



**Università degli Studi di Padova**

---

DIPARTIMENTO DI FISICA E ASTRONOMIA "GALILEO GALILEI"  
Corso di Laurea in Fisica

TESI DI LAUREA TRIENNALE

**Effetto Sunyaev Zel'dovich  
in Cosmologia**

Relatore:  
**Dott. Michele Liguori**

Laureando:  
**Edoardo Zatti**  
Matricola 1073488

---

Anno Accademico 2015/2016



A chiunque mi sia vicino,



# Indice

<b>Introduzione</b>	<b>vii</b>
<b>1 Introduzione alla Cosmologia</b>	<b>1</b>
1.1 Il Principio Cosmologico e le osservabili . . . . .	1
1.2 L'espansione dell'universo . . . . .	2
1.3 Lo spettro del corpo nero . . . . .	3
1.4 Le equazioni di Friedmann . . . . .	6
1.5 Semplici Modelli Cosmologici . . . . .	10
1.5.1 Hubble e Redshift . . . . .	10
1.5.2 Risoluzione delle equazioni . . . . .	11
1.5.3 Densità particellare . . . . .	14
1.5.4 Evoluzione dell'universo includendo la curvatura . . . . .	14
1.6 L'origine della radiazione cosmica di fondo . . . . .	15
<b>2 Le proprietà dello spettro delle perturbazioni</b>	<b>19</b>
2.1 Lo spettro delle perturbazioni . . . . .	19
2.2 La varianza di massa . . . . .	22
2.3 Spettro e varianza . . . . .	24
2.4 Alcuni tipi di spettro . . . . .	26
2.5 La funzione di correlazione . . . . .	26
<b>3 L'effetto Sunyaev-Zel'dovich</b>	<b>29</b>
3.1 Scattering Compton inverso . . . . .	29
3.2 Scattering dei fotoni da una popolazione di elettroni . . . . .	32
3.3 Effetto sullo spettro di radiazione . . . . .	34
3.4 Effetto termico . . . . .	37
<b>4 Applicazioni dell'effetto</b>	<b>41</b>
4.1 La costante di Hubble . . . . .	41
4.2 Catalogazione dei cluster . . . . .	43
<b>Bibliografia</b>	<b>47</b>



# Introduzione

In questo testo verrà trattato un effetto cosmologico scoperto nella seconda metà del novecento e soltanto in questi ultimi decenni utilizzato consistentemente: è l'effetto Sunyaev-Zel'dovich. È una distorsione della radiazione cosmica di fondo dovuta all'attraversamento dei fotoni nei cluster di galassie che contengono un gas estremamente caldo. In quelle condizioni avviene lo scattering Compton inverso tra l'elettrone del gas e il fotone del CMB il quale aumenta la propria energia.

Il primo capitolo è una introduzione alla cosmologia. Vengono enunciati i principi e le leggi fondamentali come il principio cosmologico, la legge di Hubble e le equazioni di Friedmann. Esso si conclude con una analisi della radiazione cosmica di fondo. In queste pagine l'universo viene descritto come perfettamente isotropo ma se fosse così non ci sarebbero i cluster, le galassie ecc. Nella teoria si procede per approssimazioni: quella iniziale è nel caso in cui vi sia isotropia perfetta poi si aggiungono delle perturbazioni, una delle quali è argomento del secondo capitolo. Essa vale per piccole fluttuazioni. Nel terzo capitolo viene descritto in maniera analitica il tema principale del testo. Nel quarto capitolo invece c'è una rassegna delle principali applicazioni dell'effetto Sunyaev-Zel'dovich.





# Capitolo 1

## Introduzione alla Cosmologia

In questo capitolo verranno analizzati i principali aspetti della Cosmologia partendo dall'enunciato del *principio cosmologico*, verranno poi visti i vari metodi di osservazione dell'universo, come l'analisi dello spettro di una galassia le equazioni di Friedmann, la loro soluzione nell'ipotesi in cui l'universo sia piatto e sia costituito solo da radiazione oppure solo da materia e l'origine della radiazione cosmica di fondo.

### 1.1 Il Principio Cosmologico e le osservabili

Già dagli antichi tempi l'uomo ha cercato di capire che cosa ci fosse al di fuori dal nostro pianeta: fino alla seconda metà del 1500 la concezione più accreditata è quella tolemaica<sup>1</sup>. Nel 1543 viene pubblicato da Niccolò Copernico "De revolutionibus orbium coelestium" dove viene enunciato il *Principio Copernicano*: la Terra non si trova più in una posizione centrale. Esso è padre del *Principio Cosmologico*, punto di partenza nella descrizione dell'attuale universo:

*Noi non occupiamo una posizione privilegiata nell'universo. L'universo inoltre è omogeneo ed isotropo se osservato a grandi scale.*

I successi dell'astronomia durante il '900 sono dovuti allo studio dello spettro elettromagnetico in tutte le sue lunghezze d'onda: onde radio, microonde, raggi infrarossi, visibile, raggi ultravioletti, raggi X e raggi gamma. L'analisi di questo ha portato all'osservazione di pianeti, stelle, galassie, CMB ecc. Successivamente è stato possibile rivelare i neutrini, associati ai decadimenti radiattivi che avvengono ad esempio in una supernova, i raggi cosmici, grazie ai quali si sono scoperti il  $\pi$  e il  $\mu$ , per terminare con la più attuale conferma dell'esistenza delle onde gravitazionali.

Nel visibile possono essere osservate le stelle, le quali sono la principale sorgente grazie alla fusione nucleare che avviene in esse, le galassie, gli

---

<sup>1</sup>La terra viene considerata al centro dell'universo e il Sole, la Luna e i pianeti ci girano attorno.

ammassi di galassie e i super ammassi.

Nel 1965 Penzias e Wilson scoprirono che la Terra è ricoperta da radiazioni microonde che seguono la curva di corpo nero con una temperatura pari a  $T = 2.725 \pm 0.001 K$ . Questa radiazione viene chiamata CMB (Cosmic Microwave Background) e costituisce la prova più significativa in favore della teoria del Big-Bang. L'isotropia osservata inizialmente non è stata completamente verificata: infatti esistono delle piccole variazioni (una su centomila). Si suppone che queste anisotropie siano l'origine della struttura dell'universo.

Nell'infrarosso si osservano gas a una temperatura molto elevata (circa  $10^6 K$ ). I gas costituiscono la prova principale dell'esistenza degli ammassi di galassie: sono costituiti infatti dal materiale rimasto dalla formazione delle galassie che non è riuscito a collassare gravitazionalmente formando una stella.

Lo studio delle onde radio permette di osservare le galassie più lontane: infatti più le galassie sono lontane più sono veloci in virtù della legge di Hubble<sup>2</sup> e più le galassie sono veloci più la loro radiazione, per effetto Doppler, avrà un maggiore lunghezza d'onda, ricadendo così nelle onde radio.

## 1.2 L'espansione dell'universo

L'espansione dell'universo è stato uno dei risultati cosmologici più importanti. Venne dimostrato sperimentalmente dall'astronomo americano Edwin Hubble che nel 1929 enunciò la sua famosa formula. I suoi studi mostrano come qualsiasi oggetto dell'universo si stia allontanando dalla Terra e più esso è lontano maggiore è la sua velocità, misurabile attraverso il **redshift** che non è nient'altro che l'effetto Doppler applicato alle onde luminose. Le galassie hanno un insieme di linee di emissione e di assorbimento corrispondenti al loro spettro in cui le frequenze caratteristiche sono conosciute. Se una galassia si stesse avvicinando si osserverebbero le linee dello spettro spostarsi verso il blu, mentre se si stesse allontanando le linee andrebbero verso il rosso.

In questo contesto viene introdotta una variabile, detta redshift,  $z$  definita

$$z = \frac{\lambda_{oss} - \lambda_{em}}{\lambda_{em}} \quad (1.1)$$

dove  $\lambda_{oss}$  e  $\lambda_{em}$  corrispondono rispettivamente alla lunghezza d'onda osservata e alla lunghezza d'onda emessa. Un calcolo relativistico permette di calcolare correttamente la relazione tra lunghezze d'onda e velocità ottenendo come risultato:

$$1 + z = \sqrt{\frac{1 + v/c}{1 - v/c}} \quad (1.2)$$

---

<sup>2</sup>E' una legge sperimentale che lega la velocità di una galassia alla distanza dalla quale viene osservata:  $\vec{v} = H_0 \vec{r}$ .

che in approssimazione non relativistica diventa

$$z \simeq \frac{v}{c}. \quad (1.3)$$

Tramite questa tecnica Hubble osservò il redshift di molte galassie il quale lo portò alla formulazione della legge empirica che prende il suo nome

$$\vec{v} = H_0 \vec{r} \quad (1.4)$$

dove  $H_0$  è detta costante di Hubble. Essa in realtà non risulta essere una costante in quanto evolve nel tempo<sup>3</sup>.

### 1.3 Lo spettro del corpo nero

In questa sezione verrà analizzato un fenomeno fisico molto importante per l'argomento che verrà svolto. Infatti l'effetto Sunyaev-Zel'dovich è una distorsione della radiazione cosmica di fondo la quale segue proprio la distribuzione Planckiana.

Il corpo nero è un oggetto ideale che assorbe tutta la radiazione elettromagnetica senza rifletterne neanche una parte. Quando il sistema si trova all'equilibrio termico tutta la radiazione assorbita viene emessa per conservazione dell'energia. Dalle osservazioni sperimentali vennero stabilite alcune leggi sulla radiazione di corpo nero fino alla corretta interpretazione dovuta a Planck:

1. **Legge di Stefan-Wien** trova un ottimo raccordo con i dati sperimentali ad alte frequenze.
2. **Legge di Rayleigh-Jeans** è verificata a basse frequenze.
3. **Legge di Planck** interpolando le due leggi precedenti si ottiene la corretta formulazione della teoria.

La trattazione del corpo nero si basa sull'assunto che la radiazione vari secondo un moto armonico, schematizzando emissione e assorbimento in termini di oscillatori a varie frequenze. Una grandezza inoltre molto importante è la densità di stati  $g(\nu) = \frac{dN}{d\nu}$  poiché da questa si determina la densità energetica, cioè lo spettro. Risulta fondamentale l'ipotesi di Debye: all'equilibrio la radiazione è descritta da onde stazionarie.

Assumendo che la cavità sia cubica di lato  $L$ , l'ipotesi si traduce

$$\begin{cases} n_x \frac{\lambda}{2} = Lu_x \\ n_y \frac{\lambda}{2} = Lu_y \\ n_z \frac{\lambda}{2} = Lu_z \end{cases} \quad (1.5)$$

---

<sup>3</sup>Verrà dimostrato una volta introdotte le equazioni di Friedmann.

dove  $\vec{u} = (u_x \ u_y \ u_z)$  è un versore. Si ottiene quindi:

$$\begin{aligned} (n_x^2 + n_y^2 + n_z^2) \frac{\lambda^2}{4} &= L^2 \\ n_x^2 + n_y^2 + n_z^2 &= \frac{4L^2}{\lambda^2} \\ n_x^2 + n_y^2 + n_z^2 &= \frac{4L^2\nu^2}{c^2}. \end{aligned} \quad (1.6)$$

La 1.6 corrisponde all'equazione di una sfera di raggio  $r = \frac{2L\nu}{c}$  nello spazio delle  $n$ . Il suo volume è

$$V_{sfera} = \frac{4}{3}\pi \frac{8L^3\nu^3}{c^3}. \quad (1.7)$$

Per ottenere il numero di oscillatori bisogna dividere l'ottante della sfera per il volume del passo (la distanza tra due punti,  $\Delta n = 1$ ) e moltiplicare per 2<sup>4</sup>. Inoltre differenziando rispetto alle frequenze si ottiene il numero di oscillatori presenti nell'intervallo  $[\nu; \nu + d\nu]$ .

$$\begin{aligned} N &= 2 \frac{1}{8} V_{sfera} \frac{1}{(\Delta n)^3}, \\ dN &= 2 \frac{1}{8} \frac{4}{3}\pi \frac{8V3\nu^2 d\nu}{c^3} \\ &= V \frac{8\pi}{c^3} \nu^2 d\nu \end{aligned} \quad (1.8)$$

dove  $V$  è il volume della cavità.

La densità degli stati è quindi

$$g(\nu) = \frac{dN}{d\nu} = V \frac{8\pi}{c^3} \nu^2. \quad (1.9)$$

La 1.9 moltiplicata per l'energia e divisa per il volume dà la densità energetica per unità di frequenza e per unità di volume (densità spettrale di energia)

$$u(\nu) = \frac{8\pi}{c^3} \nu^2 E. \quad (1.10)$$

Da questa equazione è possibile ottenere la legge di Rayleigh-Jeans:

$$u(\nu)d\nu = \frac{8\pi}{c^3} \nu^2 K_B T d\nu \quad (1.11)$$

infatti in ambito classico ogni modo normale ha energia  $K_B T$  all'equilibrio termico.<sup>5</sup> Come già detto l'accordo con i dati sperimentali è valido solo per

<sup>4</sup>Il fattore due è dovuto al fatto che l'oggetto che si studia sono le radiazioni elettromagnetiche che hanno 2 possibili polarizzazioni.

<sup>5</sup>Il calcolo dell'energia è stato fatto utilizzando la distribuzione canonica.

alti valori di  $\lambda$ . A piccole lunghezze d'onda si incontra un altro problema: l'equazione diverge. Questo porta alla conclusione che sistemi fisici limitati abbiano energia infinita, cosa che non è possibile.

La corretta formulazione della teoria del corpo nero arriva dall'ipotesi di Planck il quale propone un modello in cui gli oscillatori con cui viene descritta la radiazione termica possono scambiare energia non in maniera continua, come si era abituati a pensare in Fisica Classica, bensì per mezzo di quanti di energia discreti.

Egli propone di dividere lo spazio delle fasi in ellissi concentriche, in maniera tale che la differenza d'area tra due ellissi consecutive sia pari ad una costante reale, chiamata  $h$ . L'area dell' $m$ -esima ellisse è

$$S_m = mh, \quad m \in \mathbb{N}. \quad (1.12)$$

Ci si può ricavare l'energia dell'oscillatore corrispondente all'ellisse  $m$ -esima partendo dalla sua hamiltoniana:

$$H(p, q) = \frac{p^2}{2m} + \frac{1}{2}m\omega^2 q^2 = \frac{p^2}{2m} + \frac{1}{2}m(2\pi\nu)^2 q^2 = E$$

$$\frac{p^2}{2mE} + \frac{2}{E}m(\pi\nu)^2 q^2 = 1$$

che corrisponde all'equazione dell'ellisse di semiassi  $a = \sqrt{2mE}$  e  $b = \sqrt{\frac{E}{2m(\pi\nu)^2}}$ .

Si può quindi calcolare l'area e imporla uguale alla 1.12 trovando così la formula dell'energia

$$S_m = \pi ab = \frac{E}{\nu} = mh \implies E = mh\nu. \quad (1.13)$$

La frazione del numero di oscillatori sulla  $m$ -esima ellisse vale

$$N_m = N_0 e^{-\beta E_m} = N_0 e^{-\beta mh\nu}. \quad (1.14)$$

Il calcolo del valor medio dell'energia deriva da considerazioni di meccanica statistica ed è espresso della formula

$$\begin{aligned} \langle E \rangle &= \frac{\sum_{m=0}^{\infty} E_m e^{-\beta E_m}}{\sum_{m=0}^{\infty} e^{-\beta E_m}} \\ &= \frac{\sum_{m=0}^{\infty} mh\nu e^{-\beta mh\nu}}{\sum_{m=0}^{\infty} e^{-\beta mh\nu}}. \end{aligned} \quad (1.15)$$

La 1.15 può essere riscritta:

$$\langle E \rangle = -\frac{\partial}{\partial \beta} \ln \left( \sum_{m=0}^{\infty} e^{-\beta mh\nu} \right) \quad (1.16)$$

da cui:<sup>6</sup>

$$\begin{aligned}\langle E \rangle &= \frac{\partial}{\partial \beta} \ln(1 - e^{-\beta h\nu}) \\ \langle E \rangle &= h\nu \frac{e^{-\beta h\nu}}{1 - e^{-\beta h\nu}} = \frac{h\nu}{e^{\beta h\nu} - 1}.\end{aligned}\quad (1.17)$$

Dalla 1.10 è possibile ottenere la densità spettrale di energia:

$$\begin{aligned}u(\nu) &= \frac{8\pi}{c^3} \nu^2 \frac{h\nu}{e^{\beta h\nu} - 1} \\ u(\nu) &= \frac{8\pi h}{c^3} \frac{\nu^3}{e^{\beta h\nu} - 1}.\end{aligned}\quad (1.18)$$

Una quantità interessante da calcolare è la densità energetica totale della radiazione di corpo nero,  $\epsilon_{rad}$ <sup>7</sup>:

$$\epsilon_{rad} = \frac{8\pi k_B^4}{h^3 c^3} T^4 \int_0^\infty \frac{y^3}{e^y - 1} dy \quad (1.19)$$

dove l'integrale vale  $\pi^4/15$ . Quindi:

$$\epsilon_{rad} = \alpha T^4 \quad \text{con} \quad \alpha = \frac{\pi^2 k_B^4}{15 h^3 c^3} = 7.565 \times 10^{-16} \text{ J m}^{-3} \text{ K}^{-4} \quad (1.20)$$

dove  $\alpha$  è detta costante di radiazione.

## 1.4 Le equazioni di Friedmann

Con la conferma dell'espansione dell'universo si iniziò a cercare di trovare delle equazioni che descrivessero l'evoluzione temporale di questo attraverso un grandezza, il fattore di scala, che verrà introdotta in seguito. Attraverso la relatività generale il cosmologo Friedmann formulò queste equazioni, che verranno derivate ora in ambito classico.

Due corpi si attraggono secondo la nota formula:

$$F = G \frac{m_1 m_2}{r^2} \quad (1.21)$$

dove  $G$  è la costante gravitazionale e vale  $6.67 \times 10^{-11} \text{ Nm}^2 \text{ kg}^{-2}$ .

Inoltre il potenziale gravitazionale è

$$V = -G \frac{m_1 m_2}{r}. \quad (1.22)$$

<sup>6</sup>La serie è un serie geometrica. Infatti:  $\sum_{m=0}^{\infty} e^{-\beta h m \nu} = \sum_{m=0}^{\infty} e^{-\beta h \nu m}$ . Essendo l'argomento  $e^{-\beta h \nu}$  minore di uno essa converge.

<sup>7</sup>La densità spettrale è definita come:  $u(\nu) = \frac{dE}{dV d\nu}$  dove  $\epsilon_{rad} = \frac{dE}{dV}$ . Quindi  $\epsilon_{rad}$  è l'integrale, in tutto il range delle frequenze, della densità spettrale.

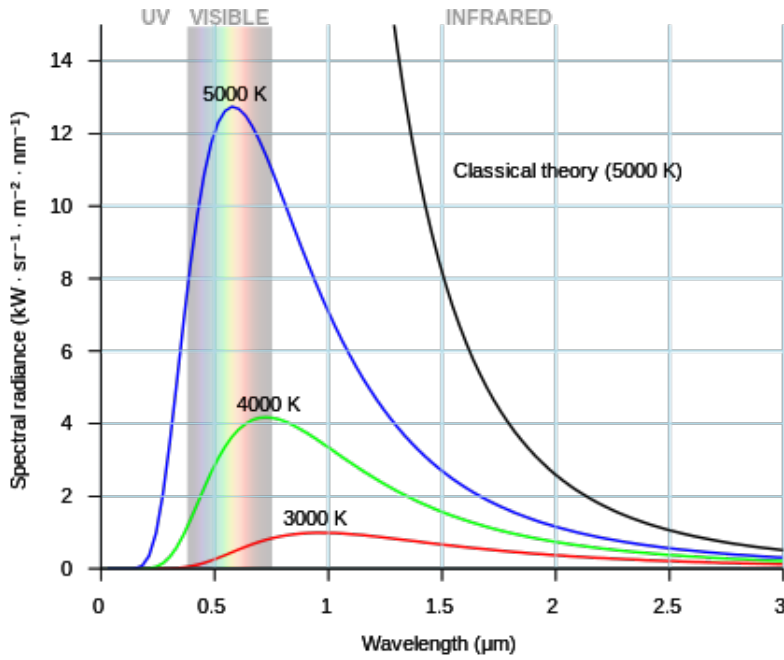


Figura 1.1: La figura mostra lo spettro di corpo nero formulato da Planck a diverse temperature e la curva di Rayleigh-Jeans (linea continua nera).

Si consideri un osservatore in un mezzo uniforme in espansione, con una densità di massa  $\rho$ . Grazie al principio cosmologico<sup>8</sup> è possibile prendere come centro qualsiasi punto dell'universo. A una distanza  $R$  dal centro viene messa una particella di prova di massa  $m$ . Essa risente della forza gravitazionale (1.21) dovuta alla massa contenuta in un volume sferico di raggio  $R$ . Si consideri una massa contenuta in un volume sferico di raggio  $r'$ . Dall'equazione:

$$\vec{\nabla} \cdot \frac{\vec{F}}{m} = 4\pi G \rho$$

integrando nel generico volume (sferico) di raggio  $r$

$$\int_V \vec{\nabla} \cdot \frac{\vec{F}}{m} dV = 4\pi G \int_V \rho dV$$

e usando il teorema di Gauss si trova

$$\int_S \frac{\vec{F}}{m} \cdot d\vec{S} = 4\pi G \frac{4}{3}\pi \rho r^3$$

<sup>8</sup>Permette di dire che l'universo sembra uguale in qualsiasi punto in cui viene messo l'osservatore.

dove  $S$  è la superficie della sfera. Siccome  $\vec{F}$  è una forza centrale<sup>9</sup> si ha

$$\frac{F}{m} \int_S dS = 4\pi G \frac{4}{3}\pi\rho r^3$$

$$F = G \frac{m}{r^2} \frac{4}{3}\pi\rho r^3$$

dalla quale si ottiene

$$F = \begin{cases} \frac{4\pi G}{3} m\rho r & r < r' \\ G \frac{mM_{sfera}}{r^2} & r \geq r' \end{cases} \quad (1.23)$$

Nel caso in esame l'equazione da utilizzare è la prima del sistema<sup>10</sup> e il potenziale di conseguenza è

$$V = -G \frac{mM}{r} = -\frac{4\pi G}{3} m\rho r^2. \quad (1.24)$$

L'energia cinetica dipende dalla velocità con cui si muove la particella, che corrisponde alla velocità di espansione del mezzo:

$$T = \frac{1}{2}m\dot{r}^2. \quad (1.25)$$

La sua energia totale è quindi

$$E = T + V$$

$$E = \frac{1}{2}m\dot{r}^2 - \frac{4\pi G}{3} m\rho r^2. \quad (1.26)$$

Dalla 1.26 è possibile ottenere la distanza tra il centro e la particella. Grazie al principio cosmologico è possibile fare il cambio di coordinate:<sup>11</sup>

$$\vec{r} = a(t)\vec{x} \quad (1.27)$$

dove le  $\vec{x}$  sono dette **coordinate comoventi** e la quantità  $a(t)$  è il **fattore di scala dell'universo**. Esso è una funzione del tempo e misura il tasso di espansione dell'universo: infatti mostra come cresca la separazione fisica nel tempo. Prendendo due istanti di tempo  $t_1$  e  $t_2$  in cui  $a(t)$  raddoppia allora l'universo si è espanso di un fattore 2.

La 1.26 diventa

$$E = \frac{1}{2}m\dot{a}^2 x^2 - \frac{4\pi G}{3} m\rho a^2 x^2 \quad (1.28)$$

<sup>9</sup> Allora i vettori sono paralleli.

<sup>10</sup> Essa nel caso più consueto è scritta come:  $F = G \frac{mM}{r^2}$  dove  $M$  corrisponde alla massa contenuta nel volume sferico di raggio  $r$ .

<sup>11</sup> L'omogeneità garantita dal principio cosmologico permette di affermare che la costante di proporzionalità che lega le coordinate non dipenda dallo spazio ma solo dal tempo.



e riarrangiando i termini si ottiene

$$\left(\frac{\dot{a}}{a}\right)^2 = \frac{8\pi G}{3}\rho - \frac{kc^2}{a^2} \quad (1.29)$$

dove  $kc^2 = -2E/mx^2$ . Questa corrisponde all'**equazione di Friedmann**. La costante  $k$  introdotta deve essere indipendente dalla  $x$  altrimenti l'omogeneità non sarebbe mantenuta. Non dipende neanche dal tempo siccome  $E$  è conservata e la  $x$  è fissata. Questa costante è molto importante in quanto dà informazioni riguardo la geometria dell'universo. Infatti se  $k > 0$  l'universo ha una geometria sferica, se  $k < 0$  una geometria iperbolica, mentre se  $k = 0$  l'universo è piatto.

L'equazione di Friedmann contiene come termine la densità: serve allora una nuova equazione che descriva l'evoluzione temporale di questa grandezza.

Dalla prima legge della termodinamica

$$dE + pdV = TdS \quad (1.30)$$

dove  $V$  è un volume di raggio pari all'unità in coordinate comoventi. L'energia da considerare è quella relativistica ( $E = mc^2$ ):

$$E = \frac{4}{3}\pi a^3 \rho c^2. \quad (1.31)$$

Si consideri un'espansione adiabatica e reversibile ( $dS = 0$ ) e si derivi temporalmente la 1.30

$$\frac{dE}{dt} + p\frac{dV}{dt} = 0 \quad (1.32)$$

dove

$$\begin{aligned} \dot{E} &= 4\pi a^2 \dot{a} \rho c^2 + \frac{4}{3}\pi a^3 \dot{\rho} c^2, \\ \dot{V} &= 4\pi a^2 \dot{a}. \end{aligned}$$

Il punto sopra le grandezze indica la loro derivata temporale. Sostituendo si ottiene:

$$\dot{\rho} + 3\frac{\dot{a}}{a}\left(\rho + \frac{p}{c^2}\right) = 0. \quad (1.33)$$

La 1.33 è conosciuta come **equazione del fluido**. Ci sono due termini che contribuiscono a cambiare la densità. Il primo corrisponde alla diluizione della densità dovuta all'aumento di volume, mentre il secondo corrisponde alla perdita di energia dovuta alla pressione del materiale.

Dalle due equazioni appena descritte si può ricavare l'**equazione dell'accelerazione**. Derivando temporalmente la 1.29

$$2\frac{\dot{a}}{a}\left(\frac{\ddot{a}a - \dot{a}^2}{a^2}\right) = \frac{8\pi G}{3}\dot{\rho} + 2\frac{kc^2}{a^3}\dot{a} \quad (1.34)$$

e inserendo la 1.33 e poi la 1.29

$$\begin{aligned}
 2 \frac{\dot{a}}{a} \left( \frac{\ddot{a}a - \dot{a}^2}{a^2} \right) &= -\frac{8\pi G}{3} 3 \frac{\dot{a}}{a} \left( \rho + \frac{p}{c^2} \right) + 2 \frac{kc^2}{a^3} \dot{a} \\
 \frac{\ddot{a}}{a} - \left( \frac{\dot{a}}{a} \right)^2 &= -4\pi G \left( \rho + \frac{p}{c^2} \right) + \frac{kc^2}{a^2} \\
 \frac{\ddot{a}}{a} &= -\frac{4\pi G}{3} \left( \rho + \frac{3p}{c^2} \right). \tag{1.35}
 \end{aligned}$$

L'equazione appena ricavata è dipendente dalle altre due, quindi ridondante.

## 1.5 Semplici Modelli Cosmologici

Nelle precedenti sezioni sono state date principalmente i punti di partenza da cui si possono fare delle considerazioni. In questa infatti verranno viste varie relazioni che si possono ricavare dalla formula di Hubble o dalle equazioni di Friedmann. Inoltre verrà descritta l'evoluzione dell'universo facendo semplici approssimazioni.

### 1.5.1 Hubble e Redshift

In questo sotto paragrafo verranno dimostrate le relazioni della costante di Hubble e del Redshift con il fattore di scala. La velocità di recessione delle galassie è

$$\begin{aligned}
 \vec{v} &= \frac{d\vec{r}}{dt} \\
 &= \frac{|\dot{\vec{r}}|}{|\vec{r}|} \vec{r}
 \end{aligned}$$

siccome  $\vec{v}$  è parallela a  $\vec{r}$ . Utilizzando la relazione  $\vec{r} = a\vec{x}$ <sup>12</sup>

$$\vec{v} = \frac{\dot{a}}{a} \vec{r} \quad \implies \quad H = \frac{\dot{a}}{a}. \tag{1.36}$$

Per quanto riguarda la relazione tra il Redshift e  $a$  si considerino due galassie separate da una distanza pari a  $d$ <sup>13</sup>. L'effetto Doppler permette di ricavare una relazione tra la lunghezza d'onda e la velocità relativa tra le galassie

$$\frac{d\lambda}{\lambda_{em}} = \frac{dv}{c}$$

<sup>12</sup>Si ricordi che  $\vec{x}$  è costante del tempo, quindi la derivata temporale è:  $\dot{\vec{r}} = \dot{a}\vec{x}$ .

<sup>13</sup>Questa è una semplificazione ma ha una validità generale.

dove  $d\lambda = \lambda_r - \lambda_{em}$ . Sostituendo questa relazione all'interno della legge di Hubble e ricordando che  $dt = dr/c$  si ottiene

$$\begin{aligned} dv &= \frac{\dot{a}}{a} dr \\ \frac{d\lambda}{\lambda_{em}} &= \frac{\dot{a}}{a} dt \\ \frac{d\lambda}{\lambda_{em}} &= \frac{da}{a} \\ \lambda &\propto a \end{aligned} \tag{1.37}$$

dove  $\lambda$  è la lunghezza d'onda misurata istantaneamente al tempo  $t$ . La 1.37 afferma che più l'universo si espande più aumenta la lunghezza d'onda. Da questo risultato si ricava la relazione tra il Redshift e il fattore di scala:

$$\begin{aligned} z &= \frac{\lambda_r - \lambda_{em}}{\lambda_{em}} = \frac{\lambda_r}{\lambda_{em}} - 1 \\ 1 + z &= \frac{a(t_r)}{a(t_{em})} \end{aligned} \tag{1.38}$$

### 1.5.2 Risoluzione delle equazioni

Per risolvere le equazioni di Friedmann bisogna sapere esattamente da che cosa sia costituito l'universo<sup>14</sup>. Per semplificare i conti si prendono in considerazione inizialmente i limiti estremi (l'universo è solo materia o è solo radiazione) per poi fare una trattazione qualitativa nel caso generale.

Nel primo caso in cui  $p = 0$  la 1.33 diventa

$$\begin{aligned} \dot{\rho} + 3 \frac{\dot{a}}{a} \rho = 0 &\implies \frac{\dot{\rho}}{\rho} = -3 \frac{\dot{a}}{a} \implies \ln \left( \frac{\rho}{\rho_0} \right) = -3 \ln \left( \frac{a}{a_0} \right) \\ \rho &\propto \frac{1}{a^3}. \end{aligned} \tag{1.39}$$

La 1.39 non è un risultato sorprendente: infatti essa afferma che la densità è inversamente proporzionale al volume.

Risolvendo le equazioni nell'ipotesi in cui l'universo sia piatto ( $k = 0$ ) si può moltiplicare il fattore di scala per una costante lasciando invariate le equazioni. Questo permette quindi di poter scegliere arbitrariamente il valore di  $a$  ad un certo istante di tempo: si pone  $a = 1$  al tempo presente (in questa maniera le coordinate comoventi e le coordinate spaziali coincideranno al presente). In seguito si utilizzerà il pedice 0 per indicare grandezze fisiche

<sup>14</sup>Esso è costituito da materia e radiazione. Con materia si intende la materia non relativistica, la quale esercita una pressione nulla, mentre con radiazione si intendono particelle relativistiche le quali hanno  $p = \frac{1}{3}\rho c^2$ .

misurate al tempo attuale. Fissando la costante di proporzionalità  $\rho_0$  si ottiene

$$\rho = \frac{\rho_0}{a^3}. \quad (1.40)$$

Utilizzando la 1.29 con queste ipotesi

$$\left(\frac{\dot{a}}{a}\right)^2 = \frac{8\pi G}{3} \frac{\rho_0}{a^3} \implies \dot{a}^2 = \frac{8\pi G \rho_0}{3} \frac{1}{a} \implies \sqrt{a} da = \sqrt{\frac{8\pi G \rho_0}{3}} dt$$

integrando e risistemando

$$a(t) = \left(\frac{t}{t_0}\right)^{2/3}, \quad t_0 = \frac{1}{\sqrt{6\pi G \rho_0}} \quad (1.41)$$

dove  $t_0$  indica il tempo presente e così facendo si ottiene  $a(t_0) = 1$ . La densità allora diviene

$$\rho(t) = \rho_0 \frac{t_0^2}{t^2}. \quad (1.42)$$

Con questa soluzione l'universo si espande per sempre, ma il tasso di espansione,  $H(t)$ , decresce col tempo

$$H(t) = \frac{\dot{a}}{a} = \frac{2}{3t}. \quad (1.43)$$

Nell'altro limite la pressione è pari a  $p = \rho c^2/3$ : l'equazione del fluido diventa

$$\dot{\rho} + 4 \frac{\dot{a}}{a} \rho = 0$$

$$\rho \propto \frac{1}{a^4} \implies \rho = \frac{\rho_0}{a^4} \quad (1.44)$$

e ripercorrendo i passaggi fatti nella trattazione precedente si ottiene

$$a(t) = \left(\frac{t}{t_0}\right)^{1/2}, \quad \rho(t) = \frac{\rho_0 t_0^2}{t^2} \quad (1.45)$$

La 1.44 mostra che la densità decresce come la quarta potenza del fattore di scala: tre di queste sono identificate con il volume. La quarta è invece dovuta all'allungamento della lunghezza d'onda della luce. La lunghezza d'onda è proporzionale ad  $a$ , allora l'energia  $E = h\nu = hc/\lambda$  decresce come la potenza di  $a^{15}$ .

Dalla 1.45 si nota che l'espansione avviene più lentamente rispetto al caso della materia. Anche in questo caso il tasso di espansione è inversamente proporzionale al tempo.

Considerando sia la materia che la radiazione, la densità è definita come  $\rho =$

<sup>15</sup>In relatività l'energia è equivalente alla massa.

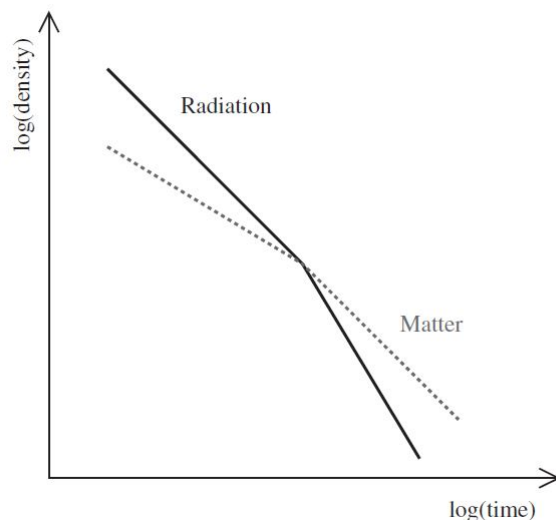


Figura 1.2: In questa figura viene rappresentata la densità in funzione del tempo. Come si vede inizialmente la densità di radiazione risulta dominante ma col passare del tempo la densità di materia diventa sempre più dominante finchè a un certo punto diventa il termine derivante cambiando quindi il relativo sviluppo temporale.

$\rho_{mat} + \rho_{rad}$  dove  $\rho_{mat} \propto 1/a^3$  e  $\rho_{rad} \propto 1/a^4$ . Questo rende la soluzione  $\rho(a)$  e  $\rho(t)$  più complessa. Per semplificare la trattazione si considerino soltanto i casi in cui una delle due densità domini sull'altra, così le soluzioni delle equazioni di Friedmann sono risolte considerando solo la parte dominante. Supponendo che la radiazione sia la parte più importante

$$a(t) \propto t^{1/2} \quad ; \quad \rho_{rad}(t) \propto \frac{1}{t^2} \quad ; \quad \rho_{mat}(t) \propto \frac{1}{a^3} \propto \frac{1}{t^{3/2}}, \quad (1.46)$$

si nota che la densità di radiazione decresce più velocemente della densità di materia. Questo vuol dire che dopo un certo periodo di tempo le ipotesi fatte non sono più verificate e quindi le formule appena trovate non sono più corrette.

Nel caso in cui sia la materia dominante:

$$a(t) \propto t^{2/3} \quad ; \quad \rho_{mat}(t) \propto \frac{1}{t^2} \quad ; \quad \rho_{rad}(t) \propto \frac{1}{a^4} \propto \frac{1}{t^{8/3}}. \quad (1.47)$$

La situazione in questo caso non ha problemi siccome la densità di materia decresce meno velocemente rispetto a quella di radiazione. Si può rappresentare schematicamente quanto detto nella figura 1.2.

### 1.5.3 Densità particellare

La densità numerica delle particelle,  $n$ , corrisponde al numero di particelle presenti in un volume. La densità energetica è direttamente proporzionale ad  $n$ , chiamando  $E$  l'energia per singola particella

$$\epsilon = n E. \quad (1.48)$$

La densità numerica è particolarmente utile perché nella maggior parte dei casi il numero di particelle è conservato. La conservazione però non avviene quando ci sono delle interazioni: se ci si trova in equilibrio termico allora il numero di particelle è conservato anche nei casi ad alta interazione.<sup>16</sup>

L'unica cosa che può cambiare la densità numerica è quindi l'aumento di volume:

$$n \propto \frac{1}{a^3}. \quad (1.49)$$

La 1.49 vale sia per la materia che per la radiazione:

$$\rho_{mat} \propto \epsilon_{mat} \propto n_{mat} \times E_{mat} \propto \frac{1}{a^3} \times cost \propto \frac{1}{a^3}, \quad (1.50)$$

$$\rho_{rad} \propto \epsilon_{rad} \propto n_{rad} \times E_{rad} \propto \frac{1}{a^3} \times \frac{1}{a} \propto \frac{1}{a^4}. \quad (1.51)$$

Sebbene le densità energetiche di materia e radiazione evolvono in due modi differenti la loro densità particellare è la stessa.

### 1.5.4 Evoluzione dell'universo includendo la curvatura

Ora si consideri il caso generale in cui  $k \neq 0$ , dove la costante  $k$  a seconda del segno indica la curvatura<sup>17</sup>. L'analisi che verrà svolta sarà qualitativa e inoltre si baserà sull'ipotesi non restrittiva che l'universo sia dominato dalla materia non relativistica.

Innanzitutto bisogna capire se l'universo in queste condizioni si fermi: ciò significa dimostrare che il tasso di espansione  $H$  sia nullo. Dall'equazione di Friedmann(1.29) inserendo  $H$

$$(H)^2 = \frac{8\pi G}{3}\rho - \frac{k}{a^2} \quad (1.52)$$

si osserva che  $H \neq 0$  quando  $k$  è negativa. Ne deriva che in questa situazione l'universo si espande per sempre. L'equazione si semplifica a tempi molto

<sup>16</sup>Con equilibrio termodinamico si intende dire che qualsiasi interazione che trasformi la densità numerica di una particella, avviene in entrambe le direzioni con lo stesso tasso. Per concretizzare si considerino due particelle  $A$  e  $B$ : se il sistema è in uno stato di equilibrio allora il numero di transizioni da  $A$  a  $B$  è uguale a quello da  $B$  ad  $A$ .

<sup>17</sup>Se  $k > 0$  la geometria è sferica mentre se  $k < 0$  la geometria è iperbolica.

lunghi siccome il primo termine del membro a destra è inversamente proporzionale ad  $a^3$  ( $\rho_{mat} \propto \frac{1}{a^3}$ ) mentre il secondo ad  $a^2$ . Di conseguenza anche per  $k$  piccoli  $-k/a^2$  dominerà semplificando l'equazione:

$$\left(\frac{\dot{a}}{a}\right)^2 = -\frac{k}{a^2},$$

$$\dot{a}^2 = -k. \quad (1.53)$$

Dalla 1.53 si ottiene  $a \propto t$ . Questa afferma che l'universo a tempi lunghi non solo si espande ma addirittura lo fa più velocemente. La velocità  $\dot{a}$  invece non tende a 0 ma ad un valore costante.

Nel caso in cui  $k$  è positivo allora è possibile che  $H$  sia nullo quando i termini a destra dell'equazione di Friedmann si cancellano. In questa maniera l'universo non solo si fermerà ma vi sarà anche un collasso. Questo è facilmente descrivibile in quanto le equazioni sono reversibili: basta sostituire  $-t$  a  $t$ . Questa teoria è chiamata Big Crunch.

## 1.6 L'origine della radiazione cosmica di fondo

La teoria che descrive l'evoluzione dell'universo fino dai suoi primi istanti di vita è la teoria del Big Bang. Essa sostiene che l'universo ha dovuto attraversare molte fasi, una delle quali verrà trattata in questa sezione. A un certo istante di tempo l'universo si è raffreddato dando così origine alla radiazione cosmica di fondo, anche detto CMB<sup>18</sup>, che costituisce una delle prove più importanti a favore di questa teoria. Nel 1965 Penzias e Wilson scoprirono che l'universo è pervaso da un "mare di microonde" che segue una distribuzione Planckiana a una temperatura pari a

$$T = 2.725 \pm 0.001 \text{ K}. \quad (1.54)$$

Questo risultato costituisce la prova sperimentale del CMB. Si studierà in seguito come evolve lo spettro di corpo nero nel tempo. Dagli studi precedenti è noto che

$$\epsilon_{rad} = \rho_{rad}c^2 = \alpha T^4 \quad (1.55)$$

dove  $\alpha$  è la costante di radiazione. Conoscendo la temperatura è possibile ricavare la densità di radiazione dalla precedente equazione. Essa può essere espressa in termini di densità critica, cioè la densità tale per cui si avrebbe un universo piatto  $\rho_{crit} = 3H^2/8\pi G$ :

$$\Omega_{rad} = \frac{\rho_{rad}}{\rho_{crit}} = 2.47 \times 10^{-5} h^{-2}. \quad (1.56)$$

---

<sup>18</sup>Cosmic Microwave Background.

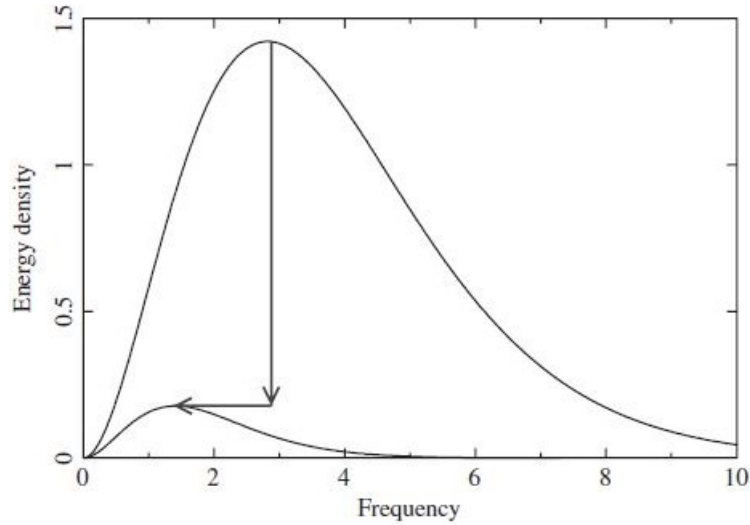


Figura 1.3: In figura vi sono due curve che corrispondono alla distribuzione di corpo nero a due istanti di tempo diversi. La più intensa che è venuta prima è ovviamente a una temperatura più alta. La successiva mostra come la distribuzione di corpo nero viene preservata a una temperatura inferiore. Vengono inoltre mostrati le riscalature dovute ai tempi differenti che causano un differente valore del fattore di scala.

La CMB quindi è piccola ma non è una frazione completamente trascurabile rispetto alla  $\rho_{crit}$ .

Dalla 1.55 è possibile ricavare la relazione tra temperatura e il fattore di scala

$$T \propto \frac{1}{a} \quad (1.57)$$

dal quale ne consegue che l'universo espandendosi si raffredda. La forma del corpo nero, che viene di seguito riportata

$$u(\nu) = \frac{8\pi h}{c^3} \frac{\nu^3}{e^{\beta h\nu} - 1},$$

viene preservata ad una temperatura inferiore  $T_f = T_i a_f / a_i$ . Questo funziona per due motivi: il primo è dovuto all'esponente al denominatore che è proporzionale al rapporto  $\nu/T$  in cui viene eliminato il fattore di scala. Il secondo è dovuto al cubo della frequenza al numeratore che fa comparire un fattore  $1/a^3$  corrispondente all'evoluzione della densità numerica dei fotoni. Nella figura 1.3 è rappresentato quanto appena descritto.

Per determinare a che temperatura ha avuto origine il CMB è utile sapere il rapporto tra fotoni e barioni che è costante siccome sia il numero di fotoni



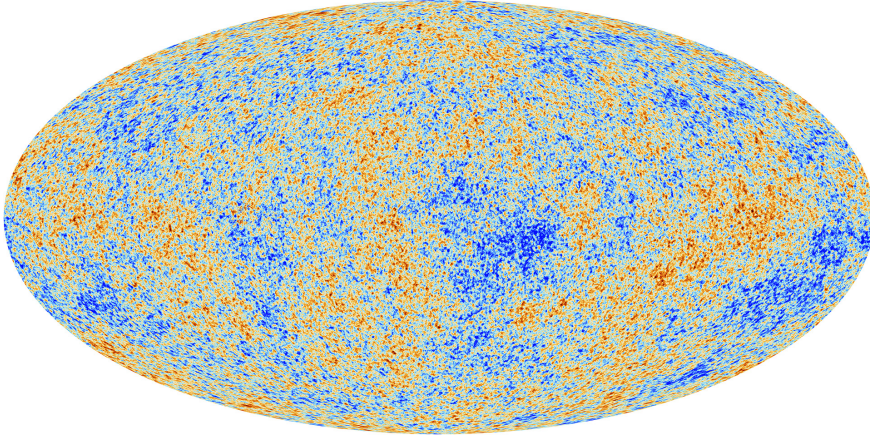


Figura 1.4: Questa è un'immagine della radiazione cosmica di fondo fornita dal satellite Planck nel 2013. Essa mostra che in realtà la distribuzione non è isotropa ma ci sono delle piccole variazioni, dette anisotropie, che spiegherebbero la forma attuale dell'universo cosa che non si sarebbe in grado se la distribuzione fosse esattamente isotropa.

che il numero di barioni sono inversamente proporzionali alla terza potenza di  $a$ . Il numero di fotoni è possibile ricavarlo dal rapporto tra la densità di energia e l'energia media per fotone. La prima risulta

$$\epsilon_{rad}(t_0) = 4.17 \times 10^{-14} \text{ Jm}^{-3}$$

mentre la seconda è data dalla distribuzione termica:

$$E_{mean} \simeq 3k_B T = 1.1 \times 10^{-22} \text{ J}$$

Si ottiene quindi la densità numerica dei fotoni:

$$n_\gamma = 3.7 \times 10^8 \text{ m}^{-3} \quad (1.58)$$

Per quanto riguarda i barioni si utilizza  $\Omega_B$ :

$$\Omega_B = \frac{\rho_B}{\rho_{crit}} \simeq 0.023 h^{-2}$$

Da cui è possibile calcolare la densità energetica<sup>19</sup>

$$\epsilon_B = \rho_B c^2 = \Omega_B \rho_{crit} c^2 \simeq 3.9 \times 10^{-11} \text{ Jm}^{-3}$$

L'energia media per barione corrisponde all'energia a riposo, circa  $939 \text{ MeV}$ . La densità numerica è il rapporto fra queste due grandezze:

$$n_B \simeq 0.26 \text{ m}^{-3} \quad (1.59)$$

<sup>19</sup>I barioni sono particelle pesanti quindi la loro energia corrisponde a quella a riposo.

Il rapporto tra le due densità numeriche è:

$$\frac{n_\gamma}{n_B} \simeq 1.4 \times 10^9 \quad (1.60)$$

Questo risultato afferma che ci sono circa un miliardo di fotoni per barione. L'origine del CMB è avvenuta quando i fotoni e la materia hanno smesso di interagire altamente fra loro. Quando l'universo era circa un milionesimo della sua grandezza attuale, alla temperatura quindi di  $3\,000\,000\text{ K}$ <sup>20</sup>, i fotoni si trovano ad avere un'energia ( $3k_B T$ ) ben superiore all'energia di ionizzazione dell'atomo di idrogeno ( $13.6\text{ eV}$ ), tenendo quindi gli elettroni e i protoni ben separati. Essi inoltre interagiscono con gli elettroni liberi attraverso lo scattering Thomson, avendo di conseguenza un libero cammino medio breve. Con l'espansione e il raffreddamento dell'universo i  $\gamma$  perdono energia ( $E_\gamma \propto \nu \propto 1/a$ ) e ionizzano un numero minore di atomi di idrogeno che si formano. Quando non riescono più a ionizzare gli atomi formati, i fotoni allora non risentono più dello scattering Thomson (il loro cammino non è più breve) e quindi sono in grado di viaggiare: l'universo è passato da opaco a trasparente. Il processo appena descritto è conosciuto come disaccoppiamento.

Per calcolare la temperatura alla quale è avvenuto il passaggio si può inizialmente considerare che l'energia media del fotone deve essere pari a quella di ionizzazione. In questa maniera la temperatura risulta essere  $50\,000\text{ K}$ , un valore ben lontano da quello attualmente calcolato. Questo è dovuto al fatto che non si è tenuto in considerazione che il numero di fotoni per un singolo barione è più di un miliardo. Un miglioramento è possibile utilizzando il fattore di soppressione di Boltzmann:

$$\frac{n_{rad}}{n_B} = e^{-\frac{E_e}{k_B T}} \quad \Longrightarrow \quad T_{dec} = \frac{13.6}{k_B \ln(1.4 \times 10^9)} \simeq 7400\text{ K} \quad (1.61)$$

Risultato più vicino al valore esatto  $\sim 3000\text{ K}$ . Dalla medesima relazione che lega la temperatura al fattore di scala si ricava  $a_{dec}$

$$T_{dec} a_{dec} = T_0 a_0 \quad \Longrightarrow \quad a_{dec} = \frac{T_0}{T_{dec}} a_0 \simeq \frac{1}{1000}$$

ponendo  $a_0$  pari ad uno.

---

<sup>20</sup>Dalla relazione trovata prima,  $T_i a_i = T_f a_f$ , si ottiene il risultato sostituendo i valori.  $T_i = T_f a_f / a_i \simeq 3 \times 1\,000\,000\text{ K}$ .

## Capitolo 2

# Le proprietà dello spettro delle perturbazioni

Il capitolo precedente si è concluso con l'illustrazione della radiazione cosmica di fondo. Essa è stata presentata come una distribuzione perfettamente isotropa cosa che non è vera. L'universo infatti non è esattamente isotropo: per questo è necessario una descrizione delle perturbazioni. In questo capitolo verrà analizzato il metodo perturbativo che è applicabile per piccole fluttuazioni.

L'evoluzione delle perturbazioni è particolarmente semplice da descrivere fintantochè è lineare: essa viene infatti descritta come sovrapposizione di onde piane. Inizialmente l'origine dello spettro delle perturbazioni non era chiara. Infatti venne assunto un modello ad hoc, conosciuto successivamente come *spettro di white-noise* o *spettro di Zeldovich*. Negli anni Ottanta venne giustificata la sua natura partendo da fluttuazioni di carattere quantistico. L'evoluzione temporale dello spettro delle perturbazioni dipende essenzialmente dalla natura delle particelle e dalle caratteristiche delle fluttuazioni stesse.

Nei successivi paragrafi verranno introdotte nozioni come lo spettro, la varianza, la distribuzione di probabilità e le funzioni di correlazione.

### 2.1 Lo spettro delle perturbazioni

Per descrivere la distribuzione di materia si può pensare di dividere l'universo in cellette indipendenti l'una dall'altra. L'evoluzione temporale fa perdere l'indipendenza a causa dell'interazione fisica rendendo la descrizione più complicata. Conviene invece descrivere la distribuzione di materia come sovrapposizione di onde piane, finché l'approssimazione lineare è valida. Così facendo si semplifica la situazione in quanto le onde conservano l'indipendenza nel tempo.

Si consideri un cubo con volume  $V_u$  di lato  $L \gg l_s$ , dove  $l_s$  è la massima

scala in cui l'universo presenta una struttura dovuta alle fluttuazioni. Si può quindi pensare che il cubo sia una realizzazione dell'universo. Si assuma che l'universo si possa dividere in celle di volume  $V_u$ , con condizioni periodiche sulle superfici di separazione. Quest'ipotesi può essere in realtà evitata facendo tendere all'infinito il volume che si sta considerando.

Definita  $\langle \rho \rangle$  la densità media nel volume  $V_u$  e  $\rho(\vec{x})$  la densità nel punto  $\vec{x}$ , la fluttuazione

$$\delta(\vec{x}) = \frac{\rho(\vec{x}) - \langle \rho \rangle}{\langle \rho \rangle} \quad (2.1)$$

può essere sviluppata in serie di Fourier:

$$\delta(\vec{x}) = \sum_{\vec{k}} \delta_{\vec{k}} e^{i\vec{k}\cdot\vec{x}} = \sum_{\vec{k}} \delta_{\vec{k}}^* e^{-i\vec{k}\cdot\vec{x}}. \quad (2.2)$$

Imponendo le condizioni di periodicità

$$\delta(0, y, z) = \delta(L, y, z) \quad \delta(x, 0, z) = \delta(x, L, z) \quad \delta(x, y, 0) = \delta(x, y, L)$$

si ottengono i valori che può assumere  $\vec{k}$ . Prendendo la prima equazione

$$\begin{aligned} \sum_{\vec{k}} \delta_{\vec{k}} e^{i(k_y y + k_z z)} &= \sum_{\vec{k}} \delta_{\vec{k}} e^{ik_x L} e^{i(k_y y + k_z z)} \\ \sum_{\vec{k}} \delta_{\vec{k}} (1 - e^{ik_x L}) e^{i(k_y y + k_z z)} &= 0 \end{aligned}$$

essa è verificata se e solo se il termine tra parentesi è nullo. Allora  $k_x$  deve valere

$$k_x = n_x \frac{2\pi}{L} \quad n_x \in \mathbb{Z} \quad (2.3)$$

e analogamente per  $k_y$  e  $k_z$ :

$$k_y = n_y \frac{2\pi}{L}, \quad k_z = n_z \frac{2\pi}{L} \quad n_y, n_z \in \mathbb{Z}. \quad (2.4)$$

Ci sono altre condizioni da rispettare come la conservazione della massa che implica che  $\delta_{\vec{k}=0} = 0$

$$\begin{aligned} 0 &= \int_{V_u} \delta(\vec{x}) d^3x = \int_{V_u} \sum_{\vec{k}} \delta_{\vec{k}} e^{i\vec{k}\cdot\vec{x}} d^3x \\ &= \delta_{\vec{k}=0} \int_{V_u} d^3x + \sum_{\vec{k} \neq 0} \delta_{\vec{k}} \int_{V_u} e^{i\vec{k}\cdot\vec{x}} d^3x \\ &= \delta_{\vec{k}=0} V_u \end{aligned}$$

dove l'integrale  $\int_{V_u} e^{i\vec{k}\cdot\vec{x}} d^3x$  è nullo essendo composto da esponenziali complessi di periodo  $L$ . L'altra condizione è la realtà della fluttuazione, che

impono  $\delta_{\vec{k}}^* = \delta_{-\vec{k}}$ .

I coefficienti di Fourier sono definiti come

$$\delta_{\vec{k}} = \frac{1}{V_u} \int_{V_u} \delta(\vec{x}) e^{-i\vec{k}\cdot\vec{x}} d^3x. \quad (2.5)$$

Per proprietà di omogeneità e isotropia dell'universo su grandi scale la quantità  $\delta_{\vec{k}}$  deve dipendere solo dal modulo di  $\vec{k}$  e non dalla sua direzione<sup>2</sup>. Come è stato già dimostrato il valore medio della fluttuazione, che verrà rinominata per semplicità  $\delta(\vec{x}) = \delta$ , è nullo mentre non lo è la sua media quadratica che corrisponde alla varianza

$$\sigma^2 = \langle \delta^2 \rangle = \sum_{\vec{k}} \langle |\delta_{\vec{k}}|^2 \rangle = \frac{1}{V_u} \sum_{\vec{k}} \delta_{\vec{k}}^2. \quad (2.6)$$

Facendo tendere il volume all'infinito si ottiene

$$\sigma^2 = \frac{1}{2\pi^2} \int_0^\infty P(k) k^2 dk \quad (2.7)$$

dove  $P(k) = \delta_k^2$ . Il passaggio è dovuto al fatto che  $\Delta k_x = \Delta k_y = \Delta k_z = 2\pi/L$ . Le tre delta vengono moltiplicate tra loro  $\Delta k_x \Delta k_y \Delta k_z = 8\pi^3/V_u$ <sup>3</sup>, e la relazione trovata viene inserita nella 2.6

$$\sigma^2 = \lim_{\Delta k_x, \Delta k_y, \Delta k_z \rightarrow \infty} \frac{1}{8\pi^3} \Delta k_x \Delta k_y \Delta k_z \sum_{k_x, k_y, k_z} \delta_k^2 = \frac{1}{8\pi^3} \int \delta_k^2 d^3k.$$

Utilizzando le coordinate sferiche e integrando l'angolo solido si ottiene il risultato desiderato.

La quantità  $P(k)$  è chiamata spettro di potenza delle perturbazioni. La varianza non dipende dalle coordinate ma dal tempo a causa dell'evoluzione delle perturbazioni. Essa descrive l'ampiezza delle disomogeneità, non dicendo nulla invece riguardo la loro struttura spaziale.

In generale si assume che lo spettro delle perturbazioni, almeno in un certo intervallo  $k$ , sia dato dalla legge di potenza:

$$P(k) = Ak^n \quad (2.8)$$

dove  $n$  è detto indice spettrale. Esso non può essere costante in tutto il range dei numeri d'onda in quanto l'integrale, che compare nella 2.7, divergerebbe. Affinché non vi siano problemi di convergenza allora per piccole scale ( $k \rightarrow \infty$ ) si deve avere  $n < -3$  mentre per grandi scale ( $k$  piccoli)  $n > -3$ .

<sup>1</sup>Sostituendo alla fluttuazione lo suo sviluppo in serie si osserva che tutti i termini della sommatoria con  $\vec{k}' \neq \vec{k}$  hanno l'esponentiale complesso diverso da zero con periodo  $L$  rendendo così l'integrale nullo. Invece il termine con  $\vec{k}' = \vec{k}$  annulla l'esponentiale ottenendo quindi  $1/V_u \delta_{\vec{k}} V_u$ .

<sup>2</sup>Questo è dovuto al significato fisico di  $\vec{k}$ . Esso è infatti il vettore d'onda. Se quanto detto non fosse vero allora ci sarebbero onde con una determinata intensità che si espandono in una determinata direzione violando così il principio di omogeneità e isotropia.

<sup>3</sup>Di conseguenza il volume che tende ad infinito corrisponde a far tendere gli intervalli a zero.

## 2.2 La varianza di massa

Sia  $\langle M \rangle$  la massa media contenuta in un volume sferico di raggio  $R$

$$\langle M \rangle = \langle \rho \rangle V = \frac{4}{3}\pi R^3 \langle \rho \rangle .$$

Si definisce la *varianza di massa* come:

$$\sigma_M^2 = \frac{\langle (M - \langle M \rangle)^2 \rangle}{\langle M \rangle^2} = \frac{\langle \delta M^2 \rangle}{\langle M \rangle^2} \quad (2.9)$$

dove la media è fatta su tutti i volumi  $V$  dello spazio. Sapendo che  $\delta M / \langle M \rangle = \frac{1}{V} \int_V \delta(\vec{x}) d^3x = \frac{1}{V} \int_V \sum_{\vec{k}} \delta_{\vec{k}} e^{i\vec{k}\cdot\vec{x}}$  la precedente equazione può essere riscritta come

$$\begin{aligned} \sigma_M^2 &= \frac{1}{V^2} \left\langle \int_V \int_V \sum_{\vec{k}, \vec{k}'} \delta_{\vec{k}} \delta_{\vec{k}'}^* e^{i\vec{k}\cdot\vec{x}} e^{-i\vec{k}'\cdot\vec{x}'} d^3x d^3x' \right\rangle \\ &= \frac{1}{V^2} \left\langle \int_V \int_V \sum_{\vec{k}, \vec{k}'} \delta_{\vec{k}} \delta_{\vec{k}'}^* e^{i\vec{k}\cdot\vec{y}} e^{-i\vec{k}'\cdot\vec{y}'} d^3y d^3y' e^{i(\vec{k}-\vec{k}')\cdot\vec{x}_0} \right\rangle \\ &= \frac{1}{V^2} \left\langle \sum_{\vec{k}, \vec{k}'} \delta_{\vec{k}} \delta_{\vec{k}'}^* e^{i(\vec{k}-\vec{k}')\cdot\vec{x}_0} \int_V e^{i\vec{k}\cdot\vec{y}} d^3y \int_V e^{-i\vec{k}'\cdot\vec{y}'} d^3y' \right\rangle \end{aligned}$$

dove sono state fatte le seguenti sostituzioni:  $\vec{y} = \vec{x} - \vec{x}_0$  e  $\vec{y}' = \vec{x}' - \vec{x}_0$ . Il termine  $\vec{x}_0$  indica il centro della sfera generica di volume  $V$ , per cui la media verrà fatta su tutti i punti  $\vec{x}_0$  dello spazio. Si noti che sostituendo nel secondo integrale  $\vec{y}'$  con  $-\vec{y}'$  si ottiene il primo integrale.

La delta di Dirac è definita come

$$\delta(\vec{x} - \vec{x}') = \int e^{i(\vec{x}-\vec{x}')\cdot\vec{k}} .$$

Di conseguenza il valor medio su tutti gli  $\vec{x}_0$  risulta essere

$$\sum_{\vec{k}, \vec{k}'} \delta_{\vec{k}} \delta_{\vec{k}'}^* \delta(\vec{k} - \vec{k}') = \sum_{\vec{k}} |\delta_{\vec{k}}|^2$$

e inserendo il tutto nell'equazione:

$$\sigma_M^2 = \sum_{\vec{k}} |\delta_{\vec{k}}|^2 \left[ \frac{1}{V} \int_V e^{i\vec{k}\cdot\vec{y}} d^3y \right]^2$$

dove il termine tra parentesi quadre è chiamato *funzione finestra* e viene indicato con  $W(kR)$ .

Il risultato finale è:

$$\sigma_M^2 = \frac{1}{V_u} \sum_{\vec{k}} \delta_{\vec{k}}^2 W^2(kR) . \quad (2.10)$$

La forma di  $W(kR)$  si trova sviluppando l'esponenziale in armoniche sferiche:

$$e^{i\vec{k}\cdot\vec{y}} = \sum_{l,m} j_l(kr) i^l (2l+1) P_l^{|m|}(\cos\vartheta) e^{im\varphi}$$

dove le  $j_l$  sono le funzioni di Bessel sferiche e  $P_l^{|m|}$  i polinomi di Legendre. Inserendo questa equazione nella funzione finestra e passando alle coordinate sferiche si ha

$$\begin{aligned} W(kR) &= \frac{1}{V} \sum_{l,m} i^l (2l+1) \int_0^{2\pi} e^{im\varphi} d\varphi \int_0^\pi P_l^{|m|}(\cos\vartheta) \sin\vartheta d\vartheta \int_0^R j_l(kr) r^2 dr \\ &= \frac{1}{V} 4\pi \int_0^R j_0(kr) r^2 dr \\ &= \frac{3}{4\pi R^3} \frac{4\pi}{k^3} (\sin kR - kR \cos kR) \end{aligned}$$

dove i termini con  $l, m \neq 0$  integrati danno come risultato 0. La funzione finestra diventa:

$$W(kR) = \frac{3(\sin kR - kR \cos kR)}{(kR)^3} \quad (2.11)$$

$$W(kR) \begin{cases} \simeq 1 & kR \leq 1 \\ \leq \frac{1}{(kR)^2} & kR \gg 1 \end{cases} \quad (2.12)$$

Facendo tendere il volume della 2.13 all'infinito si passa al continuo:

$$\sigma_M^2 = \frac{1}{2\pi^2} \int_0^\infty P(k) W^2(kR) k^2 dk < \sigma^2 \quad (2.13)$$

dove si nota che è funzione di  $R$  e quindi della massa  $M$  stessa.

Come si osserva, la funzione finestra tende ad eliminare le lunghezze d'onda minori del raggio,  $\lambda \simeq k^{-1} < R$ , preservando invece le  $\lambda$  più grandi di  $R$ .

Si può utilizzare un'altra derivazione più generale della precedente andando a definire un campo di fluttuazioni "filtrato"  $\delta(\vec{x}; R_f)$  con un filtro che elimini le fluttuazioni di lunghezza d'onda inferiori ad  $R_f$ :

$$\delta(\vec{x}; R_f) = \int \delta(\vec{x}') F(|\vec{x} - \vec{x}'|; R_f) d\vec{x}' \quad (2.14)$$

Il filtro  $F$  deve soddisfare le seguenti proprietà:

$$\begin{cases} F = \text{cost} \simeq \frac{1}{R_f^3} & |\vec{x} - \vec{x}'| \ll R_f \\ F \simeq 0 & |\vec{x} - \vec{x}'| \gg R_f \end{cases}$$

e inoltre:

$$\int F(\vec{z}; R_f) d\vec{z} = 1.$$

Il filtro top-hat e il filtro gaussiano sono alcuni esempi:

$$F_{TH}(|\vec{x} - \vec{x}'|; R_{TH}) = \frac{3}{4\pi R_{TH}^3} \theta \left( 1 - \frac{|\vec{x} - \vec{x}'|}{R_{TH}} \right), \quad (2.15)$$

$$F_G(|\vec{x} - \vec{x}'|; R_G) = \frac{1}{(2\pi R_G^2)^{3/2}} e^{-\frac{|\vec{x} - \vec{x}'|^2}{2R_G^2}}. \quad (2.16)$$

Ritornando alla dimostrazione si parta dalla definizione di varianza  $\sigma^2 = \langle \delta^2 \rangle$  e si ripercorrono i passaggi fatti nel calcolo della 2.13 ottenendo:

$$\sigma^2(R_f) = \frac{1}{2\pi^2} \int_0^\infty P(k; R_f) k^2 dk = \frac{1}{2\pi} \int_0^\infty P(k) W_F^2(kR_f) k^2 dk \quad (2.17)$$

dove  $W_F(kR_f)$  è detta pure funzione finestra e corrisponde alla trasformata di Fourier del filtro<sup>4</sup>. Lo spettro del campo filtrato è pertanto:

$$P(k; R_f) = W_F^2(kR_f) P(k). \quad (2.18)$$

Nel caso del top-hat si ritrova la 2.11 con  $R_{TH} = R$ . Tale risultato è dovuta alla definizione di massa data inizialmente, cioè massa contenuta in un volume sferico di raggio  $R$  (dai bordi definiti).

Per il filtro gaussiano la funzione finestra è:

$$W_G(kR_G) = e^{-\frac{(kR_G)^2}{2}}.$$

Se inizialmente la massa fosse stata definita smussando il bordo, cioè

$$\langle M \rangle = \langle \rho \rangle \int_0^\infty 4\pi e^{-\frac{r^2}{2R^2}} r^2 dr$$

si sarebbe trovata una varianza di massa convoluta con la funzione finestra gaussiana. Quindi in generale la varianza di massa di un campo di densità  $\delta(\vec{x})$  è data dalla relazione

$$\sigma_M^2 = \frac{1}{2\pi^2} \int_0^\infty P(k) W_F^2(kR) k^2 dk \quad (2.19)$$

dove l'espressione della funzione finestra dipende dalla definizione analitica della massa, cioè dal filtro usato.

## 2.3 Spettro e varianza

Le proprietà dello spettro  $P(k)$  sono espresse dai suoi momenti spettrali:

$$\sigma_l^2 = \frac{1}{2\pi^2} \int_0^\infty P(k) k^{2(l+1)} dk \quad (2.20)$$

<sup>4</sup>Lo si vede svolgendo i calcoli esplicitamente.



dove  $l$  è detto indice del momento. Il momento spettrale più importante è quello di ordine zero, cioè la varianza di massa  $\sigma_M^2$ . Essa rappresenta l'ampiezza delle disomogeneità nella distribuzione di materia. Il risultato trovato nella 2.13, corrispondente alla massa relativa a un volume dai bordi netti (filtro top-hat), dipende dallo spettro di potenza. Si assuma che esso sia regolato da una legge di potenza ( $P(k) = A k^n$ ) la quale deve rispettare le condizioni descritte precedentemente: infatti definito  $k_\infty$  e  $n_\infty$  si ha

$$P(k) = \begin{cases} k^n & k < k_\infty, n > -3 \\ k^{n_\infty} & k > k_\infty, n_\infty < -3 \end{cases} . \quad (2.21)$$

Si prende in considerazione la funzione finestra approssimata:

$$W(kR) = \begin{cases} 1 & k \leq k_M \\ \left(\frac{k}{k_M}\right)^2 & k_M < k \leq k_\infty \\ 0 & k > k_\infty \end{cases} \quad (2.22)$$

dove  $k_M$  corrisponde a  $1/R$ .

Nell'intervallo  $-3 < n < 1$  si ottiene:

$$\sigma_M \propto M^{-\frac{3+n}{6}} = M^{-\alpha} \quad (2.23)$$

dove  $n$  è l'indice spettrale e l'esponente  $\alpha = (3+n)/6$  è detto indice di varianza. Per  $n > 1$  si trova invece:

$$\sigma_M \propto M^{-\frac{2}{3}} \quad (2.24)$$

come si nota la varianza di massa non dipende più dall'indice spettrale. Il motivo è dovuto alla definizione che è stata data di  $\sigma_M$ : la varianza viene calcolata per un filtro top-hat, cioè un filtro dai bordi netti. Per  $n > 1$  diventano rilevanti le componenti che hanno una lunghezza d'onda paragonabile al raggio del volume sferico, cioè quando  $k \simeq k_M$ . Di conseguenza la varianza non è più utile in quanto diventa estremamente sensibile al contributo delle componenti spettrali a piccola lunghezza d'onda, e quindi al rumore sulla superficie della sfera, dove casualmente una particella o sta dentro o sta fuori del volume. Queste fluttuazioni dipendono dal numero di particelle che stanno in superficie,  $N_S$ . Si ha

$$\delta N_S \propto N_S^{1/2} \propto S^{1/2} \propto M^{1/3}$$

per cui:

$$\sigma_M \simeq \frac{\delta M}{M} \propto \frac{\delta N_S}{M} \propto M^{2/3} \quad (2.25)$$

in accordo con quanto detto precedentemente.

Si può ovviare da questo risultato considerando un altro tipo di filtro come quello gaussiano dove i bordi non sono ben definiti.

## 2.4 Alcuni tipi di spettro

In questo paragrafo verranno elencati alcuni tipi di spettro e la loro varianza. Partendo da quello più semplice, cioè una distribuzione perfettamente omogenea,  $\delta(\vec{x}) = 0$ , lo spettro  $(P(k) = \delta_k^2)$  risulta nullo. Di conseguenza anche la varianza di massa è nulla.

Se le particelle sono distribuite casualmente e hanno la stessa massa  $m$ , la fluttuazione entro un volume  $V$ , contenente in media  $N$  particelle e quindi una massa  $M = Nm$ , dipenderà da  $\delta N \propto N^{1/2}$ . Risulta quindi:

$$\sigma_M = \frac{\delta M}{M} = \frac{\delta N}{N} \propto N^{-1/2} \propto M^{-1/2}. \quad (2.26)$$

L'indice spettrale  $n$  è nullo e l'indice di varianza  $\alpha$  è  $1/2$ .

Una distribuzione casuale di particelle sulla superficie sferica dai contorni netti porta ad una fluttuazione con varianza

$$\sigma_M \propto M^{-2/3} \quad (2.27)$$

come si è già visto nel paragrafo precedente. L'indice spettrale è 1 mentre  $\alpha$  è  $2/3$ .

Se si smussa il contorno della sfera il risultato è differente:

$$\sigma_M \propto N^{-5/6} \propto M^{-5/6} \quad (2.28)$$

corrispondente a  $n = 2$  e  $\alpha = 5/6$ . La 2.28 si trova imponendo la conservazione della massa. Siccome nel calcolo della varianza contano i termini con  $k$  piccolo allora l'esponenziale che compare nella 2.5 può essere sviluppato in serie:

$$\delta_{\vec{k}} = \frac{1}{V_u} \left[ \int_{V_u} \delta(\vec{x}) d^3x - i\vec{k} \cdot \int_{V_u} \vec{x} \delta(\vec{x}) d^3x - \frac{1}{2} k^2 \int_{V_u} x^2 \delta(\vec{x}) d^3x + \dots \right]$$

dove il termine di ordine zero è nullo per ipotesi mentre i termini successivi al primo sono trascurati in quanto si considera  $\vec{k}$  piccolo. Di conseguenza  $\delta_{\vec{k}} \propto k$  da cui lo spettro di potenza ha  $n = 2$  ( $P(k) = \delta_k^2$ ). Da questo deriva  $\sigma_M \propto M^{-5/6}$ .

Nel caso in cui si imponesse la conservazione della quantità di moto anche il primo termine dell'espansione sarebbe nullo. Diventa rilevante il secondo termine: allora  $\delta_{\vec{k}} \propto k^2$ ,  $n = 4$  e  $\sigma_M \propto M^{-7/6}$  con indice di varianza  $\alpha = 7/6$ .

## 2.5 La funzione di correlazione

La covarianza è una grandezza che fornisce una misura di quanto due variabili varin insieme. Essa è definita come:

$$Cov(X; Y) = E(XY) - E(X)E(Y)$$

dove  $X$  e  $Y$  sono le variabili considerate e  $E$  è la speranza matematica. Applicando questo concetto al campo di densità  $\rho(\vec{x})$  la funzione di covarianza  $\xi(r)$  risulta:

$$\begin{aligned}\xi(r) &= \frac{\langle \rho(\vec{x}) \rho(\vec{x} + \vec{r}) \rangle - \langle \rho \rangle^2}{\langle \rho \rangle^2} \\ &= \frac{\langle [\rho(\vec{x}) - \langle \rho \rangle] [\rho(\vec{x} + \vec{r}) - \langle \rho \rangle] \rangle}{\langle \rho \rangle^2} \\ &= \langle \delta(\vec{x}) \delta(\vec{x} + \vec{r}) \rangle\end{aligned}\quad (2.29)$$

dove la media è fatta sul volume rappresentativo  $V_u$ . Inserendo la 2.2 si ottiene

$$\begin{aligned}\xi(r) &= \frac{1}{V_u} \langle \int_{V_u} \sum_{\vec{k}} \delta_{\vec{k}} e^{i\vec{k}\cdot\vec{x}} \sum_{\vec{k}'} \delta_{\vec{k}'}^* e^{i\vec{k}'\cdot(\vec{x}+\vec{r})} d^3x \rangle \\ &= \sum_{\vec{k}} \langle |\delta_{\vec{k}}|^2 \rangle e^{-i\vec{k}\cdot\vec{r}}\end{aligned}\quad (2.30)$$

dove l'integrale restituisce la delta di Dirac  $\delta(\vec{k} - \vec{k}')$ . Inserendo la relazione  $\langle |\delta_{\vec{k}}|^2 \rangle = \delta_k^2/V_u$  e facendo tendere il volume all'infinito l'equazione precedente diventa:

$$\xi(r) = \frac{1}{2\pi^3} \int P(k) e^{-i\vec{k}\cdot\vec{r}} k^2 dk. \quad (2.31)$$

Dalla 2.30 è possibile trovare la relazione inversa:

$$\langle |\delta_{\vec{k}}|^2 \rangle = \frac{1}{V_u} \int \xi(r) e^{i\vec{k}\cdot\vec{r}} d^3r \quad (2.32)$$

rimanendo quindi definito lo spettro:

$$P(k) = \int \xi(r) e^{i\vec{k}\cdot\vec{r}} d^3r. \quad (2.33)$$

Si nota che  $P(k)$  è la trasformata di Fourier della funzione di covarianza. Quanto appena descritto corrisponde al teorema di Wiener-Khintchine. La funzione di correlazione può essere scritta in un altro modo. Usando le coordinate sferiche e integrando gli angoli

$$\begin{aligned}\int_{\Omega} e^{-i kr \cos \theta} d\Omega &= \int_0^{2\pi} d\phi \int_{-1}^1 e^{i kr \cos \theta} d \cos \theta \\ &= 2\pi \frac{e^{-i kr} - e^{i kr}}{-i kr} \\ &= 4\pi \frac{\sin kr}{kr}\end{aligned}\quad (2.34)$$

si ottiene:

$$\xi(r) = \frac{1}{2\pi^2} \int_0^\infty P(k) \frac{\sin kr}{kr} k^2 dk. \quad (2.35)$$

In maniera analoga si trova:

$$P(k) = \frac{1}{2\pi^2} \int_0^\infty \xi(r) \frac{\sin kr}{kr} r^2 dr. \quad (2.36)$$

Mediando la 2.30 su  $\vec{r}$  il risultato è nullo. In un universo omogeneo ed isotropo la funzione di correlazione non dipende dall'origine e dalla direzione di  $\vec{r}$  ma solo dal suo modulo. Si ha inoltre:

$$\int_0^\infty \xi(r) r^2 dr = \int_0^\infty \frac{1}{2\pi^2} \int_0^\infty P(k) \frac{\sin kr}{kr} k^2 dk r^2 dr. \quad (2.37)$$

Considerando soltanto l'integrale in  $r$  e integrando per parti

$$\int_0^\infty r \sin kr dr = -r \frac{\cos kr}{k} \Big|_0^\infty - \frac{1}{k} \int_0^\infty \cos kr dr = -\frac{1}{k^2} \sin kr \Big|_0^\infty = 0$$

si verifica che  $\int_0^\infty \xi(r) r^2 dr = 0$ .

In generale la funzione di covarianza è a segno alterno e positiva nell'origine in quanto partendo dalla sua definizione si trova  $\xi(0) = \langle \sigma^2 \rangle \geq 0$ .

Per capire il significato di  $\xi(r)$  si supponga che la materia dell'universo sia distribuita in regioni con fluttuazione di densità  $\delta > 0$  e  $\delta < 0$  tutte di dimensione dell'ordine di  $r_0$ . In tal caso il prodotto  $\delta(\vec{x}) \delta(\vec{x} + \vec{r})$  risulterà mediamente positivo per  $r < r_0$  e mediamente negativo per  $r > r_0$ . La funzione di covarianza si annulla per  $r \simeq r_0$ , che rappresenta la dimensione media delle regioni ed è quindi la lunghezza di coerenza del campo delle fluttuazioni di densità. Si dice che fra le regioni di dimensioni  $r$  tale per cui  $\xi(r) > 0$  vi è correlazione. Nel caso in cui  $\xi(r) < 0$  vi è anticorrelazione.

## Capitolo 3

# L'effetto Sunyaev-Zel'dovich

L'effetto Sunyaev-Zel'dovich descrive il comportamento dei fotoni del CMB quando attraversano un cluster di galassie, il quale è costituito da un gas molto caldo,  $T \approx 10^8 K$ . In queste condizioni il gas si trova allo stato di plasma: gli elettroni sono liberi e in movimento ( $E \approx K_B T$ ). I fotoni urtandogli aumentano la propria energia (e frequenza) passando dalla regione dello spettro di Rayleigh-Jeans a quella di Wien. L'urto che avviene è descritto dallo scattering Compton inverso di cui vi sarà una trattazione esauriente, presa dall'articolo di M. Birkinshaw [5], nella prossima sezione.

L'effetto è red-shift indipendente e da esso possono essere catalogati i cluster, tratte delle informazioni sulle loro proprietà e anche sui parametri cosmologici.

### 3.1 Scattering Compton inverso

Come già accennato nel primo capitolo il CMB non è esattamente isotropo (monopolo). Attraverso varie misurazioni è stato possibile rilevare una componente dipolare con ampiezza pari a  $3.372 \pm 0.004 mK$  dovuta al moto relativo della nostra galassia, come è possibile capire dalla figura 3.1.

Rimosse la componente monopolare e quella dipolare, rimane un segnale non trascurabile corrispondente a  $35 \pm 2 \mu K$ . Esso contiene informazioni sulle fluttuazioni, che sono associate alla formazione di strutture massive, presenti nella superficie di ultimo scattering.

I fotoni del CMB sono soggetti anche a distorsioni, come quelle dovute alla metrica di Rees-Sciama e all'effetto Sunyaev-Zel'dovich. Quest'ultimo però risulta molto più intenso del primo, che viene quindi nascosto siccome entrambi hanno origine dai cluster.

Come già accennato la causa principale dell'effetto SZ è quella dovuta all'urto tra fotone ed elettrone. Questa interazione dipende in che ambito si lavora: in ambito relativistico è descritta dallo scattering Compton la cui formula,

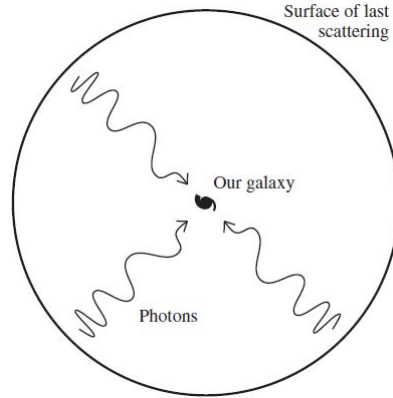


Figura 3.1: *La galassia è in movimento rispetto alla ultima superficie di scattering causando così la componente dipolare del CMB.*

nel caso in cui l'elettrone sia inizialmente a riposo, è

$$\epsilon' = \frac{\epsilon}{1 + \frac{\epsilon}{m_e c^2} (1 - \cos \phi_{12})} \quad (3.1)$$

dove  $\epsilon$  e  $\epsilon'$  sono le energie del fotone prima e dopo l'urto e  $\phi_{12}$  è l'angolo di deflessione del fotone.

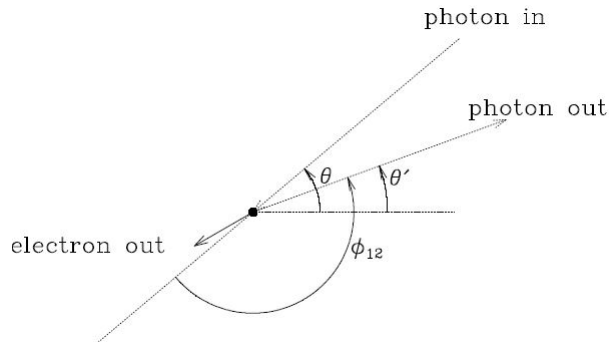


Figura 3.2: *Scattering Compton*

Nel limite non relativistico,  $h\nu \ll m_e c^2$  il processo viene chiamato scattering Thomson, la quale sezione d'urto è

$$\sigma_T = \frac{8}{3} \pi \left( \frac{e^2}{m_e c^2} \right)^2. \quad (3.2)$$

La 3.2 può essere ricavata dalla più generale formula di Klein-Nishina

$$\frac{d\sigma}{d\Omega} = \frac{r_e^2}{2} \left( \frac{\epsilon'}{\epsilon} \right)^2 \left( \frac{\epsilon}{\epsilon'} + \frac{\epsilon'}{\epsilon} - \sin^2 \phi_{12} \right) \quad (3.3)$$

nel limite in cui  $\epsilon' = \epsilon$ .

Lo scattering Compton e lo scattering Thomson sono descritti nel sistema di riferimento solidale all'elettrone; lo scattering Compton inverso avviene nel sistema di laboratorio dove l'elettrone è in movimento. Nel passaggio tra i due sistemi di riferimento allora bisogna tener conto dell'effetto Doppler, il quale può far invertire il processo: l'elettrone trasferisce un certa quantità di energia al fotone. Questo è ciò che avviene quando i fotoni del CMB attraversano il gas del cluster aumentando quindi la propria frequenza.

Riferendosi alla figura 3.2 nel sistema di riferimento solidale all'elettrone, la probabilità che avvenga uno scattering con angolo  $\theta$  è:

$$\begin{aligned} p(\theta) d\theta &= p(\mu) d\mu \\ &= \frac{d\mu}{2\gamma^4 (1 - \beta\mu)^3} \end{aligned} \quad (3.4)$$

dove  $\mu = \cos\theta$ . La probabilità che il fotone venga scatterato ad un angolo  $\theta'$  è

$$\phi(\mu; \mu') d\mu' = \frac{3}{8} \left( 1 + \mu^2 \mu'^2 + \frac{1}{2} (1 - \mu^2) (1 - \mu'^2) \right) d\mu'. \quad (3.5)$$

La frequenza del fotone dopo l'urto sarà

$$\nu'' = \frac{1 + \beta\mu'}{1 - \beta\mu} \nu. \quad (3.6)$$

Si esprime per convenzione in termini di shift della frequenza logaritmico

$$s = \log \frac{\nu''}{\nu}. \quad (3.7)$$

La probabilità che un fotone abbia uno shift  $s$  con un singolo scattering con un elettrone a velocità  $\beta c$  è

$$P(s; \beta) = \int p(\mu) d\mu \phi(\mu; \mu') \frac{d\mu'}{ds} ds \quad (3.8)$$

e inserendo le formule precedenti si trova:

$$\begin{aligned} P(s; \beta) &= \frac{3}{16\gamma^4 \beta} \int_{\mu_1}^{\mu_2} (1 + \beta\mu) \left( 1 + \mu^2 \mu'^2 + \frac{1}{2} (1 - \mu^2) (1 - \mu'^2) \right) \times \\ &\quad \times \frac{1}{(1 - \beta\mu)^3} d\mu \end{aligned} \quad (3.9)$$

dove  $\mu$ , usando la formula dello shift logaritmico, può essere espressa

$$\mu' = \frac{e^s (1 - \beta\mu) - 1}{\beta}$$

e l'integrale può essere calcolato solo su angoli reali

$$\mu_1 = \begin{cases} -1 & s \leq 0 \\ \frac{1-e^{-s}(1+\beta)}{\beta} & s \geq 0 \end{cases}, \quad (3.10)$$

$$\mu_2 = \begin{cases} \frac{1-e^{-s}(1-\beta)}{\beta} & s \leq 0 \\ 1 & s \geq 0 \end{cases}. \quad (3.11)$$

Nella figura 3.3 è possibile vedere i risultati dell'integrale per diversi valori di  $\beta$ . Si nota una asimmetria crescente al crescere di  $\beta$ :

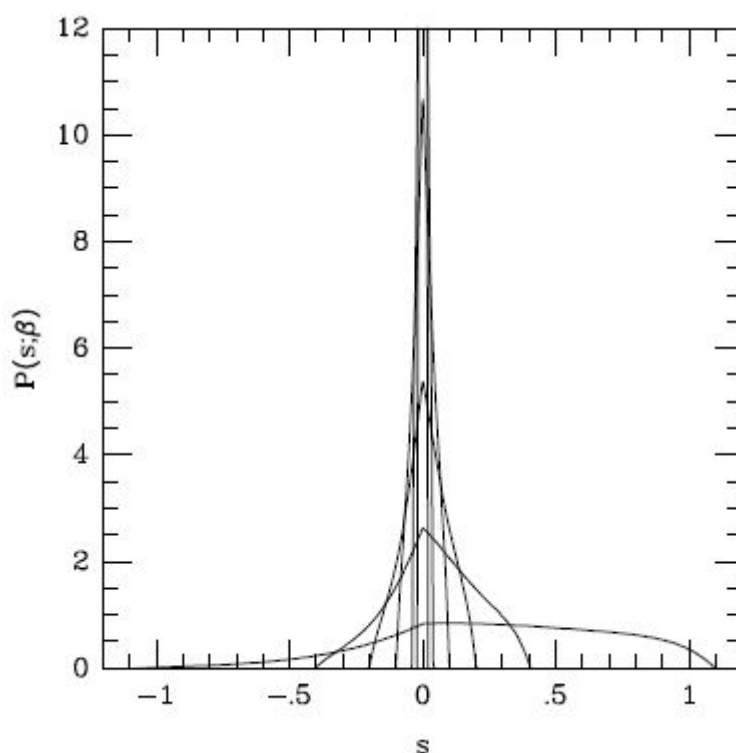


Figura 3.3: La figura riporta per diversi valori di  $\beta$  la probabilità che una fotone venga scatterato con shift logaritmico  $s$  da un elettrone che si muove a velocità  $\beta$

### 3.2 Scattering dei fotoni da una popolazione di elettroni

Nella sezione precedente si è descritta la distribuzione di probabilità quando un fotone viene urtato da un elettrone. Ora si generalizza ad una popolazione



di elettroni: per farlo basta mediare  $P(s; \beta)$  su tutti i possibili  $\beta$ . Si consideri il caso in cui il fotone venga urtato una sola volta allora la sua probabilità  $P_1(s)$ <sup>1</sup> è

$$P_1(s) = \int_{\beta_{lim}}^1 p_e(\beta) d\beta P(s; \beta) \quad (3.12)$$

dove  $p_e(\beta)$  descrive la probabilità che un elettrone abbia velocità  $\beta$  e  $\beta_{lim}$  è il valore minimo di  $\beta$  che può causare uno shift  $s$  ed esso vale:

$$\beta_{lim} = \frac{e^{|s|} - 1}{e^{|s|} + 1}. \quad (3.13)$$

Bisogna ricordarsi delle limitazioni dovute alle assunzioni precedenti, cioè scattering elastico con sezione d'urto Thomson che prevedono elettroni non relativistici o quasi. Nel caso del cluster di galassie queste assunzioni sono verificate.

Supponendo che l'elettrone segua la distribuzione di Maxwell relativistica allora la 3.12 risulta come nella figura 3.4.

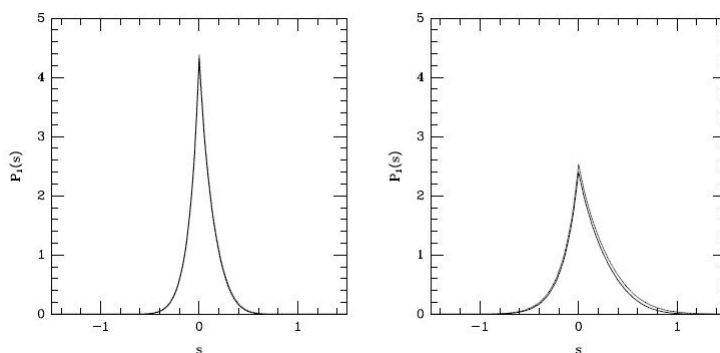


Figura 3.4: La figura mostra la probabilità che un fotone abbia uno shift logaritmico  $s$  se urtato una sola volta. I seguenti plot mostrano come cambia il grafico al variare della temperatura degli elettroni: in entrambi i casi la coda con  $s \geq 0$  è più intensa di quella con  $s \leq 0$ .

dove si nota chiaramente che la coda con  $s \geq 0$  è più grande rispetto all'altra: questo significa che i fotoni tendono ad aumentare la loro energia. Con l'aumentare della temperatura degli elettroni il fenomeno appena descritto è più intenso.

La distribuzione degli elettroni può essere descritta anche con la legge di

<sup>1</sup>Il pedice 1 indica che il fotone è stato scatterato una sola volta.

potenza in un determinato range di Lorentz, da  $\gamma_1$  a  $\gamma_2$

$$p_e(\gamma) d\gamma = \begin{cases} A\gamma^{-\alpha} d\gamma & \gamma_1 \leq \gamma \leq \gamma_2 \\ 0 & \text{altrimenti} \end{cases} \quad (3.14)$$

con la costante di normalizzazione:

$$A = \begin{cases} \log \gamma_2 - \log \gamma_1 & \alpha = 1 \\ (1 - \alpha) (\gamma_2^{1-\alpha} - \gamma_1^{1-\alpha})^{-1} & \alpha \neq 1 \end{cases}. \quad (3.15)$$

Con questa scelta la 3.12 è rappresentata nella figura 3.5.

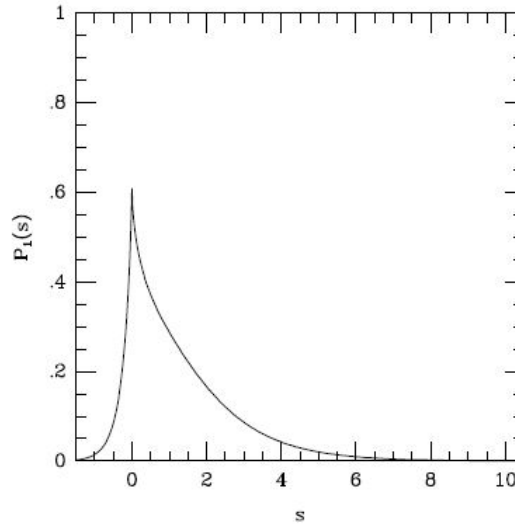


Figura 3.5: In questa figura viene descritta la probabilità che un fotone abbia uno shift logaritmico  $s$  considerando che la distribuzione di probabilità degli elettroni segue la legge di potenza. Con questa ipotesi la coda con  $s \geq 0$  è molto più intensa rispetto all'altra. Procedendo al confronto con la figura 3.4 si nota la notevole differenza tra le code.

### 3.3 Effetto sullo spettro di radiazione

Dai risultati precedenti è possibile ricavare come viene alterato lo spettro del CMB. Prima di attraversare il cluster si ha:

$$I_0(\nu) = \frac{2h}{c^2} \frac{\nu^3}{e^{\frac{h\nu}{k_B T_{rad}}} - 1}. \quad (3.16)$$

Se ogni fotone viene scatterato solamente una volta mentre attraversa il cluster allora lo spettro risultante è:

$$\frac{I(\nu)}{\nu} = \int_0^\infty d\nu_0 P_1(\nu; \nu_0) \frac{I_0(\nu_0)}{\nu_0} \quad (3.17)$$

dove  $P_1(\nu; \nu_0) = P_1(s)/\nu$  è la probabilità che si verifichi uno scattering che porta il fotone dalla frequenza  $\nu_0$  a  $\nu$  e  $I(\nu)/h\nu$  è lo spettro espresso in termini numerici. Riscrivendo la 3.17 in funzione dello shift logaritmico si ottiene

$$I(\nu) = \int_{-\infty}^\infty P_1(s) I_0(\nu_0) ds \quad (3.18)$$

allora la variazione  $\Delta I$  è

$$\begin{aligned} \Delta I(\nu) &= I(\nu) - I_0(\nu) \\ &= \frac{2h}{c^2} \int_{-\infty}^\infty P_1(s) ds \left( \frac{\nu_0^3}{e^{h\nu_0/k_B T_{rad}} - 1} - \frac{\nu^3}{e^{h\nu/k_B T_{rad}} - 1} \right). \end{aligned} \quad (3.19)$$

Nella figura 3.6a viene mostrato, a due diversi valori della temperatura elettronica, il risultato della formula precedente considerando la distribuzione di probabilità degli elettroni una maxwelliana. Nella 3.6b viene invece mostrato il risultato della 3.19 usando la 3.14.

In generale un fotone può essere scatterato più di una volta. Se la lunghezza di cammino attraverso una nube di elettroni è  $\tau_e$ , allora la probabilità che il fotone non urti nessun elettrone è  $e^{-\tau_e}$ , che ne urti solo uno  $\tau_e e^{-\tau_e}$  e in generale la probabilità che il fotone urti  $N$  elettroni è:

$$p_N = \frac{\tau_e^N e^{-\tau_e}}{N!} \quad (3.20)$$

e la funzione di probabilità diventa:

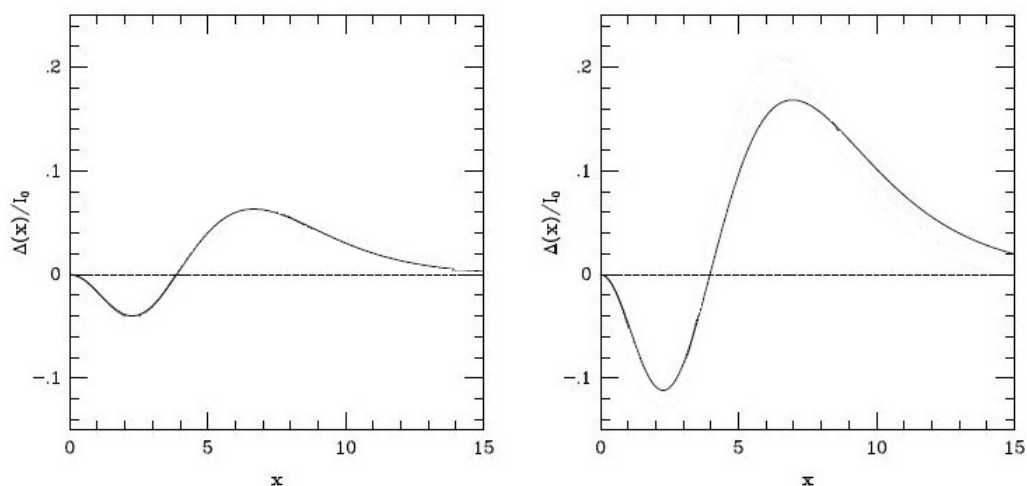
$$P(s) = e^{-\tau_e} \left( \delta(s) + \tau_e P_1(s) + \frac{1}{2!} \tau_e^2 P_2(s) + \dots \right) \quad (3.21)$$

dove

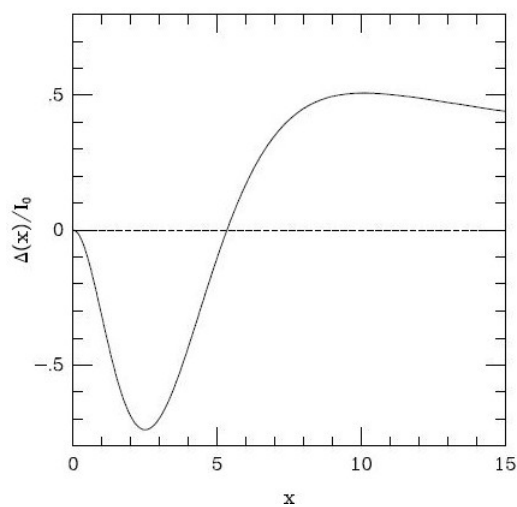
$$\begin{aligned} P_2(s) &= \int dt_1 P_1(t_1) P_1(s - t_1) \\ P_3(s) &= \int dt_1 dt_2 P_1(t_1) P_1(t_2) P_1(s - t_1 - t_2) \\ &\vdots \end{aligned} \quad (3.22)$$

L'espressione di  $P(s)$  può essere riscritta usando la trasformata di Fourier

$$P(s) = \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \int_{-\infty}^\infty \tilde{P}(k) e^{iks} ds \quad (3.23)$$



(a) Questi grafici sono stati ottenuti usando la maxwelliana per la distribuzione di probabilità degli elettroni. A sinistra gli elettroni si trovano a una temperatura pari a  $T_e = 5.1 \text{keV}/k_B$  mentre a destra  $T_e = 15.3 \text{keV}/k_B$ .



(b) La  $p_e$  utilizzata è quella che segue la legge di potenza.

Figura 3.6

con

$$\tilde{P}(k) = e^{-\tau_e(\tilde{P}_1(k)-1)} \quad , \quad \tilde{P}_1(k) = \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \int_{-\infty}^{\infty} P_1(s) e^{iks} ds. \quad (3.24)$$

La 3.18 si generalizza a

$$I(\nu) = \int_{-\infty}^{\infty} P(s) I_0(\nu_0) ds. \quad (3.25)$$

Questo formalismo non è molto interessante in quanto complica di molto i calcoli senza aggiungere molte informazioni rispetto all'approssimazione fatta all'inizio di questo paragrafo.

### 3.4 Effetto termico

L'effetto Sunyaev-Zel'dovich è costituito da tre contributi: quello termico, quello cinetico e dai fenomeni di polarizzazione. Il primo è quello più importante mentre gli altri due sono delle piccole correzioni. Nella sezione precedente si era arrivati alla formula che descriveva la variazione dello spettro considerando però che un fotone veniva urtato da un solo elettrone mentre ora si generalizza la trattazione attraverso la famosa equazione di diffusione di Kompaneets

$$\frac{\partial n}{\partial t} = \frac{k_B T_{rad}}{m_e c^2} \frac{\sigma_T n_e}{x^2} \frac{\partial}{\partial x} \left( x^4 \left( \frac{T_e}{T_{rad}} \frac{\partial n}{\partial x} + n + n^2 \right) \right), \quad (3.26)$$

che descrive la distribuzione di fotoni  $n(x, t)$  dovuta allo scattering Compton inverso multiplo da parte di elettroni non relativistici. La variabile  $x$  è detta frequenza adimensionale ed è definita come  $x = h\nu/k_B T_{rad}$ .

Il rapporto  $T_e/T_{rad} \gg 1$  semplifica l'equazione andando ad eliminare i termini  $n$  e  $n^2$  risultando così:

$$\frac{\partial n}{\partial t} = \frac{k_B T_{rad}}{m_e c^2} \frac{\sigma_T n_e}{x^2} \frac{\partial}{\partial x} \left( x^4 \frac{T_e}{T_{rad}} \frac{\partial n}{\partial x} \right). \quad (3.27)$$

Siccome il CMB segue quasi perfettamente la distribuzione Planckiana possiamo inserire la seguente formula

$$n(x) = \frac{1}{e^x - 1} \quad (3.28)$$

nella 3.27. Si ottiene:

$$\begin{aligned}
 \frac{\partial n}{\partial x} &= -\frac{e^x}{(e^x - 1)^2} \\
 \frac{\partial^2 n}{\partial x^2} &= -\frac{e^x}{(e^x - 1)^2} + 2\frac{e^{2x}}{(e^x - 1)^3} \\
 \frac{\partial}{\partial x} \left( x^4 \frac{\partial n}{\partial x} \right) &= 4x^3 \frac{\partial n}{\partial x} + x^4 \frac{\partial^2 n}{\partial x^2} \\
 &= -4x^3 \frac{e^x}{(e^x - 1)^2} + x^4 \left( -\frac{e^x}{(e^x - 1)^2} + 2\frac{e^{2x}}{(e^x - 1)^3} \right) \\
 &= \frac{x^3 e^x}{(e^x - 1)^2} \left[ -4 - x + \frac{2xe^x}{e^x - 1} \right] \\
 &= \frac{x^3 e^x}{(e^x - 1)^2} \left[ x \frac{e^x + 1}{e^x - 1} - 4 \right]
 \end{aligned}$$

La formula 3.27 diviene

$$\frac{\partial n}{\partial t} = \frac{k_B T_e}{m_e c} \frac{\sigma_T n_e}{x^3} g(x), \quad (3.29)$$

dove

$$g(x) = \frac{x^4 e^x}{(e^x - 1)^2} \left[ x \frac{e^x + 1}{e^x - 1} - 4 \right]. \quad (3.30)$$

Quando si osserva l'effetto SZ si individua una direzione detta linea di vista. Essa individua la profondità della galassia,  $L$ , che il fotone deve attraversare. Più essa è lunga più aumenta la probabilità che faccia più urti. Al primo membro della 3.29 la distribuzione  $n$  è derivata rispetto al tempo di attraversamento. Ne deriva quindi che  $dt = dl/c$  dove  $dl$  indica la linea di vista. Integrando la 3.29 si ha:

$$\Delta n = \int \frac{k_B T_e}{m_e c} \frac{\sigma_T n_e}{x^3} g(x) \frac{dl}{c}. \quad (3.31)$$

Quanto appena trovato può essere espresso in altri termini introducendo il parametro di comptonizzazione  $y$ :

$$y = \int \frac{k_B T_e}{m_e c^2} n_e \sigma_T dl = \int \frac{k_B T_e}{m_e c^2} d\tau_e = \int \frac{P_e \sigma_T}{m_e c^2} dl. \quad (3.32)$$

Esso è composto da due contributi: la profondità ottica  $d\tau_e = n_e \sigma_T dl$ , che corrisponde alla lunghezza di cammino attraverso la nube di elettroni, e il termine  $k_B T_e / m_e c^2$  che corrisponde al guadagno di energia in seguito ad ogni singolo urto.

Da questa definizione è possibile descrivere la variazione del numero di fotoni devianti

$$\Delta n = y x^{-3} g(x) \quad (3.33)$$

e lo spettro di Planck

$$I = I_0 x^3 n, \quad (3.34)$$

dove

$$I_0 = \frac{2 (k_B T_{rad})^3}{(hc)^2}. \quad (3.35)$$

Ne segue facilmente che la variazione di intensità dello spettro dovuta all'effetto Sunyaev-Zel'dovich è

$$\frac{\Delta I}{I_0} = x^3 \Delta n = yg(x). \quad (3.36)$$





## Capitolo 4

# Applicazioni dell'effetto

Nel capitolo precedente è stata fatta una trattazione esauriente della teoria dell'effetto, senza spiegare però i motivi per cui sia così interessante, cosa che verrà fatta in questo capitolo. Verranno analizzate alcune delle tante applicazioni come la determinazione della costante di Hubble e la catalogazione dei cluster: la prima si basa sulla determinazione della distanza angolare di un cluster rispetto a noi mentre l'altra, sviluppando la teoria, permette di trovare un metodo per individuare i cluster senza la distorsione dovuta al redshift<sup>1</sup>. L'effetto SZ inoltre contribuisce alla determinazione di altri parametri cosmologici che non verranno trattati in questo testo ma che Altre grandezze, che non saranno trattate in questo testo, possono essere misurate tramite l'effetto SZ. Una loro descrizione è possibile trovarla nell'articolo di J.E. Carlstrom, G.P. Holder e E.D. Reese[6].

### 4.1 La costante di Hubble

La costante di Hubble è uno dei parametri più importanti della cosmologia in quanto mostra il tasso di espansione dell'Universo. Esiste una formula che lega la costante di Hubble alla distanza angolare(per avere una comprensione chiara di quest'ultima si veda la figura 4.1).

Come si è visto nella sezione 3.4 l'effetto SZ dipende dalla quantità di ICM<sup>2</sup> attraversato lungo una direzione di vista fissata, contenendo di conseguenza dell'informazione sulla profondità  $L$  dell'ammasso. Nell'ipotesi in cui il cluster abbia una forma sferica,  $R_c = L$ , allora la distanza angolare è determinata e quindi anche la costante di Hubble.

Innanzitutto si riscriva la formula della variazione di intensità con una nuova notazione:

$$\Delta I = I_0 \int n_e \sigma_T \psi dl \quad (4.1)$$

---

<sup>1</sup>L'effetto Sunyaev-Zel'dovich è redshift indipendente.

<sup>2</sup>Intra Cluster Medium

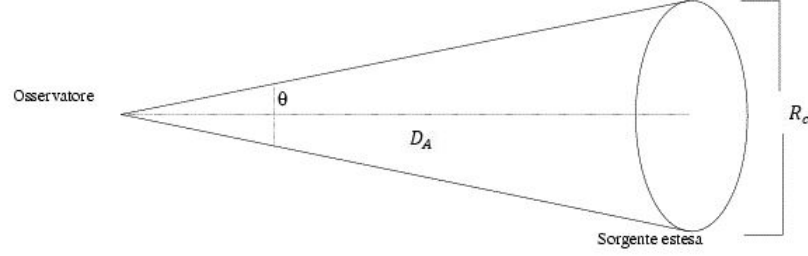


Figura 4.1: La distanza angolare è la distanza tra l'osservatore e la sorgente estesa, che nel caso specifico è un cluster di galassie. Sia  $R_c$  l'estensione del cluster sul piano perpendicolare alla linea di vista e sia  $\theta$  l'apertura angolare. Con semplici considerazioni trigonometriche si ottiene  $\theta \sim R_c/D_A$  per piccoli valori dell'angolo.

dove

$$\psi = \int_{-\infty}^{\infty} P_1(s) \left( \frac{\nu^3}{e^{h\nu/k_B T_{rad}} - 1} - \frac{\nu'^3}{e^{h\nu'/k_B T_{rad}} - 1} \right) ds. \quad (4.2)$$

La densità elettronica è un parametro incognito, cosa che causa problemi. Per eliminarlo si può combinare l'effetto Sunyaev-Zel'dovich con la brillantezza superficiale spettrale in banda X

$$b_X = \frac{1}{4\pi(1+z)^3} \int n_e^2 \Lambda_e dl \quad (4.3)$$

dove  $\Lambda_e$  è l'emissività spettrale del gas. Per semplificare il formalismo si possono scrivere le grandezze come prodotto tra il valore centrale e un opportuno fattore di forma, che nell'ipotesi più semplicistica si descrive con la distribuzione  $\beta$ -isoterma:

$$n_e = n_{e0} f_n(\theta, \phi, \zeta), \quad (4.4)$$

$$T_e = T_{e0} f_T(\theta, \phi, \zeta), \quad (4.5)$$

$$\psi = \psi_0 f_\psi(\theta, \phi, \zeta), \quad (4.6)$$

$$\Lambda_e = \Lambda_{e0} f_\Lambda(\theta, \phi, \zeta) \quad (4.7)$$

dove è stata introdotta la coordinata  $\zeta$  che è definita come il rapporto tra  $l$  e  $D_A$ . Sostituendo i termini a 4.1 e 4.3 si ottiene:

$$b_X(\theta, \phi) = \frac{\Lambda_{e0} n_{e0}^2 D_A}{4\pi(1+z)^3} \Theta^{(1)}(\theta, \phi) = N_X \Theta^{(1)}(\theta, \phi), \quad (4.8)$$

$$\Delta I(\theta, \phi) = \psi_0 I_0 n_{e0} \sigma_T D_A \Theta^{(2)}(\theta, \phi) = N_{SZ} \Theta^{(2)}(\theta, \phi) \quad (4.9)$$

dove  $\Theta^{(1)}$  e  $\Theta^{(2)}$  contengono tutta l'informazione sull'ammasso:

$$\Theta^{(1)}(\theta, \phi) = \int f_n^2 f_\Lambda d\zeta \quad (4.10)$$

$$\Theta^{(2)}(\theta, \phi) = \int f_n f_\psi d\zeta. \quad (4.11)$$

Dal rapporto tra il quadrato della 4.9 e la 4.8 è possibile ricavare la distanza angolare (essa è venuta fuori facendo il cambio di variabili nell'integrale)

$$D_A = \frac{N_{SZ}^2}{N_X} \frac{\Lambda_{e0}}{4\pi(1+z)^3 (\psi_0 I_0 \sigma_T)^2}. \quad (4.12)$$

Confrontandola con la seguente formula

$$D_A = \frac{c}{H_0 q_0^2} \frac{q_0 z + (q_0 - 1)(\sqrt{1 + 2q_0 z} - 1)}{(1+z)^2} \quad (4.13)$$

è possibile calcolare il valore della costante di Hubble. Nella 4.13 compare un nuovo parametro  $q_0$  detto parametro di decelerazione e definito nella seguente maniera:

$$q_0 = -\frac{\ddot{a}_0 a_0}{\dot{a}_0^2} \quad (4.14)$$

dove  $a_0 = a(t_0)$  dove  $t_0$  è il tempo attuale. È possibile ottenere  $q_0$  sviluppando in serie di Taylor il fattore di scala al tempo  $t_0$ :

$$a(t) = a_0 + \dot{a}_0(t - t_0) + \frac{1}{2}\ddot{a}_0(t - t_0)^2 + \dots \quad (4.15)$$

$$\frac{a(t)}{a_0} = 1 + H_0(t - t_0) - \frac{q_0}{2}H_0^2(t - t_0)^2 + \dots \quad (4.16)$$

Quindi misurando i vari parametri è possibile ottenere un valore della costante di Hubble. Questo si aggira attorno a

$$H_0 = 60 \pm 3 \frac{km}{Mpc s}. \quad (4.17)$$

per  $\Omega_M = 0.3$  e  $\Omega_\Lambda = 0.7$ . Questa misura è stata presa dal J.E. Carlstrom, G.P. Holder e E.D. Reese [6].

## 4.2 Catalogazione dei cluster

Nel primo capitolo è stato data una rassegna di quello che si può osservare nello spettro elettromagnetico a seconda delle varie regioni. I gas del cluster emette nella regione dell'X dando la possibilità di scoprire, osservare e studiare un cluster. Questo metodo ha il problema di dipendere dal redshift rendendo quindi il segnale distorto. Esiste un modo più conveniente per rivelare i

cluster. Esso si basa sull'effetto Sunyaev-Zel'dovich il quale ha il vantaggio di essere redshift indipendente. Infatti riprendendo le considerazioni fatte nella sezione 3.4 la variazione di intensità è descritta dalla formula

$$\frac{\Delta I}{I_0} = x^3 \Delta n(x) \quad (4.18)$$

dove si osserva che dipende dalla variabile  $x = h\nu/k_B T_{rad}$ . Come è già noto sia  $\nu$  che  $T_{rad}$  dipendono dal fattore di scala nella seguente maniera:

$$\nu = \frac{\nu_0}{a}, \quad T_{rad} = \frac{T_{rad0}}{a} \quad (4.19)$$

come si può vedere nelle sezioni 1.5 e 1.6. Sostituendo questa formula nella definizione di  $x$  si osserva che il fattore di scala sparisce e così facendo non dipende più dal redshift<sup>3</sup>. Per capire meglio l'importanza dell'effetto SZ in questa applicazione bisogna capire come varia la temperatura. Applicando quindi la seguente relazione

$$\Delta I = \left| \frac{dI}{dT} \right| \Delta T \quad (4.20)$$

e calcolando  $dI/dT$  si ottiene il risultato

$$\frac{\Delta T}{T} = y f(x) \quad (4.21)$$

dove

$$f(x) = x \frac{e^x + 1}{e^x - 1} - 4. \quad (4.22)$$

Dalla 4.21 è possibile quindi scoprire i cluster. Basta quindi puntare in una determinata direzione dell'universo e non appena si osserva una variazione della temperatura che segue la 4.21 si conclude che c'è un cluster. In questa maniera si può fornire una mappa: uno dei risultati recenti ottenuti dal Planck è mostrato in figura 4.2.

---

<sup>3</sup>Per capire meglio quanto detto si guardi il paragrafo 1.5.1.

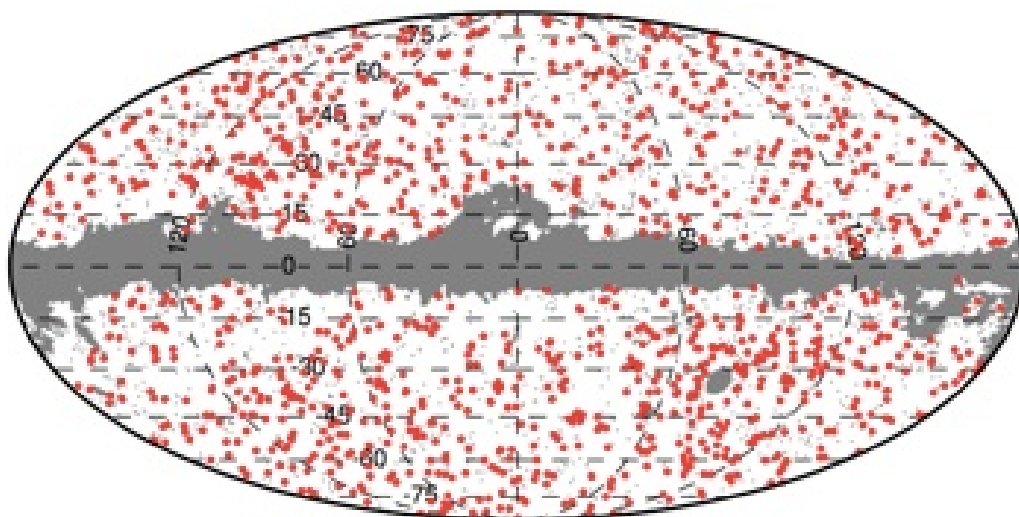


Figura 4.2: Questa figura mostra i cluster rivelati dal satellite Planck nel 2013.



# Bibliografia

- [1] A. Liddle, *An Introduction to Modern Cosmology*, Wiley, 2015
- [2] F. Lucchin, *Introduzione alla cosmologia*, Zanichelli, 1994
- [3] A.F. Borghesani, *Introduzione alla struttura della materia*, Edizioni Libreria Progetto Padova, 2007
- [4] G.B. Rybicki, A.P. Lightman, *Radiative processes in astrophysics*, Wiley-VCH, 2004
- [5] M. Birkinshaw, *The Sunyaev-Zel'dovich effect*, Physics Reports, 1998
- [6] J.E. Carlstrom, G.P. Holder, E.D. Reese, *Cosmology with Sunyaev-Zel'dovich Effect*, Annu. Rev. Astronomy and Astrophysics, 2002

