

UNIVERSITÀ DEGLI STUDI DI PADOVA

Dipartimento di Fisica e Astronomia “Galileo Galilei”

Corso di Laurea in Fisica

Tesi di Laurea

Quantizzazione semiclassica del problema di Keplero

Relatore

Prof./Dr. Luca Salasnich

Laureando

Filippo Cucchetto

Anno Accademico 2021/2022

Indice

Introduzione	4
1 Old quantum theory	5
1.1 Definizioni preliminari	5
1.2 Atomo di Bohr	6
1.3 Trattazione Wilson e Sommerfeld	7
1.4 Metodo WKB	8
2 Trattazione Fisico-Matematica	9
2.1 Lagrangiana	9
2.2 Hamiltoniana	10
2.2.1 Integrali primi	11
2.2.2 Riduzione del sistema	11
2.3 Calcolo delle azioni	12
2.3.1 Calcolo I_r	12
2.3.2 Calcolo I_ϕ	14
2.3.3 Calcolo I_θ	15
2.4 Variabili azione-angolo	16
3 Quantizzazione delle azioni	17
4 Conclusioni	18
Bibliografia	18

Introduzione

Il presente elaborato tratta la quantizzazione semiclassica del problema di Keplero considerando un modello planetario dell' atomo di Idrogeno. Nel primo capitolo, dopo aver richiamato alcune definizioni utili, verranno illustrati alcuni risultati storici dell' "Old Quantum Theory", in particolare la regola di quantizzazione delle azioni proposta da Wilson e Sommerfeld, la quale verrà poi giustificata in un'ottica quantomeccanica tramite il metodo WKB. Nel secondo capitolo verrà analizzato il problema di Keplero 3D, considerando orbite di tipo ellittico, si eseguirà il calcolo delle azioni per poter scrivere l'Hamiltoniana del sistema in variabili azione-angolo. Infine, verranno applicate le regole proposte da Willson e Sommerfeld mostrando come le energie trovate coincidano con quanto trovato da Bohr nel suo modello planetario

Capitolo 1

Old quantum theory

1.1 Definizioni preliminari

Di seguito si riportano una serie di definizioni che verranno usate successivamente [4]

Coordinate lagrangiane e velocità generalizzate. Per un sistema ad n gradi di libertà, si indicherà con q il vettore delle coordinate lagrangiane definite su un aperto $A \in \mathbb{R}^n$. Mentre con \dot{q} si denota il vettore delle velocità generalizzate associate ad esse, le cui componenti sono $\dot{q}_i = \frac{dq_i}{dt}$, con $i = 1, \dots, n$

Lagrangiana. Dato un aperto $\Omega \in \mathbb{R}^n$ (dove con n si indicano i gradi di libertà del sistema), la Lagrangiana è una funzione definita come $\mathcal{L}: \Omega \times T\Omega \rightarrow \mathbb{R}$, dove $T\Omega$ è il fibrato tangente di Ω . La Lagrangiana del sistema generalmente si scrive come $L(q, \dot{q}) = T(q, \dot{q}) - V(q)$, dove $T(q, \dot{q}) = \frac{m}{2} |\dot{q}|^2$ è l'energia cinetica del sistema e $V(q)$ il potenziale che agisce sul sistema.

Momenti coniugati. Per un sistema ad n gradi di libertà con Lagrangiana \mathcal{L} , si definiscono i momenti coniugati del sistema come: $p_i = \frac{\partial L}{\partial \dot{q}_i}$ con $i = 1, \dots, n$, denoteremo con p il vettore dei momenti coniugati

Hamiltoniana. Dato un sistema ad n gradi di libertà, sia $D \in \mathbb{R}^{2n}$ un aperto, detto spazio delle fasi, su cui vi è definito un sistema di coordinate (q, p) , dette variabili canoniche. Si definisce Hamiltoniana del sistema la funzione $\mathcal{H}: D \rightarrow \mathbb{R}$.

L'Hamiltoniana del sistema generalmente si scrive come $H(q, p) = T(q, p) + V(q)$

1.2 Atomo di Bohr

Per prima cosa si va ad analizzare la trattazione dell'atomo di Idrogeno proposta da Bohr [3], dove si assume un modello planetario, in cui l'elettrone e^- compie orbite circolari attorno al protone p posto nell'origine. Essendo le due particelle cariche, tra di loro agisce la forza di Coulomb

$$F = \frac{e^2}{4\pi\epsilon_0 r^2} \quad (1.1)$$

dove r indica la distanza tra e^- e p , l'energia del sistema risulta

$$E = \frac{m_e v_e^2}{2} - \frac{e^2}{4\pi\epsilon_0 r} \quad (1.2)$$

dove v_e è la velocità dell'elettrone, applicando il secondo principio della dinamica in (1.1) e ricordando che il moto è circolare uniforme, è possibile riscrivere l'energia cinetica dell'elettrone nel seguente modo

$$\frac{m_e v_e^2}{2} = \frac{e^2}{8\pi\epsilon_0 r} \quad (1.3)$$

tramite (1.3) si riscrive (1.2)

$$E = -\frac{e^2}{2(4\pi\epsilon_0 r)} \quad (1.4)$$

dove il segno meno è una conseguenza del fatto che si stanno trattando stati legati. Bohr notò che oltre all'energia del sistema, anche il modulo del momento angolare \vec{L}

$$|\vec{L}| = r m_e v_e \quad (1.5)$$

veniva conservato. Inoltre poiché le dimensioni di \hbar sono le stesse di L , ebbe l'idea di quantizzare il momento angolare, ossia esso doveva essere un multiplo intero positivo della costante di Planck ridotta.

$$|\vec{L}| = n\hbar \quad (1.6)$$

Dalla quantizzazione del momento angolare (1.6) e tramite le relazioni (1.3) e (1.5) seguono due ulteriori vincoli relativi ai possibili valori di v_e e di r

$$v_e = \frac{e^2}{2\epsilon_0 \hbar n} \quad (1.7)$$

$$r = \frac{\epsilon_0 \hbar^2 n^2}{\pi m_e e^2} \quad (1.8)$$

tramite (1.8), è possibile riscrivere l'energia del sistema (1.4) nel seguente modo

$$E = \frac{-E_B}{n^2} \quad (1.9)$$

dove

$$E_B = \frac{m_e e^4}{8\epsilon_0^2 \hbar^2} \quad (1.10)$$

viene detta energia di Bohr

1.3 Trattazione Wilson e Sommerfeld

Nel 1915-1916 Wilson e Sommerfeld estesero la quantizzazione del momento angolare ad proposta da Bohr, una qualsiasi grandezza data da un prodotto di un'energia per un tempo [5], basarono la loro teoria sulle seguenti ipotesi

Ipotesi Wilson-Sommerfeld . 1. *Scambi energetici tra sistemi dinamici sono "catastrofici" o discontinui. Questi scambi avvengono in un lasso di tempo breve al di là di questo piccolo intervallo ciascun sistema si comporta in modo conservativo.*

2. *Il moto del sistema tra gli intervalli di tempo in cui viene scambiata energia, viene trattato con la meccanica Hamiltoniana, inoltre si assume che in questi intervalli il sistema si trovi in uno stato stazionario.*

3. *Gli scambi energetici avvengono in un modo tale per cui lo stato stazionario soddisfa sempre la seguente relazione*

$$I_i = \frac{1}{2\pi} \oint p_i dq_i = n_i \hbar \quad (1.11)$$

per $n_i \geq 0$, $i = 1, \dots, n$ dove q_i sono le coordinate lagrangiane e p_i i momenti coniugati associati.

A questo punto Wilson e Sommerfeld applicarono queste regole al modello planetario. Imponendo la quantizzazione della componente L_z del momento angolare, trattarono il caso più generale in cui l'elettrone traccia orbite ellittiche

1.4 Metodo WKB

Il metodo WKB fu sviluppato nel 1926 da Gregor Wentzel, Hendrik Anthony Kramers e Leon Brillouin. Ci si occuperà del caso più semplice ovvero quello 1D, per poi assumere la validità del risultato nei casi più generali. Si consideri la funzione d'onda $\psi(x)$, la quale può essere formalmente scritta nel seguente modo [3]

$$\psi(x) = e^{\frac{i\sigma(x)}{\hbar}} \quad (1.12)$$

dove $\sigma(x)$ è una fase complessa. Partendo dall'equazione di Schroedinger stazionaria

$$\frac{-\hbar^2}{2m} \frac{\partial^2 \psi(x)}{\partial x^2} + V(x)\psi(x) = E\psi(x) \quad (1.13)$$

e inserendo (1.12) in (1.13) si ottiene

$$(\sigma'(x))^2 + \frac{\hbar}{i} \sigma''(x) = (2m(E - V(x))) \quad (1.14)$$

dove $\sigma'(x) = \frac{d\sigma}{dx}$ e $\sigma''(x) = \frac{d^2\sigma}{dx^2}$, l'espansione WKB per la $\sigma(x)$ risulta

$$\sigma(x) = \sum_{k=0}^{+\infty} \left(\frac{\hbar}{i}\right)^k \sigma_k(x) \quad (1.15)$$

sostituendo in (1.14) e comparando le potenze di \hbar , si conclude che

$$\sigma'_0 = \sqrt{2m(E - V(x))} \quad (1.16)$$

e

$$\sigma''_{n-1} + \sum_{k=0}^n \sigma'_k \sigma'_{n-k} = 0 \quad (1.17)$$

con $n > 0$. Ora poichè si vuole che la $\sigma(x)$ rappresenti una fase angolare, l'integrale su un circuito chiuso deve dare un multiplo intero di $2\pi\hbar$, ne segue

$$\oint d\sigma = \sum_{k=0}^{+\infty} \oint \left(\frac{\hbar}{i}\right)^k d\sigma_k = 2\pi n\hbar \quad (1.18)$$

per $k=0$, usando (1.16) si ha

$$\oint \sqrt{2m(E - V(x))} dx = 2\pi n\hbar \quad (1.19)$$

ricordando che per un sistema 1D

$$p = \sqrt{2m(E - V(x))} \quad (1.20)$$

si ottiene la relazione (1.11).

Il metodo WKB quindi giustifica da un punto di vista formale, consistente con la meccanica quantistica odierna, la quantizzazione delle azioni proposta da Wilson e Sommerfeld

Capitolo 2

Trattazione Fisico-Matematica

2.1 Lagrangiana

Si vuole trattare il problema di Keplero, che consiste nel moto di un punto materiale di massa m soggetto ad un potenziale di tipo centrale. In coordinate cartesiane il potenziale si scrive come:

$$V(x, y, z) = -\frac{\alpha}{\sqrt{x^2 + y^2 + z^2}} \quad (2.1)$$

In questo caso il potenziale è di tipo Coulombiano per tanto la costante α vale :

$$\alpha = \frac{e^2}{4\pi\epsilon_0} \quad (2.2)$$

dove e è la carica dell'elettrone e ϵ_0 è la costante dielettrica nel vuoto.

In un sistema di riferimento in cui il protone è posto nell'origine la Lagrangiana in coordinate cartesiane risulta

$$\mathcal{L} = \frac{m}{2}(\dot{x}^2 + \dot{y}^2 + \dot{z}^2) + \frac{\alpha}{\sqrt{x^2 + y^2 + z^2}} \quad (2.3)$$

dove m è la massa ridotta del sistema. La forma del potenziale è piuttosto complicata, ma è possibile semplificare l'espressione introducendo un cambio di coordinate da cartesiane a polari sferiche

$$\begin{cases} x = r \sin \phi \cos \theta \\ y = r \sin \phi \sin \theta \\ z = r \cos \phi \end{cases} \quad (2.4)$$

dove $r \in [0, \infty)$ indica la distanza del punto materiale dall'origine, $\theta \in [0, 2\pi)$ è l'angolo sul piano x-y e $\phi \in [0, \pi]$ è la colatitudine.

Derivando rispetto al tempo segue

$$\begin{cases} \dot{x} = \dot{r} \sin \phi \cos \theta + r \dot{\phi} \cos \phi \cos \theta - r \dot{\theta} \sin \phi \sin \theta \\ \dot{y} = \dot{r} \sin \phi \sin \theta + r \dot{\phi} \cos \phi \sin \theta + r \dot{\theta} \sin \phi \cos \theta \\ \dot{z} = \dot{r} \cos \phi - r \dot{\phi} \sin \phi \end{cases} \quad (2.5)$$

nelle nuove coordinate la Lagrangiana scritta in (2.3) diventa

$$\mathcal{L} = \frac{m}{2}(\dot{r}^2 + r^2 \dot{\theta}^2 \sin^2 \phi + r^2 \dot{\phi}^2) + \frac{\alpha}{r} \quad (2.6)$$

si noti che il potenziale dipende solo da r , essendo di tipo centrale

2.2 Hamiltoniana

Si passa ora al calcolo dell'Hamiltoniana del sistema. Inanzitutto è necessario ricavare le espressioni per i momenti coniugati

$$\begin{cases} p_r = \frac{\partial \mathcal{L}}{\partial \dot{r}} = m\dot{r} \\ p_\theta = \frac{\partial \mathcal{L}}{\partial \dot{\theta}} = mr^2\dot{\theta} \sin^2 \phi \\ p_\phi = \frac{\partial \mathcal{L}}{\partial \dot{\phi}} = mr^2\dot{\phi} \end{cases} \quad (2.7)$$

invertendo poi le relazioni appena calcolate, è possibile scrivere le velocità generalizzate in funzione dei momenti coniugati

$$\begin{cases} \dot{r} = \frac{p_r}{m} \\ \dot{\theta} = \frac{p_\theta}{mr^2 \sin^2 \phi} \\ \dot{\phi} = \frac{p_\phi}{mr^2} \end{cases} \quad (2.8)$$

una volta effettuata la trasformazione di Legendre, l'Hamiltoniana del sistema risulta

$$\mathcal{H} = \frac{1}{2m}(p_r^2 + \frac{1}{r^2}(\frac{p_\theta^2}{\sin^2(\phi)} + p_\phi^2)) - \frac{\alpha}{r}. \quad (2.9)$$

è possibile scrivere l'Hamiltoniana in una forma più agevole mettendola in funzione della norma al quadrato del momento angolare $\vec{L} = m\vec{X} \times \dot{\vec{X}}$ e della sua terza componente L_z .

Le componenti del momento angolare \vec{L} sono le seguenti

$$\begin{cases} L_x = m(r^2\dot{\theta} \cos \theta \sin \phi + r^2\dot{\phi} \sin \theta) = \frac{p_\theta \cos \theta \cos \phi + p_\phi \sin \theta \sin \phi}{\sin \phi} \\ L_y = m(r^2\dot{\phi} \cos \theta - r^2\dot{\theta} \sin \theta \cos \phi \sin \phi) = \frac{p_\theta \cos \theta \sin \phi - p_\phi \sin \theta \cos \phi}{\sin \phi} \\ L_z = m(r^2\dot{\theta} \sin^2 \phi) = p_\theta \end{cases}$$

Si noti che per ricavare l'ultima uguaglianza si è usata la relazione (2.8) la norma al quadrato di \vec{L} risulta

$$|\vec{L}|^2 = L^2 = L_x^2 + L_y^2 + L_z^2 = m(\frac{p_\theta^2}{\sin^2 \phi} + p_\phi^2) \quad (2.10)$$

tramite (2.10) si può riscrivere (2.9) nella seguente forma

$$\mathcal{H} = \frac{1}{2m}(p_r^2 + \frac{L^2}{r^2}) - \frac{\alpha}{r} \quad (2.11)$$

2.2.1 Integrali primi

Si noti che $\frac{\partial L_z}{\partial q_j} = 0$ per $j = r, \theta, \phi$, $\frac{\partial L_z}{\partial p_j} = \delta_{p_j, p_\theta}$ e $\frac{\partial L^2}{\partial \theta} = 0$, inoltre l'Hamiltoniana non dipende da θ segue che $\frac{\partial \mathcal{H}}{\partial \theta} = 0$ pertanto le parentesi di Poisson risultano

$$\{L^2, \mathcal{H}\} = \sum_j \frac{\partial L^2}{\partial q_j} \frac{\partial \mathcal{H}}{\partial p_j} - \sum_j \frac{\partial L^2}{\partial p_j} \frac{\partial \mathcal{H}}{\partial q_j} = 0$$

$$\{L_z, \mathcal{H}\} = \sum_j \frac{\partial L_z}{\partial q_j} \frac{\partial \mathcal{H}}{\partial p_j} - \sum_j \frac{\partial L_z}{\partial p_j} \frac{\partial \mathcal{H}}{\partial q_j} = 0$$

segue che H, L^2, L_z sono integrali primi del sistema e in involuzione mutua tra loro. Infatti

$$\{L^2, L_z\} = \sum_{j=1}^3 \frac{\partial L^2}{\partial q_j} \frac{\partial L_z}{\partial p_j} - \sum_{j=1}^3 \frac{\partial L^2}{\partial p_j} \frac{\partial L_z}{\partial q_j} = 0$$

2.2.2 Riduzione del sistema

Fissati due valori per la coppia (L^2, L_z) , è possibile ridurre il sistema da 3D a 1D in funzione della coordinata radiale r . L'Hamiltoniana del sistema ridotto viene riportata di seguito:

$$\mathcal{H} = \frac{p_r^2}{2m} + V_{eff}(r)$$

dove si è introdotto il potenziale efficace $V_{eff}(r) = \frac{L^2}{2mr^2} - \frac{\alpha}{r}$.

Di seguito viene riportato l'andamento qualitativo del potenziale efficace e il ritratto in fase del sistema ridotto sul piano (r, p_r) :

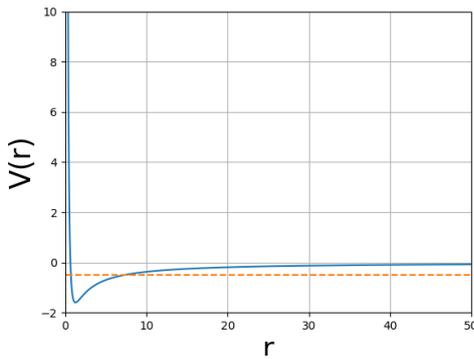


Figura 2.1: Andamento potenziale efficace

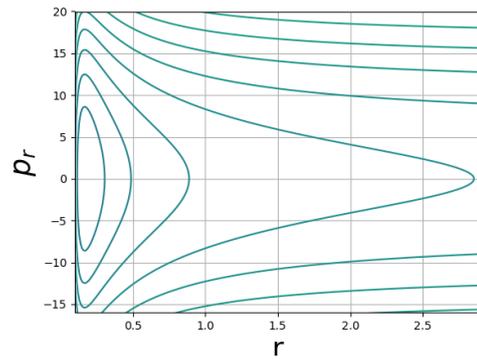


Figura 2.2: Ritratto in fase sistema ridotto

Si noti che per valori negativi dell'energia si hanno curve chiuse

2.3 Calcolo delle azioni

Come detto prima il sistema ammette 3 integrali primi indipendenti ed in involuzione mutua tra loro, i quali sono \mathcal{H}, L^2, L_z . Per valori dell'energia E negativi, la superficie di livello

$$M_f = \{(q, p) \in R^3 | \mathcal{H}(q, p) = E, L^2(q, p) = L^2, L_z(q, p) = L_z\} \quad (2.12)$$

risulta essere compatta e connessa. A questo punto è possibile applicare il teorema di Liouville-Arnold e scrivere l'Hamiltoniana in un sistema di variabili azione-angolo [4]. Inoltre la superficie di livello risulterà essere diffeomorfa a T^n . L'Hamiltoniana è separabile, perciò le azioni (I_r, I_θ, I_ϕ) si ricavano tramite le seguenti relazioni

$$\begin{cases} I_r = \frac{1}{2\pi} \oint p_r dr \\ I_\theta = \frac{1}{2\pi} \oint p_\theta d\theta \\ I_\phi = \frac{1}{2\pi} \oint p_\phi d\phi \end{cases} \quad (2.13)$$

2.3.1 Calcolo I_r

Fissati dei valori per (E, L^2, L_z) , si può scrivere p_r in funzione di r , $p_r = \pm \sqrt{(2m(-|E| + \frac{\alpha}{r}) - \frac{L^2}{r^2})}$. Gli estremi del cammino di integrazione corrispondono ai punti di inversione del moto, ovvero agli zeri di p_r

$$\begin{aligned} \frac{1}{r} \sqrt{-2m|E|r^2 + 2m\alpha r - L^2} &= 0 \\ r_{+,-} &= \frac{-2m\alpha \pm \sqrt{4m^2\alpha^2 - 8m|E|L^2}}{-4m|E|} \end{aligned}$$

denotati con r_+ e r_- .

Dato che per r che va da r_- a r_+ , $p_r \geq 0$ mentre per r che va da r_+ a r_- , $p_r \leq 0$, l'unica differenza è di un fattore di segno perciò si calcola l'integrale lungo metà cammino, il risultato verrà poi moltiplicato di un fattore due.

Segue

$$\frac{I_r}{2} = \frac{1}{2\pi} \int_{r_-}^{r_+} \sqrt{(2m(-|E| + \frac{\alpha}{r}) - \frac{L^2}{r^2})} dr = \frac{1}{2\pi} \int_{r_-}^{r_+} \frac{1}{r} \sqrt{-2m|E|(r - r_-)(r - r_+)} dr$$

sostituendo $t(r - r_+) = \sqrt{-2m|E|(r - r_+)(r - r_-)}$, $dr = \frac{4m|E|(r_+ - r_-)tdt}{(t^2 + 2m|E|)^2}$.

$r \rightarrow r_+$, $t \rightarrow \infty$

$r \rightarrow r_-$, $t \rightarrow 0$

da cui si ottiene

$$\frac{I_r}{2} = \frac{8m^2|E|^2(r_+ - r_-)^2}{2\pi} \int_0^\infty \frac{t^2}{(t^2 r_+ + 2m|E|r_-)(t^2 + 2m|E|)^2} dt = \frac{(r_+ - r_-)^2}{2mE\pi r_-} \int_0^\infty \frac{t^2}{(\frac{t^2 r_+}{2m|E|r_-} + 1)(\frac{t^2}{2m|E|} + 1)^2} dt$$

sostituendo $w = \frac{t}{\sqrt{2m|E|}}$, $dt = \sqrt{2m|E|}dw$, indicando con $k = \frac{r_+}{r_-}$ si ottiene

$$\frac{I_r}{2} = \frac{\sqrt{2m|E|}(r_+ - r_-)^2}{\pi r_-} \int_0^\infty \frac{w^2}{(kw^2 + 1)(w^2 + 1)^2} dw$$

l'integranda può essere scomposta con il metodo dei fratti semplici

$$\begin{aligned} \frac{w^2}{(kw^2+1)(w^2+1)^2} &= \frac{Aw+B}{(1+w^2)} + \frac{Cw+D}{(1+kw^2)} + \frac{Ew+F}{(1+w^2)^2} = \\ &= \frac{(Ak+C)w^5 + (Bk+D)w^4 + (A(k+1)+2C+Ek)w^3 + (Bk+2D+Fk+B)w^2 + (E+C+A)w + (D+F)}{(1+kw^2)(w^2+1)^2} \end{aligned}$$

da cui si ottiene il seguente sistema di equazioni

$$\begin{cases} Ak + C = 0 \\ Bk + D = 0 \\ A(1+k) + 2C + Ek = 0 \\ Bk + 2D + Fk + B = 1 \\ E + C + A = 0 \\ D + F + B = 0 \end{cases}$$

che ha come soluzioni

$$\begin{cases} A = 0 \\ B = \frac{1}{(k-1)^2} \\ C = 0 \\ D = \frac{-k}{(k-1)^2} \\ F = \frac{(k-1)}{(k-1)^2} \\ E = 0 \end{cases}$$

segue che

$$\frac{I_r}{2} = \frac{\sqrt{2m|E|}(r_+ - r_-)^2}{\pi r_- (k-1)^2} \int_0^\infty \frac{1}{w^2+1} - \frac{k}{kw^2+1} + \frac{(k-1)}{(w^2+1)^2} dw$$

i primi due termini dell'integranda danno come primitiva rispettivamente

$$\frac{1}{(k-1)^2} \int_0^\infty \frac{1}{w^2+1} = \frac{1}{(k-1)^2} \arctan(w) \Big|_0^\infty = \frac{\pi}{2(k-1)^2}$$

e

$$\frac{1}{(k-1)^2} \int_0^\infty -\frac{k}{kw^2+1} = \frac{\sqrt{k}}{(k-1)^2} \arctan(\sqrt{k}w) \Big|_0^\infty = \frac{-\pi\sqrt{k}}{2(k-1)^2}$$

il terzo e ultimo termine si può calcolare sostituendo $w = \tan y$, $dw = \frac{dy}{\cos^2 y}$

per $w \rightarrow \infty, y \rightarrow \frac{\pi}{2}$.

per $w \rightarrow 0, y \rightarrow 0$.

da cui segue:

$$\frac{k-1}{(k-1)^2} \int_0^\infty \frac{1}{(w^2+1)^2} dw = \frac{k-1}{(k-1)^2} \int_0^{\frac{\pi}{2}} \cos^2 y dy = \frac{(k-1)}{(k-1)^2} \frac{\pi}{4}$$

l'integrale risulta

$$\frac{I_r}{2} = \frac{\sqrt{2m|E|}(r_+ - r_-)^2}{\pi r_- (k-1)^2} \left(\frac{\pi}{2}\right) \left(1 - \sqrt{k} + \frac{(k-1)}{2}\right)$$

sostituendo $k = \frac{r_+}{r_-}$ si ottiene

$$\frac{I_r}{2} = \frac{\sqrt{2m|E|}r_-(r_+ - r_-)^2}{4(r_+ - r_-)^2}(r_+ - 2\sqrt{r_+r_-} + r_-)$$

da cui esplicitando r_+ e r_- e moltiplicando per due segue che

$$I_r = \frac{\sqrt{2mE}}{2} \left(\frac{\alpha}{|E|} - 2 \frac{\sqrt{8mL^2|E|}}{4m|E|} \right) = \frac{\sqrt{2mE}\alpha}{2|E|} - \frac{\sqrt{2m|E|}\sqrt{8mL^2|E|}}{4m|E|}$$

risulta

$$I_r = \frac{\alpha\sqrt{m}}{\sqrt{2|E|}} - L \quad (2.14)$$

2.3.2 Calcolo I_ϕ

Fissati due valori di (L_z, L^2) si calcola la circuitazione $I_{p_\phi} = \frac{1}{2\pi} \oint p_\phi d\phi$.

Analogamente a quanto fatto nella sezione precedente, è possibile calcolare l'integrale su metà cammino fissando gli estremi nei punti di inversione del moto, per poi moltiplicare il risultato di un fattore due. In questo caso gli estremi di integrazione saranno $[\frac{\pi}{2} - \beta, \frac{\pi}{2} + \beta]$, dove $\beta \in [0, \frac{\pi}{2}]$ è l'angolo tra il momento angolare \vec{L} e l'asse z .

segue

$$\frac{I_{p_\phi}}{2} = \frac{1}{2\pi} \int_{\frac{\pi}{2}-\beta}^{\frac{\pi}{2}+\beta} \sqrt{L^2 - \frac{p_\theta^2}{\sin^2 \phi}} d\phi$$

ora ricordando che $p_\theta = L_z = \vec{L} \cdot \vec{e}_z = |L|\cos(\beta)$, si può riscrivere l'integranda nel seguente modo

$$\frac{I_{p_\phi}}{2} = \frac{1}{2\pi} \int_{\frac{\pi}{2}-\beta}^{\frac{\pi}{2}+\beta} \sqrt{L^2 - \frac{|L|^2 \cos^2(\beta)}{\sin^2 \phi}} d\phi = \frac{1}{2\pi} \int_{\frac{\pi}{2}-\beta}^{\frac{\pi}{2}+\beta} \frac{L}{\sin \phi} \sqrt{\sin^2 \phi - \cos^2(\beta)} d\phi =$$

sostituendo $\cos \phi = \sin \beta \sin \psi$, da cui $-\sin \phi d\phi = \sin \beta \cos \psi d\psi$.

per $\phi \rightarrow \frac{\pi}{2} + \beta$, $\psi \rightarrow \frac{3\pi}{2}$.

per $\phi \rightarrow \frac{\pi}{2} - \beta$, $\psi \rightarrow \frac{\pi}{2}$.

l'integrale diventa

$$-\frac{L}{2\pi} \int_{\frac{\pi}{2}}^{\frac{3\pi}{2}} \frac{\sin^2 \beta \sin \psi \cos \psi}{1 - \sin^2 \beta \sin^2 \psi} d\psi$$

sostituendo $\tan \psi = u$, $du = \frac{1}{\cos^2 \psi} d\psi$, $\sin \psi = \frac{u}{\sqrt{1+u^2}}$

per $\psi \rightarrow \frac{\pi}{2}$ $u \rightarrow \infty$

per $\psi \rightarrow \frac{3\pi}{2}$ $u \rightarrow -\infty$

si ottiene

$$\begin{aligned} \frac{I_\phi}{2} &= -\frac{L}{2\pi} \int_{-\infty}^{\infty} \frac{\sin^2 \beta (1 - \frac{u^2}{1+u^2})^2}{1 - \sin^2 \beta (\frac{u^2}{1+u^2})} du = \frac{L \sin^2 \beta}{2\pi} \int_{-\infty}^{\infty} \frac{1}{(1+u^2)} \frac{1}{(1+u^2 \cos^2 \beta)} du = \\ &= \frac{L \sin^2 \beta}{\pi} \int_0^{\infty} \frac{1}{(1+u^2)} \frac{1}{(1+u^2 \cos^2 \beta)} du \end{aligned}$$

dove nell'ultimo passaggio si è sfruttato il fatto che l'integranda è una funzione pari integrata su un dominio simmetrico.

L'integranda può essere scomposta tramite i fratti semplici

$$\frac{1}{(1+u^2)(1+u^2 \cos^2 \beta)} = \frac{Au+B}{(1+u^2)} + \frac{Cu+D}{(1+u^2 \cos^2 \beta)} = \frac{u^3(A \cos^2 \beta + C) + u^2(B \cos^2 \beta + D + u(A+C)) + (B+D)}{(1+u^2)(1+u^2 \cos^2 \beta)}$$

da cui si ottiene il sistema di equazioni

$$\begin{cases} A \cos^2 \beta + C = 0 \\ B \cos^2 \beta + D = 0 \\ A + C = 0 \\ B + D = 1 \end{cases}$$

che ha soluzioni

$$\begin{cases} A = 0 \\ B = \frac{1}{\sin^2 \beta} \\ C = 0 \\ D = \frac{-\cos^2 \beta}{\sin^2 \beta} \end{cases}$$

l'integrale diventa

$$\begin{aligned} \frac{I_\phi}{2} &= \frac{L \sin^2 \beta}{\pi \sin^2 \beta} \int_0^\infty \frac{1}{1+u^2} - \frac{\cos^2 \beta}{(1+(u \cos \beta)^2)} du = \frac{L}{\pi} (\arctan u - \cos \beta \arctan u \beta) \Big|_0^\infty = \\ &= \frac{L}{\pi} \frac{\pi}{2} (1 - \cos \beta) = \frac{L}{2} (1 - \cos \beta) \end{aligned}$$

ricordando che $p_\theta = L_z = |\vec{L}| \cos(\beta)$, l'azione I_ϕ risulta

$$I_\phi = L - p_\theta \tag{2.15}$$

2.3.3 Calcolo I_θ

Va calcolato l'integrale $\oint p_\theta d\theta$, per $\theta \in [0, 2\pi]$.

Dato che p_θ è integrale primo questo è costante lungo un cammino chiuso

$$I_\theta = \frac{1}{2\pi} \int_0^{2\pi} p_\theta d\theta = p_\theta \tag{2.16}$$

2.4 Variabili azione-angolo

Tramite (2.14), (2.15), (2.16) si può riscrivere l'Hamiltoniana in un sistema di variabili azione-angolo (I, ξ) .

Da cui

$$\mathcal{H}(I) = \frac{-m\alpha^2}{2(I_r + I_\theta + I_\phi)^2}$$

Si noti che $\mathcal{H}(I)$ non dipende dalle variabili angolari, ne segue che $\frac{\partial H}{\partial \xi_i} = 0$ con $i = 1, 2, 3$. Pertanto le equazioni di Hamilton relative al sistema sono

$$\begin{cases} \frac{dI_i}{dt} = \frac{\partial H}{\partial \xi} = 0 & \text{con } i=1,2,3 \\ \frac{d\xi_i}{dt} = \frac{\partial H}{\partial I_i} & \text{con } i=1,2,3 \end{cases} \quad (2.17)$$

e hanno come soluzioni:

$$\begin{cases} I_i(t) = I_i & \text{con } i=1,2,3 \\ \xi_i(t) = \xi(0) + \frac{\partial H}{\partial I_i} t & \text{con } i=1,2,3 \end{cases} \quad (2.18)$$

dove si è denotato con $I_1 = I_r, I_2 = I_\theta, I_3 = I_\phi$.

Si conclude che nel nuovo sistema di coordinate le soluzioni sono rette che si avvolgono su T^n [4]

Capitolo 3

Quantizzazione delle azioni

Per quanto visto nella sezione precedente il sistema è rettificabile, ovvero le soluzioni delle equazioni del moto sono rette, dunque è classicamente integrabile. A questo punto le ipotesi di Wilson-Sommerfeld sono soddisfatte, si applica la relazione (1.11) alle azioni I_r, I_ϕ, I_θ , quantizzandole

$$\begin{cases} I_r = n_r \hbar \\ I_\phi = n_\phi \hbar \\ I_\theta = n_\theta \hbar \end{cases} \quad (3.1)$$

dove n_r, n_ϕ, n_θ sono numeri interi positivi.

Come riportato nella sezione 1.4 questo metodo corrisponde a considerare il termine zero dell'espansione WKB. Tramite (3.1) l'energia del sistema può essere riscritta nel seguente modo

$$E_{n_r, n_\phi, n_\theta} = \frac{-m\alpha^2}{2\hbar^2(n_r + n_\theta + n_\phi)^2} \quad (3.2)$$

introducendo

$$l = n_\phi + n_\theta \quad (3.3)$$

$$n = n_r + l \quad (3.4)$$

e ricordando dalla relazione (3.2) l'espressione per α , si ottiene

$$E_n = -\frac{me^4}{2\hbar^2(4\pi\epsilon_0)^2 n^2} = -\frac{me^4}{8\hbar^2\epsilon_0^2 n^2} \quad (3.5)$$

applicando (1.10) si ottiene

$$E_n = \frac{-E_B}{n^2} \quad (3.6)$$

che coincide con quanto trovato da Bohr e riportato nella formula (1.9)

Capitolo 4

Conclusioni

Come si è visto nelle sezioni precedenti, è possibile trattare il problema quantistico del potenziale centrale in termini classici tramite il formalismo Hamiltoniano, per poi introdurre la quantizzazione delle azioni e ricavare le energie di Bohr 1.9. Quest'ultime, per quanto detto nella sezione 1.4, risultano l'approssimazione ad ordine zero dell'espansione in serie ottenuta applicando il metodo WKB (per un confronto consultare [1]). Si noti che l'Hamiltoniana scritta in variabili azione-angolo presenta una dipendenza quadratica dalla costante α e ciò è in accordo da un punto di vista dimensionale

Bibliografia

- [1] Luca Salasnich and Marko Robnik, *WKB expansion for the angular momentum and the Kepler problem: from the torus quantization to the exact one* J. Phys. A: Math. Gen., 30, 1719 (1997)
- [2] Sandro Graffi, *Le radici della quantizzazione* (Università degli studi di Pavia, Dipartimento di fisica nucleare e teorica, 1992)
- [3] Luca Salasnich, *Modern Physics Introduction to Statistical Mechanics, Relativity, and Quantum Physics* (Springer, 2021)
- [4] Massimiliano Guzzo, *Dispense del corso di Meccanica analitica* (Università degli studi di Padova, Dipartimento di Fisica e Astronomia, 2021)
- [5] William Wilson, *LXXXIII. The quantum-theory of radiation and line spectra* The London, Edinburgh, and Dublin Philosophical Magazine and Journal of Science, 29:174, 795-802 (1915)