UNIVERSITÀ DEGLI STUDI DI PADOVA

DIPARTIMENTO DI SCIENZE ECONOMICHE ED AZIENDALI

"M.FANNO"

CORSO DI LAUREA

IN

ECONOMIA E MANAGEMENT

PROVA FINALE

"I MERCATI FINANZIARI, MISURARE RISCHIO E RENDIMENTO. APPLICAZIONE AI PRINCIPALI TITOLI BANCARI ITALIANI."

RELATORE:

PROF. MATTEO GRIGOLETTO

LAUREANDO: MARCO CIVIERO

MATRICOLA N. 1043524

ANNO ACCADEMICO 2014 – 2015

Per Valentino,

il primo vero economista che mi abbia istruito.

Un ringraziamento particolare va agli amici di Bancadria:

Daniela,

Elisa,

Luca,

Matteo,

Paolo,

Silvia

e Sebastiano.

Un grazie di cuore per l'esperienza di questi mesi.

1. PRESENTAZIONE E OBIETTIVI DELLA TESI

Lo scopo che mi sono posto con questa tesi è quello di illustrare il funzionamento dei mercati finanziari, dandone, inizialmente una breve descrizione a livello qualitativo per poi focalizzare l'attenzione su concetti quantitativo/tecnici come l'analisi e la misurazione del rischio e del rendimento degli strumenti finanziari maggiormente diffusi e conosciuti come le azioni. Per quanto riguarda l'analisi tecnica e quantitativa farò riferimento a concetti statistici ed econometrici con applicazioni finanziarie, farò inoltre largo uso di grafici e dati che otterrò mediante l'utilizzo di R (software di programmazione statistica) con pacchetti specifici per l'analisi finanziaria.

Gli strumenti finanziari sul quale baserò i miei ragionamenti saranno inizialmente i singoli titoli azionari per poi approfondire portafogli azionari e indici di borsa come il FTSE MIB.

Inoltre farò riferimento ai tre maggiori titoli bancari del mercato azionario italiano: Unicredit, Intesa San Paolo e Monte dei paschi di Siena, per avere una visione applicativa delle tematiche trattate.

2. I MERCATI FINANZIARI

I mercati finanziari sono quei mercati in cui vengono scambiate le attività finanziarie.

Essi vengono tradizionalmente distinti in tre settori: mercato creditizio (o monetario), mercato assicurativo e mercato mobiliare, tripartizione che si basa sia sulla diversità dei prodotti scambiati sia sul diverso ruolo svolto dagli intermediari.

Gli operatori **del mercato creditizio** sono le banche, la cui funzione intermediatrice consiste nel raccogliere il risparmio, che si obbligano a rimborsare a vista maggiorato degli interessi concordati, e nell'erogazione del credito a breve e medio termine.

Sul **mercato assicurativo**, invece, l'investitore paga un premio per ottenere, come corrispettivo, la copertura del rischio al verificarsi di certi eventi futuri e incerti.

Il **mercato mobiliare** (sul quale mi concentrerò maggiormente nei capitoli seguenti) comprende esclusivamente quello specifico segmento del mercato finanziario dove sono trattati i valori mobiliari, ossia strumenti finanziari così denominati per la loro peculiarità di circolare facilmente, poiché sono dotati di un elevato grado di trasferibilità.

Sono esclusi, quindi, da tale definizione quei prodotti che, creati ex novo, non hanno raggiuto ancora una tipicità economica tale da permettergli l'inserimento nel mercato mobiliare con conseguente tipicità giuridica. A seguito del fatto che i titoli trattati su questo mercato sono emessi da imprese (si faccia riferimento alle azioni e alle obbligazioni) e instaurano comunque un rapporto obbligazionario tra l'emittente e l'investitore, la prestazione tipica dell'intermediario mobiliare non è la restituzione di somme ricevute in deposito, come per quello creditizio, o la corresponsione di una somma al verificarsi dell'evento futuro e incerto dedotto nella polizza assicurativa, bensì la corretta esecuzione del mandato ricevuto dal cliente. Nell'ambito del mercato mobiliare, inoltre, bisogna distinguere tra mercato primario e mercato secondario. **Il mercato primario** è quello sul quale vengono negoziati, per essere in seguito distribuiti sul mercato secondario, titoli non ancora destinati ad essere distribuiti presso il mercato dei risparmiatori. Ad assumere la veste di venditore è quindi normalmente o l'emittente stesso dei titoli o un altro detentore, un intermediario che acquista grossi quantitativi di titoli in sede di emissione con lo scopo di collocarli successivamente presso il pubblico, direttamente o indirettamente, ossia attraverso altri intermediari. La funzione economica del mercato primario è quella di procurare mezzi finanziari alle imprese (ma anche allo stato: mercato primario dei titoli di stato). Il **mercato secondario**, invece, è quello dove vengono negoziati i titoli già in circolazione, la cui funzione quindi non è quella di creare un canale finanziario alternativo a quello creditizio per le imprese, ma di garantire la liquidità dell'investimento effettuato da coloro che acquistano titoli, attraverso la creazione di un sistema costante di domanda e offerta. Questa distinzione in fondo spiega anche la tradizionale diversa regolamentazione dei tre settori nonché il diverso atteggiarsi della vigilanza e spesso la diversità delle autorità preposte (Introduzione al Diritto dei Mercati finanziari, Giuseppe di Gaspare, 1999).

2.1 LO SCOPO DI UN PROGETTO D'INVESTIMENTO: LE ASPETTATIVE DI UN AGENTE ECONOMICO RAZIONALE

Ogni singolo agente economico razionale decide di procedere con un progetto di investimento in vista di un incremento della propria utilità iniziale, il che significa che si attende un flusso di ricchezza in entrata che sia maggiore all'ammontare di denaro investito nel progetto, in un certo intervallo temporale che egli stesso può o meno decidere a priori.

Se si verifica questa condizione l'investitore incrementa la sua utilità iniziale (si consideri sempre la razionalità dell'agente economico e che sia soddisfatta la condizione di non-sazietà).

Applicando questo ragionamento al mercato azionario, **investitore è colui che impiega del proprio capitale acquistando azioni**, ovvero frazionamenti del capitale sociale di una società (nel nostro caso) quotata che in cambio di liquidità apportata per l'acquisto del titolo gli garantirà la qualifica di "socio" con tutti i conseguenti diritti di carattere patrimoniale e amministrativo.

Con l'acquisto di azioni l'investitore subentra in pieno in tutti i pericoli che affronta una società

nel corso della sua permanenza sul mercato, sebbene in quantità limitata, pari al totale del capitale investito.
L'incremento di utilità, dunque, che l'investitore si aspetta dall'acquisto di titoli di capitale di rischio di una società, può essere generato in due modalità.
E' chiamato **"capital gain"** il tipo di remunerazione che si ha con il disinvestimento del titolo ad un prezzo maggiorato rispetto a quello d'acquisto.
Il **tasso di dividendo** o "**dividend yield**" è un'altra modalità (alternativa o complementare al capital gain) con la quale si può vedere aumentato il valore inziale del capitale investito, esso consiste nella distribuzione da parte della società di una quota di utile ai propri soci.
In fine possiamo definire in qualche modo il **rendimento** del nostro investimento come la somma del guadagno ottenuto dal capital gain con il guadagno ottenuto dal tasso di dividendo.
Finora abbiamo considerato la buona riuscita dell'investimento, ovvero abbiamo dato per scontato che il **rendimento** del progetto in questione fosse maggiore di zero, purtroppo nella realtà nessuno ci può assicurare che l'investimento abbia un buon fine, e come citato prima l'investitore, diventando socio di qualsivoglia impresa quotata deve essere pronto a sopportare il carico di un eventuale andamento sfavorevole dell'attività economica in questione e conseguentemente subire una perdita di ricchezza, che ricordiamo non può superare il valore del capitale iniziale investito. In questo caso a livello qualitativo possiamo dire che un investitore deve far fronte ad un **rischio** di non vedersi remunerato dal progetto di investimento, ovvero che tale investimento gli abbia portato un **rendimento** minore di zero.
L'investitore che è disposto ad esporsi ad un ***rischio più grande*** vorrà essere ricompensato da un ***rendimento maggiore*** come premio per aver sostenuto tale onero, da qui la stretta interconnessione tra rischio e rendimento in ambito finanziario.

2.2 PARADIGMA RISCHIO-RENDIMENTO IN FINANZA: PREMESSE PER UN'ANALISI QUANTITATIVA

Come si è visto i termini **rischio e rendimento** sono strettamente legati tra loro, perlomeno nel linguaggio economico-finanziario, queste due nozioni sono i concetti chiave della mia tesi e sebbene finora siano stati definiti solamente a livello intuitivo, la maggior parte di questo lavoro consisterà in un'analisi tecnica/quantitativa degli stessi e all'introduzione di **modelli** che ci permettono di misurarli e in qualche modo gestirli, come la **teoria di portafoglio di Markowitz**, **Capital Asset Pricing Model**, **il Value-at-Risk e L'Expected Shortfall**.
Consideriamo d'ora in poi quello che finora abbiamo chiamato "progetto di investimento" un investimento in un unico Titolo azionario, di conseguenza il rendimento del nostro progetto

sarà equivalente al rendimento del titolo (in seguito analizzeremo anche come si complica la questione quando si affronta l'analisi di un portafoglio composto da due o più titoli).

2.2.1 MA QUINDI COME SI MISURA IL RENDIMENTO DI UN TITOLO?

Per poter dire come si misura il rendimento di un titolo dobbiamo fare un piccolo salto indietro e introdurre il concetto di Quotazione di Mercato.

Per quotazione di mercato (Fonte: www.borsaitaliana.it) di un titolo si intende il prezzo unitario delle azioni di una certa società in un certo istante di tempo, questo valore tiene conto di fattori esogeni rispetto alla società come l'influenza della domanda e dell'offerta nel mercato borsistico sul titolo azionario, che può modificarne il valore, gli aspetti monetari (svalutazione, inflazione e tasso di cambio), le prospettive di crescita del settore in cui l'impresa opera e infine le prospettive di crescita dell'economia nazionale e globale; oppure da fattori endogeni alla società come la performance recente dell'impresa e le aspettative per la sua performance futura.

Il grafico 2.1 rappresenta le quotazioni giornaliere dei tre maggiori istituti di Credito italiani quotati alla borsa di Milano, Unicredit, Intesa San Paolo e Monte dei Paschi di Siena, nel periodo dal 1/1/2005 al 31/3/2015.

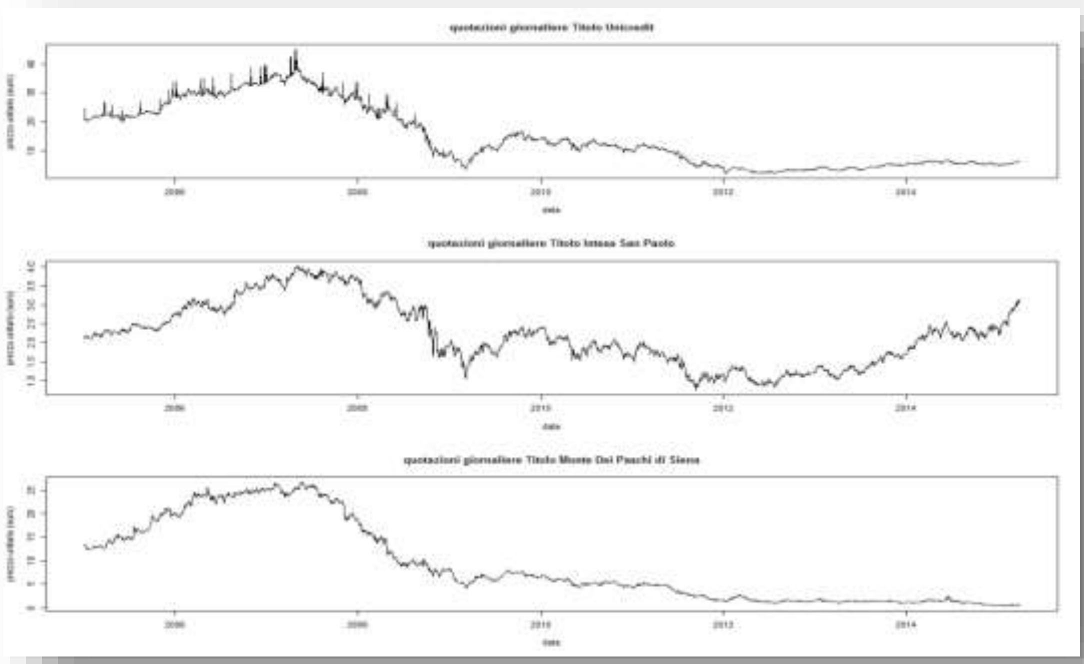

GRAFICO2.1 : Grafico delle quotazioni 1/1/2005-31/3/2015

Titolo	Prezzo minimo	Primo quartile	Mediana	Media	Terzo quartile	Prezzo massimo
Unicredit	2.197	5.438	11.540	14.900	23.360	44.920

Intesa San Paolo	0.7637	1.6130	2.1600	2.2120	2.8290	4.0250
Monte dei Paschi di Siena	0.400	1.496	5.684	9.181	15.940	26.790

TABELLA 2.1: Riassunto quotazioni (quotazioni importate da Yahoo Finance, grafici ottenuti con il software R)

Come si può notare dal grafico 2.1 e dalla tabella 2.1, titoli diversi presentano prezzi iniziali differenti, pagano dividendi diversi e sono venduti per diversi importi futuri. Per renderli comparabili, si esprime la loro performance in termini di rendimento. Il rendimento indica la percentuale di incremento nel valore di un investimento per unità di denaro inizialmente investito nel titolo (*i*), per misurarlo in un arco di tempo definito ci avvaliamo del seguente sistema di ipotesi:

- P_t= prezzo unitario o quotazione del titolo all'istante t, nel momento dell'acquisto
- P_{t+1} = prezzo unitario o quotazione del titolo all'istante t+1
- D_{t+1}= eventuale dividendo distribuito all'istante t+1
- r_t= rendimento del titolo i nel periodo temporale da t a t+1

Allora il rendimento del titolo(*i*) è dato da:

$r_t = \frac{D_{t+1}+P_{t+1}}{P_t} - 1$ oppure $r_t = \frac{D_{t+1}}{P_t} + \frac{P_{t+1}-P_t}{P_t}$ dove $\frac{D_{t+1}}{P_t}$ è definito come tasso di dividendo e $\frac{P_{t+1}-P_t}{P_t}$ capital gain.

Osserviamo, nel grafico 2.2, le serie storiche dei rendimenti di Unicredit, Intesa San Paolo e Monte dei Paschi di Siena dal 1/1/2005 al 31/3/2015.

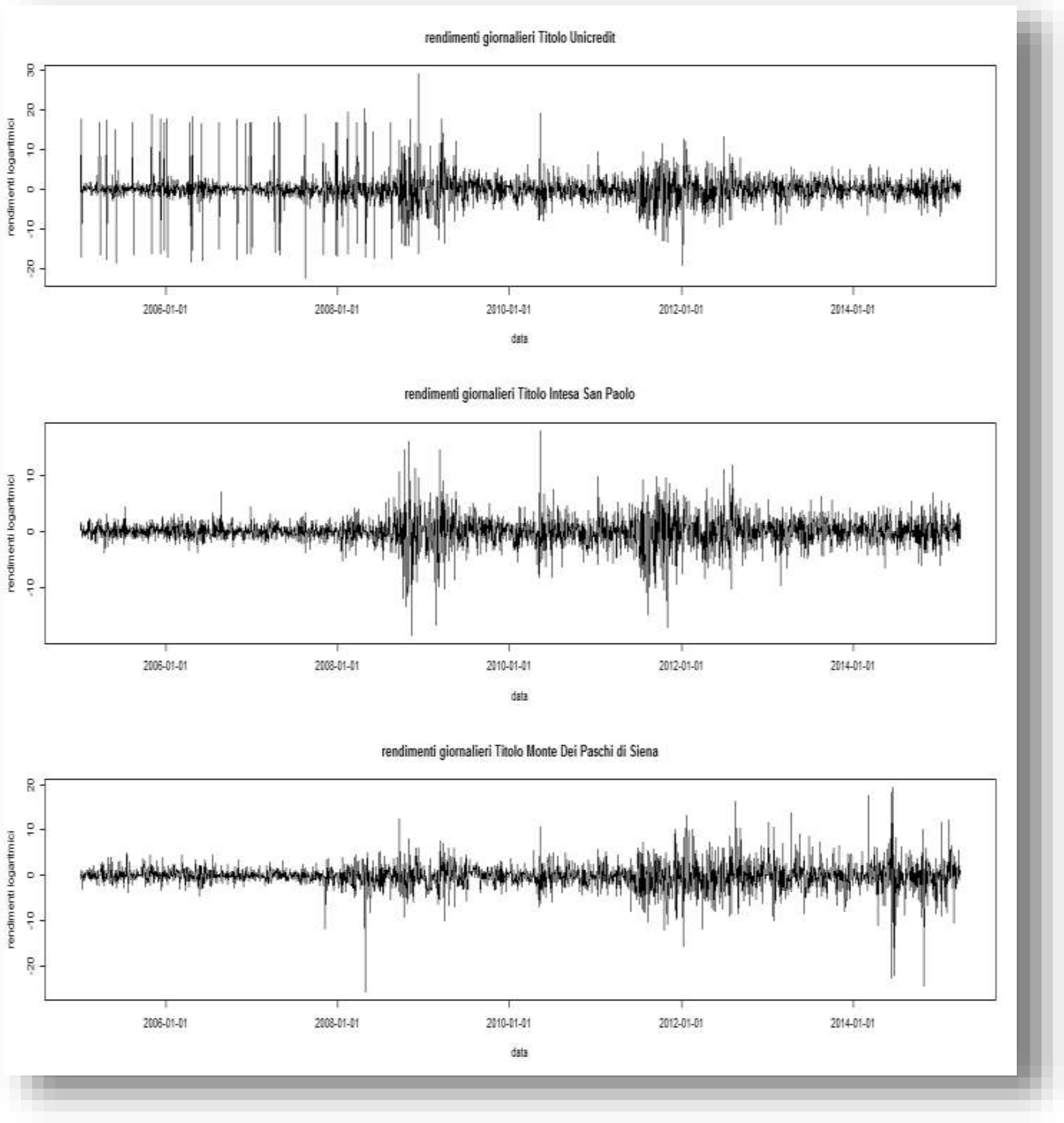

GRAFICO 2.2: Grafico dei rendimenti 1/1/2005-31/3/2015

Titolo	Rendimento Minimo	Primo quartile	Mediana	Media	Terzo quartile	Rendi-mento massimo
Unicredit	-22.31%	-1.38%	0.0%	**-0.045%**	1.362%	28.87%
Intesa San Paolo	-18.46%	-1.12%	0.0%	**0.014%**	1.271%	17.96%
Monte dei Paschi di Siena	-25.58%	-1.31%	-0.041%	**-0.115%**	1.127%	19.34%

TABELLA 2.2: Riassunto rendimenti

Ora che i tre titoli sono comparabili, poiché sono espressi nella stessa scala e con la stessa unità di misura, si nota che tutti si distribuiscono in media al ridosso dello zero. Il grafico 2.2, intuitivamente, ci mostra come il **rendimento medio** di questi titoli nel decennio 2005-2015 sia stato all'incirca zero, i dati riportati nella tabella 2.2 ci confermano la nostra Deduzione.

2.3 RENDIMENTO MEDIO E IL RENDIMENTO ATTESO

Finora abbiamo analizzato i dati storici, ovvero abbiamo ottenuto i dati riguardanti le quotazioni e i rendimenti che si sono effettivamente riscontrati nell'ultimo decennio per i titoli azionari Unicredit, Intesa San Paolo e Monte dei Paschi. Nel farlo abbiamo utilizzato le tre rispettive serie storiche, cioè abbiamo osservato quotidianamente i prezzi e i rendimenti delle tre società quotate presso la borsa di Milano e abbiamo disposto le osservazioni in ordine cronologico. Tutto questo processo ci permette di rendicontare gli eventuali guadagni o perdite degli investitori che sono stati in possesso di questi titoli durante quel periodo di tempo. Detto ciò possiamo definire come **rendimento medio** (Berk, DeMarzo, Finanza aziendale 1, 2011) la semplice media aritmetica di tutte le osservazioni ottenute sui rendimenti, ovvero:

$$\overline{r_i} = \frac{\sum_{t=1}^{n} r_t}{n}$$

Dove

- $\overline{r_i}$ è **il rendimento medio giornaliero** del titolo *i* (nel nostro caso, UniCredit, Intesa San Paolo o Monte dei Paschi di Siena)
- n è il numero di osservazioni ottenute
- r_t è il rendimento nel giorno t

Ci rendiamo conto che l'informazione espressa dal rendimento medio giornaliero sia un dato, che per l'investitore o il risparmiatore che punta al medio-lungo periodo, poco rilevante, perciò definiamo il **rendimento annuo medio** come:

$$\overline{R_i} = \frac{\sum_{t=1}^{T} R_t}{T}$$

Dove

- $\overline{R_i}$ è **il rendimento annuo medio** del titolo i (nel nostro caso, UniCredit, Intesa San Paolo o Monte dei Paschi di Siena)
- T è il numero di anni
- R_t è il rendimento annuale

Il ragionamento fatto per i rendimenti giornalieri e annuali può essere ripetuto per qualsiasi orizzonte temporale, i più usati sono mensile, trimestrale e semestrale.

In realtà l'analisi dei dati storici ci può fornire un primo metodo di stima di quelli che potranno essere in futuro i rendimenti di un titolo sul quale si voglia investire, per poterlo fare non dobbiamo più fare riferimento alle serie storiche precedentemente usate, bensì dobbiamo usare la *distribuzione di probabilità* o *densità di frequenza* dei rendimenti osservati (assumendo che la conoscenza dell'andamento passato di un titolo sia la migliore approssimazione del possibile andamento futuro dello stesso).

Se consideriamo la **variabile casuale *R*** che associa ad ogni **rendimento *r*** la sua **probabilità $\boldsymbol{P_r}$** di realizzarsi secondo una legge matematica o funzione che consideriamo nota, allora il **rendimento atteso** è calcolato come la media ponderata dei rendimenti, dove i pesi corrispondono alle probabilità con cui si sono presentati.

Se ***R*** è una variabile casuale discreta ci occupiamo di **distribuzione di probabilità** dei rendimenti e la rappresentiamo graficamente tramite degli istogrammi.

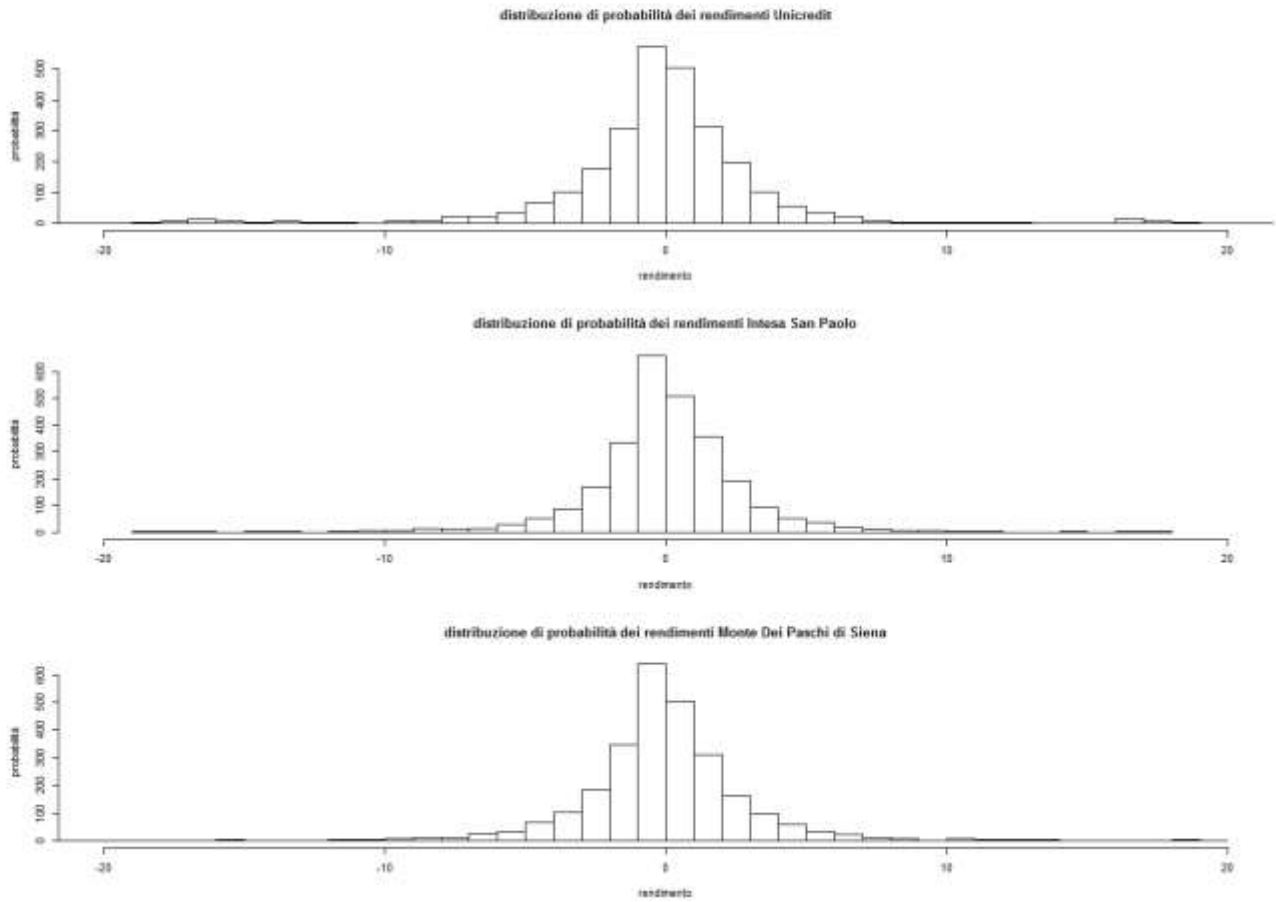

GRAFICO 2.3: Istogrammi relativi alla distribuzione di probabilità dei rendimenti

Il Rendimento atteso è **E[R]** = $\sum \boldsymbol{p_{R_i}} \times \boldsymbol{R_i}$

Dove p_{R_i} è la probabilità con qui si è realizzato il rendimento R_i.

Quando il numero di osservazioni sui rendimenti giornalieri aumenta e tende all'infinito, possiamo considerare la variabile casuale *R* come una variabile casuale continua e rappresentare la sua densità di frequenza.

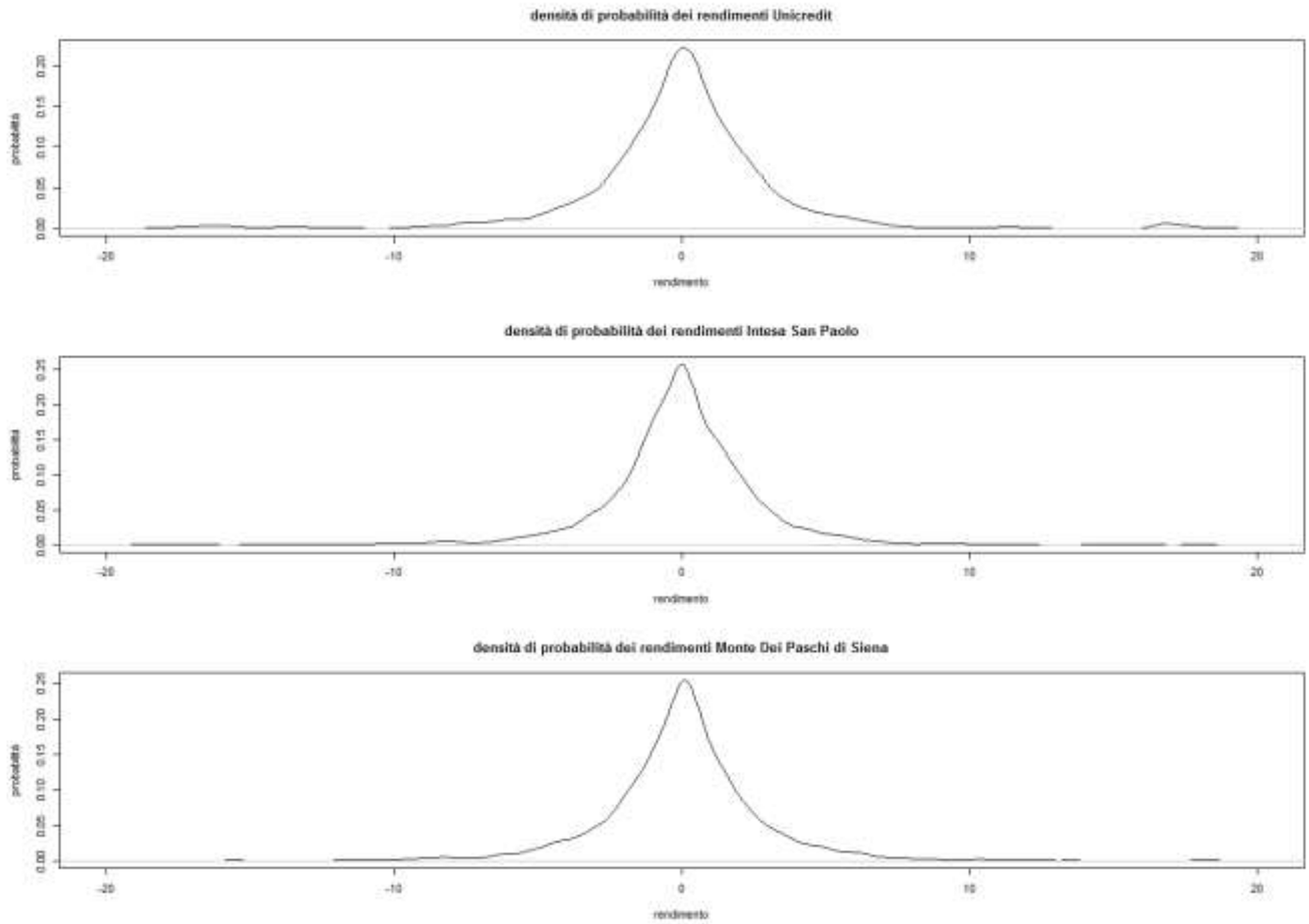

GRAFICO 2.4: Densità di frequenza dei rendimenti

In questo caso il rendimento atteso è **E[R]=**$\int_{\boldsymbol{A}} \boldsymbol{r} \cdot \boldsymbol{f}(\boldsymbol{r})\boldsymbol{dr}$, dove *f(r)* è la funzione di densità associata al rendimento *r*, generato dalla variabile casuale *R* con insieme di supporto *A*.

Il rendimento atteso è il rendimento che si otterrebbe in media se si potesse ripetere l'investimento infinite volte, nell'ipotesi che il rendimento derivi dalla stessa distribuzione, in termini statistici $R \sim R_{1,\dots,} R_n$ i.i.d. (identiche e identicamente distribuite).

Poiché un investitore non ha la possibilità di ripetere il suo investimento all'infinito, deve anche tenere in considerazione quanto e come il rendimento che otterrà si potrebbe discostare dal valore atteso della nostra variabile casuale dei rendimenti *R*.

2.4 LA DISPERSIONE DEI RENDIMENTI: VOLATILITA' E RISCHIO DI UN TITOLO

L'analisi grafica dei rendimenti oltre a suggerirci il rendimento atteso del titolo ci fornisce un’importante spunto di riflessione per quanto riguarda il range di rendimenti possibili che si sono verificati nel periodo di analisi, sempre assumendo che la distribuzione dei rendimenti passati ci permetta di prevedere i rendimenti futuri, la conoscenza di tutti i possibili valori assunti in passato ci permette di prepararci a qualsiasi possibilità di rendimento in futuro.

Il range di queste osservazioni è una misura della dispersione dei rendimenti possibili attorno al rendimento medio e più alto è il livello di dispersione dei dati più un titolo sarà rischioso, poiché più imprevedibile, più bassa è la variabilità dei rendimenti più tale titolo sarà sicuro e facilmente prevedibile.

Nel caso limite in cui la variabilità dei rendimenti di un titolo sia pari a zero parliamo di tasso di rendimento senza rischio o Risk free, poiché il suo rendimento sarà pari al suo valore atteso. “Con il termine risk free si intende il concetto di rischio zero. Questo è sempre stato il biglietto da visita dei titoli di stato dei paesi occidentali: sono sempre stati considerati investimenti a rischio zero. In realtà gli ultimi anni di crisi hanno dimostrato che nulla è a rischio zero: anche i BTp italiani si sono dimostrati nel 2011-2012 molto pericolosi. Ma in un certo senso anche i titoli tedeschi o americani (tutt’ora considerati risk free) un rischio lo presentano: quello del deprezzamento. Il concetto di free risk riguarda infatti solo il rischio di default dello stato emittente. Ma un investitore deve anche valutare il rischio di comprare un titolo con prezzi alti e con alte probabilità di ribasso: in questo senso, anche il Bund (che ha rendimenti bassi e prezzi elevati) un rischio lo presenta.” - Il sole 24 ore, pagina 9, 10/7/2015.

Nei grafici delle serie storiche la dispersione delle osservazioni è messa in risalto dall’oscillazione verticale del grafico nel tempo, mentre i grafici delle distribuzioni dei rendimenti e gli istogrammi pongono sull’asse orizzontale il “range” dei rendimenti osservati determinandone la dispersione in larghezza.

In statistica uno degli indici di dispersione più utilizzati è la **varianza** (Var(.)) ovvero la media del quadrato degli scarti dalla media aritmetica (Berk, DeMarzo, Finanza aziendale 1, 2011):

$$Var(R) = \sigma^2 = \frac{1}{n}\sum_{i=1}^{n}(R_i - \mu)^2$$

oppure in termini di valore atteso

$$Var(R) = \sigma^2 = E[(R - E[R])^2$$

ed è definita deviazione standard o scarto quadratico medio la sua radice quadrata :

$$SD(R) = \sigma = \sqrt{Var(R)}$$

In finanza vengono adottate entrambe come misure del rischio di un titolo ma nello specifico la deviazione standard è preferibile alla varianza poiché è espressa nella stessa unità di misura dei rendimenti e assume il nome di **volatilità**.

Per avere un'idea di come la volatilità del rendimento di un titolo si muova nel tempo otteniamo il grafico delle serie storiche delle volatilità empiriche dei titoli studiati, definiamo la **varianza e la volatilità empirica** come segue:

$$Var_t(R_i) = \sigma_{it}^2 = \frac{\sum_{t=1}^{T}(r_{it} - \bar{r}_i)^2}{T-1}$$

E

$$SD_t = \sqrt{Var_t(R_i)} = \sqrt{\sigma_{it}^2} = \sqrt{\frac{\sum_{t=1}^{T}(r_{it} - \bar{r}_i)^2}{T-1}}$$

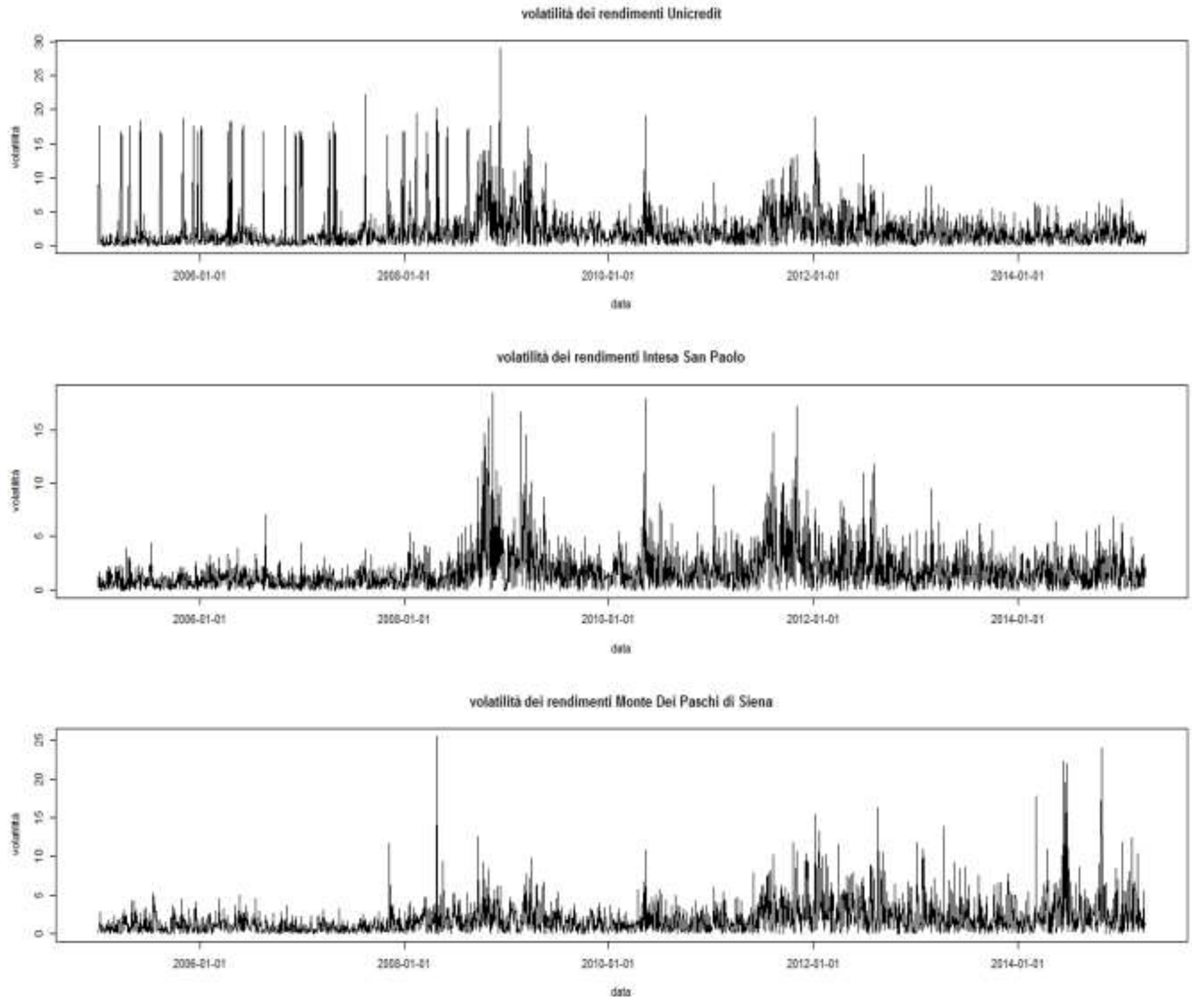

GRAFICO 2.5: Serie storiche delle volatilità empiriche dei titoli.

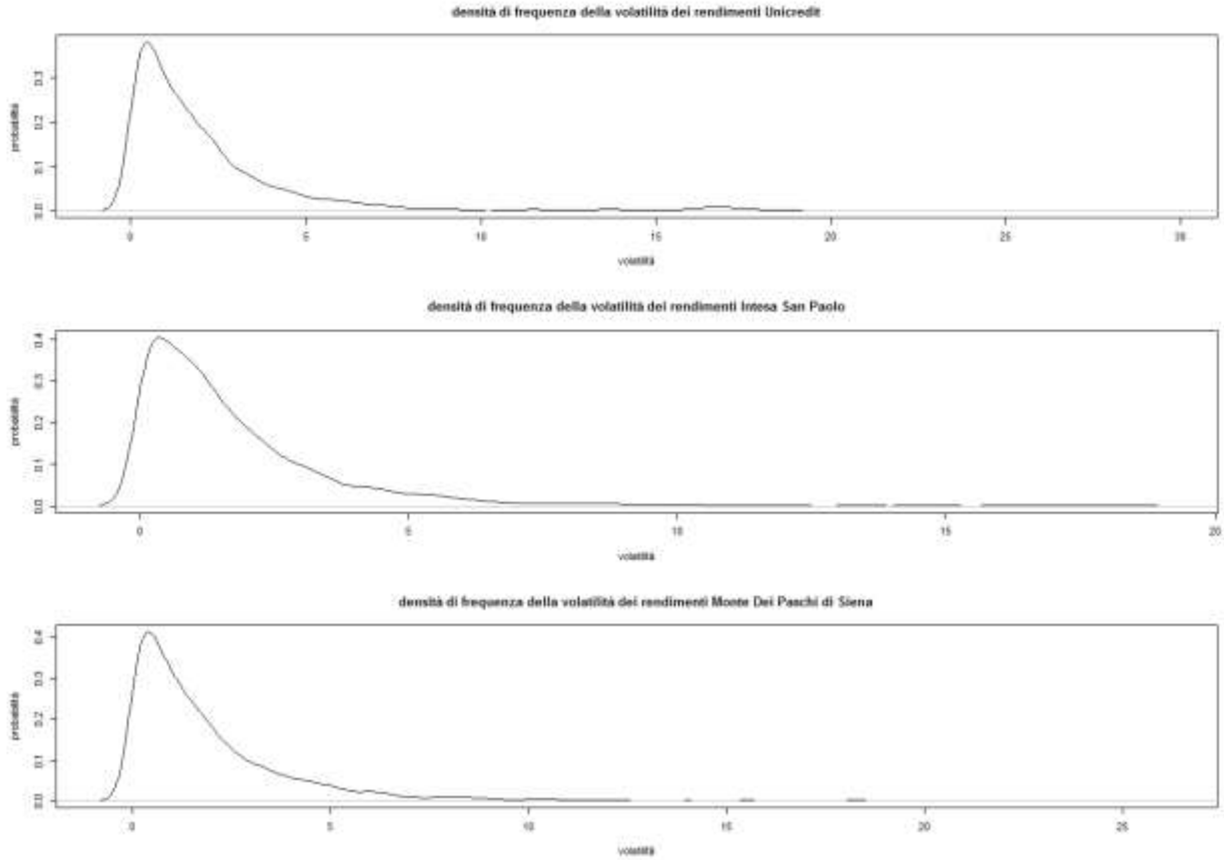

GRAFICO 2.6: Densità di frequenza relative alla serie storica della volatilità empirica

Titolo	**Volatilità Minima**	**I quartile**	**Mediana**	**Media**	**III quartile**	**Volatilità Massima**
Unicredit	0.002637%	0.5523%	1.38%	2.32%	2.71%	28.91%
Intesa San Paolo	0.015%	0.48%	1.18%	1.75%	2.32%	18.47%
Monte dei Paschi di Siena	0.0002%	0.5%	1.22%	1.90%	2.47%	25.46%

TABELLA 2.3: riassunto dati sulla volatilità dei rendimenti.

Il grafico 2.5 ci indica l'andamento della volatilità associata al rendimento dei tre titoli in relazione al tempo, il grafico 2.6 ci mostra la densità di frequenza delle volatilità dei titoli e la tabella 2.3 ne riassume i contenuti con i dati numerici.

2.5 USO DEI RENDIMENTI PASSATI PER STIMARE QUELLI FUTURI

Per stimare il rendimento futuro di un titolo rischioso, si deve determinare il rendimento atteso che gli investitori richiederanno a compenso del rischio insito nell'investimento stesso.

Se si assume che la distribuzione dei rendimenti passati e la distribuzione di quelli futuri coincidano, un approccio potrebbe essere quello di guardare al rendimento che gli investitori si aspettavano di ottenere nel passato per lo stesso investimento o per investimenti simili e assumere che gli investitori richiederanno lo stesso rendimento nel futuro. Questo approccio tuttavia implica due problemi:

Non si può sapere che cosa gli investitori si aspettassero in passato, si possono soltanto osservare i rendimenti effettivamente realizzati.

Il rendimento medio è solo una stima dei rendimenti attesi ed è soggetto a un errore di stima.

L'errore di stima statistica si misura mediante **l'errore standard**, cioè la deviazione standard del valore stimato della media attorno al suo valore vero; ovvero è la deviazione standard del rendimento medio.

Tale errore fornisce una stima di quanto la media campionaria potrebbe deviare dalla media reale dei rendimenti. Se i rendimenti di un'azione sono indipendenti ed identicamente distribuiti, allora l'errore standard della stima del rendimento atteso può essere trovato mediante la Seguente formula:

$$\boldsymbol{Errore\ standard} = SD_{\mu}(\ della\ media\ dei\ rendimenti\ storici\ \mu) = \frac{SD_r(dei\ rendimenti)}{\sqrt{numero\ di\ osservazioni}}$$

Sotto l'assunzione di normalità l'errore standard può essere utilizzato per determinare un intervallo ragionevole per il valore atteso:

$$\boldsymbol{intervallo\ di\ confidenza\ al\ 95}\% = \mu(rendimento\ medio\ storico) \pm\ 2 \times Errore\ standard$$

Applichiamo tale metodo di stima ai titoli Unicredit, Intesa San Paolo e Monte dei paschi di

Siena, l’intervallo di confidenza al 95% per la stima dei futuri rendimenti sarà:

Titolo	σ_r , SD_r	N Numero di osservazioni	$S.E$ Errore standard	M Rendimento Medio storico	Intervallo di confidenza al 95%
Unicredit	2.32%	2663	$\frac{0.0232}{\sqrt{2663}} = 0.045\%$	-0.45%	(-0.451%; - 0.4491%)
Intesa San Paolo	1.75%	2663	$\frac{0.0175}{\sqrt{2663}} = 0.034\%$	0.0147%	(-0.014%; 0.01537%)
Monte dei Paschi di Siena	1.90%	2663	$\frac{0.0190}{\sqrt{2663}} = 0.037\%$	-0.115%	(-0.115%; -0.1142%)

TABELLA 2.4: Stime dei rendimenti futuri

Secondo i dati è lecito aspettarsi con un grado di fiducia del 95% che il rendimento futuro, su orizzonte annuale, di Unicredit sia compreso tra il -0.451% e il - 0.4491%, per Intesa San Paolo tra il -0.014% e lo 0.01537 mentre per Monte dei paschi di Siena tra il -0.115% e -0.1142%

Ma questo primo metodo di stima è veramente affidabile?

Ci sono varie ragioni per cui dobbiamo diffidare di questo metodo, la prima è che molti titoli azionari sono sul mercato da poco tempo e non ci forniscono molti dati per la costruzione di statistiche affidabili, la seconda è che la condizione di indipendenza dei rendimenti non è sempre verificata poiché il rendimento di oggi potrebbe condizionare il rendimento di domani o essere condizionato da quello di ieri e via dicendo, soprattutto in momenti di grandi speculazioni finanziarie, terza ragione per diffidare di questo metodo è che finora abbiamo assunto la normalità delle distribuzioni dei rendimenti mentre è empiricamente dimostrato che tali distribuzioni pur essendo di forma campanulare siano spesso asimmetriche e possano avere code più pesanti della distribuzione normale.

Passeremo ad altri modelli che ci permettono di stimare una relazione tra rischio e rendimento più attendibile.

3 UN' INTRODUZIONE AI PORTAFOGLI AZIONARI: L'IMPORTANZA DELLA DIVERSIFICAZIONE

Posto che la **variabile casuale *R*** sia la variabile aleatoria che associa ad ogni **rendimento *r*** di un titolo azionario la sua **probabilità $\boldsymbol{p_r}$** di verificarsi, nei capitoli precedenti abbiamo definito le principali caratteristiche statistiche del titolo:

- il rendimento atteso, $\mu = E[R] = \sum_{i=1}^{n} p_{Ri} \times R_i$
- la volatilità, $\sigma = \sqrt{E[(R - E[R])^2} = \sqrt{\frac{1}{n}\sum_{i=1}^{n}(R_i - \mu)^{\,2}}$.

Queste due grandezze numeriche oltre a descrivere le principali proprietà statistiche dei titoli azionari entrano a far parte dei criteri con cui gli investitori più esperti selezionano o ripudiano le azioni su cui investire o meno.

In letteratura economica è fondamentale il concetto di avversione al rischio, nozione che è necessario approfondire per poter analizzare più approfonditamente le scelte di investimento degli agenti economici.

L'avversione al rischio di un soggetto economico può essere brevemente definita nel seguente modo: Il beneficio che un investitore riceve da un incremento di ricchezza (nel nostro caso un rendimento positivo) è inferiore allo svantaggio dovuto a una corrispondente diminuzione di ricchezza (rendimento negativo).

Il concetto di avversione al rischio portò alla luce per la prima volta negli anni cinquanta il **criterio media-varianza,** il quale adottò come misura di rischiosità la varianza. L'identificazione della maggiore variabilità con il rischio più elevato costituisce il pilastro principale su cui si regge l'analisi media-varianza della teoria delle scelte di portafoglio. Interpretando la media come il rendimento (atteso) di una distribuzione, questa teoria sostiene che una distribuzione è **più efficiente** di un'altra se contemporaneamente presenta **una media più alta** ma una **varianza più bassa**.

Se dunque chiamiamo $U(\mu\,, \sigma^2)$ la funzione di utilità di un investitore, secondo il nostro ragionamento, essa crescerà col crescere del rendimento atteso, $\frac{dU}{d\mu}>0$, mentre decrescerà col crescere della varianza/volatilità, $\frac{dU}{d\sigma^2} < 0$.

Possiamo quindi affermare che avendo due titoli A e B di rendimento atteso $\mu_A = \mu_B$ e di volatilità $\sigma_A < \sigma_B$, per l'investitore razionale avverso al rischio il titolo A sarà pareto dominante rispetto al titolo B; oppure avendo due titoli C e D rendimento atteso $\mu_C > \mu_D$ e di volatilità $\sigma_C = \sigma_D$, per l'investitore il titolo D sarà meno efficiente del titolo C o pareto dominato.

Se rappresentiamo le seguenti situazioni in uno spazio media-varianza otteniamo:

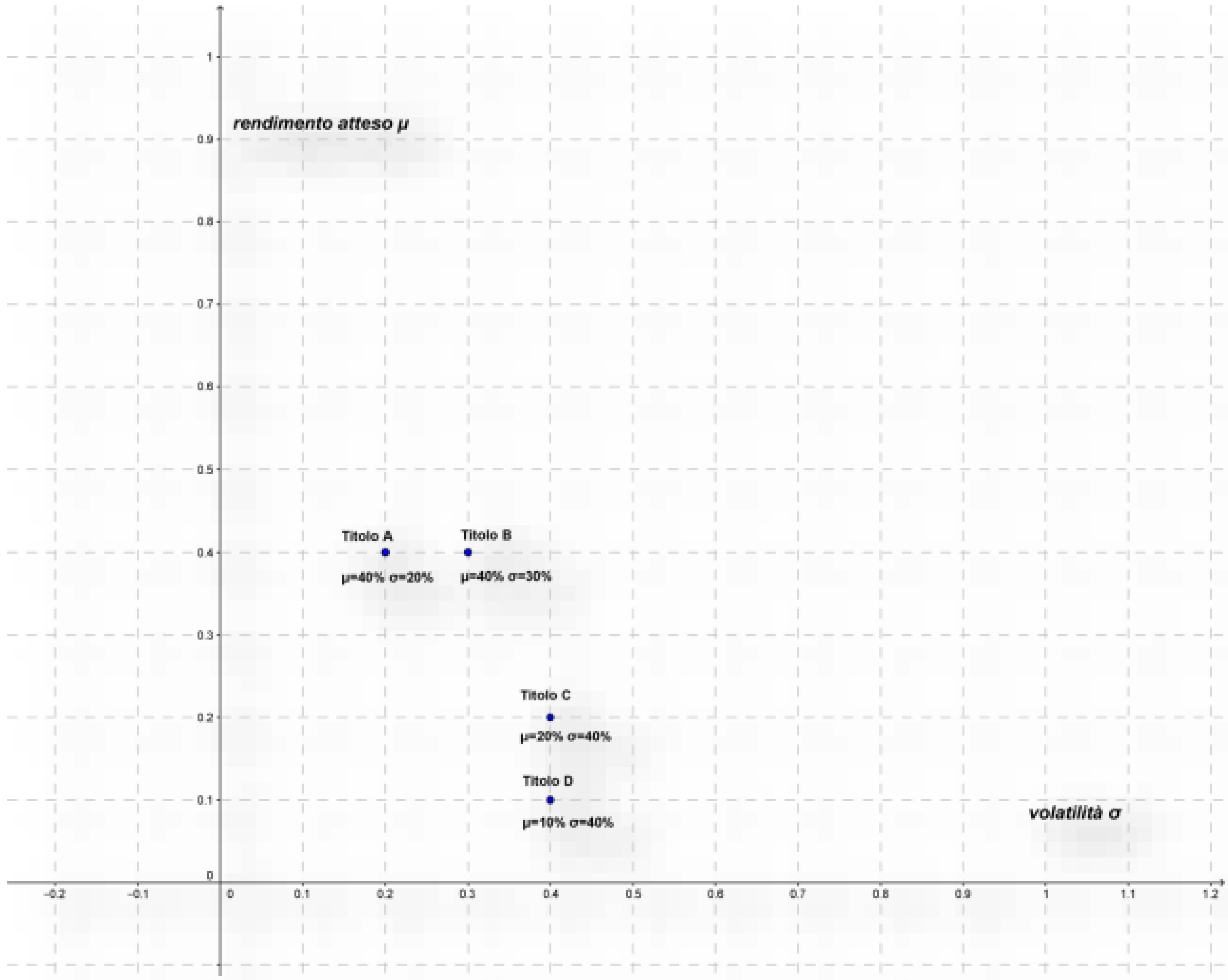

GRAFICO 3.1: Titoli rischiosi collocati nello spazio media-volatilità

Ulteriori analisi empiriche (The econometrics of financial Markets, J.Y. Campbell, A.W. Lo, A.C. Mackinlay, Princeton University Press) del tipo media-varianza hanno evidenziato come sistematicamente gli indici azionari o portafogli scelti e composti da più azioni fossero più efficienti rispetto a singoli titoli azionari di mercato.

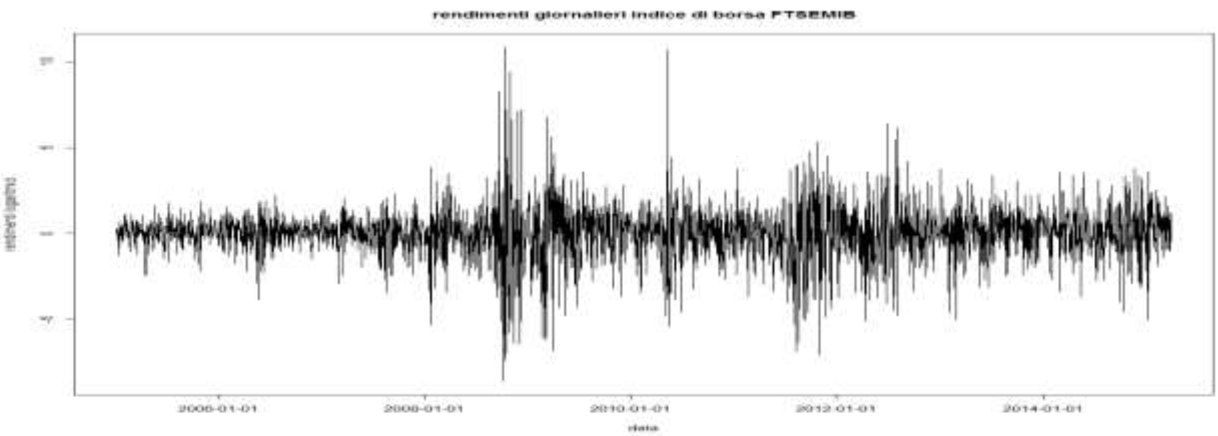

Grafico 3.2: Rendimenti FTSEMIB 1/1/2005-31/3/2015

Titolo	Rendimento minimo	Rendimento Massimo	Range	Volatilità media osservata
FTSEMIB	**-8.60%**	**10.87%**	**(-8.60%; 10.87%)**	**1.59%**
Unicredit	-22.31 %	28.87%	(-22.31%;28.87%)	3.95%
Intesa San Paolo	-18.46%	17.96%	(-18.46%;17.96%)	2.61%
Monte dei Paschi di Siena	-25.58%	19.34%	(-25.58% ; 19.34%)	2.95%

TABELLA 3.1: Paragone rendimenti/volatilità FTSEMIB con i 3 singoli titoli bancari

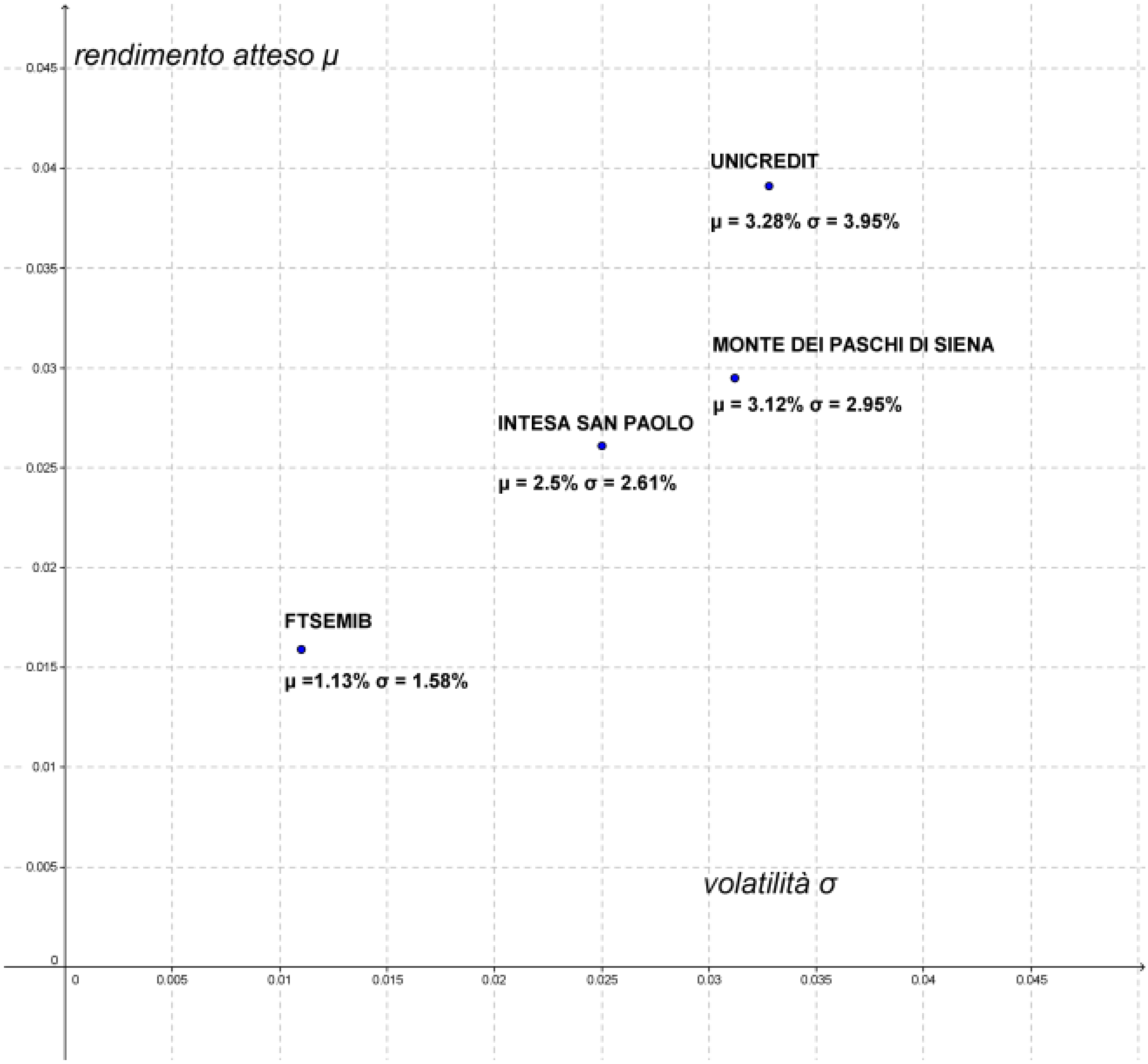

GRAFICO 3.3: Collocazione titoli e indice nello spazio media-volatilità, ai fini di una maggiore significatività del grafico il rendimento viene calcolato come media di rendimento massimo e minimo.

Come si spiega questa evidenza empirica?

L'importanza della diversificazione (Rischio & Rendimento-le due facce dell'investimento, Autori vari Gruppo Schroders 2011)**,** concentrare il patrimonio su un unico mercato o strumento finanziario è rischioso nella misura in cui si rimane eccessivamente legati alle sorti di quest'ultimo, nel bene e nel male. Al contrario, comporre un portafoglio diversificato consente di ridurre i rischi, dare più stabilità ai risultati e incrementare le opportunità di rendimento.
I **livelli di diversificazione** sono molteplici. Innanzitutto all'interno di uno stesso mercato, ad esempio azionario, acquistando titoli di più società (diversificazione quantitativa).
Non è solo la numerosità dei titoli a fare la diversificazione, la quale si gioca anche sul campo settoriale o geografico (diversificazione qualitativa). Questo significa puntare su aziende che operano in regioni o industrie diverse, in modo da evitare i rischi di concentrazione, ad esempio, su un singolo Paese o settore che il mercato penalizza in determinate fasi del ciclo o in ragione di particolari eventi macroeconomici. Un altro livello di diversificazione qualitativa è rappresentato dalla ripartizione dell'investimento su più mercati, intesi come classi di investimento. Normalmente mercati diversi tendono a comportarsi in modo divergente a seconda del momento, risultando fra loro "incorrelati". Poiché difficile riuscire a prevedere quale sarà quello vincente, investendo in classi differenti è possibile compensare l'eventuale andamento negativo di una componente con quello positivo di un'altra, e viceversa.

3.1 DIVERSIFICAZIONE PER RIDURRE IL RISCHIO: LE TIPOLOGIE DI RISCHIO

In ambito finanziario il rischio assume diverse dimensioni, a diversi livelli. La distinzione principale da delineare è fra rischio generico e rischio specifico, valida per tutti i tipi di investimento. Esistono poi altre differenze più peculiari, tipiche delle varie *asset class*,come quella fra rischio azionario e rischio obbligazionario. Con riferimento a quest'ultimo, è possibile individuare la componente di rischio associata all'emittente del titolo e quella legata ai tassi di interesse. Da non dimenticare anche il rischio derivante dall'investimento in valute estere e, non da ultimo, il cosiddetto rischio Paese, spesso sulle prime pagine dei quotidiani anche non finanziari.
La congiuntura economica mondiale, i saliscendi delle Borse e le inefficienze che caratterizzano il sistema finanziario nel suo complesso alimentano il cosiddetto rischio generico, detto anche sistematico perché di fatto **non eliminabile**. Rappresenta quella parte di variabilità del valore degli investimenti che dipende dalle **fluttuazioni dei mercati**, le quali hanno un impatto su

qualsiasi titolo a prescindere dalla sua qualità. Se la Borsa è in calo, è molto probabile che un tale scenario impatterà anche sull'andamento del mio titolo. Al contrario, si parla di rischio specifico quando i "pericoli" derivano dalle **caratteristiche peculiari** del singolo titolo e quindi dell'emittente. Se quest'ultimo si trovasse in difficoltà, potremmo imbatterci in una mancata distribuzione dei dividendi o in una riduzione del valore dell'investimento, ad esempio legata a una vendita massiva in Borsa da parte degli azionisti.

Se il rischio generico non è evitabile, è possibile contrastare gli effetti di quello specifico ricorrendo alla cosiddetta diversificazione. In questo modo si riduce l'esposizione, e quindi il legame, all'andamento del singolo titolo, controbilanciandolo con quella di altri investimenti presenti in portafoglio.

3.2 LA COSTRUZIONE DI UN PORTAFOGLIO EFFICIENTE: LA TEORIA DI MARKOWITZ

Il processo di selezione di un portafoglio può essere diviso in due passi (Portfolio Selection, Harry Markowitz, March 1952).

Il primo passo inizia con l'osservazione empirica e termina con il giudizio sulle future performance dei titoli disponibili. Il secondo passo inizia con le aspettative rilevanti sulle performance future e finisce con la scelta del portafoglio. Si consideri in primis la regola che afferma che gli investitori devono o dovrebbero massimizzare i rendimenti attualizzati o i rendimenti attesi. Questa regola è rifiutata sia come un'ipotesi per spiegare, sia come una massima nella guida riguardo il comportamento dell'investire, di conseguenza ora consideriamo un altro principio il quale afferma che gli investitori devono o dovrebbero considerare i rendimenti attesi come un bene mentre la variabilità dei rendimenti come un male (nell'accezione economica del termine). La precedentemente citata teoria media-varianza ha diversi punti forti nello spiegare i comportamenti nell'investire.

Il criterio media-varianza è da preferire rispetto alla regola dei rendimenti attualizzati in quanto quest'ultimo non tiene conto della diversificazione degli asset, precedentemente discussa, ovvero l'investimento migliore in questo caso sarebbe un portafoglio dotato unicamente di un solo titolo il quale promette i migliori rendimenti attualizzati, così facendo però non si terrebbe minimamente conto della variabilità e del rischio di tali rendimenti, e vista la mancanza di diversificazione il proprio patrimonio sarebbe posto interamente al rischio del singolo titolo.

Analiticamente, la costruzione del portafoglio efficiente secondo la teoria di Markowitz può essere espresso mediante le seguenti condizioni

- Supponiamo ci siano N titoli disponibili
- Chiamiamo r_{it} i rendimenti attesi al tempo *t* per euro investiti nel titolo *i*

- Sia d_{it} il tasso con cui il rendimento di i sia attualizzato al presente
- X_i, l'ammontare relativo di capitale investito nel titolo *i*

Perciò il rendimento atteso e attualizzato del nostro portafoglio azionario diversificato sarà:

$R = \sum_{t=1}^{\infty}\sum_{i=1}^{N} d_{it}r_{it}X_i = \sum_{i=1}^{N} X_i \left(\sum_{t=1}^{\infty} d_{it}r_{it}\right)$

$R_i = \sum_{t=1}^{\infty} d_{it}r_{it}$è il rendimento attualizzato dello i-esimo titolo, quindi

$R = \sum X_i\, R_i$dove R_i è indipendente rispetto a X_i. Dal momento che $X_i \geq 0$ per ogni i e $\sum X_i = 1$, R è una media pesata di R_i avendo come peso X_i. Per massimizzare R,lasciamo che$X_i = 1$ per il titolo i con il massimo R_i. Se diversi R_a,a = 1, … , K sono massimi allora ogni allocazione con $\sum_{a=1}^{K} X_a = 1$ massimizzano *R*.

In nessun caso un portafoglio diversificato è preferibile a tutti gli altri portafogli di singole azioni.

Sarà conveniente d'ora in poi considerare un modello statico invece di analizzare la serie temporale dei rendimenti del titolo i-esimo $(r_{i1}, \dots, r_{it})$, parleremo di flusso di rendimenti (r_i) del titolo *i*. Il flusso di rendimenti dell'intero portafoglio è$\sum X_i\, R_i$. Come nel caso dinamico se l'investitore tendesse a massimizzare i rendimenti attesi del portafoglio investirebbe il suo intero capitale nel titolo col massimo rendimento atteso. C'è un criterio che implica che l'investitore dovrebbe sia diversificare il portafoglio sia massimizzare il suo rendimento atteso. Tale criterio stabilisce che l'investitore dovrebbe diversificare il proprio portafoglio investendo in tutti quegli asset che danno il massimo rendimento. La legge dei grandi numeri assicura che il vero rendimento di un portafoglio costruito così sarà lo stesso di quello atteso. Questo criterio assume che esista un portafoglio che dia sia il massimo rendimento atteso sia la minima variabilità nei rendimenti. Questo criterio è il modello Media - Varianza di Markowitz. L'assunzione che la legge dei grandi numeri si possa applicare a un portafoglio di titoli non può essere accettata poiché i rendimenti azionari sono troppo correlati fra loro. La diversificazione non può eliminare tutta la variabilità dei rendimenti. Il portafoglio con il maggior rendimento atteso non è necessariamente quello con la minore varianza, c'è un tasso al quale l'investitore può ottenere un rendimento atteso aumentando la variabilità o viceversa riducendo la volatilità diminuendo il rendimento medio. Abbiamo visto la regola dei rendimenti attesi attualizzati sia inadeguata. Consideriamo il modello media-varianza di Markowitz, per farlo si deve illustrare qualche concetto di statistica matematica. Supponiamo di avere un numero di variabili casuali $R_1, \dots, R_n$.Se R è una combinazione lineare di R_i

$$R \quad = a_1R_1 + a_2R_2 + \dots + a_nR_n$$

Allora *R* è anch'essa una variabile casuale. Nel nostro caso è assai importante sapere come il valore atteso e la varianza della combinazione lineare *R* sia collegata con la distribuzione di probabilità di $R_1, \dots, R_n$. Il valore atteso di una combinazione lineare è la combinazione lineare dei valori attesi quindi

$$E(R) = a_1 E(R_1) + a_2 E(R_2) + \cdots + a_n E(R_n).$$

La varianza di una combinazione lineare invece non è cosi semplice da definire, per esprimerla bisogna prima spiegare il concetto di "covarianza".

La covarianza tra R_1 e R_2è uguale a

$$\sigma_{12} = E\{[R_1 - E(R_1)][R_2 - E(R_2)]\},$$

e più in generale definiamo covarianza tra R_i ed R_j

$$\sigma_{ij} = E\{[R_i - E(R_i)][R_j - E(R_j)]\}$$

σ_{ij}può essere espresso anche in termini di coefficiente di correlazione ρ_{ij}. La covarianza tra R_i ed R_jè uguale al loro coefficiente di correlazione per la deviazione standard di R_i per la deviazione standard di R_j.

$$\sigma_{ij} = \rho_{ij}\sigma_i\sigma_j$$

La varianza di una combinazione lineare risulta dunque:

$$Var(R) = \sum_{i=1}^{N} a_i{}^2 Var(R_i) + 2\sum_{i=1}^{N}\sum_{i>1}^{N} a_i a_j \sigma_{ij}$$

Per una coppia desiderata di rendimento atteso-volatilità (μ,σ), l'investitore ha la possibilità di sceglierne varie combinazioni che dipendono dai titoli azionari scelti, nello specifico ai loro rendimenti $R_1, \dots, R_n$ e al peso relativo di essi rispetto al portafoglio $X_i, \dots, X_n$. Supponiamo che il set di tutte le combinazioni ottenibili (μ, σ) fosse rappresentato nel grafico qui sotto. il criterio media-varianza stabilisce che l'investitore dovrebbe scegliere uno dei portafogli disponibili che gli consentono la combinazione efficiente di (μ*,σ*), quindi quelli con la minima volatilità dato un rendimento atteso fisso o viceversa quelli con il massimo rendimento atteso data la minor volatilità.

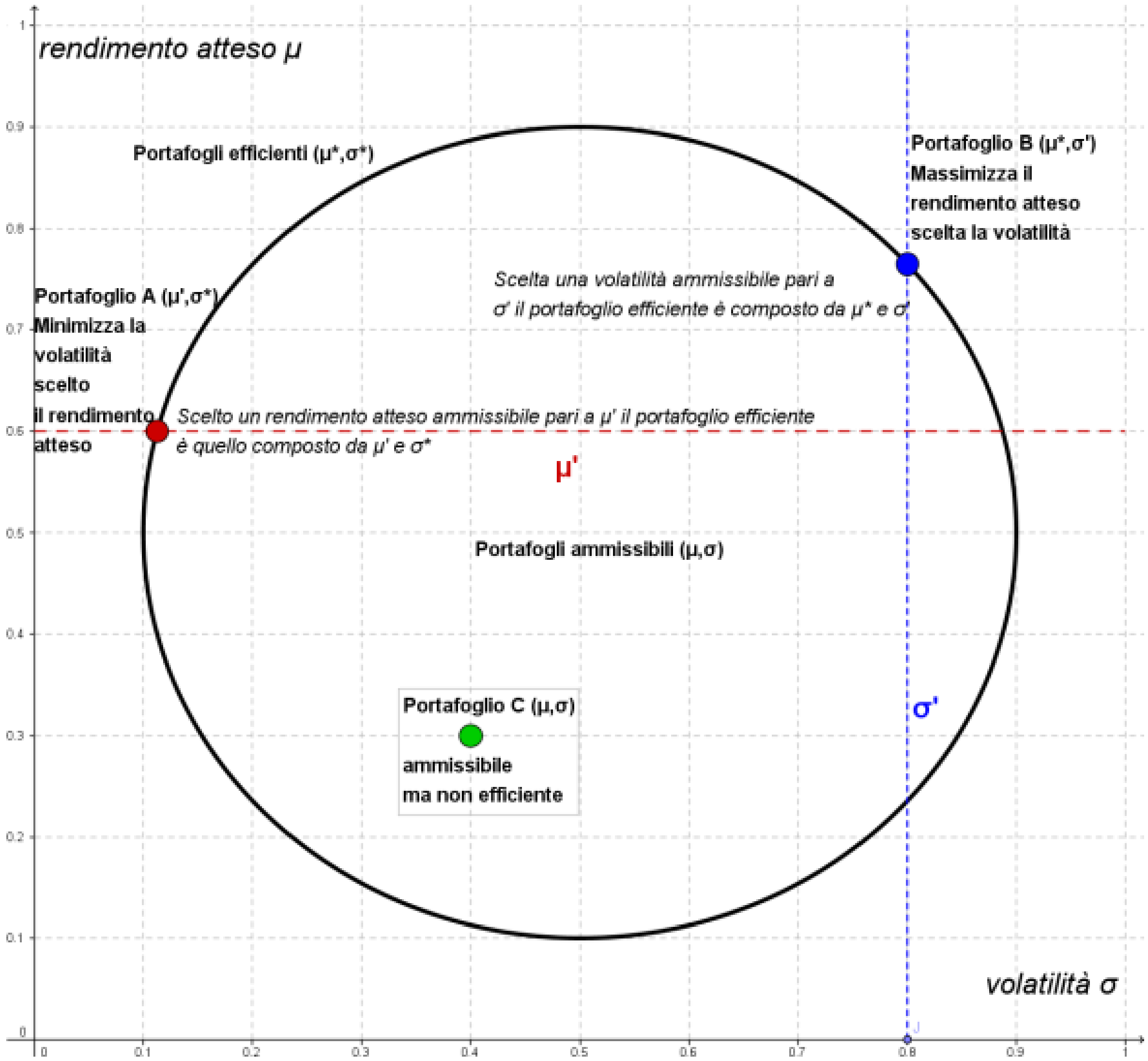

GRAFICO 3.4: Luogo geometrico dei portafogli efficienti

3.3 PORTAFOGLIO DI DUE TITOLI: FOCUS SULLA CORRELAZIONE

Il prossimo passo è quello di analizzare il portafoglio azionario più semplice che sia possibile costruire: quello composto da due titoli. Se chiamiamo P il portafoglio composto dal titolo A e dal titolo B il **rendimento atteso del portafoglio** sarà:

$$E(R_P) = X_A R_A + X_B R_B$$

Dove

- R_A *ed* R_B *sono i rendimento attesi dei titoli A e B*
- X_A *e* X_B *sono i pesi relativi di A e B nel portafoglio*
- $X_A + X_B = 1$

- $X_i > 0$

Una volta calcolato il rendimento atteso di P dobbiamo quantificare il rischio che l'investitore si appresta a sopportare con questo portafoglio, per poter calcolare la volatilità di questo investimento dobbiamo avvalerci di due concetti sopra citati:

- σ_{AB} , la covarianza tra A e B
- ρ_{AB} , il coefficiente di correlazione tra A e B

Il valore numerico della covarianza tra i due titoli, $Cov(A,B) = \sigma_{AB}$, può essere, maggiore di zero, minore di zero o uguale a zero. I tre diversi casi hanno significato diverso a livello statistico, e in finanza significano che in caso di covarianza positiva i titoli e dunque i rendimenti a essi riferiti si muovono in maniera sincronica, in caso contrario i due titoli si muovono con un trend discorde, mentre se la covarianza è nulla essi si muovono in maniera totalmente indipendente.

Tra covarianze e coefficiente di correlazione esiste una relazione univoca:

$$\rho_{AB} = \frac{\sigma_{AB}}{\sigma_A \sigma_B}$$

Quest'ultimo può assumere i valori reali nell'intervallo $[-1; 1]$e tre casi più importanti da tenere a mente per le analisi di portafoglio sono:

- $\rho_{AB} = -1$ correlazione perfettamente negativa, i titoli si muovono perfettamente in senso contrario.
- $\rho_{AB} = 0$ incorrelazione dei due titoli.
- $\rho_{AB} = 1$ correlazione perfettamente positiva, i titoli si muovono perfettamente nello stesso senso.

Ora, dopo aver chiarito l'importanza della correlazione dei titoli, è possibile calcolare la varianza del portafoglio azionario sommando i valori all'interno della Matrice varianza covarianza:

	Titolo A	Titolo B
Titolo A	$X_A^2 \sigma_A^2$	$X_A X_B \sigma_{AB} = X_A X_B \rho_{AB} \sigma_A \sigma_B$
Titolo B	$X_B X_A \sigma_{AB} = X_B X_A \rho_{AB} \sigma_B \sigma_A$	$X_B^2 \sigma_B^2$

TABELLA 3.2: Matrice varianza covarianza

$$Var(P) = X_A^2 \sigma_A^2 + X_B^2 \sigma_B^2 + 2 X_A X_B \sigma_{AB}$$

$$SD(P) = \sqrt{Var(P)} = \sqrt{X_A^2\sigma_A^2 + X_B^2\sigma_B^2 + 2X_AX_B\sigma_{AB}}$$

3.4 PORTAFOGLIO DI DUE TITOLI: DALL'ANALISI GRAFICA ALLA COSTRUZIONE DEL PORTAFOGLIO EFFICIENTE

Con il seguente grafico collochiamo due titoli nello spazio σ-μ e analizziamo la volatilità del portafoglio costituito da essi, soffermandoci sui tre casi più rilevanti dal punto di vista della correlazione tra i rendimenti dei titoli.

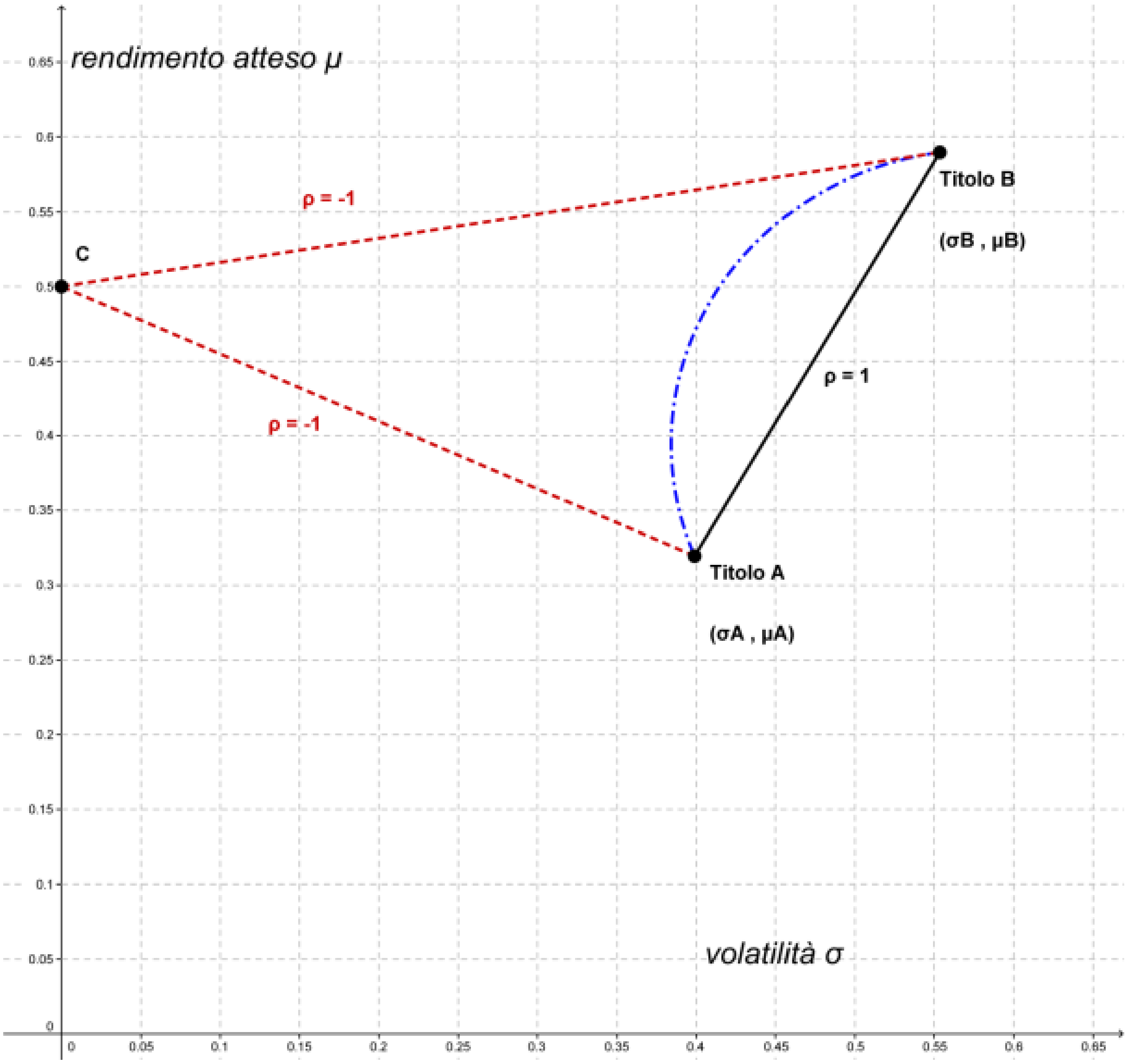

GRAFICO 3.5: Correlazione dei titoli a livello grafico

Titoli perfettamente correlati positivamente ($\rho_{AB} = 1$)

$$Var(P) = X_A^2\sigma_A^2 + X_B^2\sigma_B^2 + 2X_AX_B\sigma_{AB} = (X_A\sigma_A + X_B\sigma_B)^2$$

$$SD(P) = \sqrt{Var(P)} = \sqrt{(X_A\sigma_A + X_B\sigma_B)^2} = (X_A\sigma_A + X_B\sigma_B)$$

Titoli incorrelati ($\rho_{AB} = 0$)

$$Var(P) = X_A^2\sigma_A^2 + X_B^2\sigma_B^2$$

$$SD(P) = \sqrt{Var(P)} = \sqrt{X_A^2\sigma_A^2 + X_B^2\sigma_B^2}$$

Titoli perfettamente correlati negativamente ($\rho_{AB} = -1$)

$$Var(P) = X_A^2\sigma_A^2 + X_B^2\sigma_B^2 - 2X_AX_B\sigma_{AB} = (X_A\sigma_A - X_B\sigma_B)^2$$

$$SD(P) = \sqrt{Var(P)} = \sqrt{(X_A\sigma_A - X_B\sigma_B)^2} = (X_A\sigma_A - X_B\sigma_B)$$

Come mostra il grafico al variare di X_A ($X_A = 1 - X_B$),(σ_P, μ_P) traccia una conica nel piano rendimento atteso – volatilità. Quando la correlazione tra i due titoli è $\rho_{AB} = -1$ è possibile ottenere un portafoglio con volatilità minima pari a 0, se si effettua la giusta scelta di pesature dei due titoli. In generale mettendo insieme in uno stesso portafoglio due titoli negativamente correlati ha l'effetto di ridurre la variabilità dell'intero portafoglio azionario.

In particolare se $\rho_{AB} = -1$

$$\sigma_P(X_A, X_B, \rho_{AB} = -1) = \sqrt{(X_A\sigma_A - X_B\sigma_B)^2} = |X_A\sigma_A - X_B\sigma_B| = |X_A\sigma_A - (1 - X_A)\sigma_B|$$

Il punto C (con σ = 0) corrisponde ad $X_B = \frac{\sigma_A}{\sigma_B + \sigma_A}$

Se $-1 < \rho_{AB} < 1$ il punto di minima varianza nella curva che rappresenta le varie combinazioni di portafoglio è determinato da

$\frac{\partial \sigma_A^2}{\partial X_A} = -2X_B\sigma_A^2 + 2X_A\sigma_B^2 + 2(1-2X_A)\rho\sigma_A\sigma_B = 0$ (uguaglianza a zero imposta)

$$X_B = \frac{\sigma_A^2 - \rho\sigma_A\sigma_B}{\sigma_A^2 - 2\rho\sigma_A\sigma_B + \sigma_B^2}$$

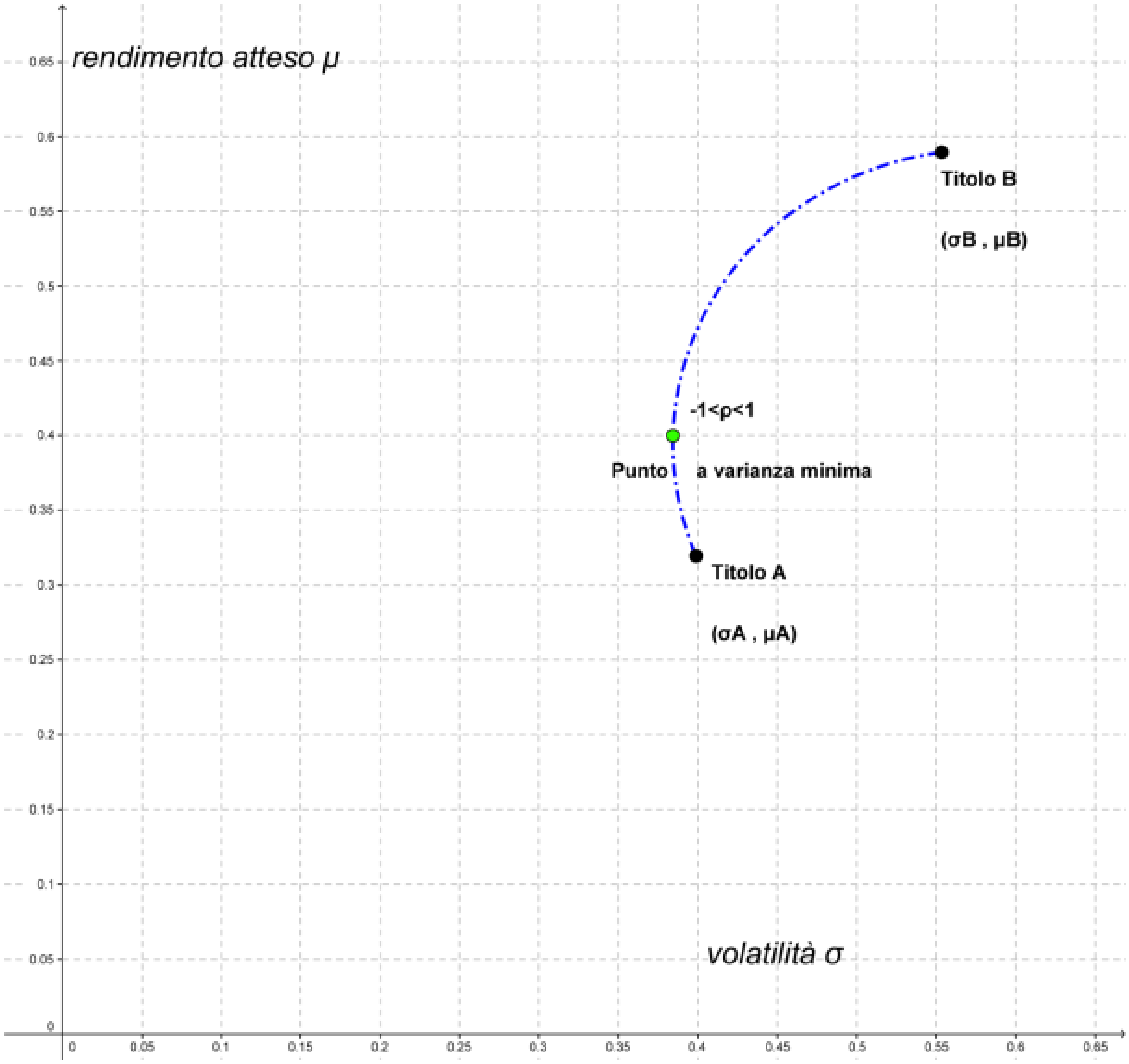

Grafico 3.6: Portafoglio a variabilità minima

3.5 VENDITE ALLO SCOPERTO, RISK-FREE ASSET E LA CAPITAL MARKET LINE

Fino a questo momento abbiamo considerato unicamente portafogli in cui erano investite somme positive in ogni titolo ($\sum X_i = 1 , X_i > 0$) , in questo caso quando si effettua un investimento positivo in un titolo si dice di assumere **una posizione lunga.** E' possibile investire anche somme negative in un'azione, cioè assumere una **posizione corta,** tramite l'utilizzo di una **vendita allo scoperto (short selling):** una transazione in cui si vende un'azione che non si possiede, comprandola poi in futuro. La vendita allo scoperto rappresenta una strategia vantaggiosa se ci si aspetta che il prezzo dell'azione diminuisca in futuro, ponendo attenzione sul fatto che quando si prende a prestito un titolo per venderlo allo scoperto, si è obbligati ad acquistarlo e restituirlo, perciò, quando il prezzo dell'azione diminuisce, si riceve in anticipo una somma superiore a quando si deve pagare poi in futuro per acquistare le azioni.

La vendita allo scoperto è una strategia di investimento che può incrementare il rendimento atteso del nostro portafoglio di titoli anche quando l'effettivo rendimento di un titolo sia negativo ovvero quando la sua quotazione azionaria diminuisca nel tempo, questo tipo di strategia si incentra sul rendimento atteso, esiste un altro sistema d'investimento che pone attenzione non tanto sull'incremento del rendimento bensì sulla riduzione della rischiosità del nostro portafoglio. Tale metodo consiste nell'investire una parte del nostro denaro in un **investimento sicuro e privo di rischio,** come per esempio i Buoni Del Tesoro (sempre tenendo in considerazione il "rischio-paese" o cosiddetto rischio di default di alcuni stati sovrani che emettono debito rischioso).

3.5.1 INVESTIRE IN TITOLI PRIVI DI RISCHIO

- Si consideri un portafoglio P con rendimento atteso $\mu = E(R_P)$.
- Sia X la quantità relativa di denaro da destinare all'investimento, vogliamo studiare la dinamica del rischio di portafoglio investendo una quantità X_R in un titolo rischioso di rendimento atteso $R_R(risky)$e una quantità$X_{RF} = (1 - X_R)$ nel titolo privo di rischio di rendimento $R_{RF}(risk - free)$
- $X = X_R + X_{RF}$

Il rendimento atteso del portafoglio $\mu = E(R_P)$ risulta essere :

$$E(R_P) = (1 - X_R)R_{RF} + X_R R_R = \boldsymbol{R_{RF}} + \boldsymbol{X_R}(\boldsymbol{R_R} - \boldsymbol{R_{RF}})$$

L'ultimo termine dell'equazione riordina i fattori al fine di fornire un'utile interpretazione : il rendimento atteso del nostro portafoglio è pari al tasso privo di rischio più una quota del premio per il rischio, $(\boldsymbol{R_R} - \boldsymbol{R_{RF}})$,in funzione della frazione $\boldsymbol{X_R}$investita in esso.Passando all'analisi della volatilità dell'investimento dobbiamo fare delle considerazioni sul titolo risk-free: la sua volatilità per definizione è pari a zero, in quanto il tasso privo di rischio $\boldsymbol{R_{RF}}$è noto a priori dell'investimento, $\boldsymbol{\sigma_{RF} = 0}$; di conseguenza usando la definizione di covarianza $\boldsymbol{\sigma_{RF-R} = \rho_{RF-R}\sigma_{RF}\sigma_R}$ è anch'essa nulla $\boldsymbol{\sigma_{RF-R} = 0}$**.** Tutto questo ci porta a determinare che :

$$\sigma_P = \sqrt{X_R^2 \sigma_R^2} = \boldsymbol{X_R \sigma_R}$$

Se riflettiamo sul risultato ottenuto ci accorgiamo subito che la volatilità di portafoglio è solo una parte della volatilità del titolo rischioso che dipende dall'ammontare in esso investito (Berk, DeMarzo, Finanza aziendale 1, 2011).

3.5.2 LA CAPITAL MARKET LINE

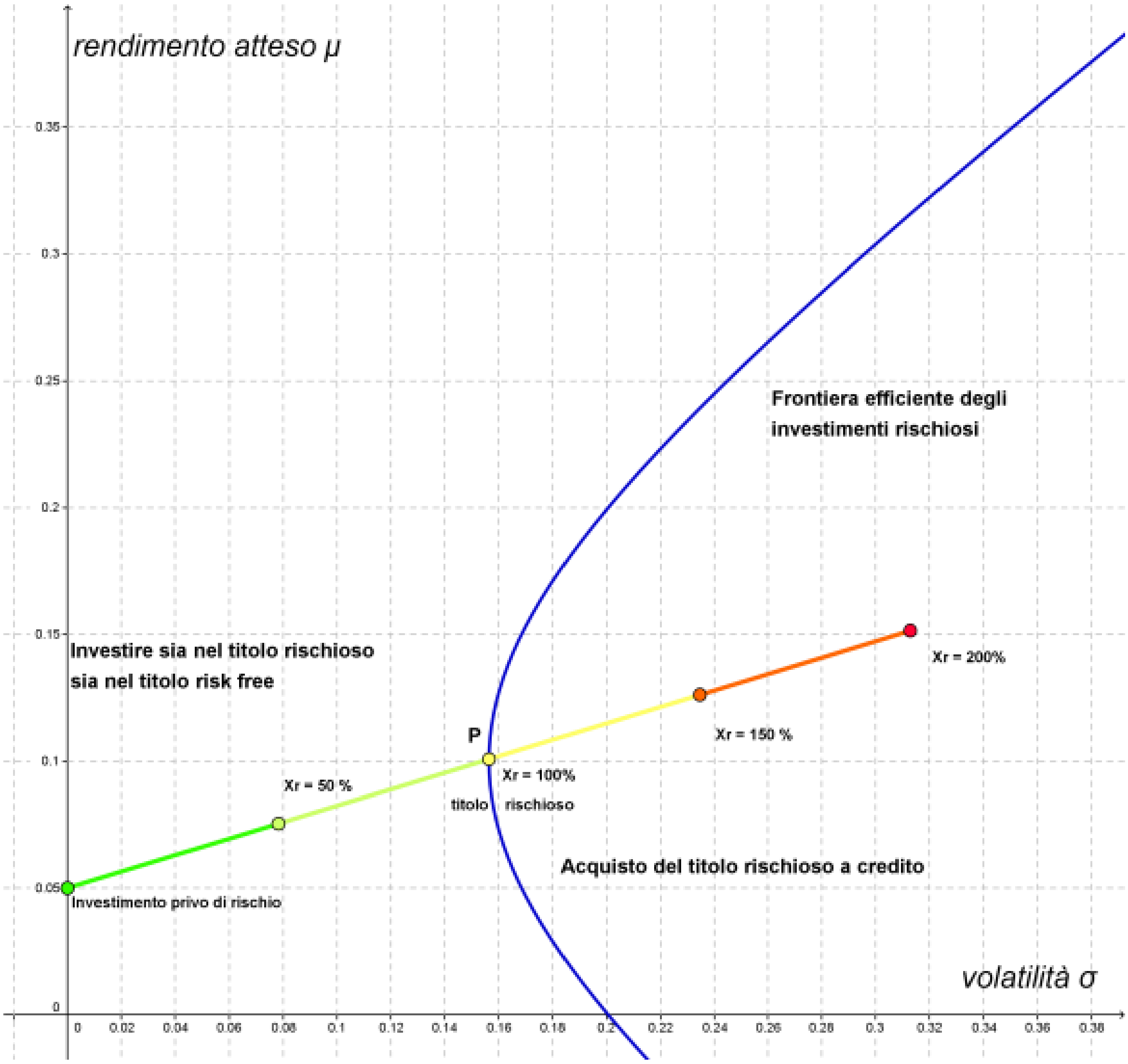

GRAFICO 3.7: La capital market line

Quando si aumenta la quota $X_R$investita nel portafoglio P dallo 0 al 100%, ci si muove lungo la retta colorata, della figura precedente, dall'investimento privo di rischio al titolo rischioso. Se si aumenta X_R fino a superare la soglia del 100%, si raggiungeranno punti oltre il titolo rischioso sul grafico. In questo caso, si vende allo scoperto l'investimento privo di rischio, per cui si dovrà pagare il suo stesso rendimento; in altre parole è come indebitarsi al tasso privo di rischio. Tale tecnica di investimento, che consiste nell'indebitamento, è anche detta ***acquistare azioni in leva*** o a margine di conseguenza un portafoglio composto da una posizione corta su un investimento privo di rischio è anche detto ***levered.***

Come si può intuire inizialmente dal grafico un portafoglio levered dove $X_R > 100\%$ comporta una volatilità maggiore del singolo titolo rischioso bensì conduce a rendimenti attesi più cospicui, sempre graficamente possiamo notare che il portafoglio P non è il miglior portafoglio da combinare con l'investimento risk-free. Geometricamente se costruiamo un portafoglio levered che giaccia sulla frontiera efficiente degli investimenti e quindi più in alto di P, otteniamo una retta che è maggiormente inclinata rispetto alla precedente, la maggiore inclinazione ci suggerisce che per ogni livello di volatilità otterremmo un rendimento atteso più alto. Per ottenere il rendimento atteso più elevato possibile per qualunque livello della deviazione standard occorre trovare un portafoglio che generi la retta più inclinata possibile quand'è combinato con il titolo privo di rischio.

La pendenza di tale retta è chiamata in finanza **Indice di Sharpe**:

$$indice\ di\ Sharpe = \frac{rendimento\ in\ eccesso\ del\ portafoglio}{Volatilità\ di\ portafoglio} = \frac{E(R_P) - R_{RF}}{\sigma_P}$$

Tale indice misura il rapporto *premio per il rischio – volatilità* di un portafoglio. Il portafoglio ottimo da combinare con il risk-free asset sarà quello con l'indice di Sharpe più elevato cioè quello per il quale la semiretta che parte dal rischio nullo è tangente alla frontiera efficiente degli investimenti rischiosi, il portafoglio cosi trovato viene detto anche ***portafoglio tangente*** (Berk, DeMarzo, Finanza aziendale 1, 2011).

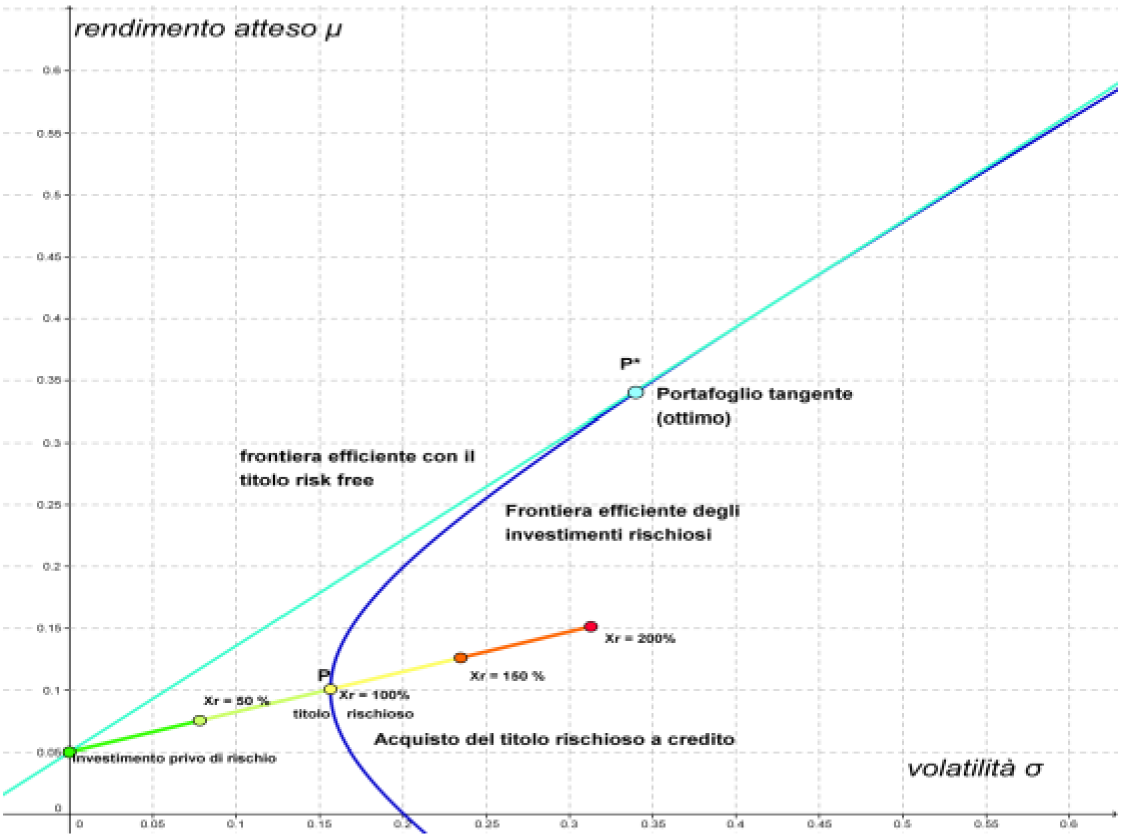

GRAFICO 3.8: La capital market line con portafogli tangenti e ottimi

3.6 UNICREDIT, INTESA SAN PAOLO E MONTE DEI PASCHI APPLICAZIONE DELLA TEORIA PER LA COSTRUZIONE DEL PORTAFOGLIO OTTIMALE

Una volta che abbiamo appreso la teoria di portafoglio di Markowitz e il criterio media-varianza, applichiamo tali precetti ai tre titoli bancari per costruire un portafoglio efficiente. Innanzitutto selezioniamo i due titoli più efficienti secondo il criterio dell'indice di Sharpe, dopodiché in base alla covarianza tra i titoli scelti determiniamo le pesature ottime per la costruzione del portafoglio ottimo seguendo le procedure del paragrafo 3.3.1 .

Il rendimento di un Buono ordinario del tesoro a un anno è pari allo 0.079% (emissione del 11/03/2015, fonte: http://www.soldiblog.it/post/38271/titoli-di-stato-asta-bot-12-mesi-10-giugno-2015-caratteristiche-emissione), perciò ai fini della nostra discussione considereremo il tasso risk free, $R_F = 0.079\%$. Di conseguenza gli indici di Sharpe per i nostri tre titoli risulteranno:

TITOLO	RENDIMENTO AL 11/03/2015	VOLATILITA' AL 11/03/2015	INDICE DI SHARPE
Unicredit	0.98%	0.47%	$\frac{0.98\%-0.079\%}{0.47\%}$= **1.92**
Intesa San Paolo	1.46%	1.09%	$\frac{1.46\%-0.079\%}{1.09\%}$=**1.26**
Monte dei paschi di Siena	2.95%	3.38%	$\frac{2.95\%-0.079\%}{3.38\%}$=**0.85**

TABELLA 3.3: Indice di Sharpe dei titoli bancari in esame.

La tabella 3.3 ci suggerisce che tra i tre titoli azionari, i due più efficienti (secondo il criterio che considera come indice di efficienza l'$indice\ di\ Sharpe = \frac{E(R_i)-R_{RF}}{\sigma_i}$) sono i titoli Unicredit e Intesa San Paolo. Procederemo d'ora in poi con questi due titoli per la costruzione del portafoglio ottimo.

3.6.1 DETERMINAZIONE DEI PESI OTTIMI

Il portafoglio che ci avviamo ad analizzare è un portafoglio composto dai due titoli, UniCredit e Intesa San Paolo ai fini della nostra analisi:

- $\boldsymbol{E(R_P)}\ o\boldsymbol{\mu_P}$ è $il\ rendimento\ atteso\ del\ portafoglio\ P$
- $\boldsymbol{SD_P} = \sqrt{\boldsymbol{Var(P)}}\ o\ \boldsymbol{\sigma_p}$ è $la\ volatilit$à $del\ portafoglio\ P$

- $\boldsymbol{R_{ucd}}, \boldsymbol{R_{isp}}$ ***o*** $\boldsymbol{\mu_{ucd}}, \boldsymbol{\mu_{isp}}$ *sono rispettivamente i rendimenti attesi dei titoli Unidredit e intesa San Paolo.*
- $\boldsymbol{\sigma_{ucd}}$ ***e*** $\boldsymbol{\sigma_{isp}}$ *sono rispettivamente le volatilità dei titoli Unicredit e intesa san Paolo.*
- $\boldsymbol{\sigma_{ucd-isp}}$è *la covarianza tra i due titoli.*
- $\boldsymbol{\rho_{ucd-isp}}$è *il coefficiente di correlazione.*

TABELLA 3.4: dati rilevati con R relativi ai titoli

(dati importati da yahoofinance)

	VALORE NUMERICO
$R_{ucd} - \mu_{ucd}$	**0.98%**
$R_{isp} - \mu_{isp}$	**1.46%**
σ_{ucd}	**0.47%**
σ_{isp}	**1.09%**
$\sigma_{ucd-isp}$	**1.68%**
$\rho_{ucd-isp}$	**0.3979**

- $\boldsymbol{X_{ucd}}, \boldsymbol{X_{isp}}$ *sono i pesi relativi dei due titoli nel portafoglio e ci accingiamo a stabilirli con la seguente formula del capitolo* 3 *paragrafo* 3:

$$X_{isp} = \frac{\sigma_{ucd}^2 - \rho\sigma_{ucd}\sigma_{isp}}{\sigma_{ucd}^2 - 2\rho\sigma_{ucd}\sigma_{isp} + \sigma_{isp}^2}$$

$$X_{ucd} = 1 - X_{isp}$$

Perciò

$$X_{isp} = \frac{0.47\%^2 - 0.3979 \text{ x } 0.47\% \text{ x } 1.09\%}{0.47\%^2 - 2\, x\, 0.3979\, x\, 0.47\%\, x\, 1.09\% + 1.09\%^2} \approx 2\%$$

$$X_{ucd} = 1 - X_{isp} = 1 - 2\% \approx 98\%$$

Come ci si poteva aspettare la maggior parte di capitale dev’essere investita nel titolo più efficiente ed infatti secondo i calcoli effettuati il peso del titolo UniCredit nel portafoglio ottimo è pari al 98% mentre quello di Intesa San Paolo solamente il 2%.

Rendimento atteso del portafoglio ottimo:

$$E(R_P) = X_{ucd}R_{ucd} + X_{isp}R_{isp}$$

$$E(R_P) = 0.98\ x\ 0.98\% + 0.02\ x\ 1.46\%$$

$$\boldsymbol{E(R_p) = 1\%}$$

Matrice varianza-covarianza:

	Unicredit	Intesa San Paolo
Unicredit	$X_{ucd}^2\sigma_{ucd}^2$	$X_{ucd}X_{isp}\sigma_{ucd-isp}$
Intesa San Paolo	$X_{isp}X_{ucd}\sigma_{ucd-isp}$	$X_{isp}^2\sigma_{isp}^2$

TABELLA 3.5: Matrice varianza-covarianza Unicredit, intesa san Paolo

	Unicredit	Intesa San Paolo
Unicredit	$(0.98)^2 \times 0.98\%^2$	$0.98 \times 0.02\ \times 0.0168$
Intesa San Paolo	$0.98 \times 0.02\ \times 0.0168$	$(0.02)^2 \times 1.46\%^2$

TABELLA 3.6

$$Var(P) = X_{ucd}^2\sigma_{ucd}^2 + X_{isp}^2\sigma_{isp}^2 + 2X_{ucd}X_{isp}\sigma_{ucd-isp}$$

$$Var(P) = (0.98)^2 \times 0.98\%^2 + (0.02)^2 \times 1.46\%^2 + 2\ \times 0.98 \times 0.02\ \times 0.0168$$

$$Var(P) = 0.0075\ \%$$

$$SD(P) = \sigma_p = \sqrt{0.000075} = 0.26\%$$

l'$indice\ di\ Sharpe(P) = 3.54$

L'indice di Sharpe del nostro portafoglio ottimale risulta essere più alto di quello relativo ai singoli titoli, ciò ci conferma che abbiamo costruito un portafoglio più efficiente in termini di media e varianza rispetto ai singoli titoli azionari. Questo è il modo in cui la diversificazione di portafoglio è una buona strategia per intraprendere investimenti redditizi.

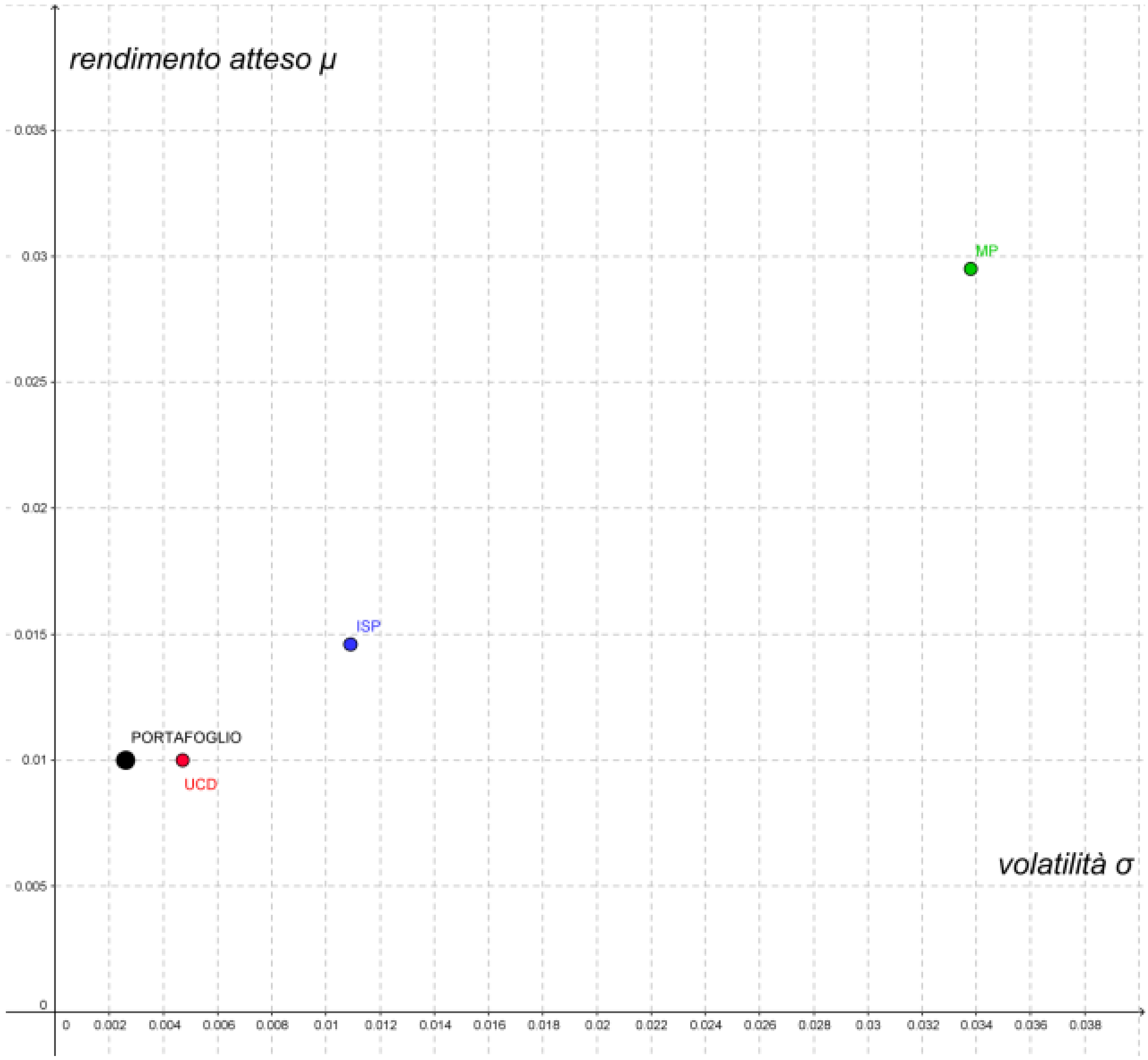

GRAFICO 3.9: Rappresentazione grafica, nello spazio media volatilità, dei tre titoli e del portafoglio ottimo costruito.

4 IL CAPITAL ASSET PRICING MODEL

Abbiamo visto come la teoria di portafoglio di Markowitz ci permetta di costruire un portafoglio di titoli efficiente secondo il criterio media-varianza; il concetto alla base della teoria, come descritto nei precedenti capitoli, è la diversificazione di portafoglio: la rischiosità di un investimento può essere ridotta tramite l'introduzione di titoli diversi e possibilmente negativamente correlati tra loro, così da eliminare in tutto o in parte il rischio "specifico" dei singoli titoli. Il mercato tuttavia non è tenuto alla remunerazione del rischio specifico nei confronti di un investitore, in quanto questo tipo di rischio può essere ridotto o eliminato secondo quanto è stato ribadito finora. Il mercato premia gli investitori che sopportano un rischio che non è facilmente eliminabile, il rischio sistematico, tuttavia la misura di rischiosità che abbiamo considerato fino a qui (la volatilità di un titolo σ o la volatilità di portafoglio σ_P)non riesce a distinguere la variabilità dei rendimenti di un titolo dovuta al rischio specifico e quella dovuta al rischio sistematico. Tutto questo comporta l'esigenza di trovare una misura che ci permetta di capire quale sia il grado di rischio non eliminabile di un titolo e per farlo ci avvaliamo del Capital Asset Pricing model.

4.1 LA LOGICA DEL CAPM: ASSUNZIONI E IPOTESI

Il Capital Asset Pricing Model (CAPM) di William Sharpe (1964) e John Lintner(1965) segna la nascita della valutazione del prezzo degli asset. Cinque decenni più tardi il CAPM è ancora largamente usato nelle applicazioni come la stima del costo del capitale delle imprese e nella valutazione delle performance di portafogli di investimento gestiti. La vera forza del CAPM sta nel fatto che offre una potente e intuitivamente buona previsione su come misurare il rischio e la relazione tra rendimento e rischiosità di un titolo. Sfortunatamente i risultati empirici di questo modello sono abbastanza inadeguati per rendere invalidi le modalità con cui è usato nelle applicazioni, il problema empirico del CAPM potrebbe riflettere errori teorici, dovuti alle diverse e semplificate assunzioni. Ma potrebbero essere anche causati dalle difficoltà nell'implementare test validi del modello. Per esempio il CAPM dice che il rischio di un asset dovrebbe essere misurato relativamente al portafoglio o indice di mercato che in linea di principio potrebbe includere non solo strumenti finanziari negoziabili ma anche beni di consumo come le commodities, beni immobiliari e capitale umano. Il modello delineato da Sharpe e Lintner permette di individuare il portafoglio efficiente di attività rischiose senza dover conoscere il rendimento atteso di ogni titolo (The capital asset pricing model: Theory and evidence, E.F.Fama, K.R.French, 2004). Il CAPM utilizza le scelte ottimali effettuate dagli investitori per individuare il portafoglio ottimo, come il portafoglio di mercato, cioè il portafoglio composto da tutti i titoli quotati in tale mercato (nel nostro esempio il portafoglio di mercato sarà Il FTSEMIB che contiene tutti i titoli quotati nella borsa di Milano).

Il Capital Asset Pricing Model si basa su delle importanti e necessarie assunzioni, quelle principali sono tre:

- Gli investitori possono acquistare e vendere tutti i titoli al prezzo di mercato (senza sostenere dei costi di transazione o pagare imposte) e possono prendere o dare a prestito denaro al tasso di interesse privo di rischio.
- Gli investitori detengono solamente portafogli efficienti di titoli scambiati – portafogli che danno il maggiore rendimento atteso per un determinato livello di volatilità.
- Gli investitori hanno aspettative omogenee su volatilità, correlazioni e rendimenti attesi dei titoli.

4.1.1 LA DETERMINAZIONE DEL PREMIO PER IL RISCHIO, INTRODUZIONE DEL BETA

Date le precedenti assunzioni, si può riconoscere il portafoglio efficiente: è uguale al portafoglio di mercato (Berk, DeMarzo, 2011). Quindi, se non si conosce il rendimento atteso di un titolo o il costo del capitale di tale investimento, è possibile servirsi del modello offerto dal capital asset pricing model per determinarlo utilizzando il portafoglio di mercato come un benchmark, per poterlo fare ci avvaliamo del seguente modello lineare:

$$E[R_i] = R_i = R_f + \beta_i(E[R_m] - R_f)$$

Dove rispettivamente

- $\mathrm{E[R_i]}$è il rendimento atteso dell'investimento nel titolo i −
  esimo che deve essere uguale $\mathrm{R_i}$ ovvero il rendimento effettivo del titolo
  Per le condizioni di applicazione del CAPM sopra discusse.
- $\mathrm{R_f}$è il rendimento del generico titolo privo di rischio.
- $\mathrm{E[R_m]}$è il rendimento atteso del portafoglio di mercato.
- β_iè il beta del titolo iesimo rispetto al portafoglio di mercato.

4.1.2 IL SIGNIFICATO DEL BETA

Il beta di un titolo misura la sua volatilità dovuta al rischio di mercato o sistematico rapportata al rischio di mercato nel complesso, e quindi rappresenta la sensibilità del titolo al rischio di mercato. Di conseguenza secondo una prima interpretazione dell'equazione del CAPM, investimenti che hanno un rischio simile (caratterizzati da uno stesso beta) devono apportare un rendimento pressoché uguale. Dal momento che attraverso la diversificazione di portafoglio gli investitori possono ridurre sino ad eliminare il rischio specifico dei titoli componenti il portafoglio, la misura più coerente con il nostro modello non sarà più la volatilità del titolo bensì il suo beta. A livello numerico per ogni 1% di variazione del rendimento in eccesso del portafoglio di mercato rispetto al rendimento privo di rischio, il titolo rischioso avrà una variazione di rendimento pari al suo beta in termini percentuali (Corporate Finance, an introduction, Ivo Welch, 2008).

4.2 IL CAPM: MODELLO LINEARE PER LA STIMA DEL RISCHIO

Il Capital Asset Pricing Model è un modello di determinazione del rischio-rendimento di un titolo finanziario che si basa su relazione di tipo lineare, come precedentemente visto, per spiegare l'andamento del rischio in funzione del rendimento.

Ma nella sua formulazione $\boldsymbol{E[R_i] = R_i = R_f + \beta_i(E[R_m] - R_f)}$ vengono messi in relazione il rendimento di un titolo rischioso e il rendimento del relativo indice di mercato. In realtà il fattore chiave per capire questo modello non è tanto il rendimento del titolo o dell'indice di mercato ad esso associato, quanto il **premio per il rischio** o **rendimento in eccesso** di questi due strumenti finanziari. **Il premio per il rischio di mercato** non è altro che il differenziale che sussiste tra il rendimento atteso del portafoglio di mercato e il rendimento di un titolo privo di rischio, che nel caso del CAPM consiste nel tasso di interesse a cui gli investitori possono dare e ricevere prestiti (un'altra proxy del tasso risk free può essere il rendimento dei buoni del tesoro come visto in precedenza nel paragrafo 3.5).

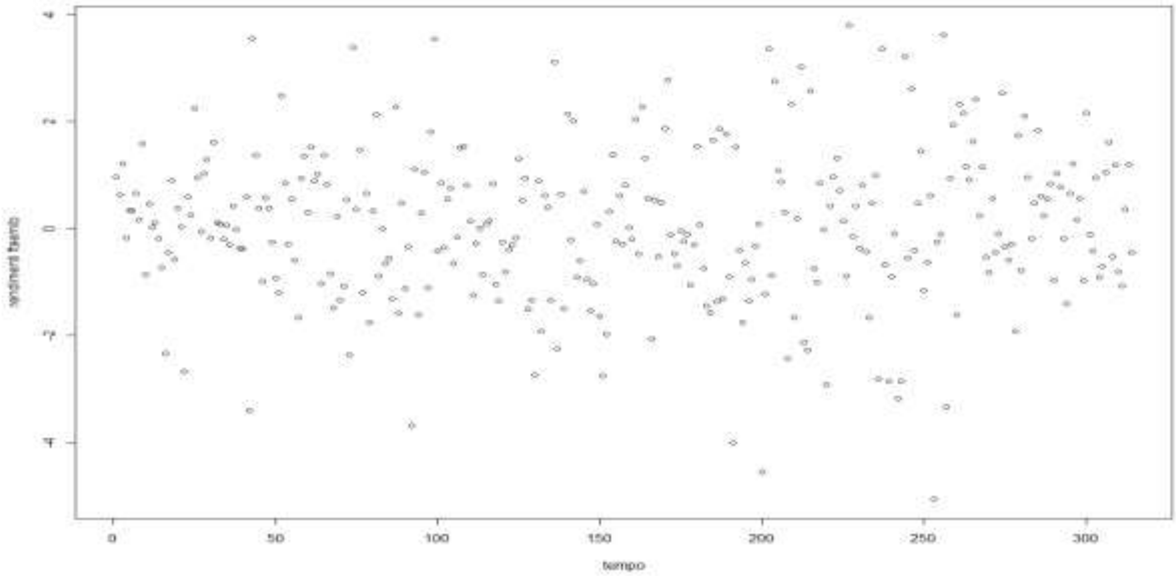

Grafico 4.1: Rendimenti FTSEMIB 01/01/2014 – 31/03/2015

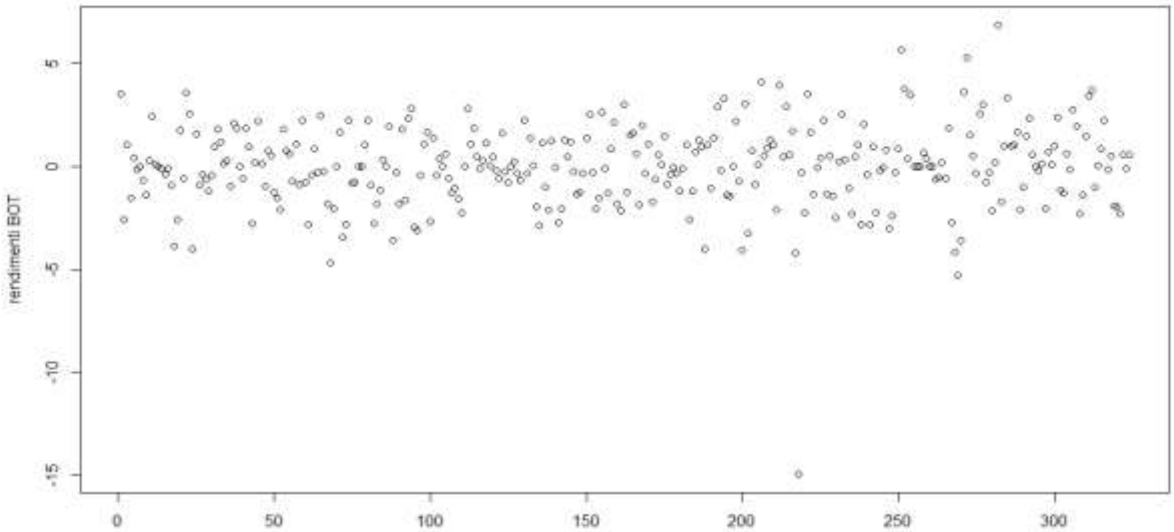

Grafico 4.2: Rendimenti BOT 01/01/2014 – 31/03/2015

Premio per il rischio di mercato calcolato come

$$\boldsymbol{Premio\ rischio_{FTSEMIB} = R_{FTSEMIB} - R_{BOT}}$$

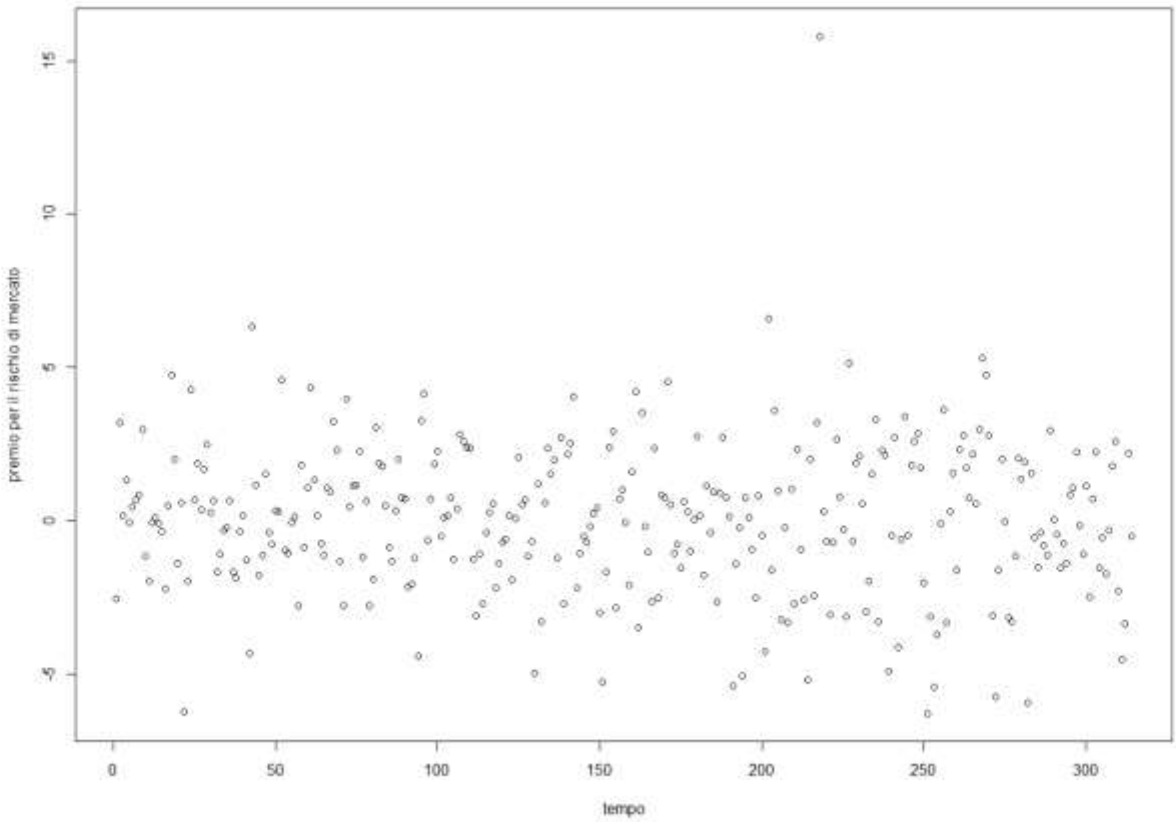

Grafico 4.3: Premio $\text{rischio}_{\text{FTSEMIB}}$

Oltre al premio per il rischio di mercato entra in gioco come fattore del modello anche il ***rendimento in eccesso*** di un titolo rischioso, esso è espresso come il differenziale tra il rendimento atteso del titolo e il rendimento del titolo privo di rischio.

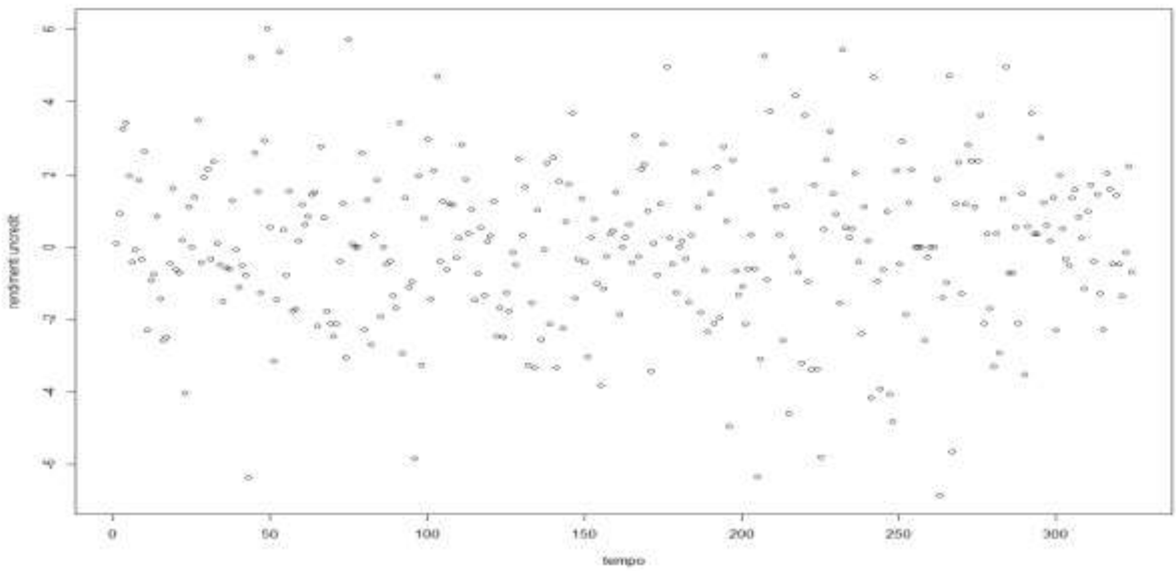

Grafico 4.4: Rendimenti titolo UNICREDIT 01/01/2014 – 31/03/2015

Rendimento in eccesso del titolo unicredit calcolato come

$$\boldsymbol{Rendimento\ in\ eccesso_{UCG} = R_{UCG} - R_{BOT}}$$

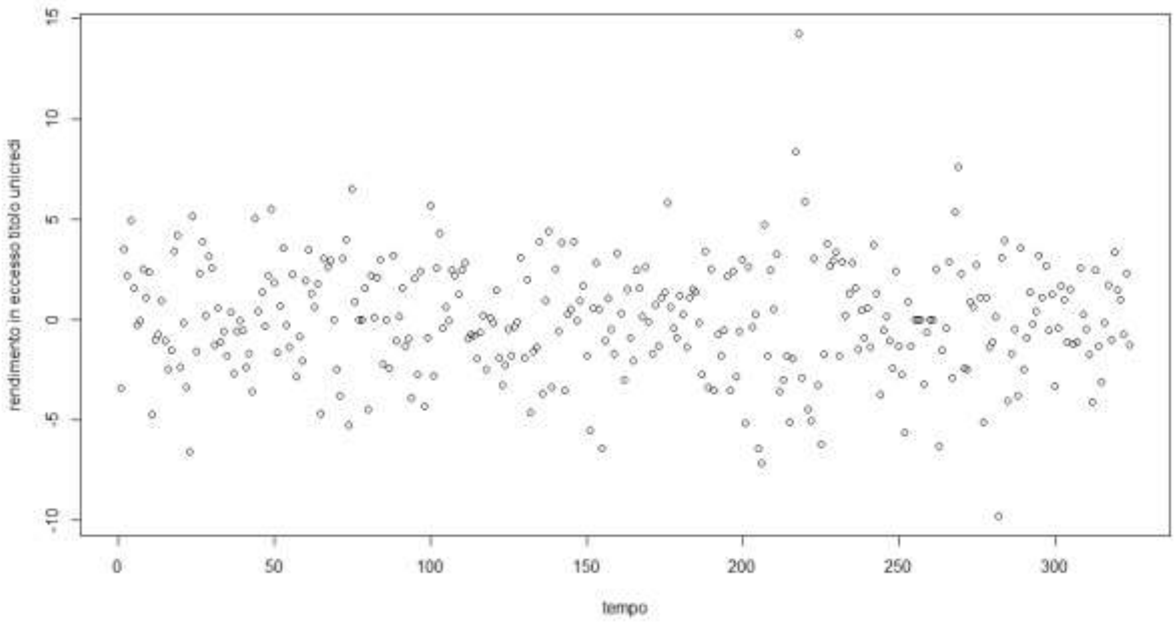

Grafico 4.5: Rendimento in $\text{eccesso}_{\text{UCG}}$

Lo scopo del Capital Asset Pricing Model, come tutte le altre teorie per l'analisi degli strumenti finanziari accessibili nel mercato, è quello di riuscire a prevedere il grado di rischiosità di un investimento finanziario a priori. Idealmente si vorrebbe conoscere il livello di rischio nel futuro, nella pratica, si stima il rischio in base alla sensibilità storica del titolo. Questo approccio ha senso se si assume che la distribuzione dei rendimenti nel passato sia la miglior proxy dei rendimenti futuri. La misura del rischio che il CAPM si pone di trovare è la stima del fattore beta di cui abbiamo precedentemente parlato, come già detto in precedenza rappresenta la sensibilità di un titolo al rischio di mercato, per misurare questa sensibilità a partire dai rendimenti storici bisogna avvalersi di un metodo largamente usato in ambito statistico ovvero la regressione lineare che ci permetta di studiare l'andamento di due variabili, Il rendimento in eccesso del titolo di cui si vuole misurare la rischiosità e il premio per il rischio di mercato, che si presumono correlate.

4.2.1 LA REGRESSIONE LINEARE

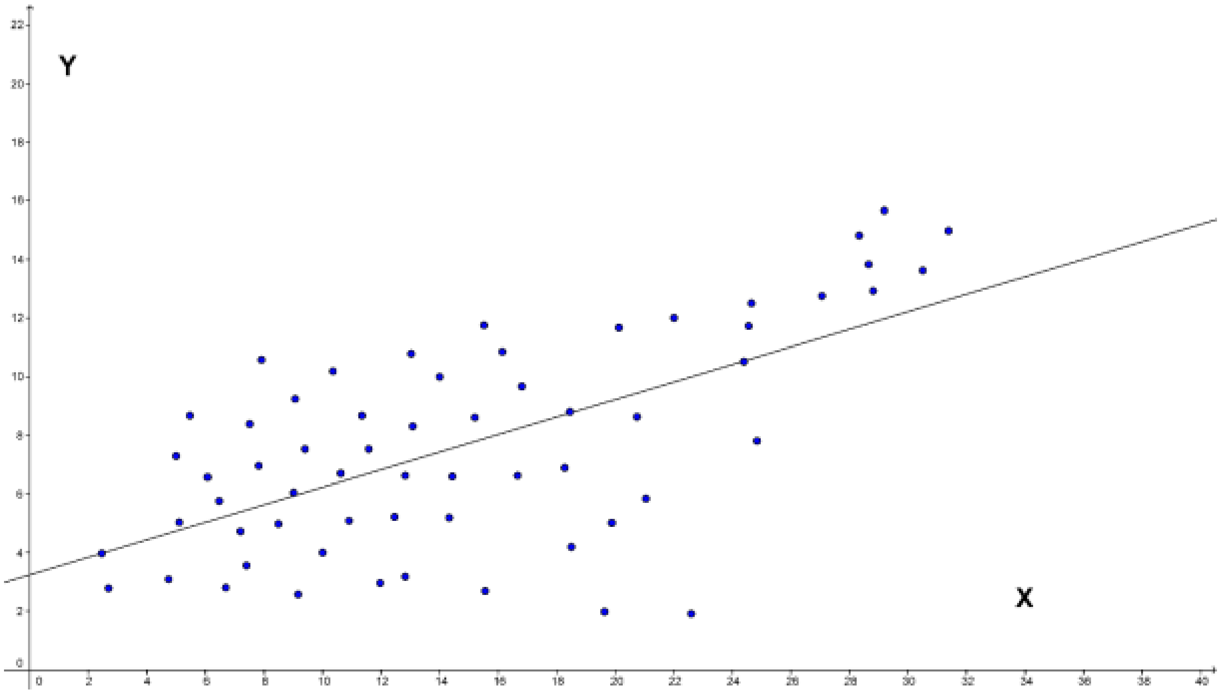

GRAFICO 4.1: Interpolazione di due variabili mediante la regressione lineare

La regressione lineare (Financial Econometrics Notes, K. Sheppard, 2013) è uno degli strumenti più diffusi in statistica ed è largamente adottato in ambito dell'econometria e dell'econometria finanziaria. Il successo della regressione lineare è dovuto a due caratteristiche chiave: la possibilità di usare stimatori semplici e la facilità e la veloce interpretazione dei risultati.

La regressione lineare descrive una variabile dipendente come una funzione lineare di un'altra variabile in questo caso indipendente, possibilmente una variabile casuale e un termine di errore.

$$y_i = \beta_1 x_{1,i} + \beta_2 x_{2,i} + \cdots + \beta_k x_{k,i} + \epsilon_i$$

Dove y_i è detta variabile risposta o spiegata, le *k* variabili, $x_{1,i}, \dots, x_{k,i}$ sono chiamate variabili esplicative. I termini $\beta_1, \beta_2, \dots, \beta_k$ sono i coefficienti della regressione,ϵ_i è l'errore o disturbo e infine la notazione *i = 1, 2, …, n* sta per l'indice dell'osservazione. Mentre la precedente equazione mette in risalto la relazione tra y_i e le variabili x, la notazione matriciale viene usata per una descrizione più compatta dell'intero modello:

$$\begin{bmatrix} y_1 \\ y_2 \\ \vdots \\ y_n \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} x_{11} & x_{12} & \cdots & x_{1k} \\ x_{21} & x_{22} & \cdots & x_{2k} \\ \vdots & \vdots & \vdots & \vdots \\ x_{n1} & x_{n2} & \cdots & x_{nk} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \beta_1 \\ \beta_2 \\ \vdots \\ \beta_k \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} \epsilon_1 \\ \epsilon_2 \\ \vdots \\ \epsilon_n \end{bmatrix}$$

$$\boldsymbol{y} = \boldsymbol{X\beta} + \boldsymbol{\epsilon}$$

Dove *X* è una matrice *n x k*, β è un vettore *k x 1*, e sia *y* che ϵ sono vettori *n x 1.*

La regressione lineare permette una interpretazione dei coefficienti "ceteris paribus" ovvero tenendo costanti tutti gli atri fattori. Nello specifico, l'effetto di una variazione in una variabile esplicativa può essere studiato senza variazioni nelle altre. L'analisi di regressione permette di determinare anche tutte e variabili che sono rilevanti nello studio della variabile spiegata y_i e nel caso scartare dal modello tutte le variabili che non hanno un'influenza su di essa. Queste caratteristiche rendono la regressione lineare uno strumento statistico/econometrico largamente utilizzato.

4.2.2 FORME FUNZIONALI

Una relazione lineare è abbastanza specifica, in qualche caso però restrittiva. È importante distinguere tutto ciò che può essere esaminato attraverso un modello lineare da ciò che non lo può. La regressione lineare richiede due caratteristiche chiave per il suo funzionamento: ogni termine del lato destro dell'equazione deve avere solo un coefficiente che entra in modo moltiplicativo e l'errore dev'essere espresso come un termine additivo. In molti casi pratici queste condizioni vengono soddisfatte e di conseguenza per la loro analisi si possono applicare gli strumenti forniti dalla regressione lineare. Altri casi che implicano forme "non lineari" sono comunque analizzabili mediante la regressione attraverso l'utilizzo di trasformazioni matematiche delle variabili utilizzate:

- ***Trasformazione logaritmica***, nella quale entrambe le variabili, esplicativa/e e spiegata, sono trasformazioni logaritmiche dei dati originali (solo per dati positivi in termini numerici)

  $$ln\, y_i = \beta_1 + \beta_2 \ln x_i + \epsilon_i$$

  posti$\tilde{y}_i = \ln y_i \;\; e \; \tilde{x}_i = \ln x_i$ otteniamo il modello lineare

  $$\tilde{y}_i = \beta_1 + \beta_2 \tilde{x}_i + \epsilon_i$$

  l'importanza della trasformazione logaritmica in ambito economico è facilmente intuibile nell'ambito delle funzioni cosiddette Cobb-Douglas, prendiamo per esempio la famosa funzione di produzione:

  $$Y_i = \beta_1 K_i^{\beta_2} L_i^{\beta_3} \epsilon_i$$

  Che per le caratteristiche richieste dalla regressione lineare non è analizzabile se non per una trasformazione logaritmica di entrambi i lati che la riconduce a

  $$\ln Y_i = \ln \beta_1 + \beta_2 \ln K_i + \beta_3 \ln L_i + \ln \epsilon_i$$

- ***Trasformazioni polinomiali***, nelle quali alternativamente o la variabile spiegata o le variabile esplicative compaiono con esponenti diversi da 1.

  $$y_i = \beta_1 + \beta_2 x_1 + \beta_3 x_2^2 + \epsilon_i$$

  Posto $\tilde{x}_2 = {x_2}^2$ otteniamo un modello lineare anche in termini di x_2

  $$y_i = \beta_1 + \beta_2 x_1 + \beta_3 \tilde{x}_2 + \epsilon_i$$

Questi appena visti sono solo alcuni esempi di trasformazioni funzionali che possiamo adottare per stimare un modello che inizialmente non ha caratteristiche di linearità mediante la regressione lineare; si deve tener conto che l'utilizzo di trasformazioni non lineari cambia completamente l'interpretazione dei coefficienti della regressione. Se è presente solo una variabile esplicativa,

$$y_i = x_i \beta + \epsilon_i$$

E

$$\frac{\partial y_i}{\partial x_{k,i}} = \beta_k$$

Supponiamo che compaiano nel modello sia $x_k \; sia \; x_k^2$

$$y_i = \beta_1 x_i + \beta_2 x_i^2 + \epsilon_i$$

In questo caso

$$\frac{\partial y_i}{\partial x_i} = \beta_1 + \beta_2 x_i$$

e il livello della variabile entra nel suo effetto parziale. Similmente in un modello logaritmico del tipo log-log

$$ln\, y_i = \beta_1 \ln x_i + \epsilon_i$$

E

$$\beta_1 = \frac{\partial \ln y_i}{\partial \ln x_i} = \frac{\frac{\partial y}{y}}{\frac{\partial x}{x}} = \frac{\%\Delta y}{\%\Delta x}$$

Perciò, $\beta_1$corrisponde all'elasticità di y_i rispetto a x_i. In generale, il coefficiente di una variabile quantitativa esplicativa corrisponde all'effetto di una variazione unitaria di quella variabile sulla variabile "ceteris paribus", mentre il coefficiente di una variabile quantitativa logaritmica corrisponde all'effetto di una variazione dell'un percento sulla variabile risposta. Per esempio in un modello semilogaritmico del tipo:

$$y_i = \beta_1 \ln x_i + \epsilon_i$$

β_1 corrisponderà al cambiamento unitario in y_i dovuto alla variazione % di x_i.

4.2.3 STIMA DEL MODELLO

La regressione lineare è anche conosciuta come "retta dei minimi quadrati" in inglese "ordinary least squares" (OLS), espressione che deriva dal metodo di stima dei parametri ignoti. Questo metodo minimizza il quadrato della distanza tra la retta (o piano, iperpiano se si tratta di regressione con più variabili esplicative) di adattamento e la variabile risposta. I parametri stimati sono la soluzione del seguente problema di minimizzazione:

$$min_\beta (\boldsymbol{y} - \boldsymbol{X\beta})'(\boldsymbol{y} - \boldsymbol{X\beta}) = min_\beta \sum_{i=1}^{n} (y_i - \boldsymbol{x_i \beta})^2$$

Le condizioni di prim'ordine per questo problema di ottimizzazione sono

$$-2\boldsymbol{X}'(\boldsymbol{y} - \boldsymbol{X\beta}) = -2(\boldsymbol{X}'\boldsymbol{y} - \boldsymbol{X}'\boldsymbol{X\beta}) = -2\sum_{i=1}^{n} \boldsymbol{x_i}(y_i - \boldsymbol{x_i \beta}) = 0$$

E sistemando i vari termini possiamo definire **lo stimatore di β** come:

lo stimatore OLS denotato con $\boldsymbol{\hat{\beta}}$

$$\boldsymbol{\hat{\beta}} = (\boldsymbol{X'X})^{-1}\boldsymbol{X'y}$$

oppure

$$\boldsymbol{\hat{\beta}} = \frac{\boldsymbol{Cov(X, y)}}{\boldsymbol{Var(X)}}$$

Oggettivamente questo stimatore è ragionevole solo se *X'X* è invertibile che è l'equivalente di porre la condizione che il *rank(X) = k.* Questo requisito stabilisce che nessuna colonna di *X* può essere ottenuta dalla combinazione lineare delle altre *k-1* colonne e che il numero delle osservazioni relative ai dati è almeno pari al numero delle variabili esplicative (n$\geq k$). Per la stima della regressione lineare con il metodo dei minimi quadrati è anche importante che ogni variabile esplicativa, tenute le altre costanti, non abbia valori costanti, poiché se non è presente variabilità nella variabile indipendente è impossibile determinare come viene influenzata la variabile risposta al variare della prima. La variabilità dei regressori gioca un ruolo fondamentale nello studio delle proprietà statistiche degli stimatori $\boldsymbol{\hat{\beta}}$.

Una volta che i parametri della regressione sono stati stimati, è utile definire i valori stimati, $\hat{y} = X\hat{\beta}$ e i residui campionari $\hat{\epsilon} = y - \hat{y} = y - X\hat{\beta}$. Riscrivendo la condizione di prim'ordine in termini delle variabili esplicative e dei residui ci fornisce informazioni sulle proprietà numeriche dei residui. Una condizione di prim'ordine equivalente è data da:

$$X'\hat{\epsilon} = 0$$

Chiamata anche condizione di ortogonalità. Queste condizioni richiedono che $\hat{\epsilon}$ sia fuori l'intervallo delle colonne di *X*. Inoltre, considerando le colonne di X separatamente, $X_j'\hat{\epsilon} = 0$ per ogni j = 1, 2,…,k. Quando una colonna contiene una costante (modello che contiene l'intercetta), i'$\hat{\epsilon}$ = 0 ($\sum_{i=1}^{n} \hat{\epsilon_i} = 0$) , e la media dei residui sarà esattamente pari a zero. Lo stimatore OLS della varianza dei residui denotato con $\widehat{\sigma^2}$ è calcolato come:

$$\widehat{\sigma^2} = \frac{\hat{\epsilon}'\hat{\epsilon}}{n-k}$$

Di conseguenza la deviazione standard della regressione è data da:

$$\hat{\sigma} = \sqrt{\widehat{\sigma^2}}$$

4.2.4 PROPRIETA' ALGEBRICHE DEGLI STIMATORI OLS

Ci sono molte ed utili proprietà algebriche degli stimatori OLS, le tre fondamentali sono:

I – la somma e di conseguenza la media campionaria dei residui OLS, è pari a zero:

$$\sum_{i=1}^{n} \widehat{\epsilon_i} = 0$$

Questa proprietà non ha bisogno di dimostrazione, segue immediatamente la condizione di prim'ordine degli stimatori OLS, ricordando che i residui sono definiti come $\widehat{\epsilon_i} = y_i - \hat{\beta}_0 - \hat{\beta}_1 x_1$. In altre parole le stime$\hat{\beta}_0 e \hat{\beta}_1$sono scelte per rendere la somma dei residui pari a zero per ogni set di dati.

II –la covarianza campionaria tra i regressori e i residui OLS è pari a zero:

$$\sum_{i=1}^{n} x_i \hat{u}_i = 0$$

Conseguenza diretta della I proprietà.

III – Il punto $(\bar{x}, \bar{y})$ giace sempre sulla retta OLS. In altre parole se prendiamo l'equazione

$y_i = \hat{\beta}_0 + \hat{\beta}_1 x_1$ o la medesima in forma matriciale $\hat{y} = X\hat{\beta}$e la calcoliamo in $\bar{x}$allora il valore previsto è $\hat{y}$.

Scomponendo $y_i$come la somma del suo valore fittato più il suo residuo, forniamo un altro modo per interpretare la regressione OLS. Per ogni i, scriviamo:

$$y_i = \hat{y}_i + \hat{\epsilon}_i$$

Dalla I, la media dei residui è zero; equivalentemente, la media campionaria dei valori fittati$\hat{y}_i$ è la stessa della media campionaria di y_i.

Definiamo cosi La somma totale dei quadrati SST, la somma dei quadrati dovuti alla regressione SSE e la somma dei quadrati dei residui SSR, nel seguente modo:

$$SST = \sum_{i=1}^{n} (y_i - \hat{y})^2$$

$$SSE = \sum_{i=1}^{n} (\hat{y}_i - \bar{y})^2$$

$$SSR = \sum_{i=1}^{n} \widehat{u_\iota}^2$$

(le notazioni SST, SSE e SSR derivano dall'inglese e rispettivamente stanno per Total sum of squares, explained sum of squares e residual sum of squares).

SST misura la varianza totale nella variabile y_i, allo stesso modo SSE misura la variazione campionaria di $\hat{y}_i$ e SSR misura la variazione in $\hat{u}_i$. Da questo:

$$SST = SSE + SSR$$

4.2.5 BONTA' DEL MODELLO E FORZA DELLA RELAZIONE LINEARE

Lo scopo della regressione lineare è quello di studiare la relazione lineare tra la variabile y e la/le variabile/i X, e dopo aver stimato un modello adatto seguendo i processi matematico/statistici descritti in precedenza, bisogna valutare la qualità del nostro modello ovvero determinare se esiste e nel caso esistesse la forza della relazione lineare delle variabili incluse nel nostro modello. E' spesso utilizzato (Introductory Econometrics a modern approach, J.M. Wooldridge 2009) calcolare un numero che riassuma quanto bene la retta OLS descriva i dati. Per far ciò assumiamo che il modello stimato preveda una retta dotata di intercetta. Assumendo che la somma totale dei quadrati SST (total sum of square), non sia uguale a zero, assunzione realistica per ogni caso in cui y_i non assuma sempre lo stesso valore possiamo manipolare algebricamente la formula del SST in modo da mettere in evidenza le sue componenti dividendole entrambe per SST:

$$1 = SSE/SST + SSR/SST$$

L' R^2 della regressione o anche chiamato coefficiente di determinazione è definito a partire dalla formula precedente come:

$$R^2 = SSE/SST = 1 - SSR/SST.$$

R^2indica la variabilità spiegata dalla regressione in rapporto alla variabilità totale della variabile spiegata, cioè è la parte della variabilità di y spiegata dalle variabili X. Il valore di R^2 è sempre compreso tra 0 e 1 poiché SSE non può essere maggiore di SST. Se le osservazioni giacciono sulla stessa retta, la regressione mediante il metodo OLS ci fornisce un modello perfetto che in questo caso ci porterà un $R^2 = 1$, un valore del coefficiente di determinazione vicino allo zero ci indica una scarsa fiducia del modello rispetto ai dati analizzati. Un'altra caratteristica importante dell' R^2è che non decresce mai, e solitamente si incrementa con l'aggiunta al modello lineare di uno o più nuovi regressori. Questo deriva direttamente dal fatto che algebricamente la somma dei quadrati dei residui non aumenta mai con l'aumentare delle variabili esplicative aggiunte al modello. Il fatto che R^2 non diminuisca mai lo rende uno strumento inadeguato per la scelta del miglior modello, in questo caso multivariato o di regressione lineare multipla, per lo studio del fenomeno in questione. Viene introdotto perciò nell'analisi della regressione lineare multipla l'indicatore R^2corretto indicato anche come $\overline{R^2}$ e analiticamente viene calcolato come:

$$\overline{R^2} = 1 - \frac{\left[\frac{\mathrm{SSR}}{\mathrm{n-k-1}}\right]}{\frac{\mathrm{SST}}{\mathrm{n-1}}}$$

$$\overline{R^2} = 1 - (1 - R^2)(n-1)/(n-k-1)$$

Dove n rappresenta il numero di osservazioni campionarie e k il numero delle variabili esplicative incorporate nel nostro modello.

In questo modo possiamo decidere il miglior modello multivariato calcolandone $\overline{R^2}$ e stabilendo quali e quante variabili aggiungono informazioni utili all'analisi.

4.3 STUDIO DEL CAPM COME REGRESSIONE LINEARE SEMPLICE

Dopo aver studiato a livello teorico lo strumento statistico che è la regressione lineare vogliamo applicare il tutto in ambito finanziario (Berk, DeMarzo, 2011) e analizzare il caso particolare del CAPM. Nel paragrafo 4.2.1 abbiamo definito l'equazione del capital asset pricing model come:

$$\boldsymbol{E[R_i] = R_i = R_f + \beta_i(E[R_m] - R_f)}$$

da questa equazione dobbiamo stabilire quali sono le variabili chiave di questo modello: la variabile esplicativa è **il premio per il rischio di mercato** $(\boldsymbol{E[R_m] - R_f})$ mentre la variabile spiegata, dopo aver compiuto una semplice manipolazione algebrica, sarà $\boldsymbol{E[R_i] - R_f}$ ovvero **il rendimento in eccesso di un titolo rischioso** (oggetto della nostra analisi).

$$\boldsymbol{E[R_i] - R_f = \alpha_i + \beta_i(E[R_m] - R_f) + \epsilon_i}$$

Dove

$\boldsymbol{\alpha_i}$**,** è chiamato alfa di Jensen ed è la costante o intercetta di regressione

$\boldsymbol{\epsilon_i}$**,** è il termine d'errore e rappresenta la deviazione dalla retta di interpolazione (unica variabile stocastica della regressione), analizzandolo a livello finanziario esso rappresenta la parte del rischio eliminabile tramite la differenziazione di portafoglio.

Per semplificare l'espressione analitica poniamo le seguenti eguaglianze:

$\boldsymbol{Z_i = E[R_i] - R_f}$ **e** $\boldsymbol{Z_m = (E[R_m] - R_f)}$

Ottenendo così l'equazione definitiva del nostro modello (Econometrics of Financial Markets, J.Y. Campbell, A.W. Lo, A.C. MacKinlay):

$$\boldsymbol{Z_i = \alpha_i + \beta_i Z_m + \epsilon_i}$$

Rappresentata graficamente da

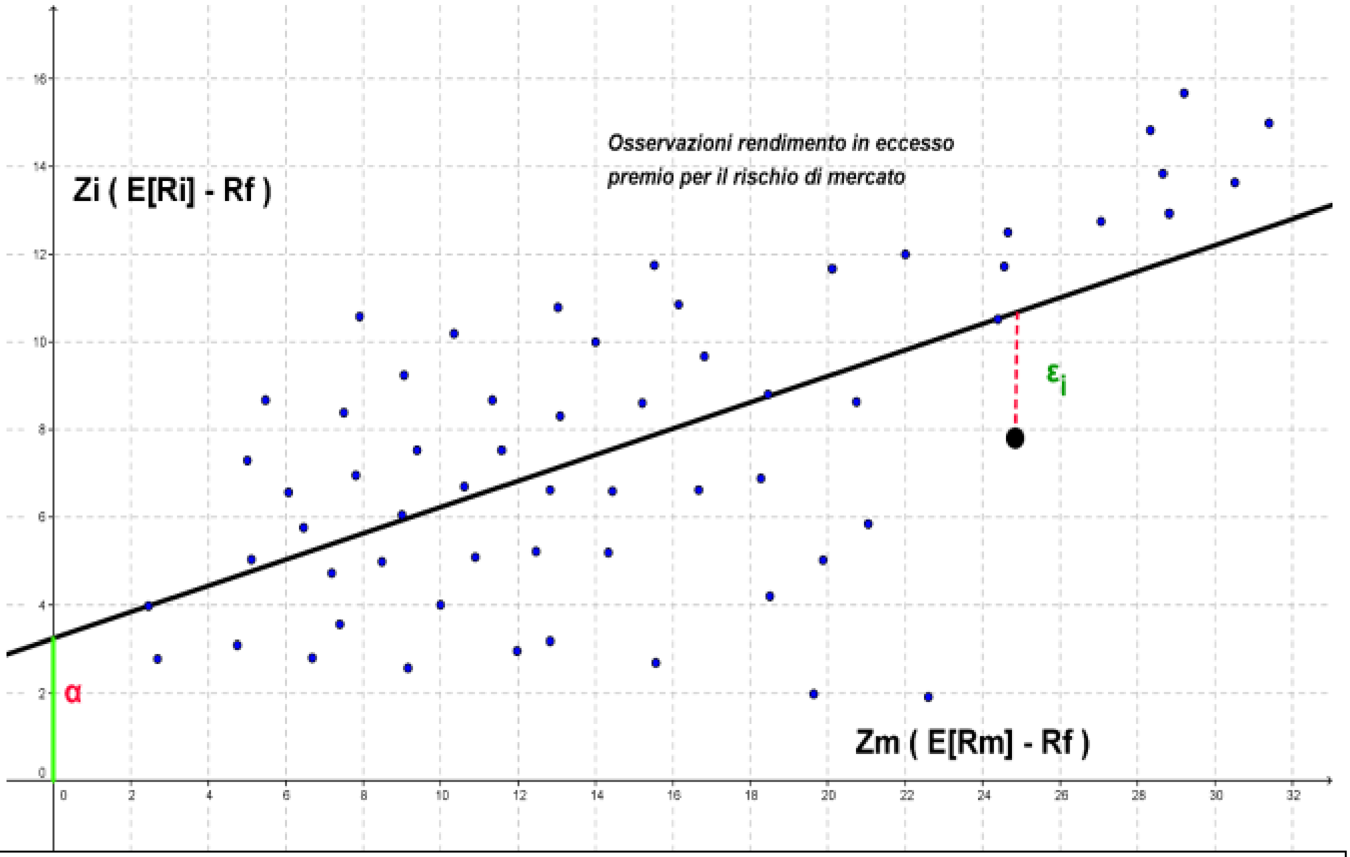

GRAFICO 4.2: Grafico del CAPM come regressione lineare semplice

L'obiettivo che ci siamo preposti con il CAPM e con la regressione lineare è di trovare un indicatore che sintetizzi la rischiosità non eliminabile di un titolo, e come avevamo anticipato nel paragrafo 4.1.2 tale indicatore è il *beta*. Il beta che compare nella nostra equazione come coefficiente del premio per il rischio di mercato, graficamente è rappresentato dal coefficiente angolare della retta di regressione.

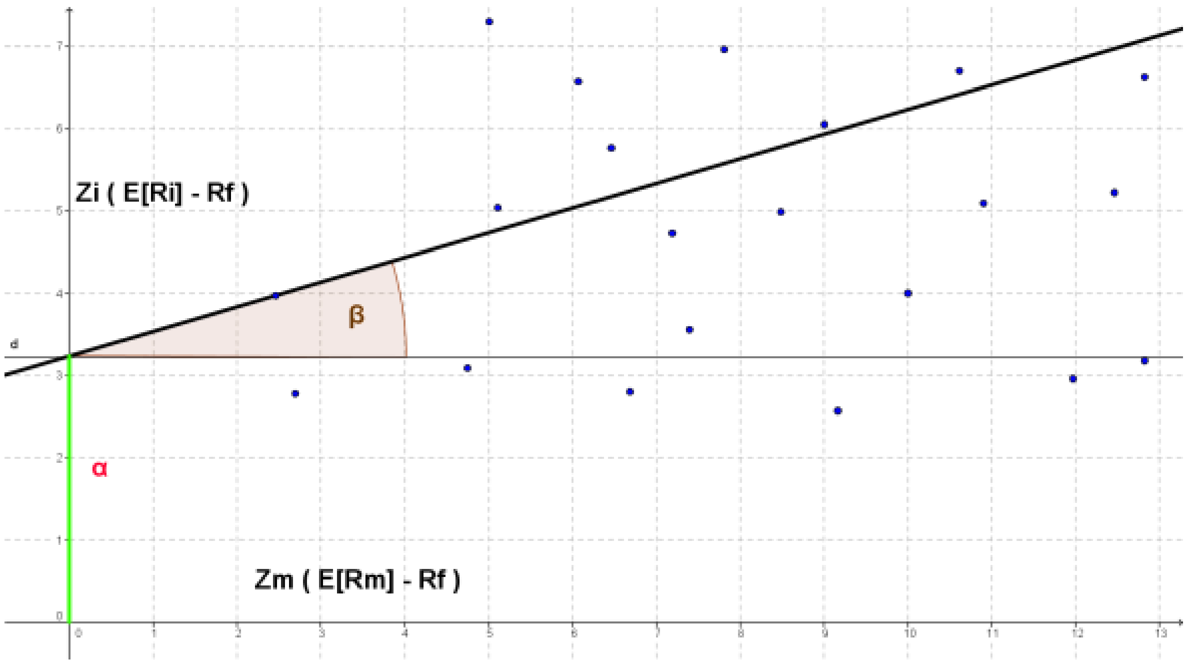

GRAFICO 4.3: Beta del titolo nel grafico

A livello intuitivo il grafico 4.3 ci suggerisce che più la retta di regressione è inclinata, maggiormente sarà rischioso il titolo analizzato, o meglio che il titolo preso in esame ha un rischio sistematico maggiore e perciò non eliminabile.

4.3.1 IL BETA, L'ALFA DI JENSEN E LA SECURITY MARKET LINE

Facendo una sintesi dei paragrafi 4.2.4 e 4.3 la sensibilità al rischio sistematico di un'azione, ovvero il suo beta, è calcolato come:

$$\beta_i = \frac{Cov(Z_i, Z_m)}{Var(Z_i)}$$

O alternativamente

$$\beta_i = \frac{\sigma_{Z_i Z_m}}{\sigma_{Z_i}^2}$$

Per definizione il portafoglio di mercato ha $\beta_m = 1$ in quanto

$$\beta_m = \frac{Cov(Z_m, Z_m)}{Var(Z_m)} = \frac{Var(Z_m)}{Var(Z_m)} = 1$$

Mentre il titolo privo di rischio ha $\beta_{rf} = 0$ in quanto

$$\beta_{rf} = \frac{Cov([R_f - R_f], Z_m)}{Var(Z_m)} = \frac{Cov(0, Z_m)}{Var(Z_m)} = 0$$

Per i singoli titoli azionari bisogna distinguere due casi (Berk, DeMarzo, 2011):

- I- I titoli con $0 < \beta < 1$ i rendimenti dei quali si muovono nella stessa direzione del rendimento del portafoglio di mercato ma non con la stessa intensità, spesso rappresentano azioni di imprese che operano in settori non ciclici come i servizi pubblici, imprese farmaceutiche o di generi alimentari.
- II- I titoli con $\beta > 1$ che tendono ad amplificare i movimenti globali del mercato e perciò si configurano come più rischiosi, e spesso sono azioni di imprese che operano in settori ciclici come il settore tecnologico oppure di beni di lusso.

Come una conseguenza delle proposizioni I e II del paragrafo 4.2.4 l'alfa di Jensen, ovvero l'intercetta della regressione del CAPM viene calcolato come:

$$\alpha_i = E[Z_i] - \beta_i E[Z_m]$$

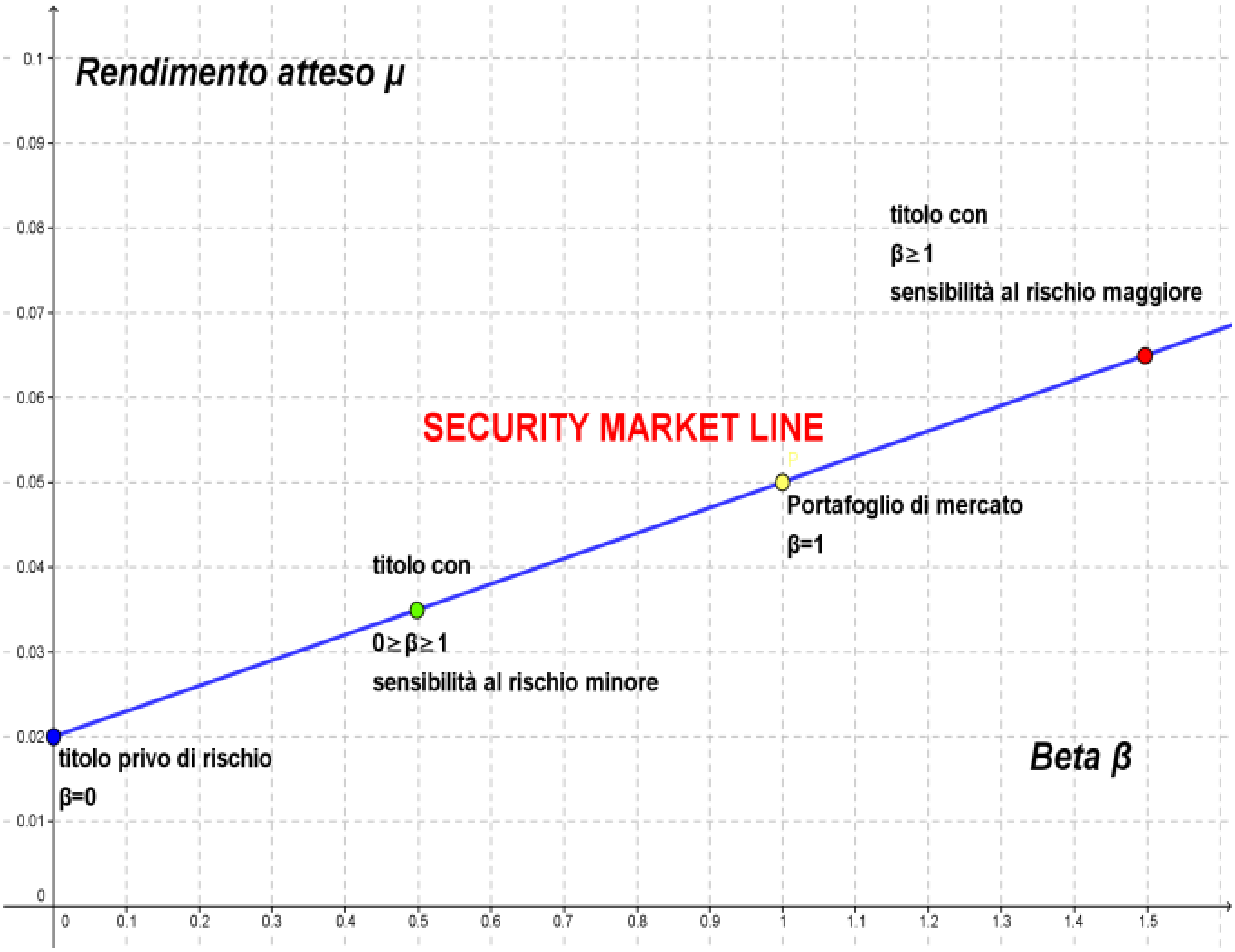

GRAFICO 4.4: La security market line

La security market line è il grafico con il quale, in uno spazio beta-rendimento atteso, vengono posti in relazione i diversi titoli azionari e il relativo portafoglio di mercato, dandone un'immediata e intuitiva classificazione in base alla loro sensibilità al rischio sistematico.

5 APPLICAZIONE DEL CAPM AI TRE TITOLI BANCARI: UNICREDIT, INTESA SAN PAOLO E MONTE DEI PASCHI DI SIENA, ANALISI CON R

Prima di apprestarci ad un’analisi empirica dei tre titoli bancari italiani, per ricavarne il *beta* mediante l’utilizzo di R, poniamo un quadro generale di ipotesi e assunzioni necessarie allo svolgimento di questo esercizio.

Lo strumento che di cui ci avvaliamo per ricavare il ***beta*** dei tre titoli è il CAPM che abbiamo illustrato teoricamente nel capitolo 4, la regressione lineare che intercorre tra i rendimenti in eccesso dei titoli e il premio per il rischio di mercato verrà stimata con l’utilizzo della funzione apposita di R. Affinché la stima del CAPM sia coerente si devono assumere le tre condizioni del paragrafo 4.1. Come tasso di interesse privo di rischio il tasso $R_F = R_{BOT}$ prendiamo una media dei tassi di interesse dei BOT a 12 mesi nell’ultimo anno:

Data emissione fonte: http://www.soldiblog.it/post/38271/titoli-di-stato-asta-bot-12-mesi-di-oggi-10-luglio	**Rendimento, $\boldsymbol{R_{BOT}}$**
Marzo 2015	0.079%
Febbraio 2015	0.209%
Gennaio 2015	0.243%
Dicembre 2014	0.418%
Novembre 2014	0.335%
Ottobre 2014	0.301%
Settembre 2014	0.271%
Luglio 2014 (ad agosto non c’è stata emissione)	0.387%
Giugno 2014	0.492%
Maggio 2014	0.650%
Aprile 2014	0.589%
Marzo 2014	0.592%
Febbraio 2014	0.676%
Gennaio 2014	0.735%
MEDIA	**0.427%**

$\boldsymbol{R_F = R_{BOT} = 0.427\%}$

Per quanto riguarda i tre titoli azionari e l'indice di mercato che li contiene (FTSEMIB) useremo i rendimenti giornalieri realizzatisi nell'ultimo anno, dati che importeremo da www.yahoofinance.com, infatti secondo Berk, De Marzo idealmente si vorrebbe conoscere il beta di un titolo nel futuro ma nella pratica si stima il beta in base alla sensibilità storica del titolo. Questo approccio ha senso se il beta rimane relativamente stabile nel tempo e quindi per un'analisi migliore vanno raccolti i dati non troppo dispersi nel tempo come potrebbe essere uno studio decennale o quinquennale, ecco perché si è scelto una stima del beta coi dati relativi all'ultimo anno (01/01/2014-31/03/2015).

5.1 EQUAZIONI DEL CAPM RELATIVE AI TITOLI BANCARI

(Fare riferimento alla notazione dei paragrafi 4.3 4.3.1)

TITOLO: UNICREDIT

$$R_{UCG} - R_{BOT} = R_{BOT} + \boldsymbol{\beta_{UCG}}(R_{FTSEMIB} - R_{BOT}) + \varepsilon$$

$$Z_{UCG} = \alpha + \boldsymbol{\beta_{UCG}}(Z_{FTSEMIB}) + \epsilon$$

TIOLO: INTESA SAN PAOLO

$$R_{ISP} - R_{BOT} = R_{BOT} + \boldsymbol{\beta_{ISP}}(R_{FTSEMIB} - R_{BOT}) + \varepsilon$$

$$Z_{ISP} = \alpha + \boldsymbol{\beta_{ISP}}(Z_{FTSEMIB}) + \epsilon$$

TITOLO: MONTE DEI PASCHI DI SIENA

$$R_{MPS} - R_{BOT} = R_{BOT} + \boldsymbol{\beta_{MPS}}(R_{FTSEMIB} - R_{BOT}) + \varepsilon$$

$$Z_{MPS} = \alpha + \boldsymbol{\beta_{MPS}}(Z_{FTSEMIB}) + \epsilon$$

Mediante il software R i risultati che otteniamo sono:

I - Unicredit :

```
Call:
lm(formula = rend.eccesso.unicredit ~ premio.rischio.mercato)

Residuals:
     Min       1Q   Median       3Q      Max 
-0.52866 -0.07438  0.02256  0.07267  0.96074 

Coefficients:
                       Estimate Std. Error t value Pr(>|t|)    
(Intercept)            0.176655   0.008827   20.01   <2e-16 ***
premio.rischio.mercato 1.537212   0.005977  257.20   <2e-16 ***
---
Signif. codes:  0 '***' 0.001 '**' 0.01 '*' 0.05 '.' 0.1 ' ' 1

Residual standard error: 0.1516 on 312 degrees of freedom
Multiple R-squared:  0.9953,    Adjusted R-squared:  0.9953 
F-statistic: 6.615e+04 on 1 and 312 DF,  p-value: < 2.2e-16
```

Ovvero, il modello stimato per il titolo UniCredit è rappresentabile dalla seguente equazione:

$$Z_{UCG} = \hat{\alpha} + \widehat{\boldsymbol{\beta}}_{\boldsymbol{UCG}}(Z_{FTSEMIB})$$

$$Z_{UCG} = 0.177 + \mathbf{1.54} * Z_{FTSEMIB}$$

II – Intesa San Paolo:

```
Call:
lm(formula = rend.eccesso.ispaolo ~ premio.rischio.mercato)

Residuals:
     Min       1Q   Median       3Q      Max 
-0.51086 -0.06709 -0.00546  0.06425  1.14294 

Coefficients:
                       Estimate Std. Error t value Pr(>|t|)    
(Intercept)            0.286385   0.009291   30.82   <2e-16 ***
premio.rischio.mercato 1.465474   0.006291  232.94   <2e-16 ***
---
Signif. codes:  0 '***' 0.001 '**' 0.01 '*' 0.05 '.' 0.1 ' ' 1

Residual standard error: 0.1596 on 312 degrees of freedom
Multiple R-squared:  0.9943,    Adjusted R-squared:  0.9943 
F-statistic: 5.426e+04 on 1 and 312 DF,  p-value: < 2.2e-16
```

Ovvero, il modello stimato per il titolo Intesa San Paolo è rappresentabile dalla seguente equazione:

$$Z_{ISP} = \hat{\alpha} + \widehat{\boldsymbol{\beta}}_{\boldsymbol{ISP}}(Z_{FTSEMIB})$$

$$Z_{ISP} = 0.287 + \mathbf{1.46} * \ Z_{FTSEMIB}$$

III – Monte dei Paschi di Siena:

```
Call:
lm(formula = rend.eccesso.mpsiena ~ premio.rischio.mercato)

Residuals:
    Min      1Q  Median      3Q     Max
-0.3188 -0.1408  0.0065  0.0619  5.3936

Coefficients:
                        Estimate Std. Error t value Pr(>|t|)
(Intercept)            -0.003684   0.020074  -0.184    0.855
premio.rischio.mercato  1.409913   0.013592 103.729   <2e-16 ***
---
Signif. codes:  0 '***' 0.001 '**' 0.01 '*' 0.05 '.' 0.1 ' ' 1

Residual standard error: 0.3448 on 312 degrees of freedom
Multiple R-squared:  0.9718,    Adjusted R-squared:  0.9717
F-statistic: 1.076e+04 on 1 and 312 DF,  p-value: < 2.2e-16
```

Ovvero, il modello stimato per il titolo Monte Dei Paschi di Siena è rappresentabile dalla seguente equazione:

$$Z_{MPS} = \hat{\alpha} + \hat{\boldsymbol{\beta}}_{\boldsymbol{MPS}}(Z_{FTSEMIB})$$

$$Z_{MPS} = \ -0.004^{*} + \mathbf{1.41} * \ Z_{FTSEMIB}$$

*Secondo l'output di R il valore dell'intercetta del modello stimato per Monte dei Paschi di Siena non è significativo ai fini del modello. In termini tecnici il p-value del test d'ipotesi $H_0: \alpha = 0, H_A: \alpha \neq 0$ è pari all 85% in favore dell'ipotesi nulla, in altre parole $\alpha = 0$.

TABELLA 5.1: RIASSUNTO DELLE STIME

TITOLO	$\hat{\boldsymbol{\alpha}}$ ***di jensen*** (***intercetta***)	$\hat{\boldsymbol{\beta}}$ ***stimato del titolo***	$\boldsymbol{R^2}$, ***bont***à ***del modello***
UniCredit	0.177	**1.54**	99.53%
Intesa San Paolo	0.287	**1.46**	99.43%
Monte dei Paschi di Siena	-0.004*	**1.41**	97.17%

Tirando le somme dai modelli stimati possiamo affermare che in caso di mercato rialzista, in questo caso il FTSEMIB, il titolo UniCredit crescerà del 54% in più dell'indice, mentre Intesa San Paolo e Monte Dei Paschi di Siena cresceranno rispettivamente del 46% e del 41% in più rispetto al FTSEMIB. Ovviamente tutto ciò si verifica con segno opposto in caso di mercato ribassista.

Naturalmente l'analisi appena svolta fa riferimento a un tasso di interesse risk free determinato a priori e quindi non variabile nel tempo, inoltre bisogna considerare il fatto che il periodo storico analizzato è caratterizzato da rendimenti delle obbligazioni di stato molto bassi dovuti allo scenario macroeconomico degli ultimi mesi. Perciò i beta stimati devono essere usati con cautela per la stima dei rischi futuri dei titoli studiati, per esempio se nei prossimi mesi la banca centrale europea decidesse di alzare i tassi di interesse sarebbe più prudente aggiornare i dati riguardo ai titoli free risk e rinnovare le stime dei modelli CAPM e dei relativi beta.

6 ACCENNI AD ALTRE MISURE DI RISCHIO PIU' AVANZATE: VALUE AT RISK (VaR) E EXPECTED SHORTFALL (ES).

Nei capitoli precedenti, tramite l'enunciazione della teoria di portafoglio di Markowitz e l'applicazione della regressione lineare al CAPM, abbiamo ricavato degli indicatori numerici e statistici che ci hanno permesso di misurare e rendere confrontabili diversi titoli azionari dal punto di vista della rischiosità, in modo da poter definire secondo criteri definiti quali siano i titoli più o meno rischiosi. Questi indicatori, il beta e la volatilità, non sono gli unici in letteratura finanziaria ad essere utilizzati per la stima del rischio, essi sono i più semplici da un punto di vista di comprensione matematico/statistico. Si possono però usare, facendo ricorso a strumenti analitici più complessi, altre misure e metodi per definire il rischio di uno strumento finanziario.

6.1 IL VAR, VALUE AT RISK

Subito dopo il beta e la volatilità di un titolo, come misura di rischio a livello internazionale, il VaR è quella più utilizzata (Financial econometrics notes, K.Sheppard). Il VaR di portafoglio è l'ammontare di denaro rischiato in un determinato periodo di tempo con una probabilità fissata a priori. Il VaR ci fornisce una misura del rischio più sensibile della volatilità, dal momento che è focalizzato sulle perdite, sebbene anche il VaR presenti le sue problematiche di stima e di calcolo. Il VaR di un titolo o di un portafoglio necessità di un'unità di misura monetaria ($€, £, ¥, \$\ ecc$) nella quale l'investitore avrebbe la perdita con un probabilità fissata, spesso compresa tra l' 1% e il 10%, all'interno di un periodo temporale determinato. Poiché il VaR rappresenta una perdita ipotetica è di norma un numero positivo.

L'α-Value-at-risk di uno strumento finanziario è definito come il più grande numero tale che la probabilità che si realizzi una perdita, in un certo orizzonte temporale, maggiore del VaR sia α.

In termini analitici: sia $f(x)$ una funzione di densità della distribuzione dei rendimenti di un titolo o portafoglio, $F(x)$ la funzione di ripartizione, $F^{-1}(x)$ l'inversa della funzione di ripartizione e si indichi con 1- α il livello di confidenza. Il VaR è dato da

$$VaR_{\alpha} = F^{-1}(\alpha)$$

O in modo indiretto il VaR è dato dalla soluzione della seguente equazione:

$$\int_{-\infty}^{x} f(t)dt = \alpha$$

Alternativamente il VaR può anche essere visto come:

$$\Pr(R_t < -VaR) = \alpha$$

Dove R_tè il rendimento del titolo nell'orizzonte temporale definito.

Il livello di confidenza misura il numero di casi in cui la perdita effettiva del portafoglio dovrebbe superare il VaR. Ad esempio, dato un livello di confidenza del 95%, la perdita dovrebbe in media superare il VaR solo il 5 casi ogni cento. La scelta dell'intervallo di confidenza dipende dal grado di avversione al rischio di ciascun investitore, generalmente negli istituti finanziari vengono utilizzati VaR al 95% per fini gestionali e VaR al 99% a fini regolamentari. La scelta dell'orizzonte temporale di valutazione dipende dal grado di liquidità del mercato di riferimento in rapporto alle dimensioni della posizione assunta, fattore oggettivo, e periodo di detenzione previsto, fattore soggettivo. In pratica si utilizzano orizzonti temporali per il rischio di mercato che oscillano tra un giorno e quindici giorni di borsa aperta. E' interessante notare che, per passare da un orizzonte temporale di 1 giorno a uno di 10 giorni è sufficiente moltiplicare per $\sqrt{10}$ il VaR giornaliero, seguendo così la nota regola della radice quadrata del tempo: il modello classico che descrive l'andamento dei prezzi di uno strumento finanziario prevede che, nel passaggio da un periodo a t periodi, la volatilità evolva da σ a $\sigma \times \sqrt{t}$.

Il value-at-risk con rendimenti distribuiti normalmente o anche chiamato "VaR Gaussiano" è

$$VaR_\alpha = \mu + z_\alpha \sigma$$

Dove $\mu \; e \; \sigma$ indicano, rispettivamente, la media e la deviazione standard della normale e z_α è l'$\alpha - esimo$ quantile.

Supponiamo che un investitore detenga un portafoglio azionario, il rendimento del quale si distribuisca come una normale $N(0.001\,, 0.015^2)$, e che il valore iniziale del suo portafoglio sia di €10 000 000, per un livello $\alpha = 0.05$, su orizzonte temporale giornaliero, vogliamo calcolare il VaR di portafoglio:

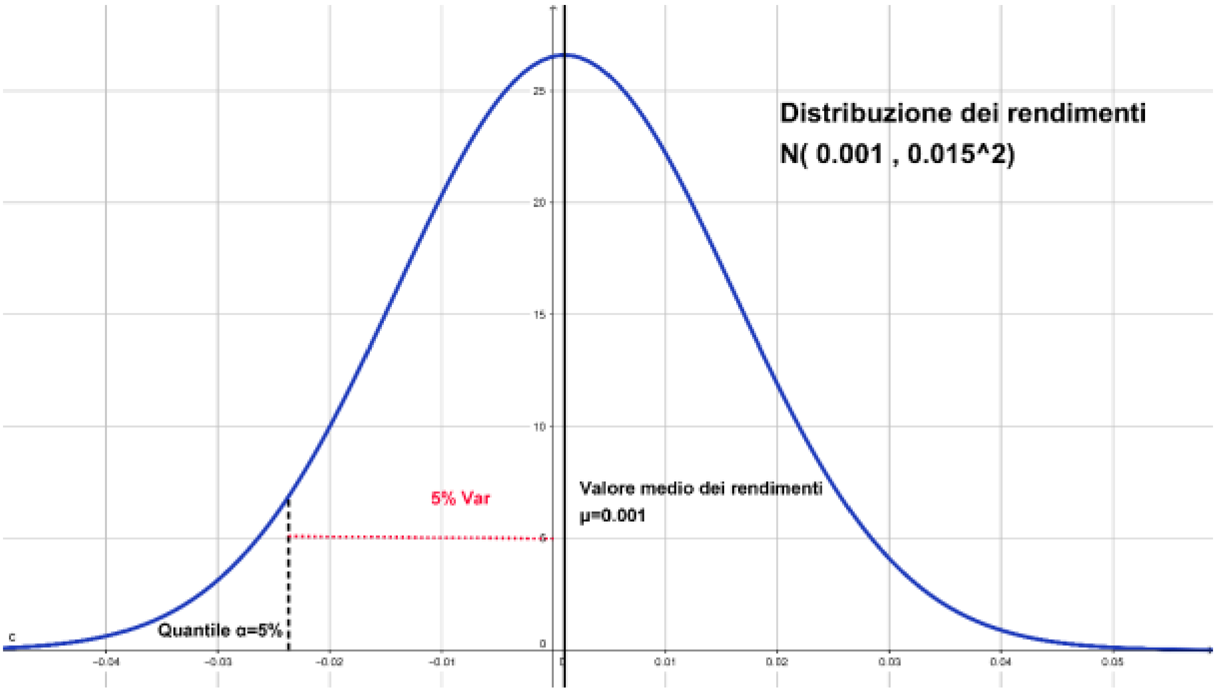

GRAFICO 6.1: Rappresentazione grafica della distribuzione dei rendimenti del portafoglio con VaR al 5%

$€\ 10\,000\,000\ x\ VaR_{\alpha} = €\ 10\,000\,000\ x\ (\mu + z_{\alpha}\sigma) =$

$€\ 10\,000\,000\ x\ (0.001 - 0.024\ x\ 0.015) =$

$$€\ 6400$$

Il VaR calcolato è dunque di € 6400, dunque è lecito aspettarsi, secondo il criterio del Value-at-risk, che con probabilità del 5% le perdite superino gli € 6400 quotidianamente.

6.1.1 MVaR o VaR modificato

Il VaR modificato (MVaR) usa non solo la volatilità come rischio, ma tiene conto anche della asimmetria S e della curtosi K:

$$MVaR_{\alpha} = \mu + [z_{\alpha} + \frac{1}{6}(z_{\alpha}^{2} - 1)S + \frac{1}{24}(z_{\alpha}^{3} - 3z_{\alpha})K - \frac{1}{36}(2z_{\alpha}^{3} - 5z_{\alpha})S^{2}]\sigma$$

La distribuzione dei rendimenti ha, in generale, asimmetria negativa e code pesanti, per cui il rischio misurato solo con la volatilità è spesso sottostimato (Holton, Glyn A. (2012). Value-at-Risk: Theory and Practice, 2nd ed. e-book at www.value-at-risk.net).

6.2 LE CRITICHE AL VAR

Il VaR è la misura più utilizzata per valutare i rischi di mercato e rappresenta uno standard. Tuttavia, già verso la fine degli anni novanta, iniziano a diffondersi le prime critiche al VaR e ai suoi metodi di stima tradizionali. Le principali motivazioni sono le seguenti:

- il VaR non incoraggia, e anzi in certi casi proibisce, la diversificazione e questo fatto può portare l'investitore a scelte sbagliate. In termini più formali, tale inadeguatezza del VaR è dovuta al fatto che non rispetta l'assioma della subadditività;
- l'incapacità di misurare in modo adeguato i valori estremi, ossia le code della distribuzione. Il VaR da un punto di vista teorico sarebbe in grado di misurare il rischio di eventi estremi, semplicemente elevando il livello di confidenza. Tuttavia, quando il livello di confidenza supera determinati valori, si entra nella coda della distribuzione che non viene stimata correttamente tramite i metodi di stima tradizionali del VaR, non avendo a disposizione sufficienti osservazioni estreme

Il primo dei due limiti, il cosiddetto limite della non-subadditività, è insito nella misura VaR a prescindere dai metodi di stima. Il secondo, invece, può essere superato, abbandonando gli approcci tradizionali di stima e utilizzando la teoria dei valori estremi. Le critiche al VaR, in relazione alla non sub-addidività vengono formulate tra i primi da Artzner e Delbaen in un celebre articolo del 1999, in cui gli autori propongono anche la definizione di misura coerente di rischio e gli assiomi che una misura deve soddisfare per essere definita tale.

Gli assiomi che una misura di rischio Θ deve soddisfare per poter essere definita coerente sono i seguenti:

- **subadditività**: $\Theta(X+Y) \leq \Theta(X)+\Theta(Y)$
- **omogeneità positiva**: $se\ \omega \geq 0\ allora\ \Theta(\omega X) = \omega\Theta(X)$
- **monotonicità**: $se\ X \leq Y\ allora\ \Theta(Y) \leq \Theta(X)$
- **invarianza in translazione**: $\Theta(X+a) = \Theta(X)+a$

In sostanza, una misura viene definita coerente se attribuisce sempre valori maggiori a rischi maggiori. L'assioma della subadditività esprime il principio di diversificazione: il rischio di un portafoglio diversificato non può essere superiore alla somma dei rischi dei singoli strumenti. Il VaR, pur rispettando tre dei quattro assiomi proposti, viola quello della subadditività e, di conseguenza, non è una misura di rischio coerente.

6.3 L' EXPECTED SHORTFALL

Tra le misure di rischio coerenti, la più nota è l'Expected Shortfall (ES), una misura utilizzata già nella seconda metà degli anni novanta sotto altre denominazioni formali, e che si diffonde con una nuova definizione a partire dal 2001.L'ES diventa presto una delle più note e più adatte misure della rischiosità di uno strumento finanziario, riuscendo in determinate situazioni a farsi preferire al VaR in ragione del rispetto dell'assioma della coerenza. L'ES in realtà non è necessariamente una misura sostitutiva al VaR, poiché fornisce informazioni aggiuntive e complementari ad esso.

L'ES rappresenta la media delle perdite condizionatamente al superamento del VaR. In altre parole è la perdita attesa nel $100\ x\ \alpha$ dei casi peggiori. In termini maggiormente formali, sia L la variabile casuale che esprime i rendimenti giornalieri. Si definisce ES come :

$$E[L|L > VaR]$$

La relazione tra le due misure risulta evidente: il VaR indica la massima perdita possibile in condizioni "normali", mentre l'ES esprime la perdita media che ci si attende qualora si superi il VaR. Nel caso di una gaussiana standard il VaR a livello di confidenza del 95% `e pari a 1.64,mentre l'Expected Shortfall `e pari a 2.063.

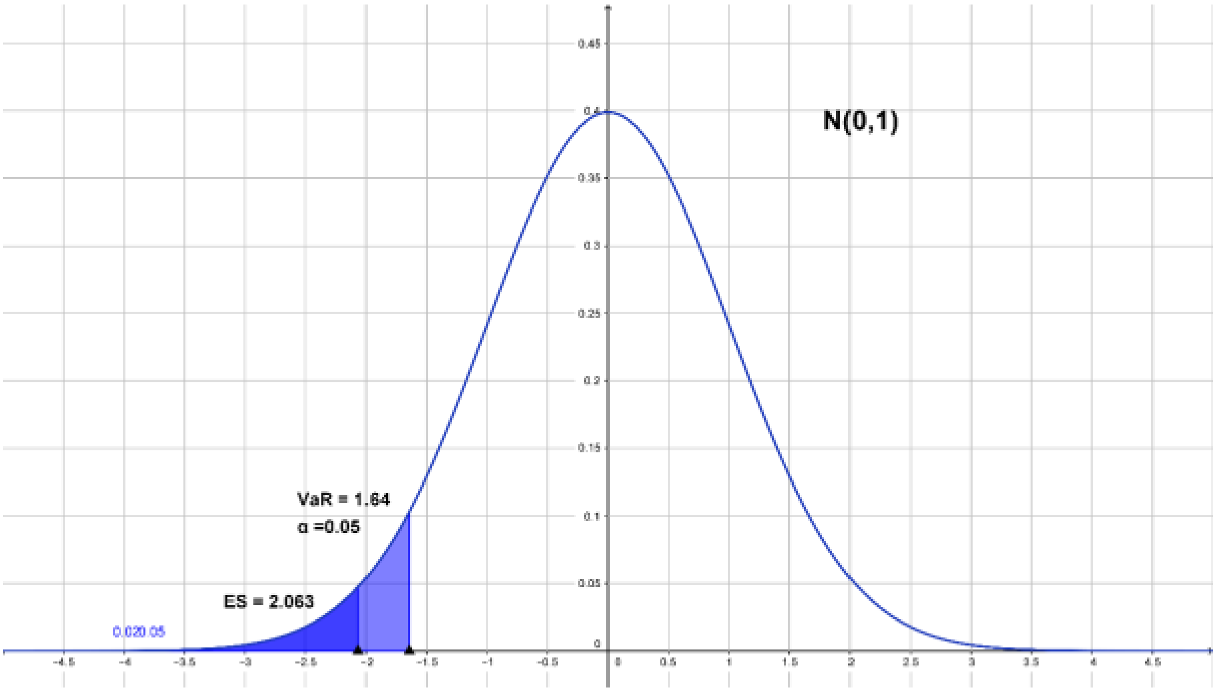

GRAFICO 6.2: Rappresentazione grafica del ES in relazione al VaR

La procedura di stima dell'Expected Shortfall può essere effettuata, come per il VaR, seguendo diversi approcci. Gli approcci più utilizzati nelle applicazioni sono:

- approccio non parametrico semplice
- approccio non parametrico basato sulla stima di densità non parametriche
- approccio parametrico
- approccio basato sulla teoria dei valori estremi

Il **metodo non parametrico semplice** prevede di effettuare una media campionaria dei quantili che eccedono il VaR:

$$ES = \frac{\sum_{t=1}^{n} Y_t I(Y_t \geq VaR_\alpha)}{\sum_{t=1}^{n} I(Y_t \geq Var_\alpha)} = \ (n\alpha + 1)^{-1} \sum_{t=1}^{n} Y_t I(Y_t \geq VaR_\alpha)$$

dove *I* è la funzione indicatrice e *Y* è la distribuzione dei rendimenti del titolo o portafoglio analizzato . Quindi, per ottenere una stima dell'ES è sufficiente considerare la coda della distribuzione che contiene un numero *n* di osservazioni che eccedono il VaR ed effettuare la media semplice di queste n osservazioni, essendo esse equiprobabili. Tale approccio è piuttosto semplice da implementare, ma possiede un punto critico. Infatti, la stima dell'ES `e influenzata dalla grandezza *n*, poiché maggiore è il numero di osservazioni di cui si dispone nella coda e maggiore è la precisione della stima, che converge al vero valore al tendere di *n* all'infinito. La **criticità del metodo non parametrico semplice** risiede nel fatto che spesso non si hanno a disposizione un sufficiente numero di osservazioni: si pensi che una serie storica di 500 osservazioni giornaliere richiede 2 anni di dati e fornisce solamente 25 osservazioni sulla coda negativa per poter stimare l'ES. Perciò l'approccio non parametrico semplice richiede la disponibilità di serie storiche piuttosto lunghe, che possono essere generate tramite una simulazione Montecarlo quando si conosce la distribuzione dei rendimenti. Un metodo alternativo utilizza le densità non parametri che per stimare il VaR e l'ES.

Il **metodo parametrico** permette di determinare la stima dell'ES tramite una formula esplicita, purché si conosca o si assuma a priori la distribuzione di probabilità che genera i rendimenti. A seconda della forma ipotizzata per tale distribuzione le formule esplicite per la stima dell'ES variano per complessità e difficoltà di applicazione. Alcune delle formule più considerate sono quelle basate sull'assunzione di gaussianità della distribuzione dei rendimenti:

$$ES = -VM\mu + \frac{\sigma VM}{\alpha} \frac{1}{\sqrt{2}} exp\{-[erfc^{-1}(2\alpha)]^2\}$$

dove VM `e il valore di mercato che permette di esprimere l'ES in termini monetari, μ e σ sono la media e la varianza della gaussiana, ed α è il consueto parametro di significatività e "erfc" è la funzione complementare degli errori:

$$erfc = \frac{2}{\sqrt{\pi}} \int_x^\infty \exp(-t)^2 dt$$

Se si assume che i rendimenti seguano una t-Student, la formula esplicita diventa:

$$ES = -VM\mu + \frac{\sigma VM}{\alpha B(\vartheta/2\,,1/2)} \frac{\sqrt{\vartheta-2}}{\vartheta-1} [\delta *]^{\frac{\vartheta-1}{2}}$$

Dove ϑ è il numero dei gradi di libertà della t-student, $B(\vartheta/2\,,1/2)$ è la funzione beta e $\delta *= I^{-1}_{[(\vartheta/2,1/2)]}(2\alpha)$, con $I^{-1}_{[(\vartheta/2,1/2)]}$ che rappresenta la funzione beta incompleta.

Oltre al metodo non parametrico e parametrico, come per la stima del Var, esiste un **metodo basato sullo studio dei valori estremi**, che si basa su teorie statistiche che si concentrano nell'analisi delle code delle distribuzioni dei rendimenti queste si chiamano **teorie dei valori estremi** e richiedono un'analisi approfondita che in questa sede evitiamo.

6.4 CALCOLO DEL VaR, MVaR e EXPECTED SHORTFALL DEI TITOLI UNICREDIT, INTESA SAN PAOLO E MONTE DEI PASCHI DI SIENA.

Dopo aver brevemente illustrato le misure di rischio come Var, Var gaussiano, Var modificato e Expected Shortfall, mediante l'uso di R, calcoliamo questi valori per i tre titoli bancari facendo riferimento alle quotazioni e ai rendimenti delle azioni nell'ultimo anno (01/01/2014-31/03/2015).

TITOLO	**VaR*** $\alpha = 0.05$	**VaR gaussiano*** $\alpha = 0.05$	**MVaR*** $\alpha = 0.05$
UniCredit	3.391220 %	3.552266 %	3.619901 %
Intesa San Paolo	5.624545 %	5.970165 %	6.118187 %
Monte dei Paschi di Siena	18.931816 %	19.8525425%	23.416758 %

*da moltiplicare per la quantità di denaro investita nel titolo per ottenere il VaR in termini monetari espresso in €

TABELLA 6.1: sintesi delle varie misure di Value-at-risk dei tre titoli

Per facilitare i calcoli, ipotizziamo di avere un capitale investito in ciascuno dei tre titoli di

€ 1 000 000, in tal caso l'indicatore Var ci suggerisce che su un orizzonte temporale giornaliero solo in 5 casi su 100 una ipotetica perdita potrà essere maggiore agli € 33 912 per gli azionisti UniCredit, € 56 245 per quelli di Intesa San Paolo e € 189 318 per l'azionariato di Monte dei Paschi di Siena. A sua volta il Var Gaussiano, che ipotizza le distribuzioni dei rendimenti siano distribuite normalmente, ci indica che sempre nel 5% dei casi le perdite per gli azionisti di Unicredit, Intesa San Paolo e Monte dei paschi di Siena saranno maggiori di rispettivamente, € 35 526, € 59 701 e € 198 525.

TITOLO	**Expected Shortfall Ricavato dal VaR*** $\alpha = 0.05$	**Expected Shortfall Ricavato dal VaR gaussiano*** $\alpha = 0.05$	**Expected Shortfall Ricavato dal MVaR*** $\alpha = 0.05$
UniCredit	4.795115 %	5.083891 %	5.083891 %
Intesa San Paolo	6.741308 %	7.702760 %	7.702760 %
Monte dei Paschi di Siena	33.331912 %	37.868890 %	37.868890 %

*da moltiplicare per la quantità di denaro investita nel titolo per ottenere l'Expected Shortfall in termini monetari espresso in €

TABELLA 6.2: sintesi delle varie misure dell'Expected Shortfall dei tre titoli

I tre tipi di Expected Shortfall non ci dicono altro che la media dei valori di una perdita eccedente al VaR nello stesso orizzonte temporale e con lo stesso grado di confidenza. Per esempio sempre considerando il valore iniziale dell'investimento di € 1 000 000 per gli investitori Unicredit il valore medio delle perdite che superano i € 33 912 sarà di circa € 48 000, se si ricava L'ES dal VaR standard, mentre l'ES di Intesa San Paolo ammonterà a € 67 413 e infine per Monte Dei Paschi di Siena abbiamo che in caso di perdite eccessive il VaR è lecito attendersi un valore medio di € 333 191.

BIBLIOGRAFIA

TESTI DI RIFERIMENTO

BERK, DEMARZO. 2011.
Finanza aziendale 1.
Pearson

CAMPBELL JOHN Y., ANDREW W. LO, MACKINLAY A. CRAIG.
Econometrics of Financial Markets.
Princeton University press

FAMA EUGENE F. AND FRENCH KENNETH R. 2004.
The Capital Asset Pricing Model: Theory and Evidence
Journal of Economic Perspectives (Volume 18, Number 3, Summer 2004)

HOLTON, GLYN A. 2012
Value-at-Risk: Theory and Practice, 2nd ed
e-book 2012

MARKOWITZ HARRY. 1952.
Portfolio Selection.
The Journal of Finance (Vol. 7, Number 1, March 1952)

SHEPPARD KEVIN. 2013.
Financial Econometrics Notes.
University of Oxford

VARI, GRUPPO SCHRODERS.
Rischio&Rendimento - Le due facce dell'investimento
Schroders Educational

WELCH IVO. 2008.
Corporate Finance, an introduction
Pearson.

WOOLDRIDGE JEFFREY M. 2009.
Introductory Econometrics a modern approach.
South-Western Cengage Learning.

SITOGRAFIA:

www.borsaitaliana.it
www.soldiblog.it
www.value-at-risk.net
www.yahoofinance.com