_{\text{so}}(\mathbf{p}, \tilde{\mu}, \tilde{T}_c, \tilde{v}_R, \tilde{v}_D) := -\frac{4}{\pi^2} F_{\text{so}}(\tilde{\mu}, \tilde{T}_c, \tilde{v}_R, \tilde{v}_D) \quad (6.40)$$

Passando al limite del continuo ed effettuando un cambio variabili e delle sostituzioni $\vec{p} = \frac{1}{k_F} \vec{k}$ $\tilde{\mu} = \frac{\mu}{\epsilon_F}$ $\tilde{T}_c = \frac{T_c}{\epsilon_F}$ $\tilde{v}_R = \frac{v_R}{v_F}$ $\tilde{v}_D = \frac{v_D}{v_F}$ $\gamma(\mathbf{p}, \tilde{v}_R, \tilde{v}_D) = 2\gamma(\mathbf{k}, v_R, v_D)$

viene manipolata l'equazione per la densità di particelle.

$$\begin{aligned} n &= \frac{1}{\Omega} \sum_{\mathbf{k}} \left\{ 1 - \frac{1}{2} \tanh\left(\frac{\xi_{\mathbf{k}} - |\gamma_{\mathbf{k}}|}{2T_c}\right) - \frac{1}{2} \tanh\left(\frac{\xi_{\mathbf{k}} + |\gamma_{\mathbf{k}}|}{2T_c}\right) \right\} = \\ &= \frac{k_F^3}{(2\pi)^3} \int d^3p \left\{ 1 - \frac{1}{2} \tanh\left(\frac{p^2 - \tilde{\mu} - \gamma_{\mathbf{p}}}{2\tilde{T}_c}\right) - \frac{1}{2} \tanh\left(\frac{p^2 - \tilde{\mu} + \gamma_{\mathbf{p}}}{2\tilde{T}_c}\right) \right\} := \\ &:= \frac{k_F^3}{\pi^3} \int_0^\infty dp_x \int_0^\infty dp_y \int_0^\infty dp_z g_{\text{so}}(\mathbf{p}, \tilde{\mu}, \tilde{T}_c, \tilde{v}_R, \tilde{v}_D) = \\ &:= \frac{k_F^3}{\pi^3} G_{\text{so}}(\tilde{\mu}, \tilde{T}_c, \tilde{v}_R, \tilde{v}_D) \quad (6.41) \end{aligned}$$

Tale equazione va studiata a densità di particelle fissata $n = \frac{(2m\epsilon_F)^{3/2}}{3\pi^2} = \frac{k_F^3}{3\pi^2}$, dunque

$$\frac{\pi}{3} = G_{\text{so}}(\tilde{\mu}, \tilde{T}_c, \tilde{v}_R, \tilde{v}_D) \quad (6.42)$$

L'approccio utilizzato per riscrivere le due equazioni è diverso da quello fatto nel caso dell'Hamiltoniana di particella singola libera. In particolare si è deciso di non riscaldare i momenti con la temperatura critica, procedura che nel caso precedente aveva semplificato la soluzione numerica. Questo perché ciò avrebbe comportato anche una necessaria ridefinizione delle costanti di accoppiamento dell'interazione spin-orbita per inglobare T_c e dunque uno svantaggio se l'obiettivo è quello di ricavare le quantità termodinamiche

¹<http://ab-initio.mit.edu/wiki/index.php/Cubature>

che ci interessano a v_R e v_D fissate. Fissati i valori di \tilde{v}_R e \tilde{v}_D si cercano le soluzioni $\tilde{T}_c(y)$ e $\tilde{\mu}(y)$ del sistema

$$\begin{cases} y + \frac{2}{\pi^2} F_{\text{SO}}(\tilde{\mu}, \tilde{T}_c, \tilde{v}_R, \tilde{v}_D) = 0 \\ G_{\text{SO}}(\tilde{\mu}, \tilde{T}_c, \tilde{v}_R, \tilde{v}_D) - \frac{\pi}{3} = 0 \end{cases} \quad (6.43)$$

Per la soluzione di queste è stato scelto un algoritmo di *multidimensional root-finding* implementato sempre nelle librerie di GSL e basati sulla libreria Fortran MINPACK. L'idea alla base è quella di fissare un valore degli accoppiamenti y, \tilde{v}_R e \tilde{v}_D e di cercare le radici dei termini a sinistra delle due equazioni. Si costruiscono così le coppie (y, \tilde{T}_c) e $(y, \tilde{\mu})$, calcolate nei casi in figura a $\tilde{v}_D = 0$. In figura è riportato il potenziale chimico misurato rispetto al minimo dell'energia dello spettro di particella singola. Nello stesso modo è possibile andare a vedere l'andamento della temperatura critica e del potenziale chimico in funzione dell'accoppiamento di Rashba ad un valore fissato di y , nel nostro caso al valore unitario $y = 0, -1, -2$. Si trova dunque che nel regime di accoppiamento debole la temperatura critica può essere incrementata aumentando v_R .

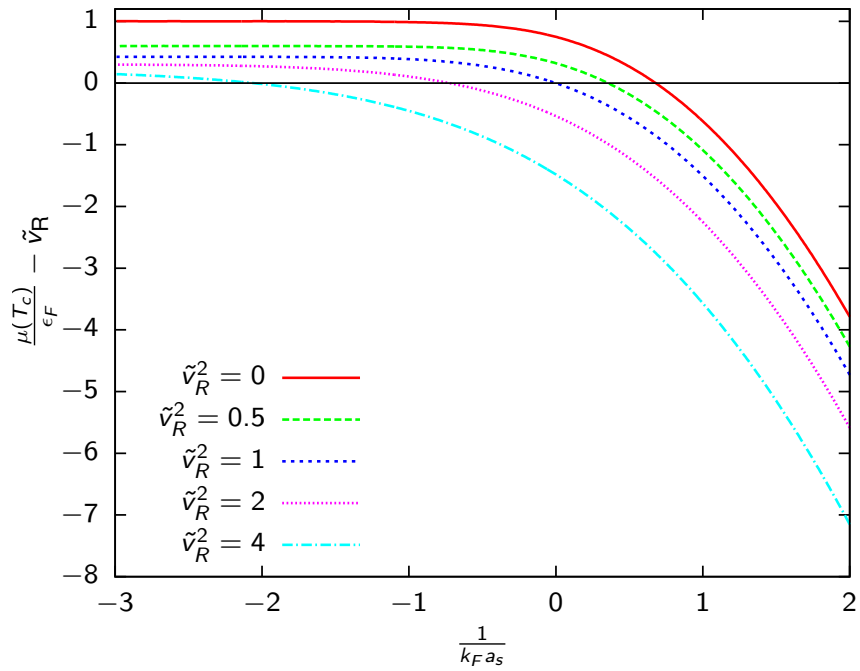


FIGURA 6.1: Potenziale chimico

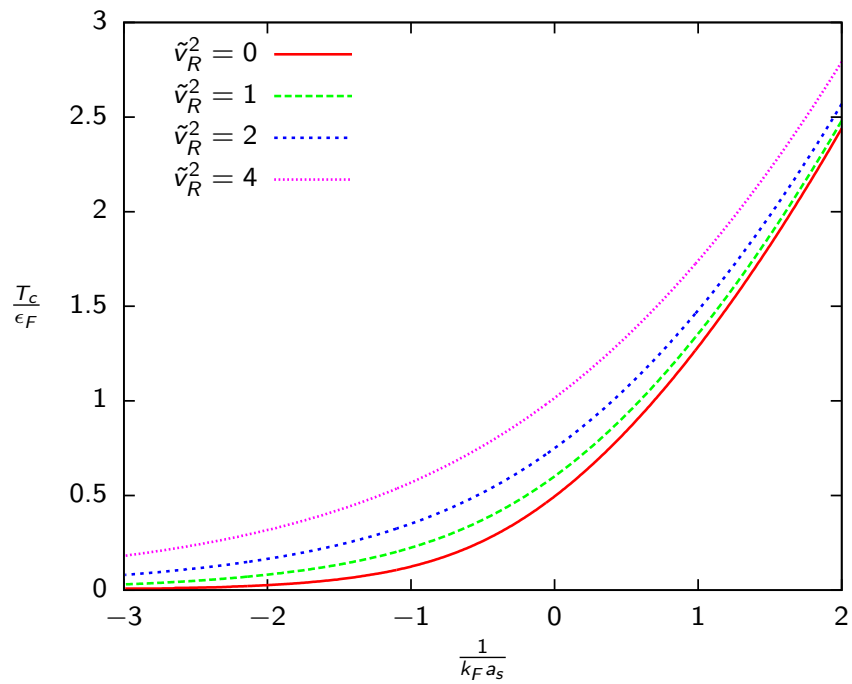


FIGURA 6.2: Temperatura critica

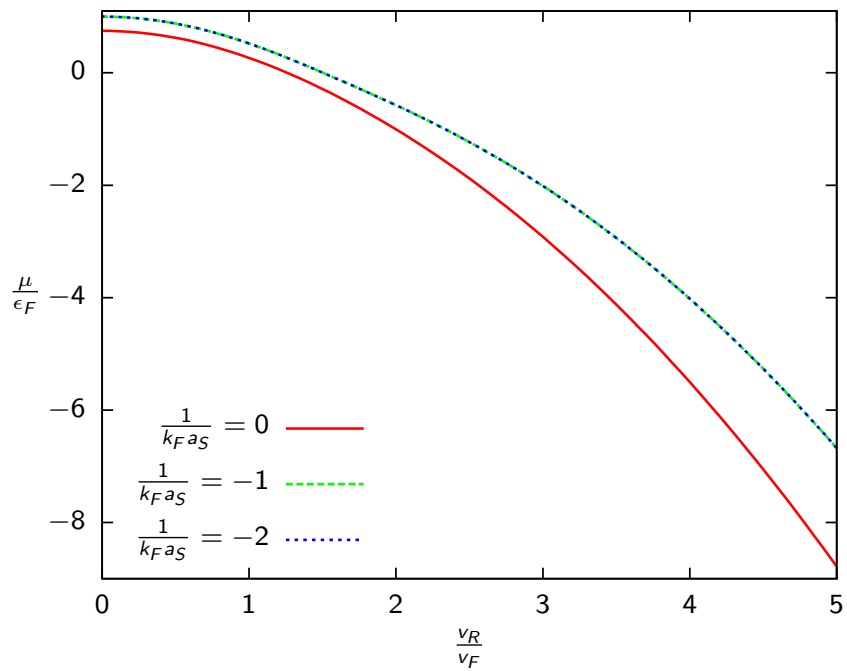


FIGURA 6.3: Potenziale chimico

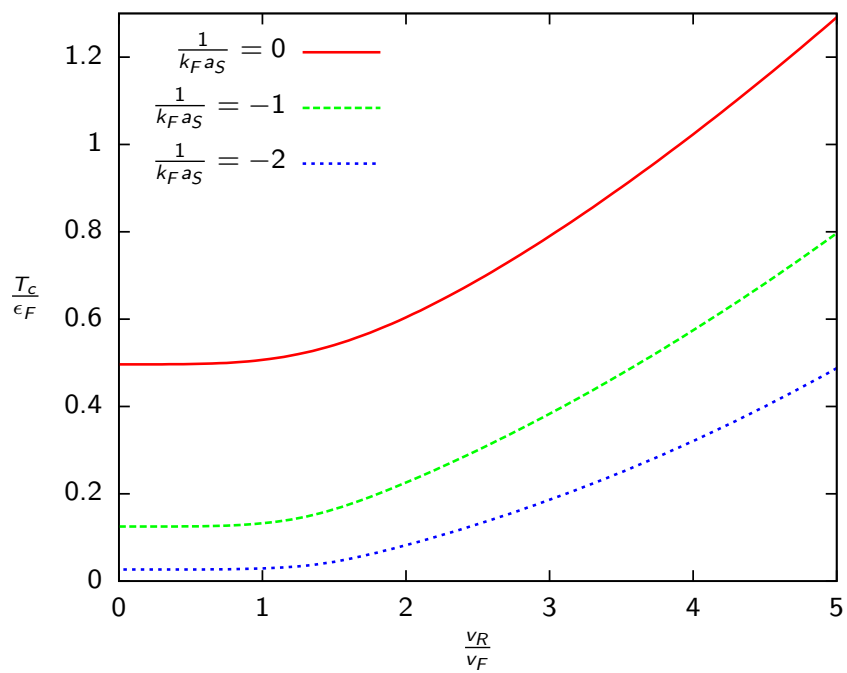


FIGURA 6.4: Temperatura critica

6.3.2 Inclusione delle fluttuazioni Gaussiane

Per limiti di tempo e di difficoltà l'implementazione di questo caso non è stata svolta ma si tratta di un'interessante possibile sviluppo futuro del progetto di tesi.

6.3.3 Stato legato

Passando al limite del continuo ed effettuando un cambio variabili e delle sostituzioni l'equazione che determina lo stato legato presentata in (6.26)

$$y + \frac{4}{\pi^2} \int_0^\infty dp_x \int_0^\infty dp_y \int_0^\infty dp_z \left\{ \frac{1}{2} \frac{1}{[p^2 + |\tilde{\gamma}_{\mathbf{p}}| - E_b/2]} + \frac{1}{2} \frac{1}{[p^2 - |\tilde{\gamma}_{\mathbf{p}}| - E_b/2]} - \frac{1}{p^2} \right\} = 0 \quad (6.44)$$

Questa è risolta con un algoritmo di root-finding che fissato l'accoppiamento determina lo stato legato che risolve l'equazione. I risultati sono presentati in figura 6.5 mostrando come per un'accoppiamento di Rashba puro uno stato legato esista anche nel lato BCS, per lunghezze di scattering negative. Si noti che lo stato legato deve essere misurato rispetto alla soglia di scattering per due particelle che è in questo caso $-v_R^2$. A parte (figura 6.6) viene anche mostrato come anche ad accoppiamenti di Rashba alti, l'accensione di un termine di Dresselhaus ($v_R \div 0$) compromette l'esistenza dello stato legato nel lato BCS, modificando di poco la temperatura critica in tale regime

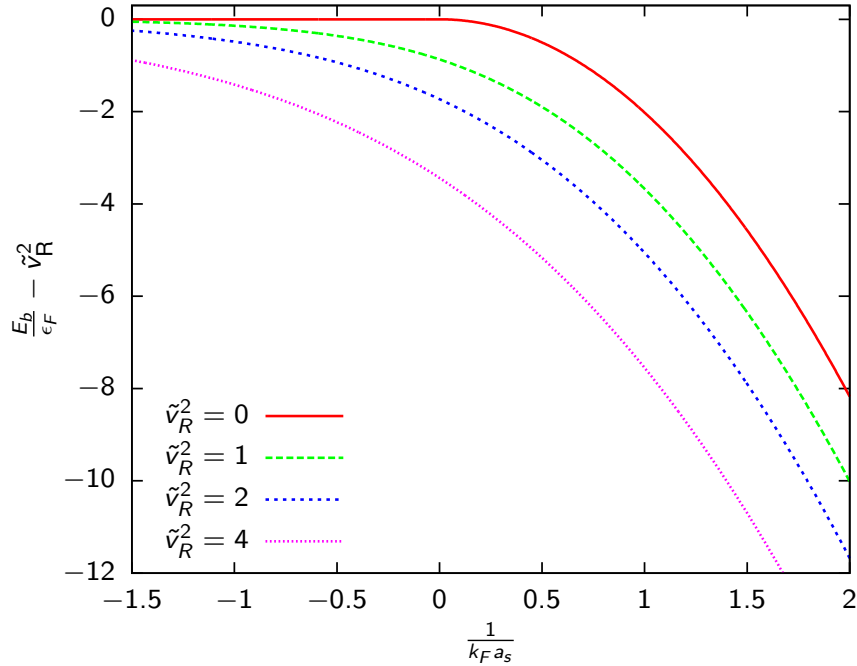


FIGURA 6.5

Stato legato per un accoppiamento di Rashba puro, misurato rispetto alla soglia.

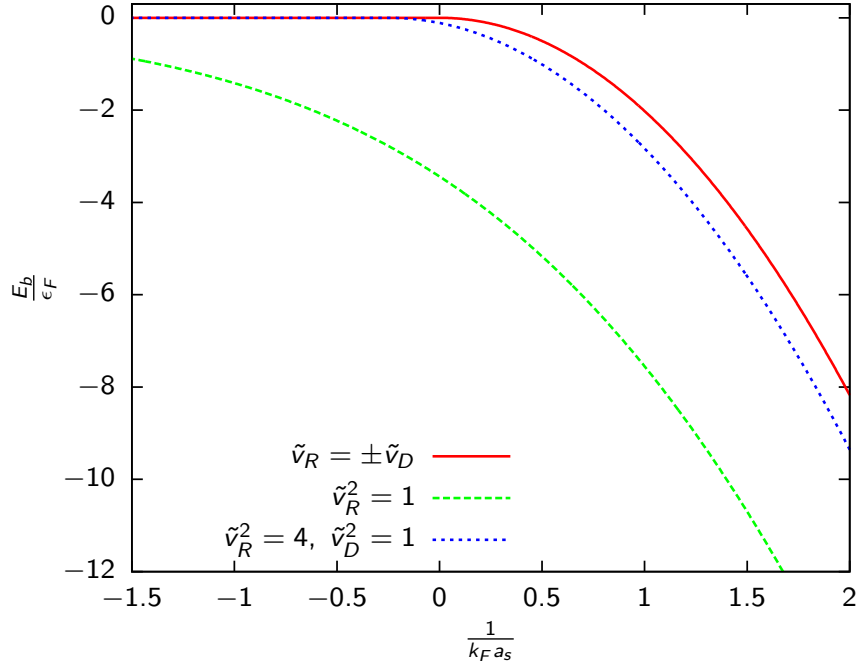


FIGURA 6.6

Stato legato per un accoppiamento spin-orbita misto. Esso é soppresso nel lato BCS all'accensione di un termine di Dresselhaus. Il caso $v_D = \pm v_R$ dà gli stessi del caso in assenza di spin-orbita.

6.3.4 Masse Efficaci

Passando al limite del continuo ed effettuando un cambio variabili e le sostituzioni

$$\vec{p} = \frac{1}{k_F} \vec{k} \quad \tilde{\mu} = \frac{\mu}{\epsilon_F} \quad \tilde{T}_c = \frac{T_c}{\epsilon_F} \quad \tilde{v}_R = \frac{v_R}{v_F} \quad \tilde{v}_D = \frac{v_D}{v_F} \quad \gamma(\mathbf{p}, \tilde{v}_R, \tilde{v}_D) = 2\gamma(\mathbf{k}, v_R, v_D)$$

Le sommatorie definite in (6.31),(6.32) e (6.33)

$$\begin{aligned} A &= \frac{1}{\Omega} \sum_{\mathbf{k}} \left\{ \frac{1}{[E_b - 2\epsilon_{\mathbf{k}} + 2|\gamma_{\mathbf{k}}|]^2} + \frac{1}{[E_b - 2\epsilon_{\mathbf{k}} - 2|\gamma_{\mathbf{k}}|]^2} \right\} = \\ &= \frac{k_F^3}{\pi^3 \epsilon_F^2} \iiint_0^\infty d^3 p \left\{ \frac{1}{[\tilde{E}_b - 2p^2 + 2|\tilde{\gamma}_{\mathbf{p}}|]^2} + \frac{1}{[\tilde{E}_b - 2p^2 - 2|\tilde{\gamma}_{\mathbf{p}}|]^2} \right\} = \frac{k_F^3}{\pi^3 \epsilon_F^2} \tilde{A} \quad (6.45) \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} B_x &= \frac{1}{\Omega} \sum_{\mathbf{k}} \frac{k_y^2}{|\gamma_{\mathbf{k}}|^2} \left\{ \frac{1}{[(E_b - 2\epsilon_{\mathbf{k}})^2 - 4|\gamma_{\mathbf{k}}|^2][E_b - 2\epsilon_{\mathbf{k}}]} - \right. \\ &\quad \left. - \frac{(E_b - 2\epsilon_{\mathbf{k}})}{[(E_b - 2\epsilon_{\mathbf{k}})^2 - 4|\gamma_{\mathbf{k}}|^2]^2} \right\} = \\ &= \frac{k_F^5}{\pi^3 \epsilon_F^5} \iiint_0^\infty d^3 p \frac{p_y^2}{|\tilde{\gamma}_{\mathbf{p}}|^2} \left\{ \frac{1}{[(\tilde{E}_b - 2p^2)^2 - 4|\tilde{\gamma}_{\mathbf{p}}|^2][\tilde{E}_b - 2p^2]} - \right. \\ &\quad \left. - \frac{(\tilde{E}_b - 2p^2)}{[(\tilde{E}_b - 2p^2)^2 - 4|\tilde{\gamma}_{\mathbf{p}}|^2]^2} \right\} = \frac{k_F^5}{\pi^3 \epsilon_F^5} \tilde{B}_x \quad (6.46) \end{aligned}$$

$$B_y = \frac{k_F^5}{\pi^3 \epsilon_F^5} \iiint_0^\infty d^3 p \frac{p_x^2}{|\tilde{\gamma}_{\mathbf{p}}|^2} \left\{ \frac{1}{[(\tilde{E}_b - 2p^2)^2 - 4|\tilde{\gamma}_{\mathbf{p}}|^2][\tilde{E}_b - 2p^2]} - \frac{(\tilde{E}_b - 2p^2)}{[(\tilde{E}_b - 2p^2)^2 - 4|\tilde{\gamma}_{\mathbf{p}}|^2]^2} \right\} = \frac{k_F^5}{\pi^3 \epsilon_F^5} \tilde{B}_y \quad (6.47)$$

Le masse efficaci allora possono essere determinate nelle variabili adimensionali:

$$\frac{2m}{m_x} = 1 - 2^6 (\tilde{v}_D^2 - \tilde{v}_R^2)^2 \frac{\tilde{B}_x}{\tilde{A}} \quad (6.48)$$

$$\frac{2m}{m_y} = 1 - 2^6 (\tilde{v}_D^2 - \tilde{v}_R^2)^2 \frac{\tilde{B}_y}{\tilde{A}} \quad (6.49)$$

Per un accoppiamento di Rashba puro, per cui $m_x = m_y$ i risultati sono riportati in 6.7.

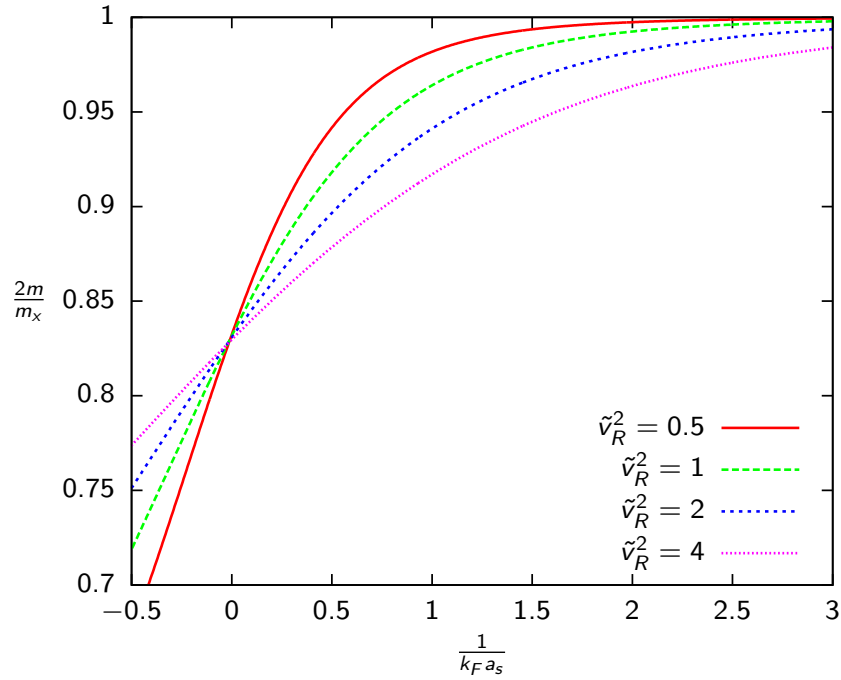


FIGURA 6.7

Massa efficace in funzione dell'accoppiamento. Per un accoppiamento di Rashba puro $m_x = m_y$

6.4 Conclusioni

È possibile dunque, con tutte le considerazioni fatte fino ad ora tracciare un diagramma delle fasi (figure 6.8 e 6.9) analogo a quanto mostrato in assenza di accoppiamento spin-orbita nella sezione 4.4. Sono mostrati i risultati solo per un accoppiamento di Rashba puro poiché, come visto, è il caso con effetti più rilevanti per l'andamento della temperatura critica. Nel lato BCS ad accoppiamenti deboli la teoria di campo medio è affidabile nel riprodurre la temperatura critica. Si trova che essa può essere notevolmente incrementata dall'introduzione di un termine di spin-orbita. Come mostrato in [33] questo è vero anche per la gap, che si può ottenere risolvendo il sistema (5.28). Una gap più grande, quindi una energia di legame della coppia più grande, favorisce la formazione di coppie di Fermioni, innalzando la temperatura critica. Sempre l'approssimazione di campo medio, per le stesse ragioni del caso senza spin-orbita, fallisce ad accoppiamenti più forti. Nel lato BEC invece la temperatura critica risulta lievemente soppressa nel regime intermedio, ciò è dovuto alla massa efficace del Bosone composito, $m_x, m_y > 2m$, che abbassa la temperatura di condensazione. Nel limite BEC infine gli effetti di un termine di spin-orbita svaniscono, in questo limite infatti i contributi energetici dei due Fermioni al Bosone composito si cancellano a vicenda.

L'esistenza di uno stato legato anche nel lato BCS del crossover permetterebbe di estendere i risultati di massa efficace e di temperatura di condensazione di Bose Einstein anche a questo regime. Tuttavia ciò va preso con estrema cautela nel contesto delle approssimazioni fatte. La struttura di polo della funzione di vertice $\Gamma(q)$ calcolata in appendice B e presentata in (6.36) è stata ricavata infatti nell'approssimazione di accoppiamento forte. Per raffinare il risultato in futuro sarebbe sufficiente espandere al secondo ordine nei momenti la $\Gamma^{-1}(q)$ totale (6.22) in cui la dipendenza dalla temperatura critica (eliminata nella approssimazione usata) complica ancora di più le cose.

Nella regione intermedia la risoluzione numerica delle equazioni complete dovrebbe fornire una temperatura critica capace di catturare questi due limiti, confermando definitivamente l'esistenza di un crossover. Tuttavia sia il calcolo numerico che una trattazione analitica risultano estremamente complicate a causa della rottura di simmetria rotazioni indotta dal termine di spin-orbita e sono lasciate ad una trattazione futura.

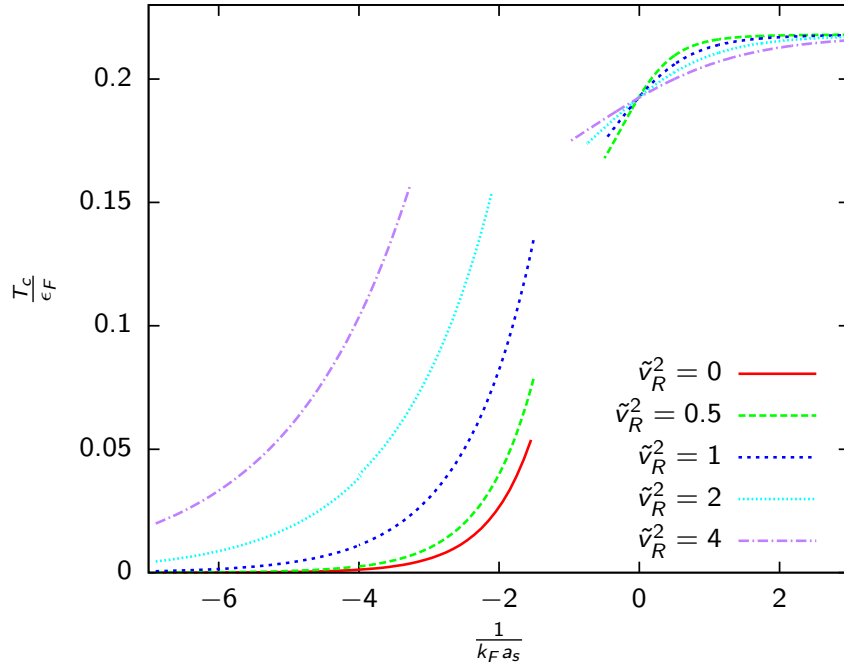


FIGURA 6.8: Diagramma delle fasi con interazione SO

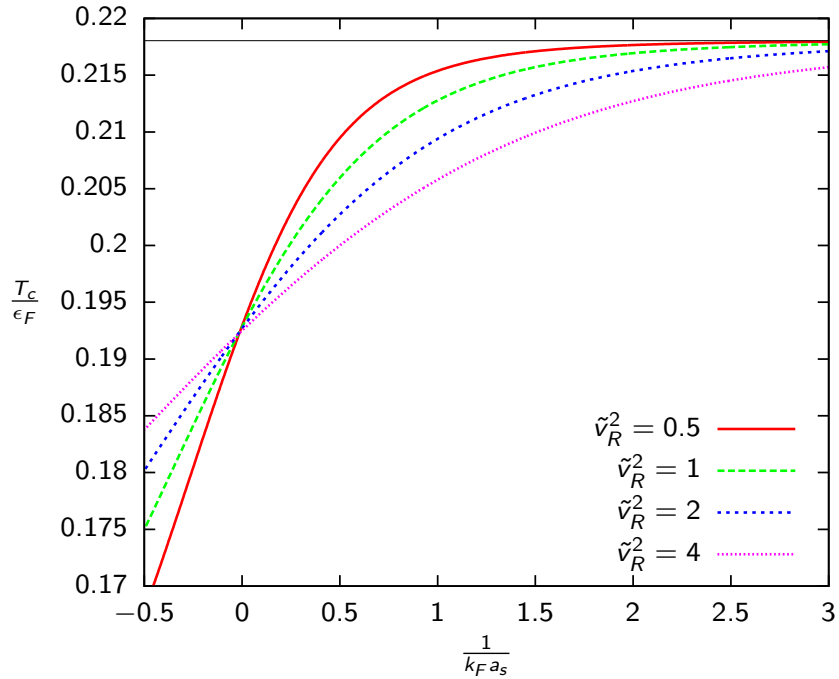


FIGURA 6.9: Lato BEC del diagramma delle fasi con interazione SO
Il limite superiore corrisponde a $\frac{T_c}{\epsilon_F} = 0.218$

Appendice A

Funzione di Green

La funzione di Green nel caso non interagente può essere calcolata come

$$G_0(E, \mathbf{r}, \mathbf{r}') = \langle \mathbf{r} | \frac{1}{E - \hat{H}_0 + i0^+} | \mathbf{r}' \rangle \quad (\text{A.1})$$

nel caso di particella libera $\hat{H}_0 = \frac{\hat{p}^2}{m}$ essa può essere calcolata esattamente. Inserendo una relazione di completezza nei momenti:

$$G_0(E, \mathbf{r}, \mathbf{r}') = \int d^3p \frac{\langle \mathbf{r} | \mathbf{p} \rangle \langle \mathbf{p} | \mathbf{r}' \rangle}{E - p^2/m + i0^+} = \frac{m}{(2\pi\hbar)^3} \int d^3p \frac{e^{\frac{i}{\hbar} \mathbf{p} \cdot (\mathbf{r} - \mathbf{r}')}}{mE - p^2 + i0^+} =$$

Recuperiamo dunque l'integrale che vogliamo valutare. In coordinate sferiche

$$\begin{aligned} &= \frac{2\pi m}{(2\pi\hbar)^3} \int_{-1}^1 d(\cos(\theta)) \int_0^\infty dp p^2 \frac{e^{\frac{i}{\hbar} p |\mathbf{r} - \mathbf{r}'| \cos(\theta)}}{mE - p^2 + i0^+} = \\ &= \frac{2\pi m}{(2\pi\hbar)^3} \int_0^\infty dp \frac{p^2}{mE - p^2 + i0^+} \int_{-1}^1 d(\cos(\theta)) e^{\frac{i}{\hbar} p |\mathbf{r} - \mathbf{r}'| \cos(\theta)} = \\ &= \frac{2\pi m}{(2\pi\hbar)^3} \int_0^\infty dp \frac{p^2}{mE - p^2 + i0^+} \frac{\hbar}{ip |\mathbf{r} - \mathbf{r}'|} \left(e^{\frac{i}{\hbar} p |\mathbf{r} - \mathbf{r}'|} - e^{-\frac{i}{\hbar} p |\mathbf{r} - \mathbf{r}'|} \right) = \\ &= \frac{m}{i |\mathbf{r} - \mathbf{r}'| (2\pi\hbar)^2} \int_0^\infty dp \frac{p}{mE - p^2 + i0^+} \left(e^{\frac{i}{\hbar} p |\mathbf{r} - \mathbf{r}'|} - e^{-\frac{i}{\hbar} p |\mathbf{r} - \mathbf{r}'|} \right) = \\ &= \frac{m}{i |\mathbf{r} - \mathbf{r}'| (2\pi\hbar)^2} \int_{-\infty}^\infty dp \frac{p e^{\frac{i}{\hbar} p |\mathbf{r} - \mathbf{r}'|}}{E - p^2/m + i0^+} = \\ &= -\frac{m}{i |\mathbf{r} - \mathbf{r}'| (2\pi\hbar)^2} \int_{-\infty}^\infty dp \frac{p e^{\frac{i}{\hbar} p |\mathbf{r} - \mathbf{r}'|}}{(p - \sqrt{mE} - i0^+)(p + \sqrt{mE} + i0^+)} = \\ &= -\frac{m}{4\pi\hbar^2} \frac{e^{\frac{i}{\hbar} \sqrt{mE} |\mathbf{r} - \mathbf{r}'|}}{|\mathbf{r} - \mathbf{r}'|} \\ G_0(E = \frac{k^2}{m}, \mathbf{r}, \mathbf{r}') &= -\frac{m}{4\pi\hbar^2} \frac{e^{\frac{i}{\hbar} k |\mathbf{r} - \mathbf{r}'|}}{|\mathbf{r} - \mathbf{r}'|} \quad \text{con } E = \frac{k^2}{m} \quad (\text{A.2}) \end{aligned}$$

Appendice B

Massa efficace

Questa appendice mostra come calcolare le masse efficaci m_x e m_y introdotte nei capitoli precedenti, nell'espansione dell'inversa della matrice di scattering a due corpi (6.23), valutata sulla relazione di dispersione efficace (6.27)

$$\begin{aligned}
T_{2B}^{-1}(\mathbf{q}, z = \epsilon_b(\mathbf{q})) &= -\frac{m}{4\pi a_R} + \frac{1}{\Omega} \sum_{\mathbf{k}} \frac{1}{2\epsilon_{\mathbf{k}}} + \\
&+ \frac{1}{4\Omega} \sum_{\mathbf{k}} \frac{(1 + C_{\mathbf{k},\mathbf{q}})}{[E_b + \frac{q_x^2}{2m_x} + \frac{q_y^2}{2m_y} + \frac{q_z^2}{4m} - \epsilon_{\mathbf{k}-\mathbf{q}/2} - \epsilon_{\mathbf{k}+\mathbf{q}/2} - |\gamma_{\mathbf{k}-\mathbf{q}/2}| - |\gamma_{\mathbf{k}+\mathbf{q}/2}|]} + \\
&+ \frac{1}{4\Omega} \sum_{\mathbf{k}} \frac{(1 + C_{\mathbf{k},\mathbf{q}})}{[E_b + \frac{q_x^2}{2m_x} + \frac{q_y^2}{2m_y} + \frac{q_z^2}{4m} - \epsilon_{\mathbf{k}-\mathbf{q}/2} - \epsilon_{\mathbf{k}+\mathbf{q}/2} + |\gamma_{\mathbf{k}-\mathbf{q}/2}| + |\gamma_{\mathbf{k}+\mathbf{q}/2}|]} + \\
&+ \frac{1}{2\Omega} \sum_{\mathbf{k}} \frac{(1 - C_{\mathbf{k},\mathbf{q}})}{[E_b + \frac{q_x^2}{2m_x} + \frac{q_y^2}{2m_y} + \frac{q_z^2}{4m} - \epsilon_{\mathbf{k}-\mathbf{q}/2} - \epsilon_{\mathbf{k}+\mathbf{q}/2} + |\gamma_{\mathbf{k}+\mathbf{q}/2}| - |\gamma_{\mathbf{k}-\mathbf{q}/2}|]} \quad (\text{B.1})
\end{aligned}$$

Con le definizioni $X = \frac{2m}{m_x} - 1$ e $Y = \frac{2m}{m_y} - 1$

$$\begin{aligned}
T_{2B}^{-1}(\mathbf{q}, z = \epsilon_b(\mathbf{q})) &= -\frac{m}{4\pi a_R} + \frac{1}{\Omega} \sum_{\mathbf{k}} \frac{1}{2\epsilon_{\mathbf{k}}} + \\
&+ \frac{1}{4\Omega} \sum_{\mathbf{k}} \frac{(1 + C_{\mathbf{k},\mathbf{q}})}{[E_b + \frac{X}{4m} q_x^2 + \frac{Y}{4m} q_y^2 - 2\epsilon_{\mathbf{k}} - |\gamma_{\mathbf{k}-\mathbf{q}/2}| - |\gamma_{\mathbf{k}+\mathbf{q}/2}|]} + \\
&+ \frac{1}{4\Omega} \sum_{\mathbf{k}} \frac{(1 + C_{\mathbf{k},\mathbf{q}})}{[E_b + \frac{X}{4m} q_x^2 + \frac{Y}{4m} q_y^2 - 2\epsilon_{\mathbf{k}} + |\gamma_{\mathbf{k}-\mathbf{q}/2}| + |\gamma_{\mathbf{k}+\mathbf{q}/2}|]} + \\
&+ \frac{1}{2\Omega} \sum_{\mathbf{k}} \frac{(1 - C_{\mathbf{k},\mathbf{q}})}{[E_b + \frac{X}{4m} q_x^2 + \frac{Y}{4m} q_y^2 - 2\epsilon_{\mathbf{k}} + |\gamma_{\mathbf{k}+\mathbf{q}/2}| - |\gamma_{\mathbf{k}-\mathbf{q}/2}|]} \quad (\text{B.2})
\end{aligned}$$

Di ogni fattore viene valutata l'espansione fino al secondo ordine, per esempio in q_x ; ricavare il risultato analogo per la massa efficace lungo y sarà immediato. Si ricorda la

forma dell'oggetto $C_{\mathbf{k},\mathbf{q}}$

$$C_{\mathbf{k},\mathbf{q}} = \frac{\Re e \left(\gamma_{\mathbf{k}+\mathbf{q}/2}^* \gamma_{\mathbf{k}-\mathbf{q}/2} \right)}{|\gamma_{\mathbf{k}-\mathbf{q}/2}| |\gamma_{\mathbf{k}+\mathbf{q}/2}|} \quad (\text{B.3})$$

Allora a partire dal denominatore

$$\begin{aligned} |\gamma_{\mathbf{k}+\mathbf{q}/2}|^2 &= \gamma_{\mathbf{k}+\mathbf{q}/2}^* \gamma_{\mathbf{k}+\mathbf{q}/2} = (v_{\text{R}} + v_{\text{D}})^2 (k_x + q_x/2)^2 + (v_{\text{R}} - v_{\text{D}})^2 (k_y + q_y/2)^2 \approx \\ &= |\gamma_{\mathbf{k}}|^2 + (v_{\text{R}} + v_{\text{D}})^2 k_x q_x + \frac{(v_{\text{R}} + v_{\text{D}})^2}{4} q_x^2 = \\ &= A + B q_x + C q_x^2 \end{aligned} \quad (\text{B.4})$$

$$|\gamma_{\mathbf{k}-\mathbf{q}/2}|^2 \approx A - B q_x + C q_x^2 \quad (\text{B.5})$$

$$|\gamma_{\mathbf{k}+\mathbf{q}/2}| \approx \sqrt{A + B q_x + C q_x^2} \approx \sqrt{A} \left(1 + \frac{B}{2A} q_x + \frac{1}{2A} \left(C - \frac{B^2}{4A} \right) q_x^2 \right) \quad (\text{B.6})$$

$$|\gamma_{\mathbf{k}-\mathbf{q}/2}| \approx \sqrt{A - B q_x + C q_x^2} \approx \sqrt{A} \left(1 - \frac{B}{2A} q_x + \frac{1}{2A} \left(C - \frac{B^2}{4A} \right) q_x^2 \right) \quad (\text{B.7})$$

$$|\gamma_{\mathbf{k}+\mathbf{q}/2}|^2 |\gamma_{\mathbf{k}-\mathbf{q}/2}|^2 \approx (A + B q_x + C q_x^2)(A - B q_x + C q_x^2) \approx A^2 + (2AC - B^2) q_x^2 \quad (\text{B.8})$$

$$|\gamma_{\mathbf{k}+\mathbf{q}/2}| |\gamma_{\mathbf{k}-\mathbf{q}/2}| \approx \sqrt{A^2 + (2AC - B^2) q_x^2} \approx A \left(1 + \frac{2AC - B^2}{2A^2} q_x^2 \right) \quad (\text{B.9})$$

$$\begin{aligned} (|\gamma_{\mathbf{k}+\mathbf{q}/2}| |\gamma_{\mathbf{k}-\mathbf{q}/2}|)^{-1} &\approx A^{-1} \left(1 - \frac{2AC - B^2}{2A^2} q_x^2 \right) = \\ &|\gamma_{\mathbf{k}}|^{-2} \left(1 - \frac{(v_{\text{R}} + v_{\text{D}})^2}{4|\gamma_{\mathbf{k}}|^4} (|\gamma_{\mathbf{k}}|^2 - 2(v_{\text{R}} + v_{\text{D}})^2 k_x^2) q_x^2 \right) \end{aligned} \quad (\text{B.10})$$

Invece

$$\Re e \left(\gamma_{\mathbf{k}+\mathbf{q}/2}^* \gamma_{\mathbf{k}-\mathbf{q}/2} \right) \approx |\gamma_{\mathbf{k}}|^2 - (v_{\text{R}} + v_{\text{D}})^2 q_x^2 / 4 \quad (\text{B.11})$$

quindi

$$\begin{aligned} C_{\mathbf{k},\mathbf{q}} &\approx 1 - \frac{(v_{\text{R}} + v_{\text{D}})^2}{2|\gamma_{\mathbf{k}}|^4} (|\gamma_{\mathbf{k}}|^2 - (v_{\text{R}} + v_{\text{D}})^2 k_x^2) q_x^2 = \\ &1 - \frac{(v_{\text{R}}^2 - v_{\text{D}}^2)^2 k_y^2}{2|\gamma_{\mathbf{k}}|^4} q_x^2 = 1 - \chi_{\mathbf{k}} q_x^2 \end{aligned} \quad (\text{B.12})$$

Al denominatore di (B.2) dobbiamo invece valutare i seguenti termini

$$\begin{aligned} |\gamma_{\mathbf{k}-\mathbf{q}/2}| + |\gamma_{\mathbf{k}+\mathbf{q}/2}| &\approx \sqrt{A} \left(2 + \frac{1}{A} \left(C - \frac{B^2}{4A} \right) q_x^2 \right) = \\ &= 2|\gamma_{\mathbf{k}}| + \frac{(v_{\text{D}} + v_{\text{R}})^2}{4|\gamma_{\mathbf{k}}|^3} (|\gamma_{\mathbf{k}}|^2 - (v_{\text{D}} + v_{\text{R}})^2 k_x^2) q_x^2 = 2|\gamma_{\mathbf{k}}| + \frac{(v_{\text{D}}^2 - v_{\text{R}}^2)^2 k_y^2}{4|\gamma_{\mathbf{k}}|^3} q_x^2 = \\ &2|\gamma_{\mathbf{k}}| + \zeta_{\mathbf{k}} q_x^2 \end{aligned} \quad (\text{B.13})$$

$$|\gamma_{\mathbf{k}-\mathbf{q}/2}| - |\gamma_{\mathbf{k}+\mathbf{q}/2}| \approx \frac{B}{\sqrt{A}} q_x = \frac{(v_D + v_R)^2 k_x}{|\gamma_{\mathbf{k}}|} q_x = \alpha_{\mathbf{k}} q_x \quad (\text{B.14})$$

Nel complesso l'espansione di (B.2) può essere scritta come

$$\begin{aligned} T_{2B}^{-1}(\mathbf{q}, z = \epsilon_b(\mathbf{q})) &= -\frac{m}{4\pi a_R} + \frac{1}{\Omega} \sum_{\mathbf{k}} \frac{1}{2\epsilon_{\mathbf{k}}} + \\ &+ \frac{1}{4\Omega} \sum_{\mathbf{k}} \frac{(1 + C_{\mathbf{k},\mathbf{q}})}{[E_b + \frac{X}{4m} q_x^2 + \frac{Y}{4m} q_y^2 - 2\epsilon_{\mathbf{k}} - |\gamma_{\mathbf{k}-\mathbf{q}/2}| - |\gamma_{\mathbf{k}+\mathbf{q}/2}|]} + \\ &+ \frac{1}{4\Omega} \sum_{\mathbf{k}} \frac{(1 + C_{\mathbf{k},\mathbf{q}})}{[E_b + \frac{X}{4m} q_x^2 + \frac{Y}{4m} q_y^2 - 2\epsilon_{\mathbf{k}} + |\gamma_{\mathbf{k}-\mathbf{q}/2}| + |\gamma_{\mathbf{k}+\mathbf{q}/2}|]} + \\ &+ \frac{1}{2\Omega} \sum_{\mathbf{k}} \frac{(1 - C_{\mathbf{k},\mathbf{q}})}{[E_b + \frac{X}{4m} q_x^2 + \frac{Y}{4m} q_y^2 - 2\epsilon_{\mathbf{k}} + |\gamma_{\mathbf{k}+\mathbf{q}/2}| - |\gamma_{\mathbf{k}-\mathbf{q}/2}|]} \approx \quad (\text{B.15}) \end{aligned}$$

espandendo al secondo ordine in q_x , attorno a $|\mathbf{q}| = 0$

$$\begin{aligned} &\approx -\frac{m}{4\pi a_R} + \frac{1}{\Omega} \sum_{\mathbf{k}} \frac{1}{2\epsilon_{\mathbf{k}}} + \frac{1}{4\Omega} \sum_{\mathbf{k}} \frac{(2 - \chi_{\mathbf{k}} q_x^2)}{[E_b + \frac{X}{4m} q_x^2 - 2\epsilon_{\mathbf{k}} - 2|\gamma_{\mathbf{k}}| - \zeta_{\mathbf{k}} q_x^2]} + \\ &+ \frac{1}{4\Omega} \sum_{\mathbf{k}} \frac{(2 - \chi_{\mathbf{k}} q_x^2)}{[E_b + \frac{X}{4m} q_x^2 - 2\epsilon_{\mathbf{k}} + 2|\gamma_{\mathbf{k}}| + \zeta_{\mathbf{k}} q_x^2]} + \frac{1}{2\Omega} \sum_{\mathbf{k}} \frac{\chi_{\mathbf{k}} q_x^2}{[E_b + \frac{X}{4m} q_x^2 - 2\epsilon_{\mathbf{k}} + \alpha_{\mathbf{k}} q_x]} \approx \quad (\text{B.16}) \end{aligned}$$

Con le definizioni

$$J_+ = 1/2m_x - 1/4m + \zeta_{\mathbf{k}} = X/4m + \zeta_{\mathbf{k}}$$

$$J_- = 1/2m_x - 1/4m - \zeta_{\mathbf{k}} = X/4m - \zeta_{\mathbf{k}}$$

$$\begin{aligned} &\approx -\frac{m}{4\pi a_R} + \frac{1}{\Omega} \sum_{\mathbf{k}} \frac{1}{2\epsilon_{\mathbf{k}}} + \frac{1}{4\Omega} \sum_{\mathbf{k}} \frac{(2 - \chi_{\mathbf{k}} q_x^2)}{[E_b - 2\epsilon_{\mathbf{k}} - 2|\gamma_{\mathbf{k}}| + J_- q_x^2]} + \\ &+ \frac{1}{4\Omega} \sum_{\mathbf{k}} \frac{(2 - \chi_{\mathbf{k}} q_x^2)}{[E_b - 2\epsilon_{\mathbf{k}} + 2|\gamma_{\mathbf{k}}| + J_+ q_x^2]} + \frac{1}{2\Omega} \sum_{\mathbf{k}} \frac{\chi_{\mathbf{k}} q_x^2}{[E_b - 2\epsilon_{\mathbf{k}}]} \approx \quad (\text{B.17}) \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} &\approx -\frac{m}{4\pi a_R} + \frac{1}{\Omega} \sum_{\mathbf{k}} \frac{1}{2\epsilon_{\mathbf{k}}} + \\ &+ \frac{1}{4\Omega} \sum_{\mathbf{k}} \frac{(2 - \chi_{\mathbf{k}} q_x^2)}{[E_b - 2\epsilon_{\mathbf{k}} - 2|\gamma_{\mathbf{k}}|]} \left(1 - \frac{J_- q_x^2}{[E_b - 2\epsilon_{\mathbf{k}} - 2|\gamma_{\mathbf{k}}|]} \right) + \\ &+ \frac{1}{4\Omega} \sum_{\mathbf{k}} \frac{(2 - \chi_{\mathbf{k}} q_x^2)}{[E_b - 2\epsilon_{\mathbf{k}} + 2|\gamma_{\mathbf{k}}|]} \left(1 - \frac{J_+ q_x^2}{[E_b - 2\epsilon_{\mathbf{k}} + 2|\gamma_{\mathbf{k}}|]} \right) + \\ &+ \frac{1}{2\Omega} \sum_{\mathbf{k}} \frac{\chi_{\mathbf{k}} q_x^2}{[E_b - 2\epsilon_{\mathbf{k}}]} \approx \quad (\text{B.18}) \end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
&\approx -\frac{m}{4\pi a_R} + \sum_{\mathbf{k}} \frac{1}{2\epsilon_{\mathbf{k}}} + \\
&\quad + \frac{1}{4\Omega} \sum_{\mathbf{k}} \frac{1}{[E_b - 2\epsilon_{\mathbf{k}} - 2|\gamma_{\mathbf{k}}|]} \left\{ 2 - \chi_{\mathbf{k}} q_x^2 - \frac{2J_-}{[E_b - 2\epsilon_{\mathbf{k}} - 2|\gamma_{\mathbf{k}}|]} q_x^2 \right\} \\
&\quad + \frac{1}{4\Omega} \sum_{\mathbf{k}} \frac{1}{[E_b - 2\epsilon_{\mathbf{k}} + 2|\gamma_{\mathbf{k}}|]} \left\{ 2 - \chi_{\mathbf{k}} q_x^2 - \frac{2J_+}{[E_b - 2\epsilon_{\mathbf{k}} + 2|\gamma_{\mathbf{k}}|]} q_x^2 \right\} \\
&\quad + \frac{1}{2\Omega} \sum_{\mathbf{k}} \frac{\chi_{\mathbf{k}}}{[E_b - 2\epsilon_{\mathbf{k}}]} q_x^2 = \quad (\text{B.19})
\end{aligned}$$

I termini omogenei possono essere raccolti e la loro somma è nulla per l'energia di legame che risolve l'equazione (6.25), dunque

$$\begin{aligned}
&= \frac{1}{4\Omega} \sum_{\mathbf{k}} \left\{ \frac{-\chi_{\mathbf{k}}}{[E_b - 2\epsilon_{\mathbf{k}} - 2|\gamma_{\mathbf{k}}|]} + \frac{-2J_-}{[E_b - 2\epsilon_{\mathbf{k}} - 2|\gamma_{\mathbf{k}}|]^2} + \right. \\
&\quad \left. \frac{-\chi_{\mathbf{k}}}{[E_b - 2\epsilon_{\mathbf{k}} + 2|\gamma_{\mathbf{k}}|]} + \frac{-2J_+}{[E_b - 2\epsilon_{\mathbf{k}} + 2|\gamma_{\mathbf{k}}|]^2} + \right. \\
&\quad \left. \frac{2\chi_{\mathbf{k}}}{[E_b - 2\epsilon_{\mathbf{k}}]} \right\} q_x^2 = \quad (\text{B.20})
\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
&= \frac{1}{4\Omega} \sum_{\mathbf{k}} \left\{ \frac{-\chi_{\mathbf{k}}}{[E_b - 2\epsilon_{\mathbf{k}} - 2|\gamma_{\mathbf{k}}|]} + \frac{-\chi_{\mathbf{k}}}{[E_b - 2\epsilon_{\mathbf{k}} + 2|\gamma_{\mathbf{k}}|]} + \frac{2\chi_{\mathbf{k}}}{[E_b - 2\epsilon_{\mathbf{k}}]} + \right. \\
&\quad \left. \frac{-X/2m + 2\zeta_{\mathbf{k}}}{[E_b - 2\epsilon_{\mathbf{k}} - 2|\gamma_{\mathbf{k}}|]^2} + \frac{-X/2m - 2\zeta_{\mathbf{k}}}{[E_b - 2\epsilon_{\mathbf{k}} + 2|\gamma_{\mathbf{k}}|]^2} \right\} q_x^2 = \quad (\text{B.21})
\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
&= \frac{1}{4\Omega} \sum_{\mathbf{k}} \left\{ \frac{-8|\gamma_{\mathbf{k}}|^2 \chi_{\mathbf{k}}}{[(E_b - 2\epsilon_{\mathbf{k}})^2 - 4|\gamma_{\mathbf{k}}|^2][E_b - 2\epsilon_{\mathbf{k}}]} \right. \\
&\quad \left. \frac{-X/2m + 2\zeta_{\mathbf{k}}}{[E_b - 2\epsilon_{\mathbf{k}} - 2|\gamma_{\mathbf{k}}|]^2} + \frac{-X/2m - 2\zeta_{\mathbf{k}}}{[E_b - 2\epsilon_{\mathbf{k}} + 2|\gamma_{\mathbf{k}}|]^2} \right\} q_x^2 = \quad (\text{B.22})
\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
&= \frac{1}{4\Omega} \sum_{\mathbf{k}} \left\{ \frac{-8|\gamma_{\mathbf{k}}|^2 \chi_{\mathbf{k}}}{[(E_b - 2\epsilon_{\mathbf{k}})^2 - 4|\gamma_{\mathbf{k}}|^2][E_b - 2\epsilon_{\mathbf{k}}]} + \right. \\
&\quad + \frac{16\zeta_{\mathbf{k}}(E_b - 2\epsilon_{\mathbf{k}})|\gamma_{\mathbf{k}}|}{[(E_b - 2\epsilon_{\mathbf{k}})^2 - 4|\gamma_{\mathbf{k}}|^2]^2} + \\
&\quad \left. + \frac{-X/2m}{[E_b - 2\epsilon_{\mathbf{k}} + 2|\gamma_{\mathbf{k}}|]^2} + \frac{-X/2m}{[E_b - 2\epsilon_{\mathbf{k}} - 2|\gamma_{\mathbf{k}}|]^2} \right\} q_x^2 = \alpha(E_b, m_x) q_x^2 = 0 \quad (\text{B.23})
\end{aligned}$$

Per ricavare dunque la massa efficace si impone $\alpha(E_b, m_x) = 0$, ricordando le definizioni fatte

$$\zeta_{\mathbf{k}} = \frac{(v_D^2 - v_R^2)^2 k_y^2}{4|\gamma_{\mathbf{k}}|^3} \quad (\text{B.24})$$

$$\chi_{\mathbf{k}} = \frac{(v_R^2 - v_D^2)^2 k_y^2}{2|\gamma_{\mathbf{k}}|^4} \quad (\text{B.25})$$

allora

$$\begin{aligned} X \frac{1}{\Omega} \sum_{\mathbf{k}} \left\{ \frac{1}{[E_b - 2\epsilon_{\mathbf{k}} + 2|\gamma_{\mathbf{k}}|]^2} + \frac{1}{[E_b - 2\epsilon_{\mathbf{k}} - 2|\gamma_{\mathbf{k}}|]^2} \right\} &= \\ &= -\frac{2m}{\Omega} \sum_{\mathbf{k}} \left\{ \frac{8|\gamma_{\mathbf{k}}|^2 \chi_{\mathbf{k}}}{[(E_b - 2\epsilon_{\mathbf{k}})^2 - 4|\gamma_{\mathbf{k}}|^2][E_b - 2\epsilon_{\mathbf{k}}]} \right. \\ &\quad \left. - \frac{16\zeta_{\mathbf{k}}(E_b - 2\epsilon_{\mathbf{k}})|\gamma_{\mathbf{k}}|}{[(E_b - 2\epsilon_{\mathbf{k}})^2 - 4|\gamma_{\mathbf{k}}|^2]^2} \right\} = \\ &= -\frac{8m(v_D^2 - v_R^2)^2}{\Omega} \sum_{\mathbf{k}} \frac{k_y^2}{|\gamma_{\mathbf{k}}|^2} \left\{ \frac{1}{[(E_b - 2\epsilon_{\mathbf{k}})^2 - 4|\gamma_{\mathbf{k}}|^2][E_b - 2\epsilon_{\mathbf{k}}]} \right. \\ &\quad \left. - \frac{(E_b - 2\epsilon_{\mathbf{k}})}{[(E_b - 2\epsilon_{\mathbf{k}})^2 - 4|\gamma_{\mathbf{k}}|^2]^2} \right\} \quad (\text{B.26}) \end{aligned}$$

Definendo queste sommatorie come fatto in e ricordando che $X = \frac{2m}{m_x} - 1$

$$X = -8m(v_D^2 - v_R^2)^2 \frac{B_x}{A} \quad (\text{B.27})$$

$$\frac{2m}{m_x} = 1 - 8m(v_D^2 - v_R^2)^2 \frac{B_x}{A} \quad (\text{B.28})$$

In maniera del tutto analoga il calcolo può essere rifatto per la massa efficace m_y , con trovando:

$$\frac{2m}{m_y} = 1 - 8m(v_D^2 - v_R^2)^2 \frac{B_y}{A} \quad (\text{B.29})$$

Nel caso di un'accoppiamento di Rashba puro ($v_D = 0$) le due masse efficaci, $m_x = m_y = m_{\perp}$, coincidono e dunque sommando le due equazioni si ottiene

$$\frac{2m}{m_{\perp}} = 1 - 4mv_R^4 \frac{B_x + B_y}{A} \Big|_{v_D=0} \quad (\text{B.30})$$

Il risultato coincide perfettamente con quanto ottenuto in [34] nel caso specifico di accoppiamento di Zeeman nullo.

Bibliografia

- [1] D. M. Eagles. Possible Pairing without Superconductivity at Low Carrier Concentrations in Bulk and Thin-Film Superconducting Semiconductors. *Phys. Rev.*, 186, 1969.
Url <http://journals.aps.org/pr/abstract/10.1103/PhysRev.186.456> ↗
- [2] P. Nozières and S. Schmitt-Rink. Bose condensation in an attractive fermion gas: From weak to strong coupling superconductivity. *J. Low Temp. Phys.*, 59:195, 1985.
Url <http://link.springer.com/article/10.1007%2FBF00683774>
- [3] C. A. R. Sá de Melo, Mohit Randeria, and Jan R. Engelbrecht. Crossover from BCS to Bose superconductivity: Transition temperature and time-dependent Ginzburg-Landau theory. *Phys. Rev. Lett.*, 71(19):3202–3205, 1993. Url <http://journals.aps.org/prl/abstract/10.1103/PhysRevLett.71.3202>
- [4] K. B. Davis, M. O. Mewes, M. R. Andrews, N. J. van Druten, D. S. Durfee, D. M. Kurn, and W. Ketterle. Bose-Einstein Condensation in a Gas of Sodium Atoms. *Phys. Rev. Lett.*, 75, 1995. Url <http://journals.aps.org/prl/abstract/10.1103/PhysRevLett.75.3969> ↗
- [5] S. Inouye, M. R. Andrews, J. Stenger, H.-J. Miesner, D. M. Stamper-Kurn, and W. Ketterle. Observation of Feshbach resonances in a Bose-Einstein condensate. *Nature*, 392:151–154, 1998. Url <http://www.nature.com/nature/journal/v392/n6672/full/392151a0.html>
- [6] P. Courteille, R. S. Freeland, D. J. Heinzen, F. A. Van Abeelen, and B. J. Verhaar. Observation of a Feshbach Resonance in Cold Atom Scattering. *Phys. Rev. Lett.*, 81, 1998. Url <http://journals.aps.org/prl/abstract/10.1103/PhysRevLett.81.69>
- [7] B. DeMarco and D. S. Jin. Onset of Fermi Degeneracy in a Trapped Atomic Gas. *science*, 285, 1999. Url <http://science.sciencemag.org/content/285/5434/1703> ↗

- [8] C. A. Regal, M. Greiner, and D. S. Jin. Observation of Resonance Condensation of Fermionic Atom Pairs. *Phys. Rev. Lett.*, 92, 2004. Url <http://journals.aps.org/prl/abstract/10.1103/PhysRevLett.92.040403> ↗
- [9] M. W. Zwierlein, C. A. Stan, C. H. Schunck, S. M. F. Raupach, A. J. Kerman, and W. Ketterle. Condensation of Pairs of Fermionic Atoms near a Feshbach Resonance. *Phys. Rev. Lett.*, 92, 2004. Url <http://journals.aps.org/prl/abstract/10.1103/PhysRevLett.92.120403> ↗
- [10] T. Bourdel, L. Khaykovich, J. Cubizolles, J. Zhang and F. Chevy, M. Teichmann, L. Tarruell, S. J. J. M. F. Kokkelmans, , and C. Salomon. Experimental Study of the BEC-BCS Crossover Region in Lithium 6. *Phys. Rev. Lett.*, 93, 2004. Url <http://journals.aps.org/prl/abstract/10.1103/PhysRevLett.93.050401> ↗
- [11] J. Kinast, A. Turlapov, J. E. Thomas, Q. Chen, J. Stajic, and K. Levin. Heat Capacity of a Strongly Interacting Fermi Gas. *Science*, Vol. 307, Issue 5713, 2005. Url <http://science.sciencemag.org/content/307/5713/1296> ↗
- [12] Y.-J. Lin, K. Jiménez-García, and I. B. Spielman. Spin-orbit-coupled Bose-Einstein condensates. *Nature*, 471, 2011. Url <http://www.nature.com/nature/journal/v471/n7336/full/nature09887.html>
- [13] P. Wang, Z.-Q. Yu, Z. Fu, J. Miao, L. Huang, S. Chai, H. Zhai, and J. Zhang. Spin-Orbit Coupled Degenerate Fermi Gases. *Phys. Rev. Lett.*, 109, 2012. Url <http://journals.aps.org/prl/abstract/10.1103/PhysRevLett.109.095301> ↗
- [14] V. Galitski and I. B. Spielman. Spin-orbit coupling in quantum gases. *Nature*, 2013. Url <http://www.nature.com/nature/journal/v494/n7435/full/nature11841.html> ↗
- [15] H. Smith C. J. Pethick. *Bose-Einstein condensation in dilute gases*. Cambridge University Press, 2nd ed edition, 2008
- [16] R. Grimm and M. Weidemüller and Y. B. Ovchinnikov. Optical dipole traps for neutral atoms. *Arxiv*, 1999. Url <http://arxiv.org/abs/physics/9902072>
- [17] M. Inguscio, W. Ketterle, and C. Salomon. *Ultra-cold Fermi gases, Course CLXIV*. IOS Press, 2007 sezione 2.3.5 ↗
- [18] W. Ketterle and N. J. Van Druten. Optical dipole traps for neutral atoms. *Advances in atomic, molecular and optical physics*, 37(4): 181–231, 1996. Url http://cua.mit.edu/8.422_S13/Reading%20Material/EvaporativeCoolingofTrappedAtoms.pdf ↗

- [19] L. D. Landau and E. M. Lifshitz. *Quantum Mechanics non-relativistic theory*, volume Volume 3 of *Course of Theoretical Physics*. Pergamon, 3 edition, 1991 p.131 ↗
- [20] J. R. Taylor. *Scattering Theory: the Quantum Theory of Nonrelativistic Collisions*. Wiley, 1972 cap. 11
- [21] K. Gubbels H. T. C. Stoof, D. B. M. Dickerscheid. *Ultracold Quantum Fields*. Springer, 2009
- [22] A. A. Khelashvili and T. P. Nadareishvili. What is the boundary condition for the radial wave function of the schrödinger equation? *A. J. P.*, 79(6), 2011. Url <http://dx.doi.org/10.1119/1.3546099> ↗
- [23] L. Zhang, P. Zhang, and Y. Deng. Scattering and effective interactions of ultracold atoms with spin-orbit interaction. *Phys. Rev. A*, 87, 2013. Url <http://journals.aps.org/pr/abstract/10.1103/PhysRevA.87.053626>
- [24] L. Zhang, P. Zhang, and Y. Deng. Modified Bethe-Peierls boundary condition for ultracold atoms with spin-orbit coupling. *Phys. Rev. A*, 86(053608), 2012. Url <http://journals.aps.org/pr/pdf/10.1103/PhysRevA.86.053608>
- [25] Cheng Chin, Rudolf Grimm, Paul Julienne, and Eite Tiesinga. Feshbach resonances in ultracold gases. *Rev. Mod. Phys.*, 82, 2010. Url <http://journals.aps.org/rmp/abstract/10.1103/RevModPhys.82.12252> ↗
- [26] G. B. Partridge, K. E. Strecker, R. I. Kamar, M. W. Jack, , and R. G. Hulet. Molecular Probe of Pairing in the BEC-BCS Crossover. *Phys. Rev. Lett.*, 95, 2005. Url <http://journals.aps.org/prl/abstract/10.1103/PhysRevLett.95.020404> ↗
- [27] M. W. J. Romans and H.T.C. Stoof. Dressed Feshbach molecules in the BCS-BEC crossover. *Phys. Rev. Lett.*, 95, 2005. Url <http://journals.aps.org/prl/abstract/10.1103/PhysRevLett.95.260407> ↗
- [28] T. Loftus, C. A. Regal, C. Ticknor, J. L. Bohn, and D. S. Jin. Resonant Control of Elastic Collisions in an Optically Trapped Fermi Gas of Atoms. *Phys. Rev. Lett.*, 88, 2002. Url <http://journals.aps.org/prl/abstract/10.1103/PhysRevLett.88.173201> ↗
- [29] C. A. Regal and D. S. Jin. Measurement of positive and negative scattering lengths in a fermi gas of atoms. *Phys. Rev. Lett.*, 90, 2003. doi: 10.1103/PhysRevLett.90.230404. Url <http://link.aps.org/doi/10.1103/PhysRevLett.90.230404>
- [30] Naoto Nagaosa and S. Heusler. *Quantum field theory in condensed matter physics* Springer, 1 edition, 1999. ↗

- [31] M. Marini, F. Pistolesi, and G.C. Strinati. Evolution from BCS Superconductivity to Bose Condensation: Analytic Results for the crossover in three dimensions. *ArXiv*, 1997. Url <http://arxiv.org/abs/cond-mat/9703160> ↗
- [32] Mohit Randeria. Ultracold Fermi gases: Pre-pairing for condensation. *Nature Physics*, 6, 2010. Url <http://www.nature.com/nphys/journal/v6/n8/full/nphys1748.html> ↗
- [33] L. Dell’Anna, G. Mazzearella, and L. Salasnich. Condensate fraction of a resonant Fermi gas with spin-orbit coupling in three and two dimensions. *Phys. Rev. A*, 84(3), 2011. Url <http://dx.doi.org/10.1103/PhysRevA.84.033633> ↗
- [34] L. Jiang, X.-J. Liu, H. Hu, and H. Pu. Rashba spin-orbit-coupled atomic fermi gases. *Phys. Rev. A*, 84, 2011. doi: 10.1103/PhysRevA.84.063618. Url <http://link.aps.org/doi/10.1103/PhysRevA.84.063618> ↗
- [35] Z.-Q. Yu and H. Zhai Spin-Orbit Coupled Fermi Gases across a Feshbach Resonance. *Phys. Rev. Lett*, 107, 2011. doi: 10.1103/PhysRevLett.107.195305. Url <http://link.aps.org/doi/10.1103/PhysRevLett.107.195305> ↗
- [36] J. P. Vyasankere and V. B. Shenoy Bound states of two spin- $\frac{1}{2}$ fermions in a synthetic non-Abelian gauge field *Phys. Rev. B*, 83, 2011. doi: 10.1103/PhysRevB.83.094515. Url <http://link.aps.org/doi/10.1103/PhysRevB.83.094515> ↗