

UNIVERSITÀ DEGLI STUDI DI PADOVA

Dipartimento di Fisica e Astronomia "Galileo Galilei"

Corso di Laurea Magistrale in Fisica

Tesi di Laurea

Sviluppo di una lente elettro-ottica per misure di accoppiamento laser-cavità a radiofrequenza

Relatore

Chiar.mo Dr. Giacomo Ciani

Correlatore

Chiar.mo Dr. Marco Bazzan

Laureando

Nicolò Pisani

Anno Accademico 2017/2018

A ZIO CLAUDIO E DANILO, CHE MI HANNO INSEGNATO A OSSERVARE IL MONDO SOTTO ALTRE
PROSPETTIVE

A ZIO UMBERTO E COCÒ, CHE DA PROSPETTIVE ALTRE OSSERVANO NOI E I MONDI
A REBECCA E MARCO ANTONIO, CHE AFFACCIANDOSI SU QUESTO MONDO DALLE INFINITE
PROSPETTIVE TROVERANNO UN FRAMMENTO DI DESTINO PROPRIO QUI

*[...]li profondi fori
onde uscì il sangue in sul qual io sedea
fatti mi fuoro in grembo a li Antendri
laddove io più sicuro esser credea[...]*

— Dante Alighieri.

Purgatorio, Canto V, vv. 73-76

Indice

1	Background sulle onde gravitazionali	3
1.1	Teoria delle onde gravitazionali	3
1.1.1	L'equazione di campo di Einstein	3
1.1.2	L'effetto misurabile su masse test	5
1.2	Interferometri gravitazionali	5
1.3	I segnali di onde gravitazionali rivelati finora	7
1.4	Limiti alla sensibilità dei rivelatori di onde gravitazionali	9
1.4.1	Rumore quantistico	9
1.5	Riduzione del rumore quantistico	10
2	Un metodo innovativo di rivelazione del mismatch	13
2.1	Ottica gaussiana	13
2.2	Fisica del risonatore ottico	14
2.2.1	Modi e proprietà di una cavità ottica	14
2.3	Il risonatore ottico stabile	18
2.3.1	Modi di una cavità stabile	19
2.3.2	Il diagramma di stabilità di un risonatore	20
2.3.3	Frequenze di risonanza dei modi gaussiani	21
2.3.4	Il mode-matching	22
2.4	Descrizione del metodo	22
2.4.1	Cenni all'effetto Pockels e alla modulazione elettro-ottica	23
2.4.2	Espressione del mismatch attraverso gli HOM	26
2.4.3	L'attuatore elettro-ottico per la rivelazione del mismatch	29
2.4.4	Campo riflesso dalla cavità	30
2.4.5	Tecnica Lock-in	32
3	Progettazione e costruzione della LEO	33
3.1	Richiamo di ottica e panoramica generale	33
3.1.1	Le lenti	33
3.1.2	Ottica matriciale	34
3.1.3	Linee-guida al progetto	35

3.2	Modellazione dell'apparato	36
3.2.1	COMSOL Multiphysics	37
3.2.2	SMath	42
3.2.3	Set ottimale di parametri costruttivi	44
3.3	Fabbricazione della lente elettro-ottica	44
3.3.1	Preparazione del substrati	44
3.3.2	Stampare gli elettrodi	47
4	Apparato sperimentale	51
4.1	Considerazioni preliminari	51
4.2	Progettazione della cavità	53
4.2.1	Beam waist per una cavità piano concava	54
4.3	Progettazione del telescopio	55
4.3.1	Stima del waist iniziale	56
4.3.2	Simulazione con JaMmT	57
4.3.3	Beam scan del fascio lente per lente	58
4.3.4	Schema generale dell'apparato sperimentale e scansione della cavità	61
5	Acquisizione e analisi dei dati sperimentali	65
5.1	Caratterizzazione dello spettro della cavità	65
5.1.1	Calibrazione tempo-frequenze dello spettro acquisito	65
5.1.2	Il modo fondamentale	68
5.1.3	Analisi dei modi di ordine superiore	70
5.2	Analisi del picco HG02 alterato dalla LEO	78
5.2.1	Preparazione della misura e descrizione dello script in Python	78
5.2.2	Risultati dell'analisi dati	79
	Appendice A	91
	Bibliografia	109

Capitolo 1

Background sulle onde gravitazionali

Le recenti osservazioni dirette di onde gravitazionali non hanno solo fornito un'ulteriore conferma della relatività generale einsteiniana ma anche aperto la strada a un nuovo modo di osservare il cielo. Sin dai primordi dell'astronomia la comprensione dell'universo si è fondata sull'osservazione delle componenti del solo spettro elettromagnetico. Se da un lato la forte interazione dei fotoni con la materia rende queste particelle facilmente rivelabili, dall'altro l'informazione da essi trasportata è facilmente inquinata o bloccata dalla presenza di altra materia/energia tra la sorgente e l'osservatore. In quest'ottica, la debolezza dell'interazione gravitazionale diviene un vantaggio perché consente di sondare regioni spazio-temporali dell'universo normalmente inaccessibili. Il prezzo da pagare è la grande difficoltà di realizzazione di strumenti capaci di rivelare il loro passaggio. Infatti, la rivelazione diretta dell'interazione gravitazionale comporta ricorrere a tipi di osservazione non convenzionali. I metodi di rivelazione odierni si basano sostanzialmente su due principi: la risonanza di oggetti solidi e la misura della contrazione/dilatazione delle distanze tra due masse fisse.

Dopo aver dato al lettore un'introduzione basilare al concetto fisico-matematico di onda gravitazionale, illustriamo, in questo capitolo, il lay-out e il funzionamento di un interferometro gravitazionale, focalizzandoci, in vista degli sviluppi dei capitoli successivi, su una problematica che interessa questi strumenti di misura: la riduzione del rumore causato dall'imperfetto accoppiamento tra i componenti ottici dell'interferometro.

1.1 Teoria delle onde gravitazionali

Una trattazione rigorosa della fisica delle onde gravitazionali esula dagli scopi di questo lavoro. Rimandiamo ai testi riportati nella bibliografia per una maggiore esaustività.[1]

1.1.1 L'equazione di campo di Einstein

La relatività speciale di Einstein descrive il moto dei corpi in sistemi di riferimento inerziali; lo spazio-tempo è descritto con una metrica piatta dal tensore di Minkowsky $\eta_{\mu\nu}$. In questa prospettiva l'intervallo spazio-tempo tra due eventi separati è dato da:

$$ds^2 = \eta_{\mu\nu} dx^\mu dx^\nu \quad (1.1)$$

Nella relatività generale la non-inerzialità dei sistemi di riferimento si traduce in una curvatura nello spazio tempo, indotta dalla presenza di materia-energia. Ciò si manifesta sotto forma di forza di gravità; nella prospettiva di Einstein, il campo gravitazionale è dato dall'equazione tensoriale che porta il suo nome:

$$R_{\mu\nu} - \frac{1}{2}Rg_{\mu\nu} = \frac{8\pi G}{c^4}T_{\mu\nu} \quad (1.2)$$

dove G è la costante di gravitazione universale, c la velocità della luce nel vuoto, $T_{\mu\nu}$ il tensore massa-energia, $R_{\mu\nu}$ il tensore di Ricci e R lo scalare di Ricci. Le onde gravitazionali sono delle increspature nello spazio tempo e possono essere descritte matematicamente applicando a questa equazione l'approssimazione di campo debole; si assume cioè che la curvatura indotta nello spazio-tempo sia scrivibile con una piccola perturbazione del tensore metrico piatto

$$g_{\mu\nu} \approx \eta_{\mu\nu} + h_{\mu\nu} \quad (1.3)$$

dove $h_{\mu\nu} \ll 1$. In questa situazione, possiamo porci nella gauge di de Donder [18] e riscrivere l'equazione di campo come segue:

$$\left(-\frac{1}{c^2}\frac{\partial^2}{\partial t^2} + \frac{\partial}{\partial x_i^2}\right)h_{\mu\nu} = -16\pi T_{\mu\nu} \quad (1.4)$$

che in assenza di materia-energia si riduce a

$$\left(-\frac{1}{c^2}\frac{\partial^2}{\partial t^2} + \frac{\partial}{\partial x_i^2}\right)h_{\mu\nu} = 0 \quad (1.5)$$

del tutto equivalente all'equazione di propagazione delle onde elettromagnetiche. Ci aspetta allora che anche le onde gravitazionali si estendano su un'ampia gamma di frequenze a seconda della sorgente (vedi figura 1.1)

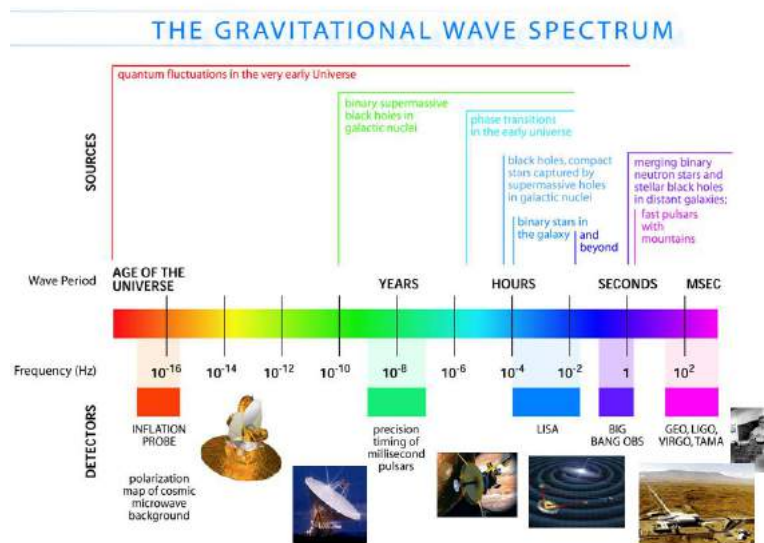


Figura 1.1: Lo spettro gravitazionale previsto dai modelli teorici attuali. Gli interferometri gravitazionali come LIGO e VIRGO percepiscono solo le frequenze più basse dello spettro (audiofrequenze), generate dalla fusione di buchi neri e stelle ai neutroni [6]

1.1.2 L'effetto misurabile su masse test

Una soluzione generale dell'equazione di Einstein con le approssimazioni fatte sopra è data da una somma di onde piane come:

$$h_{\mu\nu} = A_{\mu\nu} e^{ik_\rho x^\rho}$$

dove $A_{\mu\nu}$ è un tensore di polarizzazione. Imponendo la condizione cosiddetta di gauge TT (Trasversa e priva di Traccia) e scegliendo z come direzione di propagazione del vettore d'onda \vec{k} , il tensore $A_{\mu\nu}$ si scrive:

$$A_{\mu\nu} = h_+ A_{\mu\nu}^+ + h_\times A_{\mu\nu}^\times \quad (1.6)$$

$$A^+ = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & -1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix} \quad e \quad A^\times = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix} \quad (1.7)$$

sono le cosiddette polarizzazioni *più* e *croce*. L'ampiezza h delle onde gravitazionali è data dalla formula di quadrupolo di Einstein

$$h(r) = \frac{2G}{c^4} \frac{1}{r} \frac{d^2 I}{dt^2} \quad (1.8)$$

A livello fisico, il passaggio di un'onda gravitazionale dilata e riduce la distanza propria di due particelle ferme poste in $A = (ct, a, 0, 0)$ e $B = (ct, b, 0, 0)$. Se l'onda gravitazionale le investe propagandosi lungo l'asse z avremo che la distanza relativa tra le due è data da

$$L' = \int \sqrt{|ds^2|} = \int_a^b \sqrt{|g_{11}|} dx \approx (b - a) + \frac{1}{2} h_{11} (b - a) = L + \delta L \quad (1.9)$$

Il piccolo spostamento scala dunque in maniera proporzionale all'ampiezza dell'onda e alla distanza iniziale tra le due particelle.

1.2 Interferometri gravitazionali

Negli ultimi anni il principale filone di ricerca nella rivelazione di onde gravitazionali si basa sull'utilizzo degli interferometri gravitazionali basati al suolo terrestre. Tutti i detector odierni sono basati sullo schema dell'interferometro di Michelson.

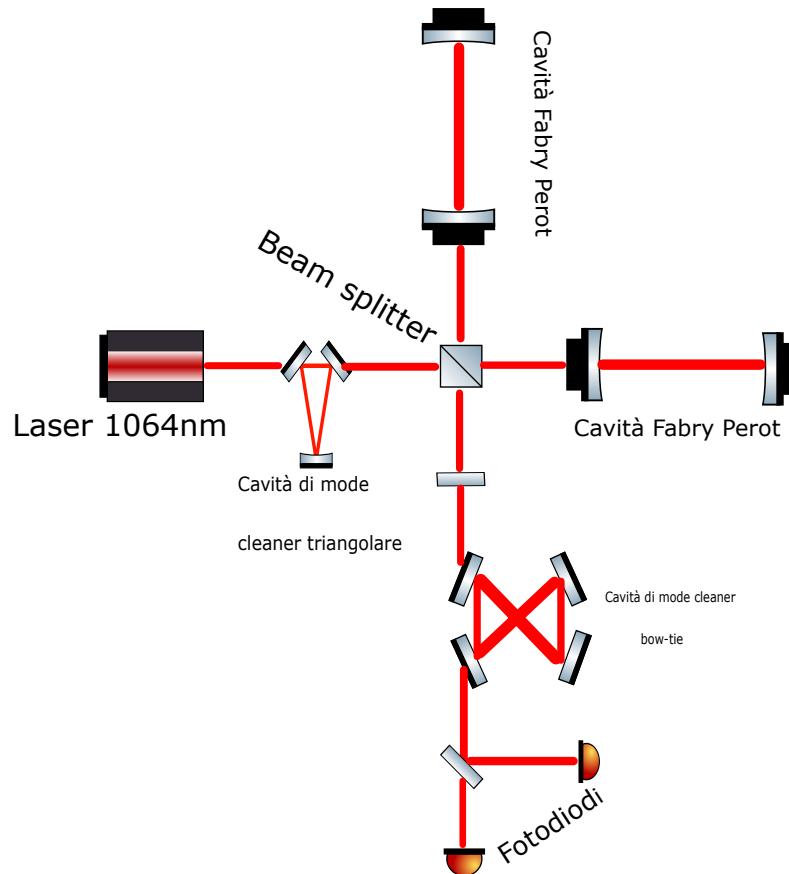


Figura 1.2: Schema di un interferometro gravitazionale. Le cosiddette cavità di mode-cleaner sono incluse nel set-up per correggere le distorsioni dei profili di fase e di intensità che il fascio gaussiano accumula mentre circola nell'impianto

Come si vede dalla figura 1.2, esso è costituito da due bracci (lunghi generalmente qualche chilometro) disposti in modo da formare una L al cui vertice viene situato un beam splitter; se si pongono due specchi alle estremità dei bracci (uno allineato lungo l'asse y e l'altro lungo l'asse x in funzione di masse-test) e si accende una luce laser che si propaghi lungo tutto il percorso, in accordo al principio di sovrapposizione la luce ricombinata presso il beam splitter formerà delle frange di interferenza. La natura quadrupolare dell'onda gravitazionale in polarizzazione $+$ che si propaga lungo la direzione $-z$ causerà una variazione massima $\pm\delta L$ della distanza L tra l'origine e la massa test sull'asse y . Allo stesso tempo lo specchio-massa test sull'asse x cambierà di $\mp\delta L$ e viceversa[16]. Il cambio di lunghezza differenziale dei due bracci dell'interferometro corrisponderà a un cambio di fase dei fasci laser in propagazione pari a

$$\Delta\phi = \frac{4\pi}{\lambda}\delta L$$

e quindi a una modifica della figura di interferenza, misurabile in intensità attraverso un fotodiode posto in output all'interferometro. Poiché non si possono avere interferometri arbitrariamente lunghi (sia per ragioni pratiche che finanziarie), il metodo che si utilizza per avere dei δL apprezzabili è inserire una cavità di Fabry-Perot lungo i due bracci dell'interferometro di Michelson. Nella figura 1.3 è rappresentato schematicamente l'effetto prodotto da un'onda gravitazionale nelle due polarizzazioni.

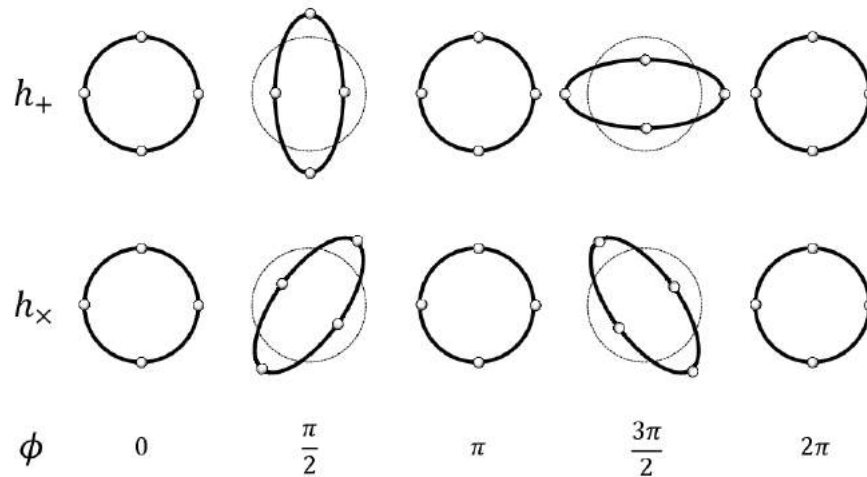


Figura 1.3: L'effetto di un'onda gravitazionale viaggiante perpendicolarmente al piano del foglio nelle due polarizzazioni su un anello di materia. La figura mostra l'effetto dell'onda per $\omega t = 0, \pi/2, \pi, 3\pi/2$. L'effetto è lo stesso per le due polarizzazioni ma con uno ruotato rispetto all'altro di $\frac{\pi}{4}$ [19]

1.3 I segnali di onde gravitazionali rivelati finora

Ad oggi i segnali attribuibili con sicurezza alle onde gravitazionali sono sei, tutti osservati dalla rete di interferometri VIRGO-LIGO (figure 1.4 e 1.5). Vediamo insieme i quattro più significativi.



Figura 1.4: L'interferometro Virgo



Figura 1.5: Gli interferometri Ligo H e Ligo L

GW150914

La prima osservazione diretta di un'onda gravitazionale nella storia della fisica avvenne il 14 Settembre 2015 e fu annunciata ufficialmente l'11 Febbraio 2016 [20]. Percepito dagli interferometri LIGO-Hanford e LIGO-Livingston, il segnale (vedi figura 1.6) proveniva dalla coalescenza di due buchi neri di masse, rispettivamente, 36 e 29 volte quella dal sole e distanti 1,4 miliardi di anni luce dalla Terra. L'onda gravitazionale ha prodotto una contrazione/dilatazione delle lunghezze dei bracci dell'interferometro nell'ordine di 10^{-18} m

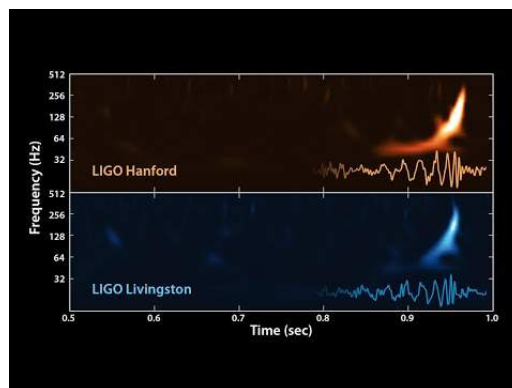


Figura 1.6: Il segnale gravitazionale GW150914 rivelato dagli interferometri LIGO

GW170104

Anche questo segnale fu rivelato dalla coppia di interferometri LIGO in data 4 Gennaio 2017 e anche quest'onda gravitazionale fu il risultato della fusione di due buchi neri. L'analisi dell'evento fornì un importante risultato scientifico: un nuovo limite superiore alla massa dei gravitoni ($m_g \leq 7,7 \times 10^{-23} eV/c^2$) [21].

GW170814 e GW170817

La rivelazione di questa collisione tra buchi neri avvenuta il 14 Agosto 2017 fu la prima eseguita congiuntamente dagli interferometri LIGO e Virgo. Questa collaborazione ha permesso una localizzazione più precisa del fenomeno. Tre giorni dopo il network di interferometri rivelò un segnale gravitazionale proveniente da un sistema binario di stelle ai neutroni [22] distante 40 Megaparsec[23] dalla Terra nella costellazione dell'Idra, sancendo la nascita dell'astronomia multi-messaggio: grazie alla più precisa localizzazione della sorgente, possibile con

l'uso di tre rivelatori, oltre all'onda gravitazionale è stato rilevato anche il lampo gamma generato dalla collisione dei due corpi celesti. Questo ha permesso di stimare un limite per la differenza Δv tra la velocità della luce e la velocità della gravità [24] e ha fornito la base per una misura superiore della costante di Hubble [25].

1.4 Limiti alla sensibilità dei rivelatori di onde gravitazionali

Poiché la deformazione indotta da un'onda gravitazionale su un interferometro è molto piccola, nella rivelazione interferometrica è di vitale importanza minimizzare tutti i rumori che possano inquinare il segnale da studiare. Alcuni sono dovuti all'ambiente (rumore sismico, raffiche di vento, temperatura degli specchi), altri al design dell'interferometro e altri ancora sono legati alla fisica fondamentale. Gli interferometri gravitazionali di attuale generazione sono progettati per spingere ulteriormente in avanti il limite di rivelazione riducendo quest'ultima classe di disturbi. Dati gli scopi della tesi, approfondiamo il discorso intorno a questa tematica.

1.4.1 Rumore quantistico

Il limite alla sensibilità dell'interferometro derivante dalla natura quantistica della luce si manifesta attraverso due meccanismi: il rumore di quantizzazione dei fotoni e il rumore da pressione di radiazione quantistico. Entrambi sono attribuibili alle fluttuazioni quantistiche del campo elettromagnetico di vuoto che entrano nell'interferometro dalla cosiddetta dark port del beam splitter, il punto presso cui si osserva interferenza distruttiva dei fasci ricombinati.

Shot noise dei fotoni

Si può mostrare che una sorgente laser emette fotoni secondo una distribuzione poissoniana [5]. Questo vuol dire che quando si misura la potenza di un laser con un fotodiodo si osservano delle piccole fluttuazioni nel suo valore dovute al fatto che il numero di fotoni conteggiati dal sensore è variabile nel tempo. Il contributo dato dallo shot noise alla densità spettrale è dato da [11]

$$h_{sn} = \frac{1}{L} \sqrt{\frac{\hbar c \lambda}{2\pi P}} \quad (1.10)$$

dove L è la lunghezza del braccio dell'interferometro, λ è lunghezza d'onda del laser e P è la sua potenza. Non dipendendo dalla frequenza lo shot noise è un rumore bianco. Aumentando la potenza P l'effetto di disturbo viene ridotto.

Rumore da pressione di radiazione quantica

I fotoni che impattano sugli specchi cedono a questi una quantità di moto $p = \frac{2\hbar\omega}{c}$. Poiché il numero di fotoni non è costante questo si traduce in una forza sugli specchi Variabile nel tempo in modo casuale che si traduce in una perturbazione della fase dell'interferometro e quindi in un contributo di rumore aggiuntivo. La formula per calcolarlo è [11]

$$h_{prq}(\Omega) = \frac{1}{m\Omega^2 L} \sqrt{\frac{8\pi\hbar P}{c\lambda}} \quad (1.11)$$

dove m rappresenta la massa dello specchio e Ω è la frequenza dell'onda gravitazionale rivelata. A differenza del rumore shot, questo disturbo cresce al crescere della potenza ed è preponderante a basse frequenze

Limite quantico standard

Sommando i quadrati di questi due rumori sotto segno di radice si ottiene l'ampiezza del rumore totale

$$h_{rt}(\Omega) = \sqrt{h^2 + h_{rp}^2(\Omega)} \quad (1.12)$$

Il limite quantistico standard è dato da questa quantità minimizzata rispetto alla potenza P è data da

$$h_{lqs} = \sqrt{\frac{4\hbar}{m\Omega^2 L^2}} \quad (1.13)$$

che è raggiunto per una certa potenza ottimale P_o

$$P_o = \frac{c\lambda m\Omega^2}{4\pi} \quad (1.14)$$

1.5 Riduzione del rumore quantistico

Un'efficace strategia di riduzione del rumore quantistico consiste nell'iniettare dalla dark port dell'interferometro stati di luce squeezed; questo approccio fu proposto per la prima volta nel 1981 dal fisico statunitense Carlton Caves .

Nella teoria dei campi quantistica, il campo elettromagnetico è rappresentato per mezzo di due operatori coniugati non commutanti; ciascuno di essi è associato all'ampiezza del rispettivo campo ($\vec{\mathbf{E}}$ e $\vec{\mathbf{B}}$) che oscillano sfasati tra loro di 90° . Si è soliti indicare le due ampiezze come ampiezza in fase e ampiezza in quadratura di fase. Uno stato coerente (come appunto è quello di un laser) ha uguale indeterminazione per entrambe le quadrature, con il prodotto delle indeterminazioni limitato dal principio di Heisenberg il quale però non vieta che si possano generare degli stati particolari del campo elettromagnetico in cui la varianza delle fluttuazioni in una quadratura è compressa (squeezed) a discapito di quella dell'altra quadratura .Caves mostrò [13]che sostituire gli stati coerenti con stati squeezed in fase produce un miglioramento della sensibilità dell'interferometro laddove questa è disturbata dal rumore shot. Viceversa, uno stato di vuoto squeezed in ampiezza permette di abbattere il rumore di pressione di radiazione. Per ottenere una riduzione del rumore che abbracci l'intero spettro si ricorre a stati squeezed in cui la compressione delle due quadrature viene ottimizzata in funzione della frequenza per contrastare efficacemente la fonte di rumore quantico dominante in una data banda spettrale. E' stato dimostrato che preparando opportunamente questi stati si può addirittura abbattere il limite quantistico standard seppure solo in una certa banda [7].

La luce squeezed tuttavia è facilmente soggetta a deterioramento se nell'apparato sono presenti delle perdite ottiche perché queste distruggono la coerenza sulla quale si basa l'esistenza di questi stati .Una delle principali fonti di perdite ottiche all'interno degli interferometri gravitazionali è l'imperfetto accordo fra i fasci ottici circolanti nel dispositivo e le numerose cavità ottiche che ne fanno parte. L'unica strategia per minimizzare in modo

stabile queste perdite è di prevedere dei sistemi attivi di correzione che mantengano il sistema in condizioni di allineamento ottimali. Questo porta all'esigenza di sistemi innovativi per la misura in tempo reale della qualità dell'accoppiamento. La comprensione del concetto di disaccoppiamento (o mismatch) richiede una discussione intorno alle proprietà del fascio gaussiano e della cavità.

Capitolo 2

Un metodo innovativo di rivelazione del mismatch

Nel capitolo precedente abbiamo spiegato il motivo per cui la fattibilità di una misura che coinvolga stati squeezed implica una meticolosa riduzione delle perdite ottiche che possono affliggere l'apparato sperimentale. Nei moderni interferometri gravitazionali queste perdite sono dominate dall'imperfetto accoppiamento tra le cavità risonanti presenti nell'apparato [8]. In questo capitolo dopo aver descritto teoricamente le proprietà del risonatore ottico e dato una definizione di disaccoppiamento (o mismatch), esponiamo nel dettaglio un metodo innovativo di rivelazione del mismatch basato sull'impiego di un attuatore elettro-ottico.

2.1 Ottica gaussiana

Il fascio gaussiano è un modo trasverso del campo elettromagnetico (TEM) e la sua espressione è una soluzione dell'equazione parassiale di Helmholtz. La trattazione dell'argomento che presentiamo in questa sezione non è rigorosa e ha solo scopi propedeutici alla comprensione degli argomenti successivi. Per un approfondimento rimandiamo ai testi citati nella bibliografia [2] [3].

$$E(r, z) = E_0 \frac{w_0}{w(z)} \exp\left(\frac{-r^2}{w(z)^2}\right) \exp\left(-i\left(kz + k\frac{r^2}{2R(z)} - \psi_G(z)\right)\right) \quad (2.1)$$

dove $E_0 = E(0, 0)$ è l'ampiezza del campo nell'origine, r la distanza radiale dal centro dell'asse del fascio, k è il numero d'onda per una lunghezza d'onda λ , z è la distanza assiale dal fuoco del fascio (il cosiddetto waist);

$$w(z) = w_0 \sqrt{1 + \left(\frac{z}{z_R}\right)^2} \quad (2.2)$$

è il parametro che definisce la dimensione dello spot ,

$$z_R = \frac{\pi w_0^2}{\lambda} \quad (2.3)$$

è il cosiddetto Rayleigh range,

$$R(z) = z \left(1 + \frac{z_R^2}{z^2} \right) \quad (2.4)$$

è il raggio di curvatura del fronte d'onda a una distanza z dall'origine,

$$\psi(z) = \arctan \left(\frac{z}{z_R} \right) \quad (2.5)$$

è la cosiddetta fase di Gouy.

Le soluzioni di ordine superiore alle equazioni di Helmholtz possono essere scritte in diverse basi, a seconda della simmetria del sistema fisico. La decomposizione in coordinate cartesiane è detta di Hermite-Gauss:

$$H_{lm}(x, y, z) = \sqrt{\frac{2}{\pi w^2(z) 2^{n+m} m! n!}} H_l \left(\frac{\sqrt{2} x}{w(z)} \right) H_m \left(\frac{\sqrt{2} y}{w(z)} \right) \exp \left(-\frac{x^2 + y^2}{w^2(z)} \right) \exp \left(-i \frac{k(x^2 + y^2)}{2R(z)} \right) \exp(-ikz) \times \\ \times \exp(i(N+1) \arctan(z/z_R)) \quad (2.6)$$

dove gli $H_i(x)$ sono i cosiddetti polinomi di Hermite e $N = l + m$

In simmetria cilindrica, i modi trasversi del campo elettromagnetico si scrivono nella base di Laguerre-Gauss:

$$L_{mn}(r, \phi, z) = \frac{C_{mn}^{LG}}{w(z)} \left(\frac{r\sqrt{2}}{w(z)} \right)^{|m|} \exp \left(-\frac{r^2}{w^2(z)} - ik \frac{r^2}{2R(z)} \right) L_n^{|m|} \left(\frac{2r^2}{w^2(z)} \right) \exp(-i(kz + l\phi - (N+1) \arctan(z/z_R))) \quad (2.7)$$

dove L_m^n sono i polinomi di Laguerre generalizzati, C_{mn}^{LG} è un fattore di normalizzazione e $N = (|l| + 2p + 1)$.

2.2 Fisica del risonatore ottico

Un risonatore ottico (o cavità) è un insieme di specchi disposti in modo tale da intrappolare la luce a determinate frequenze di risonanza. Il fatto che al loro interno modi diversi risuonino a frequenze diverse ne fa un ottimo strumento per il mode cleaner all'interno degli interferometri gravitazionali. L'esempio più semplice di cavità risonante è quella che si ottiene posizionando due specchi piani uno di fronte all'altro a una certa distanza d (interferometro di Fabry-Perot): la luce viene riflessa tra i due ripetutamente con delle piccole perdite di energia. Accanto a questa semplice configurazione ne esistono altre più complesse, caratterizzate da un maggior numero di specchi (e curvi e piani) e disposti su percorsi chiusi diversi oppure basate sulle fibre ottiche. In questa sezione definiamo le proprietà fisiche di base di una cavità risonante.

2.2.1 Modi e proprietà di una cavità ottica

Consideriamo, per iniziare, un interferometro di Fabry-Perot ideale, dotato cioè di specchi perfettamente riflettenti e privo di perdite, in cui si propaghi un'onda luminosa piana. Tra i due specchi, il campo EM risultante è dato dalla sovrapposizione di tutte le onde riflesse; a causa dell'interferenza le uniche a non cancellarsi a

vicenda sono quelle per cui la lunghezza del cammino ottico $2d$ di un giro completo della cavità (round-trip) è un multiplo intero q della lunghezza d'onda λ

$$q\lambda = 2d \quad (2.8)$$

I modi di un interferometro di Fabry-Perot sono perciò delle onde stazionarie:

$$A(z) = C \sin\left(\frac{2\pi z}{\lambda}\right) \quad (2.9)$$

e un'onda arbitraria dentro la cavità è scritta come una somma discreta di modi

$$\sum_q C_m \sin\left(\frac{2\pi q z}{\lambda}\right) \quad (2.10)$$

Questo lo si può vedere rigorosamente risolvendo l'equazione di Helmholtz con la condizione al contorno che la soluzione sia nulla alle estremità ($z = 0$ e $z = d$) dell'interferometro [3].

Definendo il numero d'onda angolare

$$k_q = \frac{2\pi}{\lambda_q} = \frac{2\pi}{\frac{2d}{q}} = \frac{\pi q}{d} \quad (2.11)$$

si ottengono le frequenze di risonanza della cavità:

$$\nu_q = \frac{ck_q}{2\pi} = \frac{c}{2d}q, \quad q = 1, 2, \dots \quad (2.12)$$

Due frequenze di risonanza vicine distano esattamente:

$$FSR = \frac{c}{2d} \quad (2.13)$$

quantità che prende il nome di Free Spectral Range.

Un'altra maniera di determinare i modi del risonatore è vedere come cambia la fase dopo un giro completo in cavità. Dato che un modo è un'onda che si riproduce eguale a sé stessa e che ciascuno specchio introduce un termine π nell'argomento della funzione d'onda [3], il cambio di fase totale dev'essere un multiplo di 2π , cioè

$$\phi = 2kd = 2q\pi \quad (2.14)$$

da cui si riottiene facilmente la condizione $kd = q\pi$.

Sostituendo le equazioni (2.11) e (2.12) si ottiene:

$$\phi = 2kd = \frac{4\pi\nu d}{c} = \frac{\omega p}{c} \quad (2.15)$$

con $p = 2d$

Rilassando l'ipotesi di perfetta riflettività degli specchi, è possibile descrivere il segnale di risposta di una cavità

di Fabry-Perot usando il cosiddetto approccio dei campi circolanti [2]. I campi vengono assunti stazionari e collegati tra loro in funzione del campo iniettato nella cavità (vedi figura 2.1)

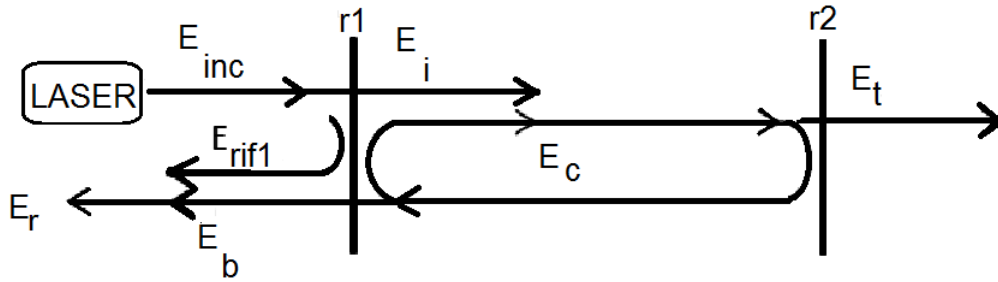


Figura 2.1: Campi elettrici all'interno di un risonatore di Fabry-Perot formato da due specchi con riflettività r_1 e r_2 . Il campo incidente E_{inc} produce il campo iniettato E_i , quello circolante E_c e quello trasmesso E_t . Il campo riflesso totale è la somma del campo trasmesso e riflesso direttamente dal primo specchio E_{rif1} [4]

Cominciamo collo studiare il campo riflesso avanti e indietro all'interno di una cavità come quella descritta sopra. Abbiamo:

$$E_c = E_i + r_1 r_2 e^{-i\phi - \beta} E_c \quad (2.16)$$

dove E_c e E_i sono il campo riflesso internamente e quello iniettato, r_1 e r_2 le riflettività degli specchi, ϕ la fase accumulata dal campo e $e^{-\beta}$ rappresenta l'attenuazione del segnale dopo un giro completo nella cavità provocato dalle perdite per assorbimento. Risolvendo per E_c si ottiene

$$E_c = \frac{E_i}{1 - r_1 r_2 e^{-i\phi - \beta}} \quad (2.17)$$

Poiché durante ogni trasmissione attraverso uno specchio il campo incidente accumula uno spostamento di fase di 90° e ridotto di un fattore proporzionale alla trasmissività dello specchio il nuovo E_c diventa:

$$\begin{aligned} E_c(1 - r_1 r_2 e^{-i\phi - \beta}) &= it_1 E_{inc} \\ \rightarrow E_c &= \frac{it_1 E_{inc}}{1 - r_1 r_2 e^{-i\phi - \beta}} \end{aligned} \quad (2.18)$$

dove t_1 è il coefficiente di trasmissione dello specchio.

Il campo trasmesso dal secondo specchio è perciò

$$E_t = it_2 E_c e^{-i\frac{\phi}{2} - \beta} E_{inc} \quad (2.19)$$

dove, sostituendo il nuovo E_c , abbiamo

$$E_t = \frac{-t_1 t_2 e^{-i\frac{\phi}{2} - \beta}}{1 - r_1 r_2 e^{-i\phi - \beta}} \quad (2.20)$$

L'espressione per il campo riflesso all'esterno è leggermente più complicata perché include sia il campo circolante che riesce a abbandonare la cavità sia quella frazione di campo incidente riflessa dalla superficie esterna dello specchio. Abbiamo allora:

$$E_r = r_1 E_i + it_1 E_c \frac{e^{-i\phi - \beta}}{r_1} \quad (2.21)$$

Dove E_c è stato diviso moltiplicato per t_1/r_1 per indicare la trasmissione in ingresso e in uscita. Sostituendo il campo circolante trovato prima abbiamo:

$$\begin{aligned} &= r_1 E_i - \frac{t_1^2 r_2 e^{-i\phi - \beta}}{(1 - r_1 r_2 e^{-i\phi - \beta})} E_i \\ &= \frac{r_1 - r_2 e^{-i\phi - \beta}}{1 - r_1 r_2 e^{-i\phi - \beta}} E_i \end{aligned}$$

dove abbiamo usato l'espressione $r_i^2 + t_i^2 = 1$ per specchi privi di perdite. Se la cavità è adattata in impedenza (cioè $r_1 = r_2 e^{-\beta}$), questa quantità si annulla quando la frequenza di risonanza è raggiunta (cioè $\phi = 2\pi$)

Come accennato nell'introduzione, un interferometro di Fabry Perot si comporta come un discriminatore di frequenza. Il suo spettro in trasmissione esibisce dei picchi in corrispondenza delle frequenze di risonanza. Per caratterizzare i picchi occorre calcolare l'intensità trasmessa dal risonatore:

$$\left| \frac{E_t}{E_i} \right|^2 = \frac{|-t_1 t_2 e^{-i\frac{\phi}{2} - \beta}|^2}{|1 - r_1 r_2 e^{-i\phi - \beta}|^2} \quad (2.22)$$

Dopo alcuni passaggi algebrici si ottiene

$$= \frac{(1 - R)^2}{(1 - R)^2 + 4R \sin^2(\phi/2)} = \frac{1}{1 + \left(\frac{2F}{\pi}\right)^2 \sin^2(\phi/2)} \quad (2.23)$$

dove abbiamo assunto per semplicità $r_1 = r_2$ e chiamato $R = r_1^2$ (coefficiente di riflessione in intensità).

L'intensità del campo riflesso è data banalmente da

$$1 - \left| \frac{E_t}{E_i} \right|^2 = \frac{\left(\frac{2F}{\pi}\right)^2 \sin^2(\phi/2)}{1 + \left(\frac{2F}{\pi}\right)^2 \sin^2(\phi/2)} \quad (2.24)$$

Dove abbiamo posto

$$F = \frac{\pi\sqrt{R}}{(1 - R)} \quad (2.25)$$

L'ampiezza a mezza altezza (FWHM) della banda passante per i picchi di risonanza si ottiene invece imponendo che (2.23) sia uguale a $\frac{1}{2}$. Quindi basta risolvere:

$$2 = 1 + \frac{4R}{(1-R)^2} \sin^2(\phi/2) \rightarrow \phi = 2 \arcsin \left(\frac{1-R}{2\sqrt{R}} \right) \quad (2.26)$$

richiamando la (2.15) avremo

$$\frac{p\omega_{FWHM}}{2c} = \arcsin \left(\frac{1-R}{2\sqrt{R}} \right) \quad (2.27)$$

Quando $R \rightarrow 1$, l'arcoseno si riduce al suo argomento:

$$\omega_{FWHM} = \frac{c}{p} \left(\frac{1-R}{\sqrt{R}} \right) \quad (2.28)$$

Poiché

$$F = \pi \frac{FSR}{\omega_{FWHM}} \quad (2.29)$$

per un R generico possiamo definire la quantità detta *finesse* come

$$\mathcal{F} \equiv \frac{\pi}{\phi} = \frac{\pi}{2 \arcsin \left(\frac{1-R}{2\sqrt{R}} \right)} \quad (2.30)$$

Il cambio di fase $\delta\phi$ indotto dalla cavità è anch'esso dipendente dalla frequenza; se richiamiamo le espressioni (2.19) e (2.21) e ricordiamo che la fase di un segnale $G(j\omega)$ è definita come $\phi = \arctan \frac{\Im(G(j\omega))}{\Re(G(j\omega))}$ abbiamo che

$$\delta\phi_t = \arctan \left(\frac{1+r_1r_2}{1-r_1r_2} \tan \left(\frac{\phi}{2} \right) \right) \quad (2.31)$$

e

$$\delta\phi_r = - \arctan \left(\frac{(1-r_1^2)r_2 \sin(\phi)}{r_1(1+r_2^2) - r_2(1+r_1^2) \cos(\phi)} \right) \quad (2.32)$$

Benché sviluppati con in mente un'onda piana, questi risultati si estendono senza problemi al fascio gaussiano.

2.3 Il risonatore ottico stabile

Consideriamo ora il modo fondamentale di una radiazione laser in propagazione dentro una cavità. Come abbiamo visto nel capitolo precedente, il fronte d'onda del fascio gaussiano non è piatto e affinché la cavità supporti dei modi risonanti occorre che la curvatura di almeno uno specchio sia adattata a quella del fascio. In questo modo la possibilità che la radiazione fuoriesca dal risonatore (walk-off) è prevenuta e una base di modi di ordine superiore è stabilita nella cavità. In questa sezione diamo conto delle caratteristiche di una cavità formata da due specchi sferici e ricaviamo la condizione generale di stabilità.

2.3.1 Modi di una cavità stabile

Consideriamo un fascio gaussiano con il fronte d'onda avente raggi di curvatura R_1 e R_2 presso le posizioni z_1 e z_2 . Dati due specchi sferici con raggi di curvatura fissato e posti a una distanza d , vogliamo determinare il beam waist, la taglia del beam presso gli specchi e il suo range di Rayleigh. Per rispondere dobbiamo risolvere, a partire dalle espressioni (2.3) e (2.4), un sistema di tre equazioni algebriche

$$\begin{cases} z_1 = z_2 + d \\ R_1 = z_1 + \frac{z_R^2}{z_1} \\ -R_2 = z_2 + \frac{z_R^2}{z_2} \end{cases} \quad (2.33)$$

Per evitare confusioni facciamo le seguenti sostituzioni $z_1 \rightarrow x$, $z_2 \rightarrow y$, $z_R \rightarrow z$. Così da avere, dopo un semplice passaggio algebrico

$$\begin{cases} x = y + d \\ R_1 = x + \frac{z^2}{x} \\ R_2 = -y - \frac{z^2}{y} \end{cases}$$

Sostituisco la prima e la seconda equazione nella terza

$$-R_2 = x - d + \frac{xR_1 - x^2}{x - d} \rightarrow -R_2(x - d) = (x - d)^2 + R_1x - x^2$$

Svolgendo il quadrato e risolvendo per x si ottiene

$$x = z_1 = \frac{d(R_2 - d)}{(R_1 + R_2 - 2d)} \quad (2.34)$$

Sostituendo z_1 nella prima equazione si ottiene

$$\begin{aligned} y = z_2 &= d - \frac{d(R_2 - d)}{(R_1 + R_2 - 2d)} \\ &= \frac{d(R_1 - d)}{R_1 + R_2 - 2d} \end{aligned} \quad (2.35)$$

Infine, per ottenere il range di Rayleigh sostituiamo z_1 nella prima equazione

$$z^2 = \frac{d(R_2 - d)}{R_1 + R_2 - 2d} \left(R_1 + \frac{d(R_2 - d)}{R_1 + R_2 - 2d} \right) \quad (2.36)$$

Svolgendo i calcoli abbiamo

$$\frac{d(R_2 - d)[R_1(R_1 - d) + (R_2 - d)(R_1 - d)]}{(R_2 + R_1 - 2d)^2} \quad (2.37)$$

Cioé

$$z_R = \frac{d(R_1 - d)(R_2 - d)(R_1 + R_2 - d)}{(R_1 + R_2 - 2d)^2} \quad (2.38)$$

Se ora definiamo le quantità $g_1 = (1 - \frac{d}{R_1})$ e $g_2 = (1 - \frac{d}{R_2})$ detti *parametri g della cavità* e le facciamo emergere dalle espressioni (2.34), (2.35) (2.38) raccogliendo per R_1 e R_2 avremo

$$z_1 = \frac{g_2(1 - g_1)}{g_1 + g_2 - 2g_1g_2}d \quad (2.39)$$

$$z_2 = \frac{g_1(1 - g_2)}{g_1 + g_2 - 2g_1g_2} \quad (2.40)$$

per le posizioni degli specchi formanti la cavità, mentre Il fascio intrappolato nella cavità avrà invece un range di Rayleigh dato dall'espressione

$$z_R^2 = \frac{g_1g_2(1 - g_1g_2)}{(g_1 + g_2 - 2g_1g_2)^2}d^2 \quad (2.41)$$

dove abbiamo diviso e moltiplicato per d^2 . Per ottenere il beam waist della cavità è sufficiente sostituire la (2.41) in (2.3) e invertirla:

$$w_0^2 = \frac{d\lambda}{\pi} \sqrt{\frac{g_1g_2(1 - g_1g_2)}{(g_1 + g_2 - 2g_1g_2)^2}} \quad (2.42)$$

Le taglie del fascio presso i due specchi le si ottengono sostituendo (2.41) e, rispettivamente,(2.39) (2.40) nella formula $w_0 \sqrt{[1 + (\frac{z_i}{z_R})^2]}$, ottenendo

$$w_1^2 = \frac{d\lambda}{\pi} \sqrt{\frac{g_2}{g_1(1 - g_1g_2)}} \quad (2.43)$$

e

$$w_2^2 = \frac{d\lambda}{\pi} \sqrt{\frac{g_1}{g_2(1 - g_1g_2)}} \quad (2.44)$$

2.3.2 Il diagramma di stabilità di un risonatore

Dalle equazioni che sono state ricavate appare subito chiaro che il fascio gaussiano in propagazione tra i due specchi curvi ha soluzioni reali e finite solo quando i fattori g della cavità si trovano ristretti nell'intervallo:

$$0 \leq g_1g_2 \leq 1 \quad (2.45)$$

detto range di stabilità. Se si traccia un piano cartesiano in cui i valori di g_1 sono rappresentati in ascissa e quelli di g_2 in ordinata si ottiene il diagramma della figura 2.2:

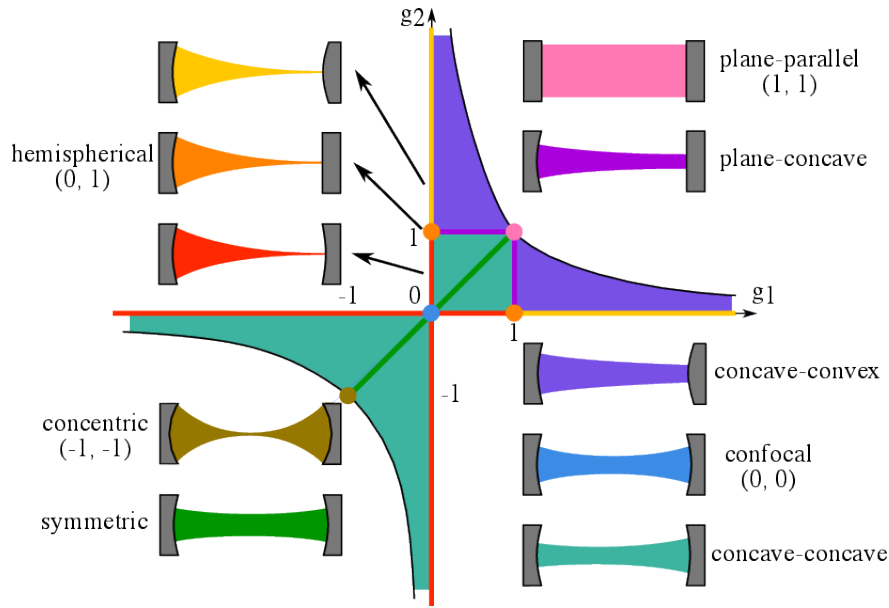


Figura 2.2: Il diagramma di stabilità di un risonatore ottico. La nostra cavità triangolare è di tipo piano-concavo [27]

Ciascun punto sotteso all'iperbole equilatera rappresenta una possibile configurazione stabile per il risonatore ottico. Nel capitolo 4 ci concentreremo sulla configurazione cosiddetta mezzo simmetrica, costituita da uno specchio curvo e uno piano.

2.3.3 Frequenze di risonanza dei modi gaussiani

Nella sezione 2.1 abbiamo visto che ciascuno dei modi trasversi ha una diversa dipendenza dalla Gouy phase; questo implica che i modi di ordine mn (High Order Modes) risuoneranno nella cavità a frequenze differenti da quella della frequenza fondamentale del risonatore.

La differenza di fase che si misura tra le estremità z_2 e z_1 di una cavità è data[2]

$$\Delta\psi = (n + m + 1)[\phi(z_2) - \phi(z_1)] \tag{2.46}$$

dove le $\phi(z_i)$ sono le Gouy phase . Ponendo la z_1 e la z_2 uguali a (2.34) e (2.35) e ricordando che dati $\pm x_1 x_2 < 1$ vale l'equazione

$$\arctan(x_1) - \arctan(x_2) = \arctan\left(\frac{x_1 \pm x_2}{1 \mp x_1 x_2}\right) \tag{2.47}$$

e che

$$\cos(\arctan(x)) = \frac{1}{\sqrt{1+x^2}} \tag{2.48}$$

la quantità (2.46) può scriversi, dopo un po' di algebra, così:

$$\Delta\psi = (n + m + 1) \arccos(\pm\sqrt{g_1 g_2})$$

Segue che la formula (2.12) del modo assiale di ordine q subisce il seguente shift

$$v_q = \frac{c}{2d}q \rightarrow \frac{c}{2L}(q + \Delta\phi) \quad (2.49)$$

In generale la frequenza di un modo di ordine superiore di ordine mn appartenente al modo assiale di ordine q si scrive così:

$$v_{qnm} = \frac{c}{2d}[q + (n + m + 1) \arccos(\pm\sqrt{g_1 g_2})] \quad (2.50)$$

2.3.4 Il mode-matching

Si è già accennato addietro al concetto di mismatch. Esso consiste in un disaccordo tra i parametri di un fascio gaussiano che incide su una cavità e un fascio gaussiano risonante in cavità, il quale nel caso ideale ha una raggio di curvatura che combacia perfettamente con la forma degli specchi. Un modo molto semplice di vedere matematicamente il mismatch tra un fascio gaussiano e una cavità è servirsi del cosiddetto parametro di Kogelnik q [10] :

$$\frac{1}{q(z)} = \frac{1}{R(z)} - \frac{i\lambda_0}{\pi w(z)^2} \quad (2.51)$$

Consideriamo allora una cavità il cui waist si trovi in z_c e i cui modi risonanti siano descritti dal parametro $q_c(z)$ e un fascio gaussiano nel modo fondamentale che entri nella cavità con un parametro $q_f(z)$. Quando si ha:

$$q_c(z_c) \neq q_f(z_c)$$

si dice che è presente un mismatch tra fascio e cavità. L'accoppiamento di un modo riferisce come un modo spaziale in una base è rappresentato in un'altra base; per quantificare il disaccoppiamento tra cavità e fascio in ingresso occorre allora proiettare il fascio nella base della cavità e calcolare i coefficienti di accoppiamento ai modi di ordine superiore attraverso un integrale di sovrapposizione, ricordando che ogni set di modi di Hermite-Gauss o Laguerre-Gauss forma una base ortonormale completa.

La procedura che permette di ridurre il più possibile questo disaccoppiamento si chiama *mode-matching*. Nei capitoli seguenti descriviamo come utilizzando un dispositivo modulante da noi opportunamente progettato e basato sul niobato di litio (lente elettro-ottica) che imponga al fascio principale delle bande laterali a radiofrequenza nei modi HG_{02} è possibile estrarre segnali proporzionali al mismatch dal campo riflesso della cavità.

2.4 Descrizione del metodo

Una volta esposte le proprietà generali dei risonatori ottici, siamo pronti per discutere le caratteristiche del nostro metodo di rivelazione. Esso si basa sulla modulazione ottica ovvero sull'impressione sul fascio laser principale di un segnale in fase (in generale, anche in frequenza, in ampiezza o in polarizzazione) variabile nel tempo. Se moduliamo in fase il fascio gaussiano di input in modo da codificare in esso ad una frequenza Ω pari

al δv_{HOMS} della cavità una variazione dei waist e della posizione, il segnale riflesso da quest'ultima, che altro non è che un battimento del fascio laser principale, permette di misurare il mismatch semplicemente rivelando la potenza del segnale riflesso tramite un fotodiode. Un'alterazione del fascio in questo senso è ottenibile mediante dispositivi che sfruttano l'effetto elettro-ottico, cioè la variazione di indice di rifrazione sperimentata da alcuni materiali (come il niobato di litio e altri cristalli sintetici) quando viene loro applicato un campo elettrico. Prima di ricavare matematicamente le espressioni per il mismatch e per l'intensità dei campi riflessi dalla cavità delineiamo brevemente le proprietà fisiche dei materiali di cui sopra e dei concetti alla base del funzionamento dei modulatori elettro-ottici.

2.4.1 Cenni all'effetto Pockels e alla modulazione elettro-ottica

Il niobato di litio è un materiale artificiale costituito da litio, niobio e ossigeno. Fu sintetizzato per la prima volta nel 1928 da Zachariasen. I primi studi sistematici sulle sue proprietà chimico-fisiche furono svolti negli anni 60, quando ai laboratori Bell fu inventata la tecnica della crescita Czochralski. La sua struttura cristallina è trigonale ed è priva di un centro di inversione di simmetria. Ciò rende il materiale suscettibile all'effetto Pockels e ne fa un ottimo candidato per la costruzione di modulatori elettro-ottici.

Per descrivere quantitativamente questo fenomeno è utile introdurre il cosiddetto ellissoide degli indici. Si può dimostrare [17], partendo dall'espressione della densità di energia elettrica immagazzinata nella materia, che per ogni materiale anisotropo è sempre possibile definire un'espressione che descrive l'indice di rifrazione sperimentato da un'onda elettromagnetica in funzione della direzione di propagazione e della polarizzazione rispetto alle direzioni cristallografiche, dato da:

$$\frac{x^2}{n_x^2} + \frac{y^2}{n_y^2} + \frac{z^2}{n_z^2} = 1 \quad (2.52)$$

dove x , y e z rappresentano gli assi ottici e n_x , n_y , n_z gli indici di rifrazione lungo le relative direzioni. Per i materiali birifrangenti uni-assiali come il niobato di litio due dei tre assi ottici sono identici e quindi abbiamo:

$$\frac{x^2}{n_o^2} + \frac{y^2}{n_o^2} + \frac{z^2}{n_e^2} = 1 \quad (2.53)$$

dove n_o è chiamato indice di rifrazione ordinario mentre n_e è l'indice di rifrazione straordinario. L'equazione (2.52) può essere scritta [26] in una forma bilineare. Consideriamo l'equazione generale:

$$\sum_{i=1, j=1}^{i=N, j=N} S_{ij} x_i x_j = 1 \quad (2.54)$$

dove x_i e x_j sono variabili e S_{ij} sono coefficienti. Se assumo che A sia un tensore simmetrico (2.54) prende la forma:

$$S_{11}x_1^2 + S_{22}x_2^2 + S_{33}x_3^2 + 2S_{12}x_1x_2 + 2S_{13}x_1x_3 + 2S_{23}x_2x_3 = 1 \quad (2.55)$$

Se operiamo in (2.55) il seguente cambio di sistema di coordinate

$$x_i = a_{ki}x'_k \quad x_j = a_{lj}x'_l \quad (2.56)$$

dove a_{ij} è una matrice ortogonale abbiamo

$$S_{ij}x_i x_j = S_{ij}a_{ki}a_{lj}x'_k x'_l = S'_{kl}x'_k x'_l \quad (2.57)$$

dove gli S'_{kl} sono i coefficienti nel nuovo sistema di riferimento. Un tensore simmetrico può essere descritto mediante un ellissoide. Possiamo allora scrivere (2.52) come

$$\frac{1}{\epsilon_{ij}}x_i x_j = 1 \quad (2.58)$$

dove ϵ_{ij} è il tensore dielettrico.

Quando un campo elettrico viene applicato al cristallo, l'ellissoide degli indici viene modificato di una quantità

$$\Delta\left(\frac{1}{\epsilon_{ij}}\right) = r_{ijk}E_k \quad (2.59)$$

ed essendo $\frac{1}{\epsilon_{ij}}$ un tensore simmetrico segue che $r_{ijk} = r_{jik}$. Questo permette di scrivere (2.59) più semplicemente:

$$\Delta\left(\frac{1}{\epsilon_i}\right) = r_{ij}E_j \quad (2.60)$$

dove r_{ij} è il cosiddetto tensore elettro-ottico. Indice di rifrazione e tensore dielettrico sono legati tra loro dalla formula $n_{ij}^2 = \epsilon_{ij}$. Se ripristiniamo il segno di sommatoria abbiamo:

$$\Delta\left(\frac{1}{n_i}\right)^2 = \sum_{ij} r_{ij}E_j \quad (2.61)$$

Nel caso del niobato di litio, il cui gruppo di simmetria è il 3m, r_{ij} prende la seguente forma

$$\begin{bmatrix} 0 & -r_{22} & r_{13} \\ 0 & r_{22} & r_{13} \\ 0 & 0 & r_{33} \\ 0 & r_{51} & 0 \\ r_{51} & 0 & 0 \\ -r_{22} & 0 & 0 \end{bmatrix} \quad (2.62)$$

dove [26]

$$r_{12} = -r_{22} = r_{61} \approx 6.8 \text{ pm/V} \quad r_{13} = r_{23} = 10.0 \text{ pm/V} \quad (2.63)$$

$$r_{33} = 32.2 \text{ pm/V} \quad r_{42} = r_{51} = 32 \text{ pm/V}$$

Se il campo elettrico in questione agisce lungo l'asse z i nuovi indici di rifrazione sono

$$n_x = n_o - \frac{1}{2}n_o^3 r_{13} E_z \quad (2.64)$$

$$n_y = n_o - \frac{1}{2}n_o^3 r_{13} E_z \quad (2.65)$$

$$n_z = n_e - \frac{1}{2}n_e^3 r_{33} E_z \quad (2.66)$$

Visto l'ordine di grandezza dei valori riportati per le componenti del tensore r_{ij} il contributo più importante alla variazione dell'indice di rifrazione è dato dal coefficiente r_{33}

Il dispositivo che noi intendiamo progettare e costruire (cfr. Capitolo 3) altro non è che un particolare tipo di modulatore elettro-ottico (MEO) basato sul niobato di litio. A questo stadio, analizziamo brevemente il funzionamento del tipo più semplice di modulatore elettro-ottico. Consideriamo un raggio di luce che viaggia lungo l'asse x MEO e rappresentiamolo con un'onda piana di vettore d'onda $k = \frac{2\pi}{\lambda}$ e frequenza ω :

$$E(x, t) = E_0 e^{i(kx - \omega t)} + c.c. \quad (2.67)$$

L'interazione col cristallo polarizzato da una tensione lungo z provoca la comparsa di un termine di fase aggiuntivo nell'argomento dell'esponenziale

$$E_{MEO}(x, t) = E_0 e^{i(kx - \omega t + \Delta\alpha)} + c.c. \quad (2.68)$$

dove abbiamo richiamando l'equazione (2.66):

$$\Delta\alpha = k\Delta n(t)l = k\frac{n_e^3}{2}r_{33}E_z(t)l \quad (2.69)$$

dove l è la lunghezza del cristallo. Se definiamo il cosiddetto potenziale a metà onda [3] $V_\pi = kn_e^3 r_{33}$, la fase $\Delta\alpha$ diviene:

$$\Delta\alpha = \pi \frac{V_z(t)}{V_\pi}. \quad (2.70)$$

Si vede quindi che la fase del campo che lascia il MEO è direttamente proporzionale al voltaggio applicato.

Consideriamo ora il caso in cui il campo elettrico applicato al niobato di litio vari in maniera periodica nel tempo in modo da avere all'uscita del MEO

$$E_{MEO}(x, t) = E_0 e^{i(kx - \omega t + \epsilon \cos(\Omega t))} + c.c. \quad (2.71)$$

dove ϵ è l'indice di modulazione calcolato a partire da (2.66). Se questo numero è molto piccolo possiamo

fare un'espansione al primo ordine in serie di Taylor:

$$E_{MEO}(x, t) \simeq E(x, t)(1 + i\epsilon \cos(\Omega t)) \quad (2.72)$$

La funzione seno può essere riscritta secondo l'identità di Eulero:

$$E_{MEO}(x, t) \simeq E(x, t) \left(1 + \frac{i\epsilon}{2} (e^{i\Omega t} + e^{-i\Omega t}) \right) \quad (2.73)$$

Accanto al segnale originario di frequenza ω sono comparse due bande laterali di frequenze rispettivamente $\omega + \Omega$ e $\omega - \Omega$. Se si tengono in conto anche i termini di ordine superiore al primo, l'espressione per il campo modulato è data dalla cosiddetta espansione di Jacobi-Anger

$$E_{MEO}(x, t) = E(x, t) \left(J_0(\epsilon) + \sum_{s=1}^{\infty} J_s(\epsilon) e^{is\Omega t} + \sum_{s=1}^{\infty} (-1)^s J_s(\epsilon) e^{-is\Omega t} \right) \quad (2.74)$$

2.4.2 Espressione del mismatch attraverso gli HOM

Passiamo ora a descrivere matematicamente il mismatch tra cavità e laser provocato da imperfezioni nel layout ottico. Siano allora U_{ij} e V_{lm} due insiemi di funzioni di Laguerre-Gauss di base per la cavità e per il fascio di input, rispettivamente. Se il fascio e la cavità sono perfettamente accordati, i due set di funzioni coincidono: $\int U_{ij} V_{lm}^* dx dy = \delta_{il} \delta_{jm}$.

Se invece è presente un disaccordo, la matrice di cambio di base non è più diagonale. Consideriamo il caso per cui lo stato del campo elettromagnetico nella base del laser sia espresso dal solo modo $TEM_{00} = V_{00}$, e che il disaccordo consista solo in una differenza della waist del fascio δw_0 e/o in una traslazione della cavità di δz lungo la direzione di propagazione, entrambe sufficientemente piccole. In questo paragrafo espandiamo in serie di Taylor fino al primo ordine in w_0 e in z i modi di Laguerre-Gauss U_{01} e U_{00} così da arrivare a un'espressione per i modi del laser nella base della cavità

Prima di svolgere in dettaglio il calcolo riportiamo, per comodità, le espressioni dei primi modi di Laguerre-Gauss che saranno coinvolti, a vario titolo, nell'espansione; rimarchiamo che si è assunto per semplicità che la fase di Gouy e il termine $e^{il\phi}$ diano contributi pari a uno.

$$U_{00}(r, z) = \sqrt{\frac{1}{\pi}} \frac{1}{w(z)} e^{-\frac{r^2}{w(z)^2} - i \frac{kr^2}{2R(z)}} \quad (2.75)$$

$$U_{01}(r, z) = \sqrt{\frac{1}{\pi}} \frac{1}{w(z)} \left(1 - \frac{2r^2}{w^2(z)} \right) e^{-\frac{r^2}{w(z)^2} - i \frac{kr^2}{2R(z)}} \quad (2.76)$$

$$U_{02}(r, z) = \sqrt{\frac{1}{\pi}} \frac{1}{w(z)} \left(1 - \frac{4r^2}{w^2(z)} + \frac{2r^4}{w^4(z)} \right) e^{-\frac{r^2}{w(z)^2} - i \frac{kr^2}{2R(z)}} \quad (2.77)$$

Poiché esanderemo i modi intorno allo zero, è utile riscrivere e mettere da parte le precedenti espressioni come segue:

$$U_{00}(r, z = 0) \equiv U_{00}(w_0) = \sqrt{\frac{1}{\pi}} \frac{1}{w_0^2} e^{-\frac{r^2}{w_0^2}} \quad (2.78)$$

$$U_{01}(r, z = 0) \equiv U_{01}(w_0) = \sqrt{\frac{1}{\pi}} \frac{1}{w_0} \left(1 - \frac{2r^2}{w_0^2}\right) e^{-\frac{r^2}{w_0^2}} \quad (2.79)$$

$$U_{02}(r, z = 0) \equiv U_{02}(w_0) = \sqrt{\frac{1}{\pi}} \frac{1}{w_0} \left(1 - \frac{4r^2}{w_0^2} + \frac{2r^4}{w_0^4}\right) e^{-\frac{r^2}{w_0^2}} \quad (2.80)$$

Espansione al primo ordine dei modi LG intorno al waist

Il modo U_{00} modificato da un mismatch sulla cintura è dato da

$$\begin{aligned} U_{00}(w_0 + \delta w_0) &\simeq U_{00}(w_0) + \delta w_0 \frac{\partial U_{00}}{\partial w_0} \\ &= U_{00}(w_0) + e^{-r^2/w_0^2} \frac{1}{w_0^2 \sqrt{\pi}} \left(\frac{2r^2}{w_0^2} - 1\right) \delta w_0 \end{aligned} \quad (2.81)$$

Ricordando l'espressione (2.79) abbiamo

$$U_{00}(w_0) - \frac{\delta w_0}{w_0} U_{01}(w_0) \quad (2.82)$$

Chiamando

$$\beta = \frac{\delta w_0}{w_0} \quad (2.83)$$

scriveremo

$$= U_{00}(w_0) - \beta U_{01}(w_0)$$

Facciamo ora la stessa cosa per il modo U_{01} :

$$\begin{aligned} U_{01}(w_0 + \delta w_0) &\simeq U_{01}(w_0) + \delta w_0 \frac{\partial U_{01}}{\partial w_0}(w_0) \\ &= U_{01}(w_0) + \sqrt{\frac{1}{\pi}} e^{-r^2/w_0^2} (8w_0^2 r^2 - 4r^4 - w_0^4) \frac{1}{w_0^6} \delta w_0 \end{aligned} \quad (2.84)$$

Raccogliendo per w_0^4 e per $-\beta$ abbiamo

$$U_{01}(w_0) - \sqrt{\frac{1}{\pi}} \frac{1}{w_0} \beta \left(1 - \frac{2r^2}{w_0^2}\right)^2 e^{-r^2/w_0^2} \quad (2.85)$$

Tenendo solo i termini $\frac{1}{w_0}$ di ordine 1 avremo

$$= U_{01}(w_0) - \beta U_{00}(w_0) \quad (2.86)$$

Espansione intorno alla posizione del fascio

Un mismatch δz_0 lungo la posizione del modo U_{00} è invece data da

$$\begin{aligned} U_{00}(r, \delta z_0) &\simeq U_{00}(w_0) + \delta z_0 \frac{\partial U_{00}}{\partial z}(r, z) \Big|_{z=0} \\ &= U_{00}(w_0) + i \frac{\delta z_0}{\sqrt{\pi}} \frac{(2z_R - kr^2)}{2w_0 z_R^2} e^{-r^2/w_0^2} \end{aligned} \quad (2.87)$$

Ricordando che $z_R = \frac{\pi w_0^2}{\lambda}$ e che $\kappa = \frac{2\pi}{\lambda}$ abbiamo

$$= U_{00}(w_0) + \frac{i\delta z_0}{2z_R} \frac{1}{\sqrt{\pi}} \frac{1}{w_0} \left(2 - \frac{2r^2}{w_0^2}\right) e^{-\frac{r^2}{w_0^2}} \quad (2.88)$$

Richiamando le espressioni dei (2.78) e (2.79) e ponendo

$$\gamma = \frac{\delta z_0}{2z_R} \quad (2.89)$$

avremo

$$U_{00}(w_0)(1 + i\gamma) + i\gamma U_{01}(w_0) \quad (2.90)$$

Ripetiamo lo stesso calcolo per il modo U_{01}

$$\begin{aligned} U_{01}(r, \delta z_0) &\simeq U_{01}(w_0) + \delta z_0 \frac{\partial U_{01}}{\partial z}(r, z) \Big|_{z=0} \\ &= U_{01}(w_0) + ie^{-\frac{r^2}{w_0^2}} \frac{(w_0^2 - 2r^2)(2z_R - kr^2)}{\sqrt{\pi} z_R^2 w_0^3} \delta z_0 \end{aligned} \quad (2.91)$$

Raccogliendo per $2i\gamma$ e inserendo anche qui le definizioni di range di Rayleigh e vettor d'onda abbiamo:

$$U_{01}(w_0) + \frac{1}{\sqrt{\pi}} \frac{i\delta z_0}{z_R} \left(\frac{2r^2}{w_0^3} - \frac{4r^4}{w_0^5} - \frac{2}{w_0} + \frac{4r^2}{w_0^3} \right) e^{-\frac{r^2}{w_0^2}} \quad (2.92)$$

Con qualche altro semplice passaggio algebrico abbiamo:

$$U_{01}(w_0) - 2i\gamma e^{-\frac{r^2}{w_0^2}} \frac{1}{w_0} \sqrt{\frac{1}{\pi}} \left(1 + \frac{2r^4}{w_0^4} - \frac{3r^2}{w_0^2} \right) \quad (2.93)$$

Poiché

$$\left(1 + \frac{2r^4}{w_0^4} - \frac{3r^2}{w_0^2} \right) = \left(1 + \frac{2r^4}{w_0^4} - \frac{4r^2}{w_0^2} \right) - \frac{1}{2} \left(1 - \frac{2r^2}{w_0^2} \right) + \frac{1}{2} \quad (2.94)$$

possiamo scrivere richiamando (2.78), (2.79) e (2.80):

$$U_{01}(r, \delta z_0) \simeq U_{01}(w_0) - 2i\gamma [U_{02}(w_0) - \frac{1}{2}(U_{01}(w_0) - U_{00}(w_0))] \quad (2.95)$$

Siano ora $\delta w_0 = w_0^{IN} - w_0^{CAV}$ e $\delta z_0 = z_0^{IN} - z_0^{CAV}$ dove w_0^{CAV} e z_0^{CAV} sono i parametri pertinenti al modo U_{00} della cavità e w_0^{IN} e z_0^{IN} i corrispondenti parametri al modo V_{00} del fascio in ingresso; se sommiamo i risultati rispettivamente ottenuti per il waist e la posizione e poniamo in (2.83) e (2.89) $w_0 = w_0^{CAV}$ e $z_R = z_R^{CAV}$ si ha che i modi del laser sono descritti nella base della cavità da:

$$V_{00} = (1 + i\gamma) U_{00} + (i\gamma - \beta) U_{01} \quad (2.96)$$

$$V_{01} = (\beta - i\gamma) U_{00} + (1 + i\gamma) U_{01} - 2i\gamma U_{02} \quad (2.97)$$

dove abbiamo nascosto la dipendenza da w_0 per alleggerire la notazione. In forma matriciale (2.97) si esprime (trascurando il termine U_{02} che non entrerà nei calcoli successivi):

$$\begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} i\gamma & (i\gamma - \beta) \\ -(i\gamma - \beta) & i\gamma \end{pmatrix} \quad (2.98)$$

2.4.3 L'attuatore elettro-ottico per la rivelazione del mismatch

Consideriamo l'espressione (2.73) ricavata per un modulatore elettro-ottico in niobato di litio. L'attuatore che intendiamo realizzare deve modulare con sufficiente ampiezza la distanza focale dell'apparato in modo da creare dei segnali riflessi dalla cavità abbastanza intensi da essere rivelati dal fotodiodo; la loro demodulazione permetterà di ottenere una misura del mismatch (utilizzando un solo fotodiodo). Questi segnali sono tanto più facili da analizzare quanto più diagonale è la matrice (2.98) e come vedremo nella prossima sezione la diagonalizzazione della matrice (detta *sensing matrix*[28]) è tanto più marcata quanto più la frequenza della sideband è vicina al valore della spaziatura tra modi di ordine perché le intensità riflesse dipendono dalla (2.21). Dunque, la modifica indotta sul fascio dall'attuatore è

$$\begin{aligned} \frac{\delta w_0^{EO}}{w_0^{IN}} &= B = \frac{m_B}{2} (e^{i\Omega t} + e^{-i\Omega t}) \\ \frac{\delta z_0^{EO}}{2z_R^{IN}} &= G = \frac{m_G}{2} (e^{i\Omega t} + e^{-i\Omega t}) \end{aligned} \quad (2.99)$$

dove le ampiezze di modulazione m_B e m_G sono calcolate nel progetto del dispositivo (riportato in appendice C).

Utilizzando le formule (2.98) ma riferite alla base V_{ij} , si vede che la modulazione trasforma il fascio di input subito dopo la lente in:

$$V_{IN} = (1 + iG) V_{00} + (iG - B) V_{01} \quad (2.100)$$

Supponiamo che l'attuatore si trovi ad una distanza Z dalla cavità. Se ora V_{IN} si propaga dalla EOL fino alla

cavità, trovo che il fascio in ingresso nella cavità, a meno di un ininfluyente termine globale di fase, è dato da:

$$V_{IN} = (1 + iG) V_{00} + (iG - B) V_{01} e^{i\Delta\Psi} \quad (2.101)$$

dove il termine $e^{i\Delta\Psi}$ con $\Delta\Psi = \arctan(Z/z_R^{IN})$ è stato aggiunto per tenere conto che i due modi U_{00} e U_{01} si propagano con una fase di Guoy diversa. Usando ora le equazioni (2.97) si ha l'ampiezza complessa del fascio di input espressa nella base della cavità:

$$V_{IN} = (1 + iG) [(1 + i\gamma) U_{00} + (i\gamma - \beta) U_{01}] + (iG - B) [(\beta - i\gamma) U_{00} + (1 + i\gamma) U_{01} - 2i\gamma U_{02}] e^{i\Delta\Psi} \quad (2.102)$$

Tenendo solo i termini al primo ordine e ricordando che il campo elettrico di un'onda monocromatica di frequenza ω è dato dall'ampiezza complessa moltiplicata per $e^{i\omega t}$:

$$E_{IN} = E_0 V_{IN} e^{i\omega t} = E_0 \left\{ [1 + i(\gamma + G)] V_{00} + \left[i(\gamma + Ge^{i\Delta\Psi}) - (\beta + Be^{i\Delta\Psi}) \right] V_{01} \right\} e^{i\omega t} \quad (2.103)$$

2.4.4 Campo riflesso dalla cavità

Possiamo ora a calcolare il campo riflesso dalla cavità; per l'ortonormalità della base $\{U_{ij}\}$, posso considerare i coefficienti delle funzioni di base separatamente. L'ampiezza complessa del campo riflesso si ottiene convolvendo il campo in cavità con funzione di riflettività. Usando il teorema di convoluzione si arriva facilmente al coefficiente della componente riflessa del modo U_{00} :

$$\begin{aligned} u_{00} &= [1 + i(\gamma + G)] e^{i\omega t} \otimes F(t) = \\ &= F_{00}(\omega) (1 + i\gamma) e^{i\omega t} \\ &\quad + iF_{00}(\omega + \Omega) \frac{m_G}{2} e^{i(\omega + \Omega)t} \\ &\quad + iF_{00}(\omega - \Omega) \frac{m_G}{2} e^{i(\omega - \Omega)t} \end{aligned} \quad (2.104)$$

Procedendo analogamente per la componente U_{01} si trova:

$$\begin{aligned} u_{01} &= \left[i(\gamma + Ge^{i\Delta\Psi}) - (\beta + Be^{i\Delta\Psi}) \right] e^{i\omega t} \otimes F_{01}(t) = \\ &\quad F_{01}(\omega) (i\gamma - \beta) e^{i\omega t} \\ &\quad + F_{01}(\omega + \Omega) \left(i\frac{m_G}{2} - \frac{m_B}{2} \right) e^{i\Delta\Psi} e^{i(\omega + \Omega)t} \\ &\quad + F_{01}(\omega - \Omega) \left(i\frac{m_G}{2} - \frac{m_B}{2} \right) e^{i\Delta\Psi} e^{i(\omega - \Omega)t} \end{aligned} \quad (2.105)$$

L'intensità del campo riflesso è data da $I/I_0 = |u_{00}|^2 + |u_{01}|^2$, dove $I_0 = |E_0|^2$. Dato che il sistema di misura tiene solo i termini a frequenza Ω , il segnale misurato è proporzionale a:

$$\frac{I}{I_0} = -iF_{00}(\omega) F_{00}(\omega + \Omega)^* (1 + i\gamma) \frac{m_G}{2} e^{-i\Omega t} + cc. \quad (2.106)$$

$$-iF_{00}(\omega) F_{00}(\omega - \Omega)^* (1 + i\gamma) \frac{m_G}{2} e^{i\Omega t} + cc.$$

$$+F_{01}(\omega) F_{01}(\omega + \Omega)^* (i\gamma - \beta) \left(-i\frac{m_G}{2} - \frac{m_B}{2}\right) e^{-i\Delta\Psi} e^{-i\Omega t} + cc.$$

$$+F_{01}(\omega) F_{01}(\omega - \Omega)^* (i\gamma - \beta) \left(-i\frac{m_G}{2} - \frac{m_B}{2}\right) e^{-i\Delta\Psi} e^{i\Omega t} + cc.$$

Come si vede, se $F_{00}(\omega + \Omega) = F_{00}(\omega - \Omega)$ e $F_{01}(\omega + \Omega) = F_{01}(\omega - \Omega)$ allora $I = 0$, come atteso.

Considero il caso che, grazie a una scelta opportuna di Ω , una delle due sidebands, ad esempio quella a frequenza $\omega + \Omega$ sia perfettamente risonante in cavità con alla frequenza del modo LG01. Supponendo che la cavità sia accordata in impedenza, la funzione di riflettività alle frequenze di risonanza diventa:

$$F_{00}(\omega) = F_{01}(\omega + \Omega) = 0 \quad (2.107)$$

per per i modi risonanti e

$$F_{01}(\omega) = F_{01}(\omega - \Omega) = 1 \quad (2.108)$$

per quelli che non risuonano. Supponendo che $e^{-i\Delta\Psi} = 1$ per una scelta opportuna della distanza fra cavità e EOL, si trova:

$$\frac{I}{I_0} = F_{01}(\omega) F_{01}(\omega + \Omega)^* (i\gamma - \beta) \left(-i\frac{m_G}{2} - \frac{m_B}{2}\right) e^{-i\Omega t} + cc. \quad (2.109)$$

$$+F_{01}(\omega) F_{01}(\omega - \Omega)^* (i\gamma - \beta) \left(-i\frac{m_G}{2} - \frac{m_B}{2}\right) e^{i\Omega t} + cc.$$

$$\frac{I}{I_0} \approx \left(\gamma\frac{m_G}{2} - i\gamma\frac{m_B}{2} + i\beta\frac{m_G}{2} + \beta\frac{m_B}{2}\right) e^{i\Omega t} + cc.$$

$$= \left[\left(\gamma\frac{m_G}{2} + \beta\frac{m_B}{2}\right) e^{i\Omega t} + c.c.\right] + \left[i\left(\beta\frac{m_G}{2} - \gamma\frac{m_B}{2}\right) e^{i\Omega t} + cc\right]$$

$$= (\gamma m_G + \beta m_B) \cos \Omega t - (\beta m_G - \gamma m_B) \sin \Omega t$$

Le due componenti lette dal fotodiodo dopo la demodulazione hanno dunque ampiezze:

$$I_Q = I_0 (\gamma m_G + \beta m_B) \quad (2.110)$$

e

$$I_I = I_0 (\beta m_G - \gamma m_B) \quad (2.111)$$

$$\begin{pmatrix} I_Q \\ I_I \end{pmatrix} = I_0 \begin{pmatrix} m_G & m_B \\ m_G & -m_B \end{pmatrix} \begin{pmatrix} \gamma \\ \beta \end{pmatrix} \quad (2.112)$$

2.4.5 Tecnica Lock-in

La demodulazione del segnale alterato dalla LEO e proveniente dalla cavità viene eseguita utilizzando la cosiddetta tecnica lock-in. Per capire come funziona consideriamo il prodotto di due segnali armonici con ampiezze A e B (dove A nel nostro caso è l'intensità del campo riflesso):

$$A \cos(\omega_1 t + \phi) \times B \cos(\omega_2 t)$$

che per un'identità trigonometrica è riscrivibile così:

$$= \frac{1}{2} AB \{ \cos[(\omega_1 + \omega_2)t + \phi] + \cos[(\omega_1 - \omega_2)t + \phi] \}$$

Il prodotto risulta nella somma di una componente continua e una alternata quando le frequenze ω_1 e ω_2 sono identiche. La componente DC è estraibile dal segnale complessivo utilizzando un filtro passa-basso o facendo una media sui tempi del segnale complessivo:

$$\lim_{T \rightarrow \infty} \frac{1}{T} \int A \cos(\omega_1 t + \phi) \times B \cos(\omega_2 t) dt = \begin{cases} \frac{1}{2} AB \cos(\phi) & \omega_1 = \omega_2 \\ 0 & \omega_1 \neq \omega_2 \end{cases} \quad (2.113)$$

Nel caso in cui le frequenze dei due segnali si eguagliano il segnale prodotto sarà proporzionale alla quantità da misurare A e alla differenza di fase tra segnale in ingresso e di riferimento. Quindi questa procedura permette di eliminare tutte quelle componenti in frequenza con $\omega_1 \neq \omega_2$ e di tenere solo quelle a una determinata frequenza di riferimento con ampiezza proporzionale al segnale da misurare. La figura 2.3 uno schema della tecnica lock-in.

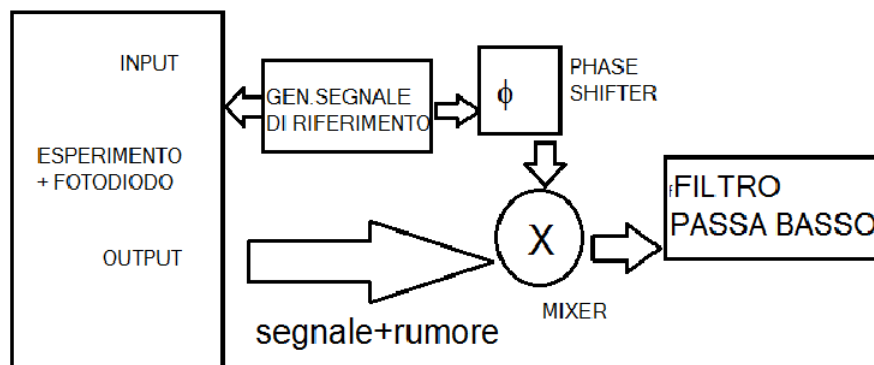


Figura 2.3: Schema della tecnica lock-in. Solo i segnali con frequenza vicina a quella di riferimento sopravvivono al filtraggio

Capitolo 3

Progettazione e costruzione della LEO

Nel capitolo precedente abbiamo mostrato una tecnica che permette a patto di disporre di una lente elettro-ottica di misurare in modo attivo il segnale di mismatch di una cavità rispetto al laser.

Lo scopo delle attività che riportiamo nel capitolo seguente è stato quello di comprendere, dato un certo numero di restrizioni di diversa natura, come costruire questo dispositivo e realizzare un primo prototipo. Lo studio in questione consiste nel progettare un elettrodo di forma opportuna che induca per effetto elettro-ottico una "lente" all'interno di un cristallo di niobato di litio. La propagazione di un fascio gaussiano all'interno di esso è stata poi studiata utilizzando tecniche sia analitiche (matrice ABCD) che numeriche (metodo degli elementi finiti); le procedure costruttive del dispositivo sono delineate nella sezione conclusiva.

3.1 Richiamo di ottica e panoramica generale

Prima di discutere del progetto vero e proprio, riteniamo importante fornire al lettore un rapido richiamo a concetti di ottica geometrica e matriciale.

3.1.1 Le lenti

Una lente è un elemento ottico in grado di concentrare o disperdere un fascio di luce tramite rifrazione. Esistono molti tipi di lenti e si usa classificarle in base al loro profilo superficiale e alla curvatura delle superfici medesime. La maggior parte delle lenti sono lenti sferiche, sono cioè ricavate a partire da porzioni di sfera (detti diottri). A seconda dei raggi di curvatura dei due diottri, le lenti sferiche assumono le seguenti diverse configurazioni (figura 3.1):

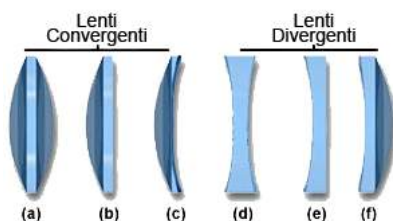


Figura 3.1: Le principali tipologie di lenti [29]

1. biconvessa
2. piano-convessa
3. menisco convessa
4. biconcava
5. piano-concava
6. menisco concava

Nei casi 1. e 2. la lente focalizza la luce su un punto dell'asse ottico a una certa distanza dal suo centro; in questo caso la lente viene detta positiva o convergente. Nei casi 3. e 5. la lente fa invece divergere il fascio; la lente è detta negativa o divergente.

Accanto alle lenti sferiche ne esistono altre le cui superfici sono parti di cilindri o di toroidi; lenti dalla fabbricazione più complicata sono quelle asferiche, che non sono ricavate a partire da nessun solido geometrico. Le lenti cilindriche, in particolare, focalizzano la luce su una linea anziché su un punto mentre quelle toriche combinano i due effetti.

3.1.2 Ottica matriciale

L'ottica matriciale è una particolare tecnica utilizzata per tracciare la traiettoria dei raggi luminosi all'interno di un sistema ottico, basata sull'approssimazione parassiale; si assume cioè che i raggi luminosi entranti nel sistema posseggano un piccolo angolo θ_1 presso la posizione $x_1 = r$ e che ne formino uno altrettanto piccolo θ_2 una volta usciti dal sistema presso la posizione $x_2 = r + \delta r$. Schematizzando il raggio con un vettore a due componenti, rappresentanti rispettivamente la distanza del raggio dall'asse ottico del sistema e la pendenza rispetto allo stesso, la modifica che il sistema ottico induce sul raggio di luce è descritta da una matrice 2×2 . Quindi, matematicamente abbiamo :

$$\begin{pmatrix} x_2 \\ \theta_2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} A & B \\ C & D \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x_1 \\ \theta_1 \end{pmatrix}$$

Utilizzare metodi matriciali offre il vantaggio di riprodurre sistemi ottici, anche molto complicati, in modo formale mediante il semplice prodotto di una serie di matrici, ciascuna delle quali rappresenta una componente individuale dell'apparato complessivo.

Riportiamo nella tabella seguente le matrici ABCD degli elementi ottici più comuni :

Elemento	Matrice
Propagazione per un tratto d a mezzo costante	$\begin{bmatrix} 1 & d \\ 0 & 1 \end{bmatrix}$
Rifrazione da due superfici piane	$\begin{bmatrix} 1 & d \\ 0 & \frac{n_1}{n_2} \end{bmatrix}$
Riflessione da un'interfaccia piana	$\begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{bmatrix}$
Rifrazione da due superfici curve	$\begin{bmatrix} 1 & 0 \\ \frac{n_1-n_2}{R \cdot n_2} & \frac{n_1}{n_2} \end{bmatrix}$
Riflessione ad un'interfaccia curva	$\begin{bmatrix} 1 & 0 \\ -\frac{2}{R_e} & 1 \end{bmatrix}$
Lente di spessore t	$\begin{bmatrix} 1 & 0 \\ \frac{n_2-n_1}{R_2 \cdot n_1} & \frac{n_2}{n_1} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 1 & t \\ 0 & 1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ \frac{n_1-n_2}{R_1 n_2} & \frac{n_1}{n_2} \end{bmatrix}$

Le matrici ABCD triangolari superiori sono dette matrici di rifrazione o matrici \mathcal{R} , quelle triangolari inferiori matrici di trasferimento o matrici \mathcal{T} . Ogni matrice ABCD composta è data dal prodotto di più matrici \mathcal{R} e/o \mathcal{T} .

Per un approfondimento sull'ottica matriciale rimandiamo alla bibliografia [12][2]

3.1.3 Linee-guida al progetto

Con questo piccolo bagaglio di conoscenze teoriche siamo pronti ad esporre al lettore il progetto di costruzione della lente elettro-ottica. Si tratta di realizzare un dispositivo che produca un effetto lente mediante l'effetto Pockels; si dovrà quindi studiare un sistema per polarizzare opportunamente il niobato; la possibilità da noi esplorata è interporre un sostrato di niobato di litio tra due serie di elettrodi appositamente progettati (sandwich). La LEO dovrà soddisfare i seguenti requisiti:

- L'effetto complessivo esercitato sul fascio deve essere assimilabile a quello di una lente sferica (o per lo meno cilindrica).
- Le ampiezze di modulazione m_G ed m_B prodotte devono essere tali che il valore dell'intensità del campo riflesso sia per lo meno dieci volte superiore alla soglia nominale di rivelazione del fotodiode ($35 \times 10^{-12}W$)
- Per evitare effetti diffrattivi, è importante che la lente elettro ottica sia sufficientemente più grande del diametro del fascio che la attraversa. Per questo motivo si sono fissate le dimensioni laterali della lente elettro-ottica a un valore non inferiore a 3 volte il diametro del fascio.

A queste limitazioni di carattere progettuale se ne affiancano alcune di carattere materiale/pragmatico:

- Per ragioni legate alla tecnica di fabbricazione utilizzata (vedi paragrafi successivi), i valori del raggio di curvatura con cui possiamo caratterizzare gli elettrodi non possono essere inferiori a 1cm.
- Lo spessore del campione di niobato di litio cristallino da utilizzare come substrato è fissato a 5 mm a causa delle dimensioni del wafer commerciale da cui il campione stesso viene prelevat.
- Visto l'ordine di grandezza di r_{33} appare subito chiaro che per ottenere un effetto modulante sufficientemente intenso occorrerà realizzare più di una lente.

- Le ottiche di mode-matching e eventuali altri esperimenti installati sul banco ottico riducono lo spazio occupabile dalla LEO a pochi centimetri (la LEO dovrebbe possedere una lunghezza non superiore ai 3 cm).
- Poiché il laser ha un offset di circa 6 cm rispetto al banco occorrerà utilizzare un supporto, anch'esso dotato di un'estensione longitudinale, isolante per mantenere la LEO alla giusta altezza.
- Poiché gli elettrodi non saranno incisi direttamente sul cristallo ma stampati su un supporto a sé stante occorre escogitare un sistema per mantenerli in stretto contatto al cristallo senza intaccarne le proprietà elettro-ottiche.

Coi contenuti della prossima sezione, mostreremo che un buon accordo tra questi due insiemi di restrizioni lo si trova con un dispositivo come quello rappresentato in figura (3.2):

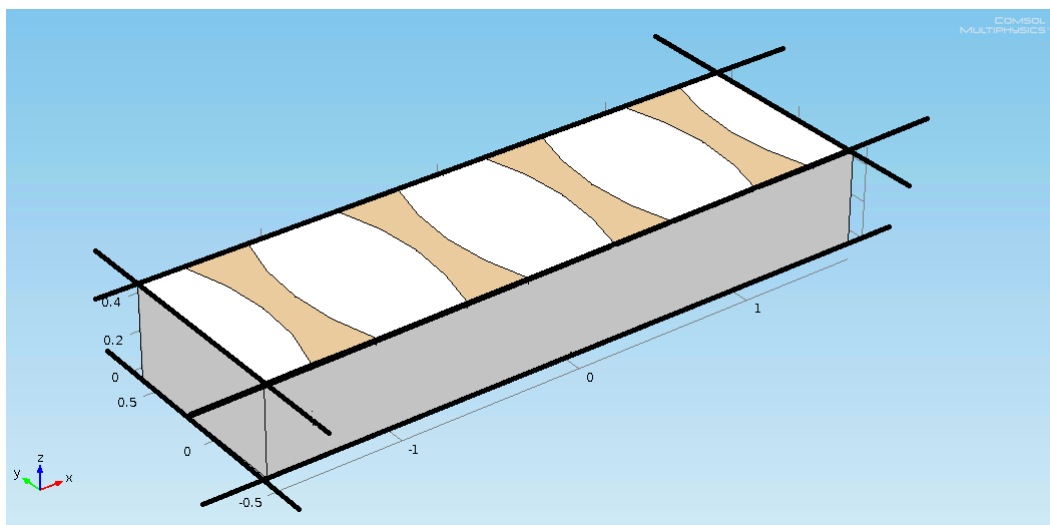


Figura 3.2: Schizzo di massima della LEO. A un sostrato in niobato di litio (colorato in grigio) sono fissate due sottili placche (in bianco) contenenti elettrodi metallici (in arancio) di forma tale da indurre l'effetto focalizzante.

3.2 Modellazione dell'apparato

Prima di poter costruire l'apparato occorre elaborare delle simulazioni al computer che rappresentino la LEO mediante alcuni parametri fisico-geometrici, in modo da verificare che la sua configurazione ne determini il corretto modo di operare. I problemi da affrontare per ottenere le informazioni a noi utili sono allora essenzialmente due:

1. Ricreare il sistema ottico complessivo tramite il metodo della matrice di trasferimento.
2. Studiare l'effetto ai bordi in funzione del raggio di curvatura di una singola coppia di elettrodi (positivo e negativo) applicata a un pezzo di niobato di litio congruamente esteso (vedi figura 3.3).

I problemi 1 e 2 possono essere risolti nella cornice offerta dai software Smath e COMSOL Multiphysics. Vedremo infine come i risultati prodotti dai due software hanno permesso l'individuazione di un set di parametri sulla base dei quali abbiamo costruito la lente elettro-ottica.

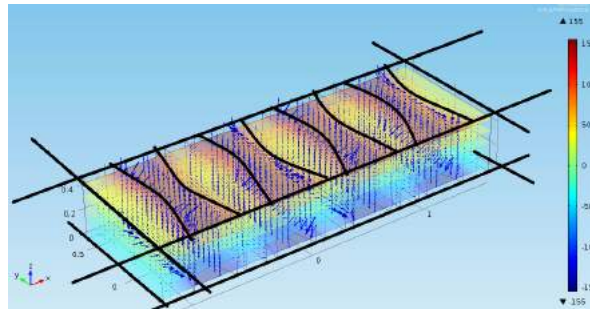


Figura 3.3: Rappresentazione grafica dell'induzione dell'effetto lente nel niobato di litio. Lo studio dell'effetto ai bordi fornirà una correzione di ordine superiore al modello basato sul formalismo della matrice ABCD

3.2.1 COMSOL Multiphysics

COMSOL Multiphysics è un software multi-piattaforma per l'analisi agli elementi finiti, la risoluzione di equazioni differenziali alle derivate parziali e la simulazione di processi fisici, sviluppato a partire dal 1986 da Svante Littmarck e Farhad Saeidi del Regio Istituto di Tecnologia di Stoccolma. Le sue funzionalità lo rendono uno strumento assai utile ai nostri scopi in quanto all'interno di un unico ambiente di sviluppo integrato è possibile sia ricreare, in linea di principio, qualsiasi sistema/oggetto nelle sue caratteristiche chimico-fisiche che studiare l'applicazione di una legge fisica a quello specifico sistema. Noi siamo interessati ad osservare come la legge di Gauss governa un sistema pensato in accordo alle linee-guida sopraccitate. La soluzione di questo problema differenziale fornisce un'espressione del campo elettrico punto per punto; con questa calcoleremo la differenza di cammino ottico in funzione del profilo dell'elettrodo e, a valle, il potere focale della lente così costruita. Seguono le presentazioni dei dettagli della simulazione e dei suoi risultati.

Impostazione e descrizione del modello parametrico

COMSOL Multiphysics offre all'utente un approccio bottom-up alla composizione del modello; questo viene cioè costruito tramite una serie di passaggi che, progressivamente, esprimono un particolare aspetto del sistema da studiare o della simulazione stessa. Di seguito riportiamo, mimando il workflow di COMSOL, in forma concisa i passaggi che ci hanno portato alla verifica del comportamento focalizzante della lente elettro-ottica.

Parametri Viste e considerate le linee-guida del progetto, baseremo il modello sui parametri del seguente elenco:

- Il raggio di curvatura dell'elettrodo R_oC
- L'ampiezza laterale che caratterizza il parallelepipedo di niobato di litio w
- L'altezza t
- Lo spessore centrale dell'elettrodo metallico s
- La distanza inter-elettrodo d e un parametro e per definire una eventuale distanza ulteriore
- I potenziali elettrici uguali e opposti V_1 e V_2 da applicare agli elettrodi.

Per questioni legate alla soluzione numerica del problema occorrerà simulare il sandwich come racchiuso in un parallelepipedo di aria che nel nostro modello definiamo con un parametro P che ne rappresenti lo spigolo.

Geometria Prima di combinare appropriatamente i parametri sopra definiti per dare forma alla LEO, bisogna discutere le simmetrie del sistema. Consideriamo nuovamente il disegno di massima. Esso esibisce almeno due simmetrie: una lungo l'asse x e un'altra lungo y , in corrispondenza dello spessore centrale dell'elettrodo. Si può allora studiare l'effetto di bordo tra due sandwich contigui, senza intaccare la soluzione a patto che s'impongano le appropriate condizioni al contorno, simulando solo metà del sandwich (vedi figura 3.4): in questo modo il numero di elementi finiti è ridotto di un quarto e la simulazione è resa più performante.

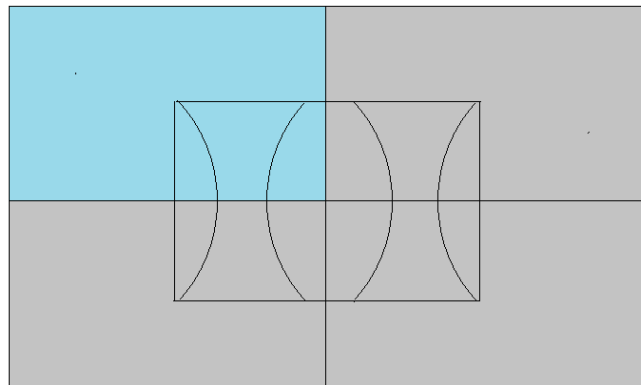


Figura 3.4: Rappresentazione schematica della LEO (al centro) circondata dall'aria. Dato che questa è centrata nel parallelepipedo rappresentante l'aria, se nella simulazione si vuole applicare la simmetria discussa sopra occorre che il dispositivo dimezzato combaci perfettamente con lo spigolo inferiore del parallelepipedo rappresentante l'aria. Alle superfici del sandwich in contatto con l'aria deve essere imposta la condizione carica nulla

Venendo al disegno, quale profilo assegnare all'elettrodo affinché la LEO focalizzi il fascio come una lente sferica? Dopo aver vagliato diverse configurazioni, è emerso come la sagoma che per certi raggi di curvatura dell'elettrodo corregge il fascio con diottrie dello stesso ordine e segno è quella biconcava. Per dare questa configurazione al dispositivo abbiamo disegnato (figura 3.5) sul piano di lavoro di COMSOL una coppia di cerchi di raggio RoC centrati rispettivamente in A e B e un rettangolo il cui centro giace in mezzo ai due; intersecando le tre figure si ottiene la sagoma desiderata per l'elettrodo. Da questa costruzione è facile vedere che lo spessore centrale è pari a $2(RoC - \sqrt{RoC^2 - \frac{w^2}{4}})$. Si può inoltre notare che disegnando in questo modo l'elettrodo una distanza inter-lente pari a 2 è già inclusa tra due elettrodi consecutivi.

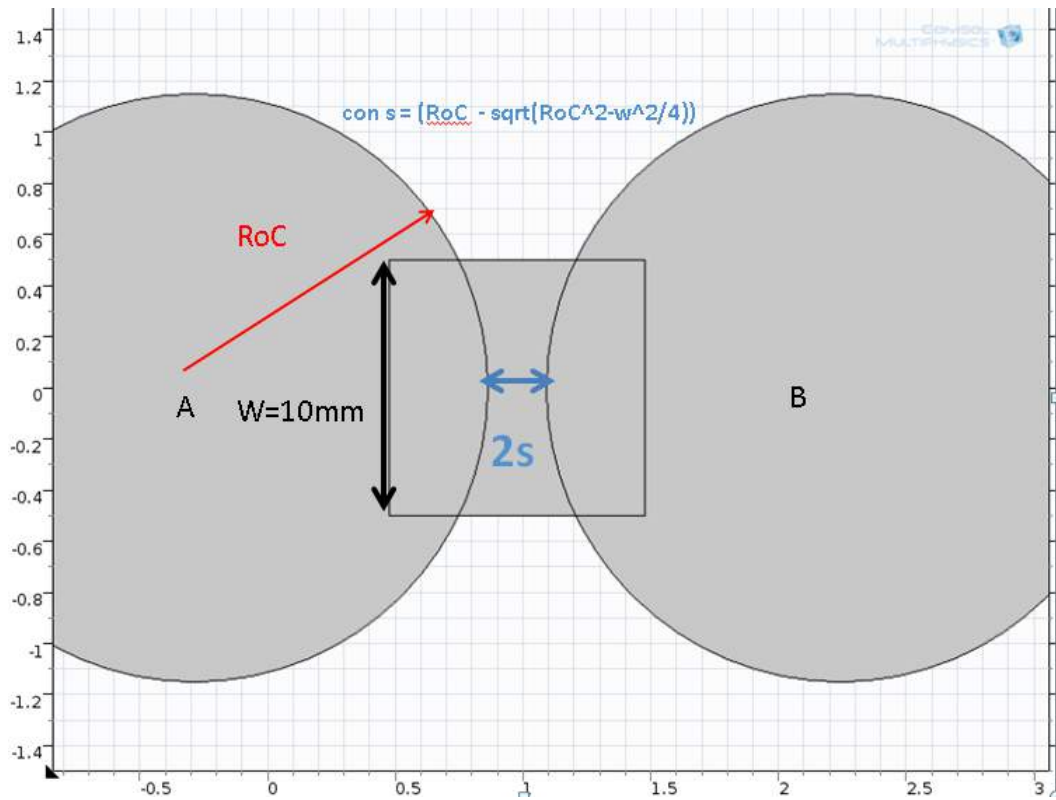


Figura 3.5: La sovrapposizione delle tre figure la cui intersezione produce la sagoma dell'elettrodo

Per riottenere il sandwich in tre dimensioni è sufficiente unire il disegno a un rettangolo ed estrarre il tutto in due dimensioni per un tratto t (vedi figure 3.6 e 3.7)

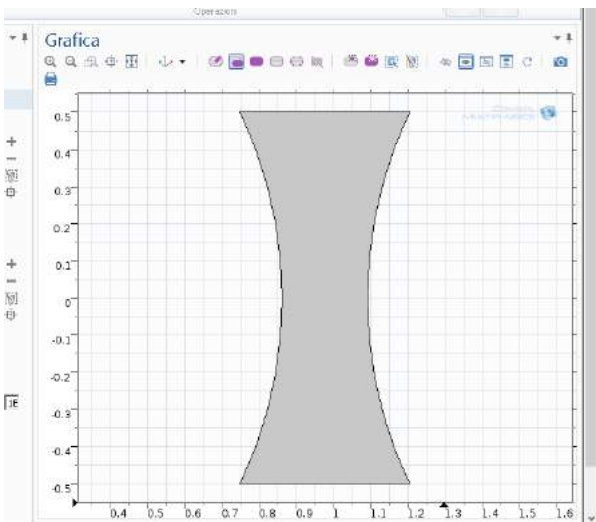


Figura 3.6: L'elettrodo ritagliato

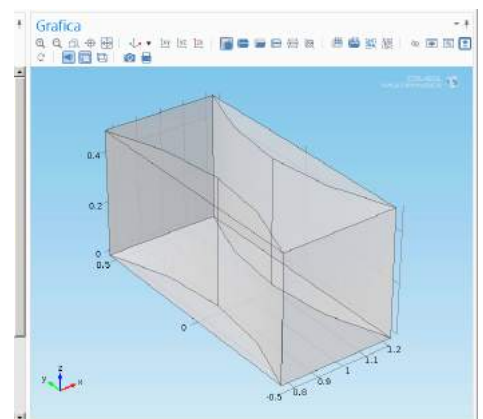


Figura 3.7: Estrusione dell'elettrodo

Materiali e Elettrostatica Una volta terminato il disegno, procediamo con l'assegnare ad ogni regione determinate proprietà che derivano dal materiale di cui sono costituite nella realtà. Selezioniamo all'interno dell'apposita

libreria COMSOL *aria* per il parallelepipedo esterno e *rame* e *niobato di litio*, entro i rispettivi contorni, per il sandwich.

La simulazione del campo elettrostatico da applicare alla LEO si ottiene assegnando un profilo di carica nulla ai piani di simmetria identificati nel paragrafo precedente, un potenziale di prova di ± 200 V a ciascun elettrodo e lasciando libero il potenziale della zona non polarizzata.

Mesh Il metodo degli elementi finiti è una tecnica numerica per la risoluzione approssimata di equazioni differenziali alle derivate parziali. Essa si basa sulla suddivisione ('meshing') di una regione estesa in sub-regioni più piccole di forma codificata dette 'elementi finiti' (vedi figura 3.8); la mesh conterrà sia le proprietà materiali sia quelle strutturali che definiscono come il sistema reagirà all'applicazione del campo elettrico. Così facendo l'equazione differenziale iniziale è ridotta a un sistema di equazioni algebriche, una per ogni elemento finito. La soluzione è infine risolta utilizzando metodi variazionali che minimizzano una funzione di errore associata. La bontà della simulazione dipenderà quindi dall'abilità dell'utente di impostare una mesh più fitta e dalla appropriata risoluzione laddove il campo è più intenso e i contorni sono più angusti. Data la natura iterativa della tecnica, prima di trovare la mesh giusta è stato necessario crearne diverse, valutarne la qualità e decidere infine la meglio congegnata.

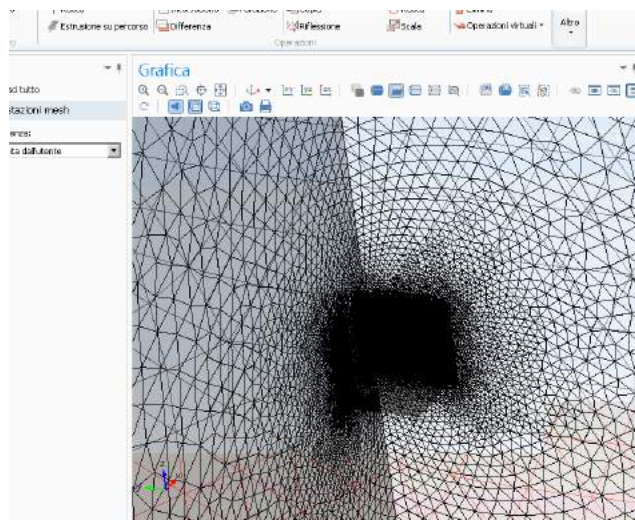


Figura 3.8: Impostazione della mesh

Studio del modello Una volta che il modello è definito in ogni dettaglio il passo successivo è richiedere al software di determinare il campo elettrico generato dagli elettrodi all'interno del materiale per una scelta particolare dei parametri che definiscono la forma degli elettrodi. Questo campo viene poi convertito in una variazione spaziale di indice di rifrazione per effetto Pockels. Infine, il codice valuta il ritardo di fase impartito dalla LEO a un fronte d'onda piano in funzione della posizione. Nel caso ideale, l'onda in uscita acquisisce un fronte d'onda sferico, come se avesse attraversato una lente. Per verificare quantitativamente questo effetto, si sono graficate le variazioni di cammino ottico $\Delta n(L)$ lungo i piani meridiano e sagittale indotte dal campo (vedi figura 3.9). Per farlo si seleziona mediante l'interfaccia grafica la superficie corrispondente al piano di

simmetria, sulla quale creiamo due cammini ortogonali; lungo di essi sono calcolati gli integrale ottici per un campo elettrico lungo z.

Risultati del modello e analisi

La figura 3.9 contiene i grafici ottenuti seguendo la procedura descritta nel paragrafo precedente. Essi rappresentano le variazioni di cammino ottico lungo l'asse z e lungo l'asse y per un certo raggio di curvatura dell'elettrodo

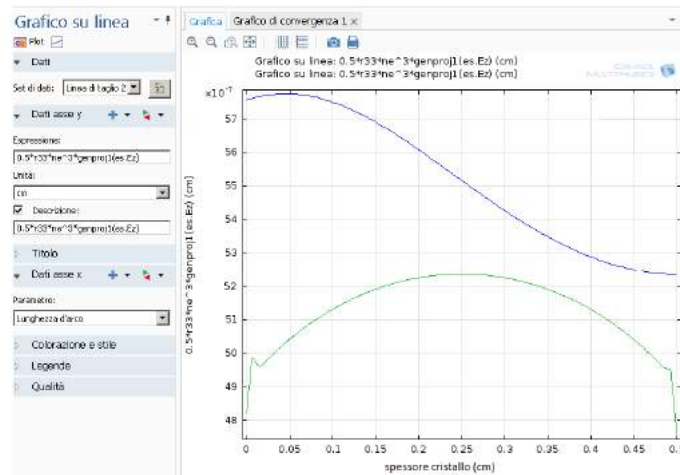


Figura 3.9: Andamento del cammino ottico lungo il bordo dell'elettrodo. Si noti che, per le simmetrie menzionate sopra, la curva blu è rappresentata solo fino al centro del campione, per z = 0.5 cm ove quest'ultimo è stato tagliato

Da questi plot si può desumere il potere correttivo della LEO lungo y e z calcolando il raggio di curvatura delle due curve in prossimità del centro.

$$\frac{\Delta x^2 + \Delta y^2}{2\Delta y} = R \tag{3.1}$$

dove R è la curvatura indotta sul fronte d'onda, Δx è la lunghezza dell'intorno e Δy la differenza tra i valori presi dalla curva in x e x + Δx. Una volta calcolati via software i cammini ottici per un certo raggio di curvatura dell'elettrodo, basta quindi prendere due punti appartenenti al grafico in un piccolo intorno (Δx = 0.05 cm) del centro del dispositivo e applicare la formula (3.1). L'analisi è stata ripetuta per varie geometrie degli elettrodi, caratterizzate da valori del raggio di curvatura RoC tali che 0.5 cm ≤ RoC ≤ 5 cm e abbiamo raccolto di volta in volta i dati in un foglio Excel, producendo il grafico riportato nella figura 3.10.

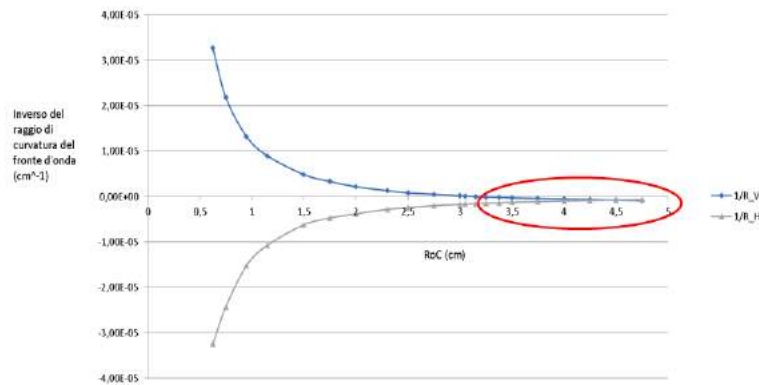


Figura 3.10: Diottrie lungo le direzioni y e z in funzione del raggio di curvatura dell'elettrodo

La LEO è fortemente astigmatica: corregge il fascio lungo le due direzioni con ordini di grandezza simili ma di segno opposto (lente positiva e negativa) per elettrodi con raggi di curvatura inferiori ai 2.25 cm circa. Per valori compresi tra 3.15 cm e 5 cm la correzione su entrambi gli assi si fa molto piccola ma quella lungo la direzione z inverte il suo segno, congiungendosi all'altra; deduciamo che siamo davanti a una debole lente sferica negativa.

Concludiamo allora che utilizzando elettrodi realizzati in forma biconcava e con RoC compresi nel secondo intervallo, l'effetto focalizzante della LEO sul fascio è compatibile con quello da noi cercato.

Nella prossima sezione vedremo come accertarci che le ampiezze prodotte da un array di lenti così deboli generi ampiezze di modulazione sufficientemente grandi da essere lette dal fotodiodo. Per farlo lavoreremo in approssimazione di campo uniforme.

3.2.2 SMath

In questa sezione riportiamo le caratteristiche salienti del modello matriciale sviluppato utilizzando il software S-Math.

Descrizione della LEO col metodo della matrice di trasferimento

La simulazione COMSOL ha permesso di accertarsi sulla natura dell'effetto lente ricercato e ha fornito una stima del potere focale in funzione del raggio di curvatura per il niobato polarizzato da una singola coppia di elettrodi; per completare la modellazione delineata nella sezione precedente, bisogna valutare l'alterazione provocata da N sandwich sui parametri del fascio in ingresso. Poiché il dispositivo in progetto è, in approssimazione parassiale, a meno dell'effetto di bordo studiato, è una sequenza di N elementi identici, possiamo rappresentarlo nel formalismo della matrice ABCD semplicemente scrivendo in SMath la matrice X relativa al singolo blocco e quindi moltiplicarla per sé stessa N volte; altre matrici ABCD diverse da X caratterizzeranno la propagazione del fascio all'infuori della lente. Il modello matriciale dovrà, come è ovvio, includere anche le altre limitazioni dettate dal progetto, non ultima l'estensione longitudinale da attribuire al quid di niobato di litio.

Riportiamo in tabella le matrici che rappresentano la propagazione del fascio attraverso il sistema, scritte in funzione degli stessi parametri con cui abbiamo definito la simulazione COMSOL

- $pg1(d, R) = \begin{bmatrix} 1 & s_1 \\ 0 & 1 \end{bmatrix}$ è la matrice rappresentativa della propagazione del fascio gaussiano in aria
- $M_1 = \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 0 & n_e^{-1} \end{bmatrix}$ e $M_2 = \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 0 & n_e \end{bmatrix}$ rappresentano le interfacce tra l'aria e il cristallo non polarizzato. n_e è l'indice di rifrazione lungo l'asse straordinario del cristallo in niobato di litio
- $pg2(d, R) = \begin{bmatrix} 1 & l(d; R) \\ 0 & 1 \end{bmatrix}$ E' la matrice che descrive la propagazione del fascio nello spazio eventualmente inutilizzato nel cristallo. La funzione $l(d, R)$ è calcolata come segue.

Sia L la lunghezza del dispositivo complessivo e sia $N(d, R)$ il numero di lenti lunghe $4s$ (vedi sezione dedicata a COMSOL) che il dispositivo può ospitare in funzione del raggio di curvatura e della distanza interlente. Poiché N non sarà in generale un intero occorre arrotondarlo all'intero più grande minore di N. La lunghezza residuale sarà allora data da

$$l(d; R) = L - 4 \cdot \text{floor}(N(d; R)) \cdot s \quad (3.2)$$

- $pg(d) = \begin{bmatrix} 1 & d/2 \\ 0 & 1 \end{bmatrix}$ rappresenta la propagazione del fascio tra una lente e l'altra. La distanza d è divisa per due perché condivisa tra due lenti contigue
- $M_1 = \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 0 & n_e^{-1} \end{bmatrix}$ e $M_2 = \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 0 & n_e \end{bmatrix}$ rappresentano le interfacce tra l'aria e il cristallo non polarizzato. n_e è l'indice di rifrazione lungo l'asse straordinario del cristallo in niobato di litio
- $M(R; V) = \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ \frac{\Delta n(V)}{R \cdot n_e} & \frac{nL(V)}{n_e} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 1 & D(R) \\ 0 & 1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ \frac{-\Delta n(V)}{R n_e} & \frac{n_e}{n_2} \end{bmatrix}$ rappresenta la lente biconcava immersa nel cristallo.

$\Delta n(V)$ è il salto d'indice di rifrazione in funzione del potenziale applicato , $nL(V) = n_e + \Delta n(V)$ e $D(R)$ corrisponde al doppio dello spessore centrale s dell'elettrodo

La matrice complessiva del dispositivo formato da N lenti $X(d, R, V)$ è data dalla sequenza:

$$X(d, R, V) = M_2 \cdot pg2(d, R) \cdot (pg(d) \cdot M(R, V) \cdot pg(d))^{N(d, R)} \cdot M_1 \cdot pg1 \quad (3.3)$$

Una stima dell'effetto della lente sul fascio di input si ottiene applicando la legge di Kogelnik [10] alla matrice $X(d; R; V)$:

$$X(d, R, V) = \begin{bmatrix} X_{11} & X_{12} \\ X_{21} & X_{22} \end{bmatrix} \rightarrow q_2(X) = \frac{X_{11} \cdot q_0 + X_{12}}{X_{21} \cdot q_0 + X_{22}} \quad (3.4)$$

Dove q_0 è il parametro complesso del fascio gaussiano di input mentre q_2 rappresenta il fascio modificato dalla LEO; si può mostrare [2] che la parte immaginaria di q_2 è legata alla dimensione del fascio dall'equazione:

$$w_0(X) = \sqrt{\frac{\Im(q_2(X))\lambda}{\pi}} \quad (3.5)$$

mentre la parte reale è collegata alla posizione del fascio. Le ampiezze di modulazione (2.99) si ottengono per un potenziale V applicato generico come segue:

$$\frac{\delta z_0}{2z_R} = \frac{\Re(q_2(X(d, R, V)) - q_2(X(d, R, 0 \cdot V)))}{z_R} \quad (3.6)$$

$$\frac{\delta w_0}{w_0} = 2 \frac{(w_{02}(X(d, R, V)) - w_{02}(X(d, R, 0 \cdot V)))}{w_0} \quad (3.7)$$

Sostituendo queste quantità in (2.111) e (2.110) è possibile ottenere una stima delle potenze riflesse. Per maggiori dettagli rimandiamo all'appendice C.

3.2.3 Set ottimale di parametri costruttivi

Consultando l'appendice C si può constatare come una LEO lunga 2 cm costituita da quattro elettrodi bi-concavi, con raggio di curvatura 3.5 cm, distanziati tra loro 4 mm e con una tensione applicata di 118.25 V, valore ottenuto includendo la correzione dovuta all'effetto ai bordi rispetto ai 200 V reali, si ottengono, con una potenza in ingresso di 10mW ampiezze di modulazione nell'ordine di $10^{-7} \div 10^{-6}W$, ben al di sopra della soglia di rivelazione minima imposta dal fotodiodo ($35 \times 10^{-12}W$). Il valore della tensione tenente conto dell'effetto ai bordi è stato ottenuto secondo la seguente lista di passaggi:

- Si è cercato tra i risultati del modello COMSOL il valore del potere focale corrispondente al raggio di curvatura di cui sopra.
- Individuato il potere focale dai risultati in COMSOL si è variato il potenziale nel modello matriciale fino a ritrovarne il medesimo valore anche qui.

Come illustrato nella prossima sezione, è stata realizzata una serie di elettrodi secondo le linee individuate in questa fase di progettazione. I raggi di curvatura scelti per gli elettrodi sono a cavallo del valore ottimale atteso di 3,5 cm.

3.3 Fabbricazione della lente elettro-ottica

In quest'ultima sezione presentiamo le procedure di fabbricazione della LEO.

3.3.1 Preparazione dei substrati

Il substrato utilizzato è un parallelepipedo di niobato di litio (LiNbO3) tagliato con dimensioni (2 cm × 1 cm × 0,5 cm) in modo che la superficie maggiore sia perpendicolare all'asse z (direzione (0 0 1)). Le faccette

di ingresso sono perpendicolari alla direzione di propagazione y nel cristallo (direzione cristallografica $(0\ 1\ 0)$). Tali faccette sono state lucidate a grado ottico (vedi paragrafi successivi). Gli elettrodi saranno collocati sulle superfici maggiori in modo che il campo elettrico nel campione sia diretto essenzialmente lungo l'asse z .

Per ottenere dal blocco "madre" il blocco di materiale attivo ci siamo serviti di due apparecchi:

Tagliatrice Il campione è stato tagliato da un wafer commerciale di niobato di litio tramite una tagliatrice per cristalli. Come si può vedere dalla figura 3.11 la macchina è costituita essenzialmente da:

- Una lama circolare
- Un rotore con annesso controllo della velocità di rotazione e offset per la lama
- Una massiccia barra di metallo con estremità girevole e scala graduata fatta su misura
- Un supporto auto-costruito in bachelite da agganciare alla barra per l'alloggiamento del campione durante il taglio
- Un incavo ove porre il recipiente d'acqua per la riduzione dell'attrito tra lama e campione.

Per mantenere fermo il blocco durante il taglio lo incolleremo alla bachelite con un polimero adesivo a indurimento lento. A operazione terminata il blocchetto può essere disgiunto dal supporto sottoponendo il tutto a un bagno di acetone.

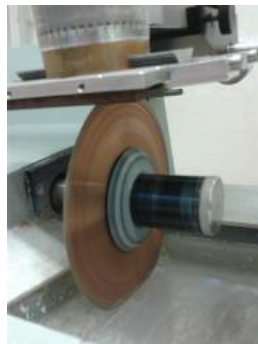


Figura 3.11: Taglio del cristallo con la sega rotante

Lappatrice Una volta modellato il cristallo nella forma parallelepipedica ricercata, il passo successivo da compiere è levigare finemente le due facce attraverso cui passerà la luce laser: il processo è noto come lappatura: essa consiste nel sottoporre il campione a sfregamento con una sospensione colloidale di cristalli di taglia omogenea e con caratteristiche di durezza opportune cosparsa su una superficie metallica in rotazione. Nel nostro caso si sono utilizzate particelle di allumina Al_2O_3 di taglia 3 micron seguite da un processo con diamante a 0.3 micron. L'apparecchiatura da noi utilizzata è il "LAPPER PM5" costruita dalla Logitech. Date le dimensioni ridotte del campione e la sua relativa fragilità, per mantenerlo in contatto con la mola in modo opportuno e senza danneggiarlo si è utilizzato un sostegno speciale fornito dal costruttore chiamato "jig" che permette di controllare e impostare con precisione la quantità di materiale da rimuovere dal campione (vedi figure 3.13 e 3.14)



Figura 3.12: La lappatrice "Logitech PM 5"



Figura 3.13: Il jig utilizzato per levigare il niobato di litio



Figura 3.14: Il blocchetto in LiNbO₃ stretto nell'alloggiamento per il campione del jig [30]

A procedura ultimata l'oggetto che si ottiene è quello mostrato nella figura 3.15.



Figura 3.15: Il blocco in niobato di litio che useremo come mezzo attivo della LEO

3.3.2 Stampare gli elettrodi

Il sostrato utilizzato per la stampa consiste in una bassetta di vetronite ramata sulla quale è depositata (tramite processo industriale) una sostanza fotosensibile (*photoresist*). Il photoresist ha la particolare proprietà di essere estremamente corrodibile dalle basi se precedentemente esposto alla radiazioni ultraviolette, laddove dimostra una forte resistenza all'azione degli acidi se non lo si illumina con gli UV. Ponendo un negativo opportunamente oscurato (il cosiddetto *master*) tra la bassetta e la sorgente UV è allora possibile, con alcuni accorgimenti, incidervi piste di qualsiasi sagoma (nel nostro caso si tratterà di alcune serie di elettrodi biconcavi). Di seguito i passaggi svolti.

Disegno del master Il punto di partenza è preparare il negativo del disegno dei tracciati ; a partire dallo studio effettuato nei paragrafi precedenti, si è individuato un RoC ottimale per gli elettrodi di 3.5 cm. Abbiamo perciò realizzato una serie di 5 elettrodi con RoC variati in un intervallo centrato attorno a tale valore; il disegno è stato fatto col software DraftCAD (figura 3.16) Le aree scure sul foglio trasparente corrisponderanno sulla bassetta ad aree libere dal rame.

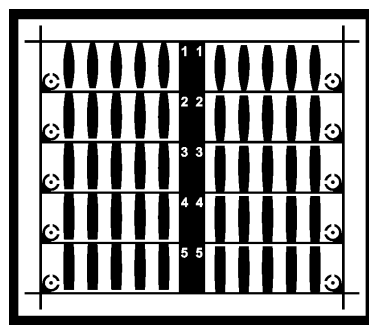


Figura 3.16: Master per la fotoincisione degli elettrodi

Esposizione ai raggi UV della bassetta Per impressionare sulla bassetta il disegno stampato sull'acetato occorre

utilizzare un dispositivo chiamato *bromografo* (vedi figura 3.17). Esso è costituito essenzialmente da un case apribile nella cui parte superiore stanno le lampade UV, separate dal piano di alloggiamento per l'oggetto da foto-incidere da un vetro opalino. Il fatto che il piano e il vetro siano molto vicini tra loro permette di prevenire la formazione di piste dai contorni sfuocati sulla basetta. L'apparecchio da noi utilizzato è fornito di un circuito temporizzatore (impostabile dall'esterno con l'apposito controllo) di accensione/spegnimento delle lampade per produrre correttamente la fotoincisione. Affinché le piste risultino impresse distintamente sulla basetta occorreranno circa 15 minuti di esposizione.

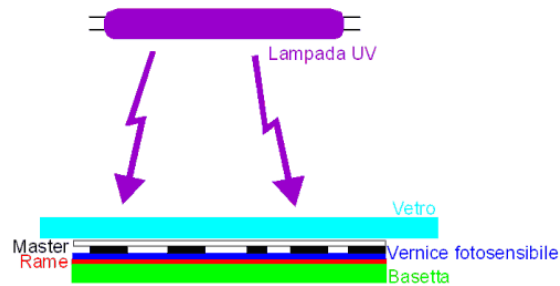


Figura 3.17: Schema illustrativo del funzionamento di un bromografo

Bagno chimico Una volta terminato il processo di illuminazione UV la basetta è stata sottoposta al bagno di sviluppo in due step. Nel primo step si è rimosso il photoresist illuminato dagli UV con una soluzione debolmente basica di soda caustica mentre nel secondo step con una debolmente acida di percloruro ferrico si è rimosso il rame sottostante. Nelle foto sottostanti è possibile vedere il risultato (figure 3.18 e 3.19).

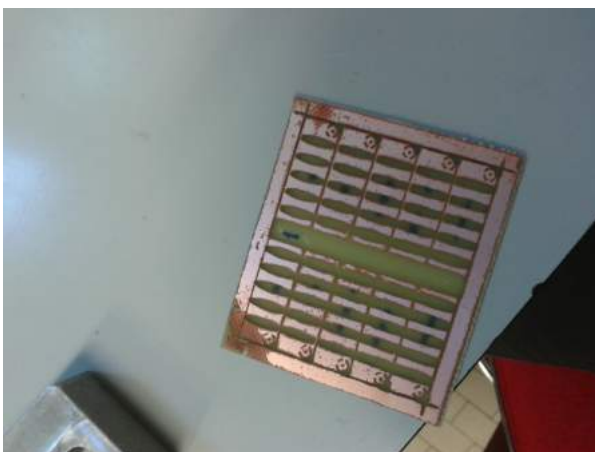


Figura 3.18: PBC stampata



Figura 3.19: Le cinque serie di elettrodi ritagliate

Le cinque coppie di serie di elettrodi così stampate possono essere ritagliate dalla basetta con l'ausilio della sega rotante; per tenerle unite al cristallo si userà una soluzione come quella mostrata nella foto sottostante (figura 3.20).

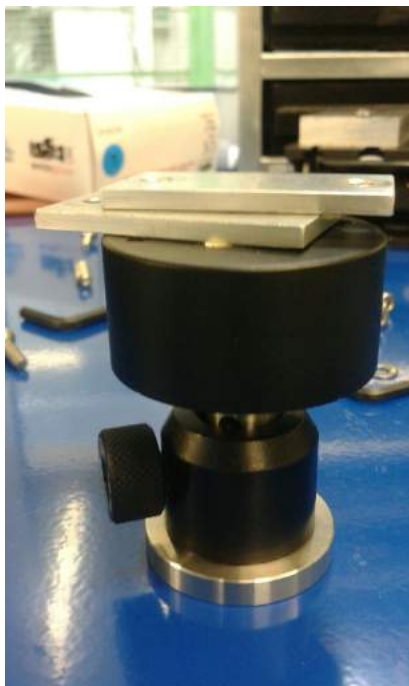


Figura 3.20: Il supporto isolante su cui monteremo la LEO (vedi capitolo successivo)

Capitolo 4

Apparato sperimentale

Terminata la realizzazione dei componenti della lente elettro-ottica, la fase successiva del presente lavoro di tesi è quella di installare sul banco ottico di laboratorio la cavità risonante per la messa in atto dell'esperimento. Poiché l'eccitamento dei modi trasversi di quest'ultima richiede che il fascio gaussiano in ingresso sia opportunamente focalizzato e modellato, il set-up ottico dovrà includere, oltre alla LEO un insieme di ottiche, cosiddette di mode-matching, che indicheremo sotto il nome di telescopio, poste lungo il tragitto compreso tra sorgente laser e cavità, e un modulatore elettro-ottico (MEO) per stabilizzare la frequenza del laser in ingresso con la cosiddetta tecnica PDH [15]. Lo spettro riflesso dalla cavità sarà infine letto mediante un fotodiodo collegato a una serie di elettroniche che permetteranno di visualizzare il segnale su un oscilloscopio e su un computer per la successiva analisi.

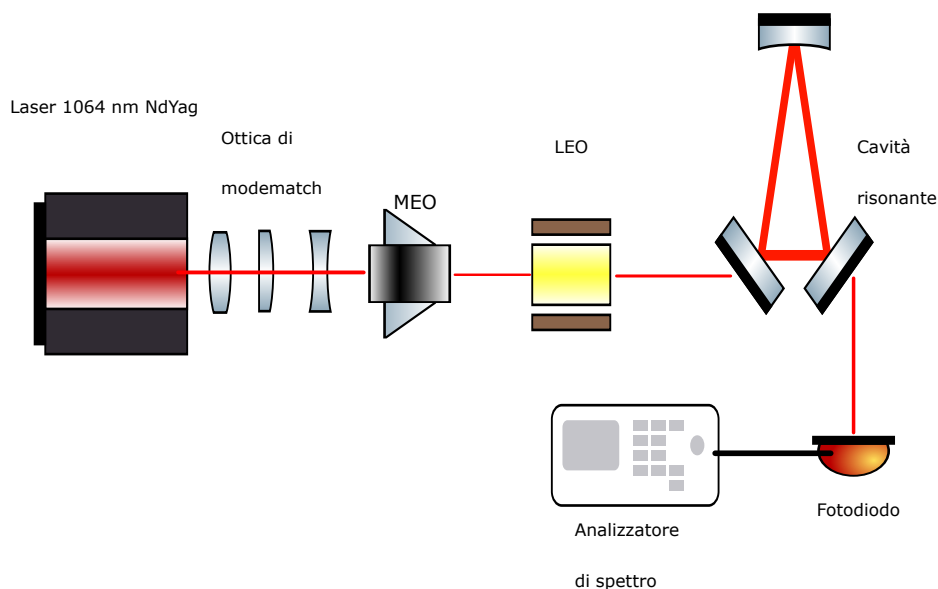


Figura 4.1: Schema di massima dell'apparato sperimentale

4.1 Considerazioni preliminari

Disegnare un esperimento di mode-matching comporta avere accurata contezza di una serie di fatti:

- Spazio disponibile sul tavolo ottico
- Beam waist, sua posizione e, in generale, dimensione del fascio lungo il tragitto tra sorgente e cavità
- Lenti disponibili in laboratorio

Questo perché:

- Le dimensioni della cavità determinano le sue caratteristiche di risonanza e di stabilità.
- Le estensioni dei supporti delle ottiche di mode-matching, di altri elementi ottici (specchi, LEO, ecc) e l'eventuale presenza sulla piattaforma di apparati appartenenti ad altri esperimenti (quale è il nostro caso) limitano la libertà progettuale.
- Le aperture di alcuni elementi ottici(per esempio la stessa LEO) richiedono che il fascio posseda una certa taglia presso una certa posizione affinché non sia troncato.
- In esperimenti di questo tipo, la posizione finale del waist può trovarsi anche a diversi metri dalla sorgente
- La modellazione del fascio gaussiano dipenderà e dal potere focale delle lenti a disposizione e dalla loro disposizione sul tavolo ottico.

Abbiamo allora provveduto a misurare con un metro a nastro larghezze e lunghezze delle aree libere sulla piattaforma, il perimetro della piattaforma stessa, prenderne nota e poi riprodurre tutto graficamente in scala (figura 4.2) ; abbiamo inoltre inventariato tutte le lenti presenti in laboratorio

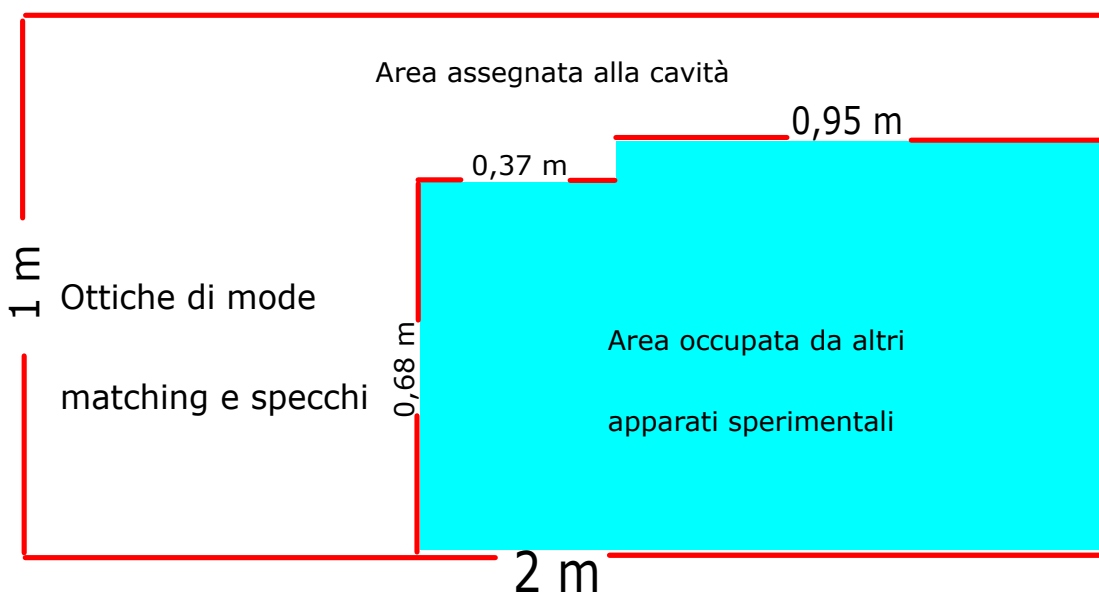


Figura 4.2: Disegno in scala del tavolo ottico. La cavità risonante sarà installata nel lungo e stretto corridoio situato nella parte superiore

4.2 Progettazione della cavità

Visti i limiti imposti dal tavolo ottico e gli scopi del nostro esperimento, la cavità ottica sarà installata nel lungo e stretto "corridoio" rappresentato nella parte alta del disegno (4.2). Infatti, dovendo modulare in radiofrequenza, la spaziatura tra modi di ordine superiore dovrà avere un'estensione in frequenza riconducibile a quella porzione dello spettro elettromagnetico; ciò si traduce nell'implementare un risonatore caratterizzato da round-trip nell'ordine dei metri. Per estrarre più facilmente il campo riflesso optiamo per una cavità ad anello in forma di triangolo isoscele (figura 4.3), con una base b di un'ordine di grandezza minore del lato L . Quest'ultimo accorgimento ha anche il vantaggio di minimizzare l'astigmatismo della cavità. Per renderla stabile uno degli specchi che la compongono (nel nostro caso quello posto al vertice superiore del triangolo) deve essere curvo e il rispetto della (2.45) dipenderà da una opportuna scelta del raggio di curvatura.

La grandezza su cui baseremo la progettazione del telescopio è il waist posseduto dalla cavità per specifici valori di round-trip e raggio di curvatura; entrando in cavità la locazione del waist, per ovvie ragioni di simmetria, sarà posta a metà strada tra i due specchi piani situati agli estremi della base. Nei paragrafi sottostanti riportiamo i calcoli teorici svolti per determinare il raggio di curvatura dello specchio e il beam waist. In appendice B è possibile trovare un listato del foglio SMATH contenente i calcoli di tutte le grandezze derivate (range di Rayleigh, Gouy phase, raggio di curvatura del fascio presso lo specchio curvo ecc. ecc.) che caratterizzano la cavità risonante.

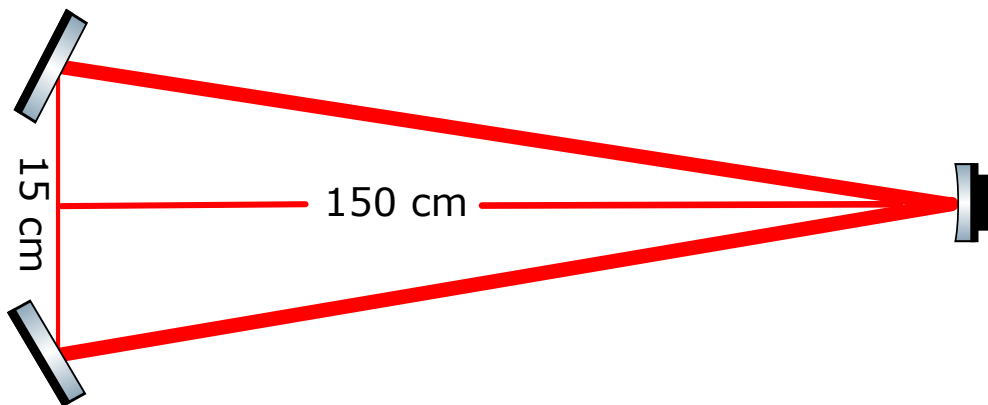


Figura 4.3: Disegno della cavità triangolare montata sul tavolo ottico

Condizione di stabilità

Il primo passo da fare nella progettazione della cavità è determinarne la condizione di stabilità. Questa può essere fatto scrivendo la matrice ABCD della cavità e risolvere il problema agli autovettori per cui la luce venga periodicamente rifocalizzata senza fuoriuscire dalla cavità. Così facendo[3] riottenremo la condizione (2.45) ricavata nella sezione 2.2.1. Per una cavità triangolare formata da due specchi piani e uno curvo questa prende la semplice forma

$$0 \leq \left(1 - \frac{p}{2R}\right) \leq 1 \quad (4.1)$$

dove $d = \frac{p}{2}$. Ci riferiremo d'ora in avanti al fattore g dello specchio curvo con g_3

Nel nostro caso ($p \simeq 3,15m$) affinché la cavità sia stabile il raggio di curvatura dello specchio curvo deve soddisfare:

$$R \geq \frac{p}{2} \rightarrow R \geq 1,59m$$

. Per gli scopi dell'esperimento, la spaziatura tra modi di ordine superiore da noi ricercata è di circa 20 MHz e gli specchi disponibili in laboratorio hanno raggi di curvatura pari a 2 m, 4 m 6 m. Un accordo tra queste tre limitazioni la si ottiene utilizzando uno specchio con $R = 6m$. Si ottiene un HOMs pari a circa 16,29MHz (cfr. Appendice B).

4.2.1 Beam waist per una cavità piano concava

Consideriamo il diagramma di stabilità: la cavità che stiamo progettando può essere considerata (in virtù di un argomento dello stesso argomento di simmetria di cui sopra) di tipo piano-concava, cioè $R_1 = \infty$. Quindi le quantità (2.42) , (2.43) e (2.44) si riducono a

$$w_2^2 = \frac{R\lambda}{\pi} \sqrt{\frac{1}{g_2(1-g_2)}} \quad (4.2)$$

$$w_0^2 = w_1^2 = \frac{d\lambda}{\pi} \sqrt{\frac{g_2}{1-g_2}} \quad (4.3)$$

Esplicitando il fattore g ed essendo $-d = p/2$ abbiamo

$$w_2^2 = \frac{R\lambda}{\pi} \sqrt{\frac{p}{2R-p}} \quad (4.4)$$

$$\begin{aligned} w_0^2 &= \frac{\lambda}{\pi} \sqrt{\frac{p}{2} \left(R - \frac{p}{2}\right)} \\ &= \frac{\lambda}{\pi} \sqrt{\frac{p^2}{4} \left(\frac{2R}{p} - 1\right)} \end{aligned}$$

da cui segue

$$w_0 = \sqrt{\frac{p\lambda}{2\pi} \left(\frac{2R}{p} - 1 \right)^{1/4}}$$

Sostituendo i valori reali di p e R otteniamo un $w_0 \simeq 946\mu m$.

4.3 Progettazione del telescopio

Alla luce dei risultati dei paragrafi precedenti, il problema da affrontare ora è comprendere come e quali lenti posizionare sul tavolo ottico per ottenere un fascio gaussiano dotato approssimativamente delle seguenti caratteristiche:

- $w_0 = 946\mu m$ presso il punto mediano tra i due specchi posti alla base della cavità e a una distanza dalla sorgente compatibile con lo spazio a disposizione.
- Esibisca nella parte intermedia della sua propagazione verso la cavità due "stozzature" del waist affinché riesca ad entrare senza essere troncato nelle aperture del MEO (2mm) e della LEO(1cm) .

La risposta a questo quesito si ottiene risolvendo un sistema di equazioni descrivibile attraverso il formalismo della matrice ABCD. Esiste un software chiamato JaMmt in grado di determinare, inserendo nel computer le caratteristiche delle lenti possedute e i parametri di input del fascio, le componenti di questa matrice ovvero, a valle, le possibili configurazioni del sistema che modellino il fascio secondo i nostri obiettivi. Dato che le configurazioni generate dal software in automatico non si adattavano ai limiti imposti dal tavolo abbiamo optato per una simulazione manuale; modificando finemente di volta in volta le posizioni delle lenti siamo riusciti ad ottenere un fascio disaccoppiato dalla cavità di circa lo 0,2% entro lo spazio disponibile. Sulla base di questa simulazione si è poi passati a montare le lenti del telescopio una alla volta sul tavolo ottico e a scansionare il fascio a varie distanze dalla n-esima lente con un beam analyzer (vedi figura 4.5) prodotto dalla Thorlabs. Questo sensore permette di misurare le dimensioni del fascio nel piano xy attraverso un'interfaccia software (ThorlabsBeam 7.0) (vedi figura 4.4). Eseguendo un fit dei dati secondo la legge (2.2) potremo confrontarli con i risultati della simulazione JaMmt del sistema complessivo e accertarci sulla posizione e sulla dimensione finali del waist.

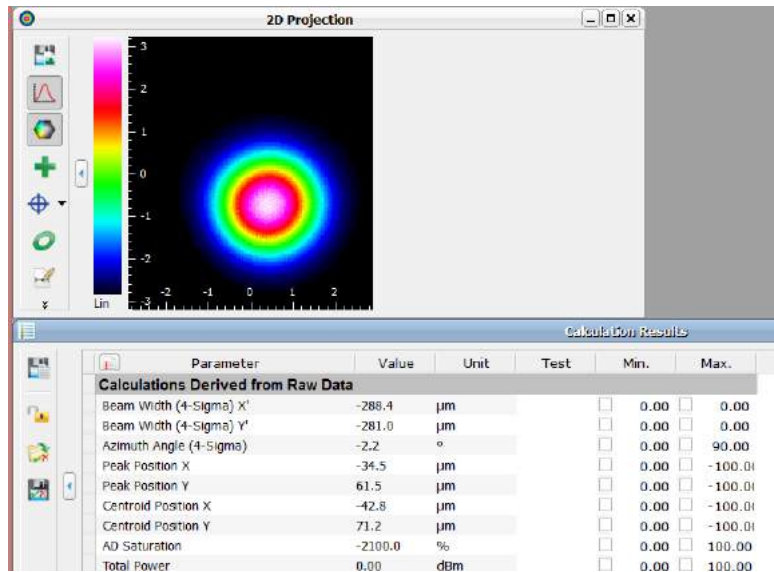


Figura 4.4: La finestra di dialogo del software Thorlabs 7.0 per il controllo del beam scanner e la misura della taglia del fascio



Figura 4.5: Il sensore Thorlabs per il beam scan[31]

4.3.1 Stima del waist iniziale

I parametri di input del fascio si ottengono misurando la dimensione del fascio nel piano ortogonale alla direzione di propagazione col beam analyzer a diverse posizioni da un riferimento fisso, nel nostro caso il primo beam splitter posto di seguito al laser (cfr. figura 4.12). Poiché le posizioni z presso cui registreremo via software le dimensioni del fascio soddisfano $z \gg z_R$ l'espressione (2.2) diventa lineare:

$$w(z) = w_0 \frac{z}{z_R} \quad (4.5)$$

Eseguendo un fit $ax + b$ dove $a = \frac{w_0}{z_R}$ e b è un offset sulla posizione del waist rispetto al riferimento scelto, si può ottenere z_R nel seguente modo:

$$z_R^2 = \frac{w_0^2}{a^2} \rightarrow z_R \frac{\pi w_0^2}{\lambda} = \frac{w_0^2}{a^2} \rightarrow z_R = \frac{\lambda}{\pi a^2} \quad (4.6)$$

Usando la definizione è immediato ricavare da z_R il w_0 , la cui posizione sarà data da

$$z_0 = z_R \left(1 - \frac{b}{w_0} \right) \quad (4.7)$$

Riportiamo nella tabella seguente alcuni diametri del fascio per altrettante distanze dal beam splitter

Distanza dal BS (mm)	Diametro fascio X (μm)	Diametro fascio Y (μm)
22	0,935	0,980
62	1,260	1,365
102	1,650	1,750
122	1,814	1,850
142	2,024	2,140
182	2,330	2,486

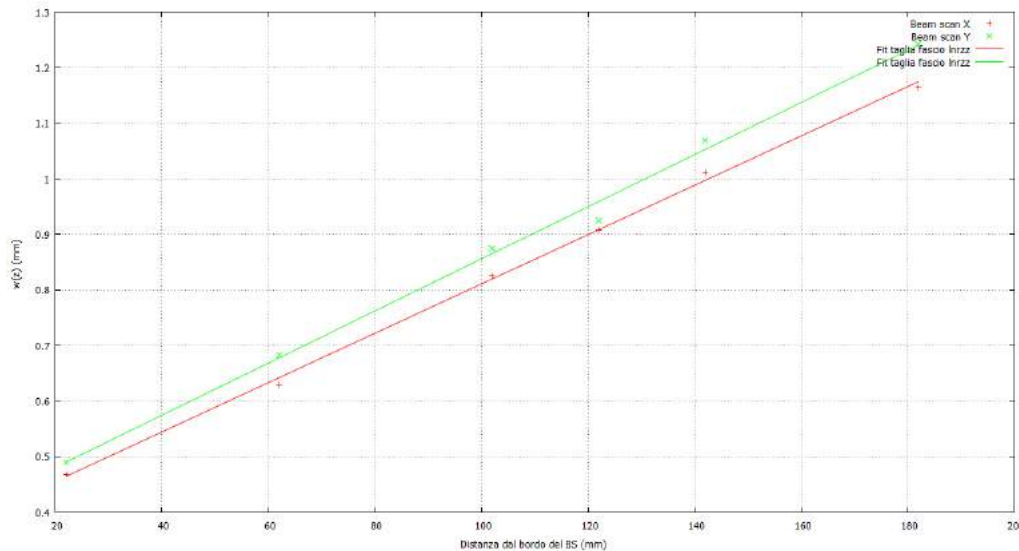


Figura 4.6: Grafico del fit lineare utilizzato per determinare posizione e dimensione del waist iniziale

Nella tabella seguente riportiamo i risultati del fit lineare: ¹

Risultati fit beam scan piano XY			
$a_X \pm \delta a_X$	$b_X \pm \delta b_X$ (mm)	$a_Y \pm \delta a_Y$	$b_Y \pm \delta b_Y$ (mm)
$4,44 \cdot 10^{-3} \pm 9 \cdot 10^{-5}$	$0,367 \pm 0,010$	$4,69 \cdot 10^{-3} \pm 2 \cdot 10^{-5}$	$0,387 \pm 0,018$

che inseriti in (4.6) e (4.7) danno²

Parametri fascio input ricavati dal fit			
$w_{0X} \pm \delta w_{0X}(\mu\text{m})$	$z_{0X} \pm \delta z_{0X}$ (mm)	$w_{0Y} \pm \delta w_{0Y}(\mu\text{m})$	$z_{0Y} \pm \delta z_{0Y}$ (mm)
77 ± 2	$-24,02 \pm 2,83$	72 ± 1	$-26,21 \pm 4,83$

4.3.2 Simulazione con JaMmT

Inserendo i valori iniziali del waist stimati nel paragrafo precedente e le caratteristiche delle lenti scelte per costruire il telescopio otteniamo la seguente disposizione

¹i diametri sono stati divisi per due dato che (2.2) si riferisce al raggio

²La posizione del waist tiene conto di un offset indotto dall'estensione del beam splitter (circa 4cm)

Simulazione JAMMT				
Elemento ottico	Distanza dal primo BS	Potere focale (nominale)	z_0	w_0
lente 1	0,136 m	112 mm (100 mm)	0,48 m	168,79 μm
lente 2	0,719 m	168 mm (150 mm)	1,05 m	256,33 μm
lente 3	1,119 m	-112 mm (-100 mm)	1,12 m	88,87 μm
lente 4	1,412 m	280 mm (250 mm)	3,15 m	924,26 μm

La posizione delle lenti ha come riferimento il centro del primo beam splitter ; i valori reali delle focali per le ottiche di mode-matching si discostano da quello nominale fornito dal produttore per un 12%, valore verificato attraverso una sottrazione/addizione cumulativa tra offset simulati e misurati. Nella figura 4.7 è riportato uno screenshot della simulazione JaMmt.

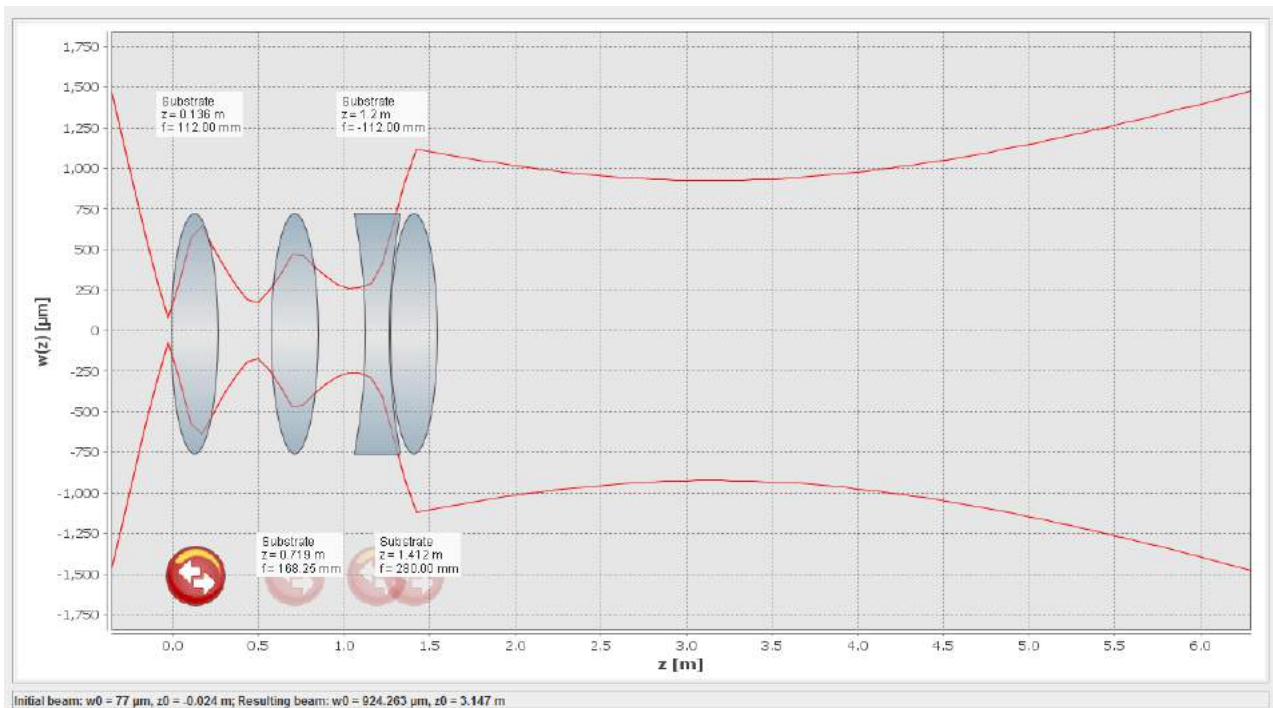


Figura 4.7: La simulazione Jammt del telescopio montato sul tavolo. E' formato dalle 4 lenti riportate in ?? . I parametri del fascio di output sono $w_0 = 924,26\mu\text{m}$ e $z_0 = 3,15\text{m}$ laddove la cavità ha un waist di $946\mu\text{m}$ sito a $2,87\text{m}$ dal primo BS (cfr. figura 4.12)

4.3.3 Beam scan del fascio lente per lente

Nelle tabelle seguenti riportiamo i parametri del fascio modificato dall'effetto di ciascuna lente. Poiché per le lenti 1,2 e 4 non vale più l'approssimazione lineare abbiamo basato il fit su (2.2); per la lente divergente invece è di nuovo possibile ricavare i parametri del fascio utilizzando l'approssimazione lineare per $w(z)$.

Lente 1

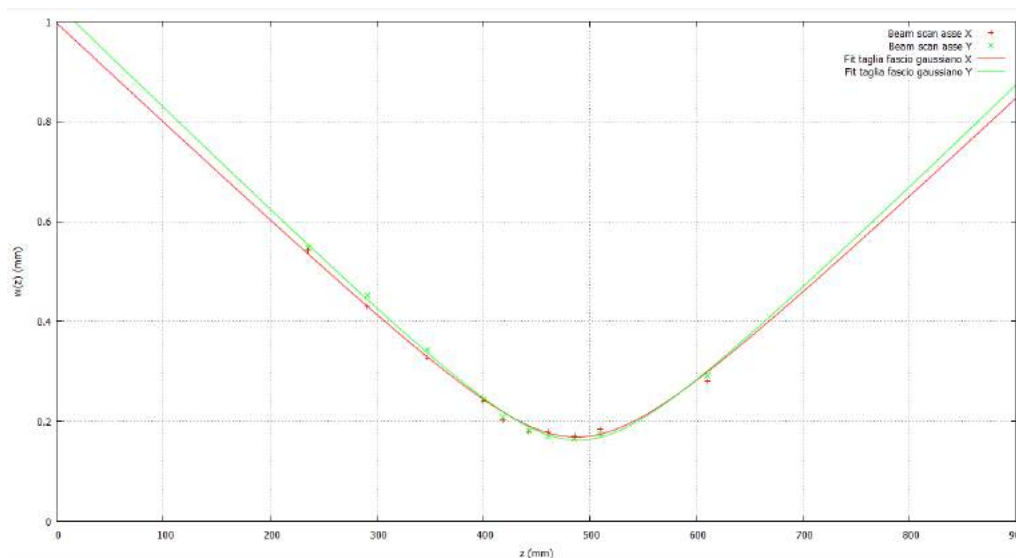


Figura 4.8: Fit $w_0 \sqrt{1 + \left(\frac{(x-z_0)\lambda_0}{\pi w_0^2}\right)^2}$ del fascio modificato dalla prima lente

Risultati fit beam scan piano XY

Distanza lente dal BS(cm)	$w_{0X} \pm \delta w_{0X} (\mu\text{m})$	$z_{0X} \pm \delta z_{0X} (\text{mm})$	$w_{0Y} \pm \delta w_{0Y} (\mu\text{m})$	$z_{0Y} \pm \delta z_{0Y} (\text{mm})$
13,6	$168,23 \pm 3,31$	$464,87 \pm 2,89$	$162,24 \pm 2,22$	$466,08 \pm 1,99$

Lente 2

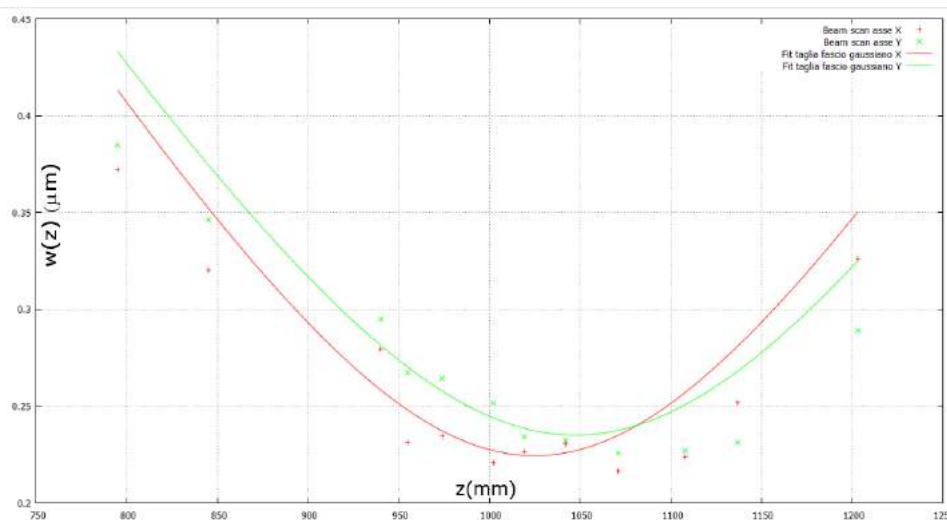
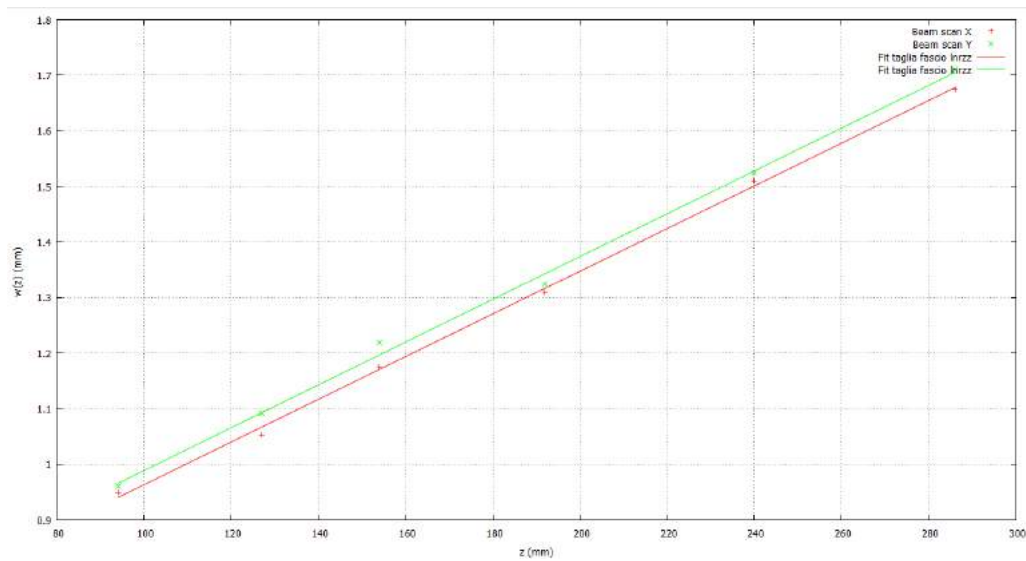


Figura 4.9: Fit $w_0 \sqrt{1 + \left(\frac{(x-z_0)\lambda_0}{\pi w_0^2}\right)^2}$ del fascio modificato dalla seconda lente

Risultati fit beam scan piano XY

Distanza lente dal BS (cm)	$w_{0X} \pm \delta w_{0X} (\mu\text{m})$	$z_{0X} \pm \delta z_{0X} (\text{mm})$	$w_{0Y} \pm \delta w_{0Y} (\mu\text{m})$	$z_{0Y} \pm \delta z_{0Y} (\text{mm})$
71,9	$224,31 \pm 10,05$	$1001,8 \pm 9,5$	$234,97 \pm 10,31$	$1024,31 \pm 10,53$

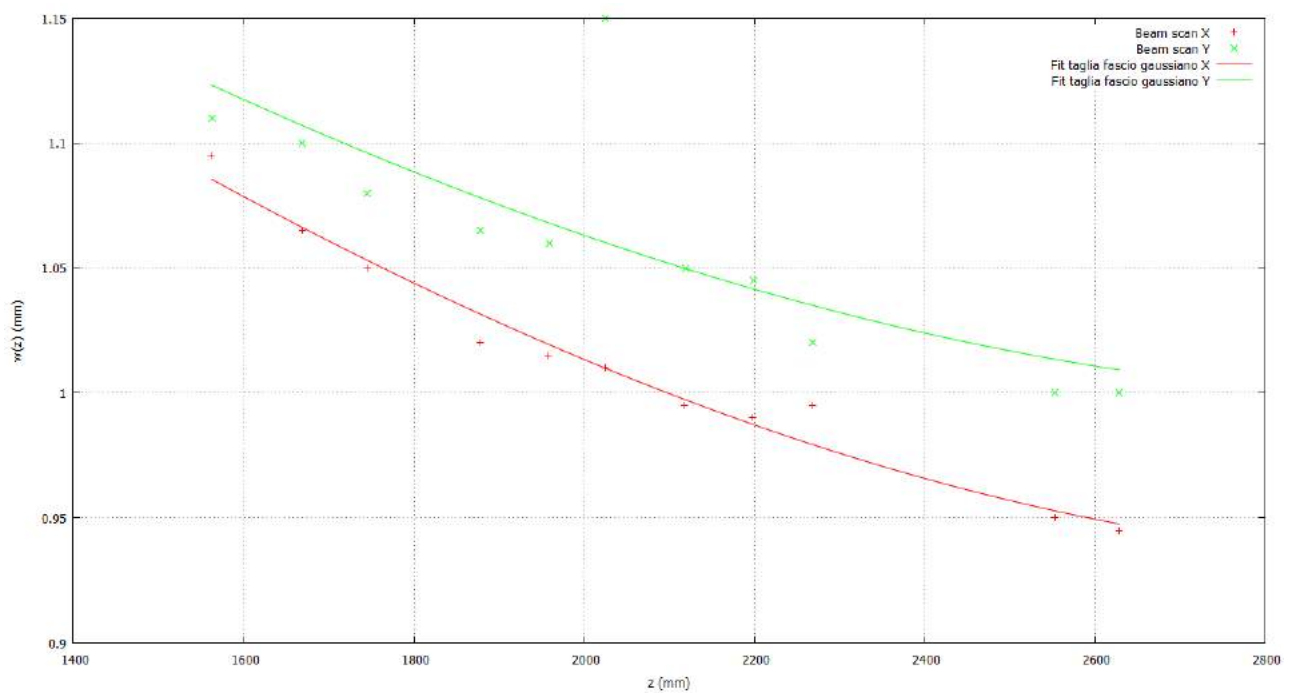
Lente 3

Figura 4.10: Fit lineari $ax + b$ del fascio modificato dalla terza lente

Risultati fit beam scan piano XY

Distanza lente dal BS (cm)	$w_{0X} \pm \delta w_{0X}$ (μm)	$z_{0X} \pm \delta z_{0X}$ (mm)	$w_{0Y} \pm \delta w_{0Y}$ (μm)	$z_{0Y} \pm \delta z_{0Y}$ (mm)
122	$88,17 \pm 1,46$	$1136,17 \pm 30,61$	$87,95 \pm 2,30$	$1130,17 \pm 45,47$

Lente 4

Figura 4.11: Fit $w_0 \sqrt{1 + \left(\frac{(x-b)\lambda_0}{\pi w_0^2}\right)^2}$ del fascio modificato dalla quarta lente

Risultati fit beam scan piano XY

Distanza lente dal BS (cm)	$w_{0X} \pm \delta w_{0X} \mu m$	$z_{0X} \pm \delta z_{0X} (mm)$	$w_{0Y} \pm \delta w_{0Y} \mu m$	$z_{0Y} + \delta z_{0Y}(mm)$
141.2	$932,47 \pm 7,14$	$3092,68 \pm 39,61$	$997,31 \pm 30,34$	3084 ± 216

Dal confronto tra caratteristiche misurate e simulate del waist emerge un accordo parziale ma accettabile per i fini del nostro esperimento (che s’incentra proprio sul disaccordo tra cavità e fascio in ingresso) data la lunghezza del range di Rayleigh. Passiamo ora a calcolare il disaccordo tra i parametri del fascio modificato dall’ultima lente e la cavità. Per il waist abbiamo:

$$\frac{\delta w_{0X}}{946\mu m} = \frac{(946 - 932,47)\mu m}{946\mu m} \simeq 0,014 \tag{4.8}$$

$$\frac{\delta w_{0Y}}{946\mu m} = \frac{(997,31 - 946)\mu m}{946\mu m} \simeq 0,054 \tag{4.9}$$

mentre per la sua posizione si ha:

$$\frac{\delta z_{0X}}{2z_R} = \frac{(3092,68 - 2870)mm}{2 \cdot 2,64m} \simeq 0,042 \tag{4.10}$$

$$\frac{\delta z_{0Y}}{2z_R} = \frac{(3084 - 2870)mm}{2 \cdot 2,64m} \simeq 0,04 \tag{4.11}$$

4.3.4 Schema generale dell’apparato sperimentale e scansione della cavità

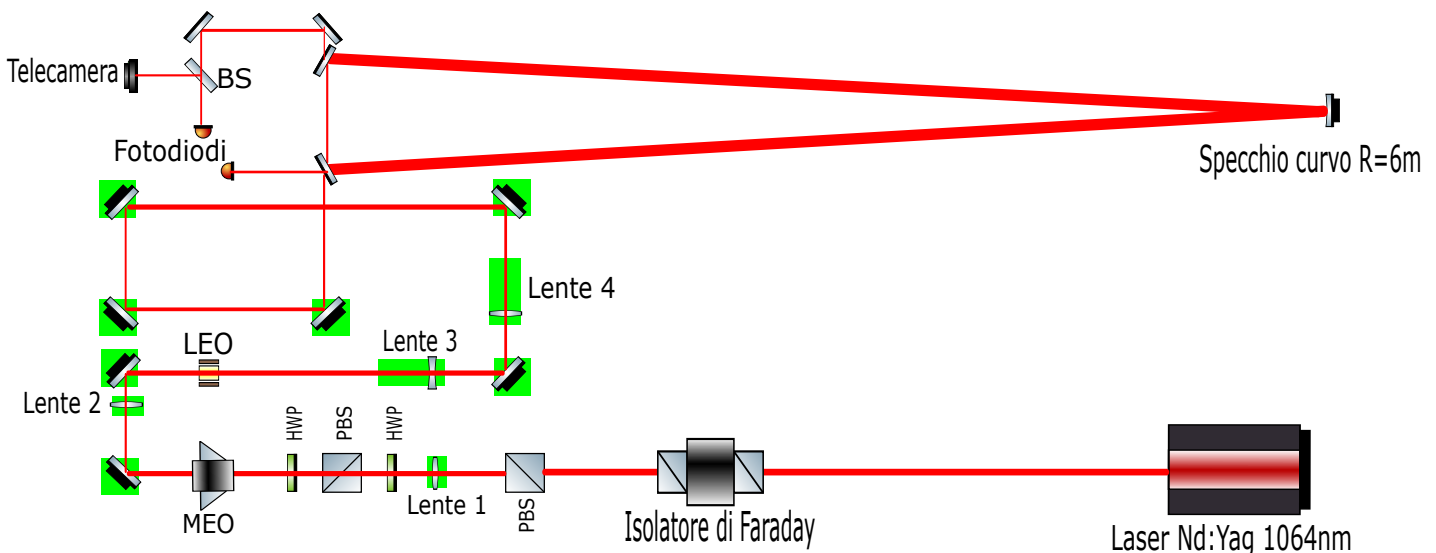


Figura 4.12: Disegno del set-up ottico. Le aree colorate in verde rappresentano la superficie occupata sul tavolo ottico dai supporti delle lenti e degli specchi. L’isolatore di Faraday è utilizzato per prevenire la retro-riflessione della luce verso il laser. Il modulatore elettro-ottico (MEO) è impiegabile per la stabilizzazione della cavità. I PBS e le lamine a mezzo d’onda permettono di entrare in polarizzazione S nel MEO e in P nella cavità. La LEO è posizionata a circa un metro dal primo PBS. La LEO è posta a un metro dal primo BS e a 1,87 m dal punto mediano della base della cavità triangolare

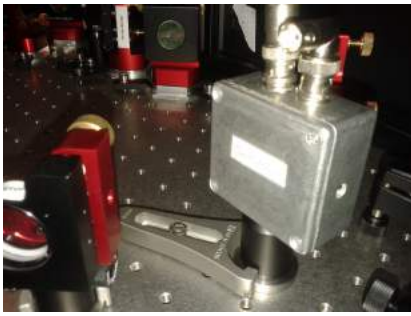


Figura 4.13: Il fotodiode utilizzato per la lettura del segnale trasmesso /riflesso



Figura 4.14: La telecamera CCD utilizzata per monitorare il segnale trasmesso

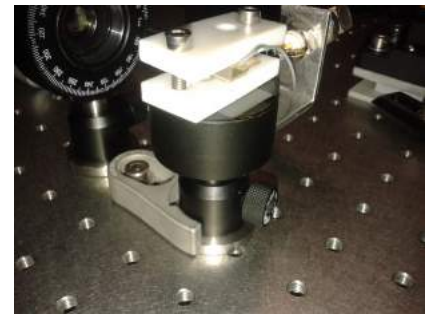


Figura 4.15: La LEO montata sul supporto isolante rialzato

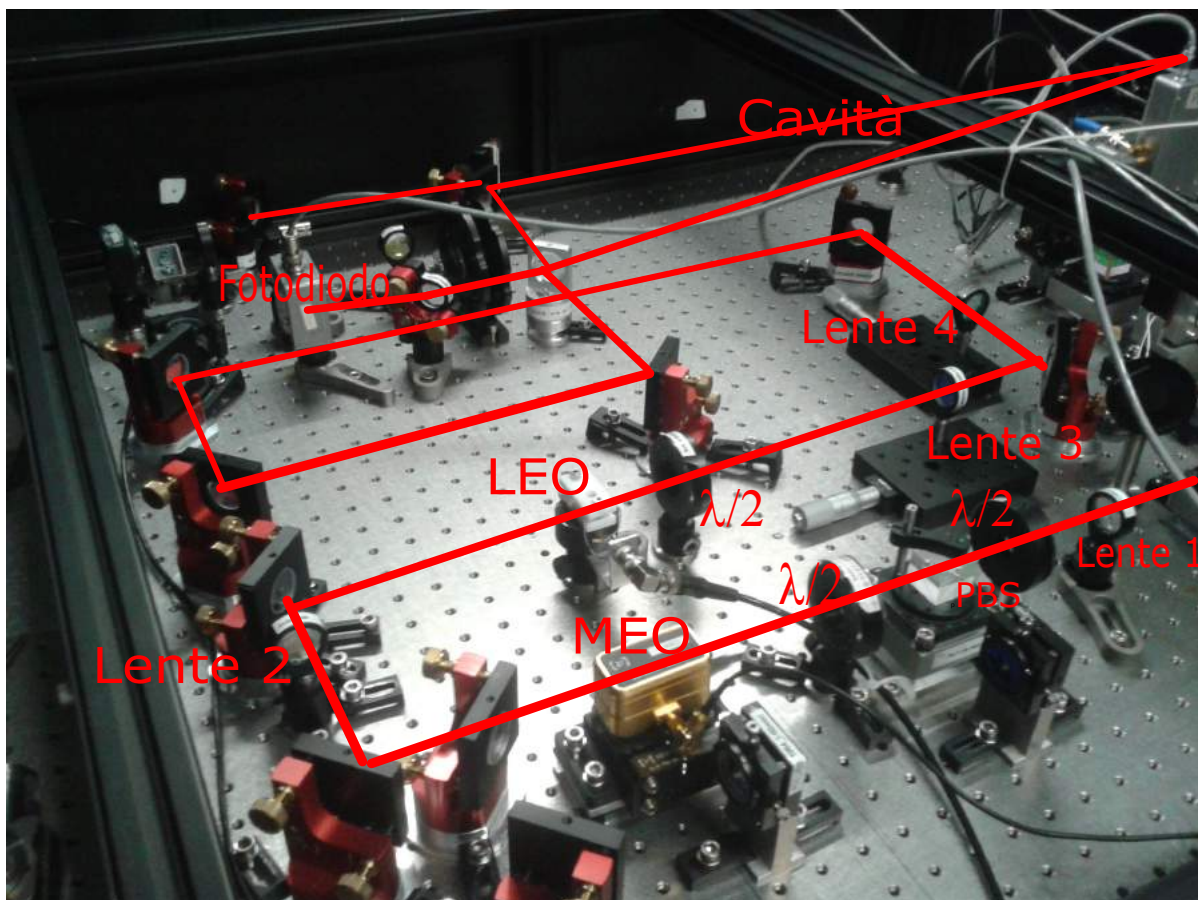


Figura 4.16: Foto del set-up nella sua forma finale

Una volta montato il set-up secondo lo schema riportato in figura 4.12, il passo seguente è stato accoppiare il fascio in ingresso al modo spaziale longitudinale della cavità; questo è stato possibile regolando finemente in catena la posizione dello spot del laser sui tre specchi mediante le apposite manopole annesse ai montaggi. Per agevolare l'operazione ci siamo serviti, oltre che della card fluorescente (la luce laser con cui lavoriamo è invisibile all'occhio umano), di una telecamera posta in trasmissione alla cavità. La lunghezza della cavità cambia infatti costantemente nel tempo a causa delle vibrazioni meccaniche e termiche degli specchi; è allora utile variare la lunghezza della cavità attiva del laser applicando un segnale triangolare in tensione all'ingresso PZT. In questo modo in un qualche momento nel tempo la cavità attiva possiederà la lunghezza corrispondente

all'emissione di un segnale risonante nella cavità passiva. L'allineamento è fatto in modo da ridurre i picchi del modo HG_{01} e HG_{10} il più possibile. In tabella sono riportate le caratteristiche della rampa di scansione:

Rampa triangolare		
Frequenza (Hz)	Ampiezza (V)	Off-set (V)
20	0,4	0,28

Questo segnale è fatto passare attraverso un amplificatore ad alta tensione con fattore di guadagno 100, diviso in due e poi inviato al laser e all'oscilloscopio.



Figura 4.17: Il generatore di segnali da cui è emessa la rampa triangolare



Figura 4.18: L'amplificatore ad alta tensione



Figura 4.19: L'oscilloscopio per la lettura dei segnali provenienti dai fotodiodi e dal generatore

Capitolo 5

Acquisizione e analisi dei dati sperimentali

Una volta collegati i fotodiodi al sistema di acquisizione siamo pronti a registrare lo spettro in frequenze del risonatore. Sottolineiamo che pur avendo fin qui discusso di mode-matching, descritto un layout sperimentale utilizzabile allo scopo e accennato a tecniche di misura (lock-in e PDH), i dati che si vanno ad acquisire non saranno utilizzati per eseguire un accoppiamento laser-cavità (esula dagli scopi del presente lavoro di tesi) ma soltanto per testare il funzionamento della LEO.

Gli spettri prodotti dalle cavità risonanti sono strutture complesse e intricate e non è immediato riconoscerli il picco relativo a un determinato modo; quindi, prima di poter misurare l'effetto indotto dalla LEO sull'ampiezza del picco HG02 occorre esaminare con attenzione la risposta della cavità al segnale in ingresso.

Questo capitolo si divide in due parti: nella prima presentiamo al lettore una classificazione dettagliata dei modi in frequenza dello spettro della cavità, oltre che derivare la finesse della medesima; individuato l'HG02, nella seconda parte mostriamo come è stato possibile rivelare la presenza dell'effetto modulante indotto dalla LEO mediante un codice scritto in Python. Con esso abbiamo analizzato il segnale riflesso dalla cavità quando si applica alla LEO una certa tensione alternata a bassa frequenza (regime quasi-statico); la variazione percentuale misurata dell'ampiezza del picco sarà confrontabile anche se non perfettamente sovrapponibile a quella calcolata per via teorica nel foglio S-Math riportato in appendice C.

5.1 Caratterizzazione dello spettro della cavità

5.1.1 Calibrazione tempo-frequenze dello spettro acquisito

Gli spettri riflesso e trasmesso della cavità sono visualizzabili al computer grazie al sistema di acquisizione PICOSCOPE di cui riportiamo i settings per l'acquisizione. Sul canale 1 del software annesso al modulo (e dell'oscilloscopio) leggiamo il voltaggio applicato all'attuatore piezo-elettrico che permette di scansionare la cavità ottica mentre sul 2 visualizziamo il segnale trasmesso dalla cavità, misurato tramite il fotodiodo in figura 4.13.

Impostazioni del modulo PICOSCOPE		
Sample (kS)	Scaling ordinate (mV)	Tempo (ms/div)
200	50	50

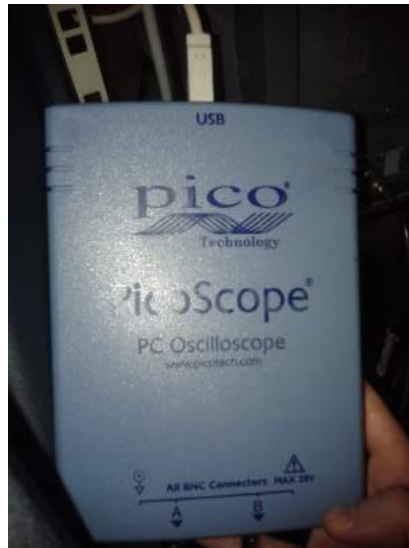


Figura 5.1: Il modulo di acquisizione PICOSCOPE

In polarizzazione P ed S, lo spettro trasmesso ha ,rispettivamente, gli andamenti mostrati nelle figure 5.2 e 5.3.

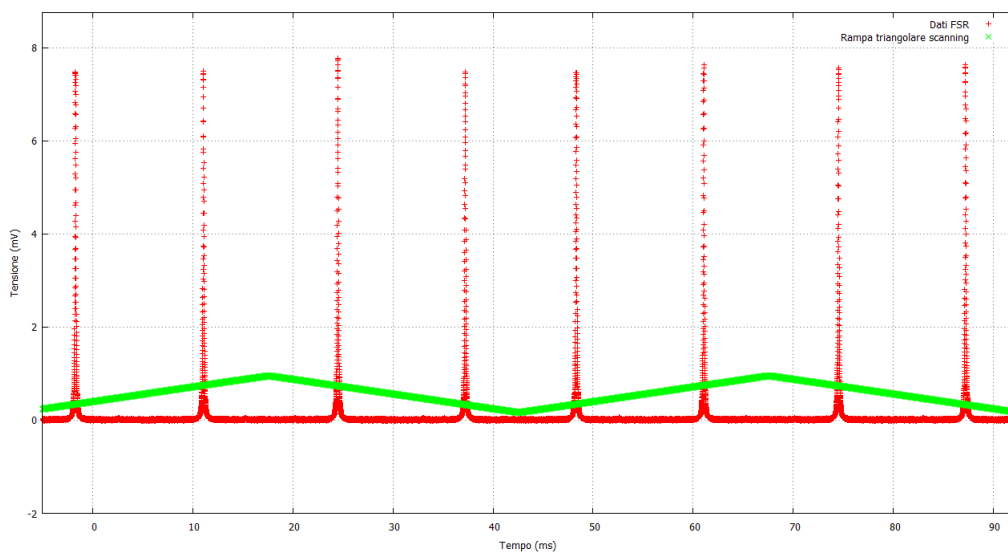


Figura 5.2: Una sequenza di Free spectral range della cavità ottenuta dopo averla scansionata con una rampa triangolare in tensione in polarizzazione P

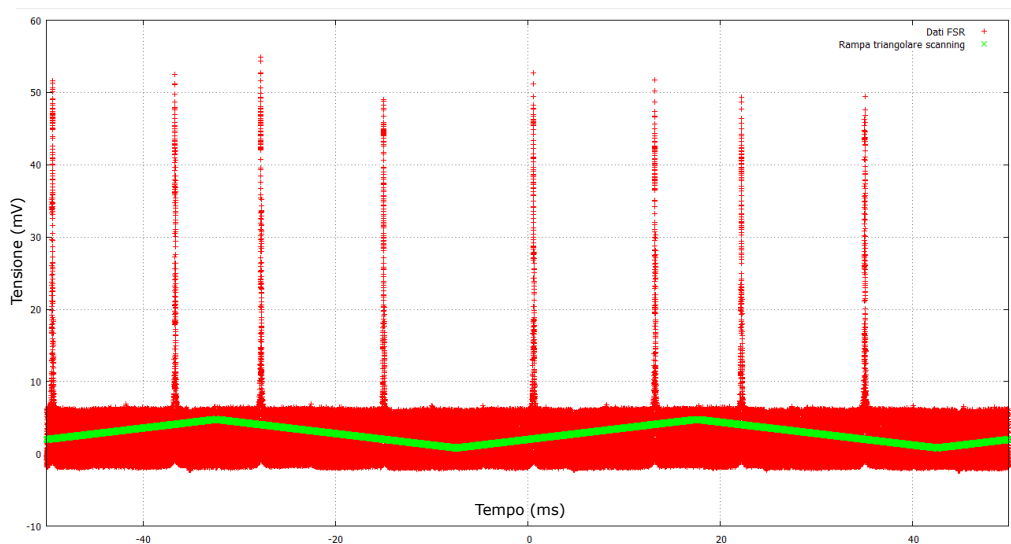


Figura 5.3: Free spectral range in polarizzazione S

Poiché il sistema riporta sullo schermo lo spettro in funzione del tempo, per ottenerne uno in frequenza occorre effettuare una calibrazione dei dati acquisiti. Per farlo è necessario conoscere due quantità:

1. La pendenza m della rampa triangolare
2. Un fattore di conversione tensione frequenza C

Per ottenere la quantità 1. abbiamo eseguito un fit lineare su un tratto di rampa triangolare a pendenza positiva. Riportiamo in tabella i risultati del fit con relativo grafico (vedi figura 5.4)

Risultati fit lineare $mx + q$	
[H]	
	$m \pm \sigma_m (\frac{V}{ms})$
	$q \pm \sigma_q (V)$
	$3,1614 \cdot 10^{-2} \pm 4 \cdot 10^{-6}$
	$3,9860 \cdot 10^{-1} \pm 4 \cdot 10^{-5}$

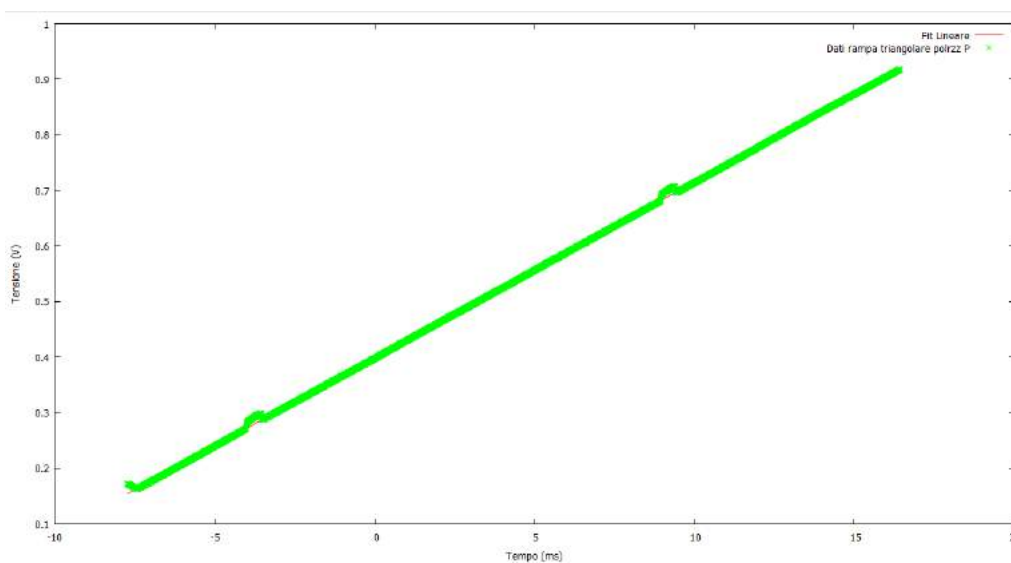


Figura 5.4: Fit lineare rampa triangolare

La formula di conversione tempo-frequenza è quindi data da¹:

$$F(t) = C(3,1614 \frac{V}{ms} \cdot t) \quad (5.1)$$

Per calcolare il fattore C abbiamo misurato la distanza T (pari a circa 12,74 ms) tra due picchi della figura 5.2 che occupino la stessa porzione di rampa, l'abbiamo inserita in $F(t)$ e posto quest'ultima uguale al FSR della cavità. Matematicamente abbiamo:

$$C = \frac{95,06MHz}{12,74ms \cdot 3,16136V/ms} \simeq 2,361 \frac{MHz}{V} \quad (5.2)$$

cioè

$$F(t) = 7,464MHz/V \cdot t \quad (5.3)$$

5.1.2 Il modo fondamentale

Ricavata la calibrazione passiamo ad analizzare le caratteristiche dei modi assiali nelle polarizzazioni P ed S, adattando ai dati una funzione lorentziana del tipo:

$$W(x) = \frac{A}{[(x - x_0)^2 + B]} + y_0 \quad (5.4)$$

dove A , B , x_0 e y_0 sono i parametri del fit, è possibile ricavare la linewidth della cavità e la finesse.

Polarizzazione P

Inserendo i dati di un picco della figura 5.2 nel software GNU PLOT ed eseguendo il fit lorentziano (5.4), il risultato ottenuto è riportato nella figura 5.5.

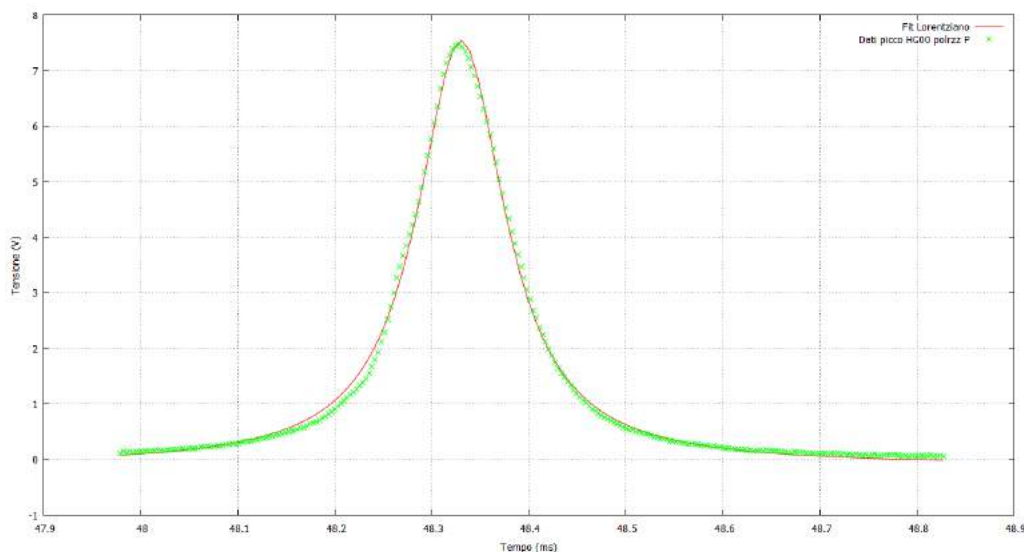


Figura 5.5: Fit lorentziano polarizzazione P

¹il fattore moltiplicativo cento deriva dal guadagno dell'amplificatore

Nella tabella seguente riportiamo i risultati del fit

Risultati del fit lorentziano		
$A \pm \sigma_A (V \cdot ms^2)$	$B \pm \sigma_B (ms^2)$	$x_{picco} \pm \sigma_{x_{picco}} (ms)$
$2,33 \cdot 10^{-2} \pm 2 \cdot 10^{-4}$	$3,05 \cdot 10^{-3} \pm 3 \cdot 10^{-5}$	$48,3302 \cdot 10^{-2}$

L'ampiezza a mezza altezza si ottiene invece calcolando la quantità $2\sqrt{B}$. Sostituendola in (5.3) otteniamo

$$FWHM_{polp} = (824,3 \pm 4,8)kHz$$

dove l'errore è stato ottenuto propagando quello fornito dal fit e convertendolo in frequenza.

Polarizzazione S

Acquisito lo spettro in polarizzazione S ripetiamo la procedura seguita per la polarizzazione P.

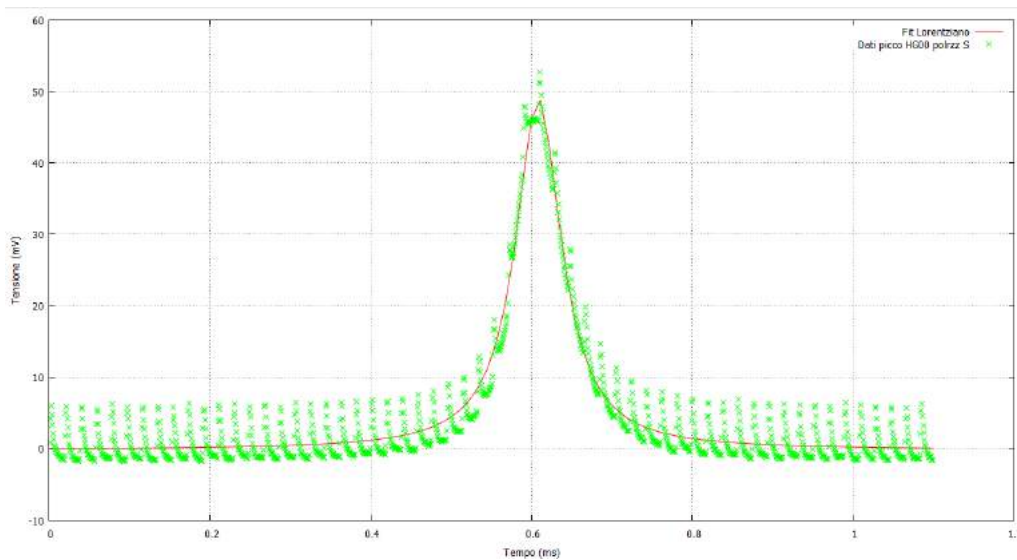


Figura 5.6: Il modo fondamentale della cavità in polarizzazione S

Risultati del fit lorentziano		
$A \pm \sigma_A (mV \cdot ms^2)$	$B \pm \sigma_B (ms^2)$	$x_{picco} \pm \sigma_{x_{picco}} (ms)$
$6,0 \cdot 10^{-2} \pm 10^{-3}$	$1,22 \cdot 10^{-3} \pm 3 \cdot 10^{-5}$	$6,086 \cdot 10^{-1} \pm 2 \cdot 10^{-3}$

La FWHM che si ottiene è

$$FWHM_{pols} = (521,45 \pm 6,69)kHz \tag{5.5}$$

Ricaviamo la finesse e le round-trip losses della cavità per ciascuna polarizzazione utilizzando la formula:

$$F = \frac{FSR}{FWHM} \tag{5.6}$$

Abbiamo allora per la polarizzazione P:

Risoluzione cavità in polrzz.P	
Finesse	Round-trip losses
$115,32 \pm 0,66$	$0,0545 \pm 0,0003$

e per quella S:

Risoluzione cavità in polrzz.S	
Finesse	Round-trip losses
$182,30 \pm 2,34$	$0,0345 \pm 0,0004$

In assenza di perdite ulteriori possiamo stimare nelle polarizzazioni P ed S, a partire dal principio di conservazione $R + T = 1$ e dalla versione approssimata della formula (2.27)

$$\frac{2\pi}{\delta_{rt}} \quad (5.7)$$

dove

$$\delta_{rt} = 3 - 2R_{\text{specchiopiano}} - R_3 \quad (5.8)$$

, i seguenti valori per i coefficienti di riflettività e trasmissione (chiamati R_3 e T_3) dello specchio curvo.

Riflettività/trasmissione in pol.P	
R_3	T_3
0,9675	0,0325

Riflettività/trasmissione in pol.S	
R_3	T_3
0,9715	0,0285

Le riflettività misurate al potenziometro dei tre specchi utilizzati per costruire la cavità in polarizzazione P ed S sono:

Specchio	Riflettività misurate degli specchi della cavità	
	Polarizzazione P	Polarizzazione S
Piano ($\times 2$)	0,989	0,997
Curvo	0,9995	0,9995

Questa discrepanza è spiegabile assumendo una perdita all'incirca del 3%. Rimandiamo all'appendice B per maggiori dettagli e il calcolo del coefficiente.

5.1.3 Analisi dei modi di ordine superiore

Le cavità triangolari introducono uno shift di fase π addizionale per i modi di ordine superiore HG_{mn} aventi m dispari. Questo shift sposta la loro frequenza di risonanza di mezzo free spectral range. Per questi modi l'equazione (2.46) diventa :

$$\nu_{qnm} = FSR \cdot [q + (m + n + 1) \arccos(\sqrt{g_3}) + \frac{1}{2}] \quad \text{con} \quad m = 2l + 1 \quad (5.9)$$

I picchi contenuti tra due modi assiali sono ora il prodotto di una sovrapposizione tra più "pettini" di modi di ordine superiore. Poiché i picchi relativi ai modi di ordine superiore sono molto meno intensi di quelli del modo fondamentale per visualizzarli occorre acquisire uno spettro riflesso dalla cavità con un diverso fattore di scala. Quello che si ottiene per un singolo free spectral range è riportato nella figura 5.7 :

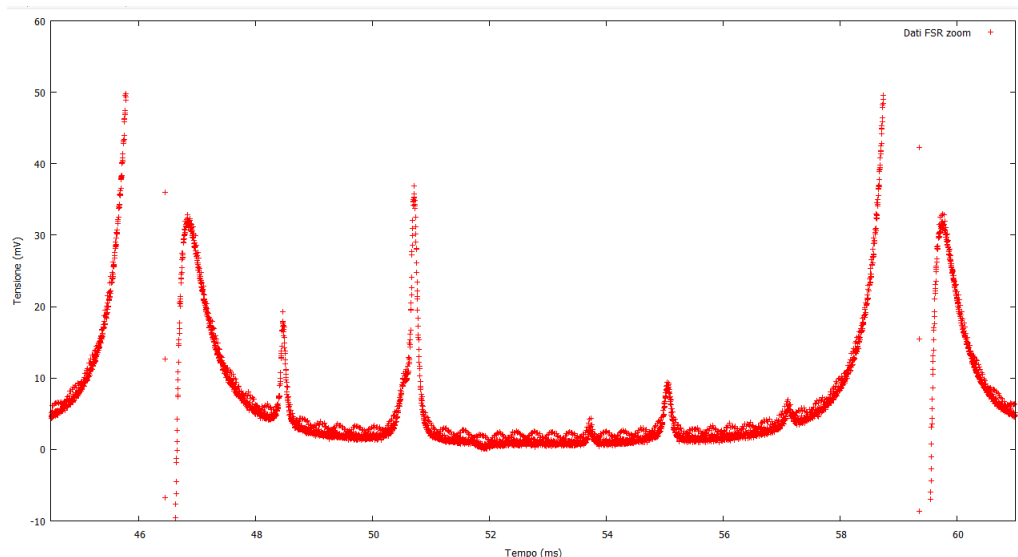


Figura 5.7: I picchi dello spettro riflesso dalla cavità. Nel prosieguo del paragrafo mostreremo le procedure necessarie per mapparli

Nonostante la split (5.9) lo spettro non sembra mostrare due pettini separati; ciò è dovuto al fatto che per una particolare e sfortunata combinazione, il valore del free spectral range della cavità è molto prossimo a un multiplo intero della spaziatura tra modi di ordine superiore. Questo fa sì che modi di ordine elevato appartenenti al modo assiale q-n siano sovrapposte all'interno di picchi più intensi appartenenti a un modo assiale contiguo: nel nostro caso, dunque, la degenerazione tra modi di ordine superiore orizzontali e verticali è solo parzialmente rimossa.

Passiamo a studiare i picchi più rilevanti che compaiono nello spettro adattandovi ancora una volta un profilo lorentziano. Alla luce di quanto detto poc'anzi sulla sovrapposizione delle componenti in frequenza del FSR, il fit sarà dato dalla somma di due lorentziane site in x_1 e x_2 :

$$W(x) = \frac{2A}{\pi} \frac{B}{4(x - x_1)^2 + B^2} + \frac{2C}{\pi} \frac{x_2}{4(x - x_2)^2 + D^2} + y_0 \quad (5.10)$$

Nel prosieguo riporteremo in tabella i risultati dei soli fit chiaramente attribuibili, in un dato intervallo, a un modo di risonanza, scartando dall'analisi quelli caratterizzati da errori standard sui parametri che siano superiori al 3,5%².

²Gnuplot restituisce errori asintotici standard che sono calcolati nello stesso modo degli errori standard benché le condizioni statistiche per designare la quantità calcolata per essere una deviazione standard non sono in generale valide per il metodo dei minimi quadrati non lineari. Perciò abbassiamo il limite di accettabilità degli errori dal 5 al 3,5 per cento

La conversione della posizione del singolo picco sulla scala dei tempi in frequenza è stata effettuata utilizzando la seguente retta di calibrazione modificata ³

$$\left[3,16136 \frac{V}{ms} \cdot (x - 46,32314)ms\right] \cdot 2,361 \frac{MHz}{V} \quad (5.11)$$

Intervallo 1

Il primo insieme di dati estrapolato dallo spettro e analizzato e riportato in figura 5.8 :

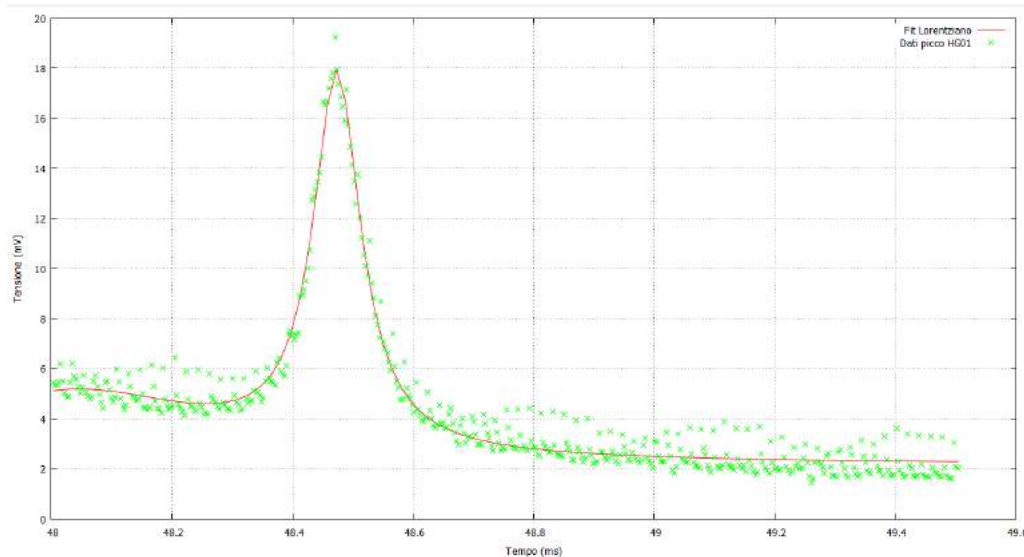


Figura 5.8: Il picco contenuto nell'intervallo 48 – 49,6ms

Fittando i dati in GNUPLOT con la lorentziana (5.10) si ottiene:

Risultati del fit lorentziano		
$A \pm \sigma_A$ (mV·ms ²)	$B \pm \sigma_B$ (ms)	$x_{picco} \pm \sigma_{x_{picco}}$ (ms)
$2,24 \pm 0,05$	$9,5 \cdot 10^{-2} \pm 2 \cdot 10^{-3}$	$48,4737 \pm 5 \cdot 10^{-4}$

che calibrati con (5.3) danno:

Caratteristiche picco	
ν_{picco} (MHz)	$FWHM \pm \sigma$ (kHz)
$16,051 \pm 0,004$	712 ± 18

Pur questo fit rispettando la condizione sugli errori di cui sopra emerge subito una discrepanza tra il valore della FWHM calcolata qui e quella calcolata per il modo fondamentale. Osservando la figura 5.8 ciò è imputabile al fatto che il fit lorentziano non interpola alcuni punti sperimentali. Non essendo stato possibile migliorare il fit rigettiamo questa misura dell'FWHM. E' comunque accettabile la misura della posizione in frequenza del picco.

Intervallo 2

Ripetiamo lo stesso fit per il picco composto riportato in figura 5.9.

³L'offset di circa 46 ms corrisponde al centro del picco in saturazione visibile nella figura 5.7

Caratteristiche spalla		
H	ν_{spalla} (MHz)	$FWHM \pm \sigma$ (MHz)
	$31,33 \pm 0,02$	$1,34 \pm 0,07$

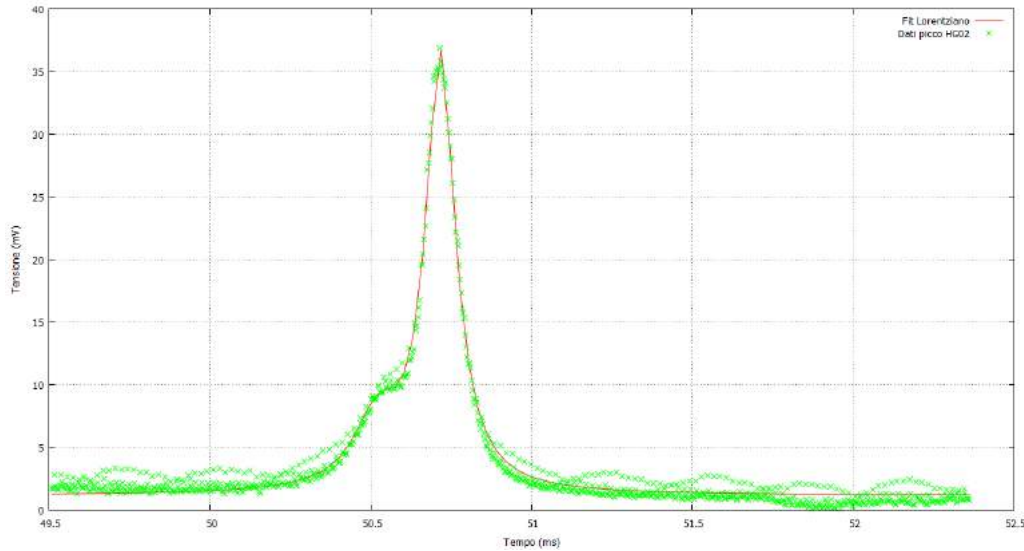


Figura 5.9: Il picco composto dell'intervallo 49,5 – 52,5ms prodotto dalla sovrapposizione di modi orizzantale e verticale

In questo caso riportiamo i risultati del fit (5.10) per entrambi i set di parametri arbitrari:

Risultati fit lorentziano-spalla		
$A \pm \sigma_A$ (mV · ms ²)	$B \pm \sigma_B$ (ms)	$x_{spalla} \pm \sigma_{x_{spalla}}$ (ms)
$1,53 \pm 0,07$	$1,8 \cdot 10^{-1} \pm 1 \cdot 10^{-2}$	$50,520 \pm 3 \cdot 10^{-3}$

Risultati fit lorentziano-picco		
$C \pm \sigma_C$ (mV · ms ²)	$D \pm \sigma_D$ (ms)	$x_{picco} \pm \sigma_{x_{picco}}$ (ms)
$1,45 \cdot 10^{-1} \pm 3 \cdot 10^{-3}$	$1,12 \cdot 10^{-1} \pm \cdot 10^{-3}$	$50,7163 \pm 3 \cdot 10^{-4}$

Calibrando questi dati otteniamo rispettivamente per la "spalla" e per il picco i seguenti valori:

Caratteristiche picco		
[H]	ν_{picco} (MHz)	$FWHM \pm \sigma$ (kHz)
	$32,790 \pm 0,002$	837 ± 8

Solo tre di questi quattro valori calibrati sono accettabili: il parametro libero che riferisce dell'ampiezza a mezza altezza della spalla ha infatti un errore standard superiore al limite e va scartato. Si può invece tenere il valore per la posizione in frequenza.

Quando mapperemo le frequenze che compongono lo spettro riflesso della cavità scopriremo che la spalla è prodotta dal modo orizzontale HG_{50} .

Intervallo 3

Non riuscendo a visualizzare una figura di risonanza nell'intervallo 52 – 54ms siamo passati all'intervallo riportato in figura 5.10:

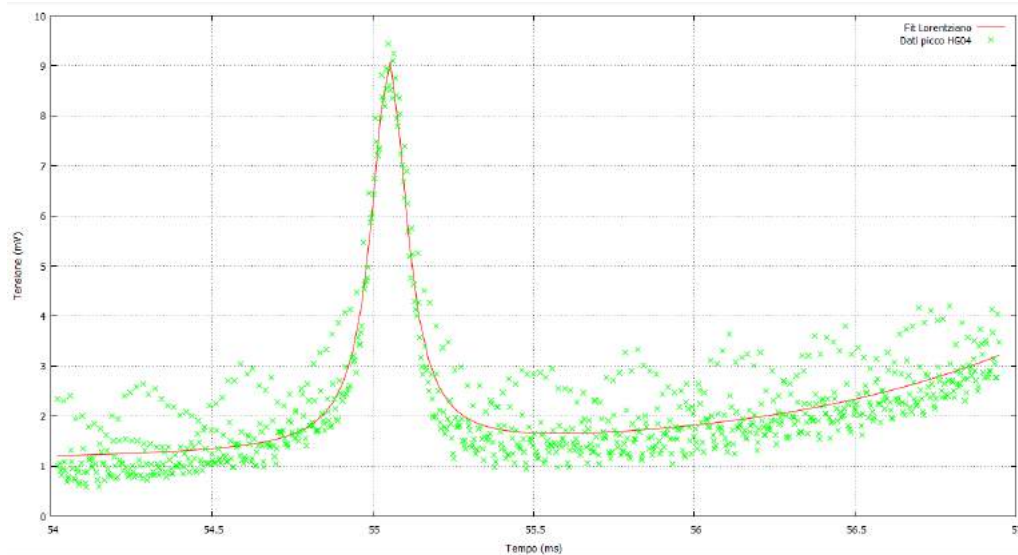


Figura 5.10: Picco contenuto nell'intervallo 54 – 57ms

Il cui fit restituisce:

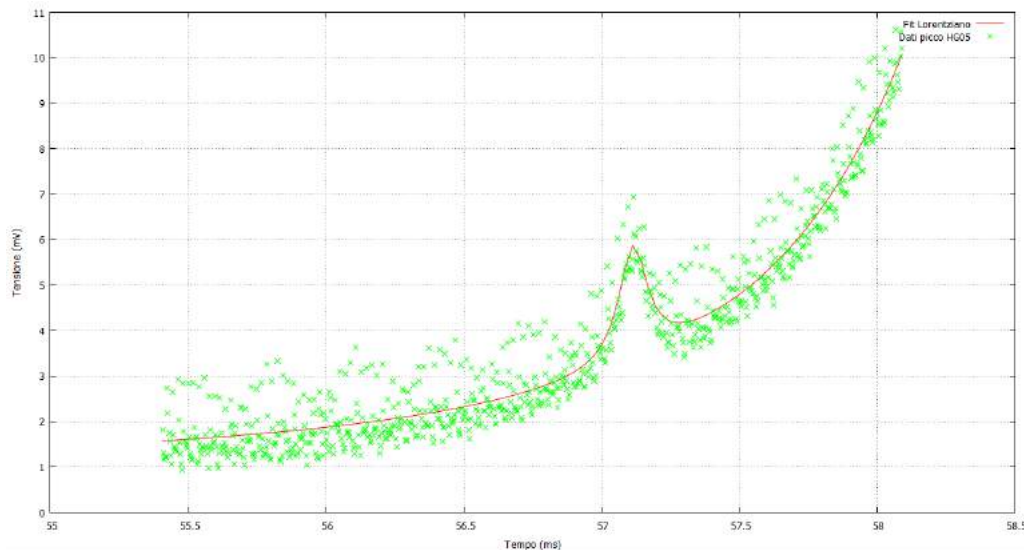
Risultati del fit lorentziano		
$C \pm \sigma_C$ (mV · ms ²)	$D \pm \sigma_D$ (ms)	$x_{picco} \pm \sigma_{x_{picco}}$ (ms)
$2,6 \cdot 10^{-1} \pm 10^{-2}$	$1,32 \cdot 10^{-1} \pm 3 \cdot 10^{-3}$	$55,051 \pm 10^{-3}$

che calibrato fornisce le seguenti caratteristiche:

Caratteristiche picco		
[H]	ν_{picco} (MHz)	$FWHM \pm \sigma$ (kHz)
	$65,14 \pm 0,01$	983 ± 26

Intervallo 4

Subito prima del picco del modo assiale successivo è visibile il seguente picco:



Che fittato restituisce i seguenti risultati:

Risultati del fit lorentziano		
$A \pm \sigma_A$ (mV · ms ²)	$B \pm \sigma_B$ (ms)	$x_{picco} \pm \sigma_{x_{picco}}$ (ms)
$5,0 \cdot 10^{-1} \pm 4 \cdot 10^{-2}$	$1,3 \cdot 10^{-1} \pm 10^{-2}$	$57,115 \pm 3 \cdot 10^{-3}$

che una volta calibrati danno

Caratteristiche picco		
[H]	ν_{picco} (MHz)	$FWHM \pm \sigma$ (kHz)
	$80,55 \pm 0,02$	955 ± 89

Anche per questo picco il valore della FWHM non è accettabile in quanto che ha errore standard superiore al limite imposto.

Fit lineare frequenze-ordine m+n e commento ai risultati

Per mappare le posizioni in frequenza dei picchi raccolti eseguiamo, escludendo la spalla nell'intervallo 2, un fit lineare ax tra le suddette frequenze e l'ordine $m + n$ a cui sono attribuibili.

I risultati del fit forniranno una stima per la spaziatura tra modi di ordine superiore e il Free Spectral Range.

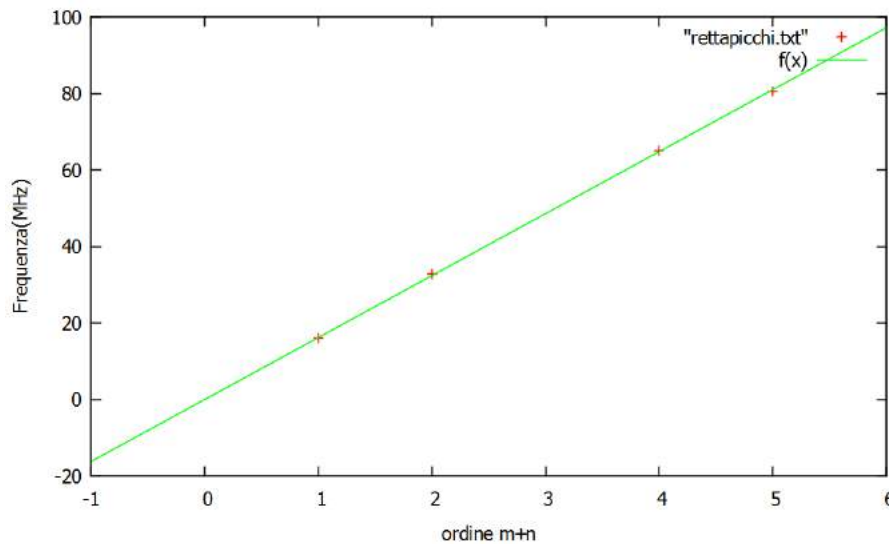


Figura 5.11: Fit lineare Frequenze/Ordine HOMs

Risultati fit lineare ax

[H] $a \pm \sigma_a$ (MHz)

$16,1941 \pm 0,0596$

La formula:

$$FSR = HOMs \cdot \left(\frac{\pi}{\arccos(g_3)} \right) \quad (5.12)$$

restituisce un valore misurato per il free spectral range pari a

$$FSR \pm \sigma_{FSR} = (94,52 \pm 0,35) MHz \quad (5.13)$$

dove l'errore è stato ottenuto propagando quello restituito dal fit lineare per il valore della spaziatura in frequenza.

Nella tabella che riportiamo qui di seguito confrontiamo i valori in frequenza degli HOMs calcolati utilizzando come spaziatura la pendenza a con quelli calcolati utilizzando l'HOMs derivato nel capitolo 4 (16,287MHz).

L'errore è ottenuto anche qui con la formula di propagazione

Confronto valori misurati/teorici frequenze HOM		
ν_{qnm}	Frequenza misurata (MHz)	Frequenza Teorica (MHz)
ν_{-130}, ν_{-112}	$13,23 \pm 0,39$	13,32
ν_{001}	$16,19 \pm 0,06$	16,29
ν_{-113}, ν_{-131}	$17,52 \pm 0,42$	17,62
ν_{002}, ν_{020}	$32,39 \pm 0,12$	32,57
$\nu_{-150}, \nu_{-114}, \nu_{-132}$	$33,71 \pm 0,46$	33,91
ν_{021}, ν_{003}	$48,58 \pm 0,18$	48,86
ν_{110}	$63,45 \pm 0,35$	63,82
$\nu_{004}, \nu_{022}, \nu_{040}$	$64,78 \pm 0,24$	65,15
ν_{111}	$79,65 \pm 0,47$	80,10
$\nu_{005}, \nu_{041}, \nu_{023}$	$80,97 \pm 0,30$	81,44
ν_{112}, ν_{130}	$95,84 \pm 0,53$	96,39

Dato che l'intensità dei picchi decresce al crescere dell'ordine $m + n$ dei modi non tutte le frequenze sono visibili nello spettro.

Dal confronto tra valori teorici e misurati emerge un buon accordo tra teoria ed esperimento: la leggera discrepanza coi valori teorici per i modi di ordine pari è recuperabile all'interno del doppio della barra di errore calcolata. La spalla attigua al modo HG_{02} (vedi figura 5.9) necessita di un commento a parte.

Consideriamo di nuovo la tabella Si nota la prossimità del valore in frequenza del picco HG_{50} (o HG_{23} o HG_{14}), appartenente al FSR $q - 1$, a quello del picco HG_{02} (o HG_{20}) del FSR q . Tuttavia la spalla adiacente di cui dicevamo sopra (che attribuiremmo ai modi HG_{50}, HG_{23}) appare in figura precedere il picco HG_{02} anziché seguirlo, all'infuori della barra di errore ottenuta. L'origine di questa discrepanza può essere individuata in un offset tra valori calcolati e osservati dell'FSR e dell'HOMs dell'ordine di qualche per cento. La figura 5.12 mostra una mappatura del FSR.

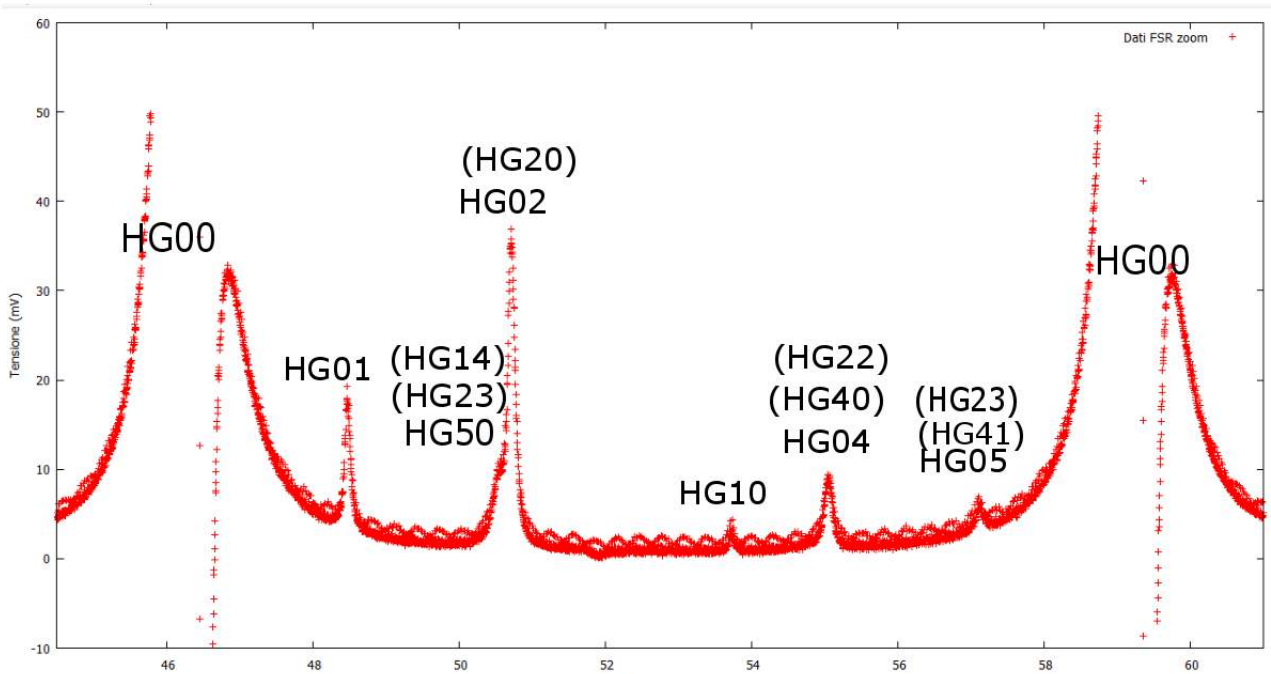


Figura 5.12: Un FSR con i modi di ordine superiore etichettati. La degenerazione di un modo è espressa indicando quest'ultimo tra parentesi

Seppure il disaccordo tra valori calcolati e valori misurati per HOMs e FSR sia recuperabile entro il doppio della barra di errore è interessante derivare la discrepanza tra raggio di curvatura nominale dello specchio e raggio calcolato sperimentalmente. Questo si può calcolare invertendo la formula (2.50):

$$\pi HOMs = FSR \arccos \sqrt{1 - \frac{p}{2R}} \rightarrow \cos^2 \left(\frac{\pi HOMs}{FSR} \right) = 1 - \frac{p}{2R}$$

cioè

$$R = \frac{p}{2 \sin^2 \left(\frac{\pi HOMs}{FSR} \right)}$$

Sostituendo i valori dell'FSR e dell'HOMs calcolati attraverso il fit e propagando gli errori otteniamo:

$$R = (6,0004 \pm 0,0018)m$$

La discrepanza col valore fornito dal produttore è dello 0,71%.

5.2 Analisi del picco HG02 alterato dalla LEO

Questa sezione è divisa in due parti: nella prima descriviamo le caratteristiche del codice Python (il cui listato è riportato in appendice A) utilizzato per analizzare i dati mentre nella seconda esponiamo i risultati dell'analisi in due diversi modi. I calcoli svolti per ricavare la variazione in ampiezza provocata dalla LEO sono consultabili nel foglio SMATH riportato in appendice C.

5.2.1 Preparazione della misura e descrizione dello script in Python

Prima di acquisire i dati a LEO accesa occorre assicurarsi che le lamine a mezzo d'onda siano girate in modo che il fascio entri nella LEO in polarizzazione S e nella cavità in polarizzazione P. La lente elettro-ottica sarà polarizzata con una tensione di 2 V pilotato da un onda quadra che una volta amplificata con un guadagno 200 è dotata delle seguenti caratteristiche :

Caratteristiche onda quadra per lo scanning della LEO			
[H]	Frequenza (Hz)	Ampiezza (V)	Offset (V)
	0,5	400	1

Questa lenta modulazione in frequenza corrisponde ad accendere e spegnere la LEO una volta ogni due secondi. La misura di cui ci accingiamo a presentare i risultati possono essere fatte a MEO disconnesso: come si diceva all'inizio del capitolo, non si tratta di una misura di mode-match ma soltanto di un test atto a rivelare la presenza dell'effetto modulante prodotto dalla LEO. Non occorrono quindi sidebands per stabilizzare il segnale. Il sistema di acquisizione PICOSCOPE è stato impostato secondo i parametri riportati in tabella:

Impostazioni del modulo PICOSCOPE			
[H]	Sample (MS)	Scale ordinate (mV)	Tempo (s/div)
	10	50	1

L'analisi dei dati è stata svolta, come anzidetto, servendosi uno script in Python. E' ideato in modo da svolgere seguenti operazioni:

- Identificazione della posizione del picco composto HG02 dal flusso di dati formato dall'asse dei tempi, l'onda quadra e lo spettro in trasmissione della cavità mediante l'imposizione di due soglie.

- Inversione dello spettro prodotto dalla rampa triangolare con pendenza negativa .
- Filtraggio passa basso del segnale regolabile attraverso un parametro
- Creazione di un vettore contenente il valore dell'onda quadra relativo alla posizione del piccolo
- Suddivisione dei picchi HG02, contenuti nell'FSR acquisito q volte, in gruppi in base a un particolare criterio.
- Calcolo dell'errore standard e della media dei dati raggruppati e visualizzazione di questi sul medesimo grafico

Il penultimo punto si spiega così: aspettandoci una deviazione o scostamento rispetto ai picchi rivelati a LEO spenta occorre disporre di un fondamento per accertarci della natura dei risultati e degli errori associati. L'alterazione dei dati che osserviamo potrebbe infatti essere solo una fluttuazione (cross-talk tra canali, effetto termico) non riconducibile all'azione della LEO. Il raggruppamento dei dati relativi ai vari picchi è stato fatto in tre diversi modi :

- Separazione dei picchi acquisiti a EOL accesa (gradino superiore dell'onda quadra) da quelli acquisiti a EOL spenta (gradino inferiore)
- Divisione in due metà della stringa di dati restituita dallo script .
- Suddivisione dei picchi in base alla parità/disparità del numero con cui il codice ne contrassegna l'acquisizione.

Con ciascuno di questi criteri analizzeremo tre gruppi di dati :

1. La scansione dello spettro riflesso dalla cavità registrato con la LEO polarizzata con un'onda quadra come quella descritta all'inizio della sezione
2. Stesso spettro ma ad amplificatore disconnesso.
3. Stesso spettro del primo punto ma con il segnale di onda quadra attenuato di un fattore 100 presso il PICOSCOPE utilizzando un partitore di tensione

Se la LEO induce davvero una modifica sul fascio gaussiano in ingresso ci aspettiamo che un'eventuale discrepanza non sia visibile analizzando i dati sulla base di una quantità non correlata alla tensione applicata. I tre differenti modi di acquisire i dati assicurano un secondo livello di verifica sull'origine della discrepanza. Scollegando l'amplificatore ad alta tensione un eventuale cross-talk tra canali è prevenuto così come un'attenuazione del segnale di monitor di un certo fattore (noi abbiamo scelto 100) permetterebbe di fare.

5.2.2 Risultati dell'analisi dati

In questa sezione confrontiamo per via grafica gli output dello script in Python programmato secondo i tre criteri sopra elencati e controlliamo le variabilità riscontrate per i tre gruppi di dati sopra indicati.

Analisi dati gruppo 1

In questa sezione riportiamo i dati presi polarizzando la LEO

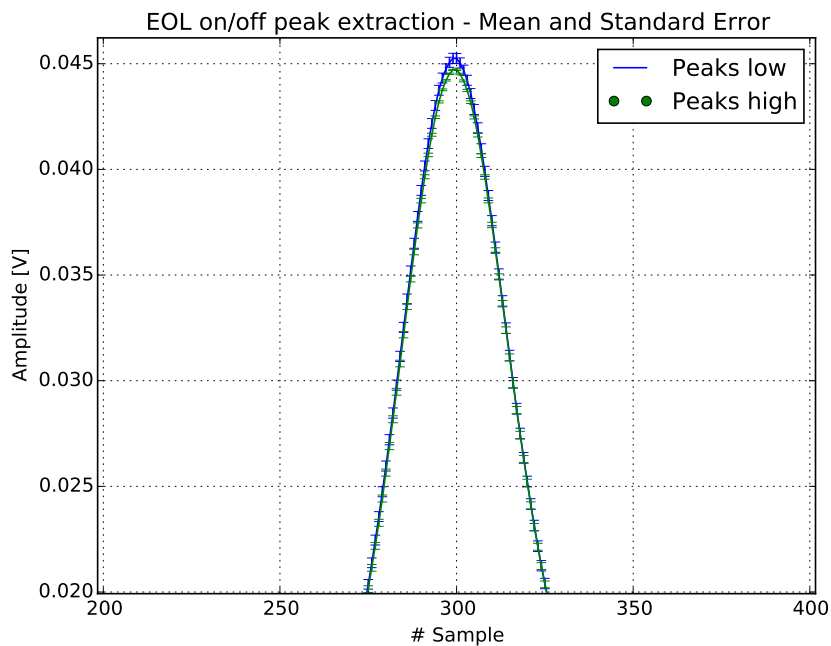


Figura 5.13: Grafico ottenuto analizzando i dati del primo gruppo secondo il primo criterio. La media dei picchi ottenuta a LEO accesa (linea verde) è più bassa di quella ottenuta a LEO spenta (linea blu) di una quantità maggiore (circa il 3%) della barra prodotta dalla deviazione standard della media

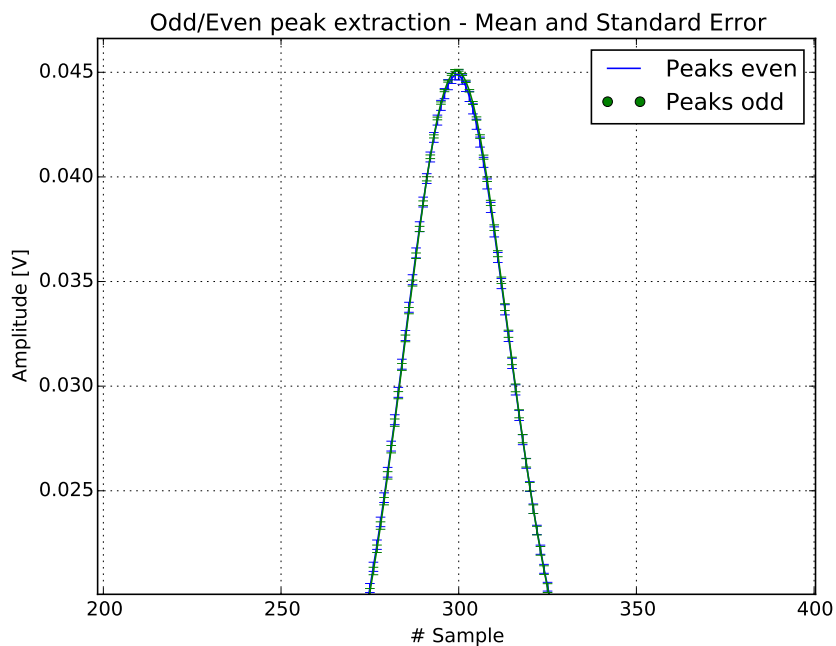


Figura 5.14: Raggruppando i picchi in base alla parità del numero con cui lo script li contrassegna durante l'analisi e ripetendo la stessa analisi fatta per il grafico 5.13 si ottiene che i picchi ottenuti a LEO accesa e spenta coincidono. Se ne desume che La discrepanza rivelata nel grafico 5.13 non dipende da una variabile che sia non correlata alla tensione applicata

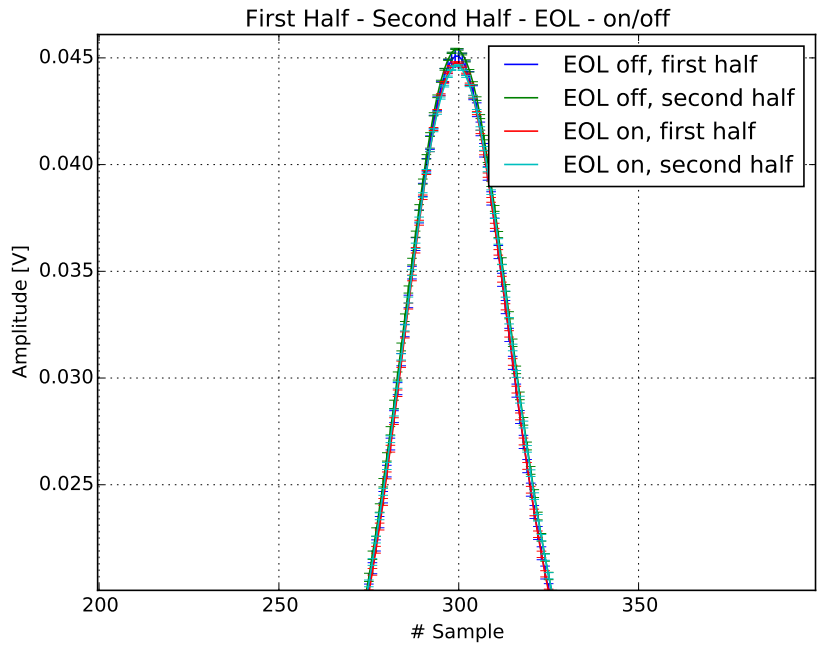


Figura 5.15: Medie dei picchi ottenute analizzando i dati secondo il terzo criterio. A LEO accesa la media dei picchi si abbassa rispetto alla media fatta a LEO spenta ma l'errore standard dei picchi nella prima metà con EOL spenta è maggiore rispetto a quella delle altre curve. Ciò potrebbe essere imputabile a un bug nello script in Python.

Analisi dati gruppo 2

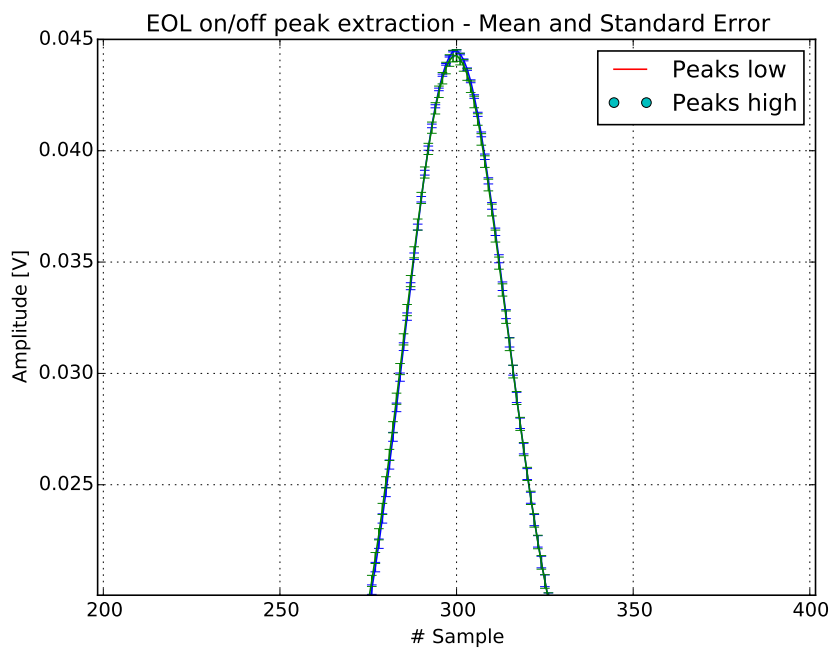


Figura 5.16: Distribuzione della media dei picchi ottenuta scollegando l'amplificatore ad alta tensione. Come ci aspettavamo, non sussiste nessuna discrepanza tra le curve ottenute a LEO accesa e LEO spenta all'interno delle barre di errore

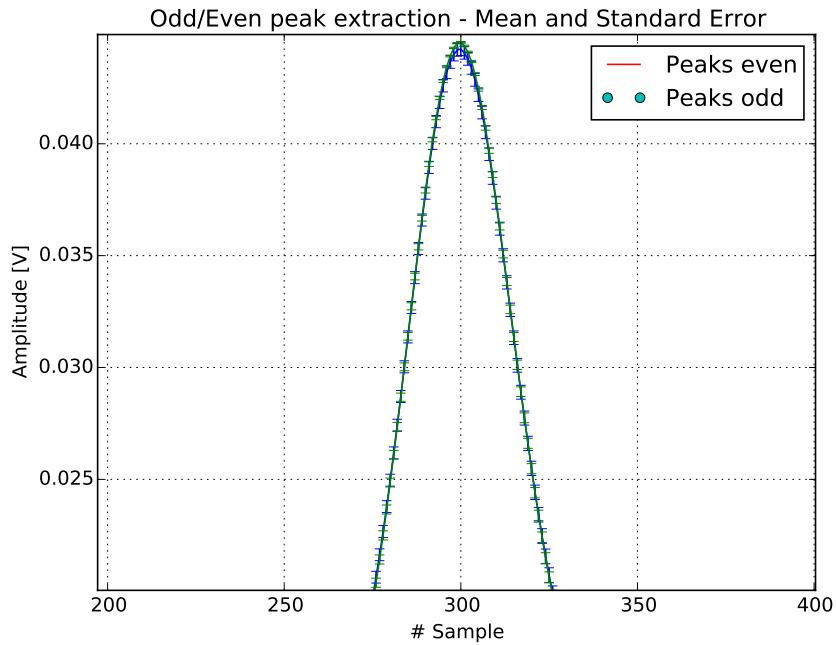


Figura 5.17: Distribuzione della media dei picchi ottenuta scollegando l'amplificatore ad alta tensione e dividendo i dati in accordo al secondo criterio. Le due curve si sovrappongono entro il limite della deviazione standard

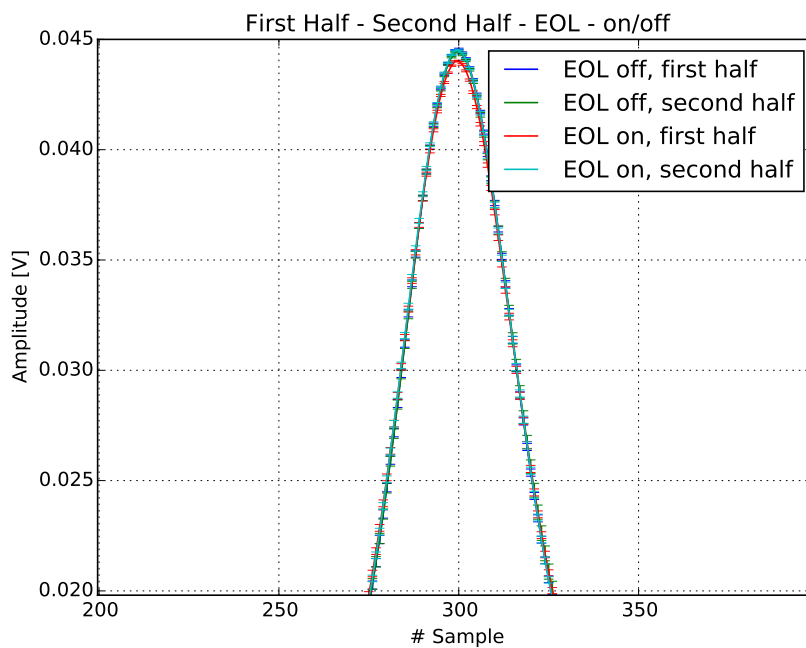


Figura 5.18: Distribuzione della media dei picchi ottenuta scollegando l'amplificatore ad alta tensione e raggruppando i dati in accordo al terzo criterio. Anche in queste condizioni le due curve sono compatibili all'interno della barra d'errore

Analisi dati gruppo 3

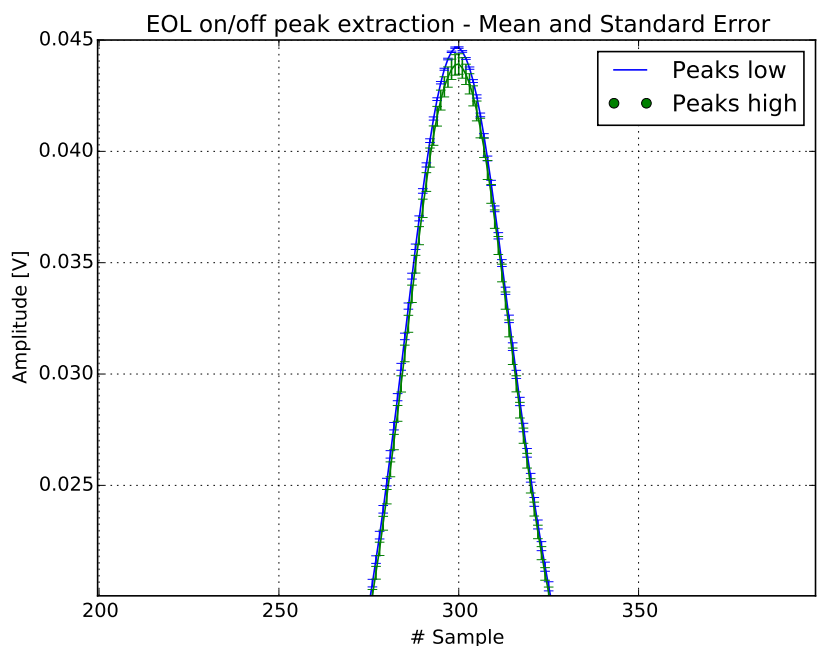


Figura 5.19: Distribuzione della media dei picchi secondo il primo criterio. Il risultato è compatibile con quello ottenuto nel primo set di misure con lo stesso criterio (vedi figura (5.13))

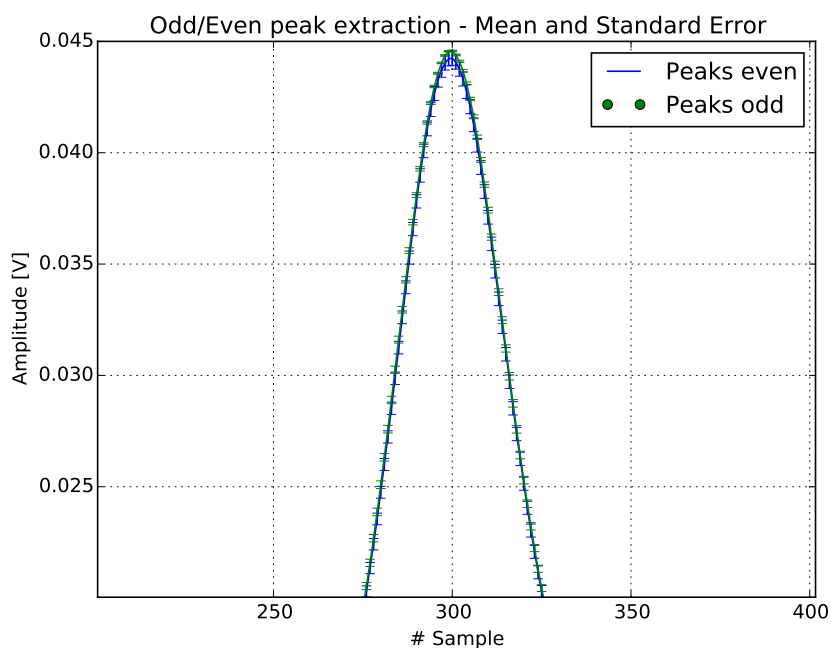


Figura 5.20: Raggruppamento secondo il secondo criterio. Le due curve sono ancora compatibili, come atteso, entro la deviazione standard della media ma per qualche bug dello script il numero di picchi pari e dispari in corrispondenza della parte superiore dell'onda quadra è inferiore a quello totale.

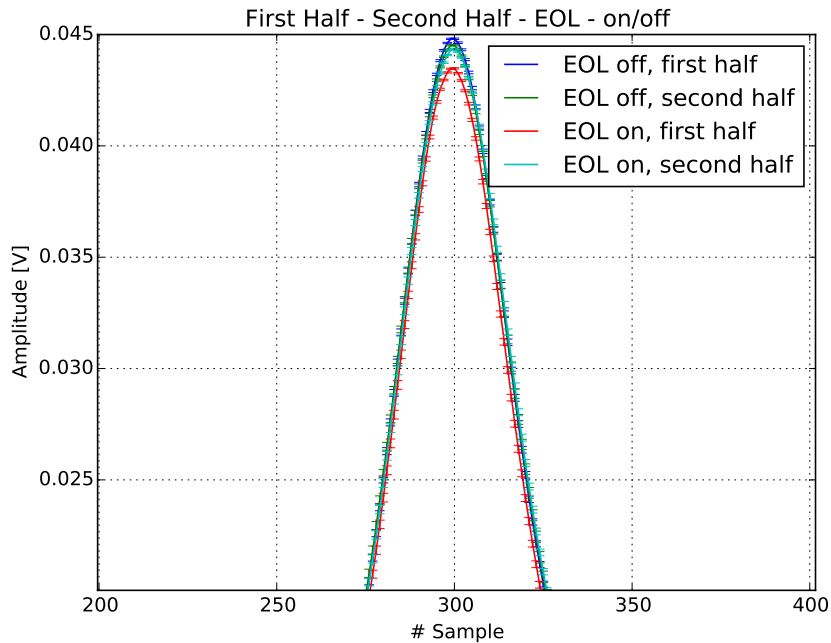
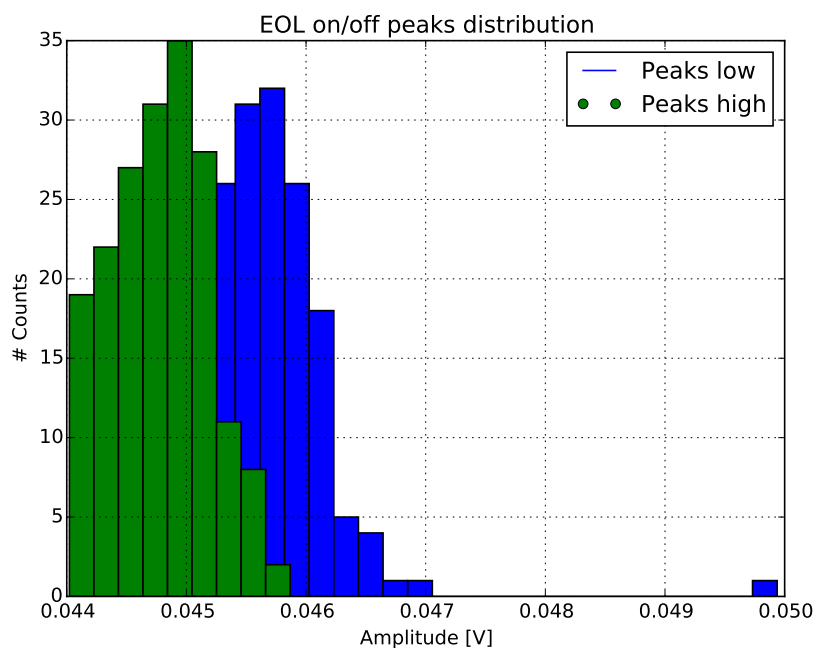


Figura 5.21: Distribuzione della media dei picchi ottenuta dividendo i dati in base al terzo criterio. Ricompare la discrepanza del 3 per cento riscontrata nel primo set di dati con i criteri primo e terzo

Per vedere con maggiore chiarezza la discrepanza rivelata presentiamo qui di seguito il contenuto dei grafici precedenti in forma di istogrammi.

Analisi dati gruppo 1 mediante istogrammi



Questo istogramma (figura ??) mostra i risultati ottenuti analizzando il primo set di dati col primo criterio in corrispondenza dei massimi. In verde i dati a LEO accesa e in blu quelli a LEO spenta. Il grafico mostra il numero

di picchi HG_{02} conteggiati in funzione della loro ampiezza in tensione. Se si prende un insieme di conteggi (per esempio il primo di colore verde a sinistra) per una delle due configurazioni si nota che il corrispettivo insieme (il primo dei blu ancora da sinistra) per l'altra configurazione differisce in ampiezza dall'altra per un valore di circa il in ampiezza.

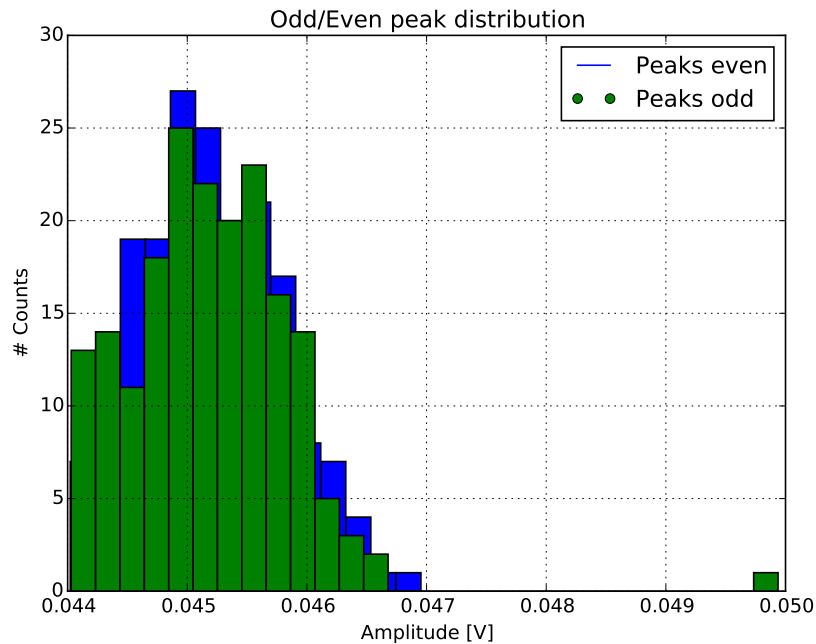


Figura 5.22: Istogramma per il primo set di dati analizzati con il secondo criterio. Si nota come le due stringhe di conteggi combacino entro i limiti della barra di errori

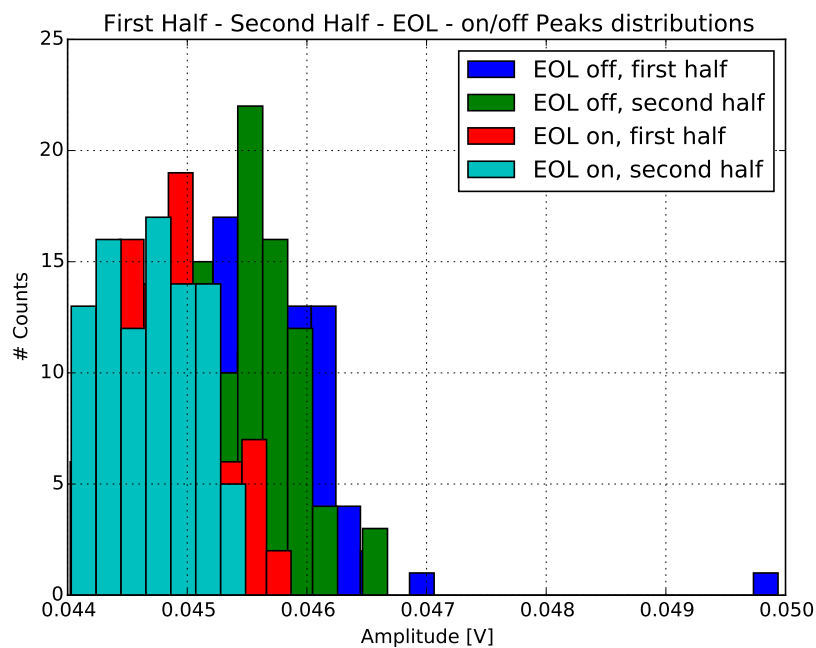


Figura 5.23: Istogramma per il primo set di dati analizzati con il terzo criterio. Dividendo i dati in due metà per ciascuna configurazione della LEO la stessa discrepanza emersa analizzando i dati col primo criterio si presenta anche qui con la stessa entità ma in maniera più vistosa

Analisi dati gruppo 2 mediante istogrammi

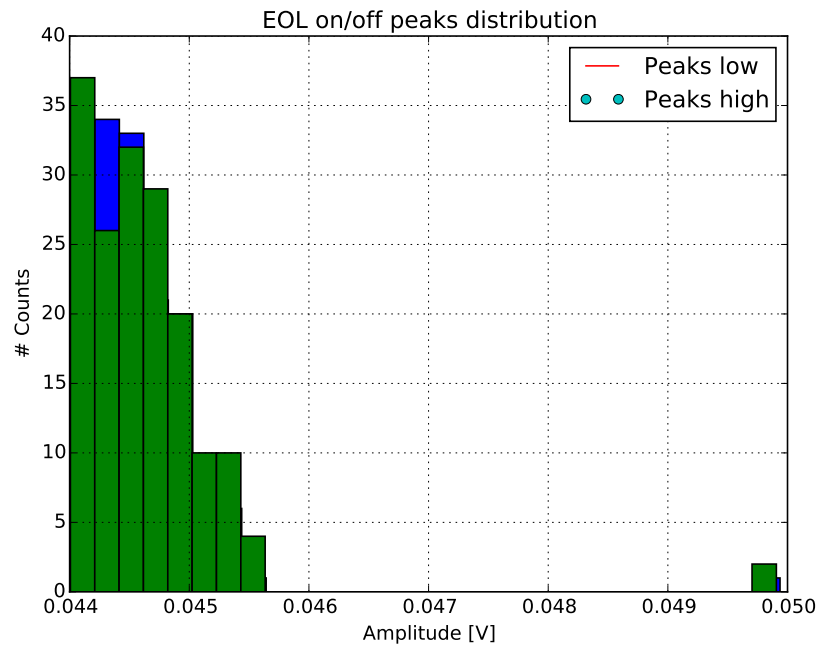


Figura 5.24: Istogramma per il secondo set di dati analizzati con il primo criterio. A HV driver disconnesso i nove insiemi di conteggi si sovrappongono entro la deviazione standard

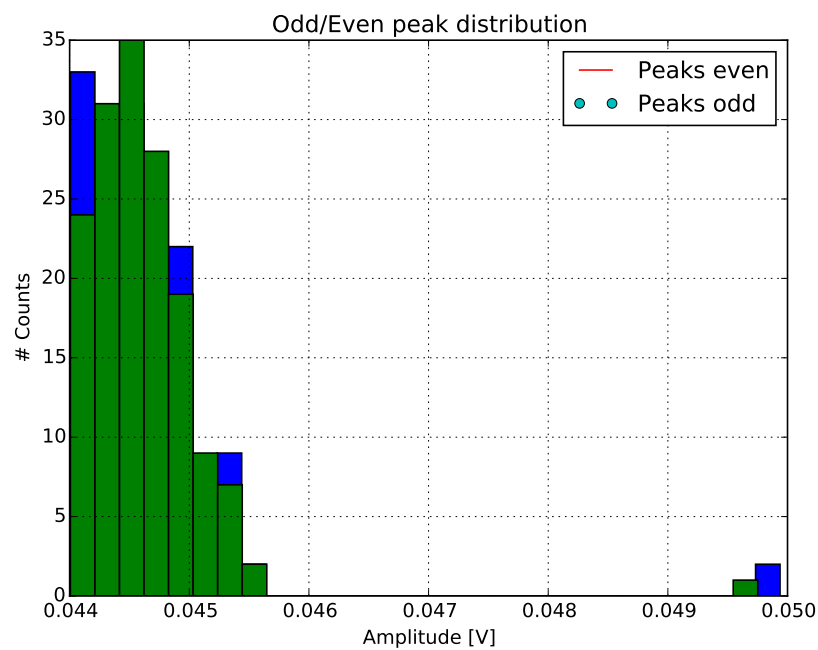


Figura 5.25: Istogramma per il secondo set di dati analizzati con il secondo criterio

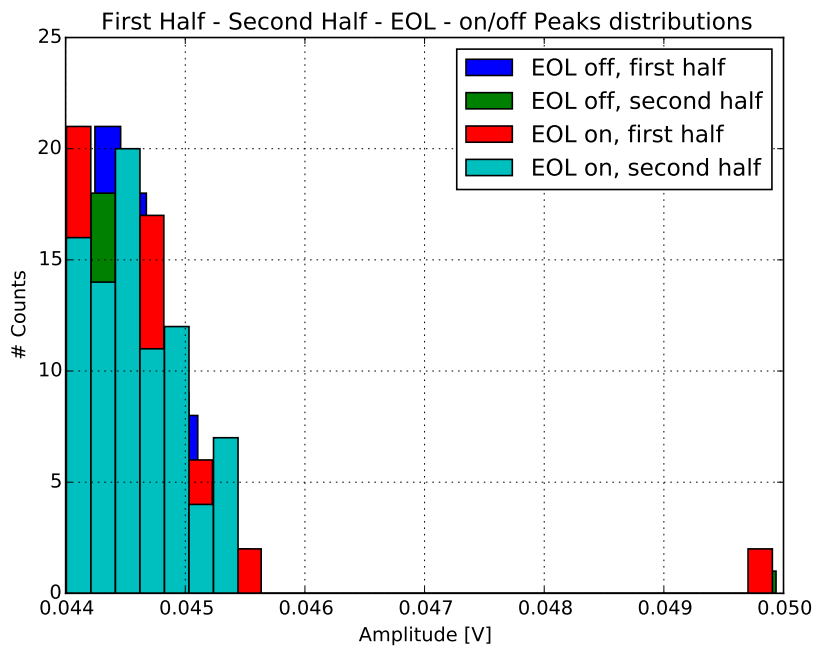


Figura 5.26: Istogramma per il secondo set di dati analizzati in base al terzo criterio

Analisi dati gruppo 3 mediante istogrammi

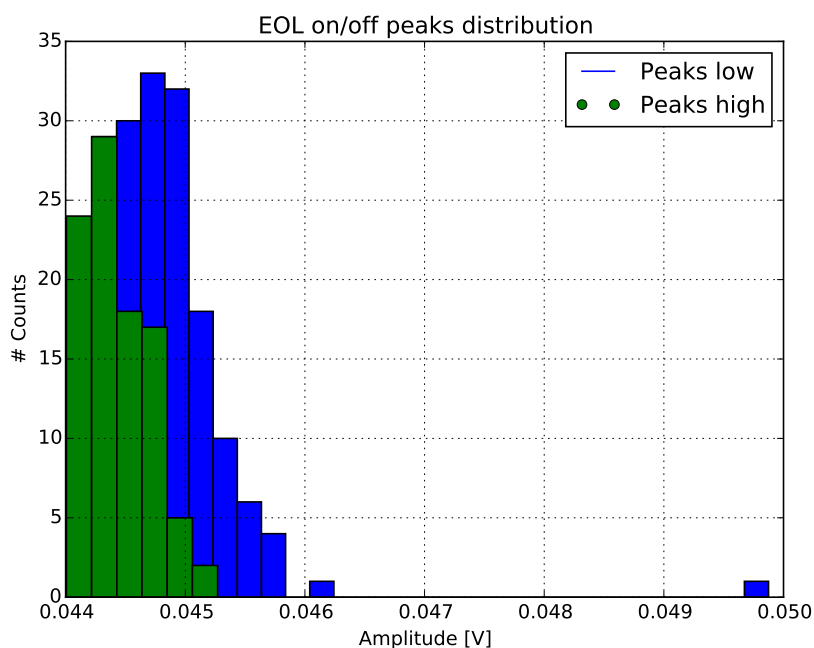


Figura 5.27: Istogramma per il terzo set di dati analizzati con il primo criterio. La discrepanza del 3% tra gli insiemi di conteggi suddivisi in base alla configurazione della LEO si ritrova anche qui in buon accordo con quanto visto col primo metodo per la prima serie di dati

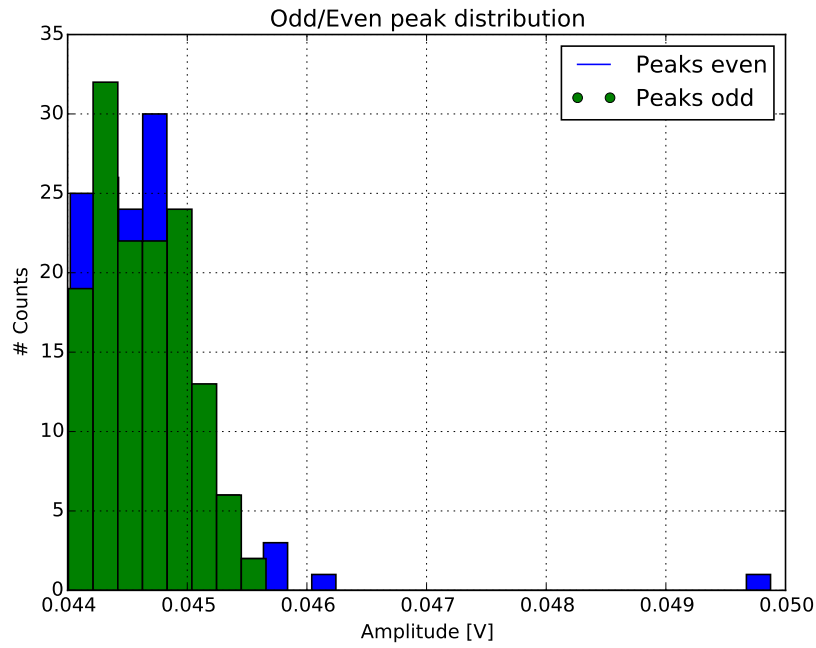


Figura 5.28: Istogramma per il terzo set di dati analizzati con il secondo criterio.

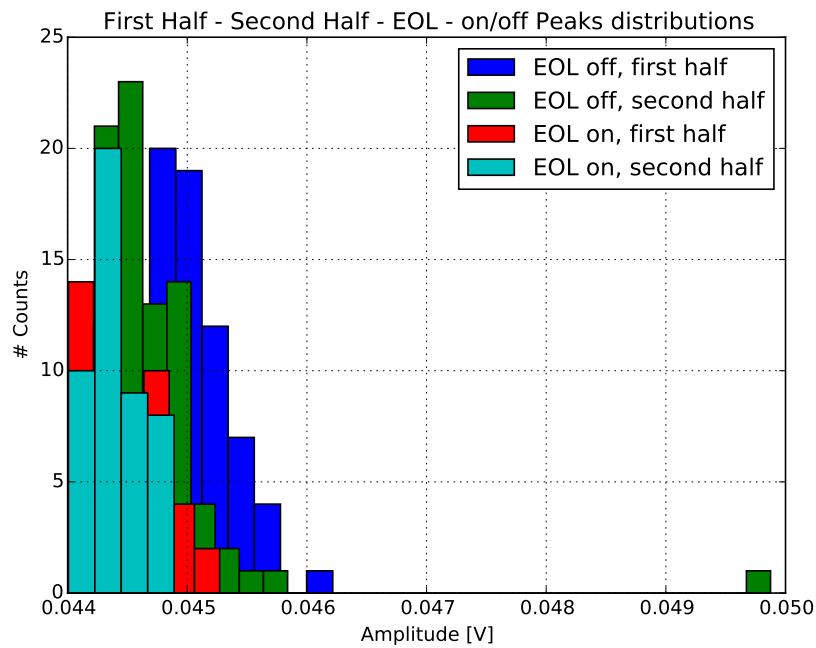


Figura 5.29: Istogramma per il terzo set di dati analizzati con il terzo criterio

Questa serie di grafici ci permette di affermare che la discrepanza rivelata è causata dall'effetto modulante della LEO.

Conclusioni

Per funzionare correttamente gli interferometri gravitazionali di nuova generazione richiedono l'impiego di luce squeezed di qualità elevatissima. Un imperfetto mode-matching tra le varie componenti dell'interferometro è la principale causa di perdite che degradano la coerenza degli stati squeezed. In questo lavoro di tesi abbiamo esposto, in maniera approfondita, le caratteristiche di una tecnica di rivelazione del mismatch basata sulla rivelazione dei modi di ordine superiore riflessi da una cavità triangolare (simile a quelle utilizzate per il mode-cleaner negli interferometri VIRGO e LIGO) e sviluppato un dispositivo tecnologico innovativo (basato sul niobato di litio) per la sua messa in atto, determinandone i parametri costruttivi mediante simulazioni al computer. Dall'analisi dei dati raccolti in regime quasi-statico abbiamo rivelato un decremento delle ampiezze dei segnali pari a circa il 3% del segnale totale, non riconducibile ad altre cause che alla modulazione indotta dalla LEO. Il foglio Smath riportato in appendice C fornisce una stima teorica della variazione in ampiezza del segnale e restituisce per i parametri del fascio (4.9), (4.11) un decremento del 5%. Tuttavia essendo la stima fatta in Smath alquanto approssimata (nel modello matriciale gli effetti di bordo non sono stati stimati in maniera rigorosa) possiamo affermare che c'è compatibilità tra le stime teorica e sperimentale fatte per la varianza in ampiezza indotta dalla LEO. Nonostante questo risultato incoraggiante non è stato però possibile verificare il funzionamento nel range di frequenze in cui si dimostrerebbe assai più vantaggioso e affidabile dei normali attuatori opto-meccanici e rimettiamo ad altri il compito di effettuare ulteriori misurazioni.

Appendice A

In questa appendice riportiamo il listato del codice Python (riportato per gentile concessione del Dr. Marco Vardaro) utilizzato per analizzare i dati acquisiti tramite il sistema PICOSCOPE.

```
1
2 #!/usr/bin/env python
3 """
4 Created on Thu Aug 9 16:30:12 2018
5 This script is thought to understand if the EOL works with applied DC high voltage. The idea is a lock
   -in
6 measurement in which the EOL is powered with a square wave 0 - high voltage. The script needs in input
   a three
7 columns file: 1 time, 2 square wave, 3 cavity transmission. The script try to find HG20 mode (double
   peak) from
8 the transmission data stream, insulate them, reverse the data vectors relative to the negative front of
   the
9 triangular wave (cavity scan), find the value of the square wave relative to each peak, separate the
   peak belonging
10 to the high side of the square wave from them belonging to the lower side. Averages and computes the
   standard error
11 of both the groups.
12
13 @author: Marco Vardaro
14 """
15 import numpy as np
16 import matplotlib.pyplot as plt
17 import peakutils
18 from scipy.optimize import curve_fit
19 from scipy import signal
20
21 def mov_avg(data, avg_len):
22     """
23     Moving average: inputs data vector and length of the moving average (odd number)
24     """
25     length = len(data)
26     y = np.zeros(length)
27     start = (avg_len - 1)/2
28     for i in range(start, length-start):
29         y[i] = mean(data[i-start:i+start])
30     return y
```

```

31
32 def nbin_histo(data, delta):
33     return int((np.max(data)-np.min(data))/delta)
34 ### Data Loading
35
36 skip_rows = 3           # Jump the first lines from the data file
37 filename = '20181002/20181002-2Vdiv100.txt'
38 outfilename = '20181002/20180914-LockIn1Hz2V.txt'
39 data = np.loadtxt(filename, skiprows=skip_rows)
40
41 ### Parameters
42
43 thres_pk = 0.044       # Absolute peak threshold
44 min_dist_pk = 200     # Minimum distance in time between each detected peak.
45 thres_pk.tem00 = 0.047 # Threshold to remove TEM00
46 threshold_sw = 1.5    # Square wave threshold (amplitude)
47 peak_len = 600       # Number of point to extract each peak
48 delta_bin = 0.0002   # Histo delta bins
49
50
51 mV = 1                # 1 The transmission data stream is in mV 0 otherwise
52
53
54 mov_avg_sample = 5    # Number of moving average samples
55 datalpf = True       # If true data are low pass filtered with a moving average
56 debug = True         # If true the control functions are activated
57 savefile = False     # If true data-file are exported (Not completed)
58 histo_plot = True    # If true plot histograms
59
60
61 print "\n#####"
62 print "\t\t LOCK-IN MEASUREMENT EOL "
63 print "#####\n"
64
65 ### Data loading (this part is thought to load a three columns file: column1=time, column2=ramp,
66 column3=transm )
67 data_time = data[:,0]
68 if mV == 1:
69     data_transm = -data[:,2]/1000.    # data in mV convert mV to V and and pass from neg to pos peaks
70 else:
71     data_transm = -data[:,2]
72
73 data_ramp = data[:,1]
74 data_sample = np.linspace(0, len(data_transm), len(data_transm))
75 for i in range(0, len(data_transm)):    #remove inf from transm vector
76     if data_transm[i] == inf or data_transm[i] == -inf:
77         data_transm[i] = data_transm[i-1]
78 if data_time[0]<0:    #positive time on x axis if needed
79     data_time = data_time + np.abs(data_time[0])

```



```

79 l = len(data_time)
80 fs = (1/(data_time[1]-data_time[0])) #compute and print sampling frequency
81 print "Sampling Frequency = " + str(fs)
82
83 if data1pf == True:
84     print "Moving Average on Transmission Data – Moving average length = " + str(mov_avg_sample)
85     data_transm = mov_avg(data_transm, mov_avg_sample)
86
87
88 %% Find all the TEM00 peaks and plot the ramps, and the peaks
89
90 pk_transm = peakutils.indexes(data_transm, min_dist=min_dist_pk, thres = thres_pk, thres_abs=True) #
    find peaks
91 pk_transm1a = pk_transm[data_transm[pk_transm]<thres_pk_tem00] #remove TEM00 from pks vector
92 pk_transm1 = pk_transm1a[0:len(pk_transm1a)-10] #remove TEM00 from pks vector
93
94 ramp_value = data_ramp[pk_transm1] #square wave value of relative to the i-th pk
95 peak_matrix = np.zeros((len(pk_transm1), peak_len)) #extract all peaks
96
97 plt.figure(10)
98 line1, = plt.plot(data_sample, data_transm, label='transm')
99 line2, = plt.plot(data_sample[pk_transm1], data_transm[pk_transm1], 'o', label = 'peaks')
100 #line3, = plt.plot(data_sample, data_ramp, label='square wave')
101 plt.legend([line1, line2], ['Transm', 'Peaks'])
102 plt.ylabel('Amplitude [V]')
103 plt.xlabel('Time [s]')
104 plt.show()
105
106 %%
107 for i in range(1, len(pk_transm1)): #reverts all the peaks of negative ramps
108     temp = data_transm[pk_transm1[i]-peak_len/2:pk_transm1[i]+peak_len/2]
109     if mean(temp[0:peak_len/2]) > mean(temp[peak_len/2:peak_len]):
110         peak_matrix[i] = temp[::-1]
111     else:
112         peak_matrix[i] = temp
113 pks_max = np.max(peak_matrix, 1) # vector of peak maxima
114
115 pks_low = peak_matrix[ramp_value<threshold_sw] #extract peaks below square wave threshold
116 pks_high = peak_matrix[ramp_value>threshold_sw] #extract peaks above square wave threshold
117
118 pks_low_max = pks_max[ramp_value<threshold_sw]
119 pks_high_max = pks_max[ramp_value>threshold_sw]
120 pks_low_max = pks_low_max[pks_low_max>0.001]
121 pks_high_max = pks_high_max[pks_high_max>0.001]
122
123
124 pks_low_mean = np.mean(pks_low, 0)
125 pks_low_std = np.std(pks_low, 0)/sqrt(len(pks_low))
126

```

```

127 pks_high_mean = np.mean(pks_high,0)
128 pks_high_std = np.std(pks_high,0)/sqrt(len(pks_high))
129
130
131 xaxis = np.linspace(0,peak_len-1,peak_len)
132
133 plt.figure(20)
134 plt.title('EOL on/off peak extraction - Mean and Standard Error')
135 plt.errorbar(xaxis,pks_low_mean,yerr=pks_low_std)
136 plt.errorbar(xaxis,pks_high_mean,yerr=pks_high_std)
137 plt.legend([line1, line2], ['Peaks low', 'Peaks high'])
138 plt.ylabel('Amplitude [V]')
139 plt.xlabel('# Sample')
140 plt.grid()
141 plt.show()
142
143 plt.figure(21)
144 plt.title('EOL on/off peaks distribution')
145 plt.hist(pks_low_max,nbin_histo(pks_low_max,delta_bin),alpha=1)
146 plt.hist(pks_high_max,nbin_histo(pks_high_max,delta_bin),alpha=1)
147 plt.legend([line1, line2], ['Peaks low', 'Peaks high'])
148 plt.ylabel('# Counts')
149 plt.xlabel('Amplitude [V]')
150 plt.grid()
151 plt.show()
152 #%%
153
154 if debug == True:
155     print "Debugging Mode activate:"
156     print "Test 1: Divide peaks in two groups (even - odd)"
157
158     ramp_value_even = ramp_value[0::2]
159     ramp_value_odd = ramp_value[1::2]
160     print "# Even peaks: " + str(len(ramp_value_even)) + " - Even peaks with EOL on: " + str(len(
161         ramp_value_even[ramp_value_even>threshold_sw]))
162     print "# Odd peaks: " + str(len(ramp_value_odd)) + " - Odd peaks with EOL on: " + str(len(
163         ramp_value_odd[ramp_value_odd>threshold_sw]))
164
165     pks_even = peak_matrix[0::2]
166     pks_odd = peak_matrix[1::2]
167
168     pks_even_mean = np.mean(pks_even,0)
169     pks_even_std = np.std(pks_even,0)/sqrt(len(pks_even))
170
171     pks_odd_mean = np.mean(pks_odd,0)
172     pks_odd_std = np.std(pks_odd,0)/sqrt(len(pks_odd))
173
174     pks_even_max = pks_max[0::2]
175     pks_odd_max = pks_max[1::2]

```

```

174 pks_even_max = pks_even_max[pks_even_max>0.001]
175 pks_odd_max = pks_odd_max[pks_odd_max>0.001]
176
177
178 xaxis = np.linspace(0, peak_len-1, peak_len)
179
180 plt.figure(30)
181 plt.title('Odd/Even peak extraction – Mean and Standard Error')
182 plt.errorbar(xaxis, pks_even_mean, yerr=pks_even_std)
183 plt.errorbar(xaxis, pks_odd_mean, yerr=pks_odd_std)
184 plt.legend([line1, line2], ['Peaks even', 'Peaks odd'])
185 plt.ylabel('Amplitude [V]')
186 plt.xlabel('# Sample')
187 plt.grid()
188 plt.show()
189
190 plt.figure(31)
191 plt.title('Odd/Even peak distribution')
192 plt.hist(pks_even_max, nbins=nbins, alpha=1)
193 plt.hist(pks_odd_max, nbins=nbins, alpha=1)
194 plt.legend([line1, line2], ['Peaks even', 'Peaks odd'])
195 plt.ylabel('# Counts')
196 plt.xlabel('Amplitude [V]')
197 plt.grid()
198 plt.show()
199
200 print "Test 2: Divide the analysis in two part: first half/second half"
201
202 pks_low_mean1 = np.mean(pks_low[0:int(len(pks_low)/2.),0])
203 pks_low_std1 = np.std(pks_low[0:int(len(pks_low)/2.),0])/sqrt(len(pks_low/2.0))
204 pks_high_mean1 = np.mean(pks_high[0:int(len(pks_high)/2.),0])
205 pks_high_std1 = np.std(pks_high[0:int(len(pks_high)/2.),0])/sqrt(len(pks_high/2.0))
206
207 pks_low_mean2 = np.mean(pks_low[int(len(pks_low)/2.)+1:len(pks_low)],0)
208 pks_low_std2 = np.std(pks_low[int(len(pks_low)/2.)+1:len(pks_low)],0)/sqrt(len(pks_low/2.0))
209 pks_high_mean2 = np.mean(pks_high[int(len(pks_high)/2.)+1:len(pks_high)],0)
210 pks_high_std2 = np.std(pks_high[int(len(pks_high)/2.)+1:len(pks_high)],0)/sqrt(len(pks_high/2.0))
211
212 pks_low_max1 = (pks_low_max[0:int(len(pks_low_max)/2.)])
213 pks_high_max1 = (pks_high_max[0:int(len(pks_high_max)/2.)])
214
215 pks_low_max2 = (pks_low_max[int(len(pks_low_max)/2.)+1:len(pks_low_max)])
216 pks_high_max2 = (pks_high_max[int(len(pks_high_max)/2.)+1:len(pks_high_max)])
217
218 plt.figure(40)
219 plt.title('First Half – Second Half – EOL – on/off')
220 plt.errorbar(xaxis, pks_low_mean1, yerr=pks_low_std1)
221 plt.errorbar(xaxis, pks_low_mean2, yerr=pks_low_std2)
222 plt.errorbar(xaxis, pks_high_mean1, yerr=pks_high_std2)

```

```
223 plt.errorbar(xaxis, pks_high_mean2, yerr=pks_high_std2)
224 plt.legend(['EOL off, first half', 'EOL off, second half', 'EOL on, first half', 'EOL on, second half
           '])
225 plt.ylabel('Amplitude [V]')
226 plt.xlabel('# Sample')
227 plt.grid()
228 plt.show()
229
230 plt.figure(41)
231 plt.title('First Half - Second Half - EOL - on/off Peaks distributions')
232 plt.hist(pks_low_max1, nbins_histo(pks_low_max1, delta_bin), alpha=1)
233 plt.hist(pks_low_max2, nbins_histo(pks_low_max2, delta_bin), alpha=1)
234 plt.hist(pks_high_max1, nbins_histo(pks_high_max1, delta_bin), alpha=1)
235 plt.hist(pks_high_max2, nbins_histo(pks_high_max2, delta_bin), alpha=1)
236 plt.legend(['EOL off, first half', 'EOL off, second half', 'EOL on, first half', 'EOL on, second half
           '])
237 plt.ylabel('# Counts')
238 plt.xlabel('Amplitude [V]')
239 plt.grid()
240 plt.show()
241
242
243 if savefile == True:
244     out = np.zeros((5, len(pks_high_mean)))
245     out[0] = (xaxis)
246     out[1] = (pks_low_mean)
247     out[2] = (pks_low_std)
248     out[3] = (pks_high_mean)
249     out[4] = (pks_high_std)
250     out1 = np.transpose(np.array(out))
```

Appendice B

In questa appendice è riportato un listato del foglio Smath utilizzato per progettare la cavità.

$$\lambda := 1064 \cdot 10^{-9} \text{ m}$$

Lunghezza d'onda del laser

PARAMETRI DELLA CAVITA'

$$RoC1 := 10^6 \text{ m}$$

Raggi di curvatura specchi piani

$$RoC2 := 10^6 \text{ m}$$

Raggio di curvatura specchio sferico

$$RoC3 := 6 \text{ m}$$

$$b := 15 \text{ cm}$$

Estensioni della base e dell'altezza

$$h := 1.5 \text{ m}$$

della cavità triangolare

$$r1(R1) := \sqrt{R1}$$

Applicazione della legge

$$t1(R1) := \sqrt{1 - R1}$$

di conservazione R+T=1 ai tre specchi

$$r2(R2) := \sqrt{R2}$$

$$t2(R2) := \sqrt{1 - R2}$$

$$r3(R3) := \sqrt{R3}$$

$$r1(0.989) = 0.9945$$

$$t1(0.989) = 0.1049$$

$$r1(0.997) = 0.9985$$

$$t1(0.997) = 0.0548$$

$$t2(0.997) = 0.0548$$

$$r2(0.989) = 0.9945$$

$$t2(0.989) = 0.1049$$

$$r2(0.997) = 0.9985$$

il coefficiente di trasmissione dello specchio curvo (specchio 3)

$$r_3(0.9995) = 0.9997$$

$$r_3(0.9995) = 0.9997$$

curvo (specchio 3) deve essere calcolata

CARATTERISTICHE DELLA CAVITA'

Per alcuni di questi calcoli si è assunto che la cavità triangolare sia equivalente a una cavità lineare con metà del perimetro e uno specchio piano tra i due specchi alla base dove è situato il beam waist

$$p := b + 2 \cdot \sqrt{\frac{b^2}{4} + h^2} = 3.1537 \text{ m}$$

Round trip (per la cavità triangolare)

$$FSR := \frac{c}{p} = 95.0591 \text{ MHz}$$

Free spectral range

$$w_0 := \sqrt{\frac{\lambda}{\pi} \cdot \frac{p}{2} \cdot \left(\frac{2 \cdot RoC_3}{p} - 1 \right)^{\frac{1}{4}}} = 945.7524 \text{ } \mu\text{m}$$

Beam waist nel punto a metà strada tra i due specchi alla base

$$z_r := \frac{\pi \cdot w_0^2}{\lambda} = 2.641 \text{ m}$$

Raylight range

$$w_3 := w_0 \cdot \sqrt{1 + \left(\frac{p}{z_r} \right)^2} = 1101.5099 \text{ } \mu\text{m}$$

Taglia del fascio presso lo specchio curvo

$$g_{ouy} := \arctan\left(\frac{p}{2} \cdot \frac{1}{z_r}\right) = 0.5383$$

$$g_3 := 1 - \frac{p}{2 \cdot RoC_3} = 0.7372$$

fattore g3 dello specchio curvo (g1=g2=1)

$$HOM_{spac} := FSR \cdot \frac{\arccos(\sqrt{g_3})}{\pi} = 16.2871 \text{ MHz}$$

Spaziatura tra i modi di ordine superiore

$$\text{Fin}(R_1; R_2; R_3; x) := 2 \cdot \frac{\pi}{\delta_{rt}(R_1; R_2; R_3; x)}$$

Finesse

$$\text{FWHM}(R_1; R_2; R_3; x) := \frac{FSR}{\text{Fin}(R_1; R_2; R_3; x)}$$

Ampiezza di linea

$$\delta_{rt}(R1; R2; R3; m) := (3 - R1 - R2 - R3 + m)$$

Perdite da round trip con eventuali ulteriori piccole perdite m

$$\delta_{rt}(0.989; 0.989; 0.9995; 0) = 0.0225$$

$$\text{Fin}(0.989; 0.989; 0.9995; 0) = 279.2527$$

Misure in polarizzazione P senza perdite m

$$\text{FWHM}(0.9898; 0.989; 0.9995; 0) = 328.3021 \text{ kHz}$$

$$\delta_{rt}(0.997; 0.997; 0.9995; 0) = 0.0065$$

Misure in polarizzazione S senza perdite

$$\text{Fin}(0.997; 0.997; 0.9995; 0) = 966.6439$$

$$\text{FWHM}(0.997; 0.997; 0.9995; 0) = 98.3393 \text{ kHz}$$

$$\delta_{rt}(0.989; 0.989; 0.9995; 0.032) = 0.0545$$

Misure in polarizzazione P con perdite stimate di circa il 3%

$$\text{Fin}(0.989; 0.989; 0.9995; 0.032) = 115.2878$$

$$\text{FWHM}(0.989; 0.989; 0.9995; 0.032) = 824.5375 \text{ kHz}$$

$$\delta_{rt}(0.997; 0.997; 0.9995; 0.0280) = 0.0345$$

$$\text{Fin}(0.997; 0.997; 0.9995; 0.028) = 182.1213$$

Misure in polarizzazione S con perdite stimate di circa il 3%

$$\text{FWHM}(0.997; 0.997; 0.9995; 0.028) = 521.9549 \text{ kHz}$$

VERIFICA DEI CALCOLI COL FORMLISMO DEI CAMPI CIRCOLANTI
ROUND TRIP VOLTAGE GAIN NELLE DUE POLARIZZAZIONI

$$\text{grt}(R1; R2; R3) := r1(R1) \cdot r2(R2) \cdot r3(R3)$$

$$\text{grtq}(R1; R2; R3; m) := \sqrt{1 - \delta_{rt}(R1; R2; R3; m)}$$

$$\text{grt}(0.989; 0.989; 0.9995) = 0.9888$$

$$\text{grtq}(0.989; 0.989; 0.9995; 0) = 0.9887$$

polarizzazione P senza perdite m

$$\text{grtq}(0.989; 0.989; 0.9995; 0)^2 = 0.9775$$

$$(r1(0.989) \cdot r2(0.989) \cdot r3(0.9995))^2 = 0.9776$$

$$\text{grt}(0.997; 0.997; 0.9995) = 0.9968$$

$$\text{grtq}(0.997; 0.997; 0.9995; 0) = 0.9967$$

polarizzazione S senza perdite m

$$(r1(0.997) \cdot r2(0.997) \cdot r3(0.9995))^2 = 0.9935$$

$$\text{grtq}(0.997; 0.997; 0.9995; 0)^2 = 0.9935$$

CAMPI IN POLARIZZAZIONE P senza perdite

$$E_{\text{circ}} := i \cdot \frac{t1(0.989)}{1 - \text{grt}(0.989; 0.989; 0.9995)} = 9.325 \cdot i$$

Round trip gain (campo circolante)

$$I_{\text{circ}} := |E_{\text{circ}}|^2 = 86.9556$$

$$E_{\text{ref}} := \frac{1}{r1(0.989)} \cdot \frac{(r1(0.989)^2 - \text{grt}(0.989; 0.989; 0.9995))}{1 - \text{grt}(0.989; 0.989; 0.9995)} = 0.0221$$

Campo riflesso e intensità (alla risonanza)

$$I_{\text{ref}} := E_{\text{ref}}^2 = 0.0005$$

Campo trasmesso e intensità (alla risonanza)

$$E_{\text{trans}} := - \frac{t1(0.989) \cdot t2(0.989)}{1 - \text{grt}(0.989; 0.989; 0.9995)} = -0.978$$

$$I_{\text{trans}} := E_{\text{trans}}^2 = 0.9565$$

$$I_{\text{leak}} := (I_{\text{circ}}) \cdot (1 - 0.9995) = 0.0435$$

$$I_{\text{out}} := I_{\text{ref}} + I_{\text{trans}} + I_{\text{leak}} = 1.0005$$

CAMPI IN POLARIZZAZIONE S senza perdite

$$E_{\text{circ}} := i \cdot \frac{t1(0.997)}{1 - \text{grt}(0.997; 0.997; 0.9995)} = 16.8567 \cdot i$$

$$I_{\text{circ}} := |E_{\text{circ}}|^2 = 284.1494$$

$$E_{\text{ref}} := \frac{1}{r1(0.997)} \cdot \frac{(r1(0.997)^2 - \text{grt}(0.997; 0.997; 0.9995))}{1 - \text{grt}(0.997; 0.997; 0.9995)} = 0.0768$$

$$I_{\text{ref}} := E_{\text{ref}}^2 = 0.0059$$

$$E_{\text{trans}} := - \frac{t1(0.997) \cdot t2(0.997)}{1 - \text{grt}(0.997; 0.997; 0.9995)} = -0.9233$$

$$I_{\text{trans}} := E_{\text{trans}}^2 = 0.8524$$

$$I_{\text{leak}} := (I_{\text{circ}}) \cdot (1 - 0.9995) = 0.1421$$

$$I_{\text{out}} := I_{\text{ref}} + I_{\text{trans}} + I_{\text{leak}} = 1.0004$$

CAMPO IN POLARiZZAZIONE P con perdite di circa il 3%

$$E_{\text{circ}} := i \cdot \frac{t1(0.989)}{1 - \text{grtq}(0.989; 0.989; 0.9675; -0.032)} = 9.27 \cdot i$$

$$I_{circ} := |E_{circ}^2| = 85.933$$

$$E_{ref} := \frac{1}{r_1(0.989)} \cdot \frac{(r_1(0.989)^2 - \text{grtq}(0.989; 0.989; 0.9675; -0.032))}{1 - \text{grtq}(0.989; 0.989; 0.9675; -0.032)} = 0.0279$$

$$I_{ref} := E_{ref}^2 = 0.0008$$

$$E_{trans} := -\frac{t_1(0.989) \cdot t_2(0.989)}{1 - \text{grtq}(0.989; 0.989; 0.9675; -0.032)} = -0.9722$$

$$I_{trans} := E_{trans}^2 = 0.9453$$

$$I_{leak} := (I_{circ}) \cdot (1 - 0.9675 - 0.03185) = 0.0559$$

$$I_{out} := I_{ref} + I_{trans} + I_{leak} = 1.0019$$

CAMPO IN POLARIZZAZIONE S con perdite di circa il 3%

$$E_{circ} := i \cdot \frac{t_1(0.997)}{1 - \text{grtq}(0.997; 0.997; 0.9715; -0.02795)} = 16.6969 \cdot i$$

$$I_{circ} := |E_{circ}^2| = 278.7872$$

$$E_{ref} := \frac{1}{r_1(0.997)} \cdot \frac{(r_1(0.997)^2 - \text{grtq}(0.997; 0.997; 0.9715; -0.02795))}{1 - \text{grtq}(0.997; 0.997; 0.9715; -0.02795)} = 0.0856$$

$$I_{ref} := E_{ref}^2 = 0.0073$$

$$E_{trans} := -\frac{t_1(0.997) \cdot t_2(0.997)}{1 - \text{grtq}(0.997; 0.997; 0.9715; -0.02795)} = -0.9145$$

$$I_{trans} := E_{trans}^2 = 0.8364$$

$$I_{leak} := (I_{circ}) \cdot (1 - 0.9715 - 0.02795) = 0.1533$$

$$I_{out} := I_{ref} + I_{trans} + I_{leak} = 0.997$$

CALCOLO DEL COEFFICIENTE DI TRASMISSIONE DELLO SPECCHIO CURVO

Nella sezione dedicata alla caratterizzazione della cavità abbiamo calcolato le riflessività e trasmissività dello specchio curvo trovando un disaccordo tra valori ricavati e misurati al potenziometro. La cosa è spiegabile assumendo un segnale in fuoriscita dalla cavità, fatto plausibile in quanto la nostra cavità non ha pareti che la separino dall'esterno.

Polarizzazione S

$$\delta_{rt} := 0.0345$$

+/-

$$0.0004$$

$$R_3 := 3 - 2 \cdot 0.997 - \delta_{rt} + 0.0280 = 0.9995$$

dove abbiamo assunto una perdita del 2,8 %

$$t_{3s} := \sqrt{1 - 0.9995} = 0.0224$$

$$\delta_{rt} := 0,0545$$

+/-

0.0003

Polarizzazione P

$$R_3 := 3 - 2 \cdot 0.989 - \delta r t + 0.032 = 0.9995$$

dove abbiamo assunto una perdita del 3,2 %

$$t_{3p} := \sqrt{1 - 0,9995} = 0.0224$$

Appendice C

In questa appendice è riportato il listato del foglio Smath utilizzato per progettare la lente elettro-ottica. In coda è presente una stima della variazione percentuale indotta dalla LEO sull'ampiezza del segnale

PARAMETRI E DEFINIZIONI

Fascio input

$$\lambda := 1064 \text{ nm}$$

$$w_0 := 997 \text{ }\mu\text{m}$$

$$z_0 := 0 \text{ m}$$

$$P_0 := 10 \text{ mW}$$

Dispositivo EOL

Consideriamo il caso di una coppia di elettrodi senza push - pull

$$r_{33} := 30 \frac{\text{pm}}{\text{V}}$$

$$n_e := 2.23$$

Spessore, larghezza, lunghezza

$$T := 5 \text{ mm}$$

$$L_y := 10 \text{ mm}$$

$$L := 2 \text{ cm}$$

$$s_1 := 187 \text{ cm}$$

Parametri derivati

$$FSR := \frac{c}{3.1537 \text{ m}} = 9.5061 \cdot 10^7 \text{ Hz}$$

This is an angular frequency!

$$\omega := \frac{c}{1064 \text{ nm}} \cdot 2 \cdot \pi = 1.7703 \cdot 10^{15} \text{ Hz}$$

$$\omega := 2 \cdot \pi \cdot 2 \cdot (10^5) \cdot FSR = 1.1946 \cdot 10^{14} \text{ Hz}$$

$$z_R := \frac{w_0^2 \cdot \pi}{\lambda} = 2.9349 \text{ m}$$

Reyleigh range

$$q_1 := z_0 - 1.87 \text{ m} + i \cdot z_R$$

parametro q per il fascio di input

FUNZIONI

$$\text{floor}(x) := \text{if } \text{round}(x; 0) < x \\ \text{round}(x; 0)$$

else

$$\text{round}(x; 0) - 1$$

$$\text{conj}(x) := \text{Re}(x) - \text{Im}(x)$$

$$D(R) := 2 \cdot \left(R - \sqrt{R^2 - \left(\frac{L_y}{2} \right)^2} \right)$$

Spessore massimo di una lente

$$N(d; R) := \text{floor} \left(\frac{L}{d + D(R)} \right)$$

Numero di lenti nel dispositivo

$$N(2 \cdot D(1.5 \text{ cm}); 3.5 \text{ cm}) = 4$$

"Coda" (lunghezza del cristallo inutilizzata)

$$l(d; R) := L - N(d; R) \cdot (d + D(R))$$

$$\Delta n(V) := \frac{1}{2} \cdot r33 \cdot ne^3 \cdot \frac{V}{T}$$

$$nL(V) := \Delta n(V) + ne$$

Salto d'indice e indice di rifrazione assoluto dentro la lente

MATRICE EOL

$$pg1 := \begin{bmatrix} 1 & s1 \\ 0 & 1 \end{bmatrix}$$

propagazione in aria per distanza s1

$$pg2(d; R) := \begin{bmatrix} 1 & l(d; R) \\ 0 & 1 \end{bmatrix}$$

propagazione nella "coda"

$$pg(d) := \begin{bmatrix} 1 & \frac{d}{2} \\ 0 & 1 \end{bmatrix}$$

Propagazione nel cristallo fra le lenti (meta' spazio)

$$M2 := \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 0 & ne \end{bmatrix}$$

Interfaccia aria-cristallo

$$M1 := \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 0 & ne^{-1} \end{bmatrix}$$

Interfaccia cristallo-aria

$$M(R; V) := \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ -\frac{\Delta n(V)}{R \cdot ne} & \frac{nL(V)}{ne} \end{bmatrix} \cdot \begin{bmatrix} 1 & D(R) \\ 0 & 1 \end{bmatrix} \cdot \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ -\frac{\Delta n(V)}{R \cdot ne} & \frac{ne}{nL(V)} \end{bmatrix}$$

Lente spessa nel niobato

Dispositivo completo [interfaccia+N*(cristallo+lente+cristallo)+coda+interfaccia]

d = separazione fra le lenti

R = raggio curvatura

V = voltaggio max

$$X(d; R; V) := M2 \cdot pg2(d; R) \cdot (pg(d) \cdot M(R; V) \cdot pg(d))^{N(d; R)} \cdot M1 \cdot pg1$$

EFFETTO EOL SU FASCIO

Nuovo parametro q del fascio dopo la lente EOL

$$q2(A) := \frac{A_{11} \cdot q1 + A_{12}}{A_{21} \cdot q1 + A_{22}}$$

$$w02(X) := \sqrt{\frac{\text{Im}(q2(X)) \cdot \lambda}{\pi}}$$

$$mB(d; R; V) := 2 \cdot \frac{(w02(X(d; R; V)) - w02(X(d; R; 1V)))}{w_0}$$

$$mG(d; R; V) := \frac{\text{Re}(q2(X(d; R; V)) - q2(X(d; R; 1V)))}{z_R}$$

$$mB(4 \text{ mm}; 3.5 \text{ cm}; 118.25 \text{ V}) = 5.8096 \cdot 10^{-7}$$

$$mG(4 \text{ mm}; 3.5 \text{ cm}; 118.25 \text{ V}) = -0.0026$$

STIMA POTENZA RIFLESSA DALLA SIDEBAND

Funzione di riflettività assumendo che la sideband a ω risuoni

la sideband a ω risuoni con la frequenza del modo LG00

e che la sideband a $\omega + \Omega$ risuoni con la frequenza del modo LG01

TEST: target 35E-11 W

$$\beta := 0.0539$$

$$\gamma := 0.0729$$

$$IQ(d; R; V) := P0 \cdot (mG(d; R; V) \cdot \gamma + mB(d; R; V) \cdot \beta)$$

$$II(d; R; V) := P0 \cdot (mG(d; R; V) \cdot \beta - mB(d; R; V) \cdot \gamma)$$

$$|IQ(4 \text{ mm}; 3.5 \text{ cm}; 118.25 \text{ V})| = 1.9073 \cdot 10^{-6} \text{ W}$$

$$|II(4 \text{ mm}; 3.5 \text{ cm}; 118.25 \text{ V})| = 1.4109 \cdot 10^{-6} \text{ W}$$

Ampiezza segnale:

$$SS(d; R; V) := P0 \cdot \sqrt{|(mG(d; R; V) \cdot \gamma + mB(d; R; V) \cdot \beta)|^2 + |(mG(d; R; V) \cdot \beta - mB(d; R; V) \cdot \gamma)|^2}$$

$$SS(4 \text{ mm}; 3.5 \text{ cm}; 118.25 \text{ V}) = 2.3724 \cdot 10^{-6} \text{ W}$$

CALCOLO IN STATICO

$$r(d; R; V) := \frac{(\beta + mB(d; R; V))^2 + (\gamma + mG(d; R; V))^2}{\gamma^2 + \beta^2}$$

$$r(4 \text{ mm}; (3.5) \text{ cm}; (118.25) \text{ V}) = 0.9544$$

Bibliografia

- [1] Steven Weinberg. Gravitation and Cosmology: principles and applications of the General Theory of Relativity. John Wiley and sons, New York, 1972
- [2] A. E. Siegman, Lasers. University Science Books, 1986.
- [3] Bahaa E. A. Saleh and Malvin Carl Teich. Fundamentals of Photonics. Wiley, 2007 Series in Pure and Applied Optics.
- [4] per gentile concessione di Nur Ismail, licenza (CC BY-SA 4.0) dall'articolo Wikipedia "Fabry Perot interferometer"
- [5] Quantum Physics of Light and Matter A Modern Introduction to Photons, Atoms and Many-Body Systems, Salasnich, Luca , Springer, 2014
- [6] Chris Henze, NASA Advanced Supercomputing Division, NASA Ames Research Center
- [7] F. Arcense, S. Aoudia, et al. Einstein gravitational wave telescope conceptual design study. Technical report, 2012.
- [8] A.A. V.V. Enhancing the sensitivity of the LIGO gravitational wave detector by using squeezed states of light ; arXiv:1310.0383v1 [quant-ph] 1 Oct 2013
- [9] General Relativity: an Introduction for Physicist M.P. Hobson, G. Efstathiou, A. N. Lasenby Cambridge University Press 2006
- [10] H. Kogelnik and T. Li. Laser Beams and Resonators. Appl. Opt. 46 1550-1567 (1966).
- [11] K. Goda. Development of Techniques for Quantum-Enhanced Laser-Interferometric Gravitational-Wave Detectors. PhD thesis, University of California at Berkeley, 2001.
- [12] C. Tim Lei Physics 4510 Optics webpage". especially Chapter 5
- [13] Caves, C.M. Quantum-mechanical radiation-pressure fluctuations in an Interferometer. Phys. Rev. Lett. 45,75-79 (1980).
- [14] Caves, C.M. Quantum-mechanical noise in an interferometer. Phys. Rev. D 23, 1693-1708 (1981).

- [15] R. W. P. Drever, J. Hough, A. J. Munley, S. A. Lee, R. Spero, S. E. Whitcomb, H. Ward, G. M. Ford, M. Hereld, N. A. Robertson, I. Kerr, J. R. Pugh, G. P. Newton, B. Meers, E. D. Brooks, and Y. Gursel. Optical cavity laser interferometry for gravitational wave detection. *Laser Spectroscopy*, 5:33, 1981.
- [16] W. H. Steel. *Interferometry*. Cambridge University Press, 1967.
- [17] Yariv, A., Yeh, P. (1984). *Optical waves in crystals: Propagation and control of laser radiation*. Hoboken, N.J: John Wiley and Sons.
- [18] John Stewart (1991), "Advanced General Relativity", Cambridge University Press, ISBN 0-521-44946-4
- [19] The First Detection of Gravitational Waves :Andrzej Królak, Mandar Patil (Warsaw, Inst. Math.); published in a special issue of *Universe "Varying Constants and Fundamental Cosmology"* no.3, 59
- [20] Observation of Gravitational Waves from a Binary Black Hole Merger B.P. Abbott et al. (LIGO Scientific Collaboration and Virgo Collaboration) *Phys. Rev. Lett.* 116, 061102 Published 11 February 2016
- [21] B. P. Abbott; et al. (LIGO Scientific Collaboration and Virgo Collaboration) (1 June 2017). "GW170104: Observation of a 50-Solar-Mass Binary Black Hole Coalescence at Redshift 0.2". *Physical Review Letters*. 118 (22): 22110
- [22] B. P. Abbott, GW170817: Observation of Gravitational Waves from a Binary Neutron Star Inspiral, in *Physical Review Letters*, vol. 119, n° 16, 16 ottobre 2017
- [23] Davide Castelvecchi, Rumours swell over new kind of gravitational-wave sighting, *Nature News*, 25 agosto 2017
- [24] B. P. Abbott et al., Gravitational Waves and Gamma-Rays from a Binary Neutron Star Merger: GW170817 and GRB 170817A, in *The Astrophysical Journal Letters*
- [25] B. P. Abbott, A gravitational-wave standard siren measurement of the Hubble constant, in *Nature*, 16 ottobre 2017
- [26] *Photorefractive Materials: Fundamental Concepts, Holographic Recording and Materials Characterization*, John Wiley and sons, NewYork, 2006
- [27] Feasibility of near-unstable cavities for future gravitational wave detectors; Haoyu Wang (Birmingham U., Shanghai U. Sci. Tech., Shanghai SSRF), Miguel Dovale-Álvarez, Christopher Collins, Daniel David Brown, Mengyao Wang, Conor M. Mow-Lowry (Birmingham U.), Sen Han (Shanghai U. Sci. Tech. and Shanghai SSRF), Andreas Freise (Birmingham U.) *Phys.Rev. D*97 (2018) no.2, 022001
- [28] Alignment sensing for optical cavities using radio-frequency jitter modulation; Fulda P, Voss D, Mueller C, Ortega LF, Ciani G, Mueller G, Tanner DB. *Optical review*
- [29] <http://www.scientifico.asti.it/fisica-2.0/a-lenti-sottili/>
- [30] Logitech website, <https://logitech.uk.com/product/precision-jigs/>
- [31] Thorlab website, https://www.thorlabs.com/newgrouppage9.cfm?objectgroup_id=3483

Ringraziamenti

E' con grande piacere e devozione che ringrazio tutte le persone che hanno contribuito al completamento di questo lavoro di tesi. Per primi i miei relatore e correlatore Giacomo Ciani e Marco Bazzan, che mi hanno permesso di lavorare in un team importante come l'INFN di Legnaro e mi hanno insegnato più di quanto un allievo possa aspettarsi dai suoi maestri. Ringrazio di cuore il collega Marco Vardaro per il suo fondamentale aiuto in laboratorio e al computer . Un grazie molto grande anche a Juan Marquez che ha lavorato con me a Legnaro durante il suo periodo di Exchange qui in Italia. Rivolgo infine a un caro pensiero a Jean-Pierre Zendri, a Antonio Perreca e Matteo Leonardi. Anche se fugace, la loro presenza è stata di grande aiuto.