Università degli Studi di Padova
Dipartimento di Matematica "Tullio Levi-Civita"
Corso di Laurea Magistrale in Matematica
a. a. 2018/19

Tesi di Laurea

Tassi di interesse
e
Modelli

5 luglio 2019

Candidato
Luca Zorzi 1114459

Professore
Wolfgang J. Runggaldier

Al mio caro Papà
e
alla mia cara Mamma

Indice

Introduzione

Tutti prima o poi ci siamo trovati di fronte a dover richiedere un prestito in denaro, o per la casa, o per l'auto, o per altri motivi. Quindi ci siamo imbattuti nel *tasso di interesse*, che il creditore ci ha proposto. Esistono vari tipi di tassi di interesse: interbancari, governativi, istantanei, futuri. Legati a questi ci sono gli strumenti finanziari come i derivati dei tassi: *caps*, *floors*, *swaptions* solo per citarne alcuni.
Una delle questioni fondamentali che ci proponiamo è quella di valutare tali derivati, ovvero di calcolarne il prezzo. Per fare ciò consideriamo il valore del fattore di sconto, ovvero la conoscenza di un continuo dei prezzi $p(t, T)$ che associa ad ogni istante t il prezzo di un Bond cioè un titolo di debito emesso da un ente pubblico che garantisce un'unità monetaria alla scadenza T .
Nel capitolo 1 definiremo i concetti chiave per elaborare i modelli matematici dei tassi sviluppati nei capitoli 2 e 3. Definiremo i tassi *Libor/Euribor*, *OIS* e prenderemo in considerazione i derivati lineari: *FRA*, *Swaps*, *Basis Swaps* e quelli non lineari: *Caps*, *Floors* e *Swaptions*.
Nel capitolo 2 studieremo a fondo i modelli esponenziali affini (*CIR* e *Vasicek*).
Nel capitolo 3 approfondiremo i modelli esponenziali quadratici, e noteremo le differenze rispetto ai modelli affini.

Capitolo 1

Tassi e loro derivati

Approccio economico

La crisi economica che si è propagata a livello mondiale dal 2007 al 2011 ha avuto un impatto notevole su tutti i mercati finanziari, sul loro funzionamento e anche sullo sviluppo dei modelli matematici. Tra i principali fattori della crisi figurano la minaccia di una recessione in tutto il mondo, una crisi creditizia e bancaria con il conseguente crollo dei mercati borsistici. Con l'aggravarsi della crisi sono subentrate: la crisi di fiducia e la crisi di liquidità . La prima dovuta al fatto che le banche avevano smesso di prestarsi soldi a vicenda ha innescato immediatamente la seconda. Entrambi i rischi hanno interessato i tassi di interesse come l'Euribor, Libor e (OIS). Si possono osservare spread importanti tra diversi tenor all'interno dello stesso tasso.
I modelli dei tassi di interesse pre-crisi sono: quelli a breve termine, l'approccio (HJM) $Heath - Jarrow - Morton$ e i modelli Libor con i tassi forward.
Il primo derivato che consideriamo è il (FRA) $Forward\ Rate\ Agreement$, fondamentale perche' il suo prezzo è legato al tasso Libor futuro.
Ricordiamo che il tasso Libor è il tasso più conosciuto al mondo, acronimo di $London\ Interbank\ Offered\ Rate$, riflette i costi di finanziamento a breve termine delle principali banche attive a Londra. In altre parole un gruppo di banche significative presenta i tassi che poi vengono combinati per fornire il tasso Libor. Il tasso Libor viene prodotto ogni giorno lavorativo alle 11 am, per cinque valute diverse (dollaro americano, euro, sterlina inglese, yen giapponese e franco svizzero) e sette scadenze (1 giorno,1 settimana,1,2,3,6,12 mesi). La quotazione giornaliera non è altro che la media aritmetica di tutte le richieste delle banche centrali. In Eurozona un tasso simile al Libor è l'Euribor determinato da un pannello di 26 banche. Questo tasso è calcolato per otto scadenze (1,2 settimane, 1,2,3,6,9,12 mesi) giornalmente alle 11 am.
Il tasso di riferimento per la scadenza più breve di un giorno nell'Eurozona è il tasso Eonia. Questo è calcolato come media ponderata di tutte le operazioni di prestito overnight non garantite nel mercato interbancario effettuate dalle stesse banche del-

l'Euribor. Un tasso overnight corrispondente al tasso Eonia negli Stati Uniti è il tasso dei Fondi Federali, che è la media ponderata di tutte le transazioni overnight tra i saldi di deposito detenuti presso la Federal Reserve.

Approccio modellistico

Generalmente un tasso di interesse è definito con un bond $p\left(t,T\right)$, cioè un contratto finanziario che consegna un'entità di liquidità alla data di scadenza $T>0$.
Una *struttura tenor* discreta $\mathcal{T}^x$ con tenor x è una sequenza finita di date:

$$\mathcal{T}^x = \{0 \leq T_0^x < T_1^x < ... < T_M^x < T^*\} \tag{1.1}$$

Denotiamo con $\delta_k^x = T_k^x - T_{k-1}^x$ la lunghezza dell'intervallo $(T_{k-1}^x, T_k^x]$, per $k = 1, ..., M_x$. Il tenor x va da un giorno a dodici mesi.
Supponiamo che al tempo 0 un investimento abbia costo nullo e preveda di pagare 1 al tempo T_{k-1}^x per ricevere $\dfrac{p^x\left(0,T_{k-1}^x\right)}{p^x\left(0,T_k^x\right)}$ al tempo T_k^x.
Definiamo adesso il tasso a termine a capitalizzazione (simply compounded forward rate). Più precisamente indichiamo con $F(0;T_{k-1}^x,T_k^x)$ il tasso forward semplice annuale valutato per il periodo $(T_{k-1}^x, T_k^x]$ e definito, in coerenza con i prezzi dei bonds, dalla formula di capitalizzazione:

$$\frac{p^x\left(0,T_{k-1}^x\right)}{p^x\left(0,T_k^x\right)} = 1 + \delta_k^x F(0;T_{k-1}^x,T_k^x) \tag{1.2}$$

o equivalentemente da:

$$F(0;T_{k-1}^x,T_k^x) = \frac{1}{\delta_k^x(T_k^x - T_{k-1}^x)}\left(\frac{p^x(0,T_{k-1}^x)}{p^x(0,T_k^x)} - 1\right) \tag{1.3}$$

Questa definizione è basata sul fatto che l'investimento di un euro in T_{k-1}^x al tasso semplice $F(0;T_{k-1}^x,T_k^x)$ deve dare lo stesso risultato dell'investimento sopra descritto che coinvolge solo i bonds.
Consideriamo il tasso forward istantaneo:

$$f(t,T) = -\frac{\partial}{\partial T}\log p(t,T) \tag{1.4}$$

con tasso spot $r_t = f(t,T)$ chiamato il *tasso breve*, con il quale possiamo definire il conto monetario o numeraire come:

$$B_t = \exp\left(\int_0^t r_s ds\right) \tag{1.5}$$

ossia il valore di un investimento che consiste nel rivalutare il capitale iniziale in ogni singolo periodo al tasso breve.

Assenza di arbitraggio e martingala

Definizione 1.1. Una misura martingala con numeraire B è una misura di probabilità Q equivalente a P, rispetto alla quale i processi dei prezzi scontati $\widehat{S}_t$ sono delle martingale, ossia vale:

$$\widehat{S}_t = E^Q \left\{ \widehat{S}_{t+1} \mid \mathcal{F}_t \right\} \tag{1.6}$$

con $0 \leq t < T$ e

$$\widehat{S}_t = \frac{S_t}{B_t} \tag{1.7}$$

sono i processi dei prezzi scontati. S_t può in particolare essere dato da $p(t, T)$.

In un modello di mercato libero da arbitraggi, sia Q una misura martingala con numeraire B_t. Per i prezzi derivati conviene usare, in modo equivalente, una misura Q^T associata a $p(t, T)$, cioè i processi $t \to \dfrac{p(t,T)}{p(t,S)}$ sono delle Q^S martingale.
Introducendo la derivata di *Radon-Nikodym* per le misure Q^S e Q^T si ha:

$$\left.\frac{dQ^T}{dQ^S}\right|_{F_t} = \frac{p(t,T)}{p(t,S)} \frac{p(0,S)}{p(0,T)} \tag{1.8}$$

Useremo la tradizionale modellizzazione sotto una misura di martingala Q, di conseguenza si ha:

$$p(t,T) = E^Q \left\{ \frac{B_t}{B_T} \mid \mathcal{F}_t \right\} = E^Q \left\{ \exp\left[-\int_t^T r_s ds \right] \mid \mathcal{F}_t \right\} \tag{1.9}$$

Definizione 1.2. Un tasso a termine a capitalizzazione semplice (*simply compounded forward rate*) al tempo $t \geq 0$ per un intervallo futuro $[T, S]$ è il tasso dato da:

$$F(t; T, S) = \frac{1}{S - T} \left(\frac{p(t, T)}{p(t, S)} - 1 \right) = E^{Q^S} \left\{ F(T; T, S) \mid \mathcal{F}_t \right\} \tag{1.10}$$

dove il tasso $F(t; T, S)$ è calcolato come speranza attesa rispetto alla misura Q^S con maturità S come numerario.

Prima della crisi il tasso Libor era definito da:

$$L(T; T, S) = F(T; T, S) = \frac{1}{S - T} \left(\frac{1}{p(T, S)} - 1 \right) \tag{1.11}$$

dove $L(T; T, S)$ è il tasso Libor al tempo T per il periodo $[T, S]$. Quindi il tasso $F(t; T, S)$ veniva chiamato tasso Libor forward e denotato con $L(t; T, S)$. Di conseguenza il tasso Libor forward era dato dalla speranza condizionata del tasso Libor spot sotto la misura martingala Q^S:

$$L(t; T, S) = E^{Q^S} \left\{ L(T; T, S) \mid \mathcal{F}_t \right\} = \frac{1}{S - T} \left(\frac{p(t, T)}{p(t, S)} - 1 \right) = F(t; T, S) \tag{1.12}$$

Nel mercato post-crisi l'ipotesi che il tasso Libor sia privo di rischi non è più sostenibile e quindi la (1.11) non vale più:

$$L\left(T;T,S\right) \neq \frac{1}{S-T}\left(\frac{1}{p\left(T,S\right)}-1\right) \tag{1.13}$$

Derivati lineari.
Analizziamo per primi i derivati lineari, come i (FRA) e gli Swap (Libor, OIS, Basis). Prima della crisi questi erano determinati dai prezzi dei bonds, adesso dai prezzi degli OIS e dai tassi Libor.

Definizione 1.3. Un contratto a termine (FRA) è un derivato OTC che consente al titolare di bloccare in qualsiasi momento $0 \leq t \leq T$ il tasso di interesse tra la data di lancio T e la scadenza $S > T$ ad un valore fissato R. Alla scadenza S, viene effettuato un pagamento basato su R e viene ricevuto quello basato sul tasso variabile (in genere il Libor). L'ammontare è N.

Il pagamento alla maturità S di un (FRA), con ammontare N è uguale a:

$$P^{FRA}(S;T,S,R,N) = N(S-T)(L(T;T,S)-R) \tag{1.14}$$

dove $L(T;T,S)$ è il tasso spot Libor per il tempo $[T,S]$. Quindi il prezzo di un (FRA) al tempo $t \leq T$ è calcolato come la speranza attesa rispetto alla misura Q^S avente come numerario $p(t,S)$:

$$P^{FRA}(t;T,S,R,N) = N(S-T)p(t,S)E^{Q^S}\left\{L\left(T;T,S\right)-R \mid \mathcal{F}_t\right\} \tag{1.15}$$

Di conseguenza otteniamo che il valore di un (FRA) al tempo t è semplicemente:

$$P^{FRA}(t;T,S,R,N) = N(S-T)p(t,S)(L(t;T,S)-R) \tag{1.16}$$

Notando la connessione pre-crisi dei tassi Libor e dei prezzi di un bond introduciamo la seguente:

$$L(T;T,S) = \frac{1}{S-T}\left(\frac{1}{\overline{p}(T,S)}-1\right) \tag{1.17}$$

e di conseguenza:

$$L\left(t;T,S\right) = E^{Q^S}\left(\frac{1}{S-T}\left(\frac{1}{\overline{p}(T,S)}-1\right) \mid \mathcal{F}_t\right) \tag{1.18}$$

dove $\overline{p}(T,S)$ può essere interpretato come il prezzo di un bond fittizio rischioso influenzato dal Libor e non scambiato.
In assenza di arbitraggio al tempo t, usando la misura martingala Q^S si ha per il prezzo di un FRA:

$$P^{FRA}\left(t,T,S,R\right) = p\left(t,S\right)\left(S-T\right)E^{Q^S}\left\{L\left(T;T,S\right)-R \mid \mathcal{F}_t\right\} \tag{1.19}$$

dove R è il tasso fisso.

Definizione 1.4. Il tasso Libor forward al tempo $t \geq 0$ per il tempo futuro $[T, S]$, dove $t \leq T \leq S$, è il tasso dato da:

$$L(t; T, S) = E^{Q^S}\{L(T; T, S) \mid \mathcal{F}_t\} \tag{1.20}$$

La cruciale differenza tra prima e dopo la crisi sta nel fatto che il tasso Libor forward è:

$$L(t; T, S) = E^{Q^S}\{L(T; T, S) \mid \mathcal{F}_t\} \neq \frac{1}{S-T}\left(\frac{p(t, T)}{p(t, S)} - 1\right) = F(t; T, S) \tag{1.21}$$

Lo spread post-crisi è quindi:

$$S(t; T, S) = L(t; T, S) - F(t; T, S) \tag{1.22}$$

Lo spread dipende da $\Delta = S - T$, cioè la durata del periodo a cui si applica il Libor, noto come *tenor*.
In seguito alla crisi finanziaria i tassi di interesse hanno iniziato a divergere su tenor diversi in maniera sostanziale, introducendo vari spread nella misurazione di questa divergenza. Il primo tipo di spread è noto come spread Libor-OIS. Un altro è lo spread Euribor-Eonia che al culmine della crisi è arrivato a superare i 200 punti. I rischi dovuti all'allargamento degli spread sono congiunti al rischio interbancario e di conseguenza al rischio di fallimento e di liquidità. Il deterioramento del credito durante un prestito basato sul Libor è maggiore per tenor più lunghi.

Definizione 1.5. Uno *swap* è un contratto finanziario che contempla lo scambio di interessi calcolati su un determinato importo chiamato N. Il più diffuso swap è quello fisso contro variabile dato da Libor.
Payer Swap è un contratto che impegna il possessore a pagare ad ogni scadenza gli interessi ad un tasso fisso R per ricevere gli interessi a tasso variabile Libor.
Receiver Swap è un contratto finanziario in cui si riceve al tasso fisso R e si paga al tasso variabile Libor.

Il prezzo di un Payer swap, per esempio, è dato da:

$$P^{Sw}(t; T_0, T_n, R, N) = N \sum_{k=1}^{n} \delta_k p(t, T_k) E^{Q^k}\{L(T_{k-1}; T_{k-1}, T_k) - R \mid \mathcal{F}_t\} \tag{1.23}$$

$$= N \sum_{k=1}^{n} P^{FRA}(t; T_{k-1}, T_k, R, 1) \tag{1.24}$$

$$= N \sum_{k=1}^{n} \delta_k p(t, T_k)\{L(t; T_{k-1}, T_k) - R\} \tag{1.25}$$

In seguito chiameremo:

$$p^c(t,T_n) = N\sum_{k=1}^{n}\delta_k p(t,T_k)R \tag{1.26}$$

il valore della *gamba fissa* e:

$$p^{float}(t,T_n) = N\sum_{k=1}^{n}\delta_k p(t,T_k)L(t;T_{k-1},T_k) \tag{1.27}$$

il valore della *gamba variabile*.
Il tasso $R(t;T_0,Tn)$ che rende il valore P^{Sw} dello swap in $t \leq T_0$ uguale a zero è:

$$R(t;T_0,T_n) = \frac{\sum_{k=1}^{n}\delta_k p(t,T_k)L(t;T_{k-1},T_k)}{\sum_{k-1}^{n}\delta_k p(t,T_k)} \tag{1.28}$$

e viene chiamato tasso swap (*swap rate*).

Overnight indexed swaps

Nel OIS le controparti scambiano un flusso di pagamenti a tasso fisso per un flusso di pagamenti a tasso variabile collegato a un tasso overnight. Fissato il tasso R, il prezzo P^{OIS}_{fix} della *gamba fissa* è:

$$P^{OIS}(t;T_0,T_n,R,N)_{fix} = NR\sum_{k=1}^{n}\delta_k p(t,T_k) \tag{1.29}$$

mentre il prezzo P^{OIS}_{float} della *gamba variabile* è:

$$P^{OIS}(t;T_0,T_n,R,N)_{float} = N\sum_{k=1}^{n}\delta_k p(t,T_k)R^{ON}(t;T_{k-1},T_k) \tag{1.30}$$

dove si definisce:

$$R^{ON}(T_{k-1},T_k) = \frac{1}{\delta_k}\left(\prod_{j=1}^{n_k}\left[1+\delta_{t^k_{j-1},t^k_j}R^{ON}(t^k_{j-1},t^k_j)\right]-1\right) \tag{1.31}$$

e $T_{k-1} = t^k_0 < t^k_1 < ... < t^k_{n_k} = T_k$ è una suddivisione in date più piccole e $\delta_{t^k_{j-1},t^k_j} = t^k_j - t^k_{j-1}$, dove $R^{ON}(t^k_{j-1},t^k_j)$ è il tasso overnight per il periodo $(t^k_{j-1},t^k_j]$. Quindi:

$$R^{ON}(t;T_{k-1},T_k) = \frac{1}{\delta_k}E^{Q_{T_k}}\left\{\left(\prod_{j=1}^{n_k}\left[1+\delta_{t^k_{j-1},t^k_j}R^{ON}(t^k_{j-1},t^k_j)\right]-1\right) \mid \mathcal{F}_t\right\} \tag{1.32}$$

e dopo vari cambi di misura illustrati in [1] si arriva a:

$$= \frac{1}{\delta_k}\left(\frac{p(t,T_{k-1})}{p(t,T_k)}-1\right) \tag{1.33}$$

Di conseguenza:

$$P^{OIS}(t;T_0,T_n,R,N)_{float} = N\sum_{k=1}^{n}\delta_k p(t,T_k)\frac{1}{\delta_k}\left(\frac{p(t,T_{k-1})}{p(t,T_k)}-1\right) \tag{1.34}$$

$$= N(p(t,T_0)) - p(t,T_n) \tag{1.35}$$

Quindi il valore al tempo t per $t \leq T$ del OIS (tasso fisso pagato e tasso variabile ricevuto) è:

$$P^{OIS}(t;T_0,T_n,R,N) = N(p(t,T_0)-p(t,T_n)-R\sum_{k=1}^{n}\delta_k p(t,T_k)) \tag{1.36}$$

Il tasso $R^{OIS}(t;T_0,T_n)$ per $t \leq T_0$ è il tasso R tale che il valore del OIS al tempo t uguale a zero, cioè $P^{OIS}(t;T_0,T_n,R,N)=0$ dato da:

$$R^{OIS}(t;T_0,T_n) = \frac{p(t,T_0)-p(t,T_n)}{\sum_{k=1}^{n}\delta_k p(t,T_k)} \tag{1.37}$$

Basis swaps

Definizione 1.6. Un *basis swap* è un contratto finanziario dove vengono scambiati due pagamenti variabili ai tassi Libor di diversi tenor, primo tenor dato da $\mathcal{T}^1 = [T_0^1 < ... < T_{n1}^1]$ e secondo tenor dato da $\mathcal{T}^2 = [T_0^2 < ... < T_{n2}^2]$. Gli istanti iniziali e finali coincidono cioè $T_0^1 = T_0^2 \geq 0$, $T_{n1}^1 = T_{n2}^2$ è la maturità del basis swap, e $\mathcal{T}^1 \subset \mathcal{T}^2$.

Il valore al tempo t del basis swap per $t \leq T_0^1 = T_0^2$ è dato da:

$$\begin{aligned} P^{BSw}(t;\mathcal{T}^1,\mathcal{T}^2,N) = N(&\sum_{i=1}^{n_1}\delta_i^1 p(t,T_i^1)L(t;T_{i-1}^1,T_i^1) \\ &-\sum_{j=1}^{n_2}\delta_j^2 p(t,T_j^2)L(t;T_{j-1}^2,T_j^2)) \end{aligned} \tag{1.38}$$

Supponendo che il più piccolo tenor corrisponde a $\mathcal{T}^2$, il tasso variabile $L(T_{j-1}^2;T_{j-1}^2,T_j^2)$ in $\mathcal{T}^2$ viene sostituito da $L(T_{j-1}^2;T_{j-1}^2,T_j^2)+S$ per ogni $j=1,...,n_2$, dato che per un tenor più piccolo il costo è più alto in quanto più conveniente, e S è lo spread del basis swap, il cui prezzo è $S^{BSw}(t;\mathcal{T}^1,\mathcal{T}^2)$ che rende $P^{BSw}(t;\mathcal{T}^1,\mathcal{T}^2,S,N)=0$ e cioè:

$$S^{BSw}(t;\mathcal{T}^1,\mathcal{T}^2) = \frac{\sum_{i=1}^{n_1}\delta_i^1 p(t,T_i^1)L(t;T_{i-1}^1,T_i^1) - \sum_{j=1}^{n_2}\delta_j^2 p(t,T_j^2)L(t;T_{j-1}^2,T_j^2)}{\sum_{j=1}^{n_2}\delta_j^2 p(t,T_j^2)} \tag{1.39}$$

Nel periodo pre-crisi i tassi Libor erano definiti usando i bonds zero coupon privi di rischio come:

$$\left(L(t;T,T+\Delta) = \frac{1}{\Delta}\left(\frac{p(t,T)}{p(t,T+\Delta)}-1\right)\right) \tag{1.40}$$

ed essendo martingale, il valore del basis swap diventa:

$$P^{BSw}(t;\mathcal{T}^1,\mathcal{T}^2,N) = N((p(t,T_0^1) - p(t,T_{n1}^1)) - (p(t,T_0^2) - p(t,T_{n2}^2))) = 0 \quad (1.41)$$

assumendo che $T_0^1 = T_0^2$ e $T_{n1}^1 = T_{n2}^2$.

Derivati non lineari

Alcuni dei derivati sui tassi di interesse non lineari sono, per esempio, *cap*, i $floor$ e le *swaption*. I cap (floor) sono costituiti da una serie di opzioni call (put) su un tasso di interesse variabile e le swaption sono opzioni che danno il diritto al possessore, ma non l'obbligo di esercitare un *interest rate swap*.

Caps e floors

Ricordiamo che il Cap, rispettivamente Floor, è un derivato finanziario definito su una struttura di tenor discreto. Chi acquista un Cap, rispettivamente Floor, ha il diritto di un pagamento alla fine di ogni periodo dei tenor in cui il tasso di interesse sta al di sopra, rispettivamente al di sotto, un livello strike K. Questi pagamenti sono la parte positiva della differenza tra il tasso di interesse e lo strike per il Cap, rispettivamente una parte positiva della differenza tra lo strike e il tasso di interesse del Floor. Ogni Cap, rispettivamente Floor, possono essere scomposti in opzioni che si applicano ai sottoperiodi, chiamati Caplets, rispettivamente Floorlets.

Definizione 1.7. Un *Caplet* con strike K, con inizio $T \geq 0$ e scadenza $T + \Delta$, con $\Delta > 0$, su N nominale è un contratto finanziario dove il titolare ha il diritto di un pagamento alla scadenza dato da $N\Delta(L(T;T,T+\Delta) - K)^+$, dove $L(T;T,T+\Delta)$ è il tasso spot Libor al tempo T per l'intervallo $[T, T+\Delta]$.

Notare che il Caplet può essere visto come un'opzione Call con scadenza $T + \Delta$ e strike K sul tasso Libor, noto al tempo T. Per semplicità poniamo $N = 1$.
Per $t \leq T$ il prezzo del Caplet è dato da:

$$P^{Cpl}(t;T+\Delta,K) = \Delta p(t,T+\Delta)E^{Q^{T+\Delta}}\left\{(L(T;T,T+\Delta) - K)^+ \mid \mathcal{F}_t\right\} \quad (1.42)$$

Per la (1.17) si ha:

$$P^{Cpl}(t;t+\Delta,K) = p(t,T+\Delta)E^{Q^{T+\Delta}}\left\{\left(\frac{1}{\overline{p}(T,T+\Delta)} - \overline{K}\right)^+ \mid \mathcal{F}_t\right\} \quad (1.43)$$

dove $\overline{K} = 1 + \Delta K$.

Swaptions

Definizione 1.8. Una *Swaption* è un contratto finanziario che dà al cliente il diritto, ma non l'obbligo di esercitare alla data futura T_0 un *Interest Rate Swap*, il cui tasso fisso sarà il tasso strike R della Swaption.

Assumiamo $N = 1$ e $T = T_0$, allora il valore di $P^{Swn}(t; T_0, T_n, R)$ della swaption al tempo $t \leq T$ è:

$$P^{Swn}(t; T_0, T_n, R) = p(t, T_0) E^{Q^{T_0}} \left\{ (P^{Sw}(T_0; T_n, R))^+ \mid \mathcal{F}_t \right\} \tag{1.44}$$

$$= p(t, T_0) E^{Q^{T_0}} \left\{ \left(\sum_{k=1}^{n} \delta_k p(T_0, T_k) L(T_0; T_{k-1}, T_k) - R \sum_{k=1}^{n} \delta_k p(T_0, T_k) \right)^+ \mid \mathcal{F}_t \right\} \tag{1.45}$$

$$= p(t, T_0) E^{Q^{T_0}} \left\{ \sum_{k=1}^{n} \delta_k p(T_0, T_k) \left(R(T_0; T_0, T_n) - R \right)^+ \mid \mathcal{F}_t \right\} \tag{1.46}$$

$$= p(t, T_0) \sum_{k=1}^{n} \delta_k E^{Q^{T_0}} \left\{ p(T_0, T_k) (R(T_0; T_0, T_n) - R)^+ \mid \mathcal{F}_t \right\} \tag{1.47}$$

dove $R(T_0; T_0, T_n)$ è il tasso swap del sottostante swap al tempo T_0.
Introduciamo adesso il seguente processo:

$$A_t = \sum_{k=1}^{n} \delta_k p(t, T_k) \tag{1.48}$$

in cui A_t è una combinazione lineare dei prezzi OIS, il processo $\frac{A_t}{p(t, T_0)}$ è una martingala rispetto alla misura Q^{T_0}. Allora possiamo usare come numerario A_t per definire il seguente cambio di misura con la derivata di *Radon Nikodyn*:

$$\left. \frac{dQ^{swap}}{dQ^{T_0}} \right|_{\mathcal{F}} = \frac{A_t}{p(t, T_0)} \frac{p(0, T_0)}{A_0} \tag{1.49}$$

dove Q^{swap} e Q^{T_0} sono misure martingala e $\frac{p(0, T_0)}{A_0}$ la normalizzazione. Per quanto scritto sopra possiamo esprimere formalmente il prezzo di una swaption come il prezzo di una opzione call con strike R del tasso swap $R(T_0; T_0, T_n)$:

$$P^{Swn}(t; T_0, T_n, R) = A_t E^{Q^{swap}} \left\{ (R(T_0; T_0, T_n) - R)^+ \mid \mathcal{F}_t \right\} \tag{1.50}$$

Capitolo 2

Modelli esponenziali affini

Analizzeremo i modelli esponenziali affini, mentre nel capitolo 3 ci occuperemo dei modelli esponenziali quadratici con diversi fattori stocastici. Questi fattori saranno guidati da processi di $Wiener$. Mostreremo come imparare dai metodi di valutazione pre-crisi per ricavare le formule post-crisi per i prezzi delle opzioni. Una peculiarità della nostra classe di modello è di consentire il legame tra il tasso breve e gli spread. Considereremo il tasso breve r_t e gli spread s_t a breve termine da aggiungere al tasso breve. Per semplicità considereremo due diversi tenor Δ_1, Δ_2 uno per ogni spread, con $\Delta_2 \geq \Delta_1$ entrambi positivi. Denotando con st_t^1 e st_t^2 rispettivamente gli spread corrispondenti ai tenor Δ_1 e Δ_2, scriveremo $\rho_t = st_t^2 - st_t^1$ la loro differenza.
Per modellare le dinamiche (r_t, s_t, ρ_t) introdurremo modelli esponenziali affini.

Modelli Esponenziali Affini
Consideriamo un certo numero di processi Ψ_i e modelliamo le loro dinamiche sotto una misura martingala Q come processo di radice quadrata, cioè:

$$d\Psi_t^i = (a^i - b^i \Psi_t^i)dt + \sigma^i \sqrt{c^i \Psi_t^i + d^i} dw_t^i \tag{2.1}$$

con w_t^i processi di Wiener indipendenti. Supponiamo a^i, b^i e σ^i positivi e che $a^i \geq \frac{c^i(\sigma^i)^2}{2}$ in modo che le soluzioni Ψ_t^i siano positive. Inoltre ci possono essere i seguenti casi: $c^i = 0$, $d^i = 1$ (modello $Vasicek$) e $c^i = 1$, $d^i = 0$ (modello CIR).
Consideriamo la seguente terna:

$$\begin{cases} r_t = \Psi_t^1 + \Psi_t^2 \\ s_t = k^s \Psi_t^1 + \Psi_t^3 \\ \rho_t = k^\rho \Psi_t^1 + \Psi_t^4 \end{cases} \tag{2.2}$$

con k^s e k^ρ che esprimono l'intensità della correlazione e con Ψ_t^i che soddisfa per

$i = 1, 2$:

$$\begin{cases} d\Psi_t^1 = (a^1 - b^1\Psi_t^1)dt + \sigma^1 dw_t^1 \\ d\Psi_t^2 = (a^2 - b^2\Psi_t^2)dt + \sigma^2\sqrt{c^2\Psi_t^2 + d^2}dw_t^2 \end{cases} \tag{2.3}$$

Consideriamo uno spazio di probabilità filtrato con una misura di martingala Q ed E l'aspettativa sotto Q.

Lemma 2.1. *Consideriamo la versione Vasicek del modello in* (2.1)*, cioè* $c^i = 0$ $d^i = 1$ *per un generico processo* Ψ *si ha:*

$$d\Psi_t = (a - b\Psi_t)dt + \sigma dw_t \tag{2.4}$$

Per ogni γ, $K \in \mathbb{R}$ *si ha la seguente:*

$$E\left\{exp\left[-\int_t^T \gamma\Psi_s ds - K\Psi_T\right] \mid \mathcal{F}_t\right\} = exp[A(t,T) - B(t,T)\Psi_t] \tag{2.5}$$

dove i coefficienti soddisfano:

$$\begin{cases} B_t(t,T) - bB(t,T) + \gamma = 0, \qquad B(T,T) = K \\ A_t(t,T) = aB(t,T) - \frac{\delta^2}{2}B^2(t,T), A(T,T) = 0 \end{cases} \tag{2.6}$$

Per la dimostrazione, la si può trovare in qualsiasi libro che tratta di strutture a termine affini.

Lemma 2.2. *Consideriamo la versione CIR del modello in* (2.1) *con* $c^i = 1$ $d^i = 0$ *per un generico processo* Ψ *assumiamo:*

$$d\Psi_t = (a - b\Psi_t)dt + \sigma\sqrt{\Psi_t}dw_t \tag{2.7}$$

Per ogni $T > 0$ *definiamo l'insieme:*

$$\mathcal{S}_T = \left\{u \in \mathbb{R} : E\left\{e^{u\Psi_T}\right\} < \infty\right\} \tag{2.8}$$

cioè l'insieme di $u \in \mathbb{R}$ *per il quale la funzione generatrice dei momenti di* Ψ_T *è ben definita. Allora per ogni* $\gamma > 0$ *e ogni* $K \in \mathbb{R}$ *tale che* $-K \in \mathcal{S}_T$ *si ha la seguente:*

$$E\left\{exp\left[-\int_t^T \gamma\Psi_s ds - K\Psi_T\right] \mid \mathcal{F}_t\right\} = exp[A(t,T) - B(t,T)\Psi_t] \tag{2.9}$$

dove i coefficienti soddisfano:

$$\begin{cases} B_t(t,T) - bB(t,T) - \frac{\sigma^2}{2}B^{2(t,T)} + \gamma = 0, B(T,T) = K \\ A_t(t,T) = aB(t,T), \qquad\qquad A(T,T) = 0 \end{cases} \tag{2.10}$$

Per la dimostrazione, la si può trovare in qualsiasi libro che tratta di strutture a termine affini.

Lemma 2.3. *Consideriamo tre processi* Ψ^1,Ψ^2,Ψ^3*, sotto una misura martingala* Q*, che soddisfano la seguente:*

$$\begin{cases} d\Psi_t^1 = (a^1 - b^1\Psi_t^1)dt + \sigma^1 dw_t^1 \\ d\Psi_t^i = (a^i - b^i\Psi_t^i)dt + \sigma^i\sqrt{c^i\Psi_t^i + d^i}dw_t^i, i = 2,3 \end{cases} \tag{2.11}$$

Alternativamente possiamo scrivere:

$$\begin{cases} d\Psi_t^1 = \left(a^1 - (\sigma^1)^2 B^1(t, T+\Delta) - b^1\Psi_t^1\right)dt + \sigma^1 dw_t^{1,T+\Delta} \\ d\Psi_t^2 = \left(a^2 - d^2(\sigma^2)^2 B^2(t, T+\Delta) - \Psi_t^2(b^2 + c^2(\sigma^2)^2 B^2(t, T+\Delta)\right)dt \\ +\sigma^2\sqrt{c^2\Psi_t^2 + d^2}dw_t^{2,T+\Delta} \\ d\Psi_t^3 = (a^3 - b^3\Psi_t^3)dt + \sigma^3\sqrt{c^3\Psi_t^3 + d^3}dw_t^{3,T+\Delta} \end{cases} \tag{2.12}$$

dove $w^{i,T+\Delta}$*,* $i = 1,2,3$ *sono processi* $Q^{T+\Delta}$ *Wiener e* $B^1(t,T)$ *corrisponde a* $B(t,T)$ *della* (2.4)*, e* $B^2(t,T)$ *corrisponde al* $B(t,T)$ *della* (2.7)*, con* $\gamma = 1$ *e* $K = 0$*.*

Per la dimostrazione si consulti [2].

Lemma 2.4. *Dato uno spazio di probabilità con filtrazione naturale* $(\mathcal{F}_t)$ *e un w processo* $(\mathcal{F}_t)$ *Wiener consideriamo la seguente equazione:*

$$dX_t = (a_t X_t + b_t)dt + \sigma_t dw_t \tag{2.13}$$

con a_t b_t σ_t *processi adattati e limitati. Allora l'equazione ha un'unica soluzione forte:*

$$X_t = \Phi_t\left(X_0 + \int_0^t \Phi_s^{-1} b_s ds + \int_0^t \Phi_s^{-1} b_s dw_s\right) \tag{2.14}$$

con $t \geq 0$*, dove* Φ_t *è la soluzione fondamentale che soddisfa:* $\frac{d}{dt}\Phi_t = a_t\Phi_t$*,* $t \geq 0$*,* $\Phi_0 = 1$

La dimostrazione si trova in parecchi testi di analisi stocastica.

Lemma 2.5. *Denotiamo con* $N(\alpha, \beta)$ *una distribuzione Gaussiana con media* α *e varianza* β*. Denotiamo con* $\chi^2(\nu, \lambda)$ *una distribuzione* χ^2 *non centrata con* ν *gradi di libertà e* λ *parametro di non centralità.*
Il processo Ψ^1 *con la dinamica* (2.11) *è tale che sotto* $Q^{T+\Delta}$ *si ha:*

$$\Psi_t^1 \sim N(\alpha_t^1, \beta_t^1) \tag{2.15}$$

con parametri dati da:

$$\begin{cases} \alpha_t^1 = e^{-b^1 t}\left(\Psi_0^1 + \left(\frac{a^1}{b^1} - \frac{(\sigma^1)^2}{(b^1)^2}\right)(e^{b^1 t} - 1) + \frac{(\sigma^1)^2}{2(b^1)^2} e^{-b^1(T+\Delta)}(e^{2b^1 t} - 1)\right) \\ \beta_t^1 = \frac{(\sigma^1)^2}{2(b^1)} e^{-2b^1(t)}(e^{2b^1 t} - 1) \end{cases} \tag{2.16}$$

Per $c^i = 1$, $d^i = 0$, $i = 2,3$ *i due processi* Ψ^2, Ψ^3 *che soddisfano il sistema* (2.11)*, sotto* $Q^{T+\Delta}$ *hanno le seguenti distribuzioni:*

$$\Psi_t^2 \sim \frac{\chi^2(\nu^2, \lambda_t^2)}{c_t^2}, \Psi_t^3 \sim \frac{\chi^2(\nu^3, \lambda_t^3)}{c_t^3} \tag{2.17}$$

con i parametri dati da:

$$\begin{cases} c_t^2 = \frac{4(b^2 + (\sigma^2)^2 B^2(t, T+\Delta))}{(\sigma^2)^2(1 - e^{-t(b^2 + (\sigma^2)^2 B^2(t,T+\Delta))})} \\ \nu^2 = \frac{4a^2}{(\sigma^2)^2} \\ \lambda_t^2 = c_t^2 \Psi_0^2 e^{-t(b^2 + (\sigma^2)^2 B^2(t,T+\Delta))} \\ \nu^3 = \frac{4a^3}{(\sigma^3)^2} \\ c_t^3 = \frac{4b^3}{(\sigma^3)^2(1 - e^{-b^3 t})} \\ \lambda_t^3 = c_t^3 \Psi_0^3 e^{-b^3 t} \end{cases} \tag{2.18}$$

dove $B^2(t,T)$ *corrisponde al* $B(t,T)$ *della* (2.9).

Rappresentazione esplicita del tasso Libor

Ricordando il *Tasso Libor* descritto nella (1.11) e considerando un generico tenor Δ, indichiamo con $S = T + \Delta$ quindi avremo:

$$L\,(T; T, T+\Delta) = F\,(T; T, T+\Delta) = \frac{1}{\Delta}\left(\frac{1}{p\,(T, T+\Delta)} - 1\right) \tag{2.19}$$

In questo capitolo manteniamo la classica formulazione, ma sostituiamo il prezzo del bond $p(t,T)$ con un fittizzio $\overline{p}(t,T)$, quest'ultimo non è negoziabile, ma presupponiamo $\overline{p}(T,T) = 1$, quindi:

$$L\,(T; T, T+\Delta) = \frac{1}{\Delta}\left(\frac{1}{\overline{p}\,(T, T+\Delta)} - 1\right) \tag{2.20}$$

Abbiamo bisogno di espressioni esplicite per $\overline{p}(t,T)$ e per $\overline{p}(T,T+\Delta)$. Ricordando che in un contesto di rischio di credito puro dove τ il tempo di fallimento della controparte, il prezzo $p^d(t,T)$ di un bond senza copertura si esprime come:

$$p^d(t,T) = E^Q\left\{\exp\left[-\int_t^T r_s ds\right] 1_{(\tau > T)} \mid \mathcal{G}_t\right\} \tag{2.21}$$

dove $\mathcal{G}_t = \mathcal{F}_t \cup \mathcal{H}_t$, con $\mathcal{H}_t$ denota la filtrazione generata dal processo $1_{(\tau \leq t)}$.
Usando l'approccio intensità del rischio di credito otteniamo:

$$p^d(t,T) = 1_{(\tau > t)} \overline{p}(t,T) \tag{2.22}$$

dove

$$\overline{p}(t,T) = E^Q \left\{ \exp \left[- \int_t^T (r_u + s_u) du \right] \mid \mathcal{F}_t \right\} \tag{2.23}$$

dove s_t rappresenta il tasso di fallimento.
Nel nostro contesto lo spread a breve considerato incorpora non solo il rischio di credito, ma anche i vari altri rischi nel settore interbancario che influenzano i Tassi Libor.
Consideriamo il seguente modello:

$$\begin{cases} r_t = \Psi_t^1 + \Psi_t^2 \\ s_t = k\Psi_t^1 + \Psi_t^3 \end{cases} \tag{2.24}$$

con k che corrisponde a k_s nella (2.2) e Ψ_t^1, Ψ_t^2 soddisfano la (2.3). In seguito chiameremo k intensità di correlazione tra r_t e s_t.
Assumiamo che Ψ_t^3 soddisfa un modello di radice quadrata della stessa forma di Ψ_t^2.
Poi supporremo che Ψ_t^1 è di $Vasicek$, e i fattori Ψ_t^2 e Ψ_t^3 sono dati nel primo caso come modelli CIR ($d^i = 0$), e nel secondo caso come processi di $Vasicek$ ($c^i = 0$).
Nel primo caso i tre fattori Ψ_t^1, Ψ_t^2, Ψ_t^3, sotto una misura Q, soddisfano:

$$\begin{cases} d\Psi_t^1 = (a^1 - b^1\Psi_t^1)dt + \sigma^1 dw_t^1 \\ d\Psi_t^2 = (a^2 - b^2\Psi_t^2)dt + \sigma^2 \sqrt{\Psi_t^2} dw_t^2 \\ d\Psi_t^3 = (a^3 - b^3\Psi_t^3)dt + \sigma^3 \sqrt{\Psi_t^3} dw_t^3 \end{cases} \tag{2.25}$$

e nel secondo caso Ψ_t^1, Ψ_t^2, Ψ_t^3, sotto una misura Q, soddisfano:

$$\begin{cases} d\Psi_t^1 = (a^1 - b^1\Psi_t^1)dt + \sigma^1 dw_t^1 \\ d\Psi_t^2 = (a^2 - b^2\Psi_t^2)dt + \sigma^2 dw_t^2 \\ d\Psi_t^3 = (a^3 - b^3\Psi_t^3)dt + \sigma^3 dw_t^3 \end{cases} \tag{2.26}$$

Dal Lemma (2.1) otteniamo in particolare:

$$B^1(t,T) = -\frac{1}{b^1} \left(e^{-b^1(T-t)} - 1 \right) \tag{2.27}$$

e quindi:

$$\overline{B}^1(t,T) = (1+k)B^1(t,T) \tag{2.28}$$

e analogamente per $\overline{B}^2(t,T) = B^2(t,T)$ e $\overline{B}^3(t,T) = B^3(t,T)$

Proposizione 2.6. *Il tasso a breve OIS con r ed s dati dalla (2.24) con i fattori Ψ_t^1, Ψ_t^2, Ψ_t^3 che soddisfano (2.25) oppure la (2.26), sotto una misura Martingala Q, al tempo t il prezzo $p(t,T)$ si ottiene da:*

$$p(t,T) = exp[A(t,T) - B^1(t,T)\Psi_t^1 - B^2(t,T)\Psi_t^2] \tag{2.29}$$

mentre il prezzo di un bond fittizio $\overline{p}(t,T)$ è:

$$\begin{aligned}\overline{p}(t,T) &= exp\left[\overline{A}(t,T) - B^1(t,T)\Psi_t^1 - B^2(t,T)\Psi_t^2 - \overline{B}^3(t,T)\Psi_t^3 - kB^1(t,T)\Psi_t^1\right] \\ &= p(t,T)exp[\overline{A}(t,T) - kB^1(t,T)\Psi_t^1 - \overline{B}^3(t,T)\Psi_t^3]\end{aligned} \tag{2.30}$$

Prezzo di un FRA

Consideriamo un FRA in T, con maturità $T+\Delta$, un tasso fisso R e ammontare N. Per un singolo tenor in assenza di arbitraggio, il prezzo di un FRA è dato da:

$$\begin{aligned}P^{FRA}(t;T,T+\Delta,R,N) &= N\Delta p(t,T+\Delta)E^{T+\Delta}\left\{L(T;T,T+\Delta) - R \mid \mathcal{F}_t\right\} \\ &= Np(t,T+\Delta)E^{T+\Delta}\left\{\frac{1}{\overline{p}(T,T+\Delta)} - (1+\Delta R) \mid \mathcal{F}_t\right\}\end{aligned} \tag{2.31}$$

dove abbiamo evidenziato la relazione tra il tasso Libor e il prezzo del bond fittizio in (3.5).
Definiamo ora la seguente quantità:

$$\overline{\nu}_{t,T} = E^{T+\Delta}\left\{\frac{1}{\overline{p}(T,T+\Delta)} \mid \mathcal{F}_t\right\} \tag{2.32}$$

e quindi il tasso fisso R al tempo t, tale che $P^{FRA}(t;T,T+\Delta,R,N) = 0$, è:

$$\overline{R}_t = \frac{1}{\Delta}(\overline{\nu}_{t,T} - 1) \tag{2.33}$$

che è esattamente il tasso Libor cioè:

$$L(T;T,T+\Delta) = \frac{1}{\Delta}(\overline{\nu}_{t,T} - 1) \tag{2.34}$$

Relazione: Tasso FRA e prezzo FRA

Consideriamo il valore di $\overline{\nu}_{t,T}$ in (2.32), notiamo che la speranza esiste finche i fattori Ψ_t^1, Ψ_t^2, Ψ_t^3 della (3.5) sono definiti sotto una misura martingala Q. Adesso cambiamo da Q a $Q^{T+\Delta}$ otteniamo la densità corrispondente che è $\mathcal{L}_t = \frac{p(t,T+\Delta)}{p(0,T+\Delta)B_t}$. A questo punto possiamo scrivere:

$$\begin{aligned}\overline{\nu}_{t,T} &= E^{T+\Delta}\left\{\frac{1}{\overline{p}(T,T+\Delta)} \mid \mathcal{F}_t\right\} = \mathcal{L}_t^{-1}E^Q\left\{\frac{\mathcal{L}_T}{\overline{p}(T,T+\Delta)} \mid \mathcal{F}_t\right\} \\ &= \frac{1}{p(t,T+\Delta)}E^Q\left\{exp\left[-\int_t^T r_u du\right]\frac{p(T,T+\Delta)}{\overline{p}(T,T+\Delta)} \mid \mathcal{F}_t\right\}\end{aligned} \tag{2.35}$$

Ricordando la (3.5) tra $p(t,T)$ e $\overline{p}(t,T)$ scriviamo:

$$\frac{p(T,T+\Delta)}{\overline{p}(T,T+\Delta)} = exp[-\overline{A}(T,T+\Delta) + kB^1(T,T+\Delta)\Psi_t^1 + \overline{B}^3(T,T+\Delta)\Psi_t^3] \quad (2.36)$$

che grazie alla (2.35) diventa:

$$\begin{aligned}\overline{\nu}_{t,T} &= \frac{1}{p(t,T+\Delta)} \\ E^Q \left\{ exp\left[-\int_t^T r_u du \right] \right. & \left. exp[-\overline{A}(T,T+\Delta) + kB^1(T,T+\Delta)\Psi_t^1 + \overline{B}^3(T,T+\Delta)\Psi_t^3] \mid \mathcal{F}_t \right\} \\ &= \frac{1}{p(t,T+\Delta)} exp\left[-\overline{A}(T,T+\Delta)\right] E^Q \left\{ e^{\overline{B}^3(T,T+\Delta)\Psi_T^3} \mid \mathcal{F}_t \right\} \\ & E^Q \left\{ e^{-\int_t^T (\Psi_u^1 + \Psi_u^2) du} e^{kB^1(T,T+\Delta)\Psi_T^1} \mid \mathcal{F}_t \right\}\end{aligned} \quad (2.37)$$

Le due speranze della seconda uguaglianza della (2.37) si possono calcolare esplicitamente come esponenziali affini di Ψ_t^1, Ψ_t^2, Ψ_t^3 dal Lemma (2.1) e (2.2) e quest'ultimo può essere applicato se assumiamo che $\overline{B}^3(T,T+\Delta) \in \mathcal{S}_T$. Dall'espressione $\overline{\nu}_{t,T}$ otteniamo il valore di un $P^{FRA}(t;T,T+\Delta,R,N)$ e dalla (2.33) il tasso FRA.

Prezzo di Caps e Floors

Un *Cap* è un primo esempio di un derivato non lineare. Come visto nel capitolo 1 un *Cap* è dato da una serie di *Caplets*, quindi ricaviamo il prezzo per un Caplet generico con strike K sul tasso Libor $L(T;T,T+\Delta)$, fissato al tempo T per un intervallo di tempo $[T,T+\Delta]$.

Nella Proposione (2.7) sotto ricaveremo una espressione esplicita calcolabile per un prezzo di un Caplet per un intervallo generico $[T,T+\Delta]$ e per le classi di modello affine definite da (2.25) e (2.26).

Nel modello in (2.26) i fattori Ψ^i con $i = 2,3$ hanno al tempo T, sotto una misura $Q^{T+\Delta}$, una densità Gaussiana $N(\alpha_\tau^i, \beta_\tau^i)$, dove $\tau = T - t$ e con:

$$\begin{cases} \alpha_\tau^2 = e^{-b^2\tau}\left(\Psi_t^2 + \left(\frac{a^2}{b^2} - \frac{(\sigma^2)^2}{(b^2)^2}\right)(e^{b^2\tau} - 1) + \frac{(\sigma^2)^2}{2(b^2)^2} e^{-b^2(t+\tau+\Delta)}(e^{2b^2\tau} - 1)\right) \\ \beta_\tau^2 = \frac{(\sigma^2)^2}{2(b^2)} e^{-2b^2(\tau)}(e^{2b^2\tau} - 1) \\ \alpha_\tau^3 = e^{-b^3\tau}\left(\Psi_t^3 + \frac{a^3}{b^3}(e^{b^3\tau} - 1)\right) \\ \beta_\tau^3 = \frac{(\sigma^3)^2}{2(b^3)} e^{-2b^3(\tau)}(e^{2b^3\tau} - 1) \end{cases} \quad (2.38)$$

Proposizione 2.7. *Assumiamo adesso che l'intensità di correlazione in* (2.24) *soddisfi* $k > -1$ *e che in accordo con il modello della* (2.25), $\overline{B}^2$, $\overline{B}^3$, *definiti in* (2.28), $\in \mathcal{S}_T^{T+\Delta}$, *dove*

$$\mathcal{S}_T^{T+\Delta} = \left\{ u \in \mathbb{R} : E^{Q^S}\left\{ e^{u\Psi_T} \right\} < \infty \right\} \tag{2.39}$$

Il prezzo di un Caplet per un intervallo $[T, T+\Delta]$ *con strike* K *nel tasso Libor* $L(T;T,T+\Delta)$ *può essere espresso per entrambi i modelli* (2.25) *e* (2.26) *dalla seguente:*

$$\begin{aligned} P^{Cpl}(t;T+\Delta,K) = p(t,T+\Delta) \int_{\mathbb{R}^2} e^{-\overline{A}+\overline{B}^2 y+\overline{B}^3 z} \\ \left[\int_{\overline{x}(y,z)}^{+\infty} (e^{\overline{B}^1 x} - e^{\overline{B}^1 \overline{x}(y,z)}) f_{\Psi_T^1}(x)dx \right] f_{\Psi_T^2}(y)dy f_{\Psi_T^3}(z)dz \\ = p(t,T+\Delta) \\ \int_{\mathbb{R}^2} e^{-\overline{A}+\overline{B}^2 y+\overline{B}^3 z} Call(t,S_t,\overline{K}(y,z),T+\Delta) f_{\Psi_T^2}(y)dy f_{\Psi_T^3}(z)dz \end{aligned} \tag{2.40}$$

dove $Call(t,S_t,\overline{K}(y,z),T+\Delta)$ *è il prezzo al tempo* t *di una opzione Call con strike definito da* $\overline{K}(y,z) = e^{\overline{B}^1 \overline{x}(y,z)}$, *asset dato da* $S_t = e^{\overline{B}^1 \Psi_t^1}$ *data da:*

$$Call(t,S_t,\overline{K},T+\Delta) = e^{(\frac{1}{2}(\overline{B}^1)^2 \beta_\tau^1 + \alpha_\tau^1 \overline{B}^1)} N\left(\frac{\alpha_\tau^1 + \overline{B}^1 \beta_\tau^1 - \overline{x}}{\sqrt{\beta_\tau^1}} \right) - e^{\overline{B}^1 \overline{x}(y,z)} N\left(\frac{\alpha_\tau^1 - \overline{x}}{\sqrt{\beta_\tau^1}} \right) \tag{2.41}$$

dove $N(\cdot)$ *denota la distribuzione Gaussiana,* $\tau = T - t$ *e* $\overline{K} = 1 + \Delta K$.

Dimostrazione. Per la (1.42), per la (1.43) si ha:

$$\begin{aligned} P^{Cpl}(t;t+\Delta,K) = p(t,T+\Delta) E^{T+\Delta} \left\{ \left(\frac{1}{\overline{p}(T,T+\Delta)} - \overline{K} \right)^+ \mid \mathcal{F}_t \right\} \\ = p(t,T+\Delta) E^{T+\Delta} \left\{ \left(e^{-\overline{A}+\overline{B}^1 \Psi_T^1 + \overline{B}^2 \Psi_T^2 + \overline{B}^3 \Psi_T^3} - \overline{K} \right)^+ \mid \mathcal{F}_t \right\} \\ = p(t,T+\Delta) \int_{\mathbb{R}^3} (e^{-\overline{A}+\overline{B}^1 x+\overline{B}^2 y+\overline{B}^3 z} - \overline{K})^+ f_{\Psi_T^1}(x) f_{\Psi_T^2}(y) f_{\Psi_T^3}(z) dx dy dz \end{aligned} \tag{2.42}$$

Consideriamo la seguente funzione:

$$g(x,y,z) = e^{-\overline{A}+\overline{B}^1 x+\overline{B}^2 y+\overline{B}^3 z} \tag{2.43}$$

Per ogni $y \in \mathbb{R}$, $z \in \mathbb{R}$, la funzione è continua e crescente di $x \in \mathbb{R}$ e soddisfa che: $\lim_{x\to-\infty} g(x,y,z) = 0$, $\lim_{x\to+\infty} g(x,y,z) = +\infty$.
Allora esiste un unico $\overline{x}(y,z)$ tale che $g(\overline{x},y,z) = \overline{K}$ e $x \geq \overline{x}(y,z) \Leftrightarrow g(x,y,z) \geq g(\overline{x}(y,z),y,z)$, di conseguenza:

$$\begin{aligned} P^{Cpl}(t;t+\Delta,K) = p(t,T+\Delta) \int_{\mathbb{R}^2} e^{-\overline{A}+\overline{B}^2 y+\overline{B}^3 z} \\ \left(\int_{\overline{x}(y,z)}^{+\infty} (e^{\overline{B}^1 x} - e^{\overline{B}^1 \overline{x}(y,z)}) f_{\Psi_T^1}(x)dx \right) f_{\Psi_T^2}(y)dy f_{\Psi_T^3}(z)dz \end{aligned} \tag{2.44}$$

Per la (2.40) possiamo scrivere:

$$
\begin{aligned}
&\int_{\overline{x}(y,z)}^{+\infty}(e^{\overline{B}^1 x}-e^{\overline{B}^1\overline{x}(y,z)})f_{\Psi_T^1}(x)dx=\int_{\mathbb{R}}\left(e^{\overline{B}^1 x}-e^{\overline{B}^1\overline{x}(y,z)}\right)^+ f_{\Psi_T^1}(x)dx\\
&=E^{T+\Delta}\left\{\left(e^{\overline{B}^1\Psi_T^1}-\overline{K}(y,z)\right)^+\mid\mathcal{F}_t\right\}=Call(t,S_t,\overline{K}(y,z),T+\Delta)
\end{aligned}
\tag{2.45}
$$

Dato che $\Psi_T^1\sim N(\alpha_\tau^1,\beta_\tau^1)$ esplicitiamo $Call(t,S_t,\overline{K}(y,z),T+\Delta)$:

$$
\begin{aligned}
&Call(t,S_t,\overline{K}(y,z),T+\Delta)=\int_{\overline{x}}^{+\infty}e^{\overline{B}^1 x}f_1(x)dx-\int_{\overline{x}}^{+\infty}e^{\overline{B}^1\overline{x}}f_1(x)dx\\
&=\int_{\overline{x}}^{+\infty}e^{\overline{B}^1 x}\frac{1}{\sqrt{2\pi\beta_\tau^1}}e^{-\frac{1}{2}\frac{(x-\alpha_\tau^1)^2}{\beta_\tau^1}}dx-\int_{\overline{x}}^{+\infty}e^{\overline{B}^1\overline{x}}\frac{1}{\sqrt{2\pi\beta_\tau^1}}e^{-\frac{1}{2}\frac{(x-\alpha_\tau^1)^2}{\beta_\tau^1}}dx\\
&=e^{\left(\frac{1}{2}(\overline{B}^1)^2\beta_\tau^1+\alpha_\tau^1\overline{B}^1\right)}N\left(\frac{\alpha_\tau^1+\overline{B}^1\beta_\tau^1-\overline{x}}{\sqrt{\beta_\tau^1}}\right)-e^{\overline{B}^1\overline{x}(y,z)}N\left(\frac{\alpha_\tau^1-\overline{x}}{\sqrt{\beta_\tau^1}}\right)
\end{aligned}
\tag{2.46}
$$

□

Corollario 2.8. *Dalla Proposizione* (2.7)*, il prezzo di un Caplet per l'intervallo* $[T,T+\Delta]$ *con strike* K *nel tasso Libor* $L(T;T,T+\Delta)$ *per il modello* (2.25) *è dato da:*

$$
\begin{aligned}
P^{Cpl}(t;T+\Delta,K)&=p(t,T+\Delta)\\
c_\tau^2c_\tau^3\int_{\mathbb{R}^2}&e^{-\overline{A}+\overline{B}^2y+\overline{B}^3z}Call(t,S_t,\overline{K}(y,z),T+\Delta)g_2(c_\tau^2y)dyg_3(c_\tau^3z)dz
\end{aligned}
\tag{2.47}
$$

dove $g_2(\cdot)$ *e* $g_3(\cdot)$ *sono le densità delle chi-quadro non centrate con parametri dati dalla* (2.18) *e nel modello* (2.26) *da:*

$$
\begin{aligned}
P^{Cpl}(t;T+\Delta,K)&=p(t,T+\Delta)\\
\int_{\mathbb{R}^2}&e^{-\overline{A}+\overline{B}^2y+\overline{B}^3z}Call(t,S_t,\overline{K}(y,z),T+\Delta)f_2(y)dyf_3(z)dz
\end{aligned}
\tag{2.48}
$$

dove $f_2(\cdot)$ *e* $f_3(\cdot)$ *sono densità Gaussiane con parametri dati dalla* (2.38).

Nel modello (2.26) un'espressione alternativa per il prezzo $P^{Cpl}(t,T+\Delta,K)$ di un Caplet può essere derivato sfruttando la Gaussianità dei fattori Ψ^2 Ψ^3, infatti:

Proposizione 2.9. *Il prezzo di un Caplet per l'intervallo* $[T,T+\Delta]$ *con strike* K *nel tasso Libor* $L(T;T,T+\Delta)$ *si esprime per un modello del tipo* (2.26)*:*

$$
P^{Cpl}(t;t+\Delta,K)=p(t,T+\Delta)\left[exp\left(\frac{\sigma_\tau}{2}-\mu_\tau\right)N(d_\tau+\sqrt{\sigma_\tau})-\overline{K}N(d_\tau)\right]
\tag{2.49}
$$

dove $N(\cdot)$ è la funzione di ripartizione della Gaussiana e $\tau = T - t$

$$\begin{cases} d_\tau = -\dfrac{log(\overline{K}) + \mu_\tau}{\sqrt{\sigma_\tau}} \\ \mu_\tau = \overline{A}(T, T+\Delta) - \overline{B}^1(T, T+\Delta)\alpha_\tau^1 - \overline{B}^2(T, T+\Delta)\alpha_\tau^2 + \overline{B}^3(T, T+\Delta)\alpha_\tau^3 \\ \sigma_\tau = (\overline{B}^1(T, T+\Delta))^2\beta_\tau^1 + (\overline{B}^2(T, T+\Delta))^2\beta_\tau^2 + (\overline{B}^3(T, T+\Delta))^2\beta_\tau^3 \\ \overline{K} = 1 + \Delta K \end{cases} \tag{2.50}$$

Dimostrazione. Dalla (1.43) sappiamo che:

$$\begin{aligned} P^{Cpl}(t; t+\Delta, K) &= p(t, T+\Delta) E^{T+\Delta} \left\{ \left(\frac{1}{\overline{p}(T, T+\Delta)} - \overline{K} \right)^+ \mid \mathcal{F}_t \right\} \\ &= p(t, T+\Delta) \left(E^{T+\Delta} \left\{ \left(\frac{1}{\overline{p}(T, T+\Delta)} 1_{\{\frac{1}{\overline{p}(T,T+\Delta)} > \overline{K}\}} \right) \mid \mathcal{F}_t \right\} \right. \\ &\qquad \left. - \overline{K} Q^{T+\Delta} \left\{ \overline{p}(T, T+\Delta) < \frac{1}{\overline{K}} \mid \mathcal{F}_t \right\} \right) \end{aligned} \tag{2.51}$$

Notare che $\overline{p}(T, T+\Delta)$ è distribuito come $exp(Y)$, $Y \sim N(\mu_\tau, \sigma_\tau)$ dove μ_τ, σ_τ sono espressi in (2.50).
Per il secondo termine della (2.51) si ha:

$$\begin{aligned} Q^{T+\Delta} \left\{ \overline{p}(T, T+\Delta) < \frac{1}{\overline{K}} \mid \mathcal{F}_t \right\} &= P[Y < log(\frac{1}{\overline{K}})] \\ &= P \left[N(0,1) < \frac{log(\frac{1}{\overline{K}}) - \mu_\tau}{\sqrt{\sigma_\tau}} \right] = N(d_\tau) \end{aligned} \tag{2.52}$$

e per il primo termine della (2.51) si ha:

$$\begin{aligned} E^{T+\Delta} \left\{ \left(\frac{1}{\overline{p}(T, T+\Delta)} 1(_{\frac{1}{\overline{p}(T,T+\Delta)}} > \overline{K}) \right) \mid \mathcal{F}_t \right\} &= E^{T+\Delta} \left[e^{-Y} 1_{(e^{-Y} > \overline{K})} \right] \\ &= \int_{-\infty}^{d_\tau} exp[-\sqrt{\sigma_\tau} x - \mu_\tau] \frac{1}{\sqrt{2\pi}} e^{-\frac{x^2}{2}} dx \\ = e^{-\mu_\tau + \frac{\sigma_\tau}{2}} \int_{-\infty}^{d_\tau} \frac{1}{\sqrt{2\pi}} e^{-\frac{(x+\sqrt{\sigma_\tau})^2}{2}} dx &= e^{-\mu_\tau + \frac{\sigma_\tau}{2}} N(d_\tau + \sqrt{\sigma_\tau}) \end{aligned} \tag{2.53}$$

□

Prezzo delle Swaptions

Ricordiamo il prezzo di una *Payer Swap*:

$$\begin{aligned} P^{Sw}(t; T_0, T_n, R, N) &= \delta \sum_{k=1}^{n} p(t, T_k) E^{Q^k} \left\{ L\left(T_{k-1}; T_{k-1}, T_k\right) - R \mid \mathcal{F}_t \right\} \\ &= \delta \sum_{k=1}^{n} p(t, T_k) \left\{ L\left(t; T_{k-1}, T_k\right) - R \right\} \end{aligned} \tag{2.54}$$

dove abbiamo considerato $N = 1$.
Una *Swaption* è un'opzione per entrare in una swap ad una data fissata T, cioè la maturità della swaption e che per semplicità assumiamo $T = T_0$ ed è data dalla seguente (si veda (1.44)):

$$P^{Swn}(t; T_0, T_n, R) = p(t, T_0) E^{Q^{T_0}} \left\{ (P^{Sw}(T_0; T_n, R))^+ \mid \mathcal{F}_t \right\} \tag{2.55}$$

dove abbiamo usato la notazione più sintetica: $P^{Sw}(T_0; T_n, R,) = P^{Sw}(T_0; T_0, T_n, R,)$ $P^{Swn}(t; T_0, T_n, R) = P^{Swn}(t; T_0, T_0, T_n, R)$.

Proposizione 2.10. *Consideriamo entrambi i modelli* (2.25) *e* (2.26) *e assumiamo che* $\overline{B}_k^2, \overline{B}_k^3 \in \mathcal{S}_{T_{k-1}}^{T_k}$ *per* $\mathcal{S}_{T_{k-1}}^{T_k}$ *definito in* (2.39). *Il prezzo di una Swap è dato da:*

$$P^{Sw}(T_0; T_n, R) = \sum_{k=1}^{n} [D^k e^{A_k} e^{-\Psi_{T_0}^1 \tilde{B}_k^1 - \Psi_{T_0}^2 \tilde{B}_k^2 - \Psi_{T_0}^3 \tilde{B}_k^3} - (R\delta + 1) e^{A_k} e^{-\Psi_{T_0}^1 B_k^1 - \Psi_{T_0}^2 B_k^2}] \tag{2.56}$$

con $D^k = e^{-\overline{A}_k} exp[\overline{\alpha}^1(T_0, T_{k-1}) + \overline{\alpha}^2(T_0, T_{k-1}) + \overline{\alpha}^3(T_0, T_{k-1})]$
$A_k = A(T_0, T_k)$
$\overline{A}_k = \overline{A}(T_{k-1}, T_k)$
$B_k^j = B^j(T_0, T_k)$
$B_k^j = \overline{B}^j(T_{k-1}, T_k)$

Dimostrazione. Si consulti [2] □

Proposizione 2.11. *Ci mettiamo nelle stesse ipotesi della Proposizione* (2.10), *e assumiamo anche che* $b^3 > \frac{\sigma^3}{2}$ *e* $-\tilde{B}_k^2, -\tilde{B}_k^3 \in \mathcal{S}_{T_0}^{T_0}$ *definito in* (2.39). *Il valore di* $P^{Swn}(t; T_0, T_n, R)$ *è dato per entrambi i modelli* (2.25) *e* (2.26) *da:*

$$\begin{aligned} P^{Swn}(t; T_0, T_n, R) = p(t, T_0) \sum_{k=1}^{n} e^{A_k} D^k \int_{\mathbb{R}^2} exp\left[-\tilde{B}_k^1 x - \tilde{B}_k^2 y\right] \\ \left(\int_{\overline{z}(x,y)}^{+\infty} \left[e^{-\tilde{B}_k^3 z} - e^{-\tilde{B}_k^3 \overline{z}(x,y)} \right] f_{\Psi_{T_0}^3}(z) dz \right) f_{\Psi_{T_0}^2}(y) f_{\Psi_{T_0}^1}(x) dy dx \end{aligned} \tag{2.57}$$

dove $\overline{z}(x, y)$ *è l'unica soluzione dell'equazione* $g(x, y, z) = h(x, y)$ *e dove* $f_{\Psi_{T_0}^1}(x)$, $f_{\Psi_{T_0}^2}(y)$ *e* $f_{\Psi_{T_0}^3}(z)$ *sono genericamente delle densità Gaussiane.*

Dimostrazione. Si consulti [2] □

Particolarizziamo la precedente Proposizione al modello (2.25), (2.26) rispettivamente:

Corollario 2.12. *Il prezzo di una Swaption per il modello (2.25) è dato da:*

$$P^{Swn}(t;T_0,T_n,R) = p(t,T_0)c^2_{\tau_0}c^3_{\tau_0}\sum_{k=1}^{n} e^{A_k}D^k \int_{\mathbb{R}^2} exp\left[-\tilde{B}^1_k x - \tilde{B}^2_k y\right] \left(\int_{\overline{z}(x,y)}^{+\infty}\left[e^{-\tilde{B}^3_k z} - e^{-\tilde{B}^3_k \overline{z}(x,y)}\right] g_3(c^3_{\tau_0}z)dz\right) g_2(c^2_{\tau_0}y)f_1(x)dydx \tag{2.58}$$

dove $\overline{z}(x,y)$ è l'unica soluzione dell'equazione $g(x,y,z) = h(x,y)$ per x, y, $z \in \mathbb{R}$. Inoltre:
$g_i(\cdot)$ per $i = 2,3$ sono la densità di una distribuzione chi-quadro non centrata.
$\tau_0 = T_0 - t$;
$$c^2_{\tau_0} = \frac{4(b^2 + (\sigma^2)^2 B^2(\tau_0, t+\tau_0))}{(\sigma^2)^2(1 - e^{\tau_0(b^2+(\sigma^2)^2B^2(\tau_0,t+\tau_0))})}$$
$\lambda^2_{\tau_0} = c^2_{\tau_0}\Psi^2_t e^{-\tau_0(b^2+(\sigma^2)^2B^2(\tau_0,t+\tau_0))}$
e $c^3_{\tau_0}$ e $\lambda^3_{\tau_0}$ si trovano in maniera analoga a $c^2_{\tau_0}$ e $\lambda^2_{\tau_0}$.

Assumiamo il modello $Vasicek$ (2.26) e abbiamo il seguente:

Corollario 2.13. *Il prezzo di una Swaption $P^{Swn}(t;T_0,T_n,R)$ è dato da:*

$$P^{Swn}(t;T_0,T_n,R) = p(t,T_0)\sum_{k=1}^{n} D^k e^{A_k}\int_{\mathbb{R}^2} e^{-x\tilde{B}^1_k - y\tilde{B}^2_k} \left[e^{\frac{1}{2}(\tilde{B}^3_k)^2\beta^3 - \alpha^3\tilde{B}^3_k} N\left(\frac{\alpha^3 - \tilde{B}^3_k\beta^3 - \overline{z}(x,y)}{\sqrt{\beta^3}}\right) - e^{-\tilde{B}^3_k\overline{z}(x,y)}N\left(\frac{\alpha^3 - \overline{z}(x,y)}{\sqrt{\beta^3}}\right)\right] f_2(y)f_1(x)dydx \tag{2.59}$$

dove $N(\cdot)$ è la distribuzione Gaussiana e $\alpha^1 = \alpha^1_{\tau_0}$ e $\beta^1 = \beta^1_{\tau_0}$.

Dimostrazione. Il prezzo della Swaption in (2.57) può essere riscritto come:

$$P^{Swn}(t;T_0,T_n,R) = p(t,T_0)\sum_{k=1}^{n} e^{A_k}D^k \int_{\mathbb{R}^2} exp\left[-\tilde{B}^1_k x - \tilde{B}^2_k y\right] \left(\int_{\overline{z}(x,y)}^{+\infty}\left[e^{-\tilde{B}^3_k z} - e^{-\tilde{B}^3_k \overline{z}(x,y)}\right] f_3(z)dz\right) f_2(y)f_1(x)dydx \tag{2.60}$$

dove $f_j(\cdot) \sim N(\alpha^j, \beta^j)$ è la normale con $\alpha^j = \alpha^j_{\tau_0}$, $\beta^j = \beta^j_{\tau_0}$ e $f_3(\cdot)$ è la densità di una Gaussiana $N(\alpha^3, \beta^3)$, quindi:

$$\int_{\overline{z}(x,y)}^{+\infty} e^{-\tilde{B}^3_k z} f_3(z)dz = e^{\frac{1}{2}(-\tilde{B}^3_k)^2\beta^3 - \alpha^3\tilde{B}^3_k}\int_{\frac{\overline{z}(x,y)-(\alpha^3-\tilde{B}^3_k\beta^3)}{\sqrt{\beta^3}}}^{+\infty}\frac{1}{\sqrt{2\pi}}e^{-\frac{\xi^2}{2}}d\xi \tag{2.61}$$

e

$$\int_{\overline{z}(x,y)}^{+\infty} e^{-\tilde{B}^3_k\overline{z}(x,y)} f_3(z)dz = e^{-\tilde{B}^3_k\overline{z}(x,y)}\int_{\frac{\overline{z}(x,y)-\alpha^3}{\sqrt{\beta^3}}}^{+\infty}\frac{1}{\sqrt{2\pi}}e^{-\frac{\xi^2}{2}}d\xi \tag{2.62}$$

□

Proposizione 2.14. *Nel modello* (2.26) *il prezzo* $P^{Swn}(t;T,T_0,T_n,R)$ *può anche essere espresso da:*

$$P^{Swn}(t;T_0,T_n,R) = p(t,T_0)$$
$$\sum_{k=1}^{n}[e^{A_k}\int_{\mathbb{R}^2}(D^k e^{-x\tilde{B}_k^1 - y\tilde{B}_k^2} e^{\frac{1}{2}(\tilde{B}_k^3)^2\beta^3 - \alpha^3\tilde{B}_k^3} N\left(\frac{\alpha^3 - \tilde{B}_k^3\beta^3 - \overline{z}(x,y)}{\sqrt{\beta^3}}\right) \tag{2.63}$$
$$-(R\delta+1)exp(-B_k^1 x - B_k^2 y)N\left(\frac{\alpha^3 - \overline{z}(x,y)}{\sqrt{\beta^3}}\right) f_1(x)f_2(y)dxdy]$$

Dimostrazione. Ricordando la definizione di $\overline{z}(x,y)$ nella Proposizione (2.11) possiamo scrivere:

$$P^{Swn}(t;T_0,T_n,R) = p(t,T_0)\sum_{k=1}^{n}[e^{A_k}D^k\int_{\mathbb{R}^2} exp\left[-\tilde{B}_k^1 x - \tilde{B}_k^2 y\right]$$
$$\left(\int_{\overline{z}(x,y)}^{+\infty} e^{-\tilde{B}_k^3 z} f_3(z)dz\right) f_2(y)f_1(x)dydx \tag{2.64}$$
$$-(R\delta+1)e^{A_k}\int_{\mathbb{R}^2} exp\left[-\tilde{B}_k^1 x - \tilde{B}_k^2 y\right]\left(\int_{\overline{z}(x,y)}^{+\infty} f_3(z)dz\right) f_2(y)f_1(x)dydx]$$

e si conclude integrando rispetto a z. □

Capitolo 3

Modelli esponenziali quadratici

Modelli Esponenziali Quadratici

Nel modello esponenziale affine dato in (2.25), abbiamo postulato una dinamica CIR per tutti i fattori tranne che per il Ψ_t^1 che soddisfaceva il modello $Vasicek$.
Un'alternativa è considerare il seguente:

$$\begin{cases} r_t = \Psi_t^1 + (\Psi_t^2)^2 \\ s_t = k^s \Psi_t^1 + (\Psi_t^3)^2 \\ \rho_t = k^\rho \Psi_t^1 + (\Psi_t^4)^2 \end{cases} \tag{3.1}$$

Limitiamoci a considerare un singolo tenor Δ e quindi al seguente sistema semplificato:

$$\begin{cases} r_t = \Psi_t^1 + (\Psi_t^2)^2 \\ s_t = k \Psi_t^1 + (\Psi_t^3)^2 \end{cases} \tag{3.2}$$

I tre fattori Ψ_t^1, Ψ_t^2, Ψ_t^3, sotto una misura martingala Q, soddisfino un modello Gaussiano della forma (2.26), con $a^i = 0$:

$$d\Psi_t^i = -b^i \Psi_t^i dt + \sigma^i dw_t^i \tag{3.3}$$

con $i = 1, 2, 3$.

Proposizione 3.1. *Il tasso a breve r e lo spread s sono dati dalla (3.2) con i fattori Ψ_t^1, Ψ_t^2, Ψ_t^3 che soddisfano la (3.3), sotto una misura martingala Q. Al tempo t il prezzo $p(t,T)$ si ottiene da:*

$$p(t,T) = exp[-A(t,T) - B^1(t,T)\Psi_t^1 - C^{22}(t,T)(\Psi_t^2)^2] \tag{3.4}$$

mentre il prezzo di un bond fittizio $\overline{p}(t,T)$ è:

$$\begin{aligned} \overline{p}(t,T) = exp\left[-\overline{A}(t,T) - (k+1)B^1(t,T)\Psi_t^1 - C^{22}(t,T)(\Psi_t^2)^2 - \overline{C}^{33}(t,T)(\Psi_t^3)^2\right] \\ = p(t,T)exp[-\tilde{A}(t,T) - kB^1(t,T)\Psi_t^1 - \overline{C}^{33}(t,T)(\Psi_t^3)^2] \end{aligned} \tag{3.5}$$

dove $\tilde{A}(t,T) = \overline{A}(t,T) - A(t,T)$, $B^1(t,T)$ *dato dalla* (2.27) *e dove* C^{22} *e* C^{33} *sono dati dalla seguente:*

$$\begin{cases} C^{22}(t,T) = \overline{C}^{22}(t,T) = \frac{2(e^{(T-t)h^2}-1)}{2h^2+(2b^2+h^2)(e^{(T-t)h^2}-1)} \\ \overline{C}^{33}(t,T) = \frac{2(e^{(T-t)h^3}-1)}{2h^3+(2b^3+h^3)(e^{(T-t)h^3}-1)} \end{cases} \tag{3.6}$$

e con $h^i = \sqrt{4(b^i)^2 + 8(\sigma^i)^2} > 0$, $i = 2, 3$.

Ci limitiamo ora ad analizzare i derivati non lineari.

Caps e floors

Consideriamo un singolo $Caplet$ per un intervallo $[T, T+\Delta]$ e per un tasso fisso R. Il pagamento di un Caplet al tempo $T+\Delta$ è dato da $\Delta(L(T;T,T+\Delta) - R)^+$ e quindi il prezzo $P^{Cpl}(t;T+\Delta,R)$ sotto una misura martingala $Q^{T+\Delta}$ è:

$$P^{Cpl}(t;T+\Delta,K) = \Delta p(t,T+\Delta)E^{Q^{T+\Delta}}\left\{(L(T;T,T+\Delta)-R)^+ \mid \mathcal{F}_t\right\} \tag{3.7}$$

e ponendo che $\tilde{R} = 1+\Delta$, l'espressione (3.7) diventa, per $t=0$:

$$\begin{aligned} P^{Cpl}(0;t+\Delta,R) &= p(0,T+\Delta)E^{T+\Delta}\left\{\left(\frac{1}{\overline{p}(T,T+\Delta)} - \tilde{R}\right)^+\right\} \\ &= p(0,T+\Delta)E^{T+\Delta}\left\{\left(e^{\overline{A}+(k+1)B^1\Psi_T^1+C^{22}(\Psi_T^2)^2+\overline{C}^{33}(\Psi_T^3)2} - \tilde{R}\right)^+ \mid \mathcal{F}_0\right\} \\ &= p(0,T+\Delta)\int_{\mathbb{R}^3}(e^{\overline{A}+(k+1)B^1x+C^{22}y^2+\overline{C}^{33}z^2} - \tilde{R})^+ f_{\Psi_T^1}(x)f_{\Psi_T^2}(y)f_{\Psi_T^3}(z)dxdydz \end{aligned} \tag{3.8}$$

Introduciamo adesso la funzione:

$$g(x,y,z) = exp[\overline{A} + (k+1)B^1x + C^{22}y^2 + \overline{C}^{33}z^2] \tag{3.9}$$

che è crescente e continua per $z \geq 0$ e x, y fissati, e decrescente per $z < 0$. Conviene ora introdurre la seguente definizione:

Definizione 3.2. Sia M un sottoinsieme contenuto in $\mathbb{R}^2$ definito da:

$$M = \left\{(x,y) \in \mathbb{R}^2 \mid g(x,y,0) \leq \tilde{R}\right\} \tag{3.10}$$

e M^c il suo complementare. Per $(x,y) \in M$ si ha $\overline{z}^1 = \overline{z}^1(x,y)$ e $\overline{z}^2 = \overline{z}^2(x,y)$ le soluzioni di $g(x,y,z) = \tilde{R}$, con $\overline{z}^1 \leq 0 \leq \overline{z}^2$.

Notiamo in particolare che per $z \leq \overline{z}^1 \leq 0$ e $z \geq \overline{z}^2 \geq 0$ si ha $g(x,y,z) \geq g(x,y,\overline{z}^k)$ $= \tilde{R}$ e per $z \in (\overline{z}^1, \overline{z}^2)$ si ha $g(x,y,z) < \tilde{R}$.

Lemma 3.3. *Siano b^3, σ^3 coefficienti non negativi di Ψ_t^3 che soddisfino:*

$$b^3 \geq \frac{\sigma^3}{\sqrt{2}} \tag{3.11}$$

abbiamo che $1 - 2\overline{\beta}_T^3 \overline{C}^{33} > 0$, *con* $\overline{C}^{33}$ *dato dalla* (3.6), *e* $\overline{\beta}_T^3 = \frac{(\sigma^3)^2}{2b^3}(1 - e^{-2b^3 T})$.

Dimostrazione. Dalle definizioni di $\overline{\beta}_T^3$ e $\overline{C}^{33}$ possiamo scrivere:

$$1 - 2\overline{\beta}_T^3 \overline{C}^{33} = 1 - (1 - e^{-2b^3 T}) \frac{2(e^{\Delta h^3} - 1)}{2\frac{b^3 h^3}{(\sigma^3)^2} + \frac{b^3}{(\sigma^3)^2}(2b^3 + h^3)(e^{\Delta h^3} - 1)} \tag{3.12}$$

Notiamo che $1 - e^{-2b^3 T} \in (0, 1)$ dato che $b^3 > 0$, e che $\frac{b^3 h^3}{(\sigma^3)^2} \geq 0$. Quindi deduciamo che:

$$2 \leq \frac{b^3}{(\sigma^3)^2}(2b^3 + h^3) \tag{3.13}$$

Dalla (3.6) si conclude. □

Proposizione 3.4. *Data la condizione* (3.11) *si ha che il prezzo di un Caplet per l'intervallo di tempo* $[T, T + \Delta]$ *al tasso fisso* R *è:*

$$\begin{aligned} P^{Cpl}(0; T + \Delta, R) = p(0, T + \Delta) \Bigg[\int_M & e^{\overline{A} + (k+1)B^1 x + C^{22}(y)^2} \\ & \Big[\gamma(\overline{\alpha}_T^3, \overline{\beta}_T^3, \overline{C}^{33})(\Phi(d^1(x, y)) + \Phi(-d^2(x, y))) \\ -e^{\overline{C}^{33}(\overline{z}^1(x,y))^2}(\Phi(d^3(x, y)) + e^{\overline{C}^{33}(\overline{z}^2(x,y))^2}\Phi(-d^4(x, y)) & \Big] f_1(x) f_2(y) dx dy \\ +\gamma(\overline{\alpha}_T^3, \overline{\beta}_T^3, \overline{C}^{33}) \int_{M^c} & e^{\overline{A} + (k+1)B^1 x + C^{22}(y)^2} f_1(x) f_2(y) dx dy \\ & -\tilde{R} Q^{T+\Delta}[(\Psi_T^1, \Psi_T^2) \in M^c] \Bigg] \end{aligned} \tag{3.14}$$

dove $\Phi(\cdot)$ *è la distribuzione Gaussiana,* M *e* M^c *sono dati dalla definizione 3.2, mentre* $\gamma(\overline{\alpha}_T^3, \overline{\beta}_T^3, \overline{C}^{33}) = \frac{e^{(\frac{1}{2}(\theta)^2 \overline{\beta}_T^3 - \overline{\alpha}_T^3 \theta)}}{\sqrt{1 - 2\overline{\beta}_T^3 \overline{C}^{33}}}$ *e* $\theta = \frac{\overline{\alpha}_T^3 \left(1 - 1/\sqrt{1 - 2\overline{\beta}_T^3 \overline{C}^{33}}\right)}{\overline{\beta}_T^3}$ *ben definiti grazie al Lemma 3.3.*

Per $d^i(x, y)$, *con* $i = 1, 2, 3, 4$ *si consulti [2].*

Swaptions

Proposizione 3.5. *Il prezzo di un payer swap è dato da:*

$$\begin{aligned} P^{Sw}(t; T_0, T_n, R) = \gamma \sum_{k=1}^{n} p(t, T_k) E^{T_k} \left\{ L(T_{k-1}; T_{k-1}, T_k) - R \mid \mathcal{F}_t \right\} \\ = \sum_{k=1}^{n} (D_{t,k} e^{-A_{t,k}} e^{-\tilde{B}_{t,k}^1 \psi_t^1 - \tilde{C}_{t,k}^{22}(\psi_t^2)^2 - \tilde{C}_{t,k}^{33}(\psi_t^3)^2} - (R\gamma + 1) e^{-A_{t,k}} e^{-B_{t,k}^1 - C_{t,k}^{22}(\psi_t^2)^2}) \end{aligned} \tag{3.15}$$

dove γ è la lunghezza dell'intervallo considerato, e in particolare:

$$
\begin{aligned}
A_{t,k} = A(t,T_k), B^1_{t,k} = B^1_{t,k}, C^{22}_{t,k} = C^{22}(t,T_k) \\
\tilde{B}^1_{t,k} = B^1_{t,k} + \rho^1(t,T_k), \tilde{C}^{22}_{t,k} = C^{22}_{t,k} + \rho^2(t,T_k), \tilde{C}^{33}_{t,k} = \rho^3(t,T_k) \\
D_{t,k} = e^{A_k} exp[\Gamma^1(t,T_k) + \Gamma^2(t,T_k) + \Gamma^3(t,T_k)]
\end{aligned}
\tag{3.16}
$$

con ρ^1, ρ^2, ρ^3 e Γ^1, Γ^2, Γ^3 che sono rispettivamente:

$$
\begin{cases}
\rho^1(t,T_k) = -(k+1)B^1_k e^{-b^1(T_k-t)} \\
\Gamma^1(t,T_k) = \frac{(\sigma^1)^2}{2}\int_t^{T_k}(\rho^1(u,T_k))^2 du + (\sigma^1)^2 \int_t^{T_k} B^1(u,T_k)\rho^1(u,T_k)du
\end{cases}
\tag{3.17}
$$

$$
\begin{cases}
\rho^2_t(t,T) - 2[b^2 + 2(\sigma^2)^2 C^{22}(t,T_k)]\rho^2(t,T) - 2(\sigma^2)^2(\rho^2(t,T))^2 = 0 \\
\rho^2(T_k,T_k) = -C^{22}_k \\
\Gamma^2(t,T) = -(\sigma^2)^2 \int_t^T \rho(u,T)du
\end{cases}
\tag{3.18}
$$

e

$$
\begin{cases}
\rho^3(t,T_k) = \dfrac{4b^3 h^3_k e^{2b^3(T_k-1)}}{4(\sigma^3)^2 h^3_k e^{2b^3(T_k-t)} - 1} \\
h^3_k = \dfrac{\overline{C}^{33}_k}{4(\sigma^3)^2\overline{C}^{33}_k + 4b^3} \\
\Gamma^3(t,T_k) = -(\sigma^3)^2 \int_t^{T_k} \rho^3(u,T_k)du
\end{cases}
\tag{3.19}
$$

Ricordiamo il prezzo di una Swaption in assenza di arbitraggio al tempo $t \leq T_0 = T$:

$$
P^{Swn}(t;T_0,T_n,R) = p(t,T_0)E^{T_0}\left\{(P^{Sw}(T_0;T_n,R))^+ \mid \mathcal{F}_t\right\}
\tag{3.20}
$$

Lemma 3.6. *Abbiamo la seguente equivalenza:*

$$
\rho^3(t,T_k) > 0 \Leftrightarrow h^3_k \notin \left(0, \frac{1}{4(\sigma^3)^2 e^{2b^3(T_k-t)}}\right)
\tag{3.21}
$$

dove:

$$
\rho^3(t,T_k) = \frac{4b^3 h^3_k e^{2b^3(T_k-1)}}{4(\sigma^3)^2 h^3_k e^{2b^3(T_k-t)} - 1}
\tag{3.22}
$$

e

$$
h^3_k = \frac{\overline{C}^{33}_k}{4(\sigma^3)^2\overline{C}^{33}_k + 4b^3}
\tag{3.23}
$$

distinguiamo due casi:

Caso 1: $0 < h^3_k < \frac{1}{4(\sigma^3)^2 e^{2b^3(T_k-t)}}$

In base al Lemma 3.6, definiamo due funzioni continue:

$$
g(x,y,z) = \sum_{k=1}^{n} D_{0,k}e^{-A_{0,k}}e^{-\tilde{B}^1_{0,k}x - \tilde{C}^{22}_{0,k}y^2 - \tilde{C}^{33}_{0,k}z^2}
\tag{3.24}
$$

e

$$h(x,y) = \sum_{k=1}^{n} (R\gamma + 1) e^{-A_{0,k}} e^{-B^1_{0,k}x - C^{22}_{0,k}y^2} \tag{3.25}$$

i cui coefficienti in dettaglio si possono trovare a pagina 22 del [2].
In accordo con la (3.16) $\tilde{C}^{33}_{0,k} = \overline{\rho}^3(T_0, T_k) < 0$, $\forall\ k = 1, 2, .., n$. La (3.24) è crescente per $z \geq 0$, e decrescente per $z < 0$ con:

$$\lim_{z \to \infty} g(x,y,z) = +\infty \tag{3.26}$$

Caso 2: $h^3_k < 0$ o $h^3_k > \frac{1}{4(\sigma^3)^2 e^{2b^3(T_k - t)}}$
Mentre in questo caso $\tilde{C}^{33}_{0,k} = \overline{\rho}^3(T_0, T_k) > 0$ $\forall\ k = 1, 2, .., n$, la funzione in (3.24) è decrescente per $z \geq 0$ e crescente per $z < 0$, con:

$$\lim_{z \to \infty} g(x,y,z) = 0 \tag{3.27}$$

Introduciamo ora la seguente definizione:

Definizione 3.7. Sia $\overline{M}$ un sottoinsieme di $\mathbb{R}^2$, dato da:

$$\overline{M} = \left\{ (x,y) \in \mathbb{R}^2 \mid g(x,y,0) \leq h(x,y) \right\} \tag{3.28}$$

Le funzioni $g(x,y,z)$, $h(x,y)$ sono continue, $\overline{M}$ è chiuso, misurabile e connesso. M^c è il complementare.
Caso 1: Se $(x,y) \in \overline{M}$, si ha $g(x,y,0) < h(x,y)$ ed esiste $\overline{z}^1(x,y) \leq 0$ e $\overline{z}^2 \geq 0$ per cui si ha:

$$\begin{aligned} g(x,y,\overline{z}^i) &= \sum_{k=1}^{n} D_{0,k} e^{-A_{0,k}} e^{-\tilde{B}^1_{0,k}x - \tilde{C}^{22}_{0,k}y^2 - \tilde{C}^{33}_{0,k}(\overline{z}^i)^2} \\ &= h(x,y) = \sum_{k=1}^{n} (R\gamma + 1) e^{-A_{0,k}} e^{-B^1_{0,k}x - C^{22}_{0,k}y^2} \end{aligned} \tag{3.29}$$

per $i = 1, 2$, per $z \notin [\overline{z}^1, \overline{z}^2]$, abbiamo $g(x,y,z) \geq g(x,y,\overline{z}^i)$.
Se $(x,y) \in \overline{M}^c$, si ha $g(x,y,0) > h(x,y)$ e di conseguenza $g(x,y,z) \geq g(x,y,0) > h(x,y)$ per ogni z.
Caso 2: Se $(x,y) \in \overline{M}$, $g(x,y,0) < h(x,y)$ ed esiste $\overline{z}^1(x,y) \leq 0$ e $\overline{z}^2(x,y) \geq 0$ per i quali vale la (3.29), mentre per $z \in [\overline{z}^1, \overline{z}^2]$, abbiamo $g(x,y,z) \geq g(x,y,\overline{z}^i)$. Se $(x,y) \in \overline{M}^c$ si ha $g(x,y,0) > h(x,y)$ e di conseguenza $g(x,y,z) \geq g(x,y,0) > h(x,y)$ per ogni z.

Distinguiamo adesso **Caso 1** e **Caso 2** in riferimento alla definizione precedente:

Proposizione 3.8. *Sia* $0 < h_k^3 < \frac{1}{8(\sigma^3)^2 e^{2b^3(T_k-t)}}$. *In assenza di arbitraggio, al tempo* $t = 0$, *il prezzo di una swaption con tasso fisso* R *e con pagamenti dati in* $T_1 < ... < T_n$ *è dato dalla seguente:*
Caso 1:

$$
\begin{aligned}
P^{Swn}(0;T_0,T_n,R) = p(0,T_0)[\sum_{k=1}^{n} e^{-A_{0,k}}[\int_{\overline{M}} D_{0,k} exp(-\tilde{B}^1_{0,k}x - \tilde{C}^{22}_{0,k}y^2) \\
(\frac{e^{(\frac{1}{2}(\theta_k)^2\overline{\beta}^3_{T_0} - \overline{\alpha}^3_{T_0}\theta_k)}}{\sqrt{1+2\overline{\beta}^3_{T_0}\tilde{C}^{33}_{0,k}}}\Phi(d^1_k(x,y)) - e^{-\tilde{C}^{33}_{0,k}(\overline{z}^1)^2}\Phi(d^2_k(x,y)) \\
+\frac{e^{(\frac{1}{2}(\theta_k)^2\overline{\beta}^3_{T_0} - \overline{\alpha}^3_{T_0}\theta_k)}}{\sqrt{1+2\overline{\beta}^3_{T_0}\tilde{C}^{33}_{0,k}}}\Phi(-d^3_k(x,y)) - e^{-\tilde{C}^{33}_{0,k}(\overline{z}^1)^2}\Phi(-d^4_k(x,y)))f_2(y)f_1(x)dydx \\
+\int_{\overline{M}^c}\left(D_{0,k}exp(-\tilde{B}^1_{0,k}x - \tilde{C}^{22}_{0,k}y^2)\frac{e^{(\frac{1}{2}(\theta_k)^2\overline{\beta}^3_{T_0} - \overline{\alpha}^3_{T_0}\theta_k)}}{\sqrt{1+2\overline{\beta}^3_{T_0}\tilde{C}^{33}_{0,k}}} - (R\gamma+1)e^{-\tilde{B}^1_{0,k}x - \tilde{C}^{22}_{0,k}y^2}\right) \\
f_2(y)f_1(x)dydx]]
\end{aligned}
\tag{3.30}
$$

Caso 2:

$$
\begin{aligned}
P^{Swn}(0;T_0,T_n,R) = p(0,T_0)[\sum_{k=1}^{n} e^{-A_{0,k}}[\int_{\overline{M}} D_{0,k} exp(-\tilde{B}^1_{0,k}x - \tilde{C}^{22}_{0,k}y^2) \\
(\frac{e^{(\frac{1}{2}(\theta_k)^2\overline{\beta}^3_{T_0} - \overline{\alpha}^3_{T_0}\theta_k)}}{\sqrt{1+2\overline{\beta}^3_{T_0}\tilde{C}^{33}_{0,k}}}\left[\Phi(d^3_k(x,y)) - \Phi(d^1_k(x,y))\right] \\
-e^{-\tilde{C}^{33}_{0,k}(\overline{z}^1)^2}[\Phi(d^4_k(x,y)) - \Phi(d^2_k(x,y))]f_2(y)f_1(x)dydx \\
+\int_{\overline{M}^c}\left(D_{0,k}exp(-\tilde{B}^1_{0,k}x - \tilde{C}^{22}_{0,k}y^2)\frac{e^{(\frac{1}{2}(\theta_k)^2\overline{\beta}^3_{T_0} - \overline{\alpha}^3_{T_0}\theta_k)}}{\sqrt{1+2\overline{\beta}^3_{T_0}\tilde{C}^{33}_{0,k}}} - (R\gamma+1)e^{-\tilde{B}^1_{0,k}x - \tilde{C}^{22}_{0,k}y^2}\right) \\
f_2(y)f_1(x)dydx]]
\end{aligned}
\tag{3.31}
$$

Per i coefficienti $d^i_k(x,y)$ *con* $i = 1,2,3,4$, θ_k, $\overline{\alpha}^i_{T_0}$ *e* $\overline{\beta}^i_{T_0}$, *con* $i = 1,2,3,4$ *si consulti [2].*

Conclusioni

La classe dei modelli affini è sicuramente la più versatile dal punto di vista operativo, essi permettono di conoscere a priori la forma del prezzo dei bonds (esponenziale affine) e di ricondurla alla soluzione di un sistema di equazioni differenziali ordinarie.
Lo sviluppo dei modelli affini nasce certamente dall'esigenza di trovare un'espressione

analitica per il prezzo di un derivato. Se X_t è un processo stocastico, la cui equazione differenziale è:

$$dX_t = \mu(X_t)dt + \sigma(X_t)dB_t \tag{3.32}$$

dove B_t è un moto di Wiener, $\mu(x)$ e $\sigma^2(x)$ sono funzioni affini nella variabile x, allora per calcolare il prezzo dei bonds possiamo ricondurci alla soluzione di un sistema di equazioni differenziali.

Per avere possibilmente la positività del tasso r e dello spread s, nella molto più conosciuta classe dei modelli affini dobbiamo prevedere per i fattori dei modelli di radice quadrata.

Nei modelli esponenziali quadratici i fattori intervengono elevati al quadrato per cui questi fattori restano Gaussiani, ma ciò facilita i calcoli.

Bibliografia

[1] Zorana Grbac, Wolfgang J. Runggaldier: *Interest Rate Modeling:Post-Crisis Challenges and Approaches*, SpringerBriefs in Quantitative Finance, 2015

[2] Zorana Grbac, L. Meneghello, Wolfgang J. Runggaldier: *Derivative pricing for a multicurve extension of the Gaussian, exponentially quadratic short rate model*, Springer Proceedings in Mathematics and Statistics Vol. 165, 2016, pp. 191-226