Università degli Studi di Padova
Dipartimento di Scienze Statistiche
Corso di Laurea Magistrale in
Scienze Statistiche

L'utilizzo del Tracking Error nell'allocazione di portafoglio: una analisi empirica

Relatore Prof. Massimiliano Caporin

Dipartimento di Scienze Economiche e Aziendali 'Marco Fanno'

Laureanda: Camilla Lincetto

Matricola N. 1061405

Anno Accademico 2014/2015

Indice

Introduzione

Ancora oggi la teoria di Markowitz è ritenuta valida al fine di costruire un portafoglio efficiente, consiste nell'individuare una combinazione di titoli tale da minimizzare il rischio e massimizzare il rendimento complessivo compensando gli andamenti asincroni dei singoli titoli. In questo approccio si utilizza la varianza come misura assoluta del rischio per scoprire il portafoglio efficiente e ai fini dell'ottimizzazione del portafoglio l'indice finanziario assume rilevanza. D'altronde, gli investitori desiderano conoscere a quale tipo di rischio i loro portafogli sono soggetti rispetto al benchmark e, in base a questa informazione, quanto positiva è la loro gestione. Per questo motivo, per la valutazione delle prestazioni finanziarie spesso si ricorre al differenziale tra i rendimenti del portafoglio gestito e quelli dell'indice a cui si fa riferimento. Precisamente, tale eccesso di rendimento viene definito *Tracking Error*, conosciuto anche come rischio attivo (*active risk*), questa misura può essere considerata un valido metodo per la valutazione della performance e per le strategie di allocazione. Nelle analisi, spesso, viene riportata la varianza del Tracking Error (o *Tracking Error Variance, TEV*), ovvero, la volatilità dell'eccesso di rendimento del portafoglio rispetto al benchmark nel tempo. Essa è importante in quanto indica la rischiosità differenziale che l'investitore sopporta scegliendo di investire nel fondo anziché direttamente nel benchmark. I valori assunti dalla Tracking Error Volatility danno un'indicazione sul tipo di

rischio aggiuntivo, lo scostamento e la volatilità che un prodotto finanziario ha rispetto a un benchmark di riferimento.
Il tracking error può essere sia l'obiettivo di investimento sia un vincolo per lo stesso. Una strategia di investimento passiva cerca di replicare un indice, per questo motivo il valore assunto dalla varianza del tracking error sarà ridotto e prossimo il più possibile a zero. Una strategia attiva, invece, è caratterizzata dall'obiettivo di sovraperformare il benchmark, pur rimanendo entro certi limiti di rischio, sovrappesando o sottopesando alcuni assets piuttosto che altri per produrre risultati migliori rispetto all'indice, in questo caso la TEV presenterà valori più elevati della gestione passiva.
In questa tesi verranno illustrati quattro metodi differenti per il calcolo della frontiera con l'utilizzo del tracking error: il primo, proposto da Roll (1992), propone la frontiera di varianza minima del tracking error in un contesto media-varianza dove il rischio è rappresentato dalla volatilità stessa e la redditività dall'eccesso di rendimento atteso; il secondo è una reinterpretazione da parte di Roll del primo problema e riguarda l'impatto di un vincolo aggiuntivo sul *beta* di portafoglio; successivamente si analizzerà il problema proposto da Alexander, Baptista e Palomba, Riccetti, i quali hanno introdotto un vincolo riguardante il *Value at Risk*; infine, si illustrerà una rivisitazione del terzo metodo in cui il nuovo vincolo riguarderà il *Conditional Value at Risk*.
Al fine di presentare brevemente in cosa consistono questi studi, a titolo esemplificativo, per ciascuno di essi verranno proposti dei risultati empirici riguardanti un insieme di dati finanziari degli ultimi venti anni.
L'ultimo capitolo, basandosi sulle *rolling windows*, riporterà le analisi e le relative misure di performance effettuate per ciascuno dei metodi su finestre temporali ampie cinque anni, ciò è importante per 'catturare' al meglio

l'informazione di diversi scenari (corrispondenti al timing dell'investimento).

Dati utilizzati per le verifiche empiriche

Le analisi empiriche riportate in questo testo sono state eseguite sulle serie storiche dei prezzi espressi in dollari, \$, dell'indice *Morgan Stanley Capital International Europe* e dei suoi dieci indici settoriali: *Financials*, *Consumer Staples*, *Health Care*, *Industrials*, *Consumer Discretionary*, *Materials*, *Energy*, *Telecommunication Services*, *Utilities* e *Information Technology.*
L'indice MSCI Europe è caratterizzato da titoli di media ed elevata capitalizzazione e vengono ponderati secondo la capitalizzazione di mercato aggiustata per il flottante. L'aggiustamento serve a garantire una liquidità dei titoli replicati più alta rispetto alla semplice ponderazione in base alla capitalizzazione di mercato. Inoltre, l'MSCI Europe comprende circa l'85% della capitalizzazione di mercato dei 15 principali paesi d'Europa: *Austria*, *Belgio*, *Danimarca*, *Finlandia*, *Francia*, *Germania*, *Irlanda*, *Italia*, *Paesi Bassi*, *Norvegia*, *Portogallo*, *Spagna*, *Svezia*, *Svizzera*, *Regno Unito.* L'inclusione della Svizzera e del Regno Unito rende questo indice una scelta un po' più diversificata rispetto ad un benchmark azionario della zona euro.
I dati sono stati scaricati dal software Datastream e l'analisi empirica è stata eseguita con l'apporto del linguaggio MatLab.
Le serie dei prezzi degli assets che compongono il campione sono mensili e coprono l'intervallo temporale che inizia il 1 gennaio 1995 e finisce il 31 dicembre 2014, su di esse sono stati calcolati i rendimenti percentuali in questo modo:

$$R_{\mathrm{t}} = \frac{P_{\mathrm{t}} - P_{\mathrm{t-1}}}{P_{\mathrm{t-1}}} * 100$$

I rendimenti dei dieci indici settoriali sono stati utilizzati come componenti del portafoglio gestito, mentre i rendimenti dell'MSCI Europe sono stati utilizzati come benchmark value weighted, al fine di rendere più completa l'analisi si è scelto di costruire come indice di riferimento alternativo anche un aggregato equally weighted calcolato con la media dei rendimenti dei settori per ogni istante temporale. Tutte le analisi che seguiranno, quindi, avranno doppi risultati: sia per il caso value weighted, basato sul vero benchmark MSCI Europe, sia l'altro per il caso equally weighetd, basato sulla media aritmetica dei settori.
Dal punto di vista grafico, le nuove serie si presentano così:

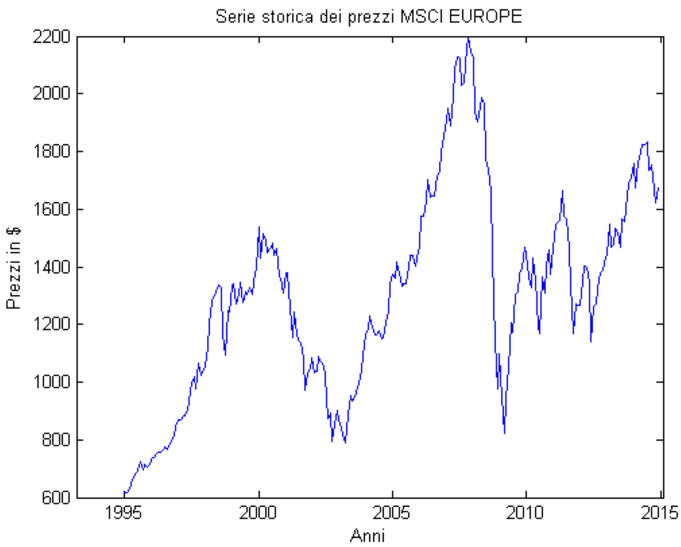

Figura 1: Serie dei prezzi indice MSCI EUROPE

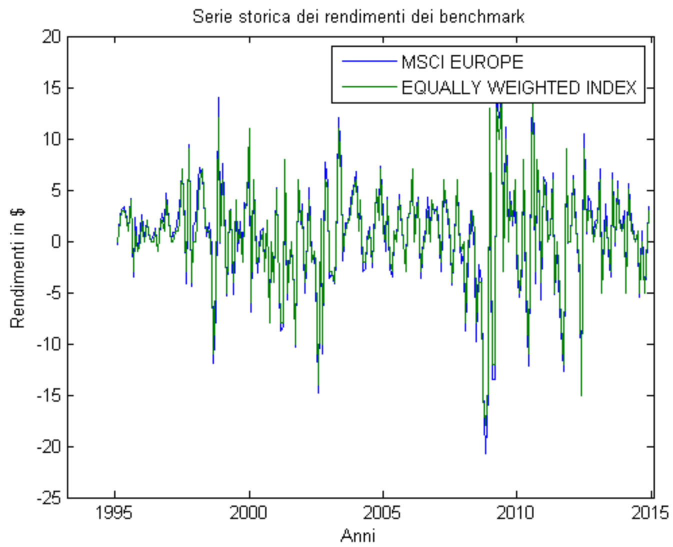

Figura 2: Rendimenti degli indici di riferimento

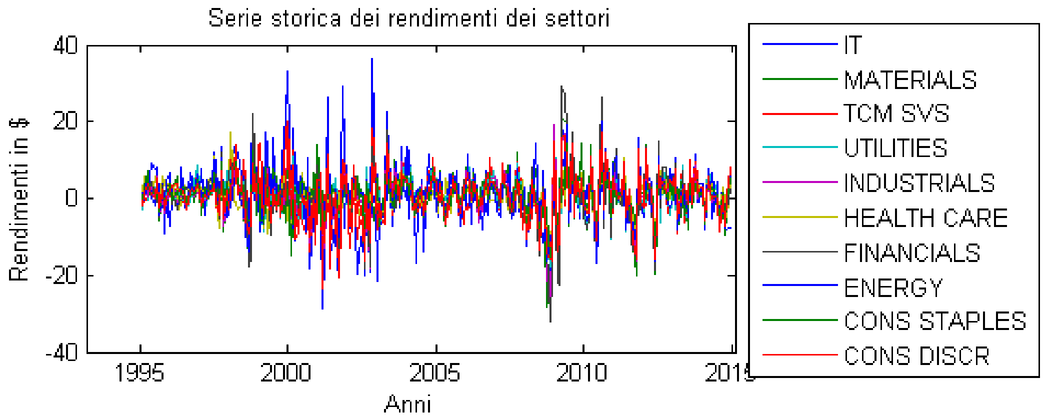

Figura 3: Rendimenti dei settori

Per Le serie dei prezzi viene riportato solo l'indice MSCI Europe perché, appartenendovi i dieci settori presi in esame, sintetizza bene il periodo storico a cui appartengono i dati. Gli ultimi due grafici mostrano una forte variabilità in determinati intervalli temporali, osservando la serie dei prezzi si può far chiarezza sui motivi di queste instabilità.

Nel ventennio analizzato l'andamento dei prezzi dell'indice si distingue per almeno tre fasi che sono caratterizzate da eventi di carattere politico ed economico. All'inizio (1995) vi è un trend crescente che culmina nel febbraio del 2000, segue un movimento discendente che porta ad un minimo storico nel marzo del 2003; gli avvenimenti che più hanno influenzato questa prima fase sono l'attentato dell'11 settembre 2001 alle Twin Towers di New York, il quale ha determinato i conseguenti provvedimenti restrittivi degli Stati Uniti riguardo la movimentazione delle persone, delle merci e dei capitali, inoltre, si dichiarò la 'guerra al terrorismo' che sfociò nell'invasione dell'Afghanistan nello stesso 2001 e dell'Iraq nel 2003. Queste operazioni militari hanno determinato l'inizio della crisi petrolifera con gravi conseguenze di ordine economico mondiale, da questa è poi scaturita la ricerca di nuove forme di produzione energetica rinnovabile ed eco-sostenibile. Gli andamenti dei mercati europei sono stati influenzati anche dalle continue tensioni nel Medio Oriente tra Israele e stati arabi, sopratutto la privatizzazione dell'economia in Cina ha avviato la delocalizzazione delle produzioni dei marchi europei e un maggior movimento dei capitali. Si ricorda anche l'introduzione della moneta unica in Europa avvenuta nel 2002, proprio con questo evento i settori dell'indice registrano una nuova base pari a 100$. Successivamente inizia una nuova fase ascendente che dura circa cinque anni raggiungendo l'apice nel gennaio del 2008, nel frattempo gli attentati di Madrid (2004) e di Londra (2005) non hanno avuto conseguenze troppo influenti sull'indice. In seguito si affaccia la crisi, che purtroppo si protrae sino ai nostri giorni, con un andamento estremamente negativo dal 2008 al marzo 2009, dove l'indice sprofonda, per poi risalire con grande volatilità a un complesso andamento altalenante sino al dicembre 2014 con segno positivo, salvo ripiegare lievemente verso la fine dell'anno. La politica espansiva della FED e la relativa

tardiva risposta della BCE con il 'Quantitative Easing' sta a dimostrare come l'indice in questione rilevi tutta una serie di continue variazioni che spaziano dall'ambito strettamente economico-monetario a quello politico.
Nei primi mesi del 2015, pur conservando una certa volatilità, l'indice si presenta in maniera positiva e più decisa nell'ambito rialzista, anticipando, se vogliamo, le aspettative d'uscita dell'economia dalla perdurante crisi.
In via generale, i cicli rappresentati presentano nei venti anni alcuni periodi in ascesa, altri in discesa, mentre quelli con segno positivo hanno una durata attorno ai cinque anni con fasi di volatilità anche accentuata, quelli in discesa presentano una rapida successione di minimi e un periodo assai più breve.

Come anticipato, dopo l'illustrazione di ogni metodo, sarà proposta una analisi effettuata sulla totalità dei dati a disposizione. Il calcolo dei pesi degli indici consiste in una equidistribuzione degli stessi tra i vari assets per l'equally weighted, mentre per il value weighted è stata effettuata una *style analysis*. La style analysis è stata proposta dal premio Nobel Sharpe ed è in grado di determinare lo stile d'investimento confrontando i rendimenti mensili dell'indice con i rendimenti di un numero selezionato di assets valutando la correlazione esistente tra di essi. La tecnica è deduttiva e determina il peso attribuibile a ciascuna componente del portafoglio cercando di implementare la miglior allocazione. Per conoscere il peso dei dieci settori nel caso dell'indice MSCI Europe, quindi, si procede con la regressione lineare che ha come variabile risposta il vettore dei rendimenti del benchmark e come variabili esplicative i rendimenti dei settori.

$$
\begin{cases}
R_{\mathrm{t,msci}} = \sum_{j=1}^{10} \beta_{\mathrm{j}} R_{\mathrm{t,settorej}} + \eta_{\mathrm{t}} \\
s.t.\ \beta_{\mathrm{j}} \geq 0 \\
\sum_{j=1}^{10} \beta_{\mathrm{j}} = 1
\end{cases}
\tag{0.1}
$$

I vettori di pesi per l'intero campione sono i seguenti:

$$
settore = \begin{bmatrix} Energy \\ Materials \\ Industrials \\ Cons.Discr. \\ Cons.Stap. \\ H.Care \\ Financials \\ I.T. \\ Tcmsvs \\ Utilities \end{bmatrix}
\mathrm{q}_{\mathrm{bench}} = \begin{bmatrix} 0.1 \\ 0.1 \\ 0.1 \\ 0.1 \\ 0.1 \\ 0.1 \\ 0.1 \\ 0.1 \\ 0.1 \\ 0.1 \end{bmatrix}
\mathrm{q}_{\mathrm{msci}} = \begin{bmatrix} 0.0923 \\ 0.0518 \\ 0.1271 \\ 0.1131 \\ 0.0886 \\ 0.0941 \\ 0.1923 \\ 0.0508 \\ 0.1211 \\ 0.0689 \end{bmatrix}
$$

I valori stimati per quanto riguarda l'indice value weighted sono ragionevoli: i settori finanziario, industriale, dei servizi delle telecomunicazioni e dei beni di lusso assumono un peso più marcato degli altri.

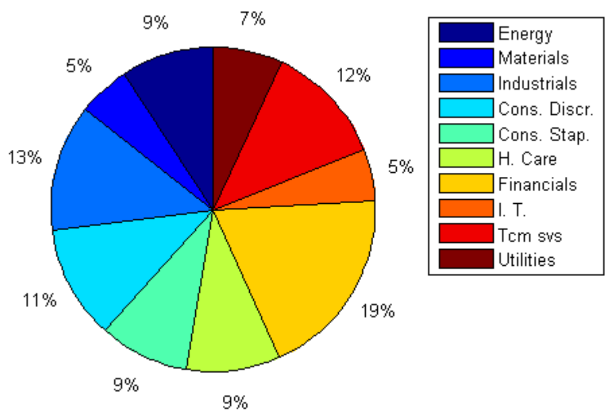

Figura 4: Distribuzione dei pesi dal 1995 al 2014

I criteri utilizzati per il calcolo delle frontiere di minima varianza del tracking error richiedono le seguenti assunzioni: ogni manager deve avere le stesse informazioni e lo stesso universo di assets su cui poter condurre la propria gestione.

Capitolo 1

Frontiera di minima varianza del Tracking Error

1.1 Premessa

I metodi illustrati di seguito sono stati introdotti per cercare di superare dei limiti riscontrati nel modello media-varianza proposto da Markowitz (1959). Alcune assunzioni di questo modello risultano troppo forti e non sempre vengono soddisfatte nella realtà. Idealmente, i rendimenti di questo approccio sono distribuiti come una Normale Multivariata, ma la condizione di normalità può essere adeguata per mercati non eccessivamente volatili. Di fronte a frequenze mensili, settimanali o addirittura giornaliere risulta inconsistente. Inoltre, la funzione di utilità quadratica non è sufficientemente flessibile e rende impossibile il confronto tra due individui con diverso grado di avversione al rischio.
Roll suggerisce che gli investitori potrebbero provare ad affidarsi allo scostamento tra il rendimento di portafoglio gestito e il rendimento del benchmark per avere delle indicazioni più plausibili sulle loro performance.

1.2 Frontiera TEV in contesto media-varianza

La minimizzazione della varianza della differenza tra i rendimenti del portafoglio gestito e quelli conseguiti dall'indice stesso nell'ambito della gestione attiva dei portafogli finanziari in alcune circostanze può portare l'investitore a 'battere' il benchmark. La soluzione del problema di minimo comporta l'individuazione del portafoglio con varianza di tracking error minima per un dato livello di extra-performance. Richard Roll, l'autore di questo approccio (1992), prendendo spunto dall'analisi media-varianza condotta da Markowitz, ha realizzato una frontiera di minimo TEV rappresentando il rischio con la varianza del tracking error e il profitto con il suo rendimento atteso.

Rispetto al problema tradizionale proposto da Markowitz, in cui si dava attenzione al rischio assoluto, l'innovazione ottenuta con questo metodo è la rilevanza attribuita alla volatilità del tracking error, la quale indica il rischio aggiuntivo (relativo) che il gestore si assume rispetto all'investimento nel benchmark.

Dagli studi di Roll emerge che sul piano media-varianza il portafoglio gestito in modo attivo si trova lontano dalla frontiera efficiente calcolata tramite il metodo di Markowitz esattamente quanto lo è il benchmark. Se il benchmark fosse efficiente dal punto di vista dell'approccio media-varianza, il portafoglio TEV si troverebbe anch'esso sulla frontiera globale efficiente. D'altro canto, non è anomalo che l'indice a cui si fa riferimento non risulti efficiente, in questo caso il portafoglio TEV risulta inefficiente in termini di volatilità in ugual misura rispetto alla frontiera efficiente, indipendentemente dalla performance prevista.

Posto che l'obiettivo del manager è la minimizzazione della varianza del tracking error per un livello dato dell'extra-performance attesa rispetto a un indice di riferimento, si definiscono:

- T tracking error
- TEV varianza del tracking error
- R_{P} rendimento del portafoglio gestito
- R_{B} rendimento del benchmark
- q_{P} vettore di pesi del portafoglio
- q_{B} vettore di pesi del benchmark
- $x = q_{\text{P}} - q_{\text{B}}$ vettore degli extra-weights
- V matrice delle varianze-covarianze degli assets
- E vettore delle medie degli assets
- E_{B}, V_{B} media e varianza del benchmark
- E_{P}, V_{P} media e varianza del portafoglio
- G livello atteso di extra-performance

Il tracking error, come anticipato prima, misura l'eccesso di rendimento del portafoglio gestito rispetto al rendimento dell'indice di riferimento.

$$\begin{aligned} T &= E(R_{\text{P}} - R_{\text{B}}) \\ TEV &= Var(T) = Var(R_{\text{P}} - R_{\text{B}}) = q'_{\text{P}}Vq_{\text{P}} + q'_{\text{B}}Vq_{\text{B}} - 2q'_{\text{P}}Vq_{\text{B}} \\ &= (q_{\text{P}} - q_{\text{B}})'V(q_{\text{P}} - q_{\text{B}}) \end{aligned}$$

Con $E(.)$ che indica il valore atteso e $Var(.)$ la varianza, dal momento che $E(T) = x'E = G$, la media del portafoglio viene calcolata come $E_{\text{P}} = E_{\text{B}} + G$.

Poiché sia il portafoglio sia il benchmark hanno pesi che sommano a uno, una condizione necessaria al problema definito da Roll è:

$$q'_{\mathrm{P}}1 = q'_{\mathrm{B}}1 = 1 \Longleftrightarrow x'1 = 0$$

Un aspetto importante delle analisi proposte in seguito è l'assenza di vincoli sulla positività dei pesi, se venisse imposta questa condizione non si avrebbe la possibilità di ottenere soluzioni analitiche ai problemi di minimo, inoltre condizionerebbe dei risultati riguardo la performance dei portafogli. La frontiera con varianza minima del tracking error è data dalla soluzione del problema:

$$\begin{cases} min_x Var(T) = x'Vx \\ s.t.\ x'E = G \\ x'1 = 0 \end{cases} \tag{1.1}$$

La soluzione in termini di extra-weights che ne deriva è:

$$x = q_{\mathrm{P}} - q_{\mathrm{B}} = \frac{cGV^{-1}E - bGV^{-1}1}{ac - b^2} \tag{1.2}$$

dove $a = E'V^{-1}E$, $b = E'V^{-1}1$, $c = 1'V^{-1}1$, a, b e c sono valori scalari. E' possibile notare che la soluzione di minimo della funzione obiettivo è indipendente dal benchmark originale, ciò comporta che qualsiasi gestore che abbia le stesse aspettative e lo stesso insieme di assets tra cui scegliere, partendo da una posizione iniziale del benchmark, condurrà la stessa strategia al di là dell'indice di riferimento su cui viene misurata la performance. Esiste un trade-off tra la performance attesa e la volatilità del tracking error che, come verrà illustrato in seguito, descrive una funzione quadratica sul piano media-varianza.

Con opportuni passaggi, la soluzione per x può essere scritta in funzione dei portafogli di varianza minima globale (di seguito indicato con 0) e di intersezione tra la linea che dall'origine degli assi passa attraverso quest'ultimo e interseca la classica frontiera efficiente (di seguito indicato con 1).

$$x = \frac{G}{R_1 - R_0}(\omega_1 - \omega_0)$$

Definendo i rendimenti attesi con R, la varianza σ^2 e i pesi ω, i portafogli 0 e 1 sono caratterizzati da:

$$\begin{array}{lll} R_1 = \frac{a}{b} & \sigma_1^2 = \frac{a}{b^2} & \omega_1 = \frac{V^{-1}E}{b} \\ R_0 = \frac{b}{c} & \sigma_0^2 = \frac{1}{c} & \omega_0 = \frac{V^{-1}1}{c} \end{array}$$

Determinare x tramite una combinazione lineare di ulteriori due vettori di pesi associati a due portafogli distinti segna un punto di incontro con la frontiera classica definita da Markowitz. Infatti, per il *teorema dei due fondi*, dati due distinti portafogli, l'intera frontiera è rappresentabile come combinazione lineare di questi due portafogli.

Il grafico che segue ha l'intenzione di chiarire la posizione di questi portafogli in un caso generico:

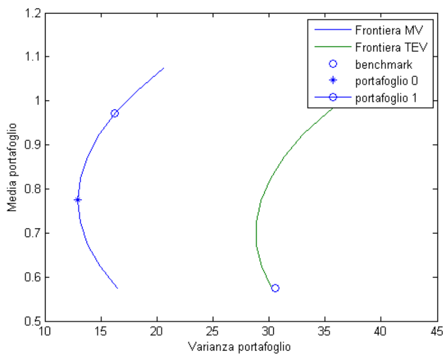

Figura 1.1: Frontiera MV e TEV

L'area alla sinistra del pallino che individua il benchmark contiene i portafogli che dominano lo stesso, ma è necessario tener presente che solo sulla frontiera EV essi sono anche efficienti. Al di là dell'efficienza o meno, i portafogli che dominano l'indice sono caratterizzati da una volatilità totale inferiore e, in determinati casi, anche da rendimenti attesi superiori.
Riprendendo il problema di minimo del metodo di Roll, l'equazione che determina la frontiera TEV è la seguente:

$$\begin{aligned} V_{\mathrm{P}} &= Var(R_{\mathrm{P}}) = q_{\mathrm{P}}' V q_{\mathrm{P}} \\ &= V_{\mathrm{B}} + 2x' V q_{\mathrm{B}} + x' V x \\ &= V_{\mathrm{B}} + \frac{2(E_{\mathrm{P}} - E_{\mathrm{B}})(cE_{\mathrm{B}} - b)}{ac - b^2} + \frac{c(E_{\mathrm{P}} - E_{\mathrm{B}})^2}{ac - b^2} \end{aligned} \tag{1.3}$$

Effettuando le sostituzioni $d = \frac{ac - b^2}{c}$ e $\delta_1 = E_{\mathrm{B}} - \frac{b}{c}$ all'equazione, si ottiene l'equivalente in termini di livello atteso di extra-performance, G.

$$\begin{aligned} V_{\mathrm{P}} &= V_{\mathrm{B}} + \frac{2\delta_1(E_{\mathrm{P}} - E_{\mathrm{B}})}{d} + \frac{(E_{\mathrm{P}} - E_{\mathrm{B}})^2}{d} \\ &= V_{\mathrm{B}} + \frac{2\delta_1 G + G^2}{d} \end{aligned}$$

La frontiera media-varianza classica, MV, viene determinata da una equazione indipendente dal benchmark ed è così definita:

$$\begin{aligned} V_{\mathrm{P,MV}} &= \frac{cE_{\mathrm{P}}^2 - 2bE + a}{ac - b^2} \\ a > 0, b &> 0, ac - b^2 > 0 \end{aligned} \tag{1.4}$$

Per poter mostrare con più evidenza la distanza che intercorre tra le due frontiere, si propone la precedente equazione in funzione di G:

$$\begin{aligned} V_{\mathrm{P,MV}} &= \frac{(E_{\mathrm{P}} - E_{\mathrm{B}})^2 + 2\delta_1(E_{\mathrm{P}} - E_{\mathrm{B}}) + \delta_1^2}{d} + \frac{1}{c} \\ &= \frac{(G + \delta_1)^2}{d} + \frac{1}{c} \end{aligned}$$

Come anticipato, il benchmark solitamente è inefficiente e si trova sulla frontiera TEV, la distanza che separa tale frontiera da quella efficiente è pari alla differenza tra la varianza dell'indice di riferimento e la varianza di un portafoglio efficiente con lo stesso rendimento atteso. Il portafoglio gestito secondo il metodo di Roll sarà inefficiente quanto lo è il benchmark, ma, quando il rendimento di quest'ultimo (R_{B}) supera il rendimento del portafoglio di varianza minima globale (R_0) e quando il livello atteso di extra-performance, G, è positivo, il portafoglio gestito avrà sia un rendimento più elevato sia una maggiore volatilità rispetto al benchmark. Tuttavia, se quest'ultimo fosse inefficiente e il suo rendimento atteso fosse piuttosto inferiore al rendimento del portafoglio a varianza minima globale, il portafoglio gestito potrebbe idealmente dominare il benchmark. Se G non fosse troppo grande e $R_{\mathrm{B}} < R_0$, il portafoglio potrebbe avere sia un rendimento atteso superiore sia una volatilità complessiva inferiore. Ponendo il rendimento atteso del portafoglio MV pari al rendimento atteso del benchmark, E_{B}, la differenza tra le due frontiere è costante rispetto a G e viene espressa come:

$$\begin{aligned} \mathit{distanza} &= V_{\mathrm{B}} - V_{\mathrm{P,MV}} \\ &= V_{\mathrm{B}} - \frac{cE_{\mathrm{B}}^2 - 2bE_{\mathrm{B}} + a}{ac - b^2} \end{aligned}$$

1.3 Frontiera TEV calcolata sul campione

Per maggior chiarezza, in questa sezione si riportano i risultati di una analisi sul campione di dati a disposizione utilizzando il metodo di Roll appena proposto.
Il calcolo della frontiera di minima varianza tracking error è stato eseguito rispetto sia all'indice *value weighted* MSCI Europe sia all'indice *equally weighted*, qui chiamato anche generalmente *benchmark*. Il livello atteso di extra-performance è stato fatto variare all'interno dell'intervallo $[0, 0.5]$ e sono stati calcolati i parametri a, b, c, d, $\delta_{1,\mathrm{MSCI}}$ e $\delta_{1,\mathrm{EW}}$ nel modo in cui è stato esplicato nella precedente sezione. I primi parametri valgono con entrambi gli indici in quanto non dipendono da essi, mentre il $\delta_{1,\cdot}$ dipende dalla loro media ed è stato qui denominato in maniera differente per sottolinearne la diversità. Le variabili appena citate sono scalari.
Per prima cosa sono stati calcolati i pesi del portafoglio. Dato che i pesi degli indici sono noti, si è utilizzata la soluzione 1.2 così modificata:

$$q_{\mathrm{P}} = \frac{cGV^{-1}E - bGV^{-1}1}{ac - b^2} + q_{\mathrm{B}} \tag{1.5}$$

E' evidente che i valori stimati per gli extra-weights, x, sono identici per i due indici di riferimento utilizzati, infatti la formula 1.2 è indipendente dal benchmark se si considera la differenza di pesi pari alla quantità x.
I pesi dei portafogli variano a seconda del livello atteso di extra-performance prefissato, G; poiché sono stati considerati 10 assets, è stata costruita una matrice $(10, 11)$ per ciascun indice di riferimento che contiene il risultato del calcolo suddiviso in undici valori corrispondenti a G.

Settori	$G = 0$	$G = 0.05$	$G = 0.1$	$G = 0.15$	$G = 0.2$	$G = 0.25$	$G = 0.3$	$G = 0.35$	$G = 0.4$	$G = 0.45$	$G = 0.5$
En	0.0923	0.0553	0.0184	-0.0186	-0.0555	-0.0925	-0.1295	-0.1664	-0.2034	-0.2403	-0.2773
Mat	0.0518	0.1218	0.1918	0.2618	0.3317	0.4017	0.4717	0.5417	0.6116	0.6816	0.7516
Ind	0.1271	0.0849	0.0427	0.0006	-0.0416	-0.0838	-0.1259	-0.1681	-0.2103	-0.2524	-0.2946
C Disc	0.1131	0.0619	0.0107	-0.0405	-0.0917	-0.1428	-0.1940	-0.2452	-0.2964	-0.3476	-0.3988
C Stap	0.0886	0.1553	0.2220	0.2888	0.3555	0.4222	0.4889	0.5557	0.6224	0.6891	0.7558
H Care	0.0941	0.1406	0.1872	0.2337	0.2802	0.3268	0.3733	0.4198	0.4664	0.5129	0.5594
Fin	0.1923	0.1433	0.0944	0.0455	-0.0034	-0.0523	-0.1012	-0.1501	-0.1991	-0.2480	-0.2969
IT	0.0508	0.1130	0.1751	0.2373	0.2995	0.3617	0.4238	0.4860	0.5482	0.6103	0.6725
Tcm	0.1211	0.0844	0.0476	0.0108	-0.0260	-0.0628	-0.0996	-0.1364	-0.1731	-0.2099	-0.2467
Util	0.0689	0.0395	0.0101	-0.0193	-0.0487	-0.0781	-0.1075	-0.1369	-0.1663	-0.1957	-0.2251

Tabella 1.1: Pesi del portafoglio al variare di G per l'indice MSCI

Settori	$G = 0$	$G = 0.05$	$G = 0.1$	$G = 0.15$	$G = 0.2$	$G = 0.25$	$G = 0.3$	$G = 0.35$	$G = 0.4$	$G = 0.45$	$G = 0.5$
En	0.1000	0.0630	0.0261	-0.0109	-0.0478	-0.0848	-0.1217	-0.1587	-0.1956	-0.2326	-0.2696
Mat	0.1000	0.1700	0.2400	0.3099	0.3799	0.4499	0.5199	0.5898	0.6598	0.7298	0.7998
Ind	0.1000	0.0578	0.0157	-0.0265	-0.0687	-0.1108	-0.1530	-0.1952	-0.2373	-0.2795	-0.3217
C Disc	0.1000	0.0488	-0.0024	-0.0535	-0.1047	-0.1559	-0.2071	-0.2583	-0.3095	-0.3606	-0.4118
C Stap	0.1000	0.1667	0.2334	0.3002	0.3669	0.4336	0.5003	0.5671	0.6338	0.7005	0.7672
H Care	0.1000	0.1465	0.1931	0.2396	0.2861	0.3327	0.3792	0.4257	0.4723	0.5188	0.5653
Fin	0.1000	0.0511	0.0022	-0.0467	-0.0957	-0.1446	-0.1935	-0.2424	-0.2913	-0.3402	-0.3891
IT	0.1000	0.1622	0.2243	0.2865	0.3487	0.4109	0.4730	0.5352	0.5974	0.6596	0.7217
Tcm	0.1000	0.0632	0.0264	-0.0104	-0.0471	-0.0839	-0.1207	-0.1575	-0.1943	-0.2311	-0.2679
Util	0.1000	0.0706	0.0412	0.0118	-0.0176	-0.0470	-0.0764	-0.1058	-0.1352	-0.1646	-0.1940

Tabella 1.2: Pesi del portafoglio al variare di G per l'indice equally weighted

I pesi possono assumere valore negativo perché non sono imposti vincoli riguardo le vendite allo scoperto, altrimenti, nel caso queste non fossero permesse, ai vincoli già imposti si dovrebbe aggiungere quello di positività dei pesi del portafoglio. La prima colonna è evidente che riporta gli stessi valori dei vettori dei pesi dell'indice MSCI Europe e dell'indice equally weighted in quanto la differenza tra i pesi per $G = 0$ deve essere nulla, per questo particolare valore di extra-performance attesa i portafogli vengono gestiti in modo passivo, ovvero replicano l'andamento del benchmark.
L'utilità nel far variare G, oltre a evidenziare i cambiamenti nelle allocazioni di portafoglio in base al livello atteso di extra-performance, consiste anche nel valutare gli aspetti positivi e negativi di una gestione passiva o attiva. Se il livello di extra-performance fosse leggermente superiore a 0, si prenda come esempio la seconda colonna, per l'indice value weighted assume maggior peso il settore dei Beni di Consumo, a seguire ci sono i settori Health

Care, Finanziario e dei Materiali. Osservando la seconda colonna di stime per l'indice equally weighted, gli stessi settori appena nominati sono anche in questo caso rilevanti, ma quello con maggior peso è quello dei Materiali. Successivamente, grazie ai risultati ottenuti dalle stime sono state confrontate la frontiera di minimo tracking error e la frontiera efficiente, calcolata secondo l'equazione 1.4.

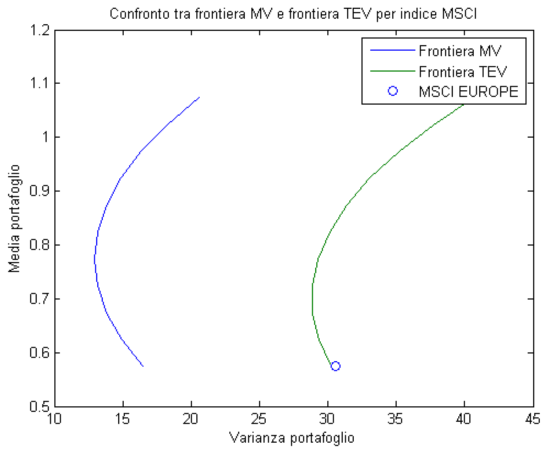

Figura 1.2: Frontiera TEV per MSCI Europe

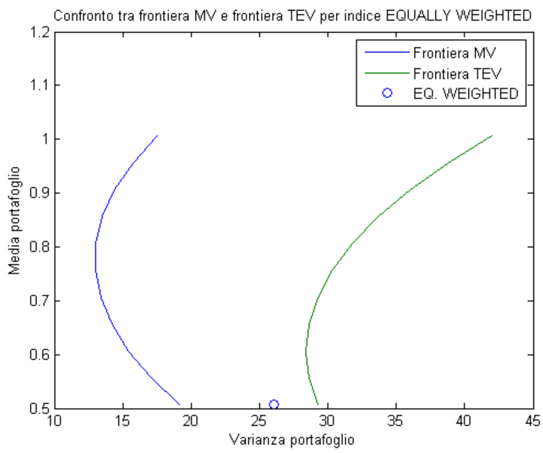

Figura 1.3: Frontiera TEV per indice equally weighted

Dal primo grafico si verifica il problema preannunciato da Roll: l'indice di riferimento non risulta efficiente e si trova sulla frontiera TEV proprio in corrispondenza del portafoglio che viene gestito in maniera passiva ($G = 0$). La varianza dei portafogli situati sulla frontiera calcolata con il metodo di Roll risulta essere il doppio di quella dei portafogli sulla frontiera media-varianza classica, questo è indice di maggior rischiosità.
La distanza che intercorre tra le due frontiere considerando il benchmark value weighted è pari a 14.1. Nonostante la differenza tra le due frontiere sia evidente, la scelta migliore dipende dall'attitudine al rischio dell'investitore, il quale potrebbe rifiutare di gestire in modo passivo poiché sulla frontiera di minimo tracking error esistono dei portafogli con extra-performance maggiore di zero e con varianza inferiore a quella dell'indice.
Osservando, invece, il grafico relativo all'indice equally weighted, il benchmark si trova al di fuori della frontiera TEV, probabilmente ciò è dovuto al metodo di costruzione stesso dell'indice. In questo caso entrambe le medie dei portafogli risultano inferiori al caso value weighted e anche la varianza è leggermente più bassa. In questo caso, la scelta migliore per un gestore che non ama il rischio sarebbe con molta probabilità la replica del benchmark, quindi una conduzione passiva dell'investimento.
In generale, la frontiera di minima varianza tracking error è composta da portafogli i cui total return non sono efficienti in termini di media-varianza se non lo è anche il benchmark. Questo sta a indicare che i portafogli gestiti secondo una logica TEV sono dominati da altri che hanno sia volatilità inferiore sia una media dei total return maggiore.
Roll in questa sua prima analisi ha osservato che i portafogli ottimali ottenuti hanno diverse proprietà indesiderabili, il problema principale di questo approccio è che trascura il rischio assoluto di portafoglio.

Nel prossimo capitolo si indagherà sull'impatto di un ulteriore vincolo per cercare di superare questi inconvenienti.

Capitolo 2

Frontiera Tracking Error con vincolo sul *beta* di portafoglio

Un portafoglio finanziario è caratterizzato da due componenti di rischio: complessivo e sistematico (o di mercato). Il primo rappresenta la variabilità totale dei rendimenti ed è misurato dalla standard deviation, la quale indica il livello di dispersione dei rendimenti stessi intorno alla loro media. Il rischio sistematico, detto anche *beta*, invece, è una misura che evidenzia la sensibilità del fondo rispetto ai movimenti di mercato, o di un benchmark, e serve a distinguere l'abilità di un gestore dalla sua propensione al rischio. La teoria moderna sostiene che l'investitore dovrebbe venir compensato in base a tale misura. Il beta costituisce quella parte di rischio non diversificabile di un portafoglio e rappresenta la componente principale di rischiosità di un fondo comune, dato che quest'ultimo non è altro che un portafoglio ben diversificato. Qualora l'investitore possedesse un portafoglio di attività finanziarie composto da fondi sarebbe più interessato a conoscere il rischio sistematico dei fondi in portafoglio piuttosto che il loro rischio complessivo. Il beta mira a determinare se il fondo sia più o meno rischioso rispetto al benchmark: ad un valore del coefficiente elevato corrisponde un rischio sopportato superiore. La componente di rischio sistematico è identificata dal coefficiente beta che viene così misurato:

$$\beta_{\mathrm{PB}} = \frac{cov(R_{\mathrm{P}}, R_{\mathrm{B}})}{V_{\mathrm{B}}}$$

Roll nell'articolo del 1992 sottolinea che molti manager non mostrano le distorsioni sistematiche rispetto al benchmark nei vari movimenti del mercato (che siano rialzisti o ribassisti) e per una maggiore trasparenza della gestione finanziaria sarebbe opportuno imporre loro di mantenere il beta del portafoglio gestito entro un certo intervallo vicino ad 1. Se il coefficiente risultasse pari ad 1, la volatilità dell'insieme di assets su cui si è investito sarebbe uguale a quella del mercato. Invece, le attività finanziarie con un beta superiore a 1 tendono ad essere più rischiose, per esempio, se fosse pari a 2 e il mercato salisse (o scendesse) del 2%, l'investimento si muoverebbe nella stessa direzione (in media) del 4%. In generale, si ritiene che i gestori aggressivi o con elevati livelli di indebitamento presentino i valori di beta più elevati. Al contrario, gli assets con beta compresi tra 0 e 1 tendono a muoversi nella stessa direzione del mercato e la gestione sarebbe meno rischiosa del benchmark, in questo caso solitamente l'investimento riguarderebbe i titoli emessi da società che operano nei settori tradizionali dell'economia. Se il parametro fosse pari a zero, vorrebbe dire che il portafoglio non ha nessuna correlazione col mercato. D'altro canto, la misura del rischio sistematico potrebbe essere negativa, nel qual caso indicherebbe che ci si muove nella direzione opposta a quella del mercato.

Considerando nuovamente il grafico 1.1, i portafogli che dominano il benchmark hanno tutti un livello di beta inferiore all'unità. D'altronde, un manager che ha l'intento di minimizzare la volatilità del tracking error è costretto

a scegliere una composizione di assets con l'indicatore di rischio sistematico maggiore di uno. Se il rendimento atteso dell'indice di riferimento fosse superiore al rendimento del portafoglio con varianza minima globale, il portafoglio gestito (P) non potrebbe dominare il benchmark e, peggio ancora, esisterebbero portafogli con la stessa volatilità di P e rendimenti attesi più grandi.
Il vincolo aggiuntivo al problema 1.1 che ora verrà introdotto sarà:

$$\beta = \beta_{\mathrm{PB}} = \frac{(x + q_{\mathrm{B}})' V q_{\mathrm{B}}}{V_{\mathrm{B}}} = \frac{x' V q_{\mathrm{B}}}{V_{\mathrm{B}}} + 1$$

La condizione appena esplicitata evidenzia che il beta è maggiore o minore di 1 a seconda di quanto il benchmark risulti inefficiente, sempre assumendo che la performance prefissata, G, sia positiva.
In generale, un investitore che riduce al minimo la TEV e massimizza la performance attesa condurrà una gestione migliore con un andamento di mercato in crescita (ovvero periodi con rendimenti del benchmark positivi) piuttosto che in calo. Se l'extra-performance attesa non è zero, il beta del portafoglio gestito rispetto al benchmark non può essere unitario a eccezione di fortuite circostanze in cui il rendimento atteso dell'indice sia pari al rendimento atteso del portafoglio di minima varianza globale. Questa condizione è improbabile ed implica che la maggior parte degli investitori che seguono un modello TEV non avranno beta unitari.
Dal punto di vista operativo, il nuovo problema di minimo, il quale tiene conto del valore di rischio sistematico della gestione, diventa:

$$\begin{cases} min_x Var(T) = x'Vx \\ s.t.\ x'E = G \\ x'1 = 0 \\ \dfrac{x'Vq_{\mathrm{B}}}{V_{\mathrm{B}}} + 1 = \beta \end{cases} \tag{2.1}$$

Di seguito viene resa nota la soluzione in termini di differenza dei pesi del portafoglio e del benchmark:

$$x = q_{\mathrm{P}} - q_{\mathrm{B}} = \gamma_1 \frac{V^{-1}E}{b} + \gamma_0 \frac{V^{-1}1}{c} + \gamma_{\mathrm{B}} q_{\mathrm{B}} \tag{2.2}$$

dove γ_1, γ_0 e γ_{B} sono degli scalari dati da:

$$\gamma_1 = b\frac{\delta_2(E_{\mathrm{P}} - E_{\mathrm{B}}) - \delta_1 V_{\mathrm{B}}(\beta - 1)}{d\delta_2 - \delta_1^2}$$
$$\gamma_0 = \frac{(E_{\mathrm{P}} - E_{\mathrm{B}})(E_{\mathrm{B}} - bV_{\mathrm{B}}) + (bE_{\mathrm{B}} - a)V_{\mathrm{B}}(\beta - 1)}{d\delta_2 - \delta_1^2}$$
$$\gamma_{\mathrm{B}} = \frac{-\delta_1(E_{\mathrm{P}} - E_{\mathrm{B}}) + dV_{\mathrm{B}}(\beta - 1)}{d\delta_2 - \delta_1^2}$$

dati:

$$a = E'V^{-1}E \qquad b = E'V^{-1}1 \qquad c = 1'V^{-1}1$$
$$\delta_1 = E_{\mathrm{B}} - \frac{b}{c} \qquad \delta_2 = V_{\mathrm{B}} - \frac{1}{c}$$

Come nel primo capitolo, è possibile esprimere la soluzione 2.2 in funzione dei portafogli di varianza minima globale e di intersezione della frontiera efficiente di Markowitz:

$$x = \gamma_1\omega_1 + \gamma_0\omega_0 + \gamma_{\mathrm{B}} q_{\mathrm{B}}$$
$$s.t. \begin{cases} \gamma_1 + \gamma_0 + \gamma_{\mathrm{B}} = 0 \\ \gamma_1 R_1 + \gamma_0 R_0 + \gamma_{\mathrm{B}} R_{\mathrm{B}} = G \end{cases} \tag{2.3}$$

A differenza della soluzione 1.2, dove x era la combinazione lineare di due soli portafogli appartenenti alla frontiera classica definita da Markowitz, la frontiera *beta* TEV viene determinata, oltre che da questi ultimi, anche dal benchmark. Si verifica, quindi, la separazione di tre fondi.
L'equazione che definisce la frontiera di minima varianza tracking error *beta* vincolata (o *beta-TEV*) si ottiene in questo modo:

$$
\begin{aligned}
V_{\mathrm{P}} &= V(R_{\mathrm{P}}) = q_{\mathrm{P}}' V q_{\mathrm{P}} \\
&= V_{\mathrm{B}} + 2x'Vq_{\mathrm{B}} + x'Vx \\
&= V_{\mathrm{B}} + 2V_{\mathrm{B}}(\beta - 1) + \\
&+ \frac{\delta_2 (E_{\mathrm{P}} - E_{\mathrm{B}})^2 - 2\delta_1 (E_{\mathrm{P}} - E_{\mathrm{B}}) V_{\mathrm{B}} (\beta - 1) + d V_{\mathrm{B}}^2 (\beta - 1)^2}{d\delta_2 - \delta_1^2}
\end{aligned}
\tag{2.4}
$$

Precisamente dal vincolo aggiuntivo si ottiene: $x'Vq_{\mathrm{B}} = V_{\mathrm{B}}(\beta - 1)$.
Per esaminare le proprietà dell'ottimizzazione della frontiera TEV *beta* vincolata si rimanda alla prossima sezione dove sarà possibile avere evidenza grafica delle particolarità.

2.1 Frontiera *beta* TEV calcolata sul campione

Il calcolo della frontiera TEV *beta* vincolata sull'intero campione si basa sui coefficienti ottenuti per il calcolo della frontiera senza vincoli aggiuntivi, quindi i valori di a, b, c, d, $\delta_{1,\mathrm{MSCI}}$ e $\delta_{1,\mathrm{EW}}$ sono inalterati, e vengono aggiunti $\delta_{2,\mathrm{MSCI}}$, $\delta_{2,\mathrm{EW}}$, calcolati per i due differenti indici.
Come suggerito da Roll, si è stabilito un intervallo di valori per il rischio sistematico pari a [0.8,1.2]. In questo modo si avrà la possibilità di valuta-

re distintamente le situazioni precedentemente descritte. Sono stati esclusi i valori negativi del parametro in quanto l'intento di questa tesi è valutare l'extra-performance di un portafoglio gestito rispetto al benchmark e non avrebbe senso valutare situazioni in cui il portafoglio non si muova nello stesso senso dell'indice. L'intervallo imposto in questa analisi, concretamente, assume questo significato: un beta pari a 0.8 indica una volatilità del 20% inferiore rispetto a quella dell'indice, con valore 1 la variabilità è uguale, infine, un coefficiente pari a 1.2 attribuisce al portafoglio gestito una rischiosità del 20% superiore.

Sia per il benchmark equally weighted sia per l'MSCI Europe sono stati calcolati γ_0, γ_1 e γ_{B} in funzione dell'extra-performance attesa e di beta; avendo fissato undici valori per ciascuno di questi parametri fissati arbitrariamente, i coefficienti stimati per ogni combinazione formano rispettivamente tre matrici $(11, 11)$.

Il calcolo della differenza dei pesi del portafoglio rispetto all'indice consiste nel prendere uno alla volta tutti i 121 valori di queste tre matrici e combinarli opportunamente come mostrato nella precedente sezione. Ovviamente, le sei matrici γ (considerando entrambi i benchmark) sono state costruite in modo tale che per tutte la posizione (i, j) sia la medesima combinazione di G e β. Alla fine, la differenza di pesi x per ognuno dei due casi è una matrice $(10, 121)$.

Con i dati a disposizione si riportano i grafici delle frontiere per l'indice MSCI Europe e l'equally weighted, per meglio valutare le frontiere beta-TEV si è deciso di introdurre nei grafici anche le frontiere TEV e media-varianza classica. I punti contrassegnati in maniera differente lungo le curve indicano i differenti livelli di extra-performance fissati.

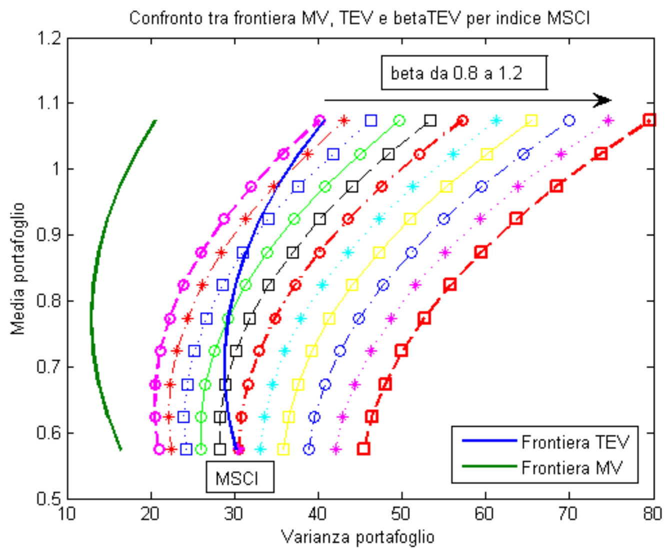

Figura 2.1: Frontiere beta-TEV a confronto per indice MSCI Europe

In questo primo grafico è subito evidente come la frontiera con rischio sistematico fissato a 0.8 abbia varianza inferiore a quella del benchmark e sia più vicina alla frontiera efficiente di Markowitz, su questa frontiera, distinta dal colore rosa, esistono portafogli dominanti con media dei rendimenti maggiore e volatilità inferiore. Abbiamo allora conferma degli studi di Roll i quali affermano che, se il rischio sistematico si trova nell'intervallo $(0, 1)$, esistono portafogli con varianza minore della varianza assunta da quelli sulla frontiera TEV aventi lo stesso rendimento atteso.
Per un livello di beta pari a 1 si nota che in $G = 0$ si trova nella stessa posizione anche l'indice e ha inizio la frontiera TEV senza vincoli aggiuntivi.
Il rischio, se posto pari a 1.2, porta l'allontanamento dalla frontiera efficiente ed è contraddistinto da maggior volatilità.
Oltre ad una rappresentazione sul piano cartesiano, si può mostrare la stessa distribuzione delle frontiere beta-TEV su uno spazio tridimensionale:

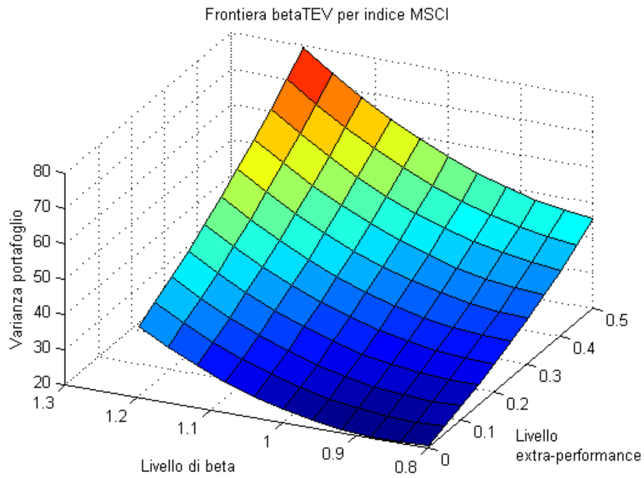

Figura 2.2: Frontiera beta-TEV per indice MSCI Europe

Nello spazio $(G, \beta, V_{\mathrm{P}})$ si vede chiaramente come con livelli di extra-performance attesa e di beta bassi la varianza di portafoglio rimanga contenuta, man mano che si incrementano i valori di questi parametri la varianza cresce.

Si prosegue ora con il grafico per l'analisi del caso equally weighted.

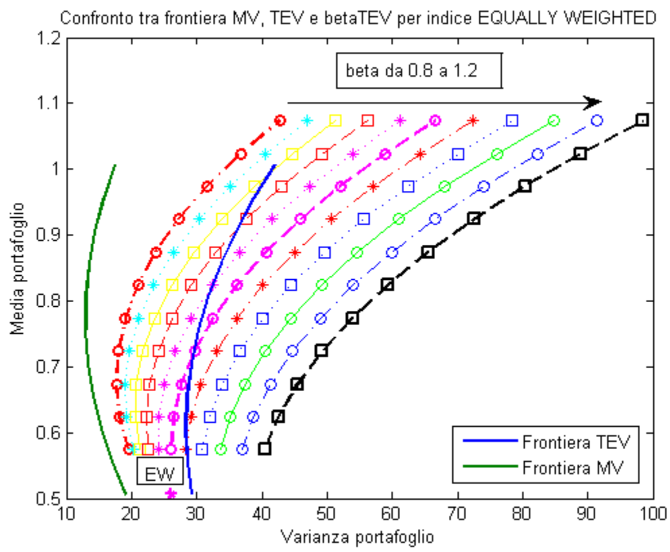

Figura 2.3: Frontiere beta-TEV a confronto per indice equally weighted

Le frontiere beta-TEV hanno tutte rendimenti attesi maggiori rispetto sia la classica frontiera media-varianza sia la frontiera TEV senza vincoli. A differenza di prima, anche con un livello beta pari a 1 esistono portafogli con la varianza inferiore a quelli situati sulla frontiera TEV senza vincoli aggiuntivi. Considerando un beta pari a 0.8 la curva è prossima a quella classica di media varianza, i portafogli su di essa, per quanto non efficienti, sovraperformano il benchmark.

Osservando la posizione dell'indice equally weighted, data la sua stessa volatilità, esistono portafogli con extra-performance positiva e con livello di rischio sistematico uguale a 1, questo significa che, a parità di varianza, è possibile investire in una composizione di assets che porta maggior profitto atteso.

Le particolarità di questo grafico sono dovute alla costruzione artificiale del benchmark, si ricordi, infatti, che esso è il risultato di una media dei rendimenti dei dieci indici settoriali dell'indice Morgan Stanley Capital International Europe.

Come nel caso precedente, viene riportata la distribuzione delle frontiere beta-TEV sulla superficie $(G, \beta, V_{\mathrm{P}})$.

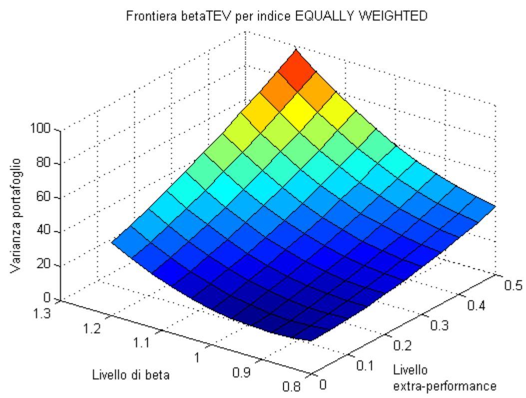

Figura 2.4: Frontiera beta-TEV per indice equally weighted

Rispetto all'indice MSCI Europe, per valori di G e beta elevati la varianza del portafoglio è aumentata. Osservando le volatilità per beta maggiore ad uno, l'indice value weighted risulta avere maggiore rischio, d'altro canto, è normale che esso sia contenuto se i parametri relativi all'extra-performance e al rischio sistematico sono piccoli.

In questo capitolo è stato dimostrato che è possibile trovare una soluzione di minimo per la volatilità del tracking error imponendo un vincolo sul parametro beta, il quale identifica il rischio sistematico che un investitore si assume nel gestire il suo portafoglio rispetto all'indice di riferimento. La strategia comporta un total return di media-varianza superiore rispetto al risultato ottenuto con la frontiera TEV del primo capitolo e anche rispetto al benchmark, quando quest'ultimo non si trova vicino alla frontiera efficiente classica.
Grazie anche all'analisi empirica sull'intero campione, si concorda con Roll, l'autore del metodo, nell'affermare che un beta inferiore all'unità è la scelta migliore nel condurre il proprio investimento utilizzando questo criterio.
E' necessario sapere che nessuno conosce con esattezza dove è realmente posta la frontiera efficiente globale, la quale, tra le altre condizioni, dipende dai rendimenti attesi dell'asset del gestore, i quali vengono stimati sempre con un margine d'errore a causa della ingente componente Noise in essi contenuta. Probabilmente il calcolo del tracking error darebbe maggiore indicazione della bontà delle stime in quanto l'errore standard della differenza del rendimento medio tra il portafoglio (P) e il benchmark (B) risulta quasi sicuramente più piccolo dell'errore che si calcola a partire dal solo portafoglio P. Si rimanda al capitolo riguardante l'analisi empirica effettuata con le rolling windows per il calcolo del tracking error vero e proprio.

Capitolo 3

Frontiera Tracking Error con vincolo sul Value at Risk

A fine anni ′90 il Comitato di Basilea fece entrare in vigore l'emendamento che obbligò le istituzioni finanziarie a detenere capitale non solo a fronte dei rischi di natura creditizia ma anche dei rischi di mercato. Tale emendamento definiva le linee guida di un metodo standardizzato per la misurazione dei requisiti patrimoniali, ovvero la quota di patrimonio da tenere immobilizzata in caso di eventi inattesi, ma questo approccio considerava separatamente i vari strumenti finanziari senza tener conto delle possibili correlazioni esistenti tra questi. Il concetto di Valore a Rischio (detto anche VaR) è stato introdotto da JP Morgan e consiste in una misura di rischio su cui calcolare i requisiti patrimoniali minimi.
Dato un portafoglio di attività finanziarie, il VaR rappresenta *la massima perdita potenziale nella quale si può incorrere in un determinato orizzonte temporale (h), con una prefissata probabilità (α), in condizioni normali di mercato.* I movimenti del mercato sono rappresentati dalle variazioni dei prezzi, dunque la probabilità con cui si manifestano perdite e profitti (*Profits*

& Loss, PL) dipende dalla distribuzione di tali variazioni e, sopratutto, dalla loro variabilità. Per individuare il VaR è necessario trovare la variazione del valore del portafoglio associata ad un certo livello di probabilità, α, la quale corrisponde alla frequenza con cui un dato livello di perdita si presenta. In termini probabilistici, il Valore a Rischio è il percentile α-esimo della distribuzione dei profitti e delle perdite del portafoglio ad h periodi, in condizioni normali di mercato. Qualora esso venga espresso in termini percentuali rispetto al valore del portafoglio, coinciderebbe con il percentile α-esimo della distribuzione dei rendimenti del portafoglio.

L'accordo di Basilea II richiede alle istituzioni finanziarie che il Value at Risk venga calcolato con un livello α dell'1% e un periodo temporale h di 10 giorni, in assenza di indicazioni esterne questi parametri dipendono dall'attitudine al rischio dell'investitore, indicativamente: più basso è α, più elevato e conservativo è il VaR (e viceversa), infine l'orizzonte temporale andrebbe fissato secondo il periodo che si aspetta di rimanere esposti ad una posizione, h dovrebbe crescere con l'entità dell'investimento e con la illiquidità del mercato.

Ad oggi non esiste un metodo universalmente migliore con cui stimare la distribuzione dei rendimenti (o dei PL) del portafoglio e questo è influenzato anche dalle relazioni esistenti tra gli strumenti finanziari che compongono lo stesso, a seconda di come questi fattori vengano considerati si ottengono stime del capitale a rischio che possono differire anche molto. Di recente sono stati portati a termine degli studi che, a partire dal metodo classico di Roll, sviluppavano un vincolo sul Value at Risk al fine di minimizzare la volatilità del tracking error contenendo le perdite potenziali. Gli autori del metodo descritto in questo capitolo, Alexander, Baptista e Palomba, Riccetti, fanno riferimento alla definizione di VaR inteso come massima perdita subita da

un portafoglio su un intervallo temporale e una probabilità (p) fissati.
Un vincolo aggiuntivo che riguarda il Valore a Rischio è di particolare interesse perché per prima cosa la gestione dei fondi si basa su questo parametro per allocare gli assets tra i manager, per limitare l'insieme di rischi e per monitorare questi due aspetti. In secondo luogo, sotto alcune condizioni, l'uso del VaR come misura del rischio è coerente con la massimizzazione dell'utilità attesa, in ultimo, esso può essere molto utile per ridurre il rammarico delle perdite subite in un investimento. Assumendo che i rendimenti di portafoglio siano distribuiti come una Normale, questa misura di rischio si calcola:

$$VaR = -E_{\mathrm{P}} + z\sigma_{\mathrm{P}}$$

dove $R_{\mathrm{P}} \sim N(E_{\mathrm{P}}, \sigma_{\mathrm{P}}^2)$ e $z = N^{-1}(p)$, che rappresenta la funzione inversa della distribuzione normale standard valutata in una probabilità fissata p. Se il gestore è interessato a determinare *ex-ante* sia il livello atteso di extra-performance, G, sia il livello di Value at Risk per minimizzare la varianza del tracking error del portafoglio deve risolvere:

$$\begin{cases} min_x Var(T) = x'Vx \\ s.t. \\ x'E = G \\ x'1 = 0 \\ z\sqrt{(x+q_{\mathrm{B}})'V(x+q_{\mathrm{B}})} - (x+q_{\mathrm{B}})'E = VaR \end{cases} \tag{3.1}$$

Dalla condizione precedente, si può esplicitare la deviazione standard del portafoglio in funzione dei parametri G e VaR:

$$\sigma_{\mathrm{P}} = \frac{VaR + E_{\mathrm{P}}}{z} = \frac{VaR + G + E_{\mathrm{B}}}{z} \tag{3.2}$$

Da cui si ricava facilmente una formula alternativa del problema di minimo 3.1:

$$\begin{cases} min_x Var(T) = x'Vx \\ s.t. \\ x'E = G \\ x'1 = 0 \\ (x+q_{\mathrm{B}})'V(x+q_{\mathrm{B}}) = \frac{(VaR+G+E_{\mathrm{B}})^2}{z^2} \end{cases} \tag{3.3}$$

La soluzione a cui si perviene in termini di differenza tra i pesi del portafoglio e i pesi del benchmark è simile all'equazione 2.2 ma con differenti coefficienti.

$$x = q_{\mathrm{P}} - q_{\mathrm{B}} = \phi_1 \frac{V^{-1}E}{b} + \phi_0 \frac{V^{-1}1}{c} + \phi_{\mathrm{B}} q_{\mathrm{B}} \tag{3.4}$$

Dalla formulazione del problema di minimo è facile intuire che si otterranno due soluzioni per ciascun parametro, perciò si avranno due soluzioni anche per l'espressione della varianza.
I parametri ϕ variano in funzione dell'extra-performance attesa, del VaR e della probabilità associata ad esso. Sono così definiti:

$$\phi_{\mathrm{B}} = -1 \mp \sqrt{\frac{\psi}{d}V_{\mathrm{P}} + \left(\frac{\psi}{d}\right)^2 - \frac{\psi}{d}\left(\frac{G^2+2\delta_1}{d} + V_{\mathrm{B}}\right)}$$

$$\phi_1 = \frac{b}{ac-b^2}\left(cG + cE_{\mathrm{B}} - b \mp (b - cE_{\mathrm{B}})\sqrt{\frac{\psi}{d}V_{\mathrm{P}} + \left(\frac{\psi}{d}\right)^2 - \frac{\psi}{d}\left(\frac{G^2+2\delta_1}{d} + V_{\mathrm{B}}\right)}\right)$$

$$\phi_0 = \frac{c}{ac-b^2}\left(a + bE_{\mathrm{B}} - bG \mp (bE_{\mathrm{B}} - a)\sqrt{\frac{\psi}{d}V_{\mathrm{P}} + \left(\frac{\psi}{d}\right)^2 - \frac{\psi}{d}\left(\frac{G^2+2\delta_1}{d} + V_{\mathrm{B}}\right)}\right)$$

Ricordando che le variabili implicate in questi calcoli sono:

$$
\begin{aligned}
&a = E'V^{-1}E && b = E'V^{-1}1 && c = 1'V^{-1}1 \\
&d = \frac{ac - b^2}{c} && \delta_1 = E_{\mathrm{B}} - \frac{b}{c} && \delta_2 = V_{\mathrm{B}} - \frac{1}{c} \\
&\psi = d\delta_2 - \delta_1^2 \\
&V_{\mathrm{P}} = \left(\frac{VaR + G + E_{\mathrm{B}}}{z}\right)^2
\end{aligned}
$$

In questo contesto, i livelli prefissati del VaR e di G influenzano significativamente la varianza del tracking error, per questo motivo desta maggior interesse la soluzione per quest'ultima rispetto alla varianza totale del portafoglio.

$$
\begin{aligned}
V_{\mathrm{T}} = \frac{(VaR + G + E_{\mathrm{B}})^2}{z^2} - 2\frac{G\delta_1}{d} - V_{\mathrm{B}} + \frac{2\psi}{d} \mp \\
\mp 2\sqrt{\frac{\psi(VaR + G + E_{\mathrm{B}})^2}{dz^2} - \frac{\psi(G + \delta_1)^2}{d^2} + \frac{\psi(\delta_2 - V_{\mathrm{B}})}{d}}
\end{aligned}
\tag{3.5}
$$

Nella sezione successiva verranno proposti i risultati delle soluzioni dal punto di vista grafico.

3.1 Frontiera VaR TEV calcolata sul campione

I livelli di probabilità α utilizzati per individuare la massima perdita potenziale a cui si può incorrere sono stati fissati pari al 10%, 5%, 1% e 0.01%, per ciascuno di essi è stata calcolata la funzione inversa della distribuzione normale standard.

p	0.90	0.95	0.99	0.9999
z	1.2816	1.6449	2.3263	3.7190

Tabella 3.1: Valori della funzione inversa normale standard per $p = 90\%, 95\%, 99\%, 99,99\%$

Per ciascuno di questi valori è stato calcolato il Value at Risk riferito ai due indici di riferimento, per entrambi ne è risultato che per un livello di probabilità pari al 90% il valore minimo assunto dal VaR è circa pari a 5.5, questo significa che investendo 1000$ la massima perdita potenziale nella quale si può incorrere in venti anni è di 5500$. Man mano che si considerano probabilità più elevate, quindi 99.99%, la massima perdita potenziale sia nel caso dell'MSCI Europe sia dell'indice equally weighted è di 24000$ circa, poiché il livello massimo del VaR raggiunto nella stima è circa 24.
Bisogna tener presente che l'intervallo temporale su cui viene calcolato non è idoneo. Infatti dal 1995 al 2014 si sono succedute delle crisi finanziarie e il periodo è troppo ampio per questo tipo di valutazioni, questi motivi possono recare distorsione alle stime, ma al fine di mostrare come si presenta il metodo di minimizzazione del tracking error con vincolo sul VaR si può fare una eccezione.
L'intervallo di valori entro cui è stato fatto variare il Valore a Rischio è, quindi, da 5 a 25 per entrambi i benchmark considerati.
Come descritto nella sezione precedente, il calcolo della varianza di minimo tracking error fornisce due soluzioni, ovviamente, è apprezzabile la soluzione che risulta avere valori inferiori. I risultati saranno proposti in due grafici per ogni indice, le soluzioni della varianza TE assumeranno la forma di superfici in funzione dei diversi livelli di G e del VaR. Essendoci quattro livelli di probabilità, saranno raffigurate quattro superfici, la più alta corrisponde ad $\alpha = 0.1$, la più bassa ad $\alpha = 0.0001$.
Vengono quindi proposti i grafici sullo spazio (G, VaR, V_{T}) per l'indice MSCI Europe.

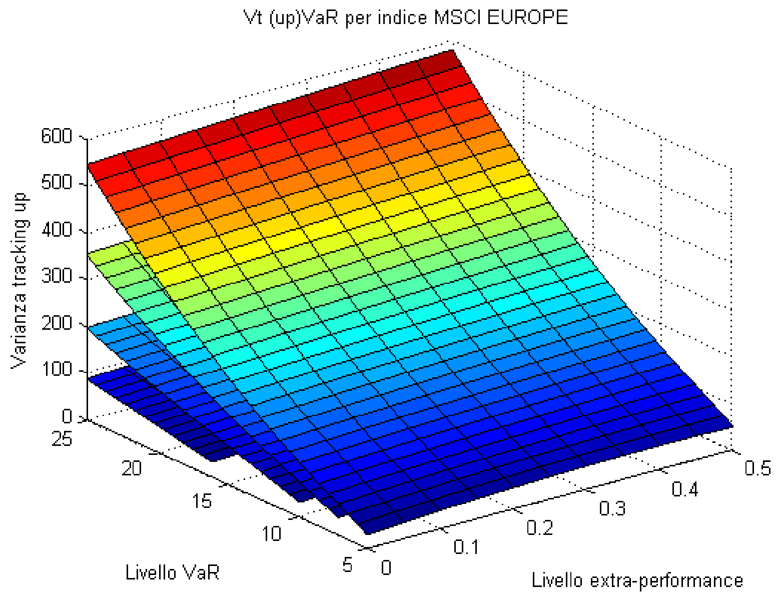

Figura 3.1: Varianza tracking error (soluzione up) per $p = 90\%, 95\%, 99\%, 99.99\%$ (MSCI)

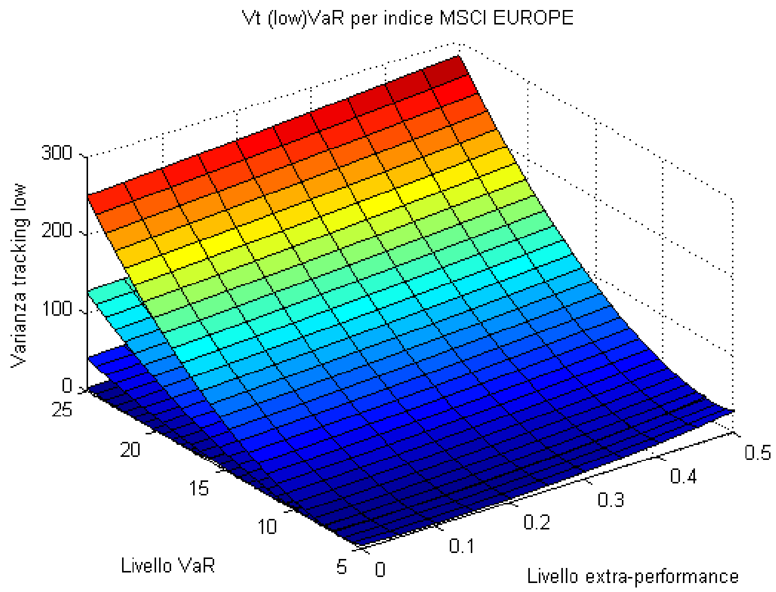

Figura 3.2: Varianza tracking error (soluzione low) per $p = 90\%, 95\%, 99\%, 99.99\%$ (MSCI)

In ciascun grafico al variare dell'extra-performance attesa dei rendimenti, a parità di Valore a Rischio, la volatilità non aumenta di molto e le differenze non sono significative. Con l'aumento del VaR si riscontra anche un aumento della varianza.

Per ogni livello di probabilità, a parità del livello di VaR, la varianza della soluzione denominata 'low' è significativamente inferiore ai valori assunti dalla varianza 'up'. Per esempio, per una probabilità $p = 90\%$ e $VaR = 25$, per 'low' la varianza è in media 270, per 'up' 570. Dai risultati si evince che la soluzione migliore è la 'low' che corrisponde al secondo grafico.

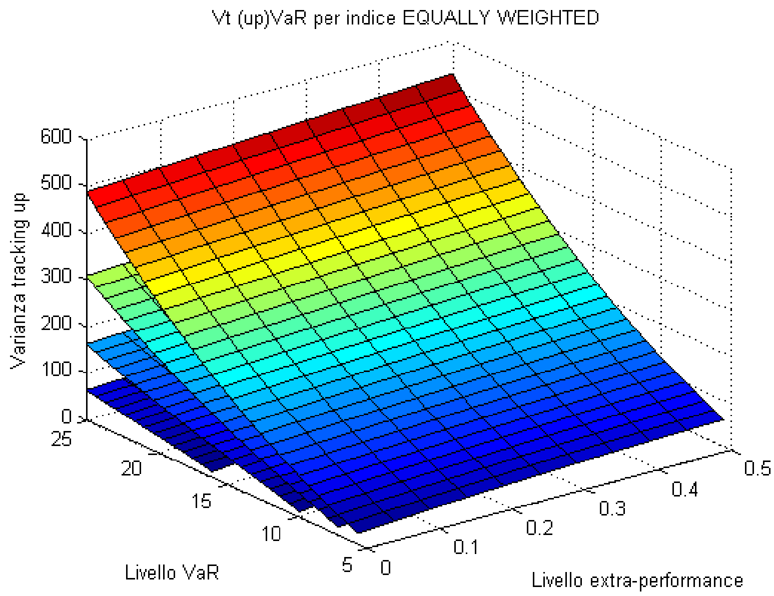

Figura 3.3: Varianza tracking error (soluzione up) per $p = 90\%, 95\%, 99\%, 99.99\%$ (EW)

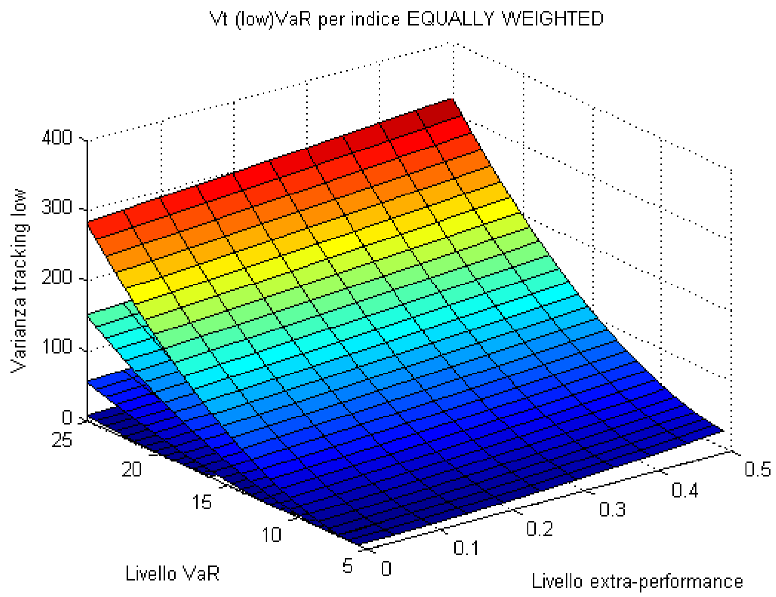

Figura 3.4: Varianza tracking error (soluzione low) per $p = 90\%, 95\%, 99\%, 99.99\%$ (EW)

L'indice equally weighted ha valori della varianza del tracking error leggermente inferiori rispetto al precedente benchmark. Anche in questo caso si possono notare quattro superfici leggermente curve corrispondenti alle quattro probabilità prefissate e, come prima, tra le due soluzioni esiste una differenza significativa tra i due risultati. Tra i due insiemi di soluzioni 'up' e 'low', come nel caso precedente, è preferibile il caso 'low', il quale presenta variabilità inferiore nelle varie combinazioni tra VaR e G.

E' stato riscontrato che in entrambi i risultati riguardanti gli indici, confrontando i grafici, la volatilità massima che viene raggiunta dal tracking error si trova in corrispondenza di $p = 90\%$ e di valori VaR maggiori di 20, per una probabilità pari a 99.99% si hanno valori della varianza non eccessivamente elevati ma costanti e le uniche soluzioni valide per il parametro del Value at Risk sono sempre oltre il valore 15. Tutto ciò è normale in quanto per una probabilità bassa come 90% è naturale avere elevata variabilità al-

l'aumentare del VaR, le massime perdite potenziali possono essere ingenti e, appunto perché poco probabili, meno prevedibili. Invece, per una probabilità elevata, la volatilità è maggiormente stabile per VaR grandi perché esso è conservativo.
L'incremento di probabilità implica una forte riduzione della varianza del tracking error.
La scelta del livello di VaR dipende dal grado di avversione al rischio dell'investitore: se egli non ama il rischio, per essere meglio consapevole delle perdite in cui potrebbe imbattersi dovrebbe scegliere un livello di probabilità del VaR maggiore.

Capitolo 4

Frontiera Tracking Error con vincolo sul Conditional Value at Risk

Nel prendere decisioni importanti sugli investimenti, le indicazioni ricevute dal Valore a Rischio potrebbero non essere giustificate da un punto di vista rigorosamente teorico. Per chiarire meglio questo concetto, vengono enunciate le proprietà necessarie per definire 'coerente' una misura di rischio:

- *invarianza transizionale*: se ad una componente aleatoria (A) si aggiunge una una componente certa (i.e. titolo privo di rischio), l'indice di rischiosità si riduce esattamente della proporzione di ricchezza investita nel titolo risk free ($\mathrm{r_f}$), ovvero $VaR(A + r_{\mathrm{f}}) = VaR(A) - r_{\mathrm{f}}$

- *sub-additività*: la diversificazione di portafoglio deve ridurre il rischio dello stesso. L'indice di rischiosità riferito ad un portafoglio non è mai più elevato della somma degli indici calcolati sui singoli titoli che compongono il portafoglio stesso. $VaR(A + B) \leq VaR(A) - VaR(B)$

- *omogeneità positiva*: aumentando l'investimento in un titolo, anche l'indice di rischiosità deve aumentare, infatti maggiore è la ricchezza investita, superiore è anche il rischio connesso all'investimento. Per $\epsilon > 0$, $VaR(\epsilon A) = \epsilon VaR(A)$

- *monotonicità*: se il titolo A ha rendimenti sempre maggiori rispetto al titolo B, allora investire nel titolo A deve essere meglio che investire nel titolo B. $r(A) \geq r(B) \rightarrow VaR(A) \leq VaR(B)$

Il Value at Risk secondo queste proprietà non è una misura di rischio coerente perché non soddisfa la condizione di sub-additività, lo diventa solo sotto l'assunzione di gaussianità dei rendimenti, cosa assai restrittiva.
Al fine di superare questo limite, in questo capitolo si analizzerà una frontiera di minima varianza del tracking error con il vincolo aggiuntivo che riguarda una misura coerente del rischio: il Conditional Value at Risk (detto anche CVaR o *Expected Shortfall*), assumendo nuovamente la normalità dei rendimenti del portafoglio.
Sotto condizioni regolari sulla distribuzione, il CVaR è l'opposto del valore atteso del rendimento quando questo è inferiore al suo valore critico, il quale è minore dell'opposto del VaR, ovviamente prefissando un orizzonte temporale e una probabilità p.

$$\begin{aligned} CVaR = -E(R_{\mathrm{P}}|R_{\mathrm{P}} < VaR) &= -E\left(E_{\mathrm{P}} + \sigma_{\mathrm{P}} N | N < \frac{-VaR - E_{\mathrm{P}}}{\sigma_{\mathrm{P}}}\right) \\ &= -E\left(E_{\mathrm{P}} + \sigma_{\mathrm{P}} N | N < -z\right) = -E_{\mathrm{P}} - \sigma_{\mathrm{P}} E\left(N | N < -z\right) \end{aligned}$$

N indica una variabile normale standard, mentre la sua funzione di densità viene denominata con $n(.)$, allora il CVaR equivale a:

$$CVaR = -E_{\mathrm{P}} + \sigma_{\mathrm{P}} \frac{n(z)}{1-p}$$

Il gestore che intende minimizzare la varianza del tracking error del suo portafoglio controllando sia il livello di extra-performance atteso, G, sia il livello di Conditional Value at Risk, deve risolvere il problema di minimo:

$$\begin{cases} min_x Var(T) = x'Vx \\ s.t. \\ x'E = G \\ x'1 = 0 \\ \frac{n(z)}{1-p}\sqrt{(x+q_{\mathrm{B}})'V(x+q_{\mathrm{B}})} - (x+q_{\mathrm{B}})'E = CVaR \end{cases} \tag{4.1}$$

Esprimendo la deviazione standard del portafoglio in funzione dei parametri G e $CVaR$ così:

$$\sigma_{\mathrm{P}} = \frac{CVaR + E_{\mathrm{P}}}{n(z)}(1-p) = \frac{CVaR + G + E_{\mathrm{B}}}{n(z)}(1-p) \tag{4.2}$$

Da cui il problema di minimo 4.1 diventa:

$$\begin{cases} min_x Var(T) = x'Vx \\ s.t. \\ x'E = G \\ x'1 = 0 \\ (x+q_{\mathrm{B}})'V(x+q_{\mathrm{B}}) = \left(\frac{CVaR+G+E_{\mathrm{B}}}{n(z)}(1-p)\right)^2 \end{cases} \tag{4.3}$$

Analogamente al caso della frontiera di varianza minima del tracking error con vincolo sul VaR, la soluzione in termini di extra-weights è data da:

$$x = q_{\mathrm{P}} - q_{\mathrm{B}} = \phi_1 \frac{V^{-1}E}{b} + \phi_0 \frac{V^{-1}1}{c} + \phi_{\mathrm{B}} q_{\mathrm{B}} \tag{4.4}$$

Ovviamente, i parametri ϕ sono differenti dal precedente capitolo dal punto di vista numerico ma vengono calcolati con le stesse formule:

$$\phi_{\mathrm{B}} = -1 \mp \sqrt{\frac{\psi}{d}V_{\mathrm{P}} + \left(\frac{\psi}{d}\right)^2 - \frac{\psi}{d}\left(\frac{G^2 + 2\delta_1}{d} + V_{\mathrm{B}}\right)}$$

$$\phi_1 = \frac{b}{ac - b^2}\left(cG + cE_{\mathrm{B}} - b \mp (b - cE_{\mathrm{B}})\sqrt{\frac{\psi}{d}V_{\mathrm{P}} + \left(\frac{\psi}{d}\right)^2 - \frac{\psi}{d}\left(\frac{G^2 + 2\delta_1}{d} + V_{\mathrm{B}}\right)}\right)$$

$$\phi_0 = \frac{c}{ac - b^2}\left(a + bE_{\mathrm{B}} - bG \mp (bE_{\mathrm{B}} - a)\sqrt{\frac{\psi}{d}V_{\mathrm{P}} + \left(\frac{\psi}{d}\right)^2 - \frac{\psi}{d}\left(\frac{G^2 + 2\delta_1}{d} + V_{\mathrm{B}}\right)}\right)$$

con:

$$V_{\mathrm{P}} = \left(\frac{CVaR + G + E_{\mathrm{B}}}{n(z)}(1 - p)\right)^2$$

I parametri ϕ, ancora una volta, variano in funzione dell'extra-performance attesa e, a differenza del vincolo sul VaR, in funzione del Conditional Value at Risk e della probabilità associata ad esso.
Sempre in analogia alla frontiera TEV vista precedentemente, è facile intuire che si otterranno due soluzioni per ciascun parametro, perciò si avranno due soluzioni anche per l'espressione della varianza.

$$V_{\mathrm{T}} = 2\pi \exp z^2(1-p)^2(CVaR + G + E_{\mathrm{B}})^2 - 2\frac{G\delta_1}{d} - V_{\mathrm{B}} + 2\frac{\psi}{d} \mp$$
$$\mp 2\sqrt{2\pi \exp z^2 d\psi(1-p)^2(CVaR + G + E_{\mathrm{B}})^2 + \psi(G + \delta_1)^2 + d\psi(\delta_2 - V_{\mathrm{B}})} \tag{4.5}$$

Nella sezione successiva verranno proposti i risultati delle soluzioni dal punto di vista grafico.

4.1 Frontiera CVaR TEV calcolata sul campione

L'analogia che si è riscontrata nella definizione teorica della frontiera di minima varianza del tracking error con vincolo sul CVaR rispetto al caso con il VaR, si ritrova anche nel calcolo empirico e nei risultati veri e propri. Ancora una volta, si assume che i rendimenti del portafoglio siano distribuiti come una normale.
A partire dalle probabilità mantenute pari al $90\%, 95\%, 99\%, 99.99\%$, sono state calcolate le funzioni di densità relative a queste.

p	0.90	0.95	0.99	0.9999
$n(.)$	0.1755	0.1031	0.0267	0.0004

Tabella 4.1: Valori della funzione di densità della normale standard per $p = 90\%, 95\%, 99\%, 99, 99\%$

Per ciascuno dei benchmark qui considerati, è stato calcolato il CVaR per tutte le probabilità sopra specificate, si è ottenuto un intervallo entro cui far variare il parametro pari a $[8, 26]$, all'aumentare della probabilità e del livello atteso di extra-performance la variabile assume valori sempre più grandi.
Dopo aver ottenuto la varianza di portafoglio per entrambi gli indici di riferimento, sono state trovate le due soluzioni della varianza del tracking error che viene rappresentata in funzione di G e del $CVaR$.
Di seguito sono riportati i grafici delle rispettive soluzioni.

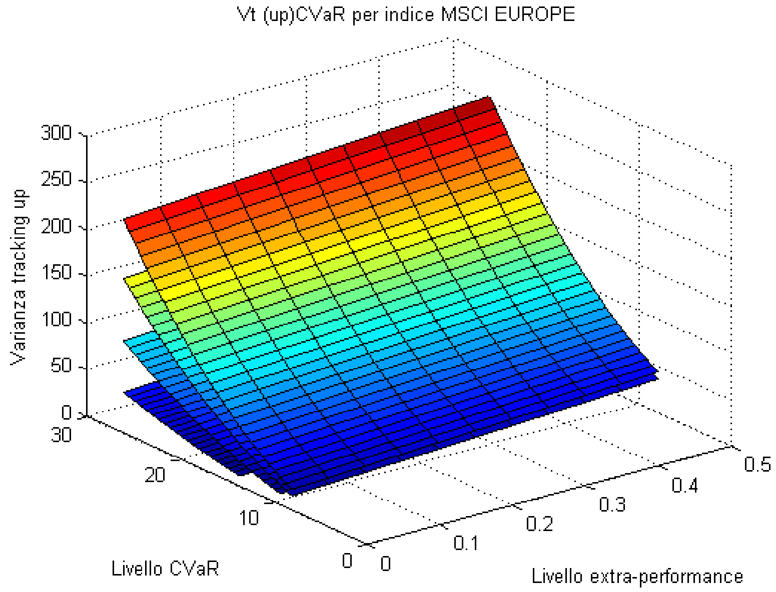

Figura 4.1: Varianza tracking error (soluzione up) per $p = 90\%, 95\%, 99\%, 99.99\%$ (MSCI)

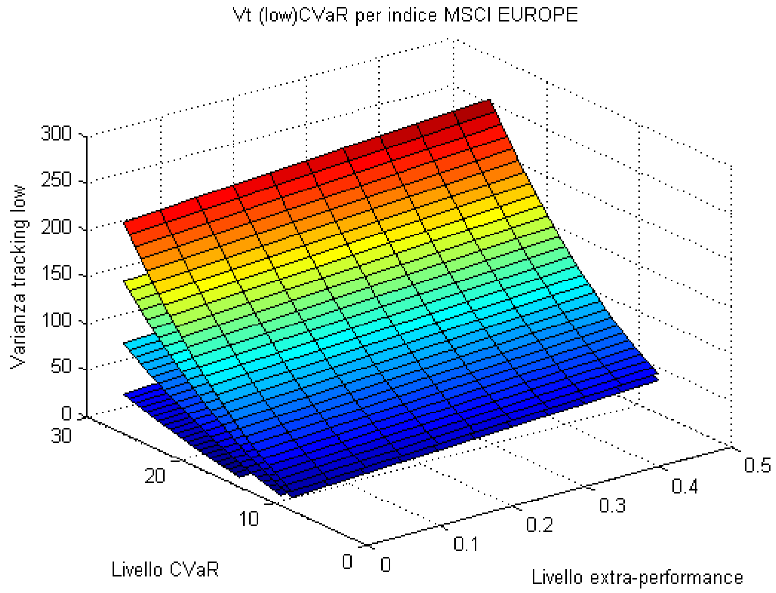

Figura 4.2: Varianza tracking error (soluzione low) per $p = 90\%, 95\%, 99\%, 99.99\%$ (MSCI)

Mentre il metodo basato sul VaR produceva due soluzioni per la varianza del tracking error che differivano molto, i valori assunti dai risultati ottenuti con il vincolo sul Conditional Value at Risk sono molto prossimi tra loro: la distanza delle rispettive superfici curve tra la soluzione 'low' e la soluzione 'up' non è marcata. Inoltre, le varianze risutate dal CVaR, per tutte le combinazioni dell'extra-performance, sono inferiori alle $V_{\mathrm{T,MSCI}}$ (ottenuto con il vincolo sul VaR) del capitolo precedente. Il valore massimo raggiunto è dato dalla combinazione del livello di extra-performance pari a 0.5 e del CVaR pari a 25, in questo caso $V_{\mathrm{T,MSCI,cvar}}$ vale circa 250.

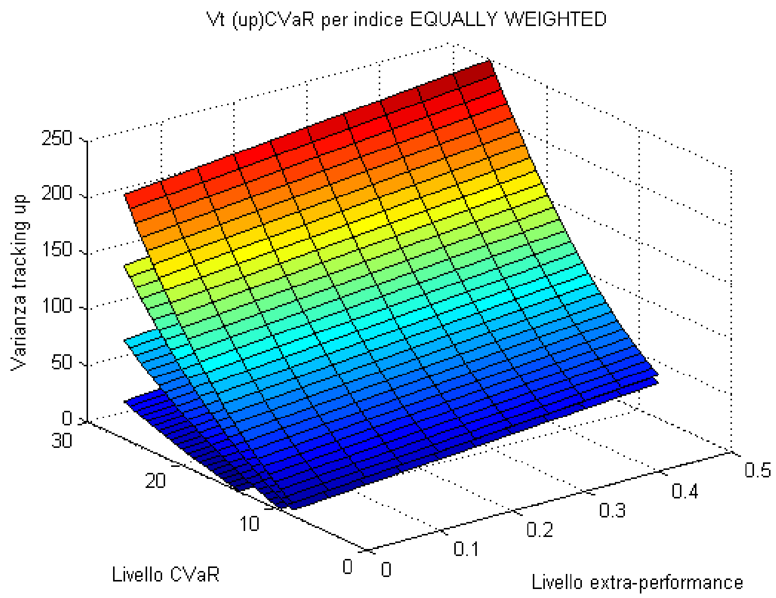

Figura 4.3: Varianza tracking error (soluzione up) per $p = 90\%, 95\%, 99\%, 99.99\%$ (EW)

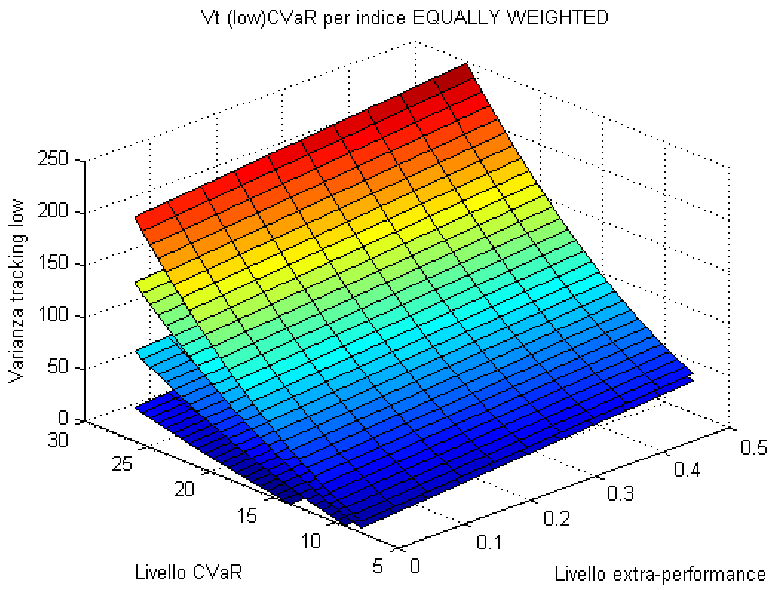

Figura 4.4: Varianza tracking error (soluzione low) per $p = 90\%, 95\%, 99\%, 99.99\%$ (EW)

Analizzando i risultati pervenuti dall'utilizzo dell'indice equally weighted, vengono confermate le informazioni derivanti dal benchmark value weighted. Risultano valori della varianza leggermente più bassi per il caso 'low' e, per ogni combinazione degli altri parametri, la volatilità sembra essere diminuita rispetto al metodo con il vincolo sul VaR. Anche in questo caso il valore massimo raggiunto è circa 250 data l'extra-performance pari a 0.5 e il CVaR pari a 25.

Si può affermare nuovamente che all'aumentare della probabilità p si ottengono valori ridotti della varianza del tracking error, per $p = 90\%$ la superficie di soluzioni per $\mathrm{V_T}$ è quella che sovrasta le altre curve, per $p = 99.99\%$ la variabilità è più contenuta ed, inoltre, subisce minore dispersione.

Capitolo 5

Analisi empirica

L'analisi empirica vera e propria riguarda la valutazione dei tracking errors calcolati a partire dai metodi presentati nei precedenti capitoli.
Con il procedimento delle rolling windows è stato suddiviso il campione di 239 osservazioni mensili (una osservazione è stata utilizzata per inizializzare il calcolo dei rendimenti percentuali degli assets) in 179 finestre composte da 60 osservazioni ciascuna. Questo approccio è molto comune in ambito statistico in quanto, con campioni composti da tante osservazioni o, nel caso delle serie storiche finanziarie riguardanti un periodo storico particolare, permette di valutare l'oggetto della ricerca in modo più approfondito.
Ricordando che:

$$
\begin{aligned}
T &= E(R_{\mathrm{P}} - R_{\mathrm{B}}) \\
TEV &= Var(T) = Var(R_{\mathrm{P}} - R_{\mathrm{B}}) = q_{\mathrm{P}}' V q_{\mathrm{P}} + q_{\mathrm{B}}' V q_{\mathrm{B}} - 2 q_{\mathrm{P}}' V q_{\mathrm{B}} \\
&= (q_{\mathrm{P}} - q_{\mathrm{B}})' V (q_{\mathrm{P}} - q_{\mathrm{B}})
\end{aligned}
$$

le applicazioni introdotte precedentemente sono servite a calcolare i pesi e i rendimenti del portafoglio, così da determinare i tracking error e le relative varianze.

In generale, per entrambi i benchmark e per ciascun metodo sono state definite le finestre rolling: $1, \ldots, 60$, $2, \ldots, 61$ e così via fino a $179, \ldots, 238$, per ogni rolling window sono stati calcolati i pesi del portafoglio, i quali venivano moltiplicati per i rendimenti degli assets al tempo $t + 1$ e si giungeva alla serie dei rendimenti di portafoglio (un vettore di dimensione $(179, 1)$). Questo procedimento prevede l'uso delle prime 60 osservazioni per inizializzare il processo, quindi i portafogli trovati sono relativi al periodo luglio 1999-dicembre 2014.
Il conseguente calcolo del tracking error ha determinato uno scalare che sintetizza l'eccesso di rendimento del portafoglio rispetto all'indice di riferimento. E' giusto premettere che una volatilità del tracking error bassa potrebbe implicare sia periodi di performance pessime sia, naturalmente, periodi di risultati relativamente superlativi.
Ottenere una bassa varianza del tracking error è un obiettivo per molti investitori, questo perché gestioni attive 'ideali' vorrebbero sovraperformare il benchmark ogni mese per un fissato costo di tasse e spese; in più, i promoter finanziari intendono mantenere un livello basso di TEV per essere giudicati positivamente alla fine dell'anno.

Una prima analisi dei rendimenti di portafoglio ottenuti con tutti i quattro approcci viene fornita dalle statistiche di base suddivise per i valori di extra-performance pari a 0 e 0.5:

metodo	media	varianza	min	max
TEV	0.2548	36.4868	-20.8826	16.8905
beta= 0.8-TEV	0.3912	25.5644	-15.4943	12.9903
beta= 1-TEV	0.2548	36.4868	-20.8826	16.8905
beta= 1.2-TEV	0.1184	52.0284	-26.2709	21.0943
VaR90%-TEV	2.1352	2.0019e+04	-788.5394	465.6684
VaR99.99%-TEV	2.3684	2.1037e+04	-808.2068	475.1613
CVaR90%-TEV	2.2464	2.0441e+04	-796.7236	469.9518
CVaR99.99%-TEV	2.3767	2.1069e+04	-808.7110	475.3406

Tabella 5.1: Statistiche descrittive per i rendimenti di portafogli (MSCI) per $G = 0$

metodo	media	varianza	min	max
TEV	0.4205	38.8731	-23.4727	16.2455
beta= 0.8-TEV	0.6054	28.3028	-17.7559	14.9117
beta= 1-TEV	0.4690	39.2154	-23.1442	16.3905
beta= 1.2-TEV	0.3326	54.7474	-28.5325	18.5621
VaR90%-TEV	2.9193	2.2248e+04	-834.7637	488.1145
VaR99.99%-TEV	2.7281	2.1163e+04	-814.4883	476.7055
CVaR90%-TEV	2.8549	2.1804e+04	-826.5096	483.8008
CVaR99.99%-TEV	2.7230	2.1127e+04	-813.7199	476.2178

Tabella 5.2: Statistiche descrittive per i rendimenti di portafogli (MSCI) per $G = 0.5$

metodo	media	varianza	min	max
TEV	0.3350	33.7945	-18.8419	15.6087
beta= 0.8-TEV	0.4768	23.2948	-13.8203	12.5024
beta= 1-TEV	0.3350	33.7945	-18.8419	15.6087
beta= 1.2-TEV	0.1932	49.5970	-23.8635	19.9561
VaR90%-TEV	1.6083	1.4081e+04	-659.7574	387.8988
VaR99.99%-TEV	1.7658	1.4837e+04	-676.7988	396.5628
CVaR90%-TEV	1.6811	1.4395e+04	-667.0579	391.8803
CVaR99.99%-TEV	1.7719	1.4862e+04	-677.1920	397.0030

Tabella 5.3: Statistiche descrittive per i rendimenti di portafogli (EQ. W.) per $G = 0$

metodo	media	varianza	min	max
TEV	0.5007	36.8884	-21.4319	17.2060
beta= 0.8-TEV	0.6985	26.4026	-16.0254	15.6911
beta= 1-TEV	0.5567	37.3405	-21.0470	17.3432
beta= 1.2-TEV	0.4149	53.5811	-26.0686	18.9953
VaR90%-TEV	2.2264	1.5726e+04	-700.7974	408.4895
VaR99.99%-TEV	2.0947	1.4908e+04	-682.2255	397.7437
CVaR90%-TEV	2.1800	1.5391e+04	-693.4447	404.4889
CVaR99.99%-TEV	2.0917	1.4882e+04	-681.4831	397.5688

Tabella 5.4: Statistiche descrittive per i rendimenti di portafogli (EQ. W.) per $G = 0.5$

Sono state proposte le statistiche descrittive dei rendimenti di portafoglio per i livelli di extra-performance attesa pari a zero per valutare una gestione di tipo passivo e pari a 0.5 per una gestione attiva.
Nel primo e terzo grafico si può avere una prima impressione sulla differenza che intercorre tra i due tipi di benchmark nel caso un investitore volesse replicarli: i rendimenti medi dei portafogli ottenuti con i due metodi di Roll sono nettamente inferiori a quelli ottenuti con i vincoli sul VaR e CVaR. Da valori medi per i rendimenti che non superano lo 0.5 si passa a valori sopra 1.6. D'altro canto, la volatilità media a cui sono esposti questi ultimi portafogli è molto grande e questo comporta un aumento significativo del rischio che probabilmente non attirerebbe l'investitore. I risultati ottenuti con i vincoli sul VaR e CVaR dipendono anche, come anticipato nel primo capitolo, dall'assenza di vincoli di positività sui pesi del portafoglio, questo comporta valori estremi dei parametri associati ai portafogli calcolati e sia il tracking error sia la sua varianza ne risentono.
Nel secondo e quarto grafico, invece, sono proposte le statistiche di base per i portafogli gestiti in modo attivo, anche in questo caso permane la differenza tra i primi due metodi e gli ultimi. Da valori medi per i rendimenti inferiori

a 0.70 si arriva a valori per i vincoli sul VaR e CVaR superiori a 2.09 fino addirittura a 2.91.

Una cosa interessante può essere, osservando lo stesso indice e confrontando la gestione attiva con quella passiva, il fatto che i rendimenti medi aumentano quasi del doppio nonostante la varianza non si accresca significativamente.

Un altro aspetto particolare si riscontra tra i portafogli costruiti con i vincoli VaR e CVaR: per un livello atteso di extra-performance pari a 0.5 l'aumento della probabilità riduce il rendimento medio e allo stesso tempo si riduce anche la varianza. Nel caso invece si conduca una gestione passiva, l'aumento della probabilità comporta l'aumento anche sia dei rendimenti medi sia delle relative varianze. Probabilmente per un periodo storico così particolarmente segnato da eventi storici importanti, la conduzione di una gestione attiva è stata meno remunerativa di una passiva. In tutti i casi VaR e CVaR, comunque, la varianza assume valori elevati, una possibile spiegazione è che per questi due approcci l'influenza dell'andamento del mercato europeo causa stime molto diverse tra loro per cercare di meglio adattarsi al movimento ascendente o discendente dei prezzi. Le statistiche di base, allora, sono limitanti sotto questo punto di vista perché racchiudono in sé sia momenti positivi sia momenti negativi fornendone una media.

Una seconda analisi di immediata interpretazione viene data dai grafici dei rendimenti di portafoglio.

I rendimenti dei portafogli ottenuti con il metodo classico della TEV si presentano in questo modo:

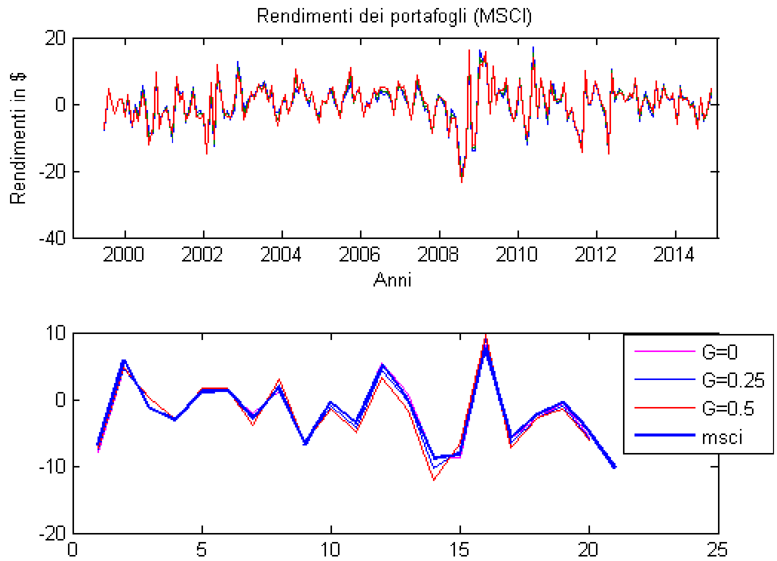

Figura 5.1: Portafogli ottenuti con TEV per MSCI

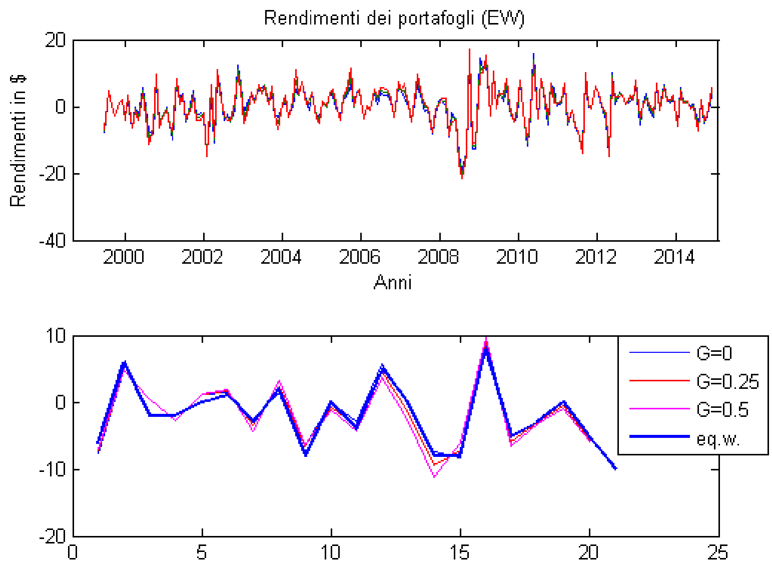

Figura 5.2: Portafogli ottenuti con TEV per EQUALLY WEIGHTED

Per ogni finestra grafica, in alto viene rappresentata tutta la serie dei

rendimenti dei portafogli, in basso vengono evidenziati i primi 20 rendimenti confrontati con il relativo benchmark.
A differenza delle serie dei rendimenti dei settori dell'indice MSCI Europe e dei benchmark stessi visti nell'introduzione, i portafogli creati sono contraddistinti da picchi (negativi e positivi) meno evidenti. A livello storico, non risentono della negatività che segnava l'inizio del nuovo millennio, ma hanno un forte calo in corrispondenza della crisi storica del $2008-2009$. In seguito a questo periodo, la volatilità permane elevata fino al 2013 dove torna a stabilizzarsi.

Di seguito si riportano le serie dei rendimenti dei portafogli ottenuti imponendo il beta pari a 0.8 e 1.2.

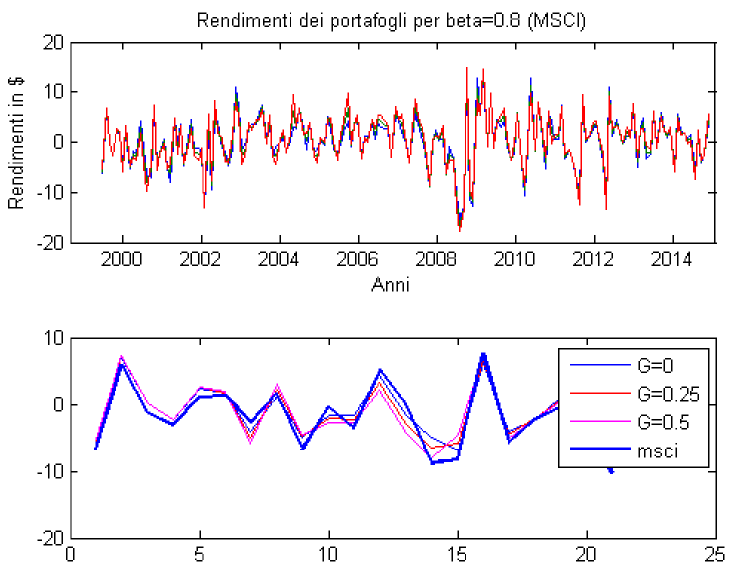

Figura 5.3: Portafogli ottenuti con beta=0.8 TEV per MSCI

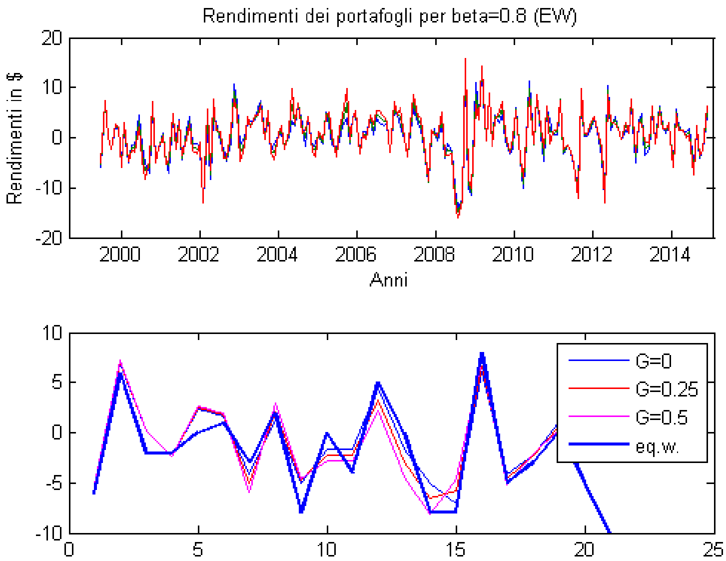

Figura 5.4: Portafogli ottenuti con beta=0.8 TEV per EQUALLY WEIGHTED

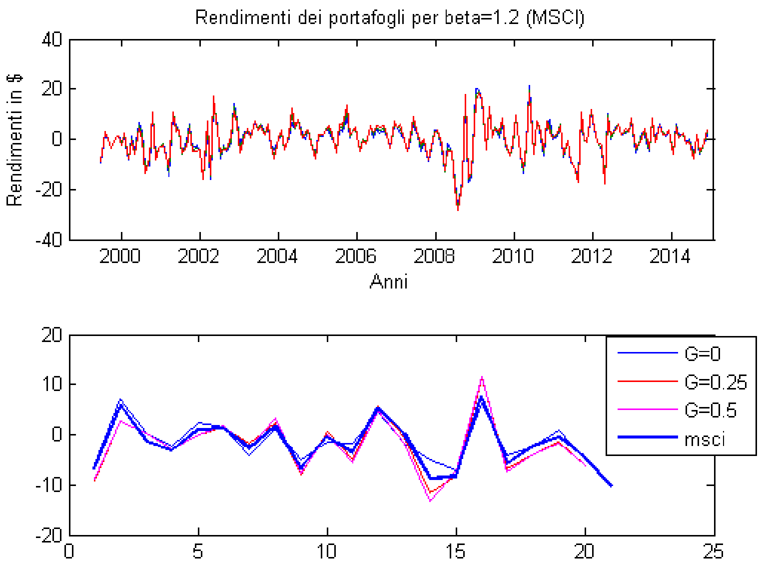

Figura 5.5: Portafogli ottenuti con beta=1.2 TEV per MSCI

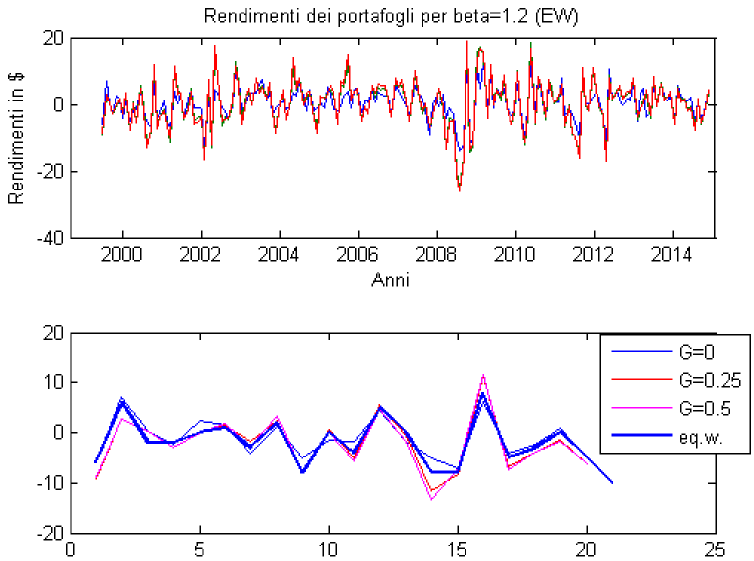

Figura 5.6: Portafogli ottenuti con beta=1.2 TEV per EQUALLY WEIGHTED

Prendendo il rischio sistematico del portafoglio pari a 0.8 la volatilità rispetto al caso TEV senza vincoli aggiuntivi è leggermente superiore, ma andando a vedere i rendimenti negativi nel caso dell'ultima crisi storica, si può notare che essi non superano la soglia -20, mentre sia con un beta pari a 1.2 sia con il primo metodo di Roll i rendimenti dei portafogli negativi superano tale quota.
Nel grafico dei rendimenti dei portafogli ottenuti imponendo un beta pari a 1.2, il tracking error rispetto all'indice equally weighted evidenzia maggiori differenze a seconda del livello di entra-performance attesa (G). Inoltre, per entrambi gli indici si registra una volatilità maggiore su tutto il periodo storico. Questo è un dato normale, in quanto si impone un rischio più elevato per aver maggior profitto.

Infine, si mostrano le serie dei rendimenti dei portafogli ottenuti imponendo il vincolo sul VaR e CVaR con probabilità del 99%.

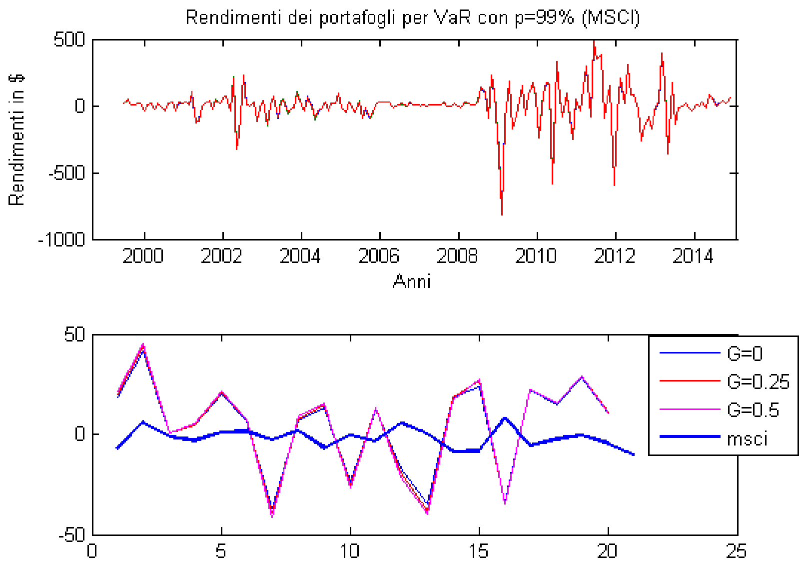

Figura 5.7: Portafogli ottenuti con VaR p=99% TEV per MSCI

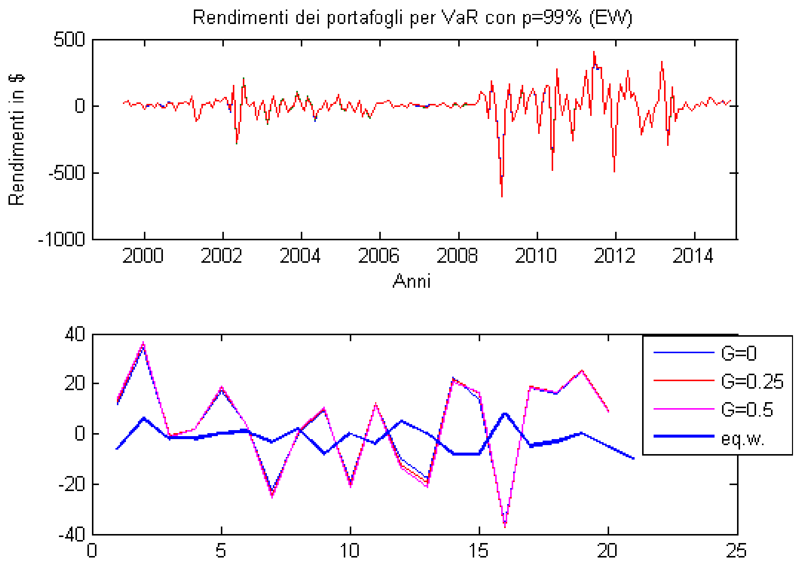

Figura 5.8: Portafogli ottenuti con VaR p=99% TEV per EQUALLY WEIGHTED

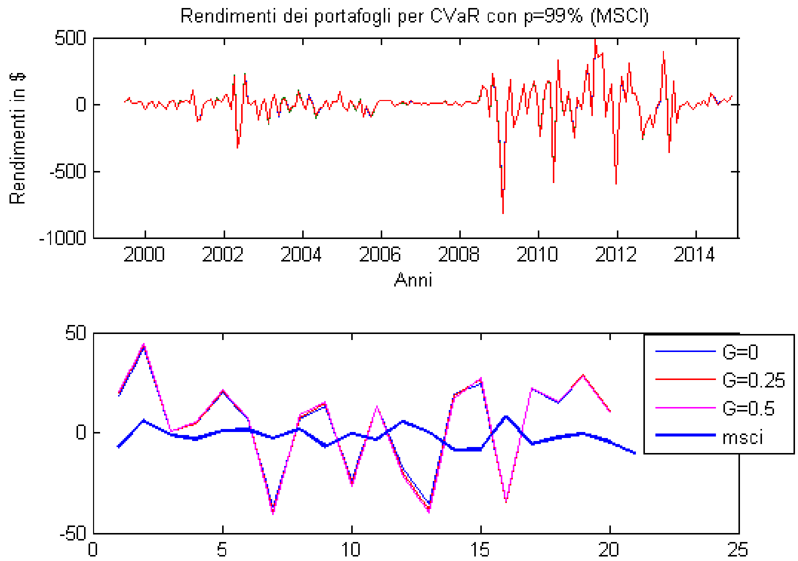

Figura 5.9: Portafogli ottenuti con CVaR p=99% TEV per MSCI

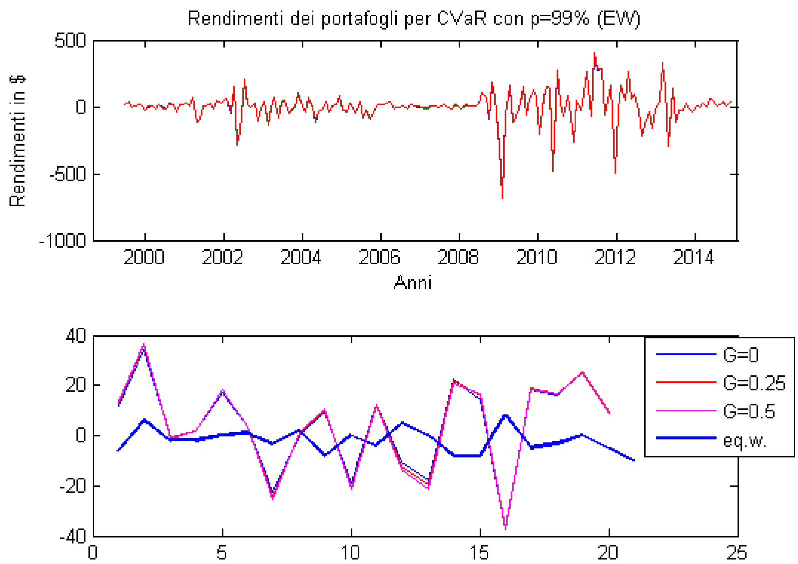

Figura 5.10: Portafogli ottenuti con CVaR p=99% TEV per EQUALLY WEIGHTED

I grafici appena visti riguardano i rendimenti dei portafogli ottenuti con il metodo del VaR e del CVaR con la probabilità p del 99%. Dai grafici riportati nella parte bassa delle finestre si evince che l'andamento dei portafogli, qualsiasi sia il metodo usato, non segue il benchmark. Osservando, invece, la parte superiore per ciascun grafico si può osservare che fino al 2009 non ci sono grossi sbalzi, solo tra il 2002 e il 2003 c'è un calo che segnala un movimento del mercato, come già anticipato altre volte, negativo. Dal 2009 ha inizio una marcata variabilità che indica anche un maggior rischio di perdite.

Viene mostrata, ora, la tabella che riporta i tracking errors e le relative varianze ottenuti con i rendimenti dei vari metodi:

metodo	$G = 0$	$G = 0.5$
TE	0.0292	0.1949
TEV	0.1937	2.4938
beta= 0.8-TE	0.1656	0.3798
beta= 0.8-TEV	1.8986	4.4006
beta= 1-TE	0.0292	0.2434
beta= 1-TEV	0.1937	2.6860
beta= 1.2-TE	-0.1072	0.1070
beta= 1.2-TEV	3.1081	5.5908
VaR99.99%-TE	2.1428	2.5025
VaR99.99%-TEV	1.0e+04 *2.2047	1.0e+04 *2.2175
CVaR99.99%-TE	2.1511	2.4974
CVaR99.99%-TEV	1.0e+04 *2.2080	1.0e+04 *2.2139

Tabella 5.5: TE e TEV per MSCI

metodo	$G = 0$	$G = 0.5$
TE	0.1171	0.2828
TEV	0.6456	2.7650
beta= 0.8-TE	0.2589	0.4806
beta= 0.8-TEV	2.2875	4.2775
beta= 1-TE	0.1171	0.3388
beta= 1-TEV	0.6456	3.0738
beta= 1.2-TE	-0.0247	0.1970
beta= 1.2-TEV	4.3066	7.1729
VaR99.99%-TE	1.5479	1.8769
VaR99.99%-TEV	1.0e+04 * 1.5599	1.0e+04 *1.5669
CVaR99.99%-TE	1.5540	1.8738
CVaR99.99%-TEV	1.0e+04 *1.5625	1.0e+04 *1.5643

Tabella 5.6: TE e TEV per EQ.W.

Alcuni investitori potrebbero essere soddisfatti del fatto che il portafoglio da loro gestito sovraperformi il benchmark, ma è necessario ricordare che il tracking error elevato, in realtà, suggerisce anche il rischio assunto è maggiore. Questo non è sempre ciò che gli investitori desiderano e, quindi, essi possono utilizzare il tracking error è come una misura di rischio in eccesso.
I tracking errors calcolati sui metodi proposti da Roll, sia per la strategia passiva sia per quella attiva, sono tutti abbondantemente inferiori all'1%, l'eccesso di rendimento del portafoglio rispetto al benchmark non è molto elevato. Addirittura, per un livello del rischio sistematico pari a 1.2, si registrano valori negativi per le gestioni passive. Tra i due approcci, il portafoglio con TE più grande, ovviamente si intende con $G = 0.5$, è stato calcolato con il beta posto pari a 0.8, per l'indice value weighted il tracking error è del 0.37% e per l'indice value weighted 0.48%, per entrambi la volatilità è discretamente elevata ma inferiore a quella registrata per i portafogli con beta pari a 1.2. La parte di tabella relativa a questi metodi presenta valori superiori per l'indice costruito tramite la media dei rendimenti dei settori rispetto al-

l'indice MSCI Europe.
Invece, per i portafogli, i cui rendimenti sono stati calcolati attraverso la minimizzazione della varianza del tracking error con vincoli aggiuntivi sul VaR e sul CVaR, il TE è superiore a 1.5% per una strategia passiva e maggiore di 1.8% per la strategia attiva, pur con varianza elevata. Per questi metodi la differenza nei valori percentuali tra i calcoli rispetto all'MSCI Europe e quelli rispetto all'indice equally weighted sono marcate. I valori maggiori sono osservati per il primo benchmark.

L'indicatore che più si addice a meglio sintetizzare il significato del tracking error è l'Information Ratio, il quale si calcola con:

$$IR = \frac{TE}{\sqrt{TEV}}$$

L'Information Ratio fornisce l'ammontare di extra-rendimento del portafoglio rispetto al benchmark di riferimento per ogni unità di rischio relativo (rappresentato dal tracking error) e consente di valutare la capacità del gestore di sovraperformare il benchmark in relazione al rischio assunto (rappresentato dallo scostamento rispetto al benchmark). In base alla costruzione dell'indicatore emerge che un portafoglio gestito con una strategia passiva avrà un Information Ratio prossimo allo zero, mentre un gestore attivo dimostrerà una elevata qualità del proprio operato nella misura in cui sarà stato in grado di massimizzare il proprio rendimento differenziale rispetto al benchmark e minimizzare la rischiosità, sempre su base differenziale.

metodo	$G = 0$	$G = 0.5$
IR-TEV	0.0663	0.1234
IR-beta= 0.8-TEV	0.1202	0.1811
IR-beta= 1-TEV	0.0663	0.1485
IR-beta= 1.2-TEV	-0.0608	0.0452
IR-VaR99.99%-TEV	0.0144	0.0168
IR-CVaR99.99%-TEV	0.0145	0.0168

Tabella 5.7: IR per MSCI Europe

metodo	$G = 0$	$G = 0.5$
IR-TEV	0.1458	0.1701
IR-beta= 0.8-TEV	0.1712	0.2324
IR-beta= 1-TEV	0.1458	0.1932
IR-beta= 1.2-TEV	-0.0119	0.0736
IR-VaR99.99%-TEV	0.0124	0.0150
IR-CVaR99.99%-TEV	0.0124	0.0150

Tabella 5.8: IR per EQ.W.

Confrontando i risultati ottenuti con i due indici di riferimento, si può affermare che il valore IR per un rischio sistematico fissato a 0.8, qualsiasi sia la strategia attuata, in entrambe le tabelle, è il più grande rispetto ai risultati degli altri metodi. Nel caso dell'indice MSCI Europe, se l'investitore desiderasse gestire in modo attivo l'IR vale 0.1811, invece 0.1202 se preferisse una gestione passiva. Per il benchmark value weighted una gestione con livello di extra-performance attesa pari a 0 l'IR varrebbe 0.1712 e 0.2324 per una extra-performance attesa di 0.5.
L'Information Ratio suggerisce di scegliere sempre il metodo di Roll con vincolo sul beta pari a 0.8, ma dato che non sempre questa è una scelta possibile, come seconda opportunità di investimento si dovrebbe optare per un beta pari a 1. Dato questo vincolo il valore di questo indicatore, seppur minore, non lo è eccessivamente.
L'esito di questa analisi conferma quanto visto nel secondo capitolo, ovvero

che per un valore di beta maggiore di uno si ha perdita di efficienza e non ha senso investire in un portafoglio con tale collocazione, nelle tabelle appena riportate si può notare che l'indice IR associato a tale composizione è negativo per entrambi i benchmark. Il significato da attribuire a questi valori è che la gestione di tali portafogli non comporta un valore aggiunto, anzi. L'Information Ratio relativo ai vincoli sul VaR e sul CVaR non presenta valori significativi.

Una ulteriore verifica della performance dei portafogli trovati con i quattro metodi presentati all'inizio consiste nel calcolo del Turnover:

$$TO = |\omega_{\mathrm{t}} - \omega_{\mathrm{t-1}}|$$

Dove ω indica i pesi del portafoglio. Il Turnover nel linguaggio della finanza significa quante volte i gestori ruotano il loro portafoglio. Un tasso annuo del 100%, ad esempio, indica che il manager ha ruotato un ammontare di titoli pari al totale del patrimonio netto. Questo, però, non vuol dire che ha cambiato tutte le sue partecipazioni, perché potrebbe averne tenute la metà e girato le altre per due volte.
Un limite di questo indice è stato evidenziato da un'analisi condotta da Morningstar dal 2000 ad oggi (sui fondi americani), la quale mostra che il Turnover ha una minor capacità predittiva rispetto ad altri indicatori come i costi, le stelle o la durata dei gestori.
Per rendere leggibile i risultati ottenuti calcolando il Turnover per tutti i metodi, si riportano i grafici riguardanti le serie delle somme degli elementi del vettore che contiene le differenze di pesi al tempo t, in pratica il grafico riporta la somma al tempo t delle rotazioni dei singoli pesi ($|\omega_{\mathrm{t}} - \omega_{\mathrm{t-1}}|' 1$).

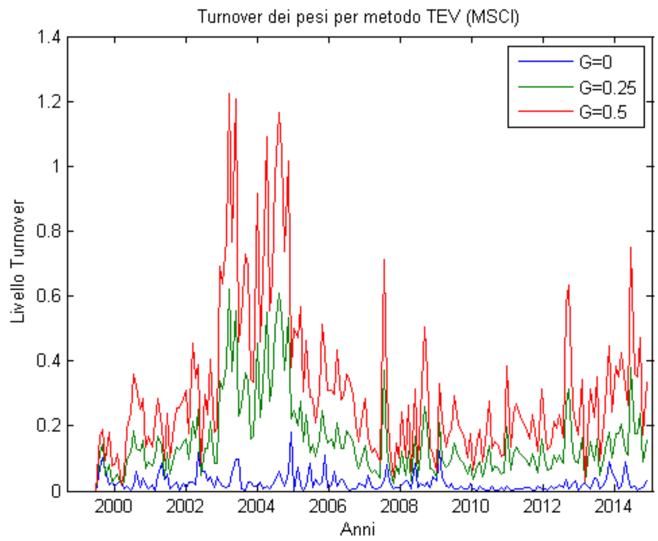

Figura 5.11: Turnover per il metodo TEV senza vincoli (MSCI)

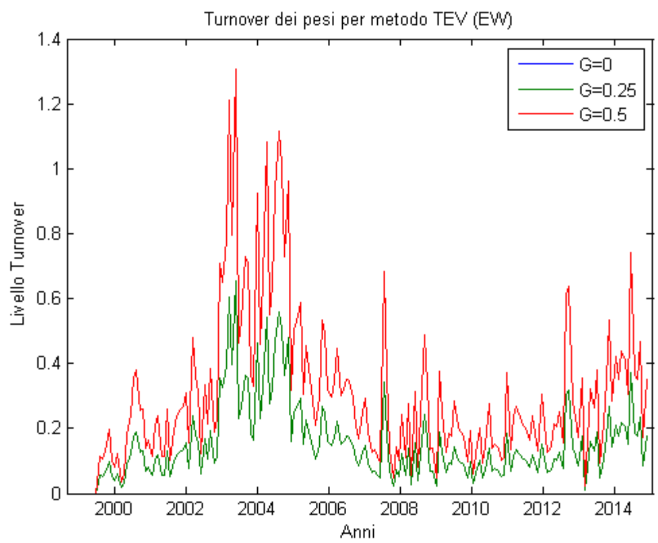

Figura 5.12: Turnover per il metodo TEV senza vincoli (EW)

Le rotazioni di portafoglio associate ai due benchmark sono molto simili, per un livello atteso di extra-performance di 0.5 sono stati raggiunti valori massimi tra il 2003 e il 2005, in questo caso il gestore ha ruotato un ammontare di titoli del 120%.

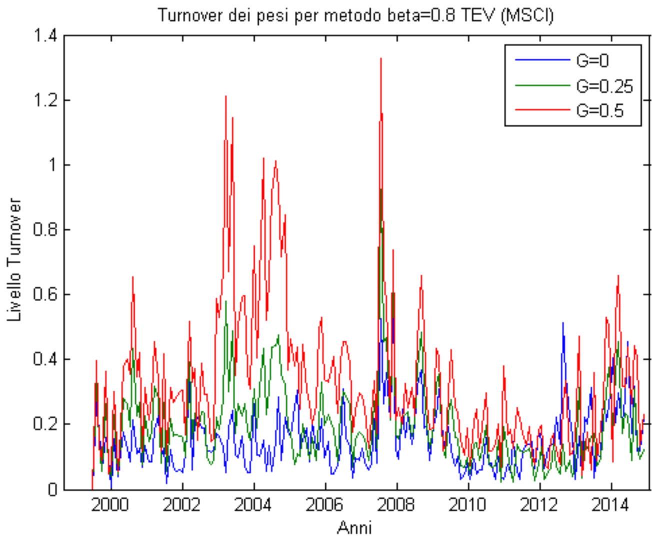

Figura 5.13: Turnover per il metodo beta=0.8 TEV (MSCI)

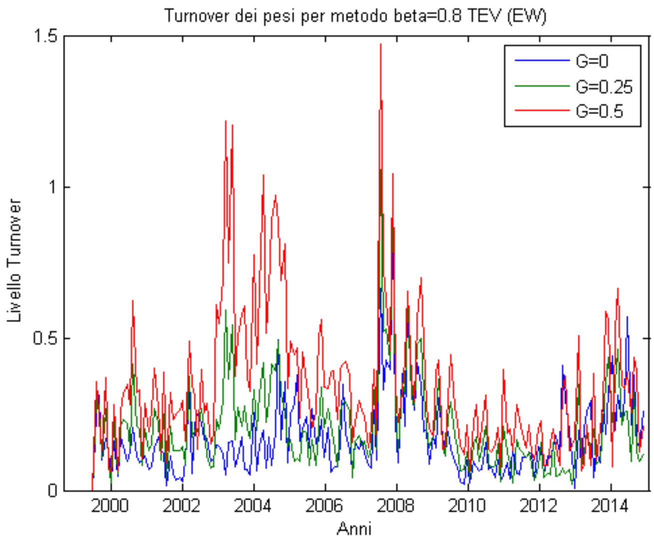

Figura 5.14: Turnover per il metodo beta=0.8 TEV (EW)

Rispetto al primo metodo di Roll, ora sono più frequenti turnover elevati, in media la rotazione per i tre livelli di extra-performance mostrati equivale 30% del portafoglio, i picchi più alti indicano che nei periodi prossimi alle crisi (2003 e 2008) la turnazione è pari al 130% per il caso dell'indice value weighted e di quasi 150% per l'equally weighted.

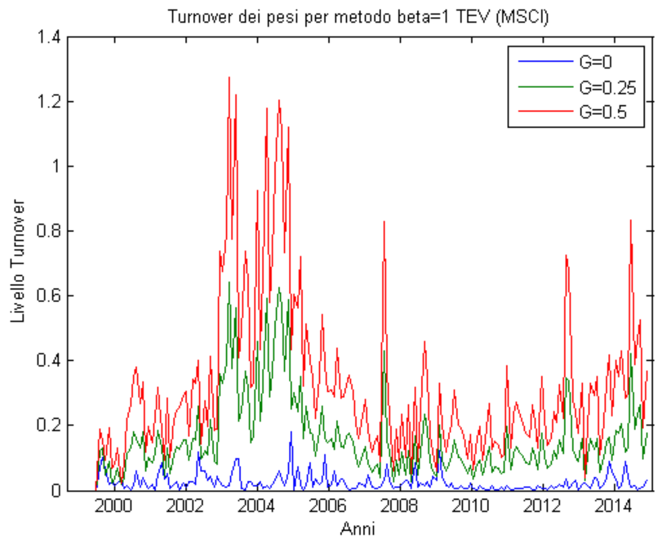

Figura 5.15: Turnover per il metodo beta=1 TEV (MSCI)

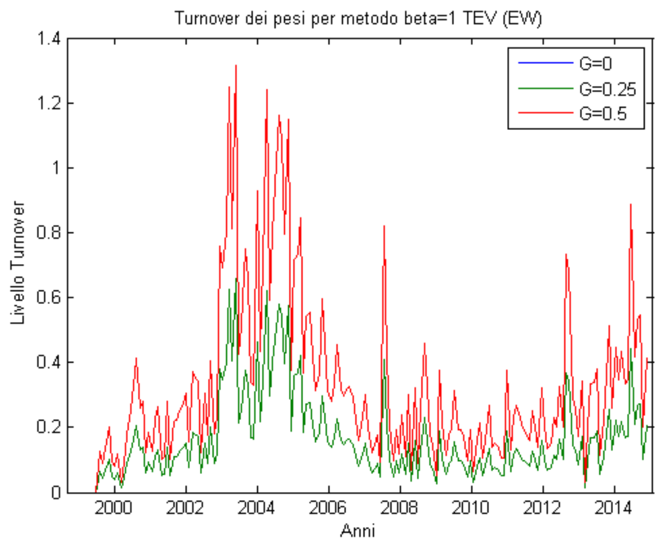

Figura 5.16: Turnover per il metodo beta=1 TEV (EW)

Per il livello di rischio sistematico fissato a 1, il turnover maggiore risulta esserci intorno all'anno 2004, dove i pesi vengono mutati del 130%.
E' possibile notare che il turnover dell'indice equally weighted per $G = 0$ è sempre pari a zero, il motivo è il tipo di indice utilizzato e la strategia passiva che viene attuata.

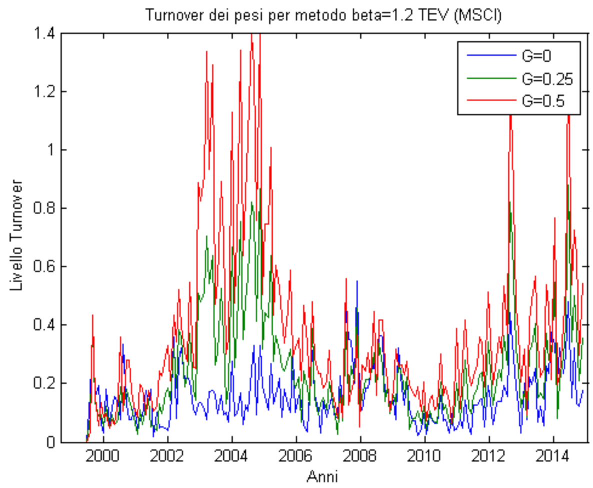

Figura 5.17: Turnover per il metodo beta=1.2 TEV (MSCI)

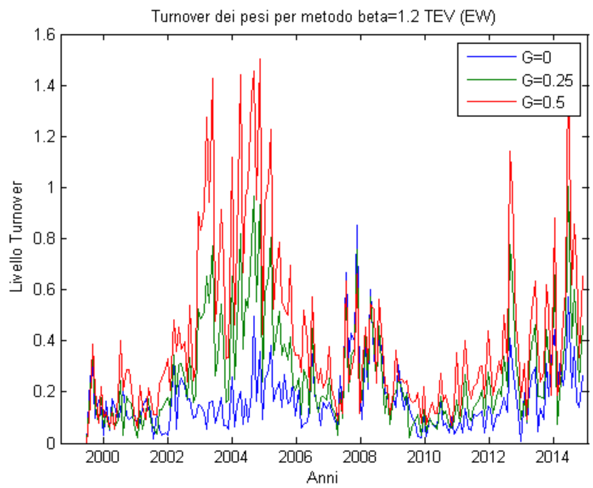

Figura 5.18: Turnover per il metodo beta=1.2 TEV (EW)

Assumendo un rischio sistematico pari a 1.2, le fluttuazioni sono più accentuate anche se non sono maggiori rispetto i livelli di turnover visti in precedenza. Un investitore dovrebbe diffidare da un livello di turnover variabile in tal modo, in quanto i costi delle transazioni sarebbero notevoli e non sempre comportano un maggior profitto.

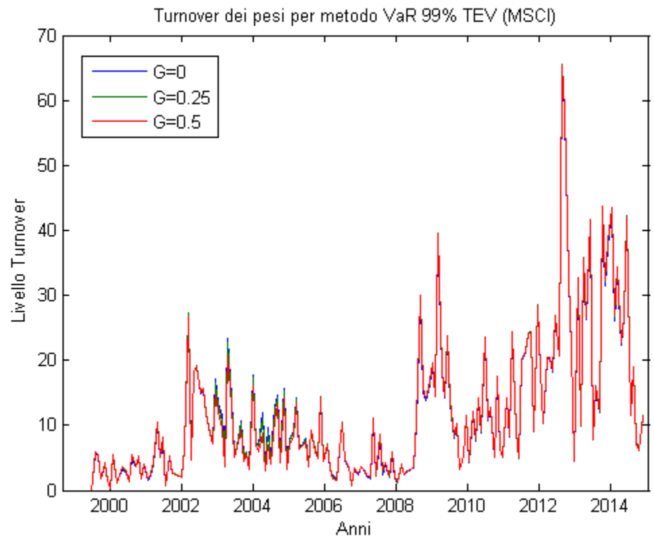

Figura 5.19: Turnover per il metodo VaR 99% TEV (MSCI)

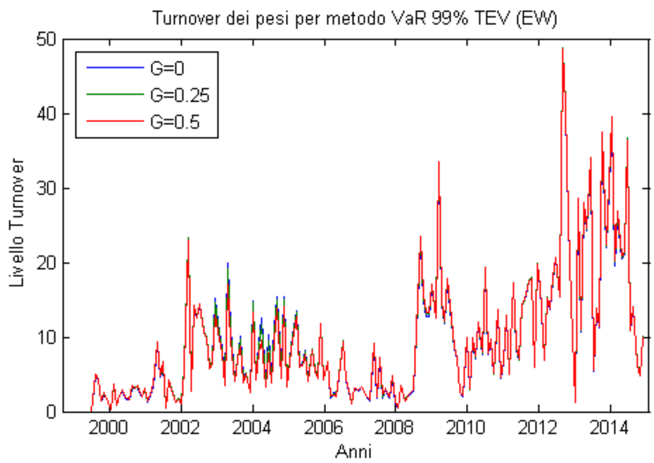

Figura 5.20: Turnover per il metodo VaR 99% TEV (EW)

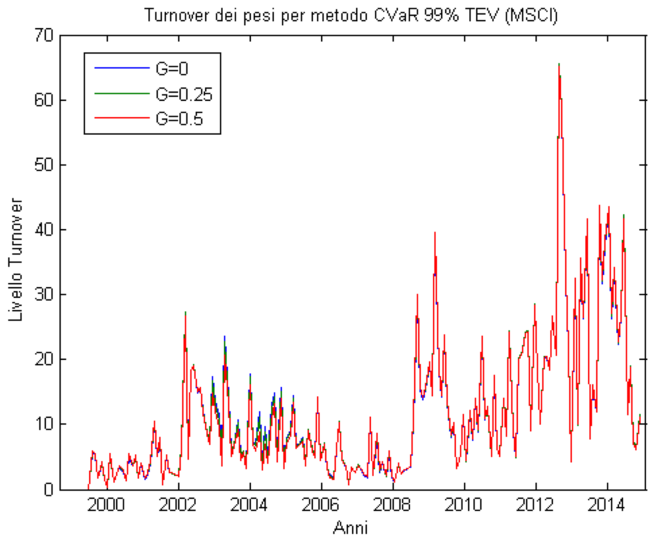

Figura 5.21: Turnover per il metodo CVaR 99% TEV (MSCI)

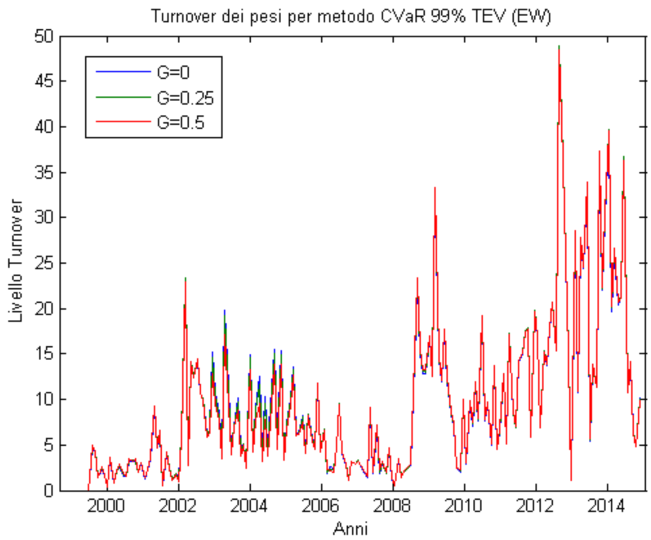

Figura 5.22: Turnover per il metodo CVaR 99% TEV (EW)

Gli ultimi quattro grafici introdotti, che riguardano il vincolo aggiuntivo sul VaR e sul CVaR, presentano dei livelli di turnover elevatissimi, questo è dovuto all'assenza di vincoli di positività sui pesi, infatti se fosse stata imposta questa condizione il turnover sarebbe stato compreso in un intervallo $[0, 2]$. Dai valori qui ottenuti si ha quindi indicazione di diffidare da essi. Inoltre, nel confronto tra il calcolo con l'indice MSCI Europe e l'indice equally weighted, il primo ha valori di rotazione molto più grandi del secondo e, poiché esso è un indice reale e non fittizio, questo desta maggiore preoccupazione. Non è affidabile l'investimento dettato da questo metodo secondo questa valutazione di performance.

In conclusione, sono state prese in considerazione varie misure per valutare la performance dei portafogli ottenuti con i metodi di calcolo della varianza minima del tracking error: statistiche descrittive di base, valutazione grafica dei risultati, tracking error e varianza TE stessi, Information Ratio e Turnover dei pesi, per tutte queste analisi sono stati rilevati dei valori anomali con i vincoli imposti sul Value at Risk e sul Conditional VaR, una delle cause di questi esiti è la mancanza della condizione di positività dei pesi del portafoglio. In generale, gli altri metodi sembrano funzionare meglio, sopratutto il vincolo sul beta di portafoglio imposto pari a 0.8 sembra dare risultati migliori per tutte le valutazioni di performance effettuate. Nei primi capitoli era stato anticipato che i portafogli efficienti si ottenevano per lo più con il metodo di Roll che considerava il rischio sistematico, dall'analisi del campione appena illustrata compiuta con le rolling windows si confermano le prime impressioni. Nel caso di una gestione sia passiva che attiva, si evince che una sensibilità inferiore a 1 (meglio se circa pari a 0.8) del portafoglio rispetto ai movimenti di mercato comporta una migliore allocazione da parte del gestore.

Capitolo 6

Conclusioni

Le strategie di investimento attuate dal gestore del portafoglio finanziario sono di solito legate ad un indice di riferimento. Il suo obiettivo principale consiste nel minimizzare la varianza del tracking error per un dato livello di extra-rendimento atteso, il quale è maggiore di zero se vuole che la gestione sia attiva o uguale a zero se passiva. Spesso, gli investitori richiedono l'imposizione di ulteriori vincoli sul rischio complessivo dei portafogli gestiti. Il rischio assunto può essere misurato con il beta del portafoglio gestito rispetto al benchmark o con la varianza del portafoglio globale (teoria di Markowitz).
Le strategie moderne di investimento dovrebbero prendere in considerazione misure di rischio come il Value at Risk (VaR) e il Conditional VaR (CVaR).
Il VaR è diventato uno strumento di gestione del rischio fondamentale nel settore finanziario e può essere facilmente interpretabile dall'investitore. Poiché il VaR non soddisfa la proprietà di subadditività, il gestore può ricorrere alla misura coerente di rischio CVaR.
Roll propone una teoria di base per il calcolo della frontiera di minima varianza del tracking error, focalizzandosi sull'idea che l'obiettivo dei gestori finanziari sia ridurre al minimo tale volatilità per un dato livello di extra-

performance atteso. Il risultato a cui perviene è una frontiera non efficiente che sul piano cartesiano media-varianza si trova alla destra della classica frontiera efficiente di Markowitz. Il grado di inefficienza del benchmark utilizzato per valutare l'eccesso di rendimento del portafoglio influisce sulla distanza che intercorre tra le due frontiere: più esso è inefficiente, più sono distanti.
Lo stesso autore propone un altro approccio, in cui, oltre ai vincoli del precedente problema di minimo, ne aggiunge uno che riguarda il rischio sistematico del portafoglio. Dalle analisi su valori reali e per un certo intervallo di valori possibili per il beta, risulta esistere un sottoinsieme dei portafogli calcolati con tale vincolo che domina il benchmark.
Successivamente, Alexander, Baptista e Palomba, Riccetti propongono di considerare un vincolo riguardante il Valore a Rischio per mantenere sotto controllo le eventuali massime perdite subite in circostanze particolari del mercato. Di fatto le soluzioni in termini di extra-pesi non sono differenti se non per i valori imposti dai vincoli ai relativi VaR e beta, ciò che diventa interessante è l'insieme di valori che assume la varianza del tracking error nei diversi metodi.
E' stata, poi, considerata anche l'alternativa al Value at Risk, il Conditional VaR, però, dato che sotto l'assunzione di normalità esiste una stretta relazione tra questi parametri, i risultati non si discostano particolarmente da quelli precedentemente ottenuti.
La presentazione nei primi capitoli e l'analisi empirica di tutte le tecniche per il calcolo della varianza del tracking error è stata seguita dall'evidenza empirica sugli stessi utilizzando i dati mensili di venti anni dell'indice Morgan Stanley Capital International, dei suoi dieci indici settoriali e di un ulteriore benchmark calcolato con la media dei rendimenti dei settori stessi. I settori componevano il portafoglio gestito e i due indici (quello reale e quello co-

struito artificialmente) fungevano da benchmark di riferimento.

Infine, è stata proposta una analisi empirica effettuata su finestre rolling ampie cinque anni ciascuna, su di esse sono stati calcolati i vari metodi con cui misurare la varianza del tracking error e sono state effettuate delle analisi di performance. La performance è stata verificata per tutti i metodi con statistiche di base sui rendimenti dei portafogli, grafici relativi agli stessi, analisi dei risultati sui tracking errors e sulle varianze TE, indicatore Information Ratio e Turnover dei pesi dei portafogli.

L'analisi empirica ha evidenziato che la migliore allocazione che un investitore può esercitare è data dalla soluzione del problema di minima varianza del tracking error con il vincolo sul rischio sistematico posto pari a 0.8. La strategia con tale beta, però, non è sempre possibile, quindi si possono accettare le soluzioni di allocazione con valori di beta compresi tra 0.8 e 1. In questo modo, sia la gestione attiva sia quella passiva assumono un rischio inferiore o uguale al rischio associato al benchmark di riferimento e riescono ad ottenere il livello di extra-performance atteso.

Bibliografia

[1] Alexander, G.J., Baptista, A.M., 2008. *Active portfolio management with benchmarking: Adding a value-at-risk constraint*. Journal of Economic Dynamics and Control 32, 779-820

[2] Alexander, G.J., Baptista, A.M., 2010. *Active portfolio management with benchmarking: A frontier based on alpha*. Journal of Economic Dynamics and Control 34, 2185-2197

[3] Alexander, G.J., Baptista, A.M., 2004. *A comparison of VaR and CVaR constraints on portfolio selection with the mean-variance model*. Management Science 50, 1261–1273.

[4] Artzner, P., Delbaen, F., Eber, J.-M., Heath, D., 1999. *Coherent measures of risk*. Mathematical Finance 9, 203–228.

[5] Bajeux-Besnainou, I., Belhaj, R., Maillard, D., Portait, R., 2011. *Portfolio optimization under tracking error and weights constraints*. The Journal of Financial Research, Vol. XXXIV, No. 2, Summer, 295-330

[6] Bertrand, P., 2010. *Another Look at Portfolio Optimization under Tracking-Error Constraints*. Financial Analysts Journal 66, 3, 78-90

[7] Bodie, Z., Kane, A., Marcus, A.J., 2013. *Investments*. McGraw-Hill.

[8] Jorion, P., 2001. *Value at Risk: The New Benchmark for Controlling Market Risk*. McGraw-Hill, New York, NY.

[9] Jorion, P., 2003. *Portfolio optimization with constraints on tracking error.* Financial Analysts Journal 59, 70–82.

[10] Lee, R.T., 2000. *Active management.* The Journal of Portfolio Management 26, 25– 32.

[11] Markowitz, H.M., 1959. *Portfolio Selection: Efficient Diversification of Investments.* John Wiley, New York.

[12] Palomba, G. Riccetti, L., 2012. *Portfolio frontiers with restrictions to tracking error volatility and value at risk.* Journal of Banking & Finance 36, 2604-2615

[13] Roll, R., 1992. *A mean/variance analysis of tracking error.* Journal of Portfolio Management 18, 13–22.

[14] Wagner, N., 2001. *On a Model of Portfolio Selection with Benchmark.* Journal of Asset Management, Vol 3, No 1, 55-65

Ringraziamenti

Dobbiamo essere grati alle persone che ci rendono felici, sono gli affascinanti giardinieri che rendono la nostra anima un fiore. (Marcel Proust)

Al Professor Caporin per la sua disponibilità e competenza.

Al mio papà e alla mia mamma che ci sono sempre con il loro amore, sostegno e pazienza.

A Lodovica, la tua capacità di rallegrarmi e volermi bene è impagabile!

Ai miei nonni e ai miei zii che mi hanno accompagnata lungo tutto il mio percorso con tanto affetto.

A Davide, il tuo amorevole appoggio è per me fondamentale.

Ai miei amici, a tutti coloro che mi vogliono bene e fanno sorridere la mia vita.

Grazie di cuore!