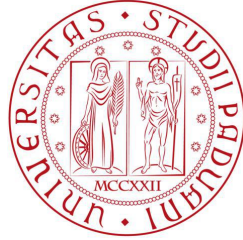


Università degli Studi di Padova



Dipartimento di Fisica e Astronomia “Galileo Galilei”
Corso di Laurea in Fisica

Tesi di Laurea

Ruolo degli stati del continuo in sistemi nucleari debolmente legati

Relatore: Prof. Andrea Vitturi
Correlatore: Dott.ssa Laura Moschini

Laureando: Alessandro Dalle Feste
Matricola: 1103195

Anno Accademico 2016/2017

Indice

| | | |
|----------|---|-----------|
| 1 | Il modello fisico scelto nella trattazione | 3 |
| 1.1 | I nuclei con alone | 4 |
| 1.2 | La dinamica dell'urto | 4 |
| 1.3 | Calcolo degli autostati | 5 |
| 1.3.1 | Stati legati | 6 |
| 1.3.2 | Stati non legati | 6 |
| 1.4 | Gli esiti dell'urto | 8 |
| 2 | I risultati del modello | 13 |
| 2.1 | Minima distanza come parametro variabile | 13 |
| 2.2 | Energia asintotica come parametro variabile | 22 |
| 2.3 | Urto inelastico e trasferimento | 31 |

Introduzione

Il principale strumento in grado di dare supporto all'analisi della struttura dei nuclei atomici, con lo scopo di mettere in luce tutte le loro proprietà, è lo studio delle reazioni nucleari, i processi fisici che portano un nucleo atomico a modificare la propria natura, nella forma di un diverso numero di massa atomica, di un diverso numero atomico oppure di un diverso stato energetico.

Il fenomeno di urto tra due nuclei, ad energie cinetiche sulla scala del MeV, rientra in questa categoria. È utile visualizzare l'evento nella convenzione classicamente adottata, con un nucleo proiettile incidente su un nucleo bersaglio. Si distinguono le *reazioni dirette*, dove l'interazione avviene fondamentalmente tra nucleoni superficiali, dalle *reazioni composte*, dove si ha formazione di stati intermedi in cui, in linea di principio, non si attribuisce più l'appartenenza dei nucleoni al bersaglio o al proiettile, ma vengono considerati tutti parte di un unico sistema composto. In questa trattazione si considereranno esclusivamente reazioni dirette.

Il lavoro convoglia la propria attenzione sugli stati nucleari debolmente legati, ovvero situazioni in cui il valore dell'energia di separazione dei nucleoni di valenza è estremamente bassa. Ciò si riscontra nel caso di nuclidi molto lontani dalla valle di stabilità della Carta di Segré, in prossimità delle *drip lines*: si tratta appunto dei nuclei esotici. Approfondire le caratteristiche di tali condizioni limite offrirebbe informazioni preziose per arrivare ad una conoscenza piena e completa del nucleo atomico, e per tale motivo la ricerca ha volto un intenso impegno alla produzione dei nuclei esotici, a partire da fasci di ioni radioattivi, realizzabili grazie ai moderni e sofisticati acceleratori di particelle. In questo elaborato verranno modellizzati, in un contesto unidimensionale, stati debolmente legati tipici di un neutrone di valenza appartenente ad un *nucleo con alone*, ossia una peculiare varietà di nuclei esotici in cui uno o due nucleoni risultano legati in misura estremamente minore rispetto a tutti gli altri nucleoni, e la loro funzione d'onda, molto meno centralizzata, definisce un *alone nucleare*, che estende il volume del nucleo a valori molto maggiori rispetto a quanto prevederebbe il modello a goccia.

Gli stati dello spettro energetico continuo (non legati al nucleo) verranno valutati in un'ottica peculiare, ovvero come una serie molto fitta di stati discreti, espressi in una base opportunamente scelta. Questa trattazione dunque, nel suo complesso, richiede diverse approssimazioni e semplificazioni, ma la speranza è che, qualora si estendesse il modello al caso tridimensionale, con l'aggiunta di nuove variabili quali il momento angolare e il parametro d'impatto, le soluzioni proposte dal caso unidimensionale possano comunque offrire una linea guida utile.

Pertanto, dopo aver descritto il modello adottato, sia nel calcolare gli stati nucleari, sia nell'impostare la dinamica dell'urto, verranno modificati i parametri coinvolti nella fisica dell'urto, commentando i differenti esiti. I risultati non sono frutto di soluzioni analitiche, bensì numeriche, ottenibili per mezzo degli algoritmi di un complesso programma informatico, scritto dalla Dott.ssa Laura Moschini nell'ambito della sua tesi di dottorato, "Structure and reactions of weakly-bound nuclei within a one-dimensional model"[1].

Capitolo 1

Il modello fisico scelto nella trattazione

Lo scopo della presente tesi è sviluppare un modello fisico unidimensionale in grado di fare previsioni sull'evoluzione temporale della funzione d'onda corrispondente ad un neutrone debolmente legato ad un nucleo, a seguito di un urto con un altro nucleo.

Si vuole dare prima una breve descrizione di alcuni aspetti fondamentali del nucleo nella sua reale natura tridimensionale, in modo da ricondursi in modo appropriato alla semplificazione unidimensionale, evidenziandone i limiti.

In tre dimensioni, il *modello a shell* fornisce un formalismo in grado di descrivere con un buon accordo le evidenze sperimentali. In tale contesto, si cerca un potenziale il cui andamento analitico possa ben approssimare una situazione di campo medio entro il raggio del nucleo, ma che si annulli abbastanza rapidamente oltre il raggio. Tale è il potenziale, di tipo attrattivo, che mantiene unito il sistema. La forma più adatta è quella di Woods-Saxon $V^{WS}(\vec{r})$, la cui espressione è la seguente

$$V^{WS}(\vec{r}) = \frac{V_0}{1 + e^{\frac{|\vec{r}|-R}{a}}} \quad (1.0.0.1)$$

La profondità V_0 , di valore negativo, nel caso del potenziale dei neutroni può essere stimata dall'espressione [2]

$$V_0 = \left(-51 + 33 \frac{N - Z}{A} \right) MeV \quad (1.0.0.2)$$

Il raggio del nucleo è R , ben approssimato da $R = r_0 A^{1/3}$, dove r_0 è il raggio del nucleone ($r_0 \approx 1.27$ fm),¹ mentre a rappresenta lo "spessore della superficie", ed è correlato all'estensione dell'intervallo spaziale in cui il potenziale tende rapidamente ad annullarsi. Si può porre $a \approx 0.6$ fm indipendentemente dal nucleo considerato.

Lo spettro dell'Hamiltoniana il cui termine di potenziale corrisponde a $V^{WS}(\vec{r})$ ha pochi valori discreti nel caso dei livelli di energia negativi $E < 0$, mentre nel caso $E > 0$ assume tutti i valori possibili del continuo. Gli autovalori a $E < 0$ vengono poi riconsiderati nell'ottica della teoria delle perturbazioni. Infatti, aggiungendo a $V^{WS}(\vec{r})$ un termine di interazione spin-orbita, i livelli di energia vengono *split-tati* a seconda dei numeri quantici l e j degli autostati, e la ricombinazione di tali livelli nei differenti gruppi definisce le varie *shell nucleari*. Ogni livello energetico ha una degenerazione pari a $2(2j + 1)$. I valori di N (o Z) corrispondenti alla chiusura di una shell (i *numeri magici*) tendono a favorire una elevata energia di legame.

Passando alla trattazione unidimensionale, manterremo come potenziale la forma analitica del potenziale di Woods-Saxon $V^{WS}(x)$, in funzione dell'unica coordinata spaziale x , tuttavia, in assenza

¹Infatti, se il volume di un nucleo corrisponde ad A volte il volume di un nucleone (di raggio r_0), varrebbe $A \cdot \frac{4\pi}{3} r_0^3$, ed è quindi sensato porre il raggio del nucleo $R = r_0 A^{1/3}$.

di momento angolare, i livelli di energia non hanno più degenerazione dovuta al numero quantico l e non si ha interazione spin-orbita. I livelli di energia possono essere considerati con degenerazione doppia, per via dello spin, intendendolo come proprietà intrinseca delle particelle che il modello vuole attribuire, per mantenere l'analogia con il caso tridimensionale.

1.1 I nuclei con alone

I nuclei con alone sono nuclei esotici in cui un basso numero di nucleoni (tipicamente uno o due) determina una densità di materia ad una distanza, dal centro, ben maggiore rispetto al valore $R = r_0 A^{1/3}$, generalmente considerato il limite oltre il quale tale densità dovrebbe essere nulla.

Questi nucleoni infatti sono su un livello di energia con $|E|$ molto basso. Dunque, il contributo della funzione d'onda $\psi(\vec{r})$ dato dalla regione spaziale in cui $|\vec{r}| > R$, in particolare dove si ha $E < V^{WS}(\vec{r}) \approx 0$, non è trascurabile, in quanto in tale regione la forma di $\psi(\vec{r})$ è del tipo

$$\psi(\vec{r}) \propto e^{-k|\vec{r}|} \quad (1.1.0.1)$$

Con

$$k = \frac{\sqrt{2m|E|}}{\hbar} \quad (1.1.0.2)$$

E dunque, al diminuire di k , $\psi(\vec{r})$ si annulla meno rapidamente.

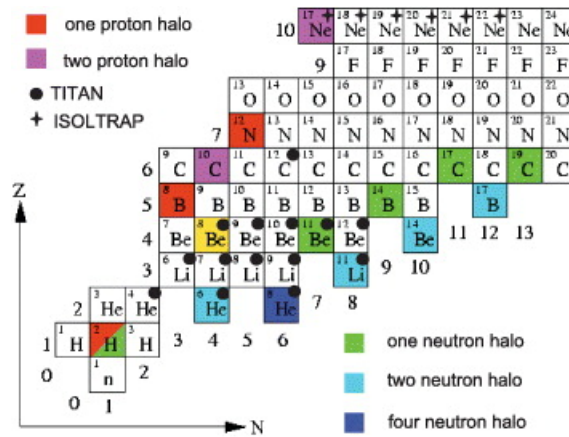


Figura 1.1: I nuclei ad alone al momento conosciuti

Dalla figura è possibile osservare nuclei sia ad alone di protoni che di neutroni. Nel nostro caso, sarà il nucleo con alone ad un neutrone ad essere esaminato nei processi d'urto. Conviene schematizzarlo come un *core* di nucleoni al quale si aggiunge un neutrone soggetto al campo medio attrattivo generato dal *core*, ma comunque abbastanza dislocato. Un esempio di nucleo con alone in un sistema pesante è dato da ^{19}C , la cui energia di separazione vale 0.58MeV .

1.2 La dinamica dell'urto

Si immagini, in un modello unidimensionale, un neutrone sottoposto ad un potenziale attrattivo di tipo Woods-Saxon, generato da un *core* di nucleoni².

²Non si sta considerando il potenziale al quale sono soggetti i nucleoni del *core*, ma quello esercitato dai nucleoni del *core* sul nucleone di valenza.

Nel nostro modello uno degli autostati del potenziale è inizialmente occupato da un singolo neutrone, gli eventuali altri, ad energia superiore, non sono occupati da alcuna particella. Il sistema *core*+neutrone rappresenta il nucleo bersaglio. Tale subisce un fenomeno d'urto con un altro nucleo, il proiettile. Questo, analogamente al bersaglio, ha degli autostati, inizialmente liberi, relativi ai livelli di energia di un altro potenziale di Woods-Saxon, generato appunto dal *core* del nucleo proiettile.

I due sistemi interagiscono tra di loro in modo essenzialmente repulsivo. Si suppone infatti che l'azione della forza elettrica opponga i due corpi con cariche positive, e che l'energia incidente del proiettile non sia abbastanza elevata da portare alla fusione.

Il sistema di riferimento in cui ci si pone è il centro del nucleo bersaglio, $x_T = 0$. In questo sistema di riferimento, si assume che la legge oraria del centro del nucleo proiettile, $x_P(t)$, sia della forma:

$$x_P(t) = x_0 + \sqrt{\rho^2 + (vt)^2} - \rho \quad (1.2.0.1)$$

Il valore di $x_P(t)$ quando $t = 0$ è x_0 , e corrisponde al minimo valore della distanza relativa raggiunta nel corso dell'urto.

La quantità v è la velocità asintotica di $x_P(t)$. Infatti, per valori $vt \gg \rho$, la legge oraria prende la forma di un moto rettilineo uniforme. Il parametro ρ è quindi legato alla distanza al di sotto della quale si ha interazione tra bersaglio e proiettile.

Il fatto che il moto di $x_P(t)$ sia simmetrico rispetto a $t = 0$ è un'approssimazione necessaria per semplificare la trattazione. In linea di principio, nel caso di trasferimento del neutrone ad uno degli stati del proiettile, o nel caso di eccitazione inelastica, la traiettoria dei due sistemi viene modificata. Tale effetto viene qui trascurato.

Data v , si definisce l'energia asintotica del proiettile $E_P = 1/2mv^2$.

Avendo fissato tutti gli aspetti dinamici del fenomeno, il contributo del termine potenziale dell'Hamiltoniana del sistema vede sommare $V_T^{WS}(x)$ e $V_P^{WS}(x, t)$, ovvero i potenziali di Woods-Saxon dei *core*, rispettivamente, di bersaglio e proiettile. La forma di $V_T^{WS}(x)$ è la versione unidimensionale dell'espressione in formula 1.0.0.1, mentre quella di $V_P^{WS}(x, t)$ è dipendente dalla legge oraria di $x_P(t)$:

$$V_P^{WS}(x, t) = V_P^{WS}(x - x_P(t)) = \frac{V_P}{1 + e^{\frac{x - (x_0 + \sqrt{\rho^2 + (vt)^2} - \rho) - R_P}{a}}} \quad (1.2.0.2)$$

1.3 Calcolo degli autostati

Si vogliono qui brevemente presentare i metodi adoperati per risolvere l'equazione agli autovalori nel caso di un potenziale di Woods-Saxon statico $V^{WS}(x)$, e dunque per ricavare gli stati legati e non legati.

Innanzitutto, la massa ridotta μ dell'intero sistema, costituito da *core*+neutrone e dal proiettile, viene assunta uguale alla massa del neutrone, poiché le masse di *core* e proiettile sono molto maggiori di quella del neutrone. L'equazione agli autovalori è dunque la seguente.

$$\left[-\frac{\hbar^2}{2\mu} \frac{d^2}{dx^2} + V^{WS}(x) \right] \phi(x) = E\phi(x) \quad (1.3.0.1)$$

Lo spettro dell'Hamiltoniana assume pochi valori discreti per $E < 0$, mentre per $E > 0$ assume tutti i valori possibili del continuo. Gli autostati relativi agli autovalori negativi sono legati, al contrario di quelli relativi agli autovalori positivi, corrispondenti a stati di scattering. Tuttavia, si approssimeranno gli stati del continuo ad una sequenza molto fitta di stati discreti. In tal modo, disporremo di metodi diversi per valutare l'esito dell'urto, e, con il loro confronto, si immagina di poter ottenere informazioni utili sulla natura dello stato debolmente legato.

1.3.1 Stati legati

Un potenziale di Woods-Saxon $V^{WS}(x)$, centrato in $x = 0$, per grandi $|x|$ assume valori sostanzialmente nulli. Le funzioni d'onda $\phi(x)$ relative agli stati con $E < 0$, per tali di x , decrescono esponenzialmente come $e^{-k|x|}$, con $k = \sqrt{2\mu E}/\hbar$.

Per ricavare gli autostati si considerano dunque due punti x_{max} e x_{min} . Questi sono tali per cui $x_{max} > 0$, $x_{min} = -x_{max}$, e $V^{WS}(x) \approx 0$ per $|x| \geq x_{max}$.

Si impone in x_{max} il requisito

$$\frac{d\phi(x)}{dx} = -k\phi(x) \quad (1.3.1.1)$$

Mentre in x_{min} va imposto

$$\frac{d\phi(x)}{dx} = k\phi(x) \quad (1.3.1.2)$$

Ciò viene svolto variando il valore di E , e quindi di k , nel modo più fitto possibile. A partire da x_{max} e x_{min} , ai due lati del centro di $V^{WS}(x)$, si avvia l'algoritmo numerico di Numerov³ [3] per costruire due funzioni d'onda. Queste funzioni, unendosi in un punto di raccordo, se rispettano ivi le condizioni di continuità e derivabilità, rappresentano effettivamente un autostato, e il valore di E con cui sono state costruite è autovalore dell'Hamiltoniana.

1.3.2 Stati non legati

L'equazione agli autovalori 1.3.0.1 ha uno spettro continuo per $E > 0$. Proveremo a sostituire l'insieme di stati continui con un *set* discreto che può essere ottenuto con le seguenti tecniche (continuo discretizzato).

Sistema confinato in una scatola a pareti infinite

Per ottenere gli stati non legati, confinando il sistema in una scatola a pareti infinite, il potenziale $V(x)$ dell'equazione agli autovalori è il seguente

$$V(x) = \begin{cases} V^{WS}(x) & \text{se } |x| < x_b \\ \infty & \text{se } |x| \geq x_b \end{cases} \quad (1.3.2.1)$$

L'algoritmo di Numerov viene dunque avviato, in questo caso, con la condizione che la funzione d'onda sia nulla in x_b e in $-x_b$. Dalla figura seguente si può osservare in che modo, aumentando il valore di x_b , si ottengono insiemi di livelli discreti sempre più fitti, efficaci nella sostituzione dello spettro continuo⁴.

³Si tratta della tecnica adottata per risolvere l'equazione differenziale del secondo ordine 1.3.0.1

⁴La figura è tratta da [1]

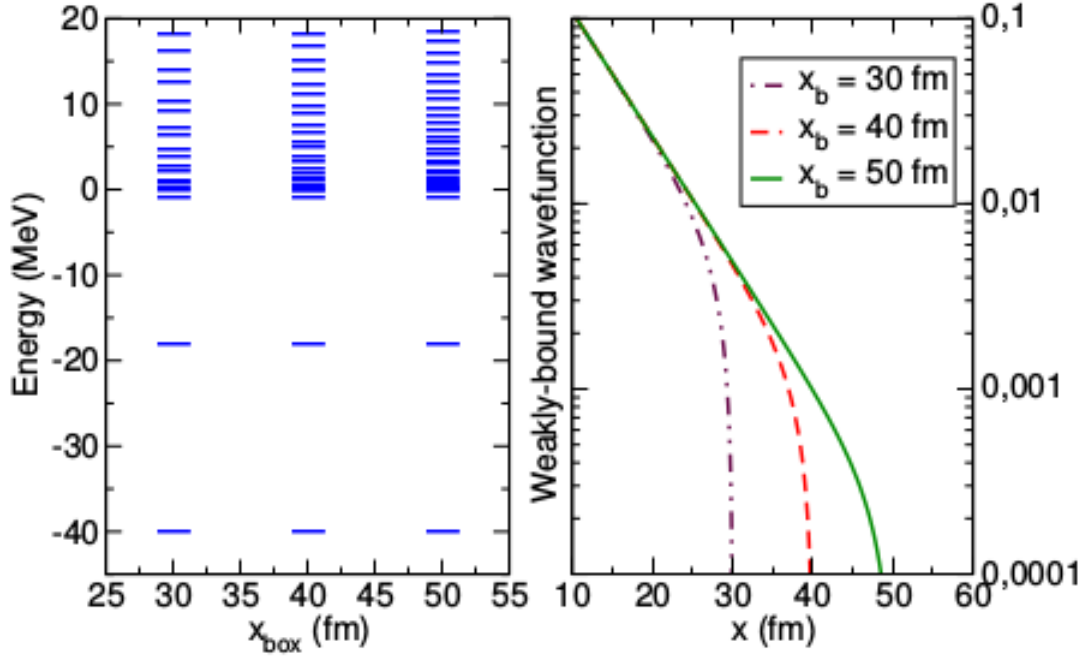


Figura 1.2: Discretizzazione del continuo al crescere di x_{box}

Metodo degli pseudostati $\phi_i^{HO}(x)$

Un altro metodo utile per trovare la generica soluzione dell'equazione agli autovalori è esprimere gli autostati come combinazione lineare della base $\phi_i^{HO}(x)$, ovvero gli autostati dell'oscillatore armonico. Tali sono infiniti, ed è necessario, eseguendo un'approssimazione, fissare fin da principio una dimensione finita N , limitando la base $\phi_i^{HO}(x)$ con $i = 1, 2, \dots, N$.

La procedura consiste nella scrittura dell'Hamiltoniana, il cui termine potenziale è $V^{WS}(x)$, in forma matriciale:

$H_{ij} = \langle \phi_i^{HO}(x) | H | \phi_j^{HO}(x) \rangle$. Dalla forma matriciale, si procede al calcolo degli autovalori e quindi a quello degli autostati del potenziale di Woods-Saxon, espressi nella base scelta

$$\phi_i^{WS}(x) = \sum_{r=1}^N \alpha_{ir} \phi_r^{HO}(x) \quad (1.3.2.2)$$

Nella ricerca degli autovalori, quelli positivi sono la versione discretizzata dello spettro continuo. In questo caso, per ottenere un insieme di livelli energetici molto fitti, è importante scegliere N abbastanza elevato, anche perché bisogna approssimare bene il comportamento asintotico, poiché gli autostati che cerchiamo si annullano come e^{-x} , mentre le $\phi_i^{HO}(x)$ vanno generalmente a zero come e^{-x^2} . Anche in questo caso, si presenta di seguito l'esempio di come, aumentando N , migliora l'approssimazione del continuo discretizzato⁵.

⁵La figura è tratta da [1]

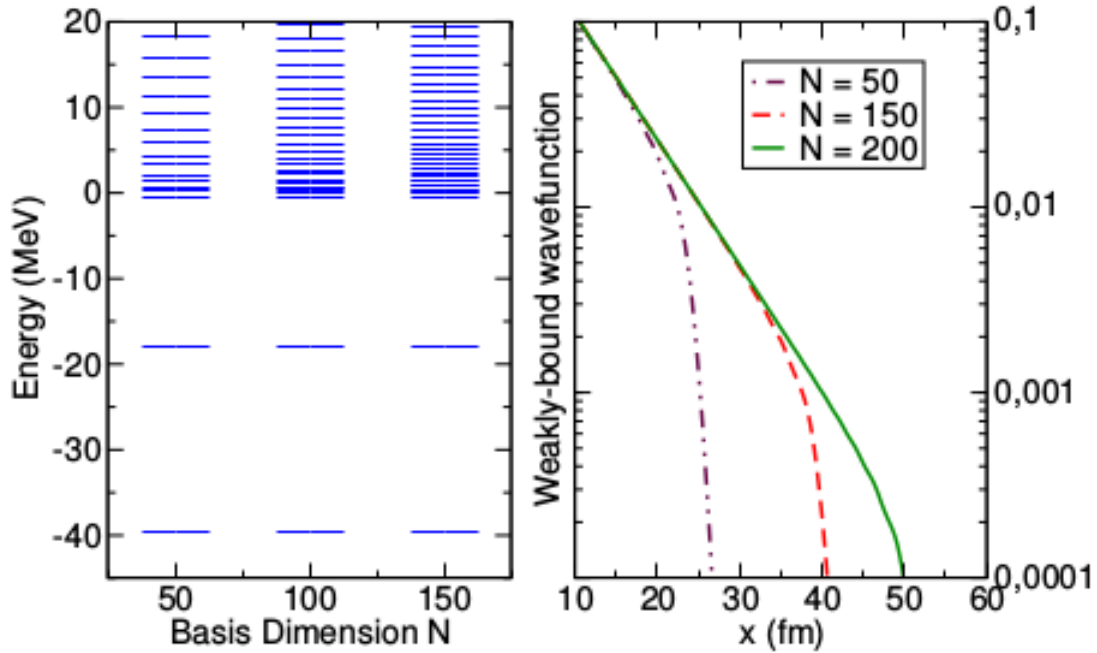


Figura 1.3: Discretizzazione del continuo al crescere di N

1.4 Gli esiti dell'urto

Prima dell'urto, la particella si trova in uno degli stati legati di $V_T^{WS}(x)$. L'esito dell'urto può essere uno dei seguenti:

- *Urto elastico*: Il neutrone rimane sullo stesso livello energetico
- *Urto inelastico*: Il neutrone rimane ancora legato al potenziale bersaglio, ma si sposta ad un livello superiore di energia
- *Trasferimento*: Il neutrone passa ad uno degli stati legati del potenziale bersaglio
- *Breakup*: Il neutrone passa agli stati del continuo

Da qui in poi, si denota con \mathcal{P}_{el} la probabilità di urto elastico, mentre \mathcal{P}_{in-i} è la probabilità di passaggio ad un i -esimo stato del potenziale bersaglio, \mathcal{P}_{in} è la probabilità di urto inelastico (calcolata come somma su tutte le \mathcal{P}_{in-i}), analogamente \mathcal{P}_{tr-i} è la probabilità di passare ad un i -esimo stato del potenziale proiettile e \mathcal{P}_{tr} è la probabilità totale di trasferimento. Valutati questi valori, si può dare una prima stima della probabilità di breakup, che scriviamo come $\mathcal{P}_{b.u.1}$, sapendo che la somma di tutte le probabilità deve dare 1, quindi si ha che $\mathcal{P}_{b.u.1} = 1 - \mathcal{P}_{el} - \mathcal{P}_{in} - \mathcal{P}_{tr}$. Se invece si effettua il calcolo di N_c stati del continuo con una delle tecniche precedentemente descritte, la probabilità di breakup può essere ricavata anche come somma delle $\mathcal{P}_{b.u.[c]}$ (dove c varia da 1 a N_c) ovvero si sommano le probabilità di passaggio a ciascuno degli stati del continuo. Scriviamo questa seconda versione come $\mathcal{P}_{b.u.2}$.

Per valutare le probabilità, si può proiettare sui possibili stati finali l'evoluzione temporale della funzione d'onda $\psi(x, t)$ (metodo TDSE), oppure valutare l'evoluzione temporale dei coefficienti della combinazione lineare della base scelta per $\psi(x, t)$ (metodo dei canali accoppiati). Inoltre, semplificando

il metodo dei canali accoppiati, si può ottenere una soluzione perturbativa approssimata al primo ordine.

Soluzione esatta dipendente dal tempo

Da qui in poi si denoteranno con $V_T(x)$ e $V_P(x, t)$, rispettivamente, i potenziali $V_T^{WS}(x)$ e $V_P^{WS}(x, t)$. L'Hamiltoniana del sistema è

$$H(x, t) = -\frac{\hbar^2}{2\mu} \frac{\partial^2}{\partial x^2} + V_T(x) + V_P(x, t) \quad (1.4.0.1)$$

Si vuole risolvere numericamente l'equazione di Schroedinger, sapendo che lo stato iniziale è uno degli stati legati di $V_T(x)$.

$$i\hbar \frac{\partial \psi(x, t)}{\partial t} = H(x, t) \psi(x, t) \quad (1.4.0.2)$$

Per calcolare in modo numerico l'evoluzione temporale della funzione d'onda, ad ogni *step* dt , si fa uso di un metodo alle differenze finite di tipo Runge-Kutta. Si definisce $\phi_{IN}(x)$ lo stato del neutrone prima dell'urto, mentre le $\phi_i(x)$ sono gli autostati legati di $V_T(x)$ (e dunque ϕ_{IN} è uno di questi) e le $\phi_j(x, t)$ sono gli autostati legati di $V_P(x, t)$. Le $\phi_{b.u.[c]}$ sono gli stati del continuo discretizzato. In tal modo si valutano le probabilità:

$$\mathcal{P}_{el} = | \langle \phi_{IN}(x) | \psi(x, t_f) \rangle |^2 \quad (1.4.0.3)$$

$$\mathcal{P}_{in} = \sum_{i \neq IN} | \langle \phi_i(x) | \psi(x, t_f) \rangle |^2 \quad (1.4.0.4)$$

$$\mathcal{P}_{tr} = \sum_j | \langle \phi_j(x, t) | \psi(x, t_f) \rangle |^2 \quad (1.4.0.5)$$

Le due versioni del calcolo della probabilità di breakup sono

$$\mathcal{P}_{b.u.1} = 1 - \mathcal{P}_{el} - \mathcal{P}_{in} - \mathcal{P}_{tr} \quad (1.4.0.6)$$

$$\mathcal{P}_{b.u.2} = \sum_{c=1}^{N_c} \mathcal{P}_{b.u.[c]} = \sum_{c=1}^{N_c} | \langle \phi_{b.u.[c]} | \psi(x, t_f) \rangle |^2 \quad (1.4.0.7)$$

La quantità t_f corrisponde ad tempo dopo l'urto, sufficientemente grande, tale per cui bersaglio e proiettile non si influenzano più reciprocamente, in quanto molto distanti.

Nel seguito, ci riferiremo a questo metodo risolutivo come TDSE (soluzione esatta dipendente dal tempo).

Soluzione con metodo dei canali accoppiati

Il metodo dei canali accoppiati imposta il problema sotto un altro punto di vista. Utilizzando la formulazione di [4], la funzione d'onda viene scritta come combinazione lineare degli stati di bersaglio e proiettile.

$$\psi(x, t) = \sum_{i=1}^{N_T} c_i^T(t) \phi_i^T(x) + \sum_{j=1}^{N_P} c_j^P(t) \phi_j^P(x) \quad (1.4.0.8)$$

In sistemi debolmente legati, la somma dovrebbe andare oltre N_T e N_P , includendo un certo numero di stati del continuo discretizzato $\phi_{b.u.[c]}$, intesi come stati non legati di V_T oppure di V_P , e quindi

appartenenti all'insieme delle $\phi_i^T(x)$ oppure delle $\phi_j^P(x)$ (in questo contesto denotiamo quindi $\phi_i^T(x)$ e $\phi_j^P(x)$ come stati generici, legati e non legati).

Applicando l'equazione di Schroedinger alla $\psi(x, t)$ scritta in questo modo, si ottiene un sistema di equazioni differenziali la cui soluzione porta a conoscere l'evoluzione temporale dei coefficienti $c_i^T(t)$ e $c_j^P(t)$. La base così scelta non è ortogonale, per cui è necessario introdurre la base duale, ovvero le funzioni $\omega_k^T(x)$ tali che $\langle \phi_i^T(x) | \omega_k^T(x) \rangle = \delta_{i,k}$ e quelle $\omega_k^P(x)$ tali che $\langle \phi_j^P(x) | \omega_k^P(x) \rangle = \delta_{j,k}$. Un modo per costruire la base duale è descritto da [1].

Scrivendo come H_T e H_P le hamiltoniane aventi come termine potenziale, rispettivamente, V_T e V_P , bisogna cercarne gli autovalori, ovvero i valori E_i tali per cui $H_T \phi_i^T(x) = E_i \phi_i^T(x)$, e i valori E_j tali per cui $H_P \phi_j^P(x) = E_j \phi_j^P(x)$. Con queste definizioni, il sistema di equazioni differenziali assume la forma

$$i\hbar \frac{\partial c_i^T(t)}{\partial t} = \sum_k c_k^T(t) \langle \omega_i^T | V_P | \phi_k^T \rangle \cdot e^{\frac{i(E_i - E_k)t}{\hbar}} + \sum_k c_k^P(t) \langle \omega_i^T | V_T | \phi_k^P \rangle \cdot e^{\frac{i(E_i - E_k)t}{\hbar}} \quad (1.4.0.9)$$

$$i\hbar \frac{\partial c_j^P(t)}{\partial t} = \sum_k c_k^T(t) \langle \omega_j^P | V_P | \phi_k^T \rangle \cdot e^{\frac{i(E_j - E_k)t}{\hbar}} + \sum_k c_k^P(t) \langle \omega_j^P | V_T | \phi_k^P \rangle \cdot e^{\frac{i(E_j - E_k)t}{\hbar}} \quad (1.4.0.10)$$

Le condizioni iniziali sono date da $c_j^P(t = -\infty) = 0$ e $c_i^T(t = -\infty) = 0$ se $\phi_i \neq \phi_{IN}$, se invece $\phi_i = \phi_{IN}$ si ha $c_{IN}^T(t = -\infty) = 1$. Con queste informazioni, si riesce a risolvere il sistema univocamente, e note le $c_k^{T,P}(t)$, la probabilità finale di trovare la particella in un certo stato $\phi_k^{T,P}(x)$, è definita da

$$\mathcal{P}_k^{T,P} = |c_k^{T,P}|^2 \quad (1.4.0.11)$$

A causa della non ortogonalità della base, la somma di tutte la probabilità potrebbe non conservarsi durante la collisione, al variare di t . Se si vogliono ottenere stime sensate (tali che la loro somma venga 1), bisogna arrivare alla situazione in cui non si abbia sovrapposizione tra gli stati del bersaglio e quelli del proiettile, e quindi ad un tempo finale t_f sufficientemente grande.

Quello appena mostrato è il modo per risolvere il problema nella rappresentazione *prior* di $\phi_k^{T,P}(x)$, ma si può anche lavorare nella rappresentazione *post*, espandendo la funzione d'onda nella base duale

$$\psi(x, t) = \sum_{i=1}^{N_T} \hat{c}_i^T(t) \omega_i^T(x) + \sum_{j=1}^{N_P} \hat{c}_j^P(t) \omega_j^P(x) \quad (1.4.0.12)$$

In questo caso il sistema di equazioni differenziali prende una forma analoga a quella data dai sistemi 1.4.0.9 e 1.4.0.10, sostituendo le $\phi_k^{T,P}(x)$ con le $\omega_k^{T,P}(x)$, e viceversa.

Analogamente a prima, in tale rappresentazione la probabilità di trovare la particella in uno stato $\phi_k^{T,P}(x)$ è data da

$$\mathcal{P}_k^{T,P} = |\hat{c}_k^{T,P}|^2 \quad (1.4.0.13)$$

Vale nuovamente il discorso che stime di probabilità sensate si hanno per tempi molto grandi a seguito dell'urto. Solo così infatti il risultato della rappresentazione *prior* coincide con quello della rappresentazione *post*.

Soluzione perturbativa approssimata al primo ordine

Nel caso di urti tali per cui il valore di $c_{IN}^T(t)$ rimane molto maggiore, per tutti i tempi, degli altri coefficienti $c_k^{T,P}(t)$, si può semplificare il sistema di equazioni differenziali 1.4.0.9 e 1.4.0.10 [4], [5].

Approssimando $c_{IN}^T = 1$ e gli altri $c_k^{T,P} = 0$, integrando direttamente, si arriva alla forma

$$\mathcal{P}_j^P(t_f) = \left| \frac{1}{i\hbar} \int_{t_i}^{t_f} dt \langle \omega_j^P | V_P | \phi_{IN}^T \rangle e^{\frac{i(E_j - E_{IN})t}{\hbar}} \right|^2 \quad (1.4.0.14)$$

Questa è la soluzione offerta dal metodo perturbativo con approssimazione al primo ordine, valida solo se il risultato più probabile dell'interazione è un urto elastico. L'equazione appena presentata è valida per i fenomeni di trasferimento, nel caso di urto inelastico non si utilizza la base duale e l'espressione della probabilità è data da

$$\mathcal{P}_i^T(t_f) = \left| \frac{1}{i\hbar} \int_{t_i}^{t_f} dt \langle \phi_i^T | V_P | \phi_{IN}^T \rangle e^{\frac{i(E_i - E_{IN})t}{\hbar}} \right|^2 \quad (1.4.0.15)$$

Capitolo 2

I risultati del modello

2.1 Minima distanza come parametro variabile

Si vuole analizzare la natura dell'urto modificando il valore di x_0 , ovvero la minima distanza raggiunta tra i due centri dei potenziali, lasciando invariati tutti gli altri parametri. Fisicamente, questo corrisponde a considerare urti più o meno centrali. I valori dei parametri utilizzati sono riportati nella Tabella 2.1.

| Bersaglio | Proiettile |
|--|---|
| $V_0 = -1.92 \text{ MeV}$ $R = 2.82 \text{ fm}$ $a = 0.6 \text{ fm}$ | $V_0 = -9.0 \text{ MeV}$ $R = 2.82 \text{ fm}$ $a = 0.6 \text{ fm}$ |
| Livelli di energia del bersaglio | $E_0 = -0.696 \text{ MeV}$ |
| Livelli di energia del proiettile | $E_0 = -5.813 \text{ MeV}$ $E_1 = -0.399 \text{ MeV}$ |
| Energia asintotica Velocità asintotica | $E_P = 5 \text{ MeV}$ $v = 0.103 \cdot c$ $\rho = 2 \text{ fm}$ |

Tabella 2.1: I potenziali e i parametri cinematici dell'urto

Autostati legati

Nella pagina seguente è mostrata la forma grafica degli stati legati $|\phi(x)|^2$, e del loro logaritmo¹. I valori di R nei due casi sono stati scelti identici, per cui si tratta di un confronto la cui attenzione è volta principalmente sul ruolo che assume la profondità V_0 , e come tale influisce sulle energie di legame. Il potenziale bersaglio ha un solo stato debolmente legato, la cui $|\phi^T(x)|^2$ si annulla molto meno rapidamente dello stato fondamentale di V_P , ma leggermente di più rispetto al primo stato eccitato di V_P .

¹I logaritmi sono calcolati in base 10.

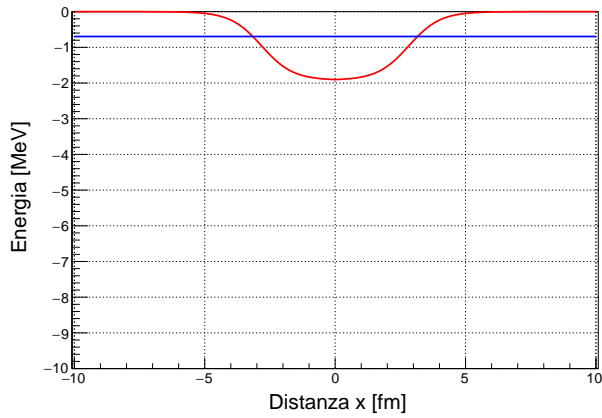


Figura 2.1: Il potenziale V_T (in rosso) e i suoi livelli energetici (in blu)

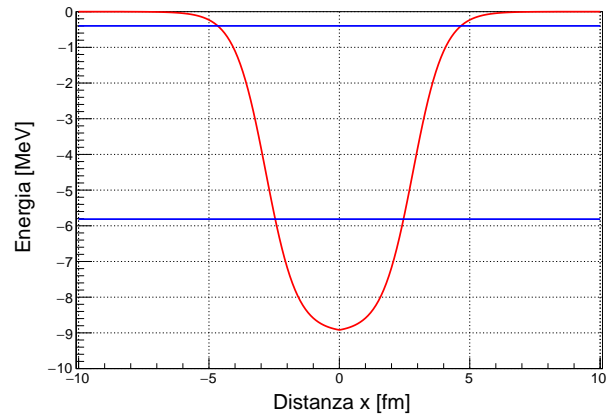


Figura 2.2: Il potenziale V_P (in rosso) e i suoi livelli energetici (in blu)

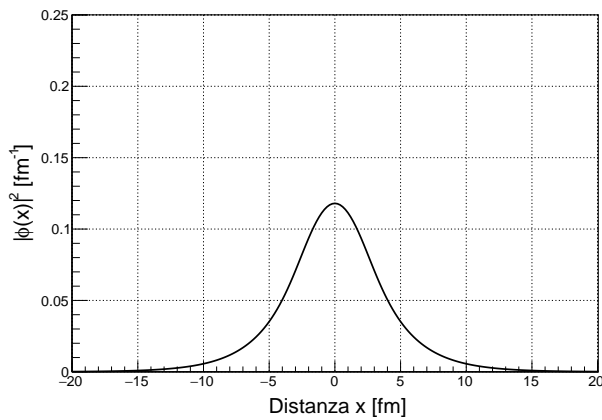


Figura 2.3: Gli autostati legati di V_T

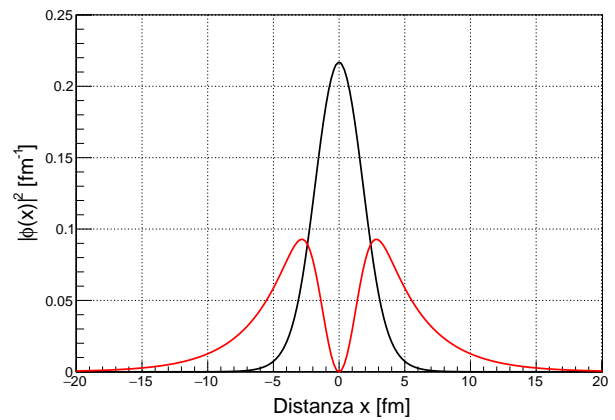


Figura 2.4: Gli autostati legati di V_P

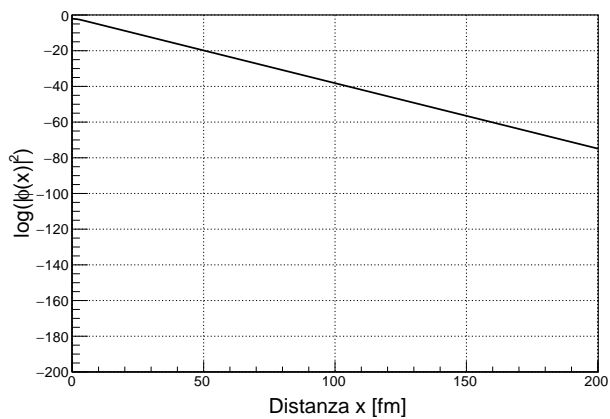


Figura 2.5: I logaritmi delle $|\phi(x)|^2$ relative agli stati del bersaglio

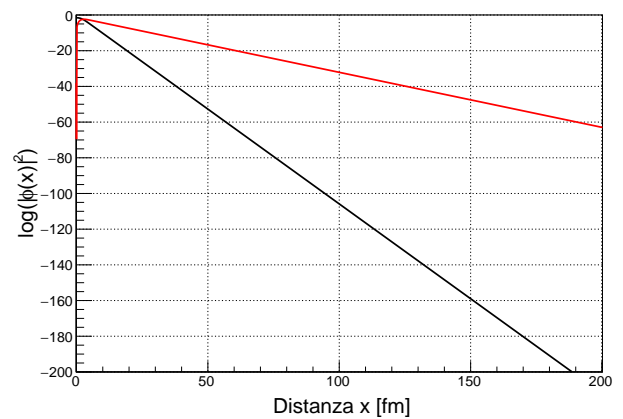


Figura 2.6: I logaritmi delle $|\phi(x)|^2$ relative agli stati del proiettile

Autostati non legati

Di seguito, si vuole figurare la forma grafica della funzione d'onda di alcuni stati non legati. Si tratta di quattro livelli di energia positivi, i più bassi che vengono ottenuti adoperando il metodo degli pseudostati con base $\phi_i^{HO}(x)$, con i variabile da 1 a $N = 300$.

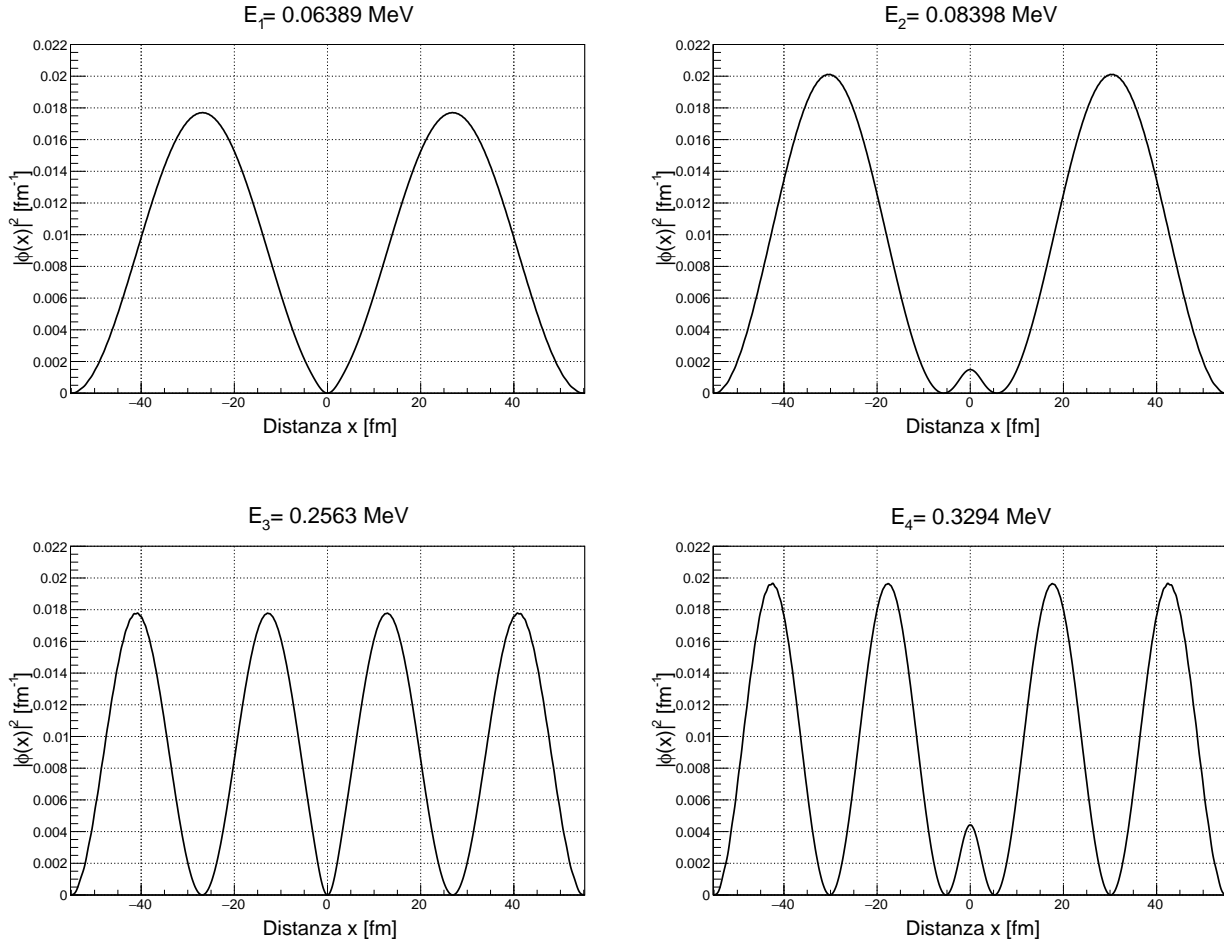


Figura 2.7: Autostati non legati di V_T

La funzione d'onda, nelle x in cui V_T ha valori negativi non trascurabili, riduce la propria ampiezza e il valore della propria lunghezza d'onda λ . L'effetto diventa sempre meno rilevante all'aumentare di E , e, a partire dal livello tale per cui $|V(x=0)| \ll E$, l'ampiezza e la lunghezza d'onda non vengono più sensibilmente alterate dalla presenza del potenziale.

Evoluzione del sistema

La dinamica dell'urto viene studiata dal momento in cui il potenziale proiettile si trova a $x_{start} = 150$ fm (nel sistema di riferimento del bersaglio), diretto verso il bersaglio, fino al momento in cui torna a x_{start} , con velocità positiva. Questo è dunque l'istante t_f in cui si stimano le probabilità finali, nei differenti metodi possibili.

Metodo TDSE

Nel caso del metodo TDSE, la $\mathcal{P}_{b.u.2}$ viene ricavata sommando le probabilità di transizione su $N_c = 100$ stati non legati relativi a V_T , calcolati confinando il sistema in una scatola a pareti infinite ponendo $x_b = 500$ fm.

| Minima distanza x_0 | 6 fm | 8 fm | 10 fm | 12 fm | 14 fm |
|-----------------------|-------|-------|-------|---------------------|---------------------|
| \mathcal{P}_{el} | 0.399 | 0.674 | 0.836 | 0.919 | 0.961 |
| \mathcal{P}_{tr-0} | 0.220 | 0.115 | 0.050 | 0.020 | $6.9 \cdot 10^{-3}$ |
| \mathcal{P}_{tr-1} | 0.080 | 0.041 | 0.019 | $8.1 \cdot 10^{-3}$ | $3.3 \cdot 10^{-3}$ |
| \mathcal{P}_{tr} | 0.300 | 0.156 | 0.069 | 0.028 | 0.010 |
| $\mathcal{P}_{b.u.1}$ | 0.301 | 0.170 | 0.095 | 0.053 | 0.029 |
| $\mathcal{P}_{b.u.2}$ | 0.379 | 0.223 | 0.112 | 0.052 | 0.023 |

Tabella 2.2: Risultati ottenuti con metodo TDSE

Metodo dei canali accoppiati, stati liberi del proiettile

Per la stima di $\mathcal{P}_{b.u.2}$, vengono calcolati $N_c = 10$ autostati non legati di V_P , confinando il sistema in una scatola a pareti infinite con $x_b = 100$ fm. Le stime ottenute nella rappresentazione *prior* e in quella *post* sono venute identiche, mantenendo il numero di cifre significative scelto per l'esposizione (ciò è indizio del fatto che la scelta di x_{start} è stata sufficientemente adeguata).

| Minima distanza x_0 | 6 fm | 8 fm | 10 fm | 12 fm | 14 fm |
|-----------------------|---------------------|---------------------|---------------------|---------------------|---------------------|
| \mathcal{P}_{el} | 0.998 | 0.999 | 0.999 | 1.00 | 1.00 |
| \mathcal{P}_{tr-0} | $2.3 \cdot 10^{-4}$ | $4.4 \cdot 10^{-5}$ | $9.0 \cdot 10^{-5}$ | $9.4 \cdot 10^{-7}$ | $2.4 \cdot 10^{-5}$ |
| \mathcal{P}_{tr-1} | $1.8 \cdot 10^{-4}$ | $3.4 \cdot 10^{-6}$ | $3.7 \cdot 10^{-5}$ | $6.7 \cdot 10^{-6}$ | $5.3 \cdot 10^{-7}$ |
| \mathcal{P}_{tr} | $4.1 \cdot 10^{-4}$ | $4.8 \cdot 10^{-5}$ | $1.3 \cdot 10^{-4}$ | $7.7 \cdot 10^{-6}$ | $2.4 \cdot 10^{-5}$ |
| $\mathcal{P}_{b.u.2}$ | $2.2 \cdot 10^{-5}$ | $8.3 \cdot 10^{-7}$ | $4.6 \cdot 10^{-6}$ | $1.6 \cdot 10^{-6}$ | $1.2 \cdot 10^{-7}$ |

Tabella 2.3: Risultati ottenuti con metodo dei canali accoppiati

Si presenta di seguito la soluzione del problema offerta dal metodo perturbativo applicato agli stati legati del proiettile.

| Minima distanza x_0 | 6 fm | 8 fm | 10 fm | 12 fm | 14 fm |
|-----------------------|-------|-------|-------|-------|---------------------|
| \mathcal{P}_{tr-0} | 0.389 | 0.188 | 0.090 | 0.043 | 0.021 |
| \mathcal{P}_{tr-1} | 0.183 | 0.089 | 0.043 | 0.021 | $9.9 \cdot 10^{-3}$ |
| \mathcal{P}_{tr} | 0.572 | 0.277 | 0.133 | 0.064 | 0.031 |

Tabella 2.4: Risultati ottenuti con metodo perturbativo

Metodo dei canali accoppiati, stati liberi del bersaglio

In questo caso, per il calcolo di $\mathcal{P}_{b.u.2}$ si lavora con $N_c = 10$ autostati non legati di V_T , ricavati confinando il sistema in una scatola a pareti infinite con $x_b = 120$ fm. (In generale vale lo stesso discorso di prima sull'uguaglianza delle stime *prior* e *post*, sia nella tabella seguente che nei casi successivi, per cui da qui in poi si ometterà di sottolinearlo nuovamente).

| Minima distanza x_0 | 6 fm | 8 fm | 10 fm | 12 fm | 14 fm |
|-----------------------|---------------------|---------------------|---------------------|---------------------|---------------------|
| \mathcal{P}_{el} | 0.505 | 0.667 | 0.811 | 0.894 | 0.946 |
| \mathcal{P}_{tr-0} | $1.3 \cdot 10^{-3}$ | $5.4 \cdot 10^{-4}$ | $1.3 \cdot 10^{-3}$ | $1.3 \cdot 10^{-5}$ | $6.6 \cdot 10^{-4}$ |
| \mathcal{P}_{tr-1} | $4.0 \cdot 10^{-5}$ | $7.9 \cdot 10^{-5}$ | $4.7 \cdot 10^{-4}$ | $1.8 \cdot 10^{-5}$ | $1.4 \cdot 10^{-5}$ |
| \mathcal{P}_{tr} | $1.3 \cdot 10^{-3}$ | $6.1 \cdot 10^{-4}$ | $1.8 \cdot 10^{-3}$ | $3.2 \cdot 10^{-5}$ | $6.7 \cdot 10^{-4}$ |
| $\mathcal{P}_{b.u.2}$ | 0.494 | 0.332 | 0.188 | 0.106 | 0.054 |

Tabella 2.5: Risultati ottenuti con metodo dei canali accoppiati

Nuovamente, con le stesse impostazioni appena definite, si offre anche la soluzione proposta dal metodo perturbativo per gli autostati del proiettile.

| Minima distanza x_0 | 6 fm | 8 fm | 10 fm | 12 fm | 14 fm |
|-----------------------|-------|-------|-------|-------|---------------------|
| \mathcal{P}_{tr-0} | 0.389 | 0.188 | 0.090 | 0.043 | 0.021 |
| \mathcal{P}_{tr-1} | 0.183 | 0.089 | 0.043 | 0.021 | $9.9 \cdot 10^{-3}$ |
| \mathcal{P}_{tr} | 0.572 | 0.277 | 0.133 | 0.064 | 0.031 |

Tabella 2.6: Risultati ottenuti con metodo perturbativo

Conclusioni

Dalla soluzione esatta di $\psi(x, t)$ è evidente che al diminuire di x_0 aumentano le probabilità di trasferimento e di breakup, mentre diminuisce la probabilità di urto elastico. Ciò è sensato con quanto ci si potrebbe aspettare intuitivamente, infatti il sistema è maggiormente perturbato, e tende a variare, nel momento in cui l'interazione di due corpi diventa importante, ossia al diminuire della loro distanza.

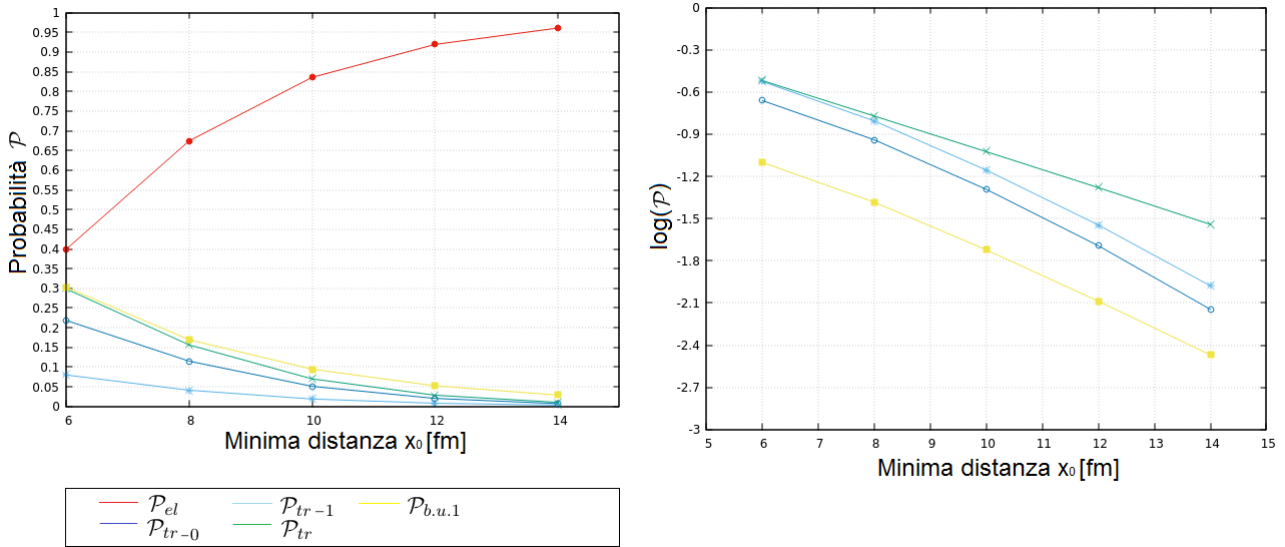


Figura 2.8: Probabilità calcolate con il metodo TDSE

La decrescita dei valori di probabilità di trasferimento o breakup sembra avere un andamento di tipo esponenziale. Si noti infatti l'andamento grafico di $\log(\mathcal{P}_{b.u.1})$ e di $\log(\mathcal{P}_{tr})$ in funzione di x_0 . La probabilità finale di breakup è rimasta comunque sempre superiore alle probabilità di trasferimento. I valori di probabilità offerti dal metodo perturbativo sugli autostati legati del proiettile sono venuti più elevati del caso TDSE (si ricorda comunque che, in genere, le soluzioni offerte dal metodo perturbativo sono simili a quelle date da TDSE quando si ha elevata probabilità di urto elastico). Per quanto riguarda invece il metodo dei canali accoppiati, la soluzione ricavata discretizzando lo spettro continuo del bersaglio è venuta più simile al caso TDSE, rispetto alla soluzione che ha usato la discretizzazione del continuo del proiettile.

Negli urti successivi verrà svolto il calcolo di $\mathcal{P}_{b.u.2}$ sommando sugli stati non legati di V_T , evitando la procedura anche per gli stati non legati di V_P .

Nel caso di $x_0 = 6$ fm e $x_0 = 8$ fm, si mostra, in Figura 2.8 e in Figura 2.9, l'evoluzione temporale di $|\psi(x, t)|^2$ per alcuni degli *step* temporali su cui ha operato il metodo alle differenze finite di tipo Runge-Kutta.

In generale, si può osservare che la funzione d'onda è soggetta a variazioni sensibili solo dopo che V_P è passato per la posizione x_0 (tale istante corrisponde sostanzialmente al secondo dei quattro *step* temporali presentati).

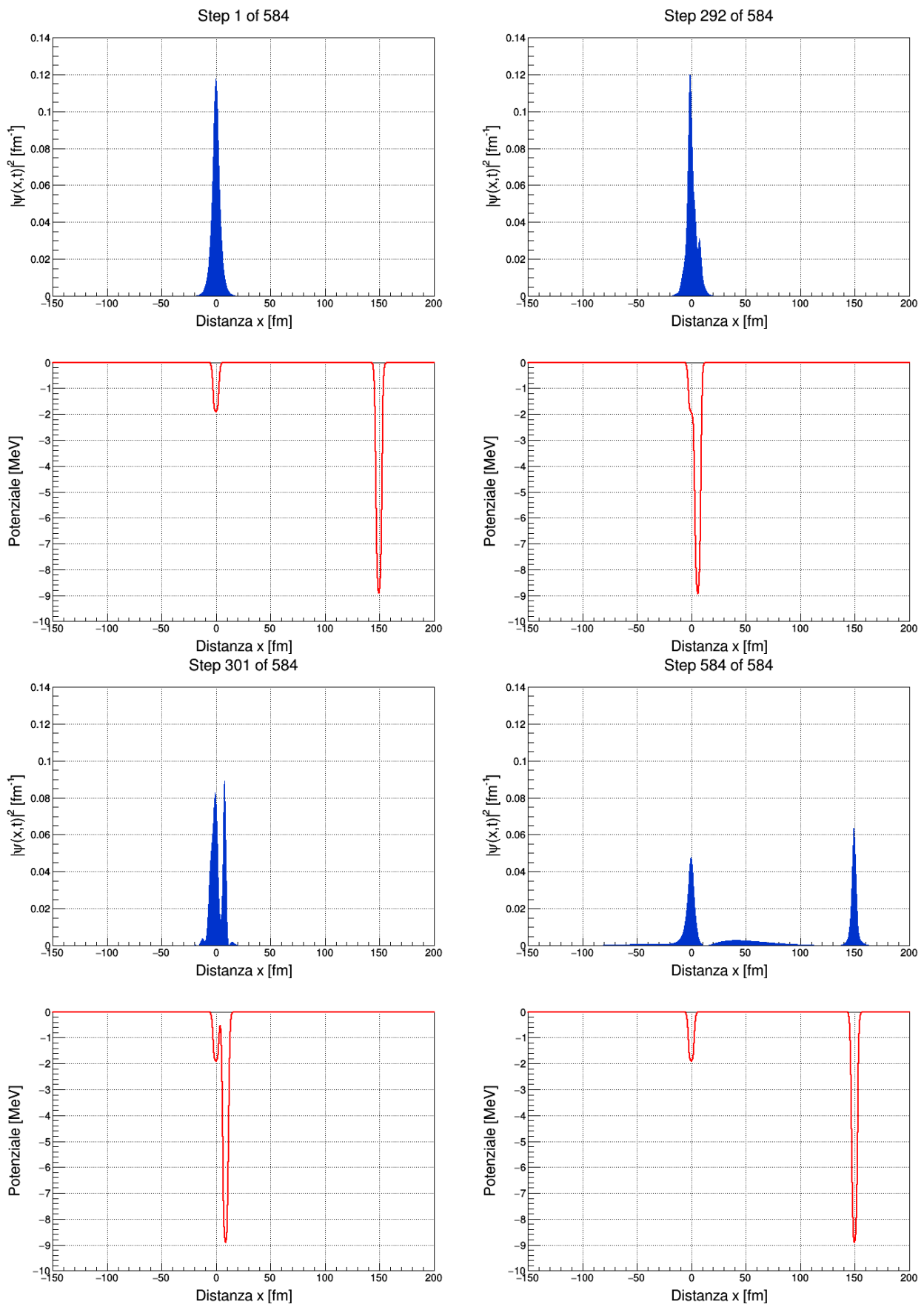


Figura 2.9: Evoluzione temporale di $\psi(x,t)$ con $x_0 = 6$ fm

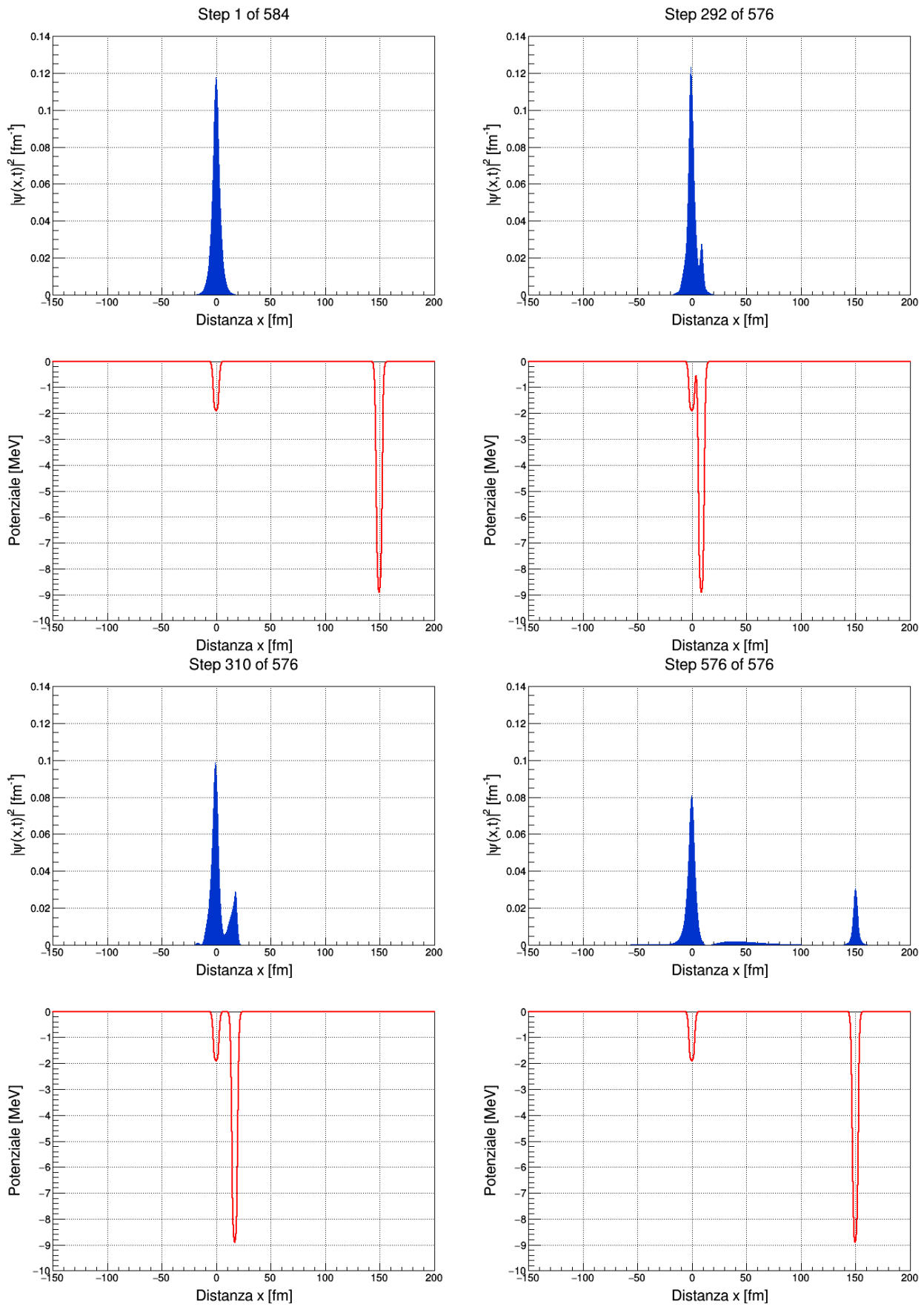


Figura 2.10: Evoluzione temporale di $\psi(x,t)$ con $x_0 = 8$ fm

Evidenziamo, infine, la forma grafica di $|\psi(x, t_f)|^2$ su un minore intervallo dell'asse delle ordinate, per mettere in risalto la parte di funzione d'onda che al tempo t_f si è evoluta nello stato di breakup.

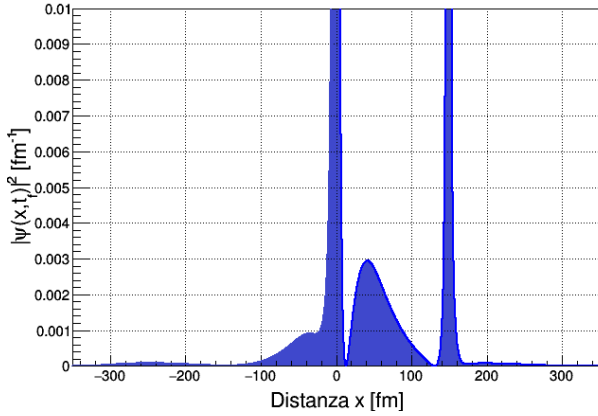


Figura 2.11: Breakup finale nel caso $x_0 = 6$ fm

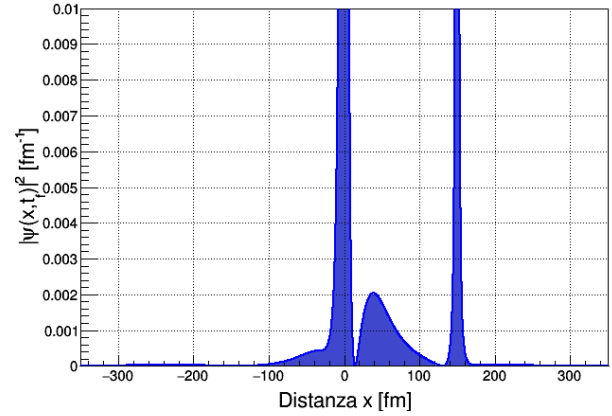


Figura 2.12: Breakup finale nel caso $x_0 = 8$ fm

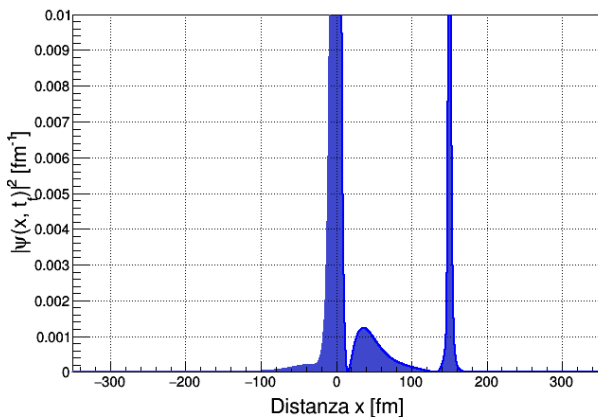


Figura 2.13: Breakup finale nel caso $x_0 = 10$ fm

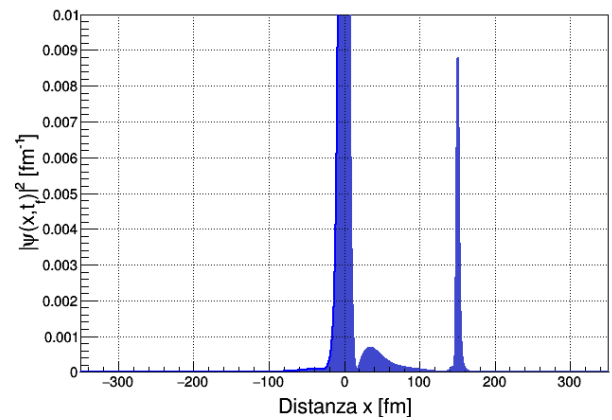


Figura 2.14: Breakup finale nel caso $x_0 = 12$ fm

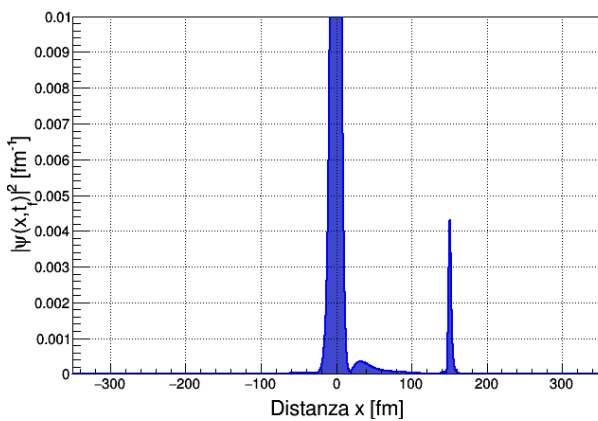


Figura 2.15: Breakup finale nel caso $x_0 = 14$ fm

Si può notare come in questo caso il breakup sia favorito per i valori di x compresi tra i centri dei due potenziali. Il fatto che i due potenziali siano attrattivi è responsabile dell'asimmetria destra/sinistra della parte di funzione d'onda corrispondente a breakup.

2.2 Energia asintotica come parametro variabile

Lo studio successivo è stato effettuato variando l'energia asintotica del proiettile, lasciando immutati tutti gli altri parametri. L'energia è stata variata fino ad un valore tale per cui la velocità asintotica fosse $v = 0.231 \cdot c$, si è preferito non andare oltre, in quanto il modello adoperato è privo di eventuali correzioni relativistiche.

Questa volta ciascuno dei due potenziali ha un unico autostato, debolmente legato.

| Bersaglio | Proiettile |
|-----------------------------------|---------------------------------|
| $V_0 = -3.0$ MeV | $V_0 = -1.92$ MeV |
| $R = 0.9$ fm | $R = 2.82$ fm |
| $a = 0.6$ fm | $a = 0.6$ fm |
| Livelli di energia del bersaglio | $E_0 = -0.329$ MeV |
| Livelli di energia del proiettile | $E_0 = -0.696$ MeV |
| Minima distanza | $x_0 = 4.5$ fm $\rho = 2$ fm |

Tabella 2.7: I potenziali e i parametri cinematici dell'urto

Autostati legati

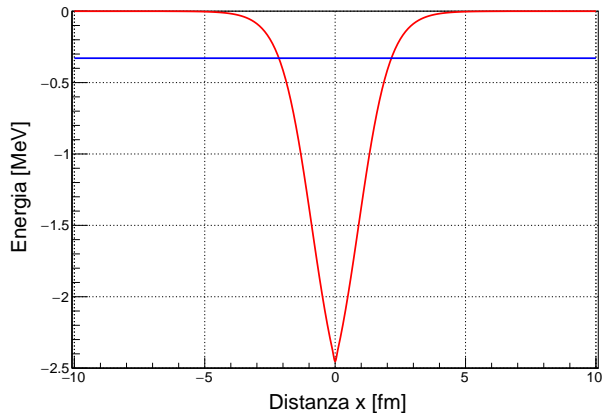


Figura 2.16: Il potenziale V_T (in rosso) e i suoi livelli energetici (in blu)

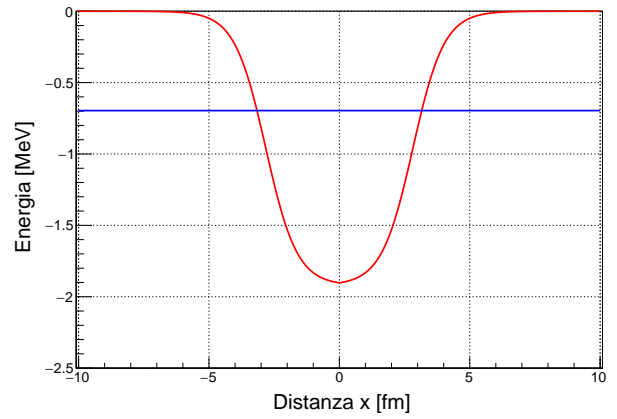


Figura 2.17: Il potenziale V_P (in rosso) e i suoi livelli energetici (in blu)

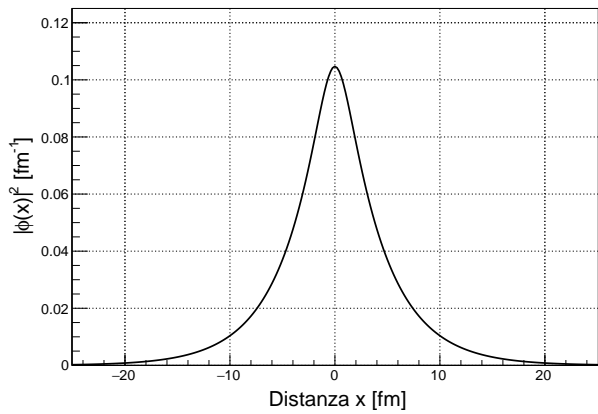


Figura 2.18: Gli autostati legati di V_T

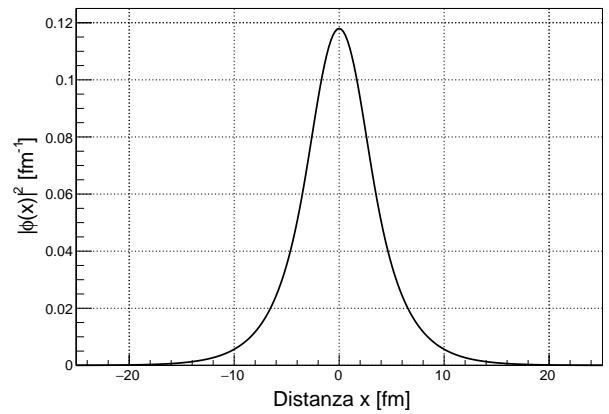


Figura 2.19: Gli autostati legati di V_P

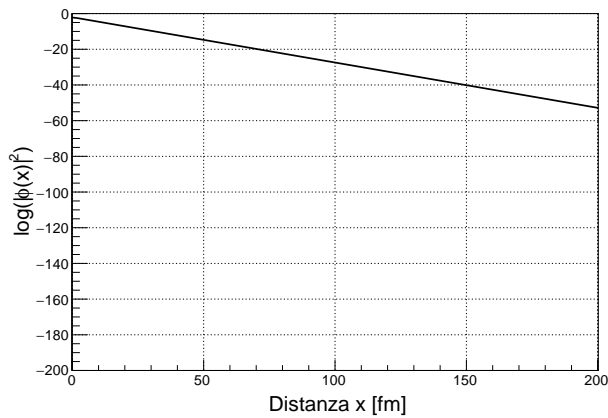


Figura 2.20: I logaritmi delle $|\phi(x)|^2$ relative agli stati del bersaglio

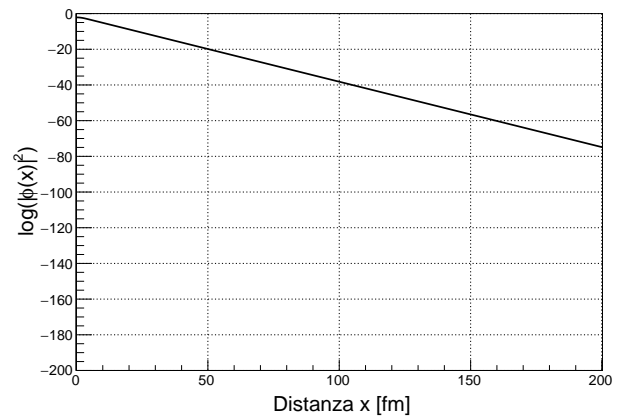


Figura 2.21: I logaritmi delle $|\phi(x)|^2$ relative agli stati del proiettile

I due stati sono entrambi debolmente legati, ma la distribuzione di probabilità dell'autostato di V_T è meno centralizzata, sul dominio delle x , rispetto all'autostato di V_P . Anche dal confronto del comportamento asintotico, si osserva che l'autostato di V_T tende a zero più lentamente rispetto a quello di V_P . Va notato che il valore di V_0 del potenziale bersaglio è minore rispetto al V_0 del proiettile, eppure il suo autovalore è risultato molto maggiore (più prossimo allo zero). Tuttavia, il valore R di V_T è parecchio minore rispetto a R di V_P . Questo può essere indice del fatto che in genere i potenziali di Woods-Saxon hanno stati sempre meno legati al diminuire di R . Per confermare o smentire questa intuizione, è stato svolto il calcolo dei livelli di energia al variare di R , mantenendo fisso V_0 (ma ripetendo l'operazione per diversi valori di V_0).

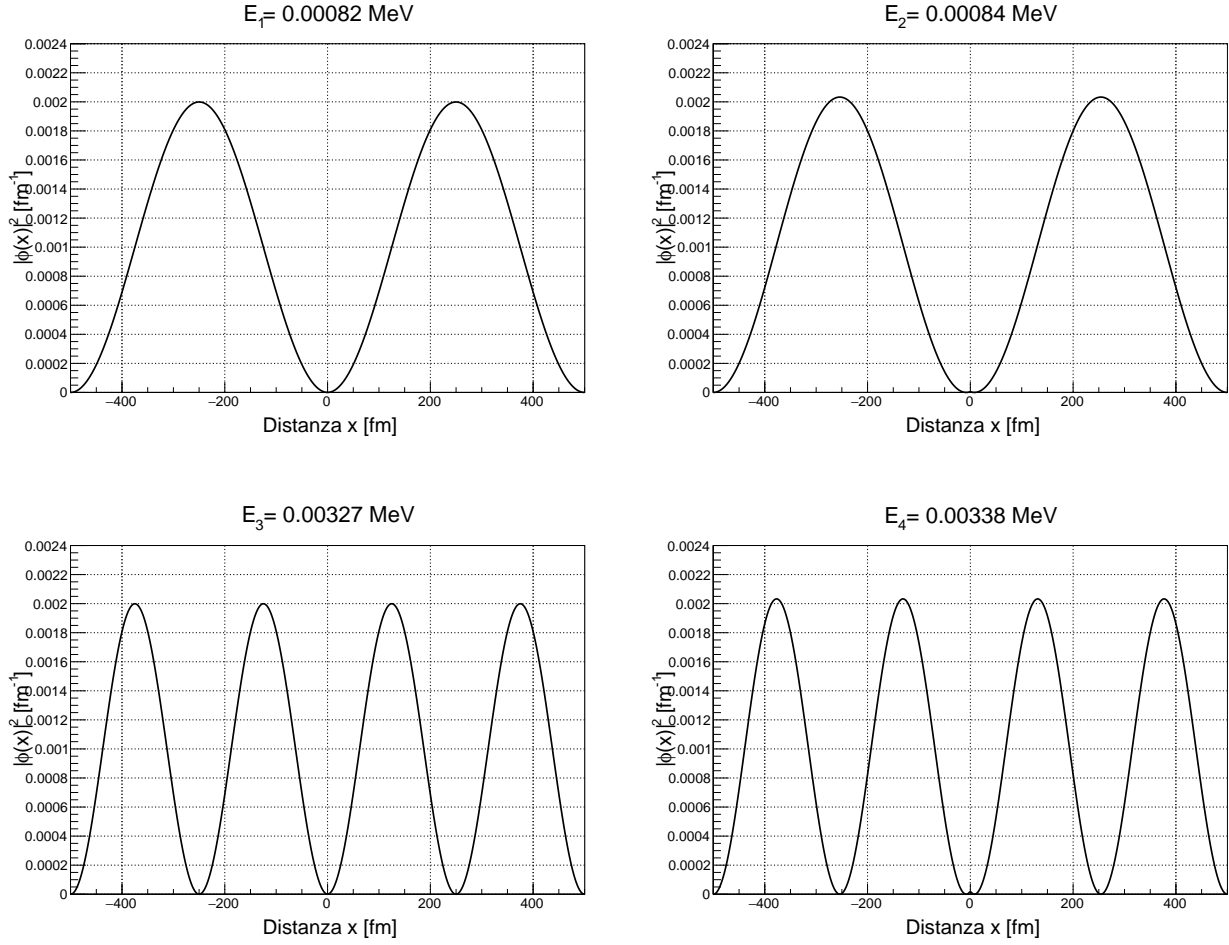
| $V_0 = -3 \text{ MeV}$ | | | |
|-------------------------|---|--|---|
| Raggio R | 1 fm | 1.5 fm | 2.5 fm |
| Livelli energetici | $E_0 = -0.379 \text{ MeV}$ | $E_0 = -0.639 \text{ MeV}$ | -1.189 MeV |
| $V_0 = -7 \text{ MeV}$ | | | |
| Raggio R | 2.5 fm | 4.5 fm | 6.5 fm |
| Livelli energetici | $E_0 = -3.882 \text{ MeV}$ | $E_0 = -5.496 \text{ MeV}$ $E_1 = -1.937 \text{ MeV}$ | $E_0 = -6.150 \text{ MeV}$ $E_1 = -3.835 \text{ MeV}$ $E_2 = -0.845 \text{ MeV}$ |
| $V_0 = -9 \text{ MeV}$ | | | |
| Raggio R | 3 fm | 4.5 fm | 6 fm |
| Livelli energetici | $E_0 = -6.075 \text{ MeV}$ $E_1 = -0.762 \text{ MeV}$ | $E_0 = -7.341 \text{ MeV}$ $E_1 = -3.292 \text{ MeV}$ | $E_0 = -5.127 \text{ MeV}$ $E_1 = -1.439 \text{ MeV}$ |
| $V_0 = -15 \text{ MeV}$ | | | |
| Raggio R | 6 fm | 8 fm | 10 fm |
| Livelli energetici | $E_0 = -10.460 \text{ MeV}$ $E_1 = -5.728 \text{ MeV}$ $E_2 = -0.919 \text{ MeV}$ | $E_0 = -9.062 \text{ MeV}$ $E_1 = -5.114 \text{ MeV}$ $E_2 = -1.090 \text{ MeV}$ | $E_0 = -10.966 \text{ MeV}$ $E_1 = -8.077 \text{ MeV}$ $E_2 = -4.690 \text{ MeV}$ $E_3 = -1.225 \text{ MeV}$ |

Tabella 2.8: Livelli energetici legati al variare di R

Si può effettivamente osservare che aumentando R , nella gran parte dei casi, i livelli di energia diventano più legati, oppure tendono ad infittirsi, e aumentano anche di numero.

Autostati non legati

Analogamente a prima, anche in questo contesto si vuole riportare la forma grafica di alcuni stati del continuo discretizzato. In questo contesto, nel metodo TDSE si lavorerà infatti con $N_c = 200$ stati non legati, relativi a V_T , confinando il sistema in una scatola a pareti infinite con $x_b = 500 \text{ fm}$. Si riporta qui sotto la forma grafica degli stati corrispondenti ai quattro autovalori positivi più bassi ottenuti.

Figura 2.22: Autostati non legati di V_T

L'autovalore più elevato ottenuto dal metodo è $E_{200} = 8.251$ MeV.

Evoluzione del sistema

Il calcolo delle probabilità viene svolto in piena analogia con prima, ossia al tempo t_f , corrispondente al ritorno del proiettile in x_{start} , e come prima si ha $x_{start} = 150$ fm.

Metodo TDSE

Per il metodo TDSE si calcola $\mathcal{P}_{b.u.2}$ con $N_c = 200$ stati non legati relativi a V_T , ottenuti confinando il sistema in una scatola a pareti infinite ponendo $x_b = 500$ fm.

| Energia asintotica E_P | 2 MeV | 5 MeV | 10 MeV | 15 MeV | 25 MeV |
|--------------------------|-----------------|---------------------|---------------------|---------------------|---------------------|
| Velocità asintotica v | $0.065 \cdot c$ | $0.103 \cdot c$ | $0.146 \cdot c$ | $0.179 \cdot c$ | $0.231 \cdot c$ |
| \mathcal{P}_{el} | 0.621 | 0.841 | 0.918 | 0.945 | 0.967 |
| \mathcal{P}_{tr} | 0.048 | $2.3 \cdot 10^{-3}$ | $6.4 \cdot 10^{-5}$ | $3.3 \cdot 10^{-6}$ | $1.5 \cdot 10^{-8}$ |
| $\mathcal{P}_{b.u.1}$ | 0.331 | 0.157 | 0.081 | 0.055 | 0.033 |
| $\mathcal{P}_{b.u.2}$ | 0.375 | 0.153 | 0.077 | 0.053 | 0.032 |

Tabella 2.9: Risultati ottenuti con metodo TDSE

Metodo dei canali accoppiati

Questa volta si utilizza il metodo degli pseudostati $\phi_i^{HO}(x)$ per calcolare $N_c = 15$ stati non legati di V_T . La base include $N = 300$ valori possibili di i .

| Energia asintotica E_P | 2 MeV | 5 MeV | 10 MeV | 15 MeV | 25 MeV |
|--------------------------|---------------------|---------------------|---------------------|---------------------|---------------------|
| Velocità asintotica v | $0.065 \cdot c$ | $0.103 \cdot c$ | $0.146 \cdot c$ | $0.179 \cdot c$ | $0.231 \cdot c$ |
| \mathcal{P}_{el} | 0.689 | 0.866 | 0.930 | 0.953 | 0.972 |
| \mathcal{P}_{tr} | $3.4 \cdot 10^{-5}$ | $2.1 \cdot 10^{-6}$ | $6.8 \cdot 10^{-7}$ | $2.8 \cdot 10^{-6}$ | $6.5 \cdot 10^{-7}$ |
| $\mathcal{P}_{b.u.2}$ | 0.312 | 0.135 | 0.069 | 0.047 | 0.028 |

Tabella 2.10: Risultati ottenuti con metodo dei canali accoppiati

Metodo perturbativo per gli stati del proiettile

Con la medesima impostazione precedentemente descritta per i canali accoppiati, è stato ottenuto quanto segue in tabella nell'approssimazione perturbativa.

| Energia asintotica E_P | 2 MeV | 5 MeV | 10 MeV | 15 MeV | 25 MeV |
|--------------------------|-----------------|-----------------|-----------------|-----------------|-----------------|
| Velocità asintotica v | $0.065 \cdot c$ | $0.103 \cdot c$ | $0.146 \cdot c$ | $0.179 \cdot c$ | $0.231 \cdot c$ |
| \mathcal{P}_{tr} | 0.989 | 0.420 | 0.214 | 0.144 | 0.087 |

Tabella 2.11: Risultati ottenuti con metodo perturbativo

Conclusioni

Dal calcolo TDSE, risalta in modo particolare il fatto che la probabilità di trasferimento abbia sempre avuto dei valori molto bassi. Il valore della minima distanza x_0 non è elevato, ma, al contrario del caso precedente, nel potenziale proiettile non c'è un ulteriore livello di energia al quale il neutrone si sarebbe potuto trasferire in una transizione multipla, e ciò può aver diminuito le possibilità di trasferimento. Anche con la minima energia asintotica $E_P = 2$ MeV, la probabilità di transizione ha assunto un valore di $\mathcal{P}_{tr} = 0.048$, che cala ulteriormente all'aumentare di E_P . Anche la probabilità di breakup diminuisce all'aumentare di E_P . Del resto, aumentare il valore dell'energia asintotica vuol dire che il processo d'urto avviene più velocemente, e dunque che l'interazione tra i due potenziali ha una durata temporale inferiore. Se l'interazione dura poco, è meno probabile che il neutrone sia perturbato.

Nel caso TDSE, i valori di $\mathcal{P}_{b.u.1}$ e $\mathcal{P}_{b.u.2}$ sono risultati comparabili, per cui si può ritenere che aver discretizzato lo spettro continuo, mantenendo $N_c = 200$ stati di V_T , e confinando il sistema in una scatola a pareti infinite con $x_b = 500$ fm, sia stata un'approssimazione buona. Il metodo dei canali accoppiati ha dato valori abbastanza simili al metodo TDSE, per quanto riguarda il calcolo di urto elastico e breakup, mentre la soluzione perturbativa al primo ordine ha dato risultati in disaccordo con gli altri due metodi, evidenziando l'importanza dei processi di ordine superiore.

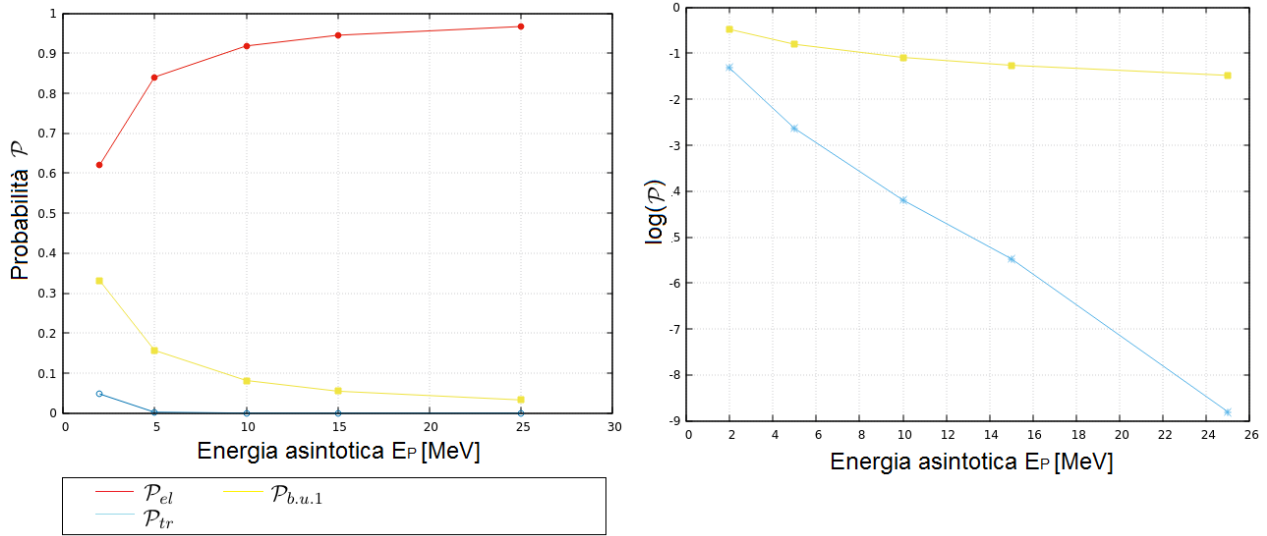


Figura 2.23: Probabilità calcolate con il metodo TDSE

Il grafico dei logaritmi delle probabilità pare, nuovamente, attestare che la decrescita di \mathcal{P}_{tr} e $\mathcal{P}_{b.u.1}$ sia approssimativamente di tipo esponenziale.

Si mostra di seguito la forma grafica dell'evoluzione temporale di $|\psi(x, t)|^2$, per $E_P = 2$ MeV e $E_P = 5$ MeV, valutata dal metodo TDSE per alcuni degli *step* temporali su cui ha operato il metodo alle differenze finite di tipo Runge-Kutta.

Successivamente, si mette in evidenza la $|\psi(x, t_f)|^2$ su un ristretto intervallo dell'asse delle ordinate, per poter visualizzare meglio il breakup.

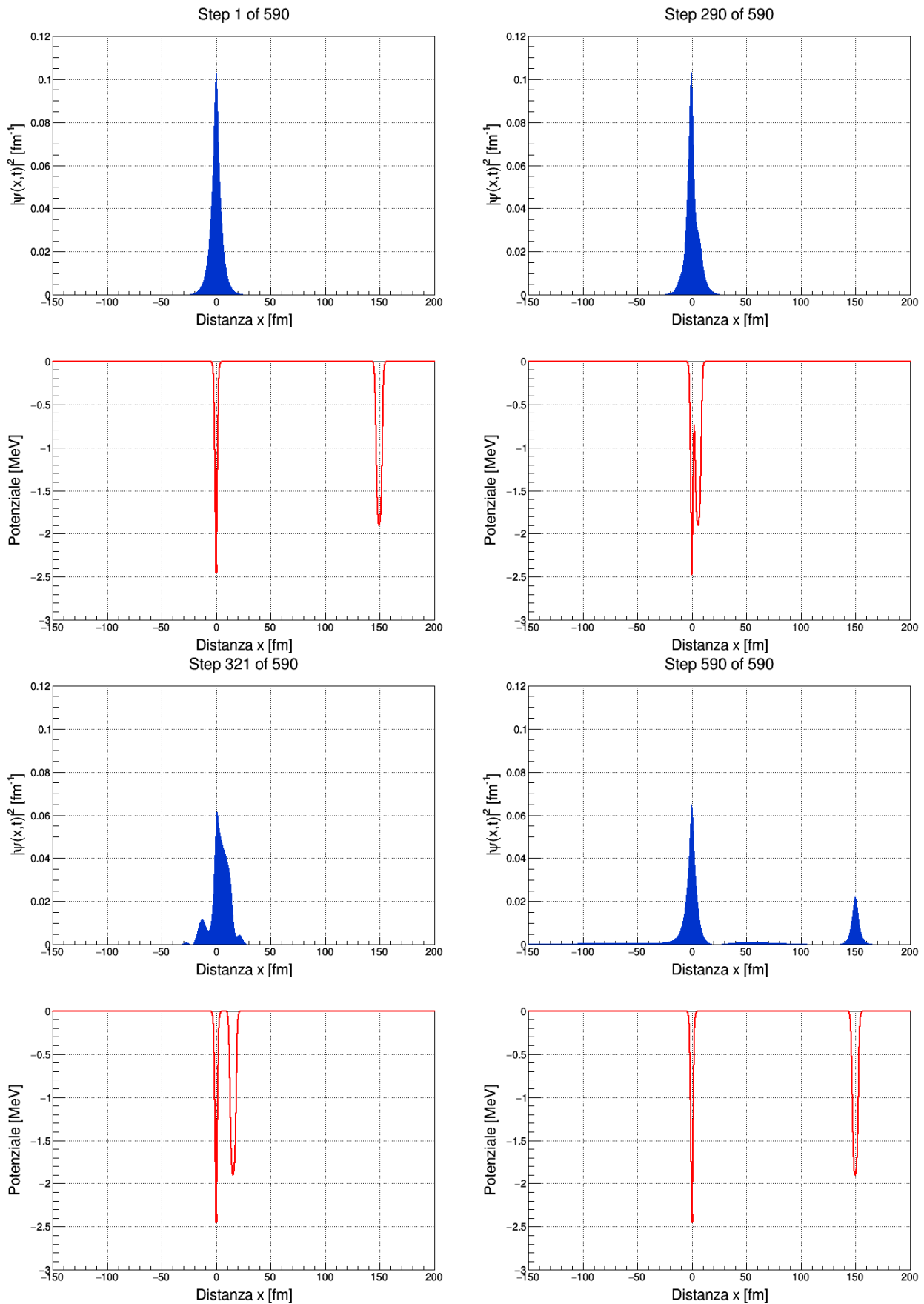


Figura 2.24: Evoluzione temporale di $\psi(x,t)$ con $E_P = 2$ MeV

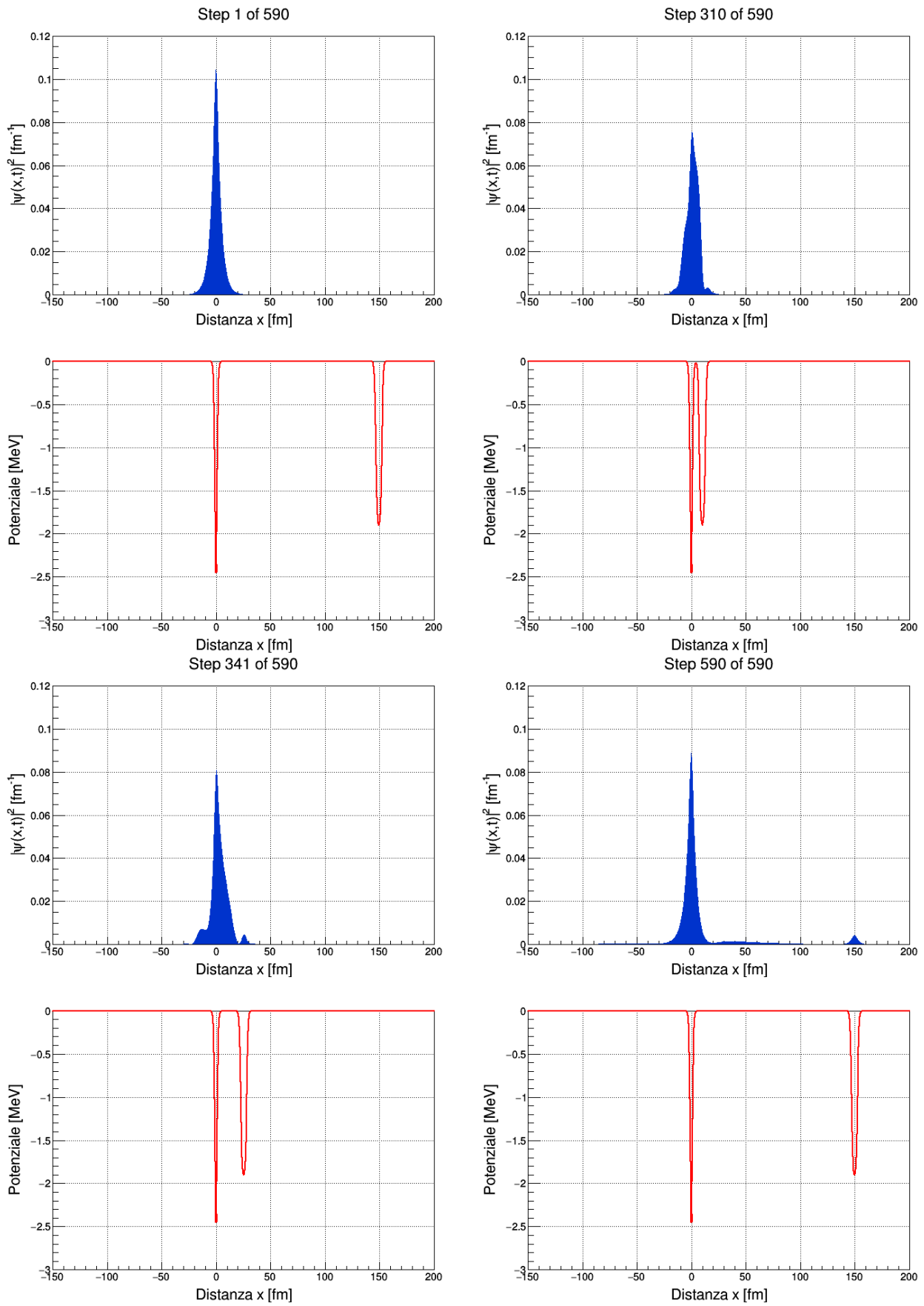
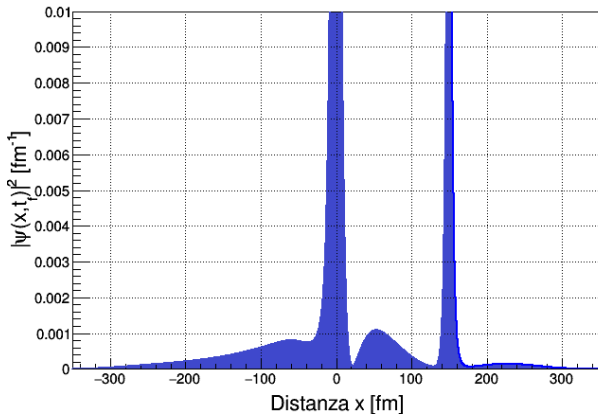
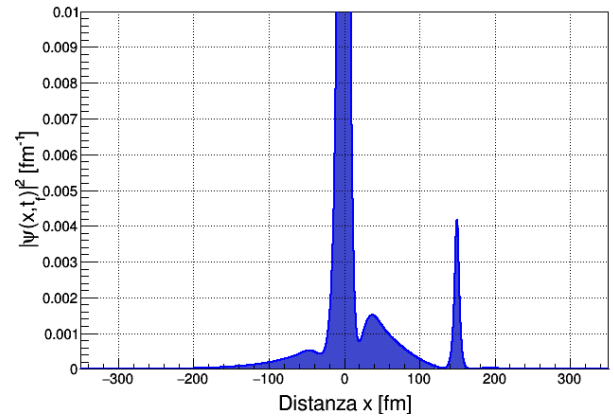
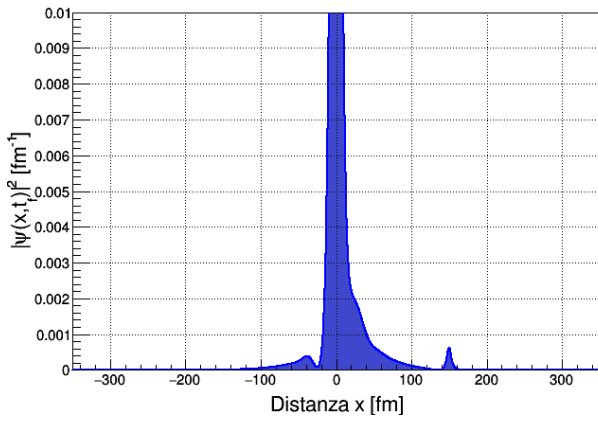
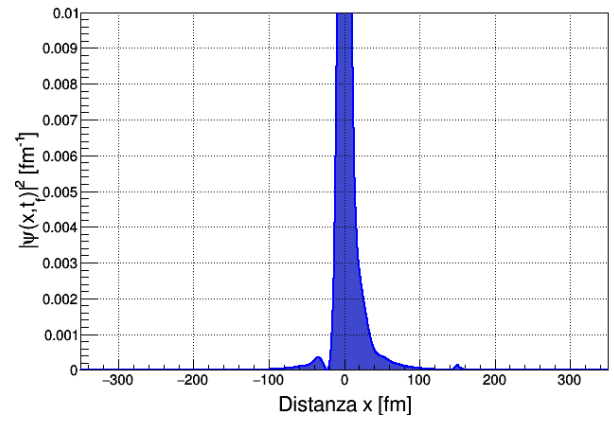
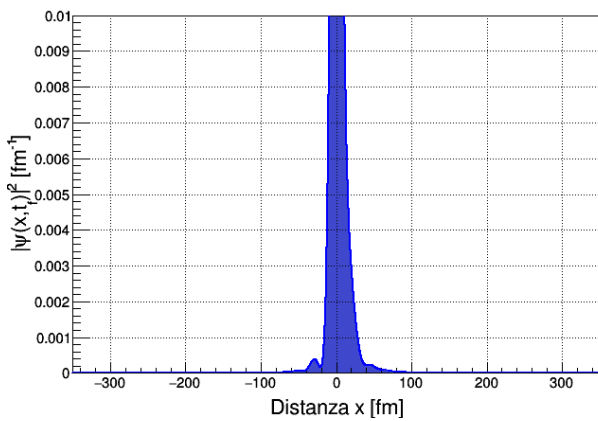


Figura 2.25: Evoluzione temporale di $\psi(x,t)$ con $E_P = 5$ MeV

Figura 2.26: Breakup finale nel caso $E_P = 2$ MeVFigura 2.27: Breakup finale nel caso $E_P = 5$ MeVFigura 2.28: Breakup finale nel caso $E_P = 10$ MeVFigura 2.29: Breakup finale nel caso $E_P = 15$ MeVFigura 2.30: Breakup finale nel caso $E_P = 25$ MeV

Dai risultati ottenuti, si può concludere che con i parametri scelti il potenziale proiettile attrattivo, molto rapido nel transitare attraverso l'intervallo interessato dall'interazione, rappresenta una

perturbazione con bassa probabilità di variare lo stato iniziale.

2.3 Urto inelastico e trasferimento

Negli urti analizzati in seguito il neutrone si trova inizialmente nello stato fondamentale del potenziale bersaglio, che tuttavia non è l'unico: si ha anche un livello di energia eccitato (uno stato debolmente legato). Ciò aggiunge al processo fisico la possibilità di urto inelastico, per cui lo studio avviene nuovamente variando l'energia asintotica del proiettile, ma la presenza di questa nuova variabile influenzerà i risultati, modificandone le aspettative rispetto al caso precedente.

| Bersaglio | Proiettile |
|-----------------------------------|---|
| $V_0 = -7.0$ MeV | $V_0 = -24.0$ MeV |
| $R = 3.5$ fm | $R = 3.0$ fm |
| $a = 0.6$ fm | $a = 0.6$ fm |
| Livelli di energia del bersaglio | $E_0 = -4.877$ MeV $E_1 = -0.703$ MeV |
| Livelli di energia del proiettile | $E_0 = -19.261$ MeV $E_1 = -9.336$ MeV $E_2 = -0.732$ MeV |
| Minima distanza | $x_0 = 6.6$ fm $\rho = 2$ fm |

Tabella 2.12: I potenziali e i parametri cinematici dell'urto

Autostati legati

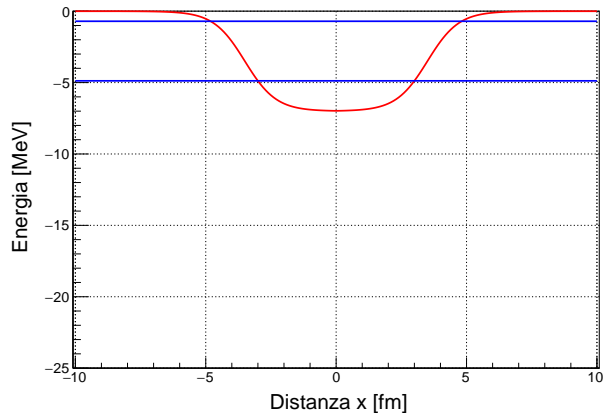


Figura 2.31: Il potenziale V_T (in rosso) e i suoi livelli energetici (in blu)

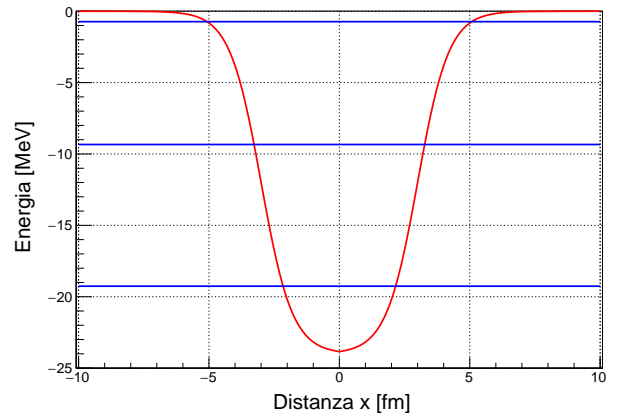


Figura 2.32: Il potenziale V_P (in rosso) e i suoi livelli energetici (in blu)

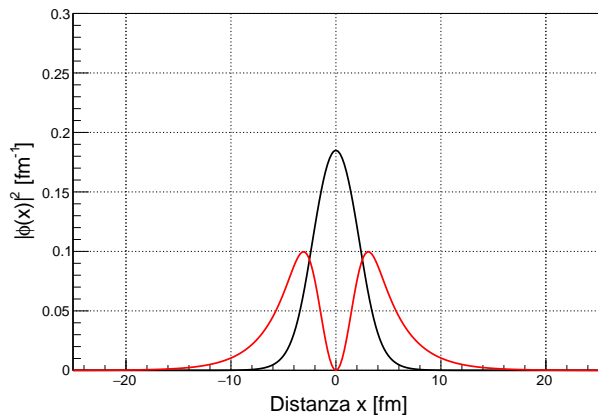


Figura 2.33: Gli autostati legati di V_T

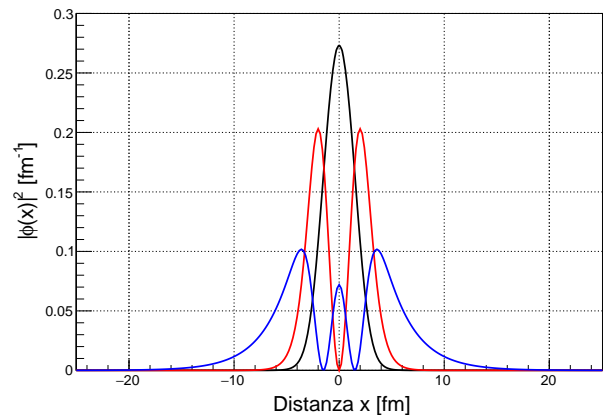


Figura 2.34: Gli autostati legati di V_P

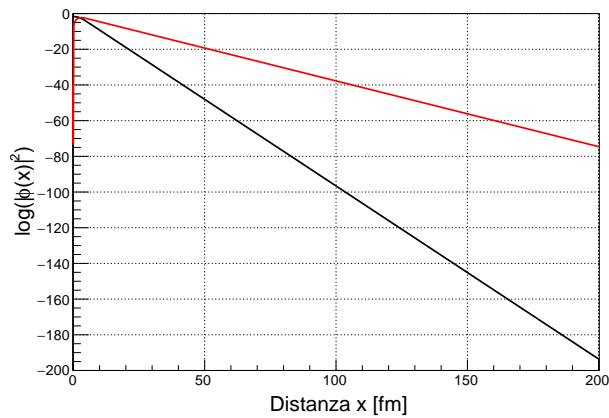


Figura 2.35: I logaritmi delle $|\phi(x)|^2$ relative agli stati del bersaglio

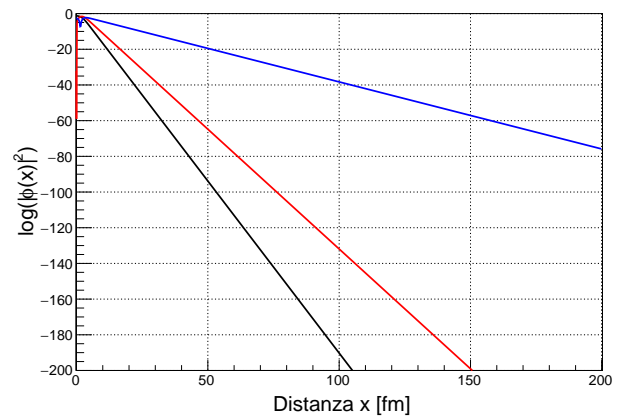


Figura 2.36: I logaritmi delle $|\phi(x)|^2$ relative agli stati del proiettile

Evoluzione del sistema

Il valore scelto di x_{start} in questo caso è $x_{start} = 110$ fm.

Metodo TDSE

Per il metodo TDSE, nel calcolo di $\mathcal{P}_{b.u.2}$, si lavora con $N_c = 200$ stati non legati relativi a V_T , ottenuti con metodo degli pseudostati $\phi_i^{HO}(x)$, con $N = 300$.

| Energia asintotica E_P | 1.0 MeV | 1.8 MeV | 2.3 MeV | 2.6 MeV | 3.8 MeV | 5.0 MeV |
|--------------------------|---------------------|---------------------|---------------------|---------------------|-----------------|-----------------|
| Velocità asintotica v | $0.046 \cdot c$ | $0.062 \cdot c$ | $0.070 \cdot c$ | $0.074 \cdot c$ | $0.090 \cdot c$ | $0.103 \cdot c$ |
| \mathcal{P}_{el} | 0.478 | 0.361 | 0.393 | 0.421 | 0.530 | 0.605 |
| \mathcal{P}_{in} | 0.056 | 0.103 | 0.115 | 0.117 | 0.106 | 0.087 |
| \mathcal{P}_{tr-0} | 0.034 | 0.212 | 0.012 | 0.078 | 0.124 | 0.024 |
| \mathcal{P}_{tr-1} | 0.299 | 0.136 | 0.246 | 0.193 | 0.134 | 0.161 |
| \mathcal{P}_{tr-2} | 0.077 | 0.079 | 0.096 | 0.076 | 0.056 | 0.063 |
| \mathcal{P}_{tr} | 0.409 | 0.426 | 0.354 | 0.347 | 0.313 | 0.247 |
| $\mathcal{P}_{b.u.1}$ | 0.056 | 0.109 | 0.138 | 0.115 | 0.051 | 0.061 |
| $\mathcal{P}_{b.u.2}$ | $1.1 \cdot 10^{-3}$ | $4.3 \cdot 10^{-3}$ | $6.7 \cdot 10^{-3}$ | $8.0 \cdot 10^{-3}$ | 0.012 | 0.015 |

Tabella 2.13: Risultati ottenuti con metodo TDSE

Metodo dei canali accoppiati

Il calcolo di $\mathcal{P}_{b.u.2}$ viene svolto con $N_c = 15$ stati del continuo ottenuti con metodo degli pseudostati $\phi_i^{HO}(x)$, ponendo $N = 300$.

| Energia asintotica E_P | 1.0 MeV | 1.8 MeV | 2.3 MeV | 2.6 MeV | 3.8 MeV | 5.0 MeV |
|--------------------------|---------------------|---------------------|---------------------|---------------------|---------------------|---------------------|
| Velocità asintotica v | $0.046 \cdot c$ | $0.062 \cdot c$ | $0.070 \cdot c$ | $0.074 \cdot c$ | $0.090 \cdot c$ | $0.103 \cdot c$ |
| \mathcal{P}_{el} | 0.834 | 0.782 | 0.736 | 0.712 | 0.694 | 0.680 |
| \mathcal{P}_{in} | 0.023 | 0.013 | 0.012 | 0.012 | 0.015 | 0.023 |
| \mathcal{P}_{tr-0} | 0.040 | 0.024 | $2.3 \cdot 10^{-3}$ | 0.011 | $8.8 \cdot 10^{-3}$ | $1.1 \cdot 10^{-3}$ |
| \mathcal{P}_{tr-1} | $1.1 \cdot 10^{-3}$ | $4.3 \cdot 10^{-3}$ | $1.1 \cdot 10^{-3}$ | $8.8 \cdot 10^{-3}$ | $3.3 \cdot 10^{-4}$ | $3.4 \cdot 10^{-3}$ |
| \mathcal{P}_{tr-2} | $8.1 \cdot 10^{-4}$ | $2.0 \cdot 10^{-3}$ | $6.0 \cdot 10^{-3}$ | $3.8 \cdot 10^{-3}$ | $4.8 \cdot 10^{-4}$ | $5.2 \cdot 10^{-3}$ |
| \mathcal{P}_{tr} | 0.042 | 0.031 | $9.4 \cdot 10^{-3}$ | 0.023 | 0.014 | $9.7 \cdot 10^{-3}$ |
| $\mathcal{P}_{b.u.2}$ | 0.118 | 0.193 | 0.254 | 0.271 | 0.293 | 0.292 |

Tabella 2.14: Risultati ottenuti con metodo dei canali accoppiati

Metodo perturbativo per gli stati del proiettile

Con le medesime impostazioni presentate nel caso dei metodi accoppiati, si offre nella tabella di seguito la soluzione proposta dal metodo perturbativo.

| Energia asintotica E_P | 1.0 MeV | 1.8 MeV | 2.3 MeV | 2.6 MeV | 3.8 MeV | 5.0 MeV |
|--------------------------|---------------------|---------------------|-----------------|-----------------|-----------------|-----------------|
| Velocità asintotica v | $0.046 \cdot c$ | $0.062 \cdot c$ | $0.070 \cdot c$ | $0.074 \cdot c$ | $0.090 \cdot c$ | $0.103 \cdot c$ |
| \mathcal{P}_{tr-0} | $1.0 \cdot 10^{-3}$ | $5.9 \cdot 10^{-3}$ | 0.011 | 0.014 | 0.029 | 0.043 |
| \mathcal{P}_{tr-1} | 0.472 | 0.573 | 0.572 | 0.562 | 0.503 | 0.443 |
| \mathcal{P}_{tr-2} | 0.089 | 0.107 | 0.106 | 0.104 | 0.092 | 0.080 |
| \mathcal{P}_{tr} | 0.562 | 0.686 | 0.689 | 0.680 | 0.624 | 0.566 |

Tabella 2.15: Risultati ottenuti con metodo perturbativo

Metodo perturbativo per gli stati del bersaglio

Si propone infine la soluzione del metodo perturbativo applicato al livello eccitato di energia del bersaglio.

| Energia asintotica E_P | 1.0 MeV | 1.8 MeV | 2.3 MeV | 2.6 MeV | 3.8 MeV | 5.0 MeV |
|--------------------------|-----------------|-----------------|-----------------|-----------------|-----------------|-----------------|
| Velocità asintotica v | $0.046 \cdot c$ | $0.062 \cdot c$ | $0.070 \cdot c$ | $0.074 \cdot c$ | $0.090 \cdot c$ | $0.103 \cdot c$ |
| \mathcal{P}_{in} | 0.031 | 0.020 | 0.016 | 0.015 | 0.016 | 0.021 |

Tabella 2.16: Risultati ottenuti con metodo perturbativo

Conclusioni

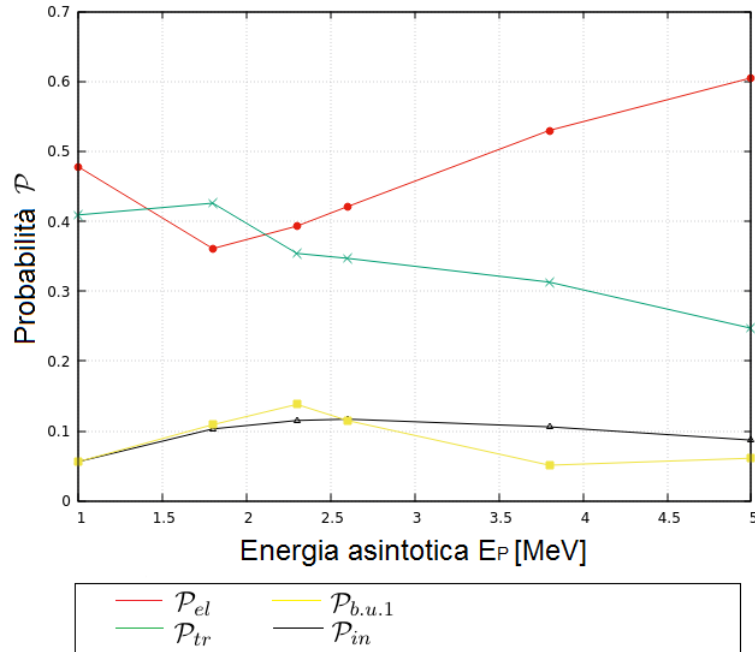


Figura 2.37: Probabilità ottenute con il metodo TDSE

In questi urti la probabilità di trasferimento presenta valori molto più elevati rispetto ai casi precedenti, mentre gli eventi di breakup, secondo la soluzione proposta dal metodo TDSE, sono risultati

trascurabili.

La parte della funzione d'onda che rimane nel bersaglio è combinazione degli stati ϕ_0 e ϕ_1 , corrispondenti rispettivamente agli autovalori E_0 e E_1 , e per i valori dell'energia asintotica compresi tra 1.5 MeV e 4.0 MeV la componente di ϕ_1 è abbastanza considerevole.

I valori dati dal metodo dei canali accoppiati e dal metodo perturbativo sono stati in forte contrasto con la stima data dal metodo TDSE. Per quanto riguarda la soluzione perturbativa, va comunque sottolineato, nuovamente, che le stime fornite dal metodo perturbativo possono essere considerate accettabili solo in presenza di piccole perturbazioni, e di trascurabili effetti a ordini superiori, condizione che non si riscontra in questo caso.

Concludiamo riportando la forma grafica dell'evoluzione temporale di $\psi(x, t)$ per i valori di energia asintotica del proiettile $E_P = 1.0$ MeV e $E_P = 1.8$ MeV.

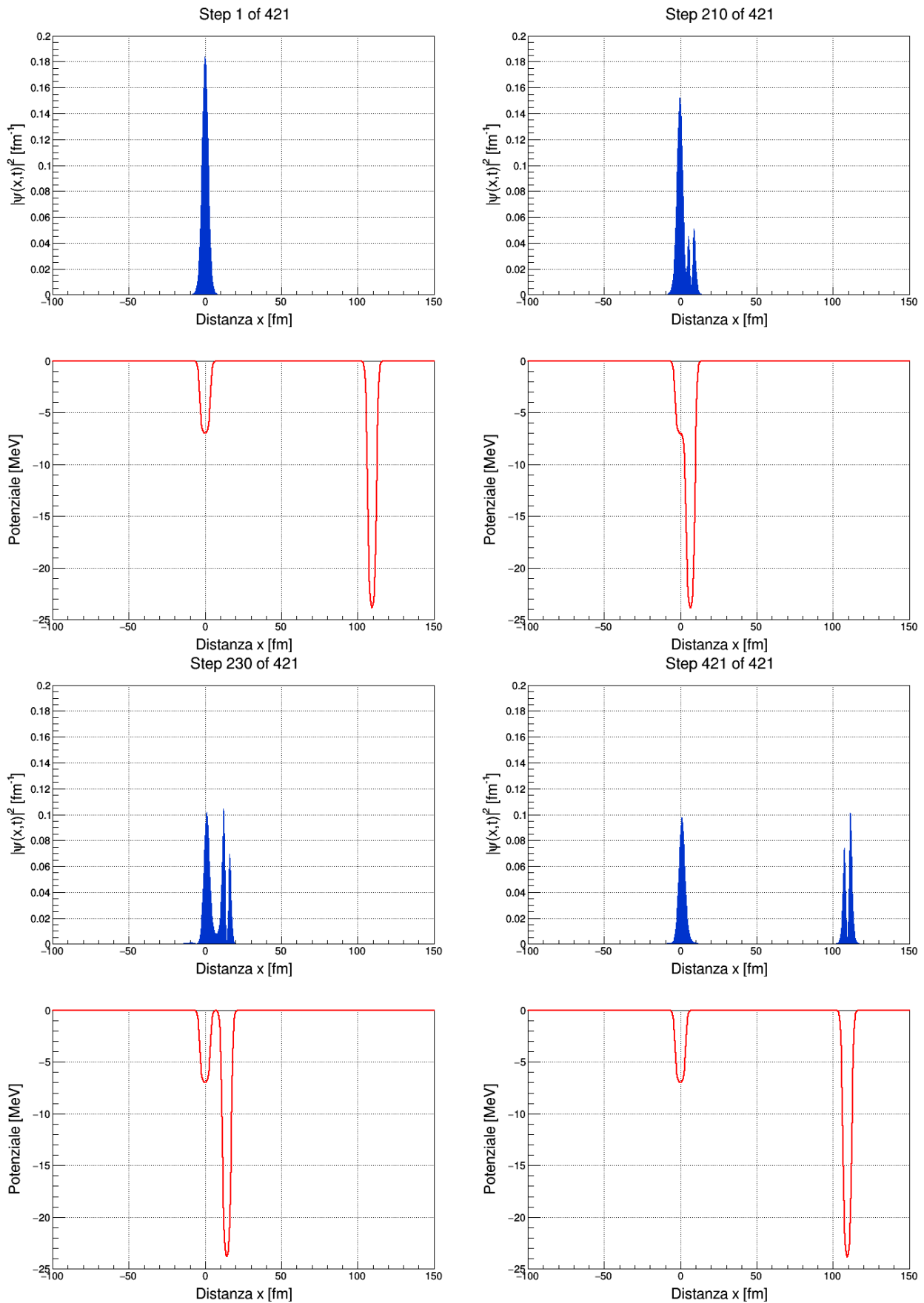


Figura 2.38: Evoluzione temporale di $\psi(x, t)$ con $E_P = 1.0$ MeV

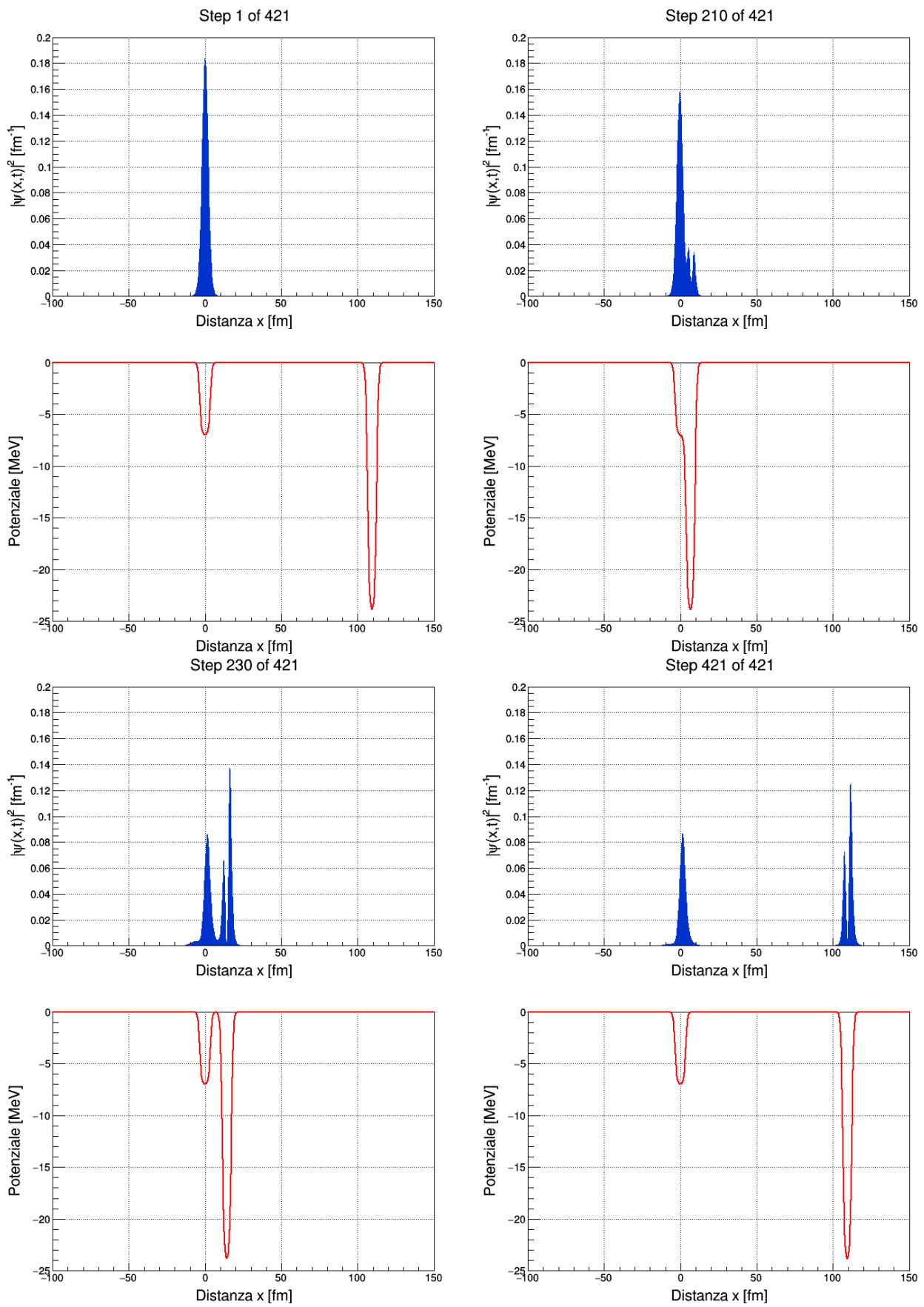


Figura 2.39: Evoluzione temporale di $\psi(x,t)$ con $E_P = 1.8$ MeV

Bibliografia

- [1] L. Moschini, PhD thesis, www.infn.it/thesis/PDF/getfile.php?filename=11604-Moschini-dottorato.pdf (2017)
- [2] A. Bohr and B. R. Mottelson, Nuclear Structure, vol. 1, Benjamin (1969)
- [3] C. A. Moyer, Comp. Sci. Eng. **8**, 32 (2006).
- [4] H. Esbensen, R. A. Broglia, and A. Winther, Ann. Phys. **146**, 149 (1983)
- [5] H. C. Brinkman and H. A. Kramers, Proc. Acad. Sci. Amsterdam **33**, 973 (1930)