

UNIVERSITÀ DEGLI STUDI DI PADOVA

Dipartimento di Fisica e Astronomia “Galileo Galilei”

Corso di Laurea in Fisica

Tesi di Laurea

Solitoni nella teoria classica dei campi

Relatore

Dr. Alessandro Sfondrini

Laureando

Daniele Mantovani

Anno Accademico 2020/2021

Indice

Introduzione	v
1 Teoria generale dei solitoni	1
1.1 Dinamica dei campi	1
1.1.1 Teoria generale	1
1.1.2 Simmetrie e conservazioni	2
1.1.3 Elettrodinamica scalare	2
1.2 Considerazioni energetiche e topologiche	3
1.2.1 Condizioni al contorno	3
1.2.2 Teoria dell'omotopia	4
1.2.3 Grado topologico	4
1.2.4 Applicazioni alle configurazioni di campo	5
1.2.5 Il teorema di Derrick	6
2 Vortici	9
2.1 Funzioni di energia di Ginzburg-Landau	9
2.2 Vortici globali	10
2.3 Vortici di gauge	11
2.3.1 Considerazioni topologiche	11
2.3.2 Soluzioni delle equazioni del moto	12
2.3.3 Interazione tra due vortici	14
2.3.4 Interazione tra N vortici	16
Conclusioni	19
Bibliografia	21

Introduzione

Nella teoria classica dei campi si studia il comportamento di uno o più campi che interagiscono con la materia. Per farlo si scrivono delle equazioni del moto per il campo in questione, che ne descrivono la dinamica, e si studiano le loro soluzioni. Ci sono alcune soluzioni che hanno una particolare rilevanza, le soluzioni di equilibrio, che sono costanti nel tempo. In teoria dei campi tali soluzioni sono anche chiamate vuoti (*vacua*). Il vuoto più semplice, anche detto banale, è quello che giustifica il nome "vuoto". Si tratta della configurazione dove tutti i campi hanno come valore la costante zero: per così dire, in questo stato "non c'è nulla". L'approccio lagrangiano idealmente studia sistemi conservativi, i quali però realisticamente sono spesso (debolmente) accoppiati a sistemi dissipativi, col risultato che col passare del tempo l'energia tende a diminuire in maniera continua, e una qualsiasi soluzione prima o poi ricade nel caso della soluzione a energia minima, il vuoto. Si pensi per esempio al sistema del pendolo semplice: inevitabilmente le oscillazioni tendono a smorzarsi a causa dell'attrito, fino a ricadere nella configurazione di equilibrio a minima energia con il pendolo fermo nel punto più basso. Se non perturbato, il sistema rimane nello stato di equilibrio. Similmente il moto di un campo può essere visto come se fosse ottenuto perturbando una configurazione di equilibrio, facendo variare in maniera continua la sua energia fino a ritrovare la soluzione cercata. Tornando all'esempio del pendolo, si possono ottenere i moti attorno alla posizione di equilibrio perturbando il sistema e studiando le cosiddette piccole oscillazioni.

Vi è tuttavia un problema a questo approccio: in alcune teorie con particolari proprietà topologiche può succedere che esistano soluzioni stabili che non possono essere deformate con continuità fino ad ottenere la configurazione di vuoto banale. In tal caso conviene raggruppare le soluzioni in classi a seconda del valore minimo di energia a cui possono convergere in maniera continua. L'energia di queste soluzioni particolari converge ad un minimo relativo nella classe diverso dal vuoto, e non può in alcun modo essere ricondotta al valore del vuoto mediante una trasformazione continua. Tali soluzioni rappresentano dei "nuovi equilibri", soluzioni costanti alle quali si riducono tutte le possibili configurazioni nella stessa classe, per esempio in seguito a fenomeni dissipativi. Queste configurazioni di equilibrio la cui energia non è riconducibile al vuoto prendono il nome di solitoni. Come per il vuoto, si possono studiare i moti dei solitoni come piccole perturbazioni attorno al minimo di energia della classe considerata.

Questo elaborato si propone di delineare le caratteristiche principali dei solitoni in maniera generale, cercando di capire in quali teorie possono esistere queste configurazioni di equilibrio e quali caratteristiche hanno, e di entrare poi più nel dettaglio nello studio di un tipo di solitoni bidimensionali detti vortici, seguendo per la maggior parte l'approccio presentato in [6] Nicolas Manton e Paul Sutcliffe. *Topological Solitons*. Cambridge University Press, 2004.

Nel capitolo 1 vengono inizialmente riprese alcune nozioni generali di teoria dei campi applicate in particolare al caso di un campo scalare, e successivamente vengono presentati alcuni elementi di teoria dell'omotopia. Viene in particolare mostrato come sia possibile raggruppare tutte le funzioni tra due dati insieme che possono essere deformate con continuità le une nelle altre in classi di equivalenza, dette appunto classi di omotopia. Il carattere topologico di ciascuna classe è rappresentato da un numero intero N , detto grado topologico o carica topologica delle funzioni della classe. Il carattere topologico di diverse soluzioni delle equazioni del moto è rappresentato dalla loro carica topologica: le soluzioni con $N = 0$ rappresentano quelle deformabili con continuità ad una soluzione di equilibrio costante, mentre quelle con $N \neq 0$ rappresentano solitoni. Sempre nel capitolo 1 viene infine enunciato un importante risultato dovuto a Derrick [3], che mostra come in alcune teorie non possano esistere dei solitoni.

Nel capitolo 2 vengono studiate le caratteristiche principali dei vortici, solitoni bidimensionali che presentano un nucleo finito, in cui è concentrata tutta la loro energia. Viene innanzitutto presentata la teoria generale di un campo scalare complesso accoppiato ad un campo elettromagnetico, e vengono ricavate le equazioni del moto che descrivono delle soluzioni di (multi)vortici con carica topologica N . Tali equazioni non hanno soluzioni analitiche, e devono essere risolte numericamente. Tuttavia è possibile ricavare un'espressione asintotica per le soluzioni, che le descrive nella regione molto lontana dal nucleo, in cui la loro densità energetica è praticamente nulla. Tale espressione viene infine sfruttata seguendo il ragionamento in [7] per studiare l'interazione tra diversi vortici. Viene infatti mostrato come ciascun vortice possa essere pensato come generato da una carica scalare e un dipolo magnetico posti nel suo centro, e come l'interazione tra due vortici sia descrivibile in termini dell'interazione tra i campi generati da queste cariche. Da ultimo viene descritto il comportamento di una soluzione costituita da un certo numero di vortici distinti, evidenziando quando questa può essere stabile e quando invece non lo è.

Convenzioni

In questo elaborato viene adottata la convenzione di Einstein per la somma sugli indici ripetuti. Le unità di misura adottate sono quelle naturali, e in particolare $c = 1$. Lo spaziotempo è lo spazio $(d + 1)$ -dimensionale $\mathbb{R} \times \mathbb{R}^d$, e una coordinata spaziotemporale x è descritta come $x = (t, \mathbf{x})$, con $t \in \mathbb{R}$ la coordinata temporale e $\mathbf{x} = (x^1, \dots, x^d) \in \mathbb{R}^d$ le coordinate spaziali. La metrica adottata è quella di Minkovski, con segnatura $(+, -, \dots, -)$.

Capitolo 1

Teoria generale dei solitoni

In questo primo capitolo si vuole cercare di capire che cos'è un solitone, e quali sono le caratteristiche che deve avere un determinato problema dinamico affinché possano esistere soluzioni classificabili come solitoni.

1.1 Dinamica dei campi

1.1.1 Teoria generale

Un campo è una funzione $\phi: \mathbb{R} \times X \rightarrow Y$, $(t, \mathbf{x}) \mapsto \phi(t, \mathbf{x})$ definita tra due varietà X e Y di dimensioni rispettivamente d ed n , che associa ad ogni punto dello spaziotempo $\mathbb{R} \times X$ un grado di libertà che evolve nel tempo. Ci si concentra in questo capitolo soltanto su campi lineari, per i quali $X = \mathbb{R}^d$ e $Y = \mathbb{R}^n$. Lo studio della dinamica del campo parte dalla definizione della lagrangiana associata L , definita a partire dalla densità lagrangiana \mathcal{L} come

$$L = \int \mathcal{L}(\phi, \partial_0 \phi, \nabla \phi) d^d x, \quad (1.1)$$

dove l'integrale è da intendersi su tutto lo spazio \mathbb{R}^d e $\partial_0 = \frac{\partial}{\partial t}$ è la derivata temporale. Le equazioni del moto del campo ϕ sono le equazioni di Eulero-Lagrange

$$\partial_0 \frac{\partial \mathcal{L}}{\partial(\partial_0 \phi_l)} + \nabla \cdot \frac{\partial \mathcal{L}}{\partial(\nabla \phi_l)} - \frac{\partial \mathcal{L}}{\partial \phi_l} = 0, \quad (1.2)$$

valide per ciascuna delle componenti del campo ϕ , ottenute tramite il metodo variazionale.

Il caso più semplice che si può considerare è dato da una lagrangiana del tipo

$$L = \int \left(\frac{1}{2} (\partial_0 \phi_l)^2 - \frac{1}{2} \nabla \phi_l \cdot \nabla \phi_l - U(\phi) \right) d^d x, \quad (1.3)$$

con $U: \mathbb{R}^n \rightarrow \mathbb{R}$ funzione scalare, detta potenziale, regolare nelle componenti ϕ_l . Si possono riconoscere i termini cinetico e potenziale

$$T = \int \frac{1}{2} (\partial_0 \phi_l)^2 d^d x, \quad (1.4)$$

$$V = \int \frac{1}{2} \nabla \phi_l \cdot \nabla \phi_l + U(\phi) d^d x, \quad (1.5)$$

con $L = T - V$. L'energia associata ad una soluzione delle equazioni per questa lagrangiana ha la forma $E = T + V$. Affinché tale energia risulti finita è necessario richiedere che l'energia potenziale V sia inferiormente limitata. Se $U(\phi)$ è un polinomio nelle variabili ϕ_l , allora tale polinomio deve essere inferiormente limitato. Nel caso che sarà studiato nel capitolo 2 il campo ha due componenti, e viene associato al campo complesso $\phi = \phi_1 + i\phi_2$. In tal caso $U(\phi)$ è un polinomio in $|\phi|$, e pertanto per essere inferiormente limitato deve essere un polinomio di grado pari con coefficiente positivo davanti al

termine di grado più alto. Si noti inoltre che $U(\phi)$ è definito a meno di una costante, che non cambia le equazioni del moto, ed è sempre possibile scegliere questa costante in modo che il minimo di U si annulli, $U_{\min} = 0$. La lagrangiana in considerazione gode inoltre anche di invarianza per trasformazioni di Lorentz: si può infatti riscriverla usando la metrica di Minkovski η come

$$L = \int \left(\frac{1}{2} \eta^{\mu\nu} \partial_\mu \phi_l \partial_\nu \phi_l - U(\phi) \right) d^d x. \quad (1.6)$$

Le equazioni del moto per la lagrangiana (1.3) sono

$$\partial_0 \partial_0 \phi_l - \nabla^2 \phi_l + \frac{\partial U}{\partial \phi_l} = 0. \quad (1.7)$$

1.1.2 Simmetrie e conservazioni

Non vi è una corrispondenza biunivoca tra un sistema dinamico e la lagrangiana associata. In particolare si definiscono lagrangiane equivalenti due lagrangiane \mathcal{L} e \mathcal{L}' che danno luogo alle stesse equazioni del moto. Si può dimostrare [5, p. 91] che due lagrangiane equivalenti differiscono soltanto per una derivata totale di una funzione dei soli campi

$$\mathcal{L}' = \mathcal{L} + \partial_\mu C^\mu(\phi). \quad (1.8)$$

Sotto l'azione di alcuni gruppi di trasformazioni può capitare che una lagrangiana non cambi, o che venga mappata in una equivalente. In questo caso si parla di trasformazioni di simmetria. Distinguiamo due tipi di simmetrie:

- (i) *esterne*, se sono trasformazioni delle coordinate dello spaziotempo, come le traslazioni spaziali o le rotazioni;
- (ii) *interne*, se sono trasformazioni dei campi e non delle coordinate, ad esempio la rotazione di fase $\phi \mapsto e^{i\alpha} \phi$ per un campo scalare complesso.

Per il teorema di Nöther in un sistema fisico ad ogni simmetria corrisponde una legge di conservazione. In particolare se un gruppo di simmetria agisce sui campi come $\phi \mapsto \phi + \delta\phi$ e sulla lagrangiana come $\mathcal{L} \mapsto \mathcal{L} + \partial_\mu C^\mu$ allora si avrà una corrente conservata

$$J^\mu = \frac{\partial \mathcal{L}}{\partial(\partial_\mu \phi)} \delta\phi - C^\mu, \quad (1.9)$$

a cui corrisponde una carica conservata

$$Q = \int J^0 d^d x. \quad (1.10)$$

Alcune importanti simmetrie in fisica sono l'invarianza per traslazioni spaziali, traslazioni temporali e rotazioni, a cui corrispondono rispettivamente la conservazione del momento, dell'energia e del momento angolare. Queste simmetrie si traducono matematicamente nel fatto che la lagrangiana non dipende esplicitamente dalle coordinate spaziotemporali x , ma soltanto dal campo ϕ e dalle sue derivate. Nel caso di invarianza sotto trasformazioni di Lorentz la quantità conservata è il tensore energia-impulso $T^{\mu\nu}$.

1.1.3 Elettrodinamica scalare

Un caso interessante per lo studio dei solitoni è quello di una teoria di gauge, in cui si ha un gruppo di trasformazioni che agisce non solo globalmente, ma anche localmente sul campo ϕ lasciando invariata la lagrangiana. In questa teoria compare anche un campo di gauge $A_\mu(x)$, che rappresenta il potenziale legato ad un campo elettromagnetico che interagisce col campo ϕ . Tale campo di gauge è matematicamente interpretabile come una 1-forma $A = A_\mu dx^\mu$ sullo spaziotempo. Viene qui analizzato soltanto

il caso di un campo scalare complesso $\phi: \mathbb{R} \times \mathbb{R}^d \rightarrow \mathbb{C}$ accoppiato ad un campo di gauge $A_\mu(x)$ in cui il gruppo di simmetria è $U(1)$. La lagrangiana che descrive la teoria è

$$L = \int \left(\frac{1}{2} \overline{D_\mu \phi} D^\mu \phi - \frac{1}{4} F_{\mu\nu} F^{\mu\nu} - U(\overline{\phi}\phi) \right) d^d x, \quad (1.11)$$

dove l'operatore $D_\mu \phi = (\partial_\mu - iA_\mu)\phi$ è detto derivata covariante, e $\overline{D_\mu} = \partial_\mu + iA_\mu$, mentre $F_{\mu\nu} = \partial_\mu A_\nu - \partial_\nu A_\mu$ è il tensore elettromagnetico. Le sue componenti sono legate ai campi elettrico e magnetico da $E^i = F^{i0}$, $B^i = -\frac{1}{2}\varepsilon^{ijk} F^{jk}$. Una trasformazione di gauge $U(1)$ agisce sulla coppia $\{\phi(x), A_\mu(x)\}$ come

$$\phi(x) \mapsto e^{i\alpha(x)}\phi(x), \quad A_\mu(x) \mapsto A_\mu(x) + \partial_\mu \alpha(x), \quad (1.12)$$

con $\alpha(x)$ una funzione differenziabile che dipende dalla coordinata spaziotemporale x . Questa trasformazione agisce sulla derivata covariante come

$$D_\mu \phi \mapsto \partial_\mu (e^{i\alpha}\phi) - i(A_\mu + \partial_\mu \alpha)e^{i\alpha}\phi = e^{i\alpha} D_\mu \phi, \quad (1.13)$$

mentre lascia invariato il tensore elettromagnetico

$$F_{\mu\nu} \mapsto \partial_\mu (A_\nu + \partial_\nu \alpha) - \partial_\nu (A_\mu + \partial_\mu \alpha) = F_{\mu\nu}. \quad (1.14)$$

Dunque la lagrangiana (1.11) risulta invariante sotto trasformazioni di gauge. Anche in questo caso si può riscrivere la lagrangiana come somma dei contributi cinetico e potenziale

$$T = \int \left(\frac{1}{2} E^i E^i + \frac{1}{2} \overline{D_0 \phi} D_0 \phi \right) d^d x, \quad (1.15)$$

$$V = \int \left(\frac{1}{2} B^i B^i + \frac{1}{2} \overline{D_i \phi} D^i \phi + U(\overline{\phi}\phi) \right) d^d x, \quad (1.16)$$

ricordando che $F_{\mu\nu} F^{\mu\nu} = 2(B^2 - E^2)$. Le equazioni del moto per la lagrangiana (1.11) si ottengono calcolando la variazione rispetto a $\overline{\phi}$ e A_μ e sono

$$D_\mu D^\mu \phi + 2U'(\overline{\phi}\phi)\phi = 0, \quad (1.17)$$

$$\partial_\mu F^{\mu\nu} = J^\nu = -\frac{i}{2}(\overline{\phi} D^\nu \phi - \phi \overline{D^\nu \phi}), \quad (1.18)$$

con $U'(z) = \frac{dU}{dz}$ e J^μ la corrente conservata (1.9) per il teorema di Nöther.

1.2 Considerazioni energetiche e topologiche

1.2.1 Condizioni al contorno

Per avere delle informazioni sulla natura delle soluzioni di una teoria è utile unire considerazioni di tipo energetico e di tipo topologico. Si definisce innanzitutto una configurazione di campo come la funzione $\phi(\mathbf{x})$ che prende valori ad un fissato valore temporale t , la quale rappresenta il valore istantaneo di un campo dinamico nei vari punti dello spazio. Rilevanti per la dinamica sono le configurazioni di equilibrio, configurazioni di campo statiche che minimizzano l'energia. Trattandosi di configurazioni statiche $T = 0$, dunque l'energia totale è data solo dal contributo potenziale V , nel caso più semplice

$$E = \int \left(\frac{1}{2} \nabla \phi_l \cdot \nabla \phi_l + U(\phi) \right) d^d x. \quad (1.19)$$

Si definisce la densità di energia come l'integrando in (1.19). Si noti che l'energia E , a causa della scelta di U come polinomio in $|\phi|$ inferiormente limitato e con minimo $U_{\min} = 0$, risulta semidefinita positiva. Una possibile prima soluzione per minimizzare E è una configurazione costante, con $\partial_0 \phi = \nabla \phi = 0$ e che soddisfi $U(\phi) = U_{\min} = 0$. Si definisce *vacuum manifold* della teoria l'insieme $\mathcal{V} = \{\phi \in \mathbb{R}^n \mid U(\phi) = 0\}$, allora $\phi \in \mathcal{V}$ costante minimizza l'energia. Una tale configurazione prende il

nome di *vacuum* (vuoto). Tuttavia questa non è l'unica possibilità.

Una configurazione che minimizzi l'energia deve necessariamente avere una densità di energia che si annulla all'infinito, diversamente l'energia divergerebbe e la configurazione non sarebbe una soluzione fisica. Allora necessariamente $\lim_{|\mathbf{x}| \rightarrow \infty} \phi(\mathbf{x}) = \phi^\infty(\mathbf{x}) \in \mathcal{V}$. Il dato all'infinito definisce dunque una funzione

$$\phi^\infty: \mathbb{S}_\infty^{d-1} \rightarrow \mathcal{V}, \quad (1.20)$$

definita sulla $(d-1)$ -sfera di raggio infinito. La presenza o meno di solitoni dipende dalla classe di omotopia di questo dato asintotico $\phi^\infty(\mathbf{x})$.

1.2.2 Teoria dell'omotopia

L'omotopia è una relazione di equivalenza: due mappe $f, g: X \rightarrow Y$ si dicono omotope se esiste una mappa continua

$$\Gamma: X \times [0, 1] \mapsto Y \quad (1.21)$$

tale che per ogni $\mathbf{x} \in X$

$$\Gamma(\mathbf{x}, 0) = f(\mathbf{x}) \quad \text{e} \quad \Gamma(\mathbf{x}, 1) = g(\mathbf{x}), \quad (1.22)$$

cioè se possono essere deformate con continuità l'una nell'altra. È allora possibile raccogliere tutte le funzioni omotope tra loro nella stessa classe di omotopia, e studiare i comportamenti delle varie classi. Spesso si fissano due punti $x_0 \in X$ e $y_0 \in Y$ e si richiede $\Gamma(x_0, t) = y_0$ per ogni t . In tal caso le funzioni all'interno della classe di equivalenza si dicono mappe basate, e hanno tutte in comune il punto $f(x_0) = y_0$. Il caso fondamentale e più studiato è quello delle classi di omotopia delle mappe definite su $X = \mathbb{S}^n$: l'insieme delle classi di omotopia delle mappe $\mathbb{S}^n \rightarrow Y$ si indica con $\pi_n(Y)$. Ad esempio $\pi_0(Y)$ è l'insieme delle classi di mappe da un punto alla varietà Y , e dunque conta il numero di componenti connesse di Y . Per $n \geq 1$ $\pi_n(Y)$ è un gruppo. Si consideri il caso di $\pi_1(Y)$. In questo caso la presenza di un punto base è utile per poter definire un'operazione di composizione tra due funzioni di diverse classi di equivalenza, dal momento che basta seguire le due funzioni in successione, e questo conferisce all'insieme delle classi di omotopia una struttura di gruppo. Tuttavia si dimostra che è sempre possibile scegliere all'interno di due diverse classi di omotopia due funzioni che presentano un punto in comune, e la composizione tra due classi viene fatta componendo quelle due specifiche funzioni. Pertanto la richiesta di un punto base non è strettamente necessaria. Una mappa $\mathbb{S}^1 \rightarrow Y$ prende il nome di *loop*, e la sua immagine è una curva chiusa. Se si considerano due *loop* ψ_0 e ψ_1 con punto base $\psi_i(x_0) = y_0$, la loro composizione $\psi = \psi_1 \circ \psi_0$ si ottiene seguendo prima ψ_0 e poi ψ_1 , e la classe di omotopia di ψ dipende da quelle di ψ_0 e ψ_1 . La composizione tra *loop* è associativa, l'elemento neutro del gruppo è dato dalla classe della mappa costante $\mathbb{S}^1 \mapsto y_0 \in Y$, e l'elemento inverso è il *loop* stesso percorso nella direzione opposta.

Nel seguito sono enunciati alcuni risultati noti dallo studio della teoria delle omotopie. Un primo risultato importante è che $\pi_1(\mathbb{S}^1) = \mathbb{Z}$. Una funzione $\mathbb{S}^1 \rightarrow \mathbb{S}^1$ è una funzione continua $f(\theta)$, $\theta \in [0, 2\pi]$. La continuità di f richiede che $f(2\pi) = f(0) + 2k\pi$, con $k \in \mathbb{Z}$. k è detto numero di avvolgimenti della mappa f , ed essendo un numero intero non cambia all'interno di una stessa classe di omotopia. Le varie classi possono allora essere identificate tramite il valore di k : mappe con lo stesso numero di avvolgimenti sono omotope. Un modo interessante per riscrivere il numero di avvolgimenti è

$$k = \frac{1}{2\pi} [f(2\pi) - f(0)] = \frac{1}{2\pi} \int_0^{2\pi} \frac{df}{d\theta} d\theta. \quad (1.23)$$

k è detto anche carica topologica della configurazione, e $\frac{df}{d\theta}$ rappresenta dunque la densità di carica. Poiché $k \in \mathbb{Z}$, questa carica topologica risulta naturalmente quantizzata, a differenza di altre cariche. Ad esempio per la carica elettrica le equazioni del campo non impongono la quantizzazione della carica, che in linea di principio potrebbe assumere qualsiasi valore.

1.2.3 Grado topologico

Un utile strumento per studiare le classi di omotopia è il grado topologico. Spesso infatti il carattere topologico di una configurazione di campo è interamente descritto dal grado topologico della mappa

associata al campo.

Sia $\Psi: X \rightarrow Y$ una mappa differenziabile tra due varietà chiuse orientabili X, Y , con $\dim X = \dim Y = d$. Si supponga inoltre che X e Y siano connesse. Sia Ω una forma di volume normalizzata su Y , ad esempio ottenuta dalla metrica di Y . Tale forma di volume deve soddisfare

$$\int_Y \Omega = 1 \quad (1.24)$$

per la condizione di normalizzazione. Si consideri poi il pullback $\Psi^*\Omega$, in coordinate locali se $\Psi = \mathbf{y}(\mathbf{x})$

$$\Omega = \alpha(\mathbf{y}) dy^1 \wedge \cdots \wedge dy^d, \quad (1.25)$$

$$\Psi^*\Omega = \alpha(\mathbf{y}(\mathbf{x})) \det\left(\frac{\partial y}{\partial x}\right) dx^1 \wedge \cdots \wedge dx^d, \quad (1.26)$$

con $\det\left(\frac{\partial y}{\partial x}\right)$ il determinante dello jacobiano della mappa. Si definisce il grado topologico di Ψ come

$$\deg \Psi = \int_X \Psi^*\Omega \quad (1.27)$$

$\deg \Psi$ è un numero intero, e non dipende dalla scelta di Ω . Questo perché prese due forme di volume Ω, Ω' normalizzate, la loro differenza su Y ha integrale nullo, dunque è una forma esatta. Poiché il pullback commuta con il differenziale, la forma rimane esatta anche su X e il suo integrale vale nuovamente zero. Essendo poi il grado topologico un intero, esso non cambia all'interno di una stessa classe di omotopia, e si può usare il grado topologico delle mappe all'interno di una classe per identificare in maniera univoca il comportamento topologico di tale classe.

Il caso importante considerato in questo elaborato è quello di mappe $\mathbb{S}^1 \rightarrow \mathbb{S}^1$. Sia ψ nella k -esima classe di omotopia di $\pi_1(\mathbb{S}^1)$, cioè abbia numero di avvolgimento k , allora $\deg \psi = k$. Questo si può dimostrare prendendo come forma di volume su \mathbb{S}^1 $\frac{1}{2\pi} d\theta$, e data $\psi = \psi(\theta)$ si ha

$$\deg \psi = \int_{\mathbb{S}^1} \psi^*\left(\frac{1}{2\pi} d\theta\right) = \frac{1}{2\pi} \int_0^{2\pi} \frac{d\psi}{d\theta} d\theta = k \quad (1.28)$$

come trovato in (1.23).

1.2.4 Applicazioni alle configurazioni di campo

Considerando una generica configurazione $\phi(\mathbf{x})$, ci si può chiedere se questa possa essere deformata con continuità alla soluzione costante banale con energia nulla. Questo è possibile soltanto se le due configurazioni appartengono alla stessa classe di omotopia. Poiché si è interessati a lavorare in termini di classi di omotopia, e non di specifiche funzioni con un dato punto base, non è necessario richiedere che un tale punto esista.

Nel caso lineare due configurazioni ϕ e $\tilde{\phi}$ sono omotope se e solo se lo sono i loro dati asintotici ϕ^∞ e $\tilde{\phi}^\infty$. Se ϕ appartiene ad una classe diversa da quella della soluzione costante, allora le due configurazioni sono topologicamente distinte, hanno diversa carica topologica, ed è impossibile farle evolvere l'una nell'altra. Inoltre risulta sufficiente studiare configurazioni di campo statiche, perché tutte quelle dinamiche possono essere ottenute da esse mediante deformazioni continue, che pur alterando l'energia lasciano le soluzioni nella stessa classe di omotopia. Una configurazione di campo in una classe di omotopia diversa da quella della soluzione costante che è anche soluzione delle equazioni del moto rappresenta un solitone. Un solitone non può in alcun modo essere deformato in una soluzione costante, in quanto la sua carica topologica è per definizione non nulla. La presenza o meno di solitoni dipende dunque dalla classe di omotopia di ϕ^∞ come definita in (1.20), ovvero dalla struttura di $\pi_{d-1}(\mathcal{V})$. Si considerino a titolo di esempio i seguenti casi.

- $d = 1$. In questo caso $\mathbb{S}_\infty^{d-1} = \mathbb{S}_\infty^0$ è costituito da due punti $\pm\infty$ e $\phi^\infty: \{\pm\infty\} \rightarrow \mathcal{V}$ è classificata in $\pi_0(\mathcal{V}) \times \pi_0(\mathcal{V})$. Se \mathcal{V} ha p componenti connesse allora sono presenti p^2 classi di omotopia, ciascuna classificata sulla base dei valori che assume il campo all'infinito. Detto

$(v_1 = \phi(-\infty), v_2 = \phi(+\infty)) \in \pi_0(\mathcal{V}) \times \pi_0(\mathcal{V})$ le diverse configurazioni di campo sono classificate dai valori di v_1 e v_2 . Se $v_1 = v_2$ la configurazione sta nella stessa classe della soluzione costante, mentre se $v_1 \neq v_2$ si ha un solitone detto *kink* che connette v_1 a $-\infty$ a v_2 a $+\infty$.

- $d = 2$. Qui si considerano funzioni definite sul cerchio $\mathbb{S}_\infty^{d-1} = \mathbb{S}^1$, e le configurazioni di campo sono classificate in $\pi_1(\mathcal{V})$. Una configurazione nella classe banale può essere deformata prima ad un valore costante sul cerchio all'infinito, e poi ad un valore costante su tutto \mathbb{R}^2 . Una configurazione non banale prende invece il nome di *vortice*. Se in particolare $\mathcal{V} = \mathbb{S}^1$ allora $\pi_1(\mathbb{S}^1) = \mathbb{Z}$ e il vortice può essere classificato dal numero di avvolgimenti N . Se invece $\mathcal{V} = \mathbb{S}^{n-1}$ con $n > 2$ allora $\pi_1(\mathcal{V})$ è banale e non ci sono solitoni.
- $d = 3$. In dimensione 3 $\mathbb{S}_\infty^{d-1} = \mathbb{S}^2$ è la sfera e le configurazioni di campo sono classificate in $\pi_2(\mathcal{V})$. Se \mathcal{V} è un insieme discreto di punti o di curve (ad esempio $\mathcal{V} = \mathbb{S}^1$) allora $\pi_2(\mathcal{V})$ è banale e non ci sono solitoni nella teoria. Se $\mathcal{V} = \mathbb{S}^2$ allora $\pi_2(\mathbb{S}^2) = \mathbb{Z}$, le cui configurazioni prendono il nome di *monopoli* e sono classificate sulla base del numero di monopolo N . Se $\mathcal{V} = \mathbb{S}^{n-1}$ per $n > 3$ di nuovo il gruppo è banale e non ci sono solitoni.

Questa classificazione vale per teorie in cui non sono coinvolti campi di gauge A_μ . In questo caso spesso si parla di *teorie globali*, i cui solitoni sono *kink*, *vortici globali* e *monopoli globali*. Vortici e monopoli globali presentano però il problema di avere energia divergente, dunque non rappresentano effettivamente soluzioni fisiche. Se invece è presente un campo di gauge, questo può avere effetti notevoli sull'energia delle configurazioni, rendendola finita, senza modificare la classificazione: si parla allora più propriamente di vortici e monopoli.

1.2.5 Il teorema di Derrick

In questa sezione si presenta un interessante risultato sulla *non* esistenza dei solitoni dovuto a Derrick [3]. Sia $\phi(\mathbf{x})$ una configurazione di campo statica ad energia finita, e sia $\mathbf{x} \mapsto \xi \mathbf{x}$, $\xi > 0$ un riscalamento spaziale. Sia $\phi^{(\xi)}(\mathbf{x})$ la famiglia a un parametro di configurazioni ottenuta dall'applicazione della mappa $\mathbf{x} \mapsto \xi \mathbf{x}$ a $\phi(\mathbf{x})$. Sia infine $e(\xi) = E(\phi^{(\xi)}(\mathbf{x}))$ l'energia associata alla configurazione $\phi^{(\xi)}(\mathbf{x})$ come funzione di ξ . Vale allora il seguente teorema.

Teorema 1.1 (Derrick). *Se per una generica configurazione $\phi(\mathbf{x})$ diversa dal vacuum $e(\xi)$ non ha punti stazionari, allora la teoria non ammette soluzioni di campo statiche con energia finita diverse dal vacuum.*

Dimostrazione. Se $\phi(\mathbf{x})$ è una soluzione delle equazioni del moto, allora la sua energia risulta stazionaria rispetto ad una qualsiasi variazione del campo, in particolare anche rispetto al riscalamento spaziale $\mathbf{x} \mapsto \xi \mathbf{x}$. Se dunque $e(\xi)$ non ammette punti stazionari rispetto a questa variazione di $\phi(\mathbf{x})$, questa configurazione non può essere una soluzione. ■

A seconda della forma esplicita di $e(\xi)$ il teorema può risultare molto utile per determinare la non esistenza di solitoni. Se si considera una configurazione $\phi: \mathbb{R}^d \rightarrow \mathbb{R}^n$ accoppiata ad un potenziale di gauge A_μ , si definisce

$$\phi^{(\xi)}(\mathbf{x}) = \phi(\xi \mathbf{x}), \quad (1.29)$$

$$A_\mu^{(\xi)}(\mathbf{x}) = \xi A_\mu(\xi \mathbf{x}). \quad (1.30)$$

In questo modo il gradiente trasforma come

$$\nabla \phi^{(\xi)}(\mathbf{x}) = \nabla(\phi(\xi \mathbf{x})) = \xi \nabla \phi(\xi \mathbf{x}) \quad (1.31)$$

utilizzando la regola della catena, e similmente il tensore di campo $F_{\mu\nu}$, essendo la derivata del potenziale di gauge, trasforma come

$$F_{\mu\nu}^{(\xi)}(\mathbf{x}) = \xi^2 F_{\mu\nu}(\xi \mathbf{x}). \quad (1.32)$$

Secondo queste trasformazioni se $\phi(\mathbf{x})$ soddisfa le condizioni al contorno su $\mathbb{S}_{\infty}^{d-1}$ $\phi \in \mathcal{V}$, $D\phi = 0$, $F = 0$, allora anche $\phi^{(\xi)}(\mathbf{x})$ le soddisfa, dunque il riscaldamento spaziale non cambia classe di omotopia e l'energia rimane finita. A seconda della forma dell'energia si può allora utilizzare il teorema di Derrick per stabilire la non esistenza dei solitoni. Si considerino i seguenti esempi.

Campo scalare In una teoria con un solo campo scalare ϕ l'energia per una configurazione statica può avere la forma

$$E = \int (W(\phi)\nabla\phi \cdot \nabla\phi + U(\phi)) d^d x = E_2 + E_0, \quad (1.33)$$

che è la forma più generale di (1.19), con $E_2 = \int (W(\phi)\nabla\phi \cdot \nabla\phi) d^d x$ e $E_0 = \int U(\phi) d^d x$, con il pedice che indica il grado di omogeneità in ξ . Se infatti si calcola $e(\xi)$ si vede che

$$\begin{aligned} e(\xi) &= E(\phi^{(\xi)}(\mathbf{x})) = \int \left(W(\phi^{(\xi)}(\mathbf{x}))\nabla\phi^{(\xi)}(\mathbf{x}) \cdot \nabla\phi^{(\xi)}(\mathbf{x}) + U(\phi^{(\xi)}(\mathbf{x})) \right) d^d x = \\ &= \int (\xi^2 W(\phi(\xi\mathbf{x}))\nabla\phi(\xi\mathbf{x}) \cdot \nabla\phi(\xi\mathbf{x}) + U(\phi(\xi\mathbf{x}))) d^d x = \\ &= \xi^{-d}(\xi^2 E_2 + E_0) = \xi^{2-d} E_2 + \xi^{-d} E_0, \end{aligned} \quad (1.34)$$

dove nell'integrale si è eseguito un cambio di variabile da \mathbf{x} a $\xi\mathbf{x}$. E_2 e E_0 sono delle costanti positive, dipendono dalla configurazione $\phi(\mathbf{x})$ di partenza, ma non dal valore di ξ . La natura di $e(\xi)$ dipende dunque dalla dimensione d dello spazio considerato. Se $d = 3$ o $d = 2$ $e(\xi)$ è monotona decrescente in ξ , non ci sono punti stazionari e dunque non ci sono solitoni. Se invece $d = 1$ si ha $e(\xi) = E_2 + \frac{1}{\xi^2} E_0$ che è stazionario in $\xi = \sqrt{\frac{E_0}{E_2}}$, e dunque possono esserci solitoni. I vortici globali e i monopoli globali sfuggono al teorema perché hanno energia infinita.

Campo scalare in una teoria di gauge In una teoria di gauge, ignorando i coefficienti esatti davanti ai vari termini, l'energia ha la forma

$$E = \int (|F|^2 + |D\phi|^2 + U(\phi)) d^d x = E_4 + E_2 + E_0, \quad (1.35)$$

da cui con un conto analogo a quello del paragrafo precedente

$$e(\xi) = \xi^{4-d} E_4 + \xi^{2-d} E_2 + \xi^{-d} E_0. \quad (1.36)$$

In questo caso il teorema non permette di concludere nulla per teorie per $d = 2$ o $d = 3$, per le quali sono presenti punti stazionari, e infatti in $d = 2$ esistono i vortici e in $d = 3$ i monopoli. Per $d \geq 4$ non ci sono punti stazionari e di nuovo non esistono solitoni.

Capitolo 2

Vortici

Ci si concentra in questo capitolo sullo studio di un particolare tipo di solitoni, i vortici. Si tratta di solitoni che esistono in teorie in 2 dimensioni, caratterizzati dalla presenza di un nucleo finito centrato in un punto in cui il campo ϕ si annulla, nel quale si concentra tutta l'energia. La densità energetica va poi a 0 esponenzialmente a mano a mano che ci si allontana dal nucleo.

2.1 Funzioni di energia di Ginzburg-Landau

Si consideri il caso di uno spazio bidimensionale \mathbb{R}^2 , sul quale è definito un campo $\phi: \mathbb{R} \times \mathbb{R}^2 \rightarrow \mathbb{R}^n$. Il caso più semplice di una teoria che presenti vortici è quella con $n = 2$ con una coppia di campi scalari $\phi = (\phi_1(x), \phi_2(x))$ e una simmetria interna $SO(2)$, ovvero in cui la trasformazione

$$\phi_i \mapsto R_{ij}\phi_j \quad (2.1)$$

lascia invariata la lagrangiana, con $R \in SO(2)$. R rappresenta una rotazione nel piano, e la forma esplicita della trasformazione è

$$\begin{pmatrix} \phi_1 \\ \phi_2 \end{pmatrix} \mapsto \begin{pmatrix} \cos \theta & -\sin \theta \\ \sin \theta & \cos \theta \end{pmatrix} \begin{pmatrix} \phi_1 \\ \phi_2 \end{pmatrix}, \quad (2.2)$$

con θ l'angolo di rotazione nel piano. Risulta utile identificare il piano \mathbb{R}^2 con il piano complesso \mathbb{C} . Qui si ha un'unica coordinata spaziale $z = x^1 + ix^2$, il campo diventa $\phi = \phi_1 + i\phi_2$ e la simmetria interna corrisponde a una rotazione di fase

$$\phi \mapsto e^{i\theta}\phi. \quad (2.3)$$

Ci sono due tipi di teorie in cui possono comparire i vortici, teorie globali e teorie di gauge. In una teoria globale è presente soltanto il campo $\phi(x)$, in una teoria di gauge questo è accoppiato a un potenziale di gauge $A_\mu(x) = (A_0(x), \mathbf{A}(x))$. Come spiegato nel capitolo precedente, è sufficiente studiare il caso di soluzioni statiche. Si tralascia dunque da questo punto la dipendenza temporale, e ci si concentra sulle configurazioni di campo $\phi(\mathbf{x})$. Vi sono molte lagrangiane che soddisfano a queste condizioni. Ci si concentra qui sul caso dei *funzionali di energia di Ginzburg-Landau*, che nella teoria globale hanno la forma

$$V = \int \left(\frac{1}{2} \nabla \bar{\phi} \cdot \nabla \phi + U(\bar{\phi}\phi) \right) d^2x, \quad (2.4)$$

e nella teoria di gauge sono invece

$$V = \int \left(\frac{1}{2} B^2 + \frac{1}{2} \overline{D_i \phi} D_i \phi + U(\bar{\phi}\phi) \right) d^2x, \quad (2.5)$$

con $B = F_{12}$ l'unica componente non nulla del tensore elettromagnetico. In entrambi i casi il potenziale U dipende solo dal modulo del campo $|\phi|$ ed è un polinomio in $\bar{\phi}\phi$. Viene qui analizzato il caso di un potenziale quadratico della forma

$$U(\bar{\phi}\phi) = \mu + \nu \bar{\phi}\phi + \frac{\zeta}{8} (\bar{\phi}\phi)^2, \quad (2.6)$$

con μ, ν, ζ coefficienti reali; il valore di μ si può aggiustare per fissare il minimo del potenziale U_{\min} a 0. Si considera questa particolare forma del potenziale U perché è il caso più semplice in cui esistono dei solitoni, e presenta tutte le caratteristiche tipiche per comprendere il fenomeno. Affinché la teoria sia stabile l'energia deve essere inferiormente limitata, dunque $\zeta > 0$. Inoltre se $\nu > 0$ l'unica soluzione costante che minimizza U è $\phi = 0$, che è una soluzione banale. Supponendo allora $\nu < 0$ e chiamando $\zeta = \lambda^2$ si può riscrivere il potenziale come

$$U(\bar{\phi}\phi) = \frac{\lambda^2}{8}(p^2 - \bar{\phi}\phi)^2, \quad (2.7)$$

dove p dipende dai valori di μ e ν . La *vacuum manifold* è data allora dal cerchio $|\phi| = p$, e il gruppo di omotopia $\pi_1(\mathcal{V}) = \pi_1(\mathbb{S}^1) = \mathbb{Z}$ è non banale, permettendo l'esistenza dei solitoni.

Per agevolare la trattazione, conviene passare in coordinate polari (r, θ) nel piano complesso. Il passaggio da coordinate cartesiane a polari è dato da

$$x^1 = r \cos \theta \quad x^2 = r \sin \theta \quad (2.8)$$

$$dx^1 = \cos \theta dr - r \sin \theta d\theta \quad dx^2 = \sin \theta dr + r \cos \theta d\theta \quad (2.9)$$

Il potenziale di gauge è invariante per cambi di coordinate, $A = A_1 dx^1 + A_2 dx^2 = A_r dr + A_\theta d\theta$, dunque

$$A_r = A_1 \cos \theta + A_2 \sin \theta, \quad A_\theta = -A_1 r \sin \theta + A_2 r \cos \theta. \quad (2.10)$$

Il tensore di campo ha un'unica componente $F_{r\theta} = \partial_r A_\theta - \partial_\theta A_r = rB$, e la metrica diventa $ds^2 = dr^2 + r^2 d\theta^2$. Si analizzano ora separatamente i due casi di teorie globali e di gauge.

2.2 Vortici globali

L'energia nella teoria globale ha la forma

$$V = \frac{1}{2} \int_0^\infty \int_0^{2\pi} \left(\partial_r \bar{\phi} \partial_r \phi + \frac{1}{r^2} \partial_\theta \bar{\phi} \partial_\theta \phi + \frac{\lambda^2}{4} (p^2 - \bar{\phi}\phi)^2 \right) r dr d\theta. \quad (2.11)$$

Il *vacuum* ha la forma $\phi = pe^{i\chi}$, così $|\phi| = p$. Il teorema di Derrick esclude ogni altra possibilità: ricordando che in 2 dimensioni $e(\xi) = E_2 + \frac{1}{2}E_0$, l'unica possibilità perché $e(\xi)$ sia stazionario è che $E_0 = 0$, cioè $|\phi| = p$ ovunque, e $\phi = pe^{i\chi}$. Affinché l'energia sia non divergente, ipotesi necessaria del teorema, $\chi = cost$ perché si annulli il termine $\partial_\theta \bar{\phi} \partial_\theta \phi$, e si ritrova la soluzione in \mathcal{V} .

Una configurazione di campo la cui densità di energia in (2.11) va a 0 velocemente per $r \rightarrow \infty$ deve assumere valori in \mathcal{V} e deve soddisfare $\partial_r \phi = 0$ per $r \rightarrow \infty$. Supponendo che $\lim_{r \rightarrow \infty} \phi(r, \theta)$ esista, si denota questa forma asintotica con

$$\phi^\infty(\theta) = pe^{i\chi^\infty(\theta)}. \quad (2.12)$$

ϕ^∞ è una mappa $\phi^\infty: \mathbb{S}_\infty^1 \rightarrow \mathcal{V} = \mathbb{S}^1$ dal cerchio all'infinito in \mathcal{V} . Affinché sia differenziabile è necessario che

$$\chi^\infty(2\pi) = \chi^\infty(0) + 2\pi N, \quad (2.13)$$

dove in N si riconosce il numero di avvolgimento (1.23) della mappa, che rappresenta la sua carica topologica. Affinché una configurazione abbia energia finita nella teoria globale è necessario che $N = 0$. Infatti per r molto grande $\phi \simeq \phi^\infty$ e il contributo angolare $\partial_\theta \bar{\phi} \partial_\theta \phi$ all'energia assume la forma

$$\frac{1}{2} p^2 \int_{r_0}^\infty \int_0^{2\pi} \frac{1}{r} (\partial_\theta \chi^\infty)^2 dr d\theta, \quad (2.14)$$

che diverge logaritmicamente a meno che

$$\int_0^{2\pi} (\chi^\infty)^2 d\theta = 0, \quad (2.15)$$

da cui $\partial_\theta \chi^\infty = 0$, cioè $\chi^\infty = cost$ e dunque $N = 0$. Tali soluzioni stanno nella classe di omotopia del *vacuum*, e sono dunque topologicamente banali. Soluzioni con $N \neq 0$, che rappresentano vortici globali, hanno energia che diverge logaritmicamente, e sebbene matematicamente esistano non rappresentano soluzioni fisiche.

2.3 Vortici di gauge

In coordinate polari l'energia della teoria di gauge ha la forma

$$V = \frac{1}{2} \int_0^\infty \int_0^{2\pi} \left(\frac{1}{r^2} F_{r\theta}^2 + \overline{D_r \phi} D_r \phi + \frac{1}{r^2} \overline{D_\theta \phi} D_\theta \phi + \frac{\lambda^2}{4} (p^2 - \overline{\phi} \phi)^2 \right) r dr d\theta. \quad (2.16)$$

2.3.1 Considerazioni topologiche

Per avere una soluzione con densità di energia nulla quando $r \rightarrow \infty$ è necessario porre alcune condizioni.

(i) ϕ deve annullare il potenziale, dunque asintoticamente $|\phi| = p$ per qualsiasi angolo θ e ϕ assume la forma $\phi \sim p e^{i\chi}$;

(ii) $D_r \phi = 0$, da cui sostituendo la forma asintotica ricavata in precedenza

$$D_r \phi = D_r (p e^{i\chi}) = ip(\partial_r \chi - A_r) e^{i\chi} = 0. \quad (2.17)$$

A questo punto si sfrutta la libertà di gauge del potenziale \mathbf{A} : è sempre possibile effettuare la scelta di una gauge radiale in modo che $A_r = 0$. In questo modo da (2.17) si ha che $\partial_r \chi = 0$, cioè all'infinito χ non dipende dalla coordinata radiale. Si può allora definire la forma asintotica di ϕ più precisamente come

$$\phi^\infty(\theta) = \lim_{r \rightarrow \infty} \phi(r, \theta) = p e^{i\chi^\infty(\theta)}, \quad (2.18)$$

indipendente dalla coordinata radiale;

(iii) $F_{r\theta} = 0$, cioè il campo magnetico B deve tendere a 0 all'infinito. Esplicitamente $F_{r\theta} = \partial_r A_\theta - \partial_\theta A_r$, ma dalla scelta della gauge $A_r = 0$, quindi $\partial_r A_\theta = 0$. Allora anche il potenziale di gauge avrà una forma asintotica indipendente dalla coordinata radiale

$$A_\theta^\infty = \lim_{r \rightarrow \infty} A_\theta(r, \theta); \quad (2.19)$$

(iv) $D_\theta \phi = 0$, da cui sostituendo (2.18) si ricava

$$D_\theta \phi = ip(\partial_\theta \chi^\infty - A_\theta^\infty) e^{i\chi^\infty} = 0, \quad (2.20)$$

cioè

$$A_\theta^\infty = \partial_\theta \chi^\infty. \quad (2.21)$$

Nuovamente allora ϕ^∞ è una mappa dal cerchio all'infinito a $\mathcal{V} = \mathbb{S}^1$ e χ^∞ deve soddisfare (2.13), con N il numero di avvolgimenti della soluzione. Questa volta non vi è alcuna condizione che imponga $\partial_\theta \chi^\infty = 0$, e la funzione può avere un valore diverso in ogni direzione. Le condizioni ricavate danno inoltre un'importante informazione sul flusso del campo magnetico B attraverso \mathbb{R}^2 , che in questa teoria risulta quantizzato. Infatti

$$\Phi_B = \int_{\mathbb{R}^2} B d^2x = \int_{\mathbb{R}^2} \frac{1}{r} (\partial_r A_\theta - \partial_\theta A_r) r dr d\theta = \oint_{\mathbb{S}_\infty^1} A_\theta d\theta, \quad (2.22)$$

e applicando il teorema di Stokes l'integrale diventa un integrale di linea sul cerchio all'infinito, lungo il quale è nota l'espressione del potenziale di gauge $A_\theta = A_\theta^\infty$. Da (2.21) e ricordando (1.23) si ha

$$\Phi_B = \int_0^{2\pi} A_\theta^\infty d\theta = \int_0^{2\pi} \partial_\theta \chi^\infty d\theta = 2\pi N, \quad (2.23)$$

da cui il flusso è quantizzato.

2.3.2 Soluzioni delle equazioni del moto

Dopo aver mostrato che i vortici in una teoria di gauge esistono e aver ricavato alcune proprietà delle loro espressioni, si vuole ora ricavare una forma per queste soluzioni. Nel caso analizzato in questo elaborato si cercano soluzioni che godono di simmetria circolare e simmetria per riflessione attorno a un punto. Si fissi l'origine come tale punto. La simmetria per riflessione nel piano complesso è data da

$$\phi(r, \theta) = \bar{\phi}(r, -\theta). \quad (2.24)$$

La simmetria circolare equivale all'invarianza sotto l'azione delle rotazioni $R \in SO(2)$, che in coordinate polari agiscono come $(r, \theta) \mapsto (r, \theta + \beta)$ per un qualche angolo β . Si può dimostrare che se si considera l'invarianza solo sotto queste trasformazioni non vi sono soluzioni in classi di omotopia diverse da quella banale [6]. Ciò che rende possibile l'esistenza dei vortici è l'invarianza combinata sotto l'azione della trasformazione $R(\beta)$ (simmetria esterna) e della trasformazione $\tilde{R}(k\beta)$ (simmetria interna), $k \in \mathbb{Z}$, che agisce sui campi come sfasamento $\phi \mapsto e^{ik\beta}\phi$. L'invarianza combinata richiede che

$$\phi(r, R(\beta)\theta) = \tilde{R}(k\beta)\phi(r, \theta), \quad (2.25)$$

cioè dopo l'azione di $R(\beta)$ non è necessario che il campo rimanga invariato, ma deve quantomeno rimanere sulla stessa orbita della simmetria interna. In maniera esplicita

$$\phi(r, \theta + \beta) = e^{ik\beta}\phi(r, \theta). \quad (2.26)$$

Chiamando $\eta(r) = \phi(r, 0)$ da (2.26) si ha che

$$\phi(r, \theta) = e^{ik\theta}\eta(r). \quad (2.27)$$

Inoltre da (2.24) ponendo $\theta = 0$ si trova $\eta(r) = \bar{\eta}(r)$, cioè $\eta(r)$ è reale e $|\phi| = \eta$. Prendendo allora il limite per $r \rightarrow \infty$ risulta immediato che $k = N$. La forma generale del campo ϕ è allora

$$\phi(r, \theta) = e^{iN\theta}\eta(r). \quad (2.28)$$

Per quanto riguarda il potenziale di gauge \mathbf{A} , la simmetria interna agisce solo sui campi, lasciando invariati A_r e A_θ . L'unica simmetria che riguarda il potenziale di gauge è allora quella esterna, per cui $A_i(r, \theta + \beta) = A_i(r, \theta)$, cioè

$$\partial_\theta A_r = \partial_\theta A_\theta = 0, \quad (2.29)$$

e \mathbf{A} è indipendente dalla coordinata angolare. Nuovamente è possibile fissare la gauge radiale in modo che $A_r = 0$.

A questo punto unendo tutte le considerazioni precedenti si possono ricavare le equazioni del moto per i campi e le relative condizioni al contorno. Sostituendo (2.28) in (2.16) e ricordando che $\eta(r)$ è reale e che nulla dipende dalla coordinata angolare θ , nella quale si può risolvere l'integrale, si ottiene l'espressione per l'energia

$$V = \pi \int_0^\infty \left(\frac{1}{r^2} (\partial_r A_\theta)^2 + (\partial_r \eta)^2 + \frac{1}{r^2} (N - A_\theta)^2 \eta^2 + \frac{\lambda^2}{4} (p^2 - \eta^2)^2 \right) r dr. \quad (2.30)$$

Da questo momento si fissi per semplicità $p = 1$. Le equazioni del moto si ottengono calcolando la variazione rispetto a η e rispetto ad A_θ , mentre le condizioni al contorno vengono dalle considerazioni precedenti. Per il campo si richiede che $\phi(0, \theta)$ sia ben definita e abbia un'unico valore, dunque da (2.28) $\eta(0) = 0$, mentre per la condizione all'infinito $\eta(\infty) = p = 1$. Per il potenziale di gauge $A_\theta(0) = 0$ in modo che il potenziale non sia singolare, mentre $A_\theta(\infty) = N$ così $D_\theta \phi = (iN - iN)e^{iN\theta}\eta = 0$. Complessivamente

$$\frac{d^2 \eta}{dr^2} + \frac{1}{r} \frac{d\eta}{dr} - \frac{1}{r^2} (N - A_\theta)^2 \eta + \frac{\lambda^2}{2} (1 - \eta^2) \eta = 0 \quad \eta(0) = 0 \quad \eta(\infty) = 1, \quad (2.31)$$

$$\frac{d^2 A_\theta}{dr^2} - \frac{1}{r} \frac{dA_\theta}{dr} + (N - A_\theta) \eta^2 = 0 \quad A_\theta(0) = 0 \quad A_\theta(\infty) = N. \quad (2.32)$$

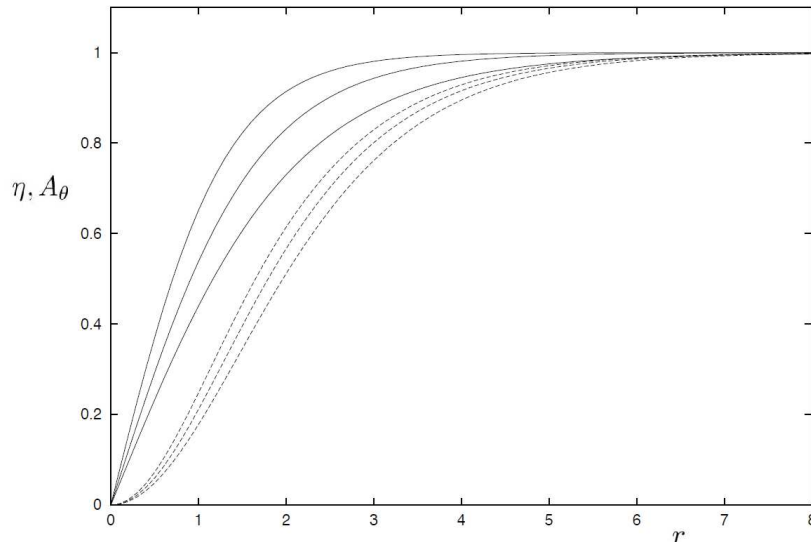


FIGURA 2.3.1 Andamento delle funzioni η (linea continua) e A_θ (linea tratteggiata) in funzione di r per il vortice con $N = 1$ per $\lambda^2 = 0.5, 1.0, 2.0$. Le curve si spostano a sinistra al crescere di λ^2 . Figura presa da [6, p. 172].

Le soluzioni di queste equazioni rappresentano i vortici cercati, classificati in base ai valori di N . Il caso $N = 1$ ϕ rappresenta un vortice, mentre $N = -1$ un'anti-vortice, ottenuto dalla soluzione con $N = 1$ mappando $\phi \mapsto \bar{\phi}$, $\mathbf{A} \mapsto -\mathbf{A}$. Per $N > 1$ si hanno soluzioni di multi-vortici. Le equazioni del moto non possiedono soluzioni analitiche, e sono risolte numericamente. Harden e Arp [4] hanno calcolato la soluzione nel caso base con $N = 1$, mentre Berger e Chen [1] hanno dimostrato che delle soluzioni esistono sempre per $N \neq 0$, e che sono monotone crescenti per $N \geq 1$. L'andamento delle soluzioni è mostrato in figura 2.3.1. Mentre per trovare la forma esatta della figura è necessario utilizzare tecniche numeriche, è possibile ricavare gli andamenti di η e A_θ per $r \rightarrow 0$ e $r \rightarrow \infty$ in maniera analitica. Per l'andamento vicino all'origine, si noti come il campo η vada a zero linearmente, mentre A_θ vada a zero più che linearmente. Un'analisi più accurata, considerando diversi valori di N , suggerisce gli andamenti

$$\begin{aligned} \eta(r) &\simeq r^N F(r^2), \\ A_\theta(r) &\simeq r^2 G(r^2), \end{aligned} \quad (2.33)$$

con F, G serie in r^2 con costanti non nulle come termini di grado 0. Sostituendo queste espressioni nelle equazioni del moto si può verificare che queste sono soluzioni per $r \rightarrow 0$. In particolare allora i campi sono regolari a $r = 0$. Più interessante è il caso per $r \rightarrow \infty$. Noto che $\eta(\infty) = 1$ e $A_\theta(\infty) = N$, si ponga

$$\begin{aligned} \eta(r) &= 1 + \sigma(r), \\ A_\theta(r) &= N + \psi(r), \end{aligned} \quad (2.34)$$

con σ, ψ che rappresentano piccole perturbazioni dai valori asintotici. Sostituendo queste espressioni nelle equazioni del moto e ignorando i termini non lineari, in quanto σ e ψ sono piccole, si trovano delle equazioni lineari per σ e $\frac{\psi}{r}$, che sono

$$\lambda^2 \left(\frac{d^2 \sigma}{d(\lambda r)^2} + \frac{1}{\lambda r} \frac{d\sigma}{d(\lambda r)} - \sigma \right) = 0, \quad (2.35)$$

$$\frac{d^2}{dr^2} \left(\frac{\psi}{r} \right) + \frac{1}{r} \frac{d}{dr} \left(\frac{\psi}{r} \right) - \left(1 + \frac{1}{r^2} \right) \frac{\psi}{r} = 0, \quad (2.36)$$

nelle quali si riconoscono le equazioni di Bessel modificate di ordine 0 per σ e di ordine 1 per $\frac{\psi}{r}$, le cui soluzioni sono le funzioni di Bessel modificate $K_0(\lambda r)$ e $K_1(r)$. Sostituendo le espressioni delle

soluzioni in (2.34) si trovano le espressioni asintotiche

$$\eta(r) = 1 + \frac{q}{2\pi} K_0(\lambda r), \quad (2.37)$$

$$A_\theta(r) = N + \frac{m}{2\pi} r K_1(r), \quad (2.38)$$

con m, q coefficienti costanti da determinare numericamente, che sperimentalmente risultano essere negativi. Queste espressioni valgono solo per $\lambda^2 \simeq 1$, per $\lambda^2 \gg 1$ perdono di validità a causa di termini importanti trascurati nella linearizzazione delle equazioni del moto.

Le soluzioni generali delle equazioni del moto $\eta(r)$ e $A_\theta(r)$ sono monotone crescenti se $N \geq 1$, e raggiungono molto velocemente i loro valori asintotici, come ben evidenziato in figura 2.3.1. Per valori più grandi di λ^2 addirittura il campo diventa quasi indistinguibile da una funzione costante a 1. Per questo spesso ci si figurano i vortici come soluzioni con "nuclei finiti" centrati negli zeri del campo $\phi = 0$ e con dimensioni finite.

2.3.3 Interazione tra due vortici

Si vuole ora indagare come due vortici interagiscono tra loro, seguendo il ragionamento presentato in [7]. Si considerino due diverse soluzioni $\{\phi_1, \mathbf{A}_{(1)}\}$ e $\{\phi_2, \mathbf{A}_{(2)}\}$ delle equazioni del moto (2.31) e (2.32) con $N = 1$, con $\phi_j = e^{i\theta} \eta_j(r)$. Risulta interessante studiare come interagiscono i due vortici quando sono molto lontani tra di loro, ovvero quando la distanza s che li separa è molto maggiore della somma delle dimensioni dei due nuclei dei vortici. L'idea è sfruttare il fatto che un vortice, quando visto molto lontano, ha una forma asintotica come quella in (2.37) e (2.38) che è soluzione di una teoria lineare. Si può allora scrivere la lagrangiana del problema in forma lineare nei campi, e verificare che se si aggiunge un termine che include delle sorgenti dei campi si possono ottenere le stesse soluzioni. A quel punto si può studiare in maniera più semplice l'interazione tra le sorgenti dei campi.

Si consideri la lagrangiana

$$L = \int \left(\frac{1}{2} \overline{D_\mu \phi} D^\mu \phi - \frac{1}{4} F_{\mu\nu} F^{\mu\nu} - \frac{\lambda^2}{8} (1 - \overline{\phi} \phi)^2 \right) d^2 x \quad (2.39)$$

che descrive la teoria di gauge considerata, che trascurando la componente temporale è analoga a (2.5). Si scelga la gauge in modo che ϕ assuma valori reali, e si ponga $\phi = 1 + \sigma$, in modo che il *vacuum* sia in $\sigma = 0$. La lagrangiana lineare si ottiene sviluppando fino ai termini quadratici in σ e A_μ , esplicitando la derivata covariante, ed è

$$L_f = \int \left(\frac{1}{2} \partial_\mu \sigma \partial^\mu \sigma - \frac{1}{2} \lambda^2 \sigma^2 - \frac{1}{4} F_{\mu\nu} F^{\mu\nu} + \frac{1}{2} A_\mu A^\mu \right) d^2 x. \quad (2.40)$$

A questa si aggiunge un termine di sorgenti esterne, una scalare e una vettoriale,

$$L_s = \int (\rho \sigma - j_\mu A^\mu) d^2 x, \quad (2.41)$$

con ρ una densità di carica scalare e j_μ una densità di corrente. Le equazioni d'onda che si ricavano da $L_f + L_s$ sono

$$(\square + \lambda^2) \sigma = \rho, \quad (2.42)$$

$$(\square + 1) A_\mu = j_\mu + \partial_\mu \partial_\nu j^\nu, \quad (2.43)$$

in cui si riconosce la forma delle equazioni di Klein-Gordon. Per confrontare le soluzioni di queste equazioni con quelle ricavate per i vortici, è necessario operare una trasformazione di gauge per convertire queste ultime nella gauge reale. Questo è possibile in $\mathbb{R}^2 \setminus \{0\}$ con la trasformazione di gauge $\phi \mapsto e^{-i\theta} \phi$, $A_\mu \mapsto A_\mu - \partial_\mu \theta$, che "srotola" la soluzione con avvolgimento unitario, rendendola reale. Applicando questa trasformazione alle forme asintotiche (2.37) e (2.38) si trova

$$\phi(r) \mapsto e^{-i\theta} \phi(r) = \eta(r) = 1 + \frac{q}{2\pi} K_0(\lambda r), \quad (2.44)$$

$$A_\theta(r) \mapsto A_\theta(r) - 1 = \frac{m}{2\pi} r K_1(r), \quad (2.45)$$

mentre per la scelta della gauge radiale $A_r = 0$. È utile sfruttare una proprietà delle funzioni di Bessel modificate, per le quali $K_0' = -K_1$, per riscrivere il potenziale vettore. Ricordando la definizione dei versori in coordinate cilindriche e introducendo un versore $\hat{\mathbf{z}}$ in una direzione perpendicolare al piano, si può sfruttare il prodotto vettore in \mathbb{R}^3 per scrivere

$$\mathbf{A}(r) = -\frac{m}{2\pi} K_0'(r) \hat{\boldsymbol{\theta}} = -\frac{m}{2\pi} \hat{\mathbf{z}} \times \nabla K_0(r). \quad (2.46)$$

Si vogliono dunque porre delle condizioni sulle sorgenti ρ e j_μ in modo da ottenere come soluzioni per le equazioni (2.42) e (2.43) le funzioni

$$\sigma(r) = \frac{q}{2\pi} K_0(\lambda r), \quad (2.47)$$

$$\mathbf{A}(r) = -\frac{m}{2\pi} \hat{\mathbf{z}} \times \nabla K_0(r). \quad (2.48)$$

Per farlo si sfrutta il fatto che l'equazione di Klein-Gordon statica possiede la funzione di Green

$$(-\nabla^2 + \lambda^2) K_0(\lambda r) = 2\pi \delta(\mathbf{x}). \quad (2.49)$$

Sostituendo (2.47) in (2.42) e utilizzando questa funzione di Green si trova che

$$\rho = q\delta(\mathbf{x}), \quad (2.50)$$

cioè è come se vi fosse una sorgente puntiforme di carica q al centro del vortice. Similmente sostituendo (2.48) in (2.43) e usando la funzione di Green si trova

$$\mathbf{j} - \nabla(\nabla \cdot \mathbf{j}) = -m\hat{\mathbf{z}} \times \nabla \delta(\mathbf{x}). \quad (2.51)$$

Prendendo la divergenza di questa equazione si trova che $\nabla \cdot \mathbf{j}$ è soluzione dell'equazione omogenea di Klein-Gordon, e dunque se \mathbf{j} è una sorgente puntiforme non nulla in un solo punto allora $\nabla \cdot \mathbf{j}$ è identicamente nulla, e l'unica soluzione è

$$\mathbf{j} = -m\hat{\mathbf{z}} \times \nabla K_0(r), \quad (2.52)$$

ovvero è come se vi fosse un dipolo magnetico di momento m in corrispondenza del centro del vortice. A questo punto è possibile valutare come interagiscono le due sorgenti ricavando la lagrangiana di interazione L_i . Poiché siamo in una teoria lineare vale il principio di sovrapposizione per le sorgenti e per i campi. Ponendo dunque $\phi = \phi_1 + \phi_2$, $\mathbf{A} = \mathbf{A}_{(1)} + \mathbf{A}_{(2)}$, $\rho = \rho_1 + \rho_2$ e $\mathbf{j} = \mathbf{j}_{(1)} + \mathbf{j}_{(2)}$ e sostituendo in (2.41), la lagrangiana di interazione è data dai termini misti

$$L_i = \int \rho_1 \sigma_2 d^2x - \int j_\mu^{(1)} A_{(2)}^\mu d^2x = L_\sigma + L_A, \quad (2.53)$$

e descrive l'interazione tra le sorgenti che generano il campo 1 con il campo 2. Supponiamo il vortice 1 centrato nel punto \mathbf{y}_1 e il vortice 2 centrato in \mathbf{y}_2 . Le sorgenti sono allora $\rho_1 = q\delta(\mathbf{x} - \mathbf{y}_1)$ e $j_\mu^{(1)} = -m\hat{\mathbf{z}} \times \nabla \delta(\mathbf{x} - \mathbf{y}_1)$, mentre i campi hanno la forma $\sigma_2 = \frac{q}{2\pi} K_0(\lambda|\mathbf{x} - \mathbf{y}_2|)$ e $\mathbf{A}_{(2)} = -\frac{m}{2\pi} \hat{\mathbf{z}} \times \nabla K_0(|\mathbf{x} - \mathbf{y}_2|)$. Sostituendoli nella lagrangiana di interazione e usando l'equazione di Bessel modificata per K_0 si trova

$$L_\sigma = \frac{q^2}{2\pi} K_0(\lambda s), \quad L_A = -\frac{m^2}{2\pi} K_0(s), \quad (2.54)$$

con $s = |\mathbf{y}_1 - \mathbf{y}_2|$ la separazione tra i due vortici. Poiché questa lagrangiana dipende solo dalla coordinata relativa s , si può interpretare

$$-L_i(s) = U(s) = \frac{1}{2\pi} [m^2 K_0(s) - q^2 K_0(\lambda s)] \quad (2.55)$$

come l'energia potenziale di interazione. La forza centrale dovuta a questo potenziale è

$$F(s) = -U'(s) = \frac{1}{2\pi} [m^2 K_1(s) - \lambda q^2 K_1(\lambda s)], \quad (2.56)$$

ottenuta ricordando che $K'_0 = -K_1$. Da questa si può evincere il comportamento dei vortici a seconda dei diversi valori di λ . Per $\lambda < 1$ a s grande $K_1(s)$ va a 0 più velocemente di $K_1(\lambda s)$ essendo le funzioni di Bessel modificate monotone decrescenti, e dunque prevale il contributo scalare proporzionale a q^2 , la forza è negativa e i due vortici si attraggono. Per $\lambda > 1$ vale il viceversa, prevale il contributo magnetico proporzionale a m^2 , la forza è positiva e i vortici si respingono. Per $s \rightarrow 0$ a seconda del valore di λ possono esistere delle posizioni di equilibrio nelle quali la forza è nulla, tuttavia per s piccolo vengono a mancare le ipotesi di questa analisi, che utilizzavano le forme asintotiche in una teoria lineare, dunque questa analisi non permette di dire nulla al riguardo.

I risultati qui presentati risultano in accordo con quelli ottenuti da Bettencourt e Rivers [2], i quali hanno studiato l'interazione tra due vortici utilizzando il principio di sovrapposizione.

2.3.4 Interazione tra N vortici

Infine è possibile analizzare anche il comportamento di N vortici separati, ovvero di una configurazione di multi-vortice. Seguendo il ragionamento presentato in [6], basato sul fatto che nel caso di $\lambda < 1$ (rispettivamente $\lambda > 1$) l'energia di un multi-vortice E_N risulta minore (maggiore) dell'energia di N vortici infinitamente separati non interagenti NE_1 in quanto il contributo di interazione tra due vortici (2.55) risulta negativo (positivo), si può vedere come il comportamento sia del tutto analogo a quello di una configurazione a due vortici: per $\lambda < 1$ i vortici tenderanno ad attrarsi, per $\lambda > 1$ a respingersi. Per $\lambda = 1$ Tong [8] ha ricavato i valori dei due coefficienti usando dei metodi di teoria delle stringhe, ottenendo $m = q = 2\pi 8^{1/4} \simeq 10.57$. Tale valore è perfettamente in accordo con quanto ottenuto da calcoli numerici effettuati in precedenza [7]. In questo caso la forza (2.56) risulta nulla, ed è possibile una configurazione stabile con N vortici separati. Una tale configurazione può essere costruita nel modo seguente. Si assuma che l'insieme degli zeri di ϕ , che rappresentano i centri dei singoli vortici, sia un insieme di punti isolati, ciascuno con la sua molteplicità n_i . Ciascuno di questi punti rappresenta un vortice con carica topologica n_i . Il numero di avvolgimento all'infinito N sarà la somma delle singole molteplicità $N = \sum_i n_i$. Si consideri infatti una curva chiusa attorno al punto A in figura 2.3.2, lungo la quale la fase del campo aumenta di $2\pi n_A$.

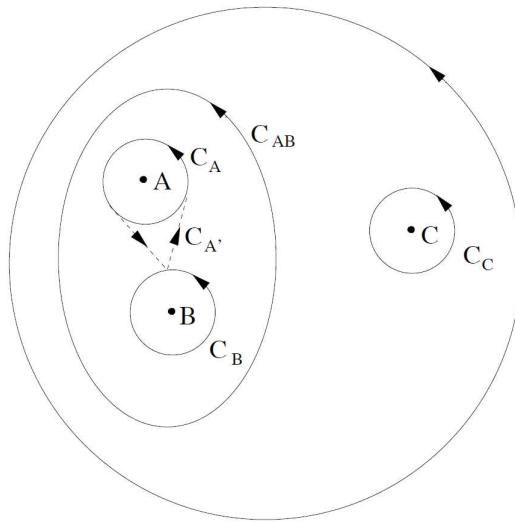


FIGURA 2.3.2 Schema della costruzione di una configurazione di multi-vortice a partire da vortici distinti. Figura presa da [6, p. 166].

Tale curva può essere deformata con continuità prima in C'_A , e poi in C_{AB} . Lungo C_{AB} l'incremento di fase sarà $2\pi(n_A + n_B)$. Iterando il procedimento su tutti gli zeri del campo si ottiene una curva chiusa C_∞ che contiene tutti gli zeri, e lungo la quale il numero di avvolgimento è proprio $N = \sum_i n_i$. In tal modo è possibile costruire una configurazione di multi-vortice con numero di avvolgimento N tramite incollamento di singoli vortici. Si noti che questa configurazione risulta effettivamente una soluzione stabile delle equazioni del moto soltanto nel caso di $\lambda = 1$, quando le forze attrattiva e repulsiva si bilanciano. Se $\lambda \neq 1$ i singoli vortici in questa configurazione tenderanno a respingersi o ad attrarsi, e

non si avrebbe più una soluzione statica delle equazioni del moto. Inoltre quando i vortici si avvicinano vengono meno le ipotesi fatte, e questi iniziano ad interagire in maniera estremamente complicata. Solitamente si classifica allora la dinamica dei vortici in tre regimi:

- (i) regime di tipo I, in cui $\lambda < 1$ e i vortici si attraggono;
- (ii) regime di tipo II, in cui $\lambda > 1$ e i vortici si respingono;
- (iii) regime critico, in cui $\lambda = 1$ o ottenuto da modelli non lineari.

In generale le soluzioni di multi-vortice costruite incollando singoli vortici sono soluzioni approssimate, in quanto nei casi (i) e (ii) i singoli vortici tenderanno ad allontanarsi indefinitamente o a coalescere, e la dinamica sarà complicata. Nel caso (iii) invece tale configurazione è stabile e rappresenta effettivamente una soluzione esatta. Inoltre è molto interessante studiare lo spazio delle configurazioni ammesse per un tale sistema a N vortici. Si pensi per esempio ad una configurazione a due vortici: in tal caso l'energia di interazione è nulla, e le loro posizioni possono essere scelte in maniera arbitraria nel piano, e modificate senza spendere energia. Una soluzione di questo tipo è altamente degenere, ed è possibile deformarla senza pagare alcun costo in termini di energia per esplorare tutte le possibilità. L'analisi di tutte queste possibilità è lo studio dello spazio dei moduli della soluzione, il quale non viene trattato in questo elaborato.

Conclusioni

Nel corso dell'elaborato sono state presentate le principali caratteristiche di un solitone topologico, mostrando come queste soluzioni possano esistere soltanto in teorie con particolari proprietà topologiche, e dando un utile argomento, il teorema di Derrick, per capire facilmente se una teoria non possa ammettere dei solitoni.

Per quanto riguarda lo studio dei vortici, viene presentata nel dettaglio una semplice teoria in cui essi esistono, e vengono derivate le equazioni che governano la loro dinamica, dando anche delle espressioni analitiche a seconda della distanza dal centro del vortice. Viene poi studiato il caso di un sistema a due vortici, e accennato come sia possibile ricondursi ad un sistema a N vortici. Lo studio della dinamica di N vortici interagenti in moto relativo risulta invece più complesso. Un esempio di applicazione del modello presentato nell'elaborato si può riscontrare nei superconduttori piani, dove le equazioni che governano il campo elettromagnetico presentano delle soluzioni di vortici.

Bibliografia

- [1] M.S Berger e Y.Y Chen. «Symmetric vortices for the Ginzberg-Landau equations of superconductivity and the nonlinear desingularization phenomenon». In: *Journal of Functional Analysis* 82.2 (1989), pp. 259–295. ISSN: 0022-1236. DOI: [https://doi.org/10.1016/0022-1236\(89\)90071-2](https://doi.org/10.1016/0022-1236(89)90071-2). URL: <https://www.sciencedirect.com/science/article/pii/0022123689900712>.
- [2] L. M. A. Bettencourt e R. J. Rivers. «Interactions between U(1) cosmic strings: An analytical study». In: *Physical Review D* 51.4 (feb. 1995), pp. 1842–1853. ISSN: 0556-2821. DOI: 10.1103/physrevd.51.1842. URL: <http://dx.doi.org/10.1103/PhysRevD.51.1842>.
- [3] G. H. Derrick. «Comments on Nonlinear Wave Equations as Models for Elementary Particles». In: *Journal of Mathematical Physics* 5 (set. 1964), pp. 1252–1254. DOI: 10.1063/1.1704233. URL: <https://doi.org/10.1063/1.1704233>.
- [4] J. L. Harden e V. Arp. «The lower critical field in the Ginzburg-Landau theory of superconductivity». In: *Cryogenics* 3.2 (gen. 1963), pp. 105–108. DOI: 10.1016/0011-2275(63)90029-8.
- [5] Kurt Lechner. *Elettrodinamica Classica*. Springer-Verlag Mailand, 2014.
- [6] Nicolas Manton e Paul Sutcliffe. *Topological Solitons*. Cambridge University Press, 2004.
- [7] J. M. Speight. «Static intervortex forces». In: *Physical Review D* 55.6 (mar. 1997), pp. 3830–3835. ISSN: 1089-4918. DOI: 10.1103/physrevd.55.3830. URL: <http://dx.doi.org/10.1103/PhysRevD.55.3830>.
- [8] David Tong. «NS5-Branes, T-Duality and Worldsheet Instantons». In: *Journal of High Energy Physics* 2002.07 (lug. 2002), pp. 013–013. ISSN: 1029-8479. DOI: 10.1088/1126-6708/2002/07/013. URL: <http://dx.doi.org/10.1088/1126-6708/2002/07/013>.