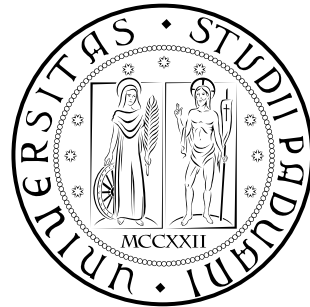


UNIVERSITÀ DEGLI STUDI DI PADOVA

DIPARTIMENTO DI INGEGNERIA INDUSTRIALE
Corso di Laurea Magistrale in Ingegneria Aerospaziale



Modellazione di piastre tramite l'accoppiamento di elementi finiti e griglie peridinamiche

Plates modelling by coupling of finite element meshes
with peridynamic grids

Tesi di Laurea Magistrale

Laureando:
MARCO DAL POZZOLO
Matricola: 1104080

Relatore:
Prof. MIRCO ZACCARIOTTO
Correlatore:
Prof. UGO GALVANETTO

5 Luglio 2018

Anno Accademico : 2017/2018

Sommario

Nel presente elaborato, viene presentata una modellazione di piastre tramite l'accoppiamento di elementi finiti e griglie peridinamiche. La teoria utilizzata per descrivere il comportamento delle strutture è la teoria delle piastre di Mindlin che tiene conto delle deformazioni a taglio lungo lo spessore. La teoria peridinamica è una teoria del continuo, non-locale, utile per la descrizione e la simulazione di fenomeni di formazione e propagazione di cricche nei materiali; tuttavia, è molto onerosa in termini computazionali. Il metodo agli elementi finiti è una tecnica di risoluzione di problemi strutturali estremamente avanzata e diffusa. L'accoppiamento tra il metodo agli elementi finiti e la teoria peridinamica permette di simulare i fenomeni di formazione e propagazione di cricche nel materiale, sfruttando i vantaggi e superando i problemi relativi ad entrambi i metodi. In questa tesi, vengono introdotte la teoria peridinamica e le equazioni che governano il comportamento della piastra in questa formulazione; si descrive il metodo agli elementi finiti ed il calcolo della matrice di rigidità per gli elementi utilizzati per la creazione delle mesh; si illustra la tecnica di accoppiamento utilizzata per la costruzione dei modelli. Infine, vengono proposti i patch test effettuati per la validazione dei modelli e le simulazioni sui modelli di piastra per verificare la corretta descrizione del comportamento della struttura quando sottoposta a carichi statici e dinamici. Viene illustrato, per concludere, uno studio preliminare di propagazione di una cricca su una piastra incastrata.

Abstract

This dissertation presents plates modelling by coupling of finite element meshes with peridynamic grids. The Mindlin theory of plates, accounting for transverse shear deformation, is used to describe structural behavior. Peridynamic theory is a non-local continuum theory very suitable for describing progressive failure analysis and crack propagation problems. Finite element method (FEM) is a numerical method used to solve structural problems. Coupling of FEM meshes with peridynamic grids is a way to obtain a numerical method that possesses the advantages of both computational techniques and avoids their problems. In this study, peridynamic theory and equations of motion are presented; finite element method and stiffness matrix calculation are described; furthermore, coupling of FEM meshes with peridynamic grids is explained. Finally, patch tests are devised to validate the technique and simulations are produced to verify structural behavior under static and dynamic loads. A crack-propagation example is presented.

Indice

1	Introduzione	1
1.1	La teoria peridinamica	2
1.2	Accoppiamento tra FEM e teoria peridinamica	3
2	La teoria peridinamica	5
2.1	Nozioni di base	5
2.2	Deformazione e allungamento relativi	7
2.3	Vettore densità di forza	8
2.4	Stati peridinamici	9
2.5	Densità di energia di deformazione	9
2.6	Equazioni del moto	10
2.7	Condizioni al contorno	11
2.7.1	Condizioni iniziali	11
2.7.2	Condizioni di vincolo	12
2.7.3	Condizioni di carico	13
2.8	Teoria peridinamica bond-based	14
2.8.1	Materiali isotropi e materiali microelastici	15
2.8.2	Linearizzazione	17
2.8.3	Limitazioni al coefficiente di Poisson	18
2.8.4	Prototype Microelastic Brittle Material	19
2.8.5	Considerazioni sulla sfera d'influenza	22
2.9	Teoria peridinamica state-based	23
2.9.1	Teoria peridinamica state-based ordinaria	24
2.9.2	Teoria peridinamica state-based non ordinaria	25
3	Teoria delle piastre di Mindlin	27
3.1	Vettori delle deformazioni e delle tensioni	28
3.2	Cenni sul metodo agli elementi finiti	32
3.3	Le funzioni di forma per un elemento isoparametrico	34
3.4	Calcolo delle deformazioni dell'elemento	38
3.5	Principio dei lavori virtuali	40
4	Equazioni del moto per la peridinamica	45
4.1	Cinematica per la piastra	45
4.2	Equazioni del moto	48
4.3	Matrici di rigidezza	51
4.4	Curvatura e angolo di taglio critici	53

5	Accoppiamento delle griglie peridinamiche con gli elementi finiti	55
5.1	Realizzazione dell'accoppiamento	57
5.1.1	Matrice di rigidezza accoppiata	57
5.1.2	Matrice di massa accoppiata	63
6	Analisi statiche	65
6.1	Patch test	65
6.1.1	Traslazione rigida in direzione z	68
6.1.2	Traslazione rigida di un bordo di piastra incernierata	70
6.1.3	Rotazione rigida di un bordo di piastra incernierata	72
6.1.4	Confronti e commenti	74
6.2	Analisi statiche	76
6.2.1	Piastra incastrata alla cui estremità è applicato uno spostamento	76
6.2.2	Piastra incastrata alla cui estremità è applicata una rotazione attorno all'asse x	78
6.2.3	Piastra incastrata alla cui estremità è applicata una rotazione attorno all'asse y	81
6.3	Analisi di una piastra soggetta a forze e momenti esterni	83
6.3.1	Piastra incastrata soggetta ad una forza in direzione z	86
6.3.2	Piastra incastrata soggetta ad un momento flettente in dire- zione y	91
7	Analisi dinamiche	97
7.1	Metodi di integrazione numerica diretta in analisi tempo varianti	97
7.1.1	Metodo alle differenze centrali	99
7.2	Problemi lineari	100
7.2.1	Spostamento imposto con $\lambda=0.015$ [m]	103
7.2.2	Spostamento imposto con $\lambda=0.045$ [m]	105
7.2.3	Spostamento imposto con un'onda sfasata avente $\lambda=0.015$ [m]	107
7.2.4	Spostamento imposto con un'onda sfasata avente $\lambda=0.045$ [m]	109
7.2.5	Variazione delle spessore della piastra $h=0.01$ [m]	111
7.3	Risultati preliminari di fenomeni di propagazione delle cricche	113
7.3.1	Modello coarse	114
7.3.2	Modello refined	118
7.3.3	Modello di una piastra in polimetilmetacrilato	121
8	Conclusioni	123
A	Derivazione delle equazioni peridinamiche del moto	125
A.1	Equazione del moto per il grado di libertà w_k	127
A.2	Equazione del moto per il grado di libertà ϕ_{x_k}	130
A.3	Equazione del moto per il grado di libertà ϕ_{y_k}	133
	Bibliografia	137

Capitolo 1

Introduzione

Molti studi in campo ingegneristico si occupano di determinare il comportamento di strutture sottoposte a carichi di diversa natura.

Tali studi, per la maggior parte, vengono effettuati con l'aiuto di software ad elementi finiti (FEM¹) che, oltre ad offrire una velocità ed una capacità di calcolo elevatissime, permettono l'analisi di strutture di enormi dimensioni come aerei, navi, treni ed altre ancora.

In analisi in cui vengono applicati carichi elevati o negli studi inerenti la rottura a fatica dei materiali, si può osservare l'insorgere di danni o cricche sulle strutture. Come è facile immaginare, il comportamento della struttura subisce delle modifiche quando si verifica l'insorgenza di fenomeni di danneggiamento; per questo motivo, l'analisi di strutture soggette a cricche è diventata un ambito di ricerca molto importante nel settore ingegneristico.

L'insorgenza delle cricche ed il fenomeno di propagazione implicano la presenza di discontinuità nel dominio nel quale il problema è definito. Per tale ragione, i metodi agli elementi finiti non si possono applicare alla risoluzione di questi fenomeni, in quanto la continuità del dominio è un'ipotesi su cui si basa la teoria classica del continuo. Un certo grado di continuità del dominio, infatti, implica l'esistenza delle derivate parziali degli spostamenti, condizione necessaria per lo svolgimento dell'analisi agli elementi finiti.

Al fine di superare questo problema, sono state introdotte alcune tecniche basate sul metodo FEM che siano in grado di simulare il fenomeno della propagazione delle cricche, come ad esempio: l'inserimento di elementi d'interfaccia con CZM [1], il metodo X-FEM [2], l'erosione degli elementi [3] e la *phase field theory* [4].

Tutti questi metodi, tuttavia, necessitano di particolari condizioni per essere applicati e, spesso, presentano degli inconvenienti. E' necessario, ad esempio, conoscere a priori la direzione di propagazione della cricca nel materiale per predisporre gli elementi di interfaccia; tale conoscenza a priori mina alla base una completa analisi del fenomeno di propagazione delle cricche e non garantisce la generalità dello studio.

¹Esistono molteplici software ad elementi finiti, alcuni dei quali free license. Tali programmi sono costituiti, per la maggior parte, da un software di pre/post processing e da un solutore. Il solutore maggiormente utilizzato al mondo e considerato come più affidabile (in campo aerospaziale è l'unico accettato) è MSC Nastran. Esso si appoggia a software di pre/post processing come MSC Patran, Marc e Abaqus.

1.1 La teoria peridinamica

Nel 2000, il dr. S. A. Silling ha sviluppato una nuova teoria del continuo chiamata *teoria peridinamica* [5].

La teoria peridinamica è una teoria non-locale che descrive il comportamento del corpo attraverso le interazioni tra i punti materiali. Come si può osservare in figura 1.1, nelle teorie locali, un punto materiale è influenzato solo e soltanto dal comportamento dei punti materiali ad esso adiacenti; al contrario, per le teorie non-locali, il punto materiale è influenzato dal comportamento di tutti i punti materiali che stanno all'interno di uno spazio definito come *sfera d'influenza*.

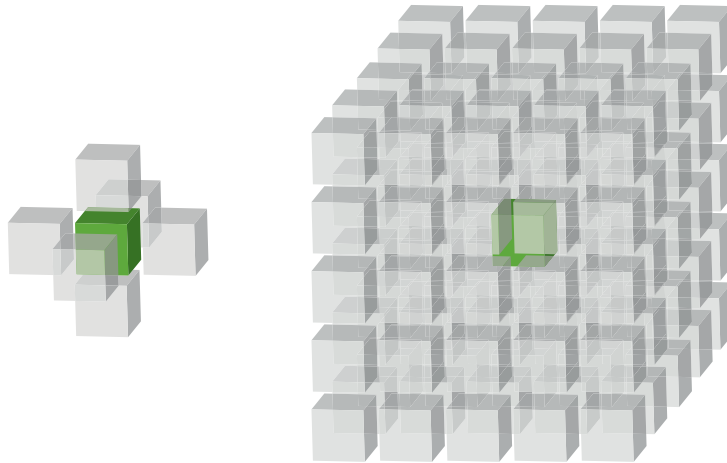


Figura 1.1: Rappresentazione grafica delle interazioni tra punti nelle teorie locali (a sinistra) e non-locali (a destra).

Le equazioni che stanno alla base della peridinamica utilizzano integrali degli spostamenti anziché le derivate degli stessi, perciò, sono valide anche se il dominio presenta delle discontinuità. Pertanto, le cricche e la loro propagazione nel materiale sono analizzabili tramite questa teoria e non necessitano di speciali accorgimenti.

Per poter descrivere quali siano le interazioni tra i diversi punti materiali del corpo, vengono utilizzate delle forze, chiamate *forze peridinamiche* che esistono anche quando due punti non sono in contatto tra loro, se posti all'interno della sfera di influenza.

Nella formulazione originaria della peridinamica [5], chiamata *teoria peridinamica bond-based*, la connessione tra due punti materiali è chiamata *bond* e l'interazione tra di essi è modellata come una *pairwise force function*.

In seguito, nel 2007, Silling et al. [6] hanno introdotto una teoria peridinamica più generale, chiamata *teoria peridinamica state-based*, che supera alcune limitazioni insite nella teoria peridinamica bond-based.

Oltre a ben rappresentare il comportamento di materiali lineari elastici, la teoria peridinamica è stata applicata all'analisi di materiali non lineari elastici [7], plastici [6][8][9] e ortotropi [10]. Hu et al. [11] hanno studiato il fenomeno della delaminazione nei materiali compositi con la teoria peridinamica bond-based.

La teoria peridinamica è stata, inoltre, implementata per modellare fenomeni di diffusione termica ed elettrostatica.

Gerstle, Silling et al. [12] hanno sviluppato un modello che descrive la conduzione del calore in un corpo monodimensionale. Bobaru e Duangpanya [13], adottando la teoria peridinamica bond-based, hanno esteso il modello peridinamico monodimensionale per descrivere la conduzione del calore a dei modelli multidimensionali e, successivamente, Agwai et al. [14] hanno implementato, con la teoria peridinamica state-based, l'accoppiamento termo-meccanico.

Wildman e Gazonas [15] hanno studiato il comportamento elettro-termo-meccanico di un materiale dielettrico sottoposto ad alta tensione tramite un modello peridinamico.

Oterkus [16] ha presentato le equazioni peridinamiche per predire deformazione meccanica, diffusione termica e distribuzione del potenziale elettrico in vari modelli. Inoltre, sono stati sviluppati alcuni problemi concernenti deformazioni plastiche, accoppiamenti termomeccanici ed elettromigrazioni [13][17][18].

1.2 Accoppiamento tra FEM e teoria peridinamica

Al contrario dei metodi basati su teorie locali, come ad esempio il metodo FEM, risulta chiaro come l'analisi tramite teoria peridinamica sia molto più dispendiosa in termini computazionali. Tutto ciò è dovuto al fatto che un punto materiale nella teoria peridinamica deve interagire con tutti i punti materiali interni alla sua sfera d'influenza, anziché ai soli punti ad esso limitrofi.

Per questo motivo, Kilic e Madenci [19] hanno utilizzato la teoria peridinamica accoppiandola con il metodo FEM. Tale approccio garantisce i benefici di entrambe le teorie: l'utilizzo di elementi FEM sulla struttura garantisce tempi di calcolo brevi, mentre, la presenza di "griglie" peridinamiche localizzate attorno alle zone in cui si riscontrano delle cricche, comporta che il fenomeno possa essere correttamente studiato.

Un altro vantaggio consiste nel porre le condizioni al contorno: la definizione dei vincoli e dei carichi esterni, nelle teorie non-locali, comporta alcune problematiche illustrate nel capitolo seguente. Tale inconveniente viene superato imponendo le condizioni al contorno solo sulla parte FEM del modello, consentendo così una più facile implementazione.

In seguito, numerosi ricercatori hanno condotto degli studi sull'accoppiamento di griglie peridinamiche ed elementi finiti elaborando una nuova tecnica di accoppiamento per l'analisi di problemi monodimensionali, bidimensionali e tridimensionali [20][21][22].

Nel presente elaborato, si vuole discutere la tecnica di accoppiamento del metodo FEM con griglie peridinamiche, per la modellazione di piastre soggette a forze e spostamenti fuori dal piano. Taylor e Steigmann, nel loro articolo [23] hanno proposto un modello di piastra, basato sulla teoria peridinamica bond-based, capace di descrivere le deformazioni fuori dal piano per piastre sottili. Diyaroglu et al., invece, hanno proposto una formulazione della teoria peridinamica bond-based per modellare le piastre di Mindlin tenendo in considerazione gli spostamenti fuori dal piano e le deformazioni a taglio lungo lo spessore della piastra [24]. Nel presente elaborato, si fa riferimento a quest'ultima formulazione.

Capitolo 2

La teoria peridinamica

Nel presente capitolo, si introdurranno alcune nozioni di base per comprendere la teoria peridinamica e verranno presentate le equazioni implementate nel presente elaborato. Per un'analisi più approfondita dell'argomento, si rimanda ai testi *Peridynamic Theory and Its Applications* scritto da Oterkus e Madenci [25] e *Handbook of Peridynamic Modeling* scritto da Bobaru, Foster, Geubelle e Silling [26].

2.1 Nozioni di base

Si prenda un corpo B composto da infinite particelle, chiamate punti materiali. Ogni punto materiale è definito nello spazio del corpo indeformato B dal vettore delle sue coordinate \mathbf{x}_k , dove $k = 1, 2, \dots$, denota il k -esimo punto materiale di B . Ad ogni punto sono associati un volume V_k ed una densità di massa $\rho(\mathbf{x}_k)$.

Quando il corpo B è soggetto ad un qualsiasi tipo di carico, come ad esempio forze, spostamenti o velocità, subisce una deformazione e, conseguentemente, ogni punto materiale subisce uno spostamento identificato dal vettore $\mathbf{u}_k(\mathbf{x}_k, t)$.

Tale spostamento \mathbf{u}_k è una funzione sia dello spazio che del tempo.

A seguito della deformazione, il punto k assumerà una nuova posizione nello spazio identificata dal vettore \mathbf{y}_k che risulta dall'equazione 2.1.

In figura 2.1, è riportata una rappresentazione grafica dei vettori per le due configurazioni.

$$\mathbf{y}_k = \mathbf{x}_k + \mathbf{u}_k \quad (2.1)$$

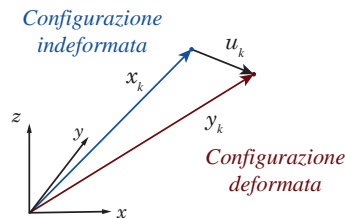


Figura 2.1: Rappresentazione grafica del vettore posizione del punto k -esimo e dei suoi vettori spostamento e posizione nelle due configurazioni: indeformata e deformata.

Il moto del corpo B viene descritto dalle interazioni che si creano tra ciascun punto materiale k -esimo e gli altri punti materiali che costituiscono il corpo.

Tali interazioni sono definite grazie all'uso di un micropotenziale che dipende dalla deformazione subita e dalle proprietà caratteristiche del materiale di cui è composto il corpo.

Le interazioni possibili per ogni punto materiale sono infinite, tuttavia, si considera ininfluenza l'azione di un punto quando posto al di fuori di una regione chiamata *sfera d'influenza* identificata con H_k . La sfera d'influenza H_k è una regione di spazio centrata sul punto \mathbf{x}_k ed avente un raggio δ chiamato *orizzonte*.

Gli infiniti punti materiali \mathbf{x}_j appartenenti a questa regione prendono il nome di *punti famiglia* del punto materiale \mathbf{x}_k .

In figura 2.2, è raffigurata una rappresentazione grafica della sfera d'influenza e del suo orizzonte.

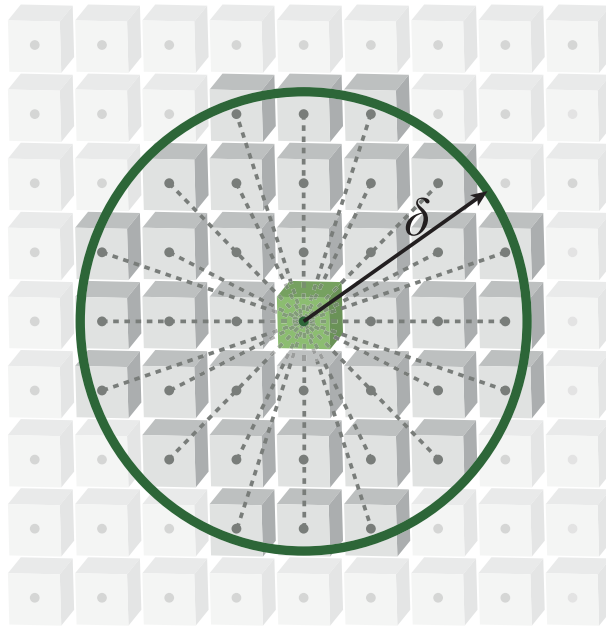


Figura 2.2: Rappresentazione grafica della sfera d'influenza e dell'orizzonte per un punto materiale.

Ad ogni punto materiale, è associata una sfera di influenza con un orizzonte δ che rappresenta il carattere locale delle interazioni che si creano tra i vari punti.

Al diminuire dell'orizzonte, le interazioni diventano via via più locali.

La teoria dell'elasticità classica, quindi, può essere vista come un caso particolare della teoria peridinamica in cui l'orizzonte δ tende a zero [27].

2.2 Deformazione e allungamento relativi

Come si può osservare in figura 2.3, ogni punto materiale \mathbf{x}_k è influenzato dalla deformazione di tutti i punti appartenenti alla sua zona d'influenza H_k e, analogamente, ogni punto \mathbf{x}_j è influenzato da tutti i punti appartenenti alla sua zona d'influenza H_j .

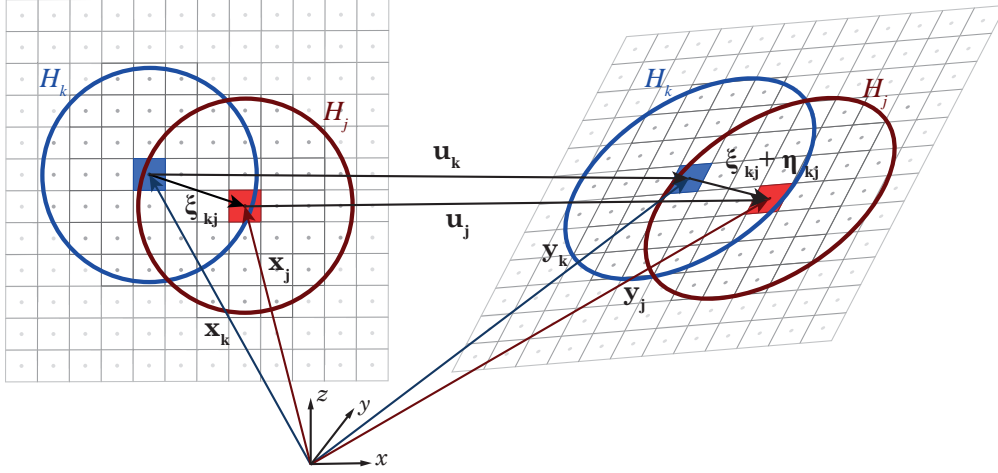


Figura 2.3: Rappresentazione grafica delle sfere d'influenza e delle posizioni relative tra due punti materiali in configurazione indeformata (a sinistra) e deformata (a destra).

In configurazione indeformata, la posizione relativa tra il punto \mathbf{x}_k ed il punto materiale \mathbf{x}_j è definita dal vettore posizione relativa:

$$\boldsymbol{\xi}_{kj} = \mathbf{x}_j - \mathbf{x}_k \quad (2.2)$$

A seguito della deformazione, i punti subiranno degli spostamenti identificati con i vettori \mathbf{u}_k e \mathbf{u}_j ed il loro spostamento relativo sarà:

$$\boldsymbol{\eta}_{kj} = \mathbf{u}_j - \mathbf{u}_k \quad (2.3)$$

In configurazione deformata, quindi, la posizione relativa tra il punto \mathbf{y}_k ed il punto materiale \mathbf{y}_j è definita da:

$$\mathbf{y}_j - \mathbf{y}_k = \mathbf{x}_j + \mathbf{u}_j - \mathbf{x}_k - \mathbf{u}_k = \boldsymbol{\xi}_{kj} + \boldsymbol{\eta}_{kj} \quad (2.4)$$

Si introduce ora il concetto di allungamento relativo o *stretch* s_{kj} . Tale parametro scalare è definito da:

$$s_{kj} = \frac{\mathbf{y}_j - \mathbf{y}_k - \mathbf{x}_j + \mathbf{x}_k}{\mathbf{x}_j - \mathbf{x}_k} \quad (2.5)$$

E sostituendo all'interno dell'equazione 2.5 le equazioni 2.2 e 2.4, si ottiene:

$$s_{kj} = \frac{\boldsymbol{\xi}_{kj} + \boldsymbol{\eta}_{kj} - \boldsymbol{\xi}_{kj}}{\boldsymbol{\xi}_{kj}} \quad (2.6)$$

Questo parametro rappresenta quanto sia cambiata, in termini relativi, la posizione dei punti dalla configurazione indeformata alla configurazione deformata.

Rispetto ad un punto materiale k -esimo, tutti i vettori di posizione relativa $\mathbf{y}_j - \mathbf{y}_k$ con $j = 1, 2, \dots$, possono essere scritti all'interno di un vettore $\underline{\mathbf{Y}}$ chiamato *deformation state vector* di dimensione infinita:

$$\underline{\mathbf{Y}}(\mathbf{x}_k, t) = \begin{Bmatrix} (\mathbf{y}_1 - \mathbf{y}_k) \\ (\mathbf{y}_2 - \mathbf{y}_k) \\ \vdots \\ (\mathbf{y}_\infty - \mathbf{y}_k) \end{Bmatrix} \quad (2.7)$$

2.3 Vettore densità di forza

Come precedentemente descritto, il punto materiale \mathbf{x}_k è influenzato dalle interazioni che si creano con i punti appartenenti alla zona d'influenza H_k .

L'interazione che si crea tra uno dei punti famiglia \mathbf{x}_j ed il punto \mathbf{x}_k può essere interpretata come la forza esercitata dal punto famiglia \mathbf{x}_j sul rispettivo punto sorgente \mathbf{x}_k .

Tale forza può essere descritta tramite un vettore \mathbf{t}_{kj} chiamato *force density vector* (vettore densità di forza). Analogamente, scelto come punto sorgente il punto \mathbf{x}_j , esso sarà influenzato dalle interazioni con i punti appartenenti alla zona d'influenza H_j . Il suo vettore densità di forza, rispetto al punto \mathbf{x}_k , sarà \mathbf{t}_{jk} .

I vettori densità di forza sono raffigurati in figura 2.4.

Come effettuato per i vettori di posizione relativa, i vettori densità di forza relativi ad un punto \mathbf{x}_k possono essere racchiusi in un *force state vector* $\underline{\mathbf{T}}$:

$$\underline{\mathbf{T}}(\mathbf{x}_k, t) = \begin{Bmatrix} \mathbf{t}_{k1} \\ \mathbf{t}_{k2} \\ \vdots \\ \mathbf{t}_k \end{Bmatrix} \quad (2.8)$$

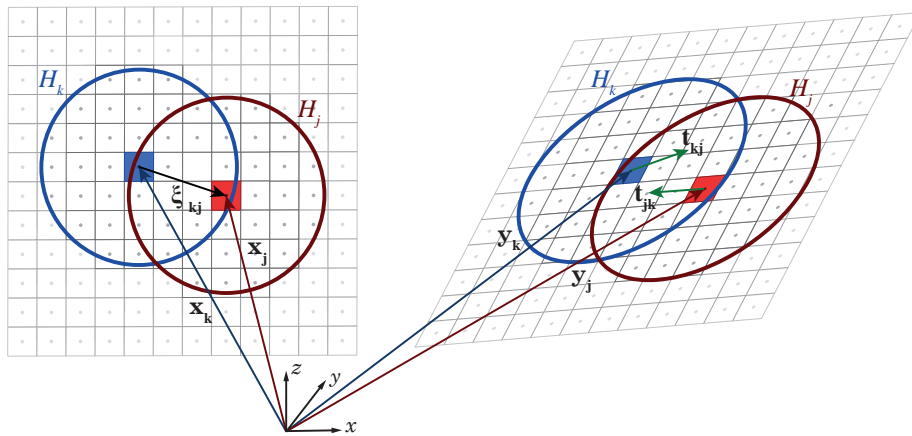


Figura 2.4: Rappresentazione grafica dei *force density vectors* \mathbf{t}_{kj} e \mathbf{t}_{jk} .

2.4 Stati peridinamici

Noti i vettori *deformation state vector* $\underline{\mathbf{Y}}$ e *force state vector* $\underline{\mathbf{T}}$, espressi nelle equazioni 2.7 e 2.8, è possibile ricavare i vettori delle posizioni relative $(\mathbf{y}_j - \mathbf{y}_k)$ e delle densità di forza \mathbf{t}_{kj} a partire dal vettore della posizione relativa in configurazione indeformata $\mathbf{x}_j - \mathbf{x}_k$:

$$(\mathbf{y}_j - \mathbf{y}_k) = \underline{\mathbf{Y}}(\mathbf{x}_k, t) \mathbf{x}_j - \mathbf{x}_k \quad (2.9)$$

$$\mathbf{t}_{kj}(\mathbf{u}_j - \mathbf{u}_k, \mathbf{x}_j - \mathbf{x}_k, t) = \underline{\mathbf{T}}(\mathbf{x}_k, t) \mathbf{x}_j - \mathbf{x}_k \quad (2.10)$$

Come si può notare, osservando le equazioni appena scritte, i vettori $\underline{\mathbf{Y}}$ e $\underline{\mathbf{T}}$ differiscono tra loro essendo il primo indipendente ed il secondo dipendente dal vettore degli spostamenti relativi. Per questo motivo, si può scrivere la seguente relazione:

$$\underline{\mathbf{T}}(\mathbf{x}_k, t) = \underline{\mathbf{T}}(\underline{\mathbf{Y}}(\mathbf{x}_k, t)) \quad (2.11)$$

2.5 Densità di energia di deformazione

Per poter descrivere le interazioni che si vengono a creare tra i punti materiali \mathbf{x}_k e \mathbf{x}_j , si introduce il concetto di *micropotenziale* w_{kj} .

Il micropotenziale è una funzione scalare che dipende dalle proprietà del materiale e dal valore dello stretch relativo al punto \mathbf{x}_k ed ai suoi punti famiglia.

$$w_{kj} = w_{kj}(\mathbf{y}_{1^k} - \mathbf{y}_k, \mathbf{y}_{2^k} - \mathbf{y}_k, \dots) \quad (2.12)$$

$$w_{jk} = w_{jk}(\mathbf{y}_{1^j} - \mathbf{y}_j, \mathbf{y}_{2^j} - \mathbf{y}_j, \dots) \quad (2.13)$$

Il micropotenziale varia a seconda di quale sia il punto sorgente considerato, in quanto è influenzato dallo stato dei punti appartenenti alla sfera d'influenza; per questo, vale la seguente relazione:

$$w_{kj} = w_{jk} \quad (2.14)$$

La densità di energia di deformazione, o *strain energy density*, W_k del punto materiale \mathbf{x}_k può essere definita come la somma dei micropotenziali w_{kj} derivanti dall'interazione dei punti materiali \mathbf{x}_k con i punti famiglia \mathbf{x}_j H_k .

$$W_k = \frac{1}{2} \sum_{j=1} \frac{1}{2} (w_{kj} + w_{jk}) V_j \quad (2.15)$$

dove $w_{kj} = 0$ quando $j = k$.

2.6 Equazioni del moto

Si consideri un corpo continuo B su cui si sia effettuata una discretizzazione. I punti materiali che costituiscono il corpo discretizzato vengono chiamati *nodi peridinamici*.

Le equazioni peridinamiche del moto del nodo \mathbf{x}_k possono essere derivate risolvendo l'equazione di Lagrange:

$$\frac{d}{dt} \left(\frac{\partial \mathcal{L}}{\partial \dot{\mathbf{q}}_k} \right) - \frac{\partial \mathcal{L}}{\partial \mathbf{q}_k} = 0 \quad (2.16)$$

dove \mathbf{q}_k è il vettore delle variabili indipendenti e il *Lagrangiano* \mathcal{L} è dato da:

$$\mathcal{L} = T - U \quad (2.17)$$

con T ed U definite, rispettivamente, come l'energia cinetica totale e l'energia potenziale totale del corpo B .

L'energia cinetica T può essere espressa come:

$$T = \frac{1}{2} \rho \sum_{k=1}^t \dot{\mathbf{q}}_k \cdot \dot{\mathbf{q}}_k V_k \quad (2.18)$$

dove con t si intende il numero di nodi totali del corpo discretizzato.

L'energia potenziale U è descritta da:

$$U = \sum_{k=1}^t W_k V_k - \sum_{k=1}^t (\mathbf{b}_k \cdot \mathbf{q}_k) V_k \quad (2.19)$$

dove, a secondo membro, vengono espressi il contributo dato dalla densità di energia di deformazione W_k ed il lavoro compiuto dalle forze esterne descritte tramite il vettore \mathbf{b}_k che ha come unità di misura $[N/m^3]$. Ricordando le equazioni 2.12 e 2.13 e sostituendo l'equazione 2.15 all'interno dell'equazione 2.19, si ottiene:

$$U = \sum_{k=1}^t \left\{ \frac{1}{2} \sum_{j=1}^n \frac{1}{2} \left[w_{kj} (\mathbf{y}_{1^k} - \mathbf{y}_k, \mathbf{y}_{2^k} - \mathbf{y}_k, \dots) \right. \right. \\ \left. \left. + w_{jk} (\mathbf{y}_{1^j} - \mathbf{y}_j, \mathbf{y}_{2^j} - \mathbf{y}_j, \dots) \right] V_j - (\mathbf{b}_k \cdot \mathbf{u}_k) \right\} V_k \quad (2.20)$$

in cui l'indice n indica il numero di nodi appartenenti alla sfera d'influenza H_k .

A questo punto, risolvendo l'equazione 2.16, si ottiene l'equazione del moto per il nodo \mathbf{x}_k :

$$\rho_k \ddot{\mathbf{u}}_k V_k + \left\{ \frac{1}{2} \sum_{j=1}^n \left[\frac{\partial w_{kj}}{\partial (\mathbf{y}_j - \mathbf{y}_k)} \frac{\partial (\mathbf{y}_j - \mathbf{y}_k)}{\partial \mathbf{u}_k} \right. \right. \\ \left. \left. + \frac{\partial w_{jk}}{\partial (\mathbf{y}_k - \mathbf{y}_j)} \frac{\partial (\mathbf{y}_k - \mathbf{y}_j)}{\partial \mathbf{u}_k} \right] V_j - \mathbf{b}_k \right\} V_k = 0 \quad (2.21)$$

I termini nella sommatoria a primo membro dell'equazione 2.21 rappresentano i vettori densità di forza che i nodi \mathbf{x}_k e \mathbf{x}_j esercitano vicendevolmente, ossia:

$$\mathbf{t}_{kj} = \frac{1}{2} \frac{\partial w_{kj}}{\partial (\mathbf{y}_j - \mathbf{y}_k)} \quad (2.22)$$

$$\mathbf{t}_{jk} = \frac{1}{2} \frac{\partial w_{jk}}{\partial (\mathbf{y}_k - \mathbf{y}_j)} \quad (2.23)$$

Pertanto, l'equazione peridinamica del moto 2.21, semplificando ulteriormente il volume V_k , può essere riscritta come:

$$\rho_k \ddot{\mathbf{u}}_k = \sum_{j=1}^n \left[\mathbf{t}_{kj} (\mathbf{u}_j - \mathbf{u}_k, \mathbf{x}_j - \mathbf{x}_k, t) - \mathbf{t}_{jk} (\mathbf{u}_k - \mathbf{u}_j, \mathbf{x}_k - \mathbf{x}_j, t) \right] V_j + \mathbf{b}_k \quad (2.24)$$

e, ricordando l'equazione 2.10 del vettore *force state vector* $\underline{\mathbf{T}}$, si può scrivere:

$$\rho_k \ddot{\mathbf{u}}_k = \sum_{j=1}^n \left[\underline{\mathbf{T}}(\mathbf{x}_k, t) \quad \mathbf{x}_j - \mathbf{x}_k \quad - \underline{\mathbf{T}}(\mathbf{x}_j, t) \quad \mathbf{x}_k - \mathbf{x}_j \right] V_j + \mathbf{b}_k \quad (2.25)$$

2.7 Condizioni al contorno

Le equazioni peridinamiche del moto, derivate nel paragrafo 2.6, sono delle equazioni integro-differenziali, non lineari, in funzione dello spazio e del tempo.

Si deve notare come non contengano derivate spaziali degli spostamenti e, quindi, siano valide in tutto il dominio in cui è definito il corpo, anche in presenza di discontinuità come precedentemente illustrato.

La loro risoluzione è possibile integrando nel tempo e nello spazio dopo aver definito le condizioni al contorno del problema. Tali condizioni al contorno si possono suddividere in: condizioni iniziali sugli spostamenti e sulle velocità; condizioni di vincolo e condizioni di carico.

2.7.1 Condizioni iniziali

Le condizioni iniziali sugli spostamenti e sulle velocità di tutti i punti del corpo B sono necessarie affinché possa essere svolta l'integrazione nel tempo del vettore $\ddot{\mathbf{u}}_k$, ottenuto tramite l'equazione 2.24. Si definiscono, quindi, i vettori:

$$\mathbf{u}_k(\mathbf{x}_k, t = 0) = \mathbf{u}_k^*(\mathbf{x}_k) \quad (2.26)$$

$$\dot{\mathbf{u}}_k(\mathbf{x}_k, t = 0) = \dot{\mathbf{u}}_k^*(\mathbf{x}_k)$$

2.7.2 Condizioni di vincolo

Come già enunciato, nell'equazione 2.24 non sono presenti derivate degli spostamenti e, quindi, non sarebbe necessario porre delle condizioni di vincolo per risolvere gli integrali. Tuttavia, queste condizioni possono essere poste applicandole in delle particolari regioni lungo i bordi del corpo. Tali regioni vengono "create" esternamente al corpo e, per questo motivo, si tratta di *regioni fittizie*.

Macek e Silling, nel loro articolo [28], basandosi su esperimenti numerici, hanno stabilito che la regione fittizia di spazio adibita all'applicazione dei vincoli debba corrispondere ad un bordo pari all'orizzonte δ , affinché le condizioni di vincolo siano applicabili correttamente al corpo.

Per questo motivo, come si può vedere nella figura 2.5, viene introdotta, esternamente alla regione reale \mathcal{R} del corpo, una regione fittizia \mathcal{R}_c , larga δ .

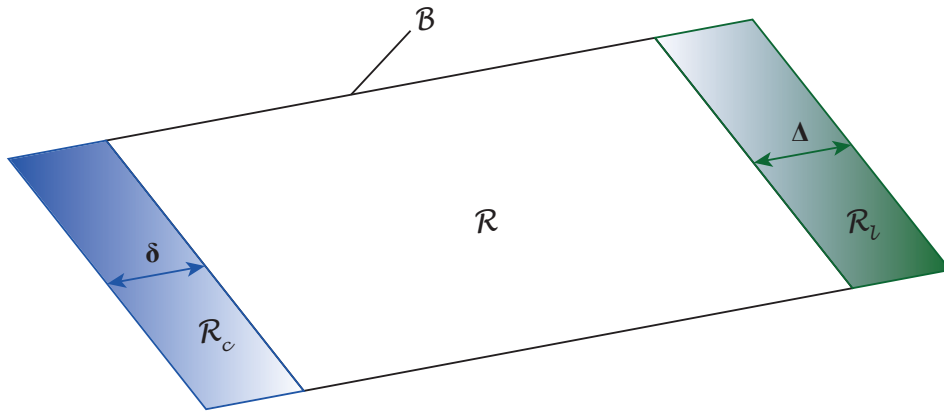


Figura 2.5: Rappresentazione grafica delle regioni adibite all'applicazione delle condizioni di vincolo (\mathcal{R}_c) e di carico (\mathcal{R}_l).

Le condizioni di vincolo possono essere applicate sul campo degli spostamenti o delle velocità e possono essere descritte da:

$$\mathbf{u}_k(\mathbf{x}_k, t) = \mathbf{U}_0 \quad (2.27)$$

$$\dot{\mathbf{u}}_k(\mathbf{x}_k, t) = \mathbf{V}_0(t) \quad (2.28)$$

in cui $\mathbf{x}_k \in \mathcal{R}_c$.

2.7.3 Condizioni di carico

Le condizioni di carico possono essere applicate come vettori densità di forza in una regione reale del corpo \mathcal{R}_l , mostrata in figura 2.5.

Basandosi su degli esperimenti numerici, si è osservato che la larghezza di questa regione deve essere il più vicino possibile al bordo del corpo [25]. Per questo motivo, la regione sulla quale vengono applicate le condizioni di vincolo \mathcal{R}_l ha una larghezza Δ .

Nel caso in cui si voglia imporre una condizione di carico pari ad una pressione $p(\mathbf{x}_k, t)$, il vettore densità di forza può essere espresso come:

$$\mathbf{b}_k(\mathbf{x}_k, t) = -\frac{1}{\Delta}p(\mathbf{x}_k, t)\mathbf{n} \quad (2.29)$$

Mentre, volendo esprimere una condizioni di carico con una forza puntuale $\mathbf{P}(t)$ su una superficie \mathcal{S}_l della regione \mathcal{R}_l , il vettore densità di forza assume la forma:

$$\mathbf{b}_k(\mathbf{x}_k, t) = \frac{1}{\mathcal{S}_l\Delta}\mathbf{P}(t) \quad (2.30)$$

Infine, si vuole rimarcare come la regione in cui vengono applicate le condizioni di vincolo \mathcal{R}_c sia una regione fittizia esterna alla regione reale, diversamente dalla regione in cui vengono applicate le condizioni di carico \mathcal{R}_l .

Valgono, quindi, le seguenti relazioni:

$$\mathcal{R}_c \subset \mathcal{R} \quad (2.31)$$

$$\mathcal{R}_l \subset \mathcal{R} \quad (2.32)$$

2.8 Teoria peridinamica bond-based

La teoria peridinamica *bond-based* è un caso particolare della teoria peridinamica.

Si considerino due nodi peridinamici che giacciono vicendevolmente all'interno delle rispettive sfere d'influenza, come raffigurato in figura 2.6.

Si parla di teoria peridinamica bond-based, nel caso in cui i vettori densità di forza relativi a questi due nodi peridinamici siano uguali in modulo, opposti in verso e giacciono sulla stessa linea direttrice data dal vettore delle posizioni relative in configurazione deformata.

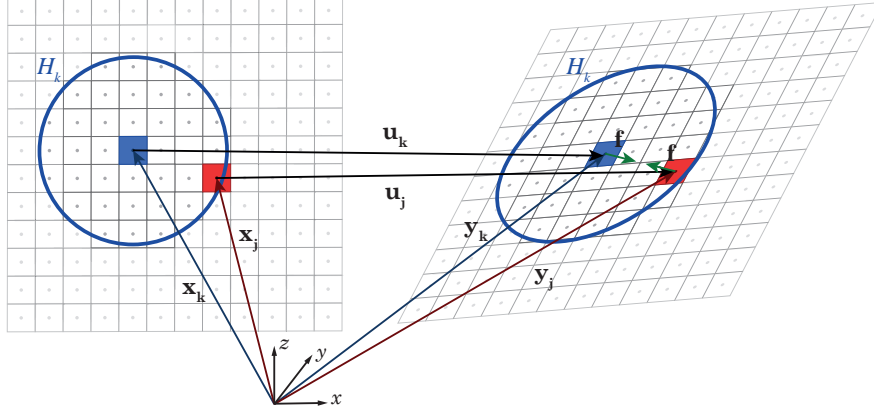


Figura 2.6: Rappresentazione grafica di due nodi peridinamici \mathbf{x}_k e \mathbf{x}_j e delle *pairwise force functions* che si instaurano tra questi nodi in configurazione deformata secondo la teoria peridinamica bond-based.

Al fine di conservare il momento angolare, i vettori densità di forza, agenti tra due nodi peridinamici che appartengono alla stessa sfera di influenza, possono essere scritti nella maniera seguente:

$$\begin{aligned} \mathbf{t}_{kj}(\mathbf{u}_j - \mathbf{u}_k, \mathbf{x}_j - \mathbf{x}_k, t) &= \underline{\mathbf{T}}(\mathbf{x}_k, t) \mathbf{x}_j - \mathbf{x}_k = \frac{1}{2} C \frac{\mathbf{y}_j - \mathbf{y}_k}{\mathbf{y}_j - \mathbf{y}_k} \\ &= \frac{1}{2} \mathbf{f}(\mathbf{u}_j - \mathbf{u}_k, \mathbf{x}_j - \mathbf{x}_k, t) \end{aligned} \quad (2.33)$$

e

$$\begin{aligned} \mathbf{t}_{jk}(\mathbf{u}_k - \mathbf{u}_j, \mathbf{x}_k - \mathbf{x}_j, t) &= \underline{\mathbf{T}}(\mathbf{x}_j, t) \mathbf{x}_k - \mathbf{x}_j = -\frac{1}{2} C \frac{\mathbf{y}_j - \mathbf{y}_k}{\mathbf{y}_j - \mathbf{y}_k} \\ &= -\frac{1}{2} \mathbf{f}(\mathbf{u}_j - \mathbf{u}_k, \mathbf{x}_j - \mathbf{x}_k, t) \end{aligned} \quad (2.34)$$

dove C è un parametro che dipende dalle proprietà del materiale di cui è composto il corpo, dal valore dello stretch tra i due nodi peridinamici in esame e dal valore dell'orizzonte δ .

Sostituendo le equazioni 2.33 e 2.34 all'interno dell'equazione 2.24, si ottiene l'equazione del moto per la teoria peridinamica bond-based:

$$\rho_k \ddot{\mathbf{u}}_k = \sum_{j=1}^n \mathbf{f}(\mathbf{u}_j - \mathbf{u}_k, \mathbf{x}_j - \mathbf{x}_k, t) V_j + \mathbf{b}(\mathbf{x}_k, t) \quad (2.35)$$

Il vettore \mathbf{f} appena introdotto viene definito *pairwise force function* da Silling e Askari [29]. E' definito come vettore di forza per unità di volume al quadrato che il nodo peridinamico \mathbf{x}_j esercita sul nodo peridinamico \mathbf{x}_k .

Il vettore \mathbf{f} deve rispettare due condizioni di ammissibilità: lineare ed angolare. Per questo motivo, sono valide le seguenti relazioni:

$$\mathbf{f}(-\boldsymbol{\eta}_{kj}, -\boldsymbol{\xi}_{kj}) = -\mathbf{f}(\boldsymbol{\eta}_{kj}, \boldsymbol{\xi}_{kj}) \quad \boldsymbol{\eta}_{kj}, \boldsymbol{\xi}_{kj} \quad (2.36)$$

$$(\boldsymbol{\xi}_{kj} + \boldsymbol{\eta}_{kj}) \times \mathbf{f}(\boldsymbol{\xi}_{kj}, \boldsymbol{\eta}_{kj}) = 0 \quad \boldsymbol{\eta}_{kj}, \boldsymbol{\xi}_{kj} \quad (2.37)$$

Dall'ultima equazione si può dedurre la condizione di parallelismo tra il vettore di forza che si crea tra due nodi ed il corrispondente vettore di posizione relativa in configurazione deformata.

La *pairwise force function* \mathbf{f} è, inoltre, linearmente dipendente dal valore dello stretch.

In base alle considerazioni effettuate, la *pairwise force function* può essere espressa come:

$$\mathbf{f}(\boldsymbol{\eta}, \boldsymbol{\xi}) = F(\boldsymbol{\eta}, \boldsymbol{\xi})(\boldsymbol{\xi} + \boldsymbol{\eta}) \quad \boldsymbol{\eta}, \boldsymbol{\xi} \quad (2.38)$$

in cui F è una funzione scalare tale per cui:

$$F(-\boldsymbol{\eta}, -\boldsymbol{\xi}) = -F(\boldsymbol{\eta}, \boldsymbol{\xi}) \quad \boldsymbol{\eta}, \boldsymbol{\xi} \quad (2.39)$$

2.8.1 Materiali isotropi e materiali microelastici

Si consideri una *pairwise force function* \mathbf{f} . Un materiale peridinamico viene definito *isotropo* quando è soddisfatta la seguente relazione:

$$\mathbf{f}(\mathbf{Q}\boldsymbol{\eta}, \mathbf{Q}\boldsymbol{\xi}) = \mathbf{Q}\mathbf{f}(\boldsymbol{\eta}, \boldsymbol{\xi}) \quad \boldsymbol{\eta}, \boldsymbol{\xi} \quad \mathbf{Q} \in \boldsymbol{\Theta} \quad (2.40)$$

in cui $\boldsymbol{\Theta}$ è un insieme tensoriale con tensori aventi proprietà di ortogonalità.

Un corpo, il cui materiale sia isotropo, risponderà alle sollecitazioni esterne in maniera indipendente dall'orientazione del materiale.

Per questo motivo, per un materiale isotropo, vale la seguente relazione:

$$F(\mathbf{Q}\boldsymbol{\eta}, \mathbf{Q}\boldsymbol{\xi}) = F(\boldsymbol{\eta}, \boldsymbol{\xi}) \quad \boldsymbol{\eta}, \boldsymbol{\xi} \quad \mathbf{Q} \in \boldsymbol{\Theta} \quad (2.41)$$

Un materiale peridinamico si dice *microelastico* se:

$$\int_{\Gamma} \mathbf{f}(\boldsymbol{\eta}, \boldsymbol{\xi}) \cdot d\boldsymbol{\eta} = 0 \quad \text{curva chiusa } \Gamma, \quad \boldsymbol{\xi} = \mathbf{0} \quad (2.42)$$

in cui Γ è una curva chiusa e $d\boldsymbol{\eta}$ è un vettore differenziale che giace lungo la curva Γ [5]. La relazione 2.42 sta a significare che il lavoro compiuto da una pairwise force function, agente tra due nodi peridinamici \mathbf{x}_k e \mathbf{x}_j , lungo una curva chiusa, è nullo.

Se \mathbf{f} è continuamente differenziabile lungo $\boldsymbol{\eta}$, allora, in base al teorema di Stokes, la condizione necessaria e sufficiente affinché l'equazione 2.42 sia valida è:

$$\boldsymbol{\eta} \times \mathbf{f}(\boldsymbol{\eta}, \boldsymbol{\xi}) = \mathbf{0} \quad \boldsymbol{\xi} = \mathbf{0} \quad (2.43)$$

dove $\boldsymbol{\eta}$ è il rotore rispetto ad $\boldsymbol{\eta}$. Sviluppando l'equazione 2.43, si ottiene:

$$\boldsymbol{\eta} \times \mathbf{f}(\boldsymbol{\eta}, \boldsymbol{\xi}) = \begin{bmatrix} \mathbf{i} & \mathbf{j} & \mathbf{k} \\ \frac{\partial}{\partial \eta_i} & \frac{\partial}{\partial \eta_j} & \frac{\partial}{\partial \eta_k} \\ f_i & f_j & f_k \end{bmatrix} = \mathbf{0} \quad (2.44)$$

Un'altra conseguenza del teorema di Stokes è che, come condizione necessaria e sufficiente affinché un materiale possa definirsi microelastico, vi sia l'esistenza di una funzione scalare w differenziabile, chiamata *micropotenziale* [29], tale per cui:

$$\mathbf{f}(\boldsymbol{\eta}, \boldsymbol{\xi}) = \frac{\partial w}{\partial \boldsymbol{\eta}}(\boldsymbol{\eta}, \boldsymbol{\xi}) \quad (2.45)$$

Il micropotenziale risulta essere espresso in funzione dello spostamento $\boldsymbol{\eta}$, solo in riferimento al valore scalare della distanza tra due punti materiali in configurazione deformata. Il micropotenziale può, infine, essere espresso ammettendo l'esistenza di una funzione scalare \hat{w} tale che:

$$w = \hat{w}(\boldsymbol{\eta} + \boldsymbol{\xi}, \boldsymbol{\xi}) \quad \boldsymbol{\xi}, \boldsymbol{\eta} \quad (2.46)$$

Sostituendo l'equazione 2.38 all'interno dell'equazione 2.43, si ottiene:

$$\mathbf{0} = \boldsymbol{\eta} \times [F(\boldsymbol{\eta}, \boldsymbol{\xi})(\boldsymbol{\xi} + \boldsymbol{\eta})] = \frac{\partial F}{\partial \boldsymbol{\eta}}(\boldsymbol{\eta}, \boldsymbol{\xi}) \times (\boldsymbol{\xi} + \boldsymbol{\eta}) \quad \boldsymbol{\xi} = \mathbf{0} \quad (2.47)$$

Tale condizione ha validità se e solo se esiste una funzione scalare A tale che:

$$\frac{\partial F}{\partial \boldsymbol{\eta}}(\boldsymbol{\eta}, \boldsymbol{\xi}) = A(\boldsymbol{\eta}, \boldsymbol{\xi})(\boldsymbol{\xi} + \boldsymbol{\eta}) \quad (2.48)$$

Infine, integrando su $\boldsymbol{\eta}$, si ottiene:

$$\mathbf{f}(\boldsymbol{\eta}, \boldsymbol{\xi}) = H(p, \boldsymbol{\xi})(\boldsymbol{\xi} + \boldsymbol{\eta}) \quad \text{con } p = \boldsymbol{\xi} + \boldsymbol{\eta} \quad \boldsymbol{\xi}, \boldsymbol{\eta} \quad (2.49)$$

Confrontando l'equazione 2.45 con l'equazione 2.49, tenendo in considerazione la relazione 2.46, risulta evidente che:

$$H(p, \boldsymbol{\xi}) = \frac{\partial \hat{w}}{\partial p}(p, \boldsymbol{\xi}) \quad (2.50)$$

In seguito all'equazione 2.49, si può esprimere la seguente deduzione: se un materiale è microelastico, tutte le coppie di nodi peridinamici \mathbf{x}_k e \mathbf{x}_j possono essere

concepite come collegate da una rigidezza (eventualmente non lineare). La forza esercitata dalla rigidezza dipende dalla distanza tra i due nodi peridinamici in configurazione deformata.

Il concetto di microelasticità è definito in maniera locale ed è legato a coppie di nodi peridinamici; per poter estendere la nozione di microelasticità al concetto di macroelasticità che prenda in esame l'intero corpo, si consideri un corpo microelastico avente una funzione micropotenziale w nota. In ogni punto materiale \mathbf{x}_k del corpo viene definita una densità di energia macroelastica:

$$W_u(\mathbf{x}_k) = \frac{1}{2} \int_{\mathcal{R}} w(\mathbf{u}_j - \mathbf{u}_k, \mathbf{x}_j - \mathbf{x}_k) dV_j \quad (2.51)$$

Tale energia è la stessa densità di energia di deformazione già definita nell'equazione 2.15 a pagina 9. Infine, viene definita l'energia totale macroelastica:

$$U_u = \int_{\mathcal{R}} W_u(\mathbf{x}_k) dV_j \quad (2.52)$$

2.8.2 Linearizzazione

Prendendo in considerazione l'ipotesi dei piccoli spostamenti, si assumono $\boldsymbol{\eta} \ll 1$ e, inoltre, $\boldsymbol{\eta} < \boldsymbol{\xi}$. Utilizzando quest'ipotesi, è possibile linearizzare la funzione $\mathbf{f}(\cdot, \boldsymbol{\xi})$, tenendo fisso $\boldsymbol{\xi}$, ottenendo:

$$\mathbf{f}(\boldsymbol{\eta}, \boldsymbol{\xi}) = \mathbf{C}(\boldsymbol{\xi})\boldsymbol{\eta} + \mathbf{f}(\mathbf{0}, \boldsymbol{\xi}) \quad \boldsymbol{\eta}, \boldsymbol{\xi} \quad (2.53)$$

in cui la funzione \mathbf{C} è un tensore del secondo ordine chiamato *micromodulo*.

Trascurando gli errori di ordine $O(\boldsymbol{\eta}^2)$, si ricava:

$$\mathbf{C}(\boldsymbol{\xi}) = \frac{\partial \mathbf{f}}{\partial \boldsymbol{\eta}}(\mathbf{0}, \boldsymbol{\xi}) \quad (2.54)$$

Il micromodulo \mathbf{C} , facendo riferimento alle equazioni 2.36 e 2.54, gode della seguente proprietà della pairwise force function \mathbf{f} :

$$\mathbf{C}(-\boldsymbol{\xi}) = \mathbf{C}(\boldsymbol{\xi}) \quad \boldsymbol{\xi} \quad (2.55)$$

Sostituendo l'equazione 2.38 all'interno della 2.54, si ottiene:

$$\mathbf{C}(\boldsymbol{\xi}) = \boldsymbol{\xi} \otimes \frac{\partial F}{\partial \boldsymbol{\eta}}(\mathbf{0}, \boldsymbol{\xi}) + F(\mathbf{0}, \boldsymbol{\xi})\mathbf{1} \quad \boldsymbol{\xi} \quad (2.56)$$

Si consideri un materiale microelastico per cui vale l'equazione 2.43 che, se esplicitata, comporta:

$$\frac{\partial \mathbf{f}_i}{\partial \boldsymbol{\eta}_j} = \frac{\partial \mathbf{f}_j}{\partial \boldsymbol{\eta}_i} \quad \text{con } i, j = 1, 2, 3 \quad (2.57)$$

Risulta, quindi, che condizione sufficiente affinché un materiale lineare sia anche microelastico è che il micromodulo sia un tensore simmetrico, ossia:

$$\mathbf{C}(\boldsymbol{\xi}) = \mathbf{C}^T(\boldsymbol{\xi}) \quad (2.58)$$

Un materiale lineare, quindi, non è necessariamente microelastico.

Per poter essere microelastico lineare, un materiale deve avere un micromodulo che sia simmetrico.

La condizione necessaria e sufficiente per cui il micromodulo \mathbf{C} sia simmetrico è che esista una funzione scalare λ tale che:

$$\boldsymbol{\xi} \otimes \frac{\partial F}{\partial \boldsymbol{\eta}}(\mathbf{0}, \boldsymbol{\xi}) = \lambda(\boldsymbol{\xi}) \boldsymbol{\xi} \otimes \boldsymbol{\xi} \quad \boldsymbol{\xi} \quad (2.59)$$

che implica la condizione di parallelismo tra i vettori $\frac{\partial F}{\partial \boldsymbol{\eta}}(\mathbf{0}, \boldsymbol{\xi})$ e $\boldsymbol{\xi}$.

Sostituendo l'equazione 2.59 all'interno dell'equazione 2.56, si ottiene:

$$\mathbf{C}(\boldsymbol{\xi}) = \lambda(\boldsymbol{\xi}) \boldsymbol{\xi} \otimes \boldsymbol{\xi} + F_0(\boldsymbol{\xi}) \mathbf{1} \quad \boldsymbol{\xi} \quad (2.60)$$

in cui λ ed F_0 sono:

$$\lambda(\boldsymbol{\xi}) = \frac{1}{\boldsymbol{\xi} \cdot \boldsymbol{\xi}} \boldsymbol{\xi} \cdot \frac{\partial F}{\partial \boldsymbol{\eta}}(\mathbf{0}, \boldsymbol{\xi}) \quad F_0(\boldsymbol{\xi}) = F(\mathbf{0}, \boldsymbol{\xi}) \quad \boldsymbol{\xi} \quad (2.61)$$

Si ottiene, infine, la formulazione lineare per un materiale microelastico della pairwise force function:

$$\mathbf{f}(\boldsymbol{\eta}, \boldsymbol{\xi}) = [\lambda(\boldsymbol{\xi}) \boldsymbol{\xi} \otimes \boldsymbol{\xi} + F_0(\boldsymbol{\xi}) \mathbf{1}] \boldsymbol{\eta} + \mathbf{f}(\mathbf{0}, \boldsymbol{\xi}) \quad (2.62)$$

2.8.3 Limitazioni al coefficiente di Poisson

La teoria peridinamica bond-based presenta una limitazione sul valore che può essere assunto dal coefficiente di Poisson:

- $\nu = \frac{1}{3}$ in caso di plane stress per un modello bidimensionale;
- $\nu = \frac{1}{4}$ in caso di plane strain per modelli bidimensionali e tridimensionali.

Il valore che può assumere il coefficiente di Poisson è il risultato del confronto tra il tensore delle tensioni secondo la teoria peridinamica bond-based ed il tensore delle tensioni secondo la teoria classica [25][26].

Il valore del coefficiente di Poisson, una volta definiti il tipo di modello e la configurazione di plane stress o plane strain, rimane costante per qualsiasi tipo di configurazione deformata subita dal corpo e per qualunque tipo di materiale utilizzato.

Tale forte restrizione limita i possibili fenomeni fisici simulabili e non permette di simulare molti dei comportamenti reali di specifici materiali.

2.8.4 Prototype Microelastic Brittle Material

Il materiale più semplice e più utilizzato per simulare fenomeni fisici nella teoria peridinamica bond-based è il *Prototype Microelastic Brittle Material* (PMB).

L'interazione che si viene a creare tra due nodi peridinamici viene chiamato *bond*.

I bond, per un materiale PMB, possono essere accomunati a delle molle meccaniche e godono delle seguenti proprietà:

- lo stretch s del bond è il rapporto tra la pairwise force function \mathbf{f} e la rigidità del bond, rappresentata dal micromodulo c del materiale;
- il bond subisce una rottura quando lo stretch s raggiunge un valore critico s_0 , chiamato *stretch critico*. Una volta che il bond si rompe, non è più possibile ripararlo;
- il bond non si può rompere quando sottoposto a compressione [30].

Nella teoria peridinamica bond-based, un corpo, costituito da un materiale PMB, viene descritto come un insieme di nodi peridinamici che instaurano tra loro, entro le rispettive sfere di influenza, dei bond caratterizzati dalle proprietà appena illustrate.

Il modello peridinamico è tempo-variante e dipende dagli stati di deformazione cui è sottoposto il corpo.

Richiamando la definizione generale della pairwise force function \mathbf{f} per un materiale microelastico, equazione 2.49, si assume la funzione scalare H come una funzione lineare del micromodulo c . La \mathbf{f} risulta, quindi:

$$\mathbf{f}(\boldsymbol{\eta}, \boldsymbol{\xi}) = cs\mu(\boldsymbol{\xi}) \frac{\boldsymbol{\eta} + \boldsymbol{\xi}}{\boldsymbol{\eta} + \boldsymbol{\xi}} \quad (2.63)$$

in cui si ricorda che lo stretch s è definito dall'equazione 2.6.

La funzione scalare $\mu(\boldsymbol{\xi})$ è definita rispetto allo stato del bond [25]:

$$\mu(\boldsymbol{\xi}) = \begin{cases} 1 & \text{se } s < s_0 \\ 0 & \text{altrimenti} \end{cases} \quad (2.64)$$

Il parametro s_0 è chiamato allungamento o stretch critico. La funzione $\mu(\boldsymbol{\xi})$ assume, quindi, un valore unitario quando il bond è integro, mentre si annulla quando il bond si rompe. Risulta evidente che, nel momento in cui il bond ha raggiunto la rottura, la forza peridinamica \mathbf{f} diventa nulla e viene meno l'interazione peridinamica tra i due nodi che costituiscono il bond.

Si introduce ora il concetto di *danno*, a partire dalla definizione del parametro $\mu(\boldsymbol{\xi})$. Il danno è un parametro fondamentale per poter descrivere i fenomeni di rottura. Silling e Askari, nel loro articolo [29], definiscono la relazione che viene comunemente utilizzata per definire il danno su un punto materiale:

$$\varphi(\mathbf{x}_k, t) = 1 - \frac{\int_H \mu(\mathbf{x}_j - \mathbf{x}_k, t) dV_j}{\int_H dV_j} \quad (2.65)$$

Il danno $\varphi(\mathbf{x}_k, t)$ è definito come il rapporto pesato tra il numero di bond rotti e il numero totale di interazioni iniziali di un nodo peridinamico con tutti i suoi nodi famiglia.

Il danno varia tra 0 e 1: quando il danno locale è unitario, significa che tutti i bond iniziali si sono rotti, mentre un danno nullo implica l'integrità totale di tutte le interazioni del nodo peridinamico in esame.

Il valore del danno, inoltre, fornisce un indice di una possibile formazione di una cricca lungo il corpo. Si osservi la figura 2.7:

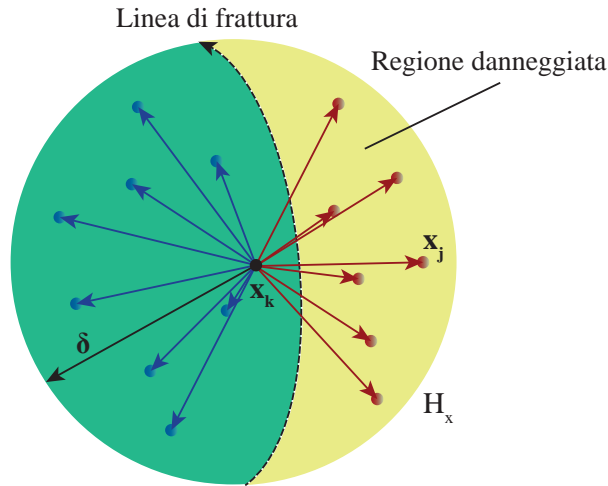


Figura 2.7: Rappresentazione di una linea di frattura che attraversa la sfera d'influenza di un nodo peridinamico \mathbf{x}_k . In blu, sono raffigurati i bond integri; in rosso, i bond danneggiati.

Inizialmente, per il nodo in esame, tutti i bond sono integri ed il valore del danno è nullo. In seguito all'insorgere di una cricca, il valore del danno cresce. L'insorgere di una cricca comporta, oltre alla rottura dei bond (linee rosse nella figura 2.7), una redistribuzione del carico sui restanti bond integri (linee blu nella figura 2.7).

Tale redistribuzione comporta, inevitabilmente, un maggior carico per i bond integri e, conseguentemente, una probabilità maggiore, per essi, di raggiungere il valore dello stretch critico e, quindi, la rottura. Mano a mano che una cricca si propaga sul corpo, un numero sempre maggiore di bond si indebolisce fino a rompersi, provocando un indebolimento locale del corpo e, conseguentemente, la propagazione della frattura seguendo un effetto a cascata.

Il valore del micromodulo c , come già esplicitato, si ricava dal confronto tra le energie di deformazione ricavate secondo l'approccio peridinamico e l'approccio classico.

Per poter ricavare il valore dello stretch critico s_0 , invece, è necessario calcolare l'energia di rottura che viene rilasciata durante la creazione delle due superfici di separazione. Secondo Silling e Askari [29], l'energia di frattura è calcolata risolvendo un integrale avente come dominio una superficie sferica con raggio pari all'orizzonte δ , raffigurata in figura 2.8:

$$G_c = \int_0^\delta \left\{ \int_0^{2\pi} \int_z^\delta \int_0^{\cos^{-1}\left(\frac{z}{\xi}\right)} \frac{1}{2} c(\xi) \xi^3 s_0^2 \sin(\phi) d\phi d\xi d\theta \right\} dz \quad (2.66)$$

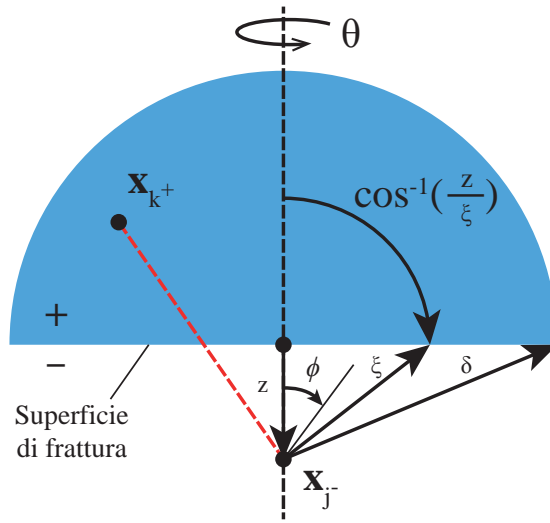


Figura 2.8: Dominio di integrazione per il calcolo dell'energia di frattura.

L'equazione 2.66 rappresenta il lavoro richiesto per rompere tutte le interazioni tra i nodi \mathbf{x}_{j-} (posti al di sotto della superficie di frattura in figura 2.8) ed i nodi \mathbf{x}_{k+} (posti al di sopra della superficie di frattura in figura 2.8).

Nel caso di un'analisi tridimensionale, l'energia di frattura risulta essere pari a:

$$G_c = \frac{1}{2} c s_0^2 \left(\frac{\delta^5 \pi}{5} \right) \quad (2.67)$$

mentre, per un modello bidimensionale, la risoluzione dell'equazione 2.66 comporta:

$$G_c = \frac{1}{2} c s_0^2 \left(\frac{h \delta^4}{2} \right) \quad (2.68)$$

nella quale h rappresenta lo spessore del materiale. Invertendo le formule appena calcolate, è possibile ricavare il valore dello stretch critico in funzione dell'energia di frattura G_c , del micromodulo c e dell'orizzonte peridinamico δ .

Si riportano di seguito i valori dei micromoduli e degli stretch critici nel caso di modelli monodimensionali, bidimensionali e tridimensionali:

Caso monodimensionale

$$c = \frac{12E}{\pi\delta^4} \quad s_0 = \sqrt{\frac{6G_c}{E\delta}} \quad (2.69)$$

Caso bidimensionale

Considerando la condizione di plane stress, si ottengono:

$$c = \frac{9E}{\pi h\delta^3} \quad s_0 = \sqrt{\frac{4\pi G_c}{9E\delta}} \quad (2.70)$$

Caso tridimensionale

$$c = \frac{48E}{5\pi h\delta^3} \quad s_0 = \sqrt{\frac{5\pi G_c}{12E\delta}} \quad (2.71)$$

2.8.5 Considerazioni sulla sfera d'influenza

Si consideri l'equazione peridinamica del moto 2.35 a pagina 15. I termini presenti nella sommatoria posti a secondo membro sono moltiplicati per il volume V_j occupato dai nodi famiglia del nodo sorgente \mathbf{x}_k . E' utile far notare, tuttavia, che non tutti i nodi presenti all'interno della sfera d'influenza del nodo sorgente hanno il volume interamente contenuto in essa. Si consideri, infatti, una griglia peridinamica uniforme di passo $\Delta x = \frac{\delta}{3}$. Si osservi la figura 2.9:

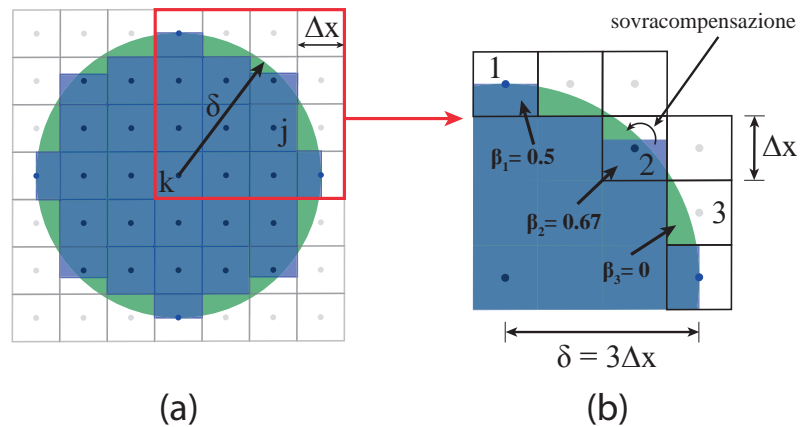


Figura 2.9: (a) Rappresentazione della sfera d'influenza di un nodo sorgente \mathbf{x}_k e (b) il calcolo del fattore di riduzione volumetrica secondo Keping [30].

I nodi famiglia che confinano con il bordo esterno della sfera d'influenza hanno il rispettivo volume V_j parzialmente contenuto all'interno di H_k ; per poter raffinare il calcolo delle porzioni di volume comprese dalla sfera di influenza, Keping [30] ha utilizzato un particolare coefficiente β chiamato *fattore di riduzione volumetrica*.

Tale fattore è definito nella maniera seguente:

$$\beta = \begin{cases} 1 & \text{con } \xi \leq \delta - 0.5\Delta x \\ \frac{\delta + 0.5\Delta x - \xi}{\Delta x} & \text{con } \delta - 0.5\Delta x < \xi \leq \delta + 0.5\Delta x \\ 0 & \text{altrimenti} \end{cases} \quad (2.72)$$

Il fattore correttivo β viene inserito all'interno dell'equazione del moto che risulta:

$$\rho_k \ddot{\mathbf{u}}_k = \sum_{j=1}^n \mathbf{f}(\mathbf{u}_j - \mathbf{u}_k, \mathbf{x}_j - \mathbf{x}_k, t) \cdot (\beta \Delta x^3) + \mathbf{b}(\mathbf{x}_k, t) \quad (2.73)$$

2.9 Teoria peridinamica state-based

Si è visto come, per la teoria peridinamica bond-based, esistano alcune restrizioni che limitano l'utilizzo di essa per la simulazione di fenomeni fisici.

La prima criticità riscontrata è relativa ai valori dei coefficienti di Poisson che possono essere utilizzati per i materiali: infatti, per la configurazione di plane stress nel caso bidimensionale, si utilizza un coefficiente di Poisson pari a $\nu = \frac{1}{3}$; mentre, per tutti gli altri casi, si utilizza un coefficiente pari a $\nu = \frac{1}{4}$.

La seconda criticità, insita nella formulazione stessa della teoria peridinamica bond-based, è la configurazione dei vettori densità di forza che si instaurano tra due punti materiali. I vettori \mathbf{t}_{kj} e \mathbf{t}_{jk} devono giacere lungo la congiungente dei punti materiali in configurazione deformata, essere uguali in modulo ed opposti in verso, generando la pairwise force function \mathbf{f} .

Al fine di superare i limiti posti dalla teoria peridinamica bond-based, Silling et al. [6] hanno formulato una teoria peridinamica più generale, chiamandola *teoria peridinamica state-based*.

La teoria peridinamica state-based è stata successivamente suddivisa in teoria peridinamica state-based *ordinaria* e teoria peridinamica state-based *non ordinaria*; tali teorie si differenziano l'una dall'altra a seconda che i vettori densità di forza giacciono o meno lungo la congiungente dei punti materiali in configurazione deformata.

2.9.1 Teoria peridinamica state-based ordinaria

Si osservi la figura 2.10. I vettori densità di forza sono paralleli al vettore di posizione relativa tra due punti materiali in configurazione deformata, sono opposti in verso, tuttavia sono differenti in modulo.

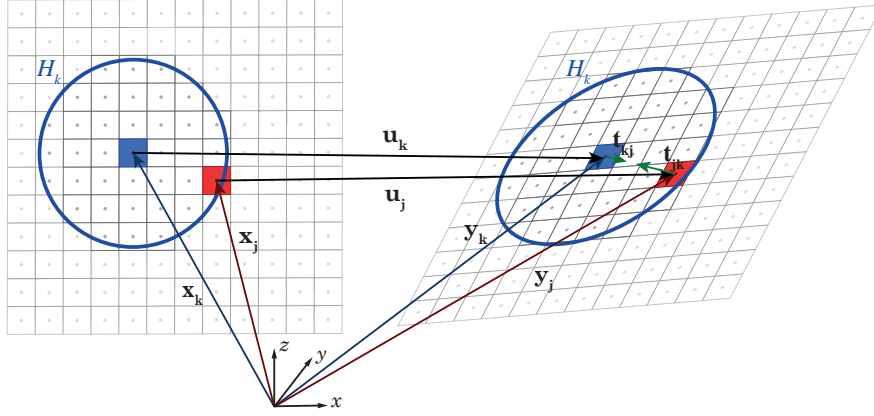


Figura 2.10: Raffigurazione delle configurazioni indeformata e deformata e della formazione di pairwise force function differenti in modulo.

Affinché si conservi il momento angolare, si può scrivere:

$$\mathbf{t}_{kj}(\mathbf{u}_j - \mathbf{u}_k, \mathbf{x}_j - \mathbf{x}_k, t) = \underline{\mathbf{T}}(\mathbf{x}_k, t) \mathbf{x}_j - \mathbf{x}_k = \frac{1}{2}A \frac{\mathbf{y}_j - \mathbf{y}_k}{\mathbf{y}_j - \mathbf{y}_k} \quad (2.74)$$

$$\mathbf{t}_{jk}(\mathbf{u}_k - \mathbf{u}_j, \mathbf{x}_k - \mathbf{x}_j, t) = \underline{\mathbf{T}}(\mathbf{x}_j, t) \mathbf{x}_k - \mathbf{x}_j = -\frac{1}{2}B \frac{\mathbf{y}_j - \mathbf{y}_k}{\mathbf{y}_j - \mathbf{y}_k} \quad (2.75)$$

dove i coefficienti A e B sono parametri che dipendono dalle caratteristiche del materiale, dal campo di deformazione e dall'orizzonte peridinamico δ .

2.9.2 Teoria peridinamica state-based non ordinaria

Si osservi la figura 2.11. I vettori densità di forza non sono più paralleli al vettore di posizione relativa tra due punti materiali in configurazione deformata e sono differenti in modulo. Tale formulazione è quella più generale possibile. Sia la teoria peridinamica bond-based che la teoria peridinamica state-based ordinaria risultano casi particolari di questa formulazione.

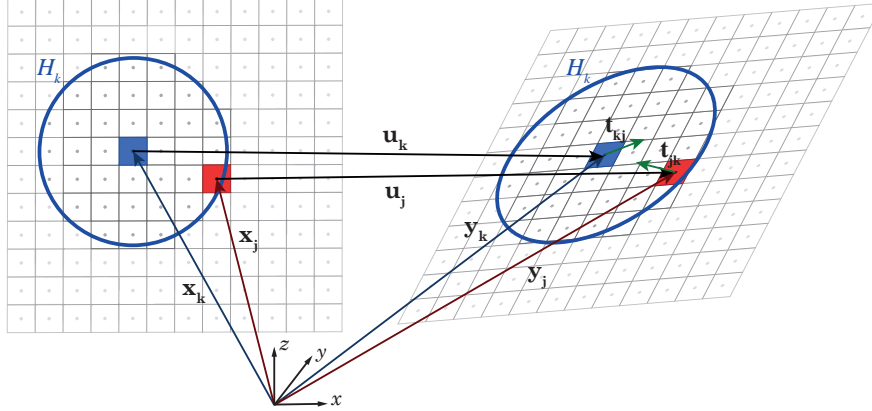


Figura 2.11: Raffigurazione delle configurazioni indeformata e deformata e dei differenti vettori densità di forza.

I vettori densità di forza devono essere definiti rispettando la conservazione del momento angolare¹. Affinché ciò sia valido, così come riportato nel libro di Oterkus e Madenci [25] e nell'articolo di Silling e Lehoucq [27], il vettore densità di forza viene messo in relazione con il gradiente di deformazione ed il tensore degli stress di Piola-Kirchoff \mathbf{P} , secondo la formulazione della meccanica classica, ottenendo:

$$\mathbf{t}_{kj}(\mathbf{u}_j - \mathbf{u}_k, \mathbf{x}_j - \mathbf{x}_k, t) = \underline{\mathbf{T}}(\mathbf{x}_k, t) \mathbf{x}_j - \mathbf{x}_k = \underline{w} \mathbf{x}_j - \mathbf{x}_k \mathbf{PK}^{-1}(\mathbf{x}_j - \mathbf{x}_k) \quad (2.76)$$

Questa equazione è valida per tutti i modelli di materiale per i quali è possibile definire \mathbf{P} e, quindi, è alla base dell'implementazione di qualsiasi tipo di comportamento dei materiali nella teoria peridinamica.

¹Per la teoria peridinamica bond-based e per la teoria peridinamica state-based ordinaria, la conservazione del momento angolare per i vettori densità di forza è garantita dal loro parallelismo con il vettore di posizione relativa tra i due punti materiali in configurazione deformata.

Capitolo 3

Teoria delle piastre di Mindlin

Una struttura piana, come si può osservare in figura 3.1, viene comunemente identificata come una piastra.

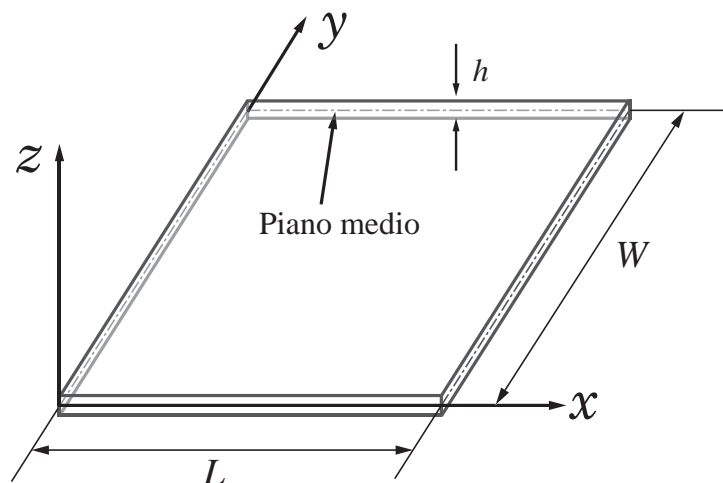


Figura 3.1: Rappresentazione grafica di una piastra.

In figura 3.1, sono riportate le dimensioni che caratterizzano una piastra: la sua lunghezza L , la sua larghezza W ed il suo spessore h .

Una piastra viene solitamente schematizzata sul suo piano medio e viene classificata come piastra "sottile" o "spessa" a seconda del suo spessore h .

Si definisce sottile, una piastra il cui spessore h è molto piccolo rispetto alle altre due dimensioni caratteristiche, ossia quando $h \ll L, W$. Sfruttando l'ipotesi di piastra sottile, è possibile scrivere, in maniera più semplice, le equazioni che governano il comportamento della struttura.

Esistono svariate teorie che descrivono il comportamento delle piastre quando soggette a sforzi trasversali, di taglio e flessionali. Le più famose sono la teoria delle piastre di Kirchhoff-Love e la teoria delle piastre di Mindlin [31][32].

Nella teoria delle piastre di Kirchhoff-Love, vengono assunte le seguenti tre ipotesi:

- a seguito della deformazione, lo spessore della piastra rimane costante;
- a seguito della deformazione, una sezione dritta, normale al piano medio, rimane dritta;
- a seguito della deformazione, una sezione normale al piano medio rimane perpendicolare ad esso.

Nella teoria delle piastre di Mindlin, permangono valide le prime due assunzioni fatte nella teoria delle piastre di Kirchhoff-Love, mentre cambia l'ultima ipotesi:

- a seguito della deformazione, una sezione normale al piano medio può ruotare e non essere più perpendicolare ad esso.

Quest'ultima ipotesi, fa sì che nella teoria delle piastre di Mindlin, che risulta essere un'estensione della teoria di Kirchhoff-Love, si tenga conto delle deformazioni a taglio lungo lo spessore, dovute alla deformazione della struttura.

Nel presente elaborato, tutte le piastre saranno modellate assumendo valida la teoria delle piastre di Mindlin.

3.1 Vettori delle deformazioni e delle tensioni

Si assuma che sia valida l'ipotesi di *plane stress*, ossia che la tensione lungo l'asse Z sia nulla: $\sigma_z = 0$. Inoltre, dal momento che si tratta di una teoria che tratta le deformazioni a taglio del primo ordine, si assumano non nulle le tensioni a taglio τ_{xz} e τ_{yz} .

E' valida l'ipotesi dei piccoli spostamenti, pertanto, i fenomeni dovuti a flessione e a taglio si potranno trattare separatamente, in maniera indipendente l'una dall'altra.

Si ricorda che, nella teoria delle piastre di Mindlin, gli effetti membranali, ossia gli allungamenti del piano medio della piastra, non vengono considerati e, quindi, il piano medio della struttura è un piano neutro.

Le deformazioni subite dalla piastra si possono interpretare come uno spostamento del piano medio w fuori dal piano, lungo la direzione dell'asse Z , e due rotazioni della normale al piano medio, relative all'asse X e all'asse Y , rispettivamente ϕ_x e ϕ_y .

Pertanto, ogni punto appartenente al piano medio della piastra sarà caratterizzato dai tre gradi di libertà: w , ϕ_x e ϕ_y .

Si osservi la figura 3.2. Essendo valide le ipotesi scritte precedentemente, si noti come una sezione perpendicolare al piano medio nella configurazione indeformata, rimanga una linea retta a seguito della deformazione, ma subisca una rotazione ϕ_y rispetto alla normale al piano medio.

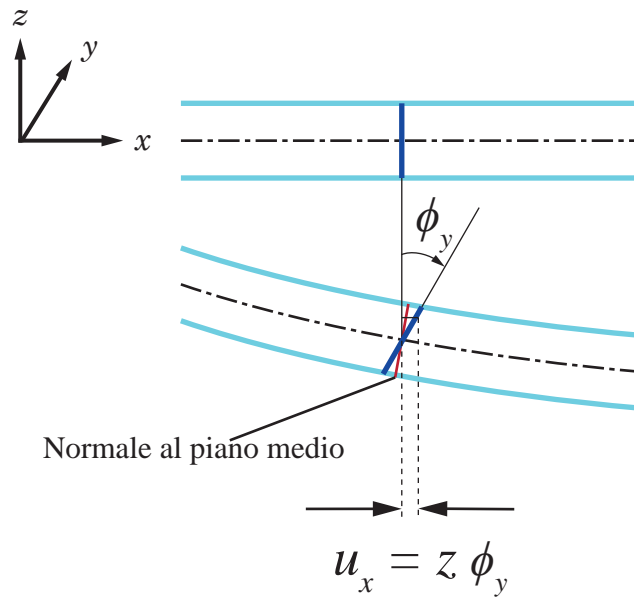


Figura 3.2: Rappresentazione della rotazione della sezione normale al piano medio attorno all'asse Y . Descrizione dello spostamento u_x .

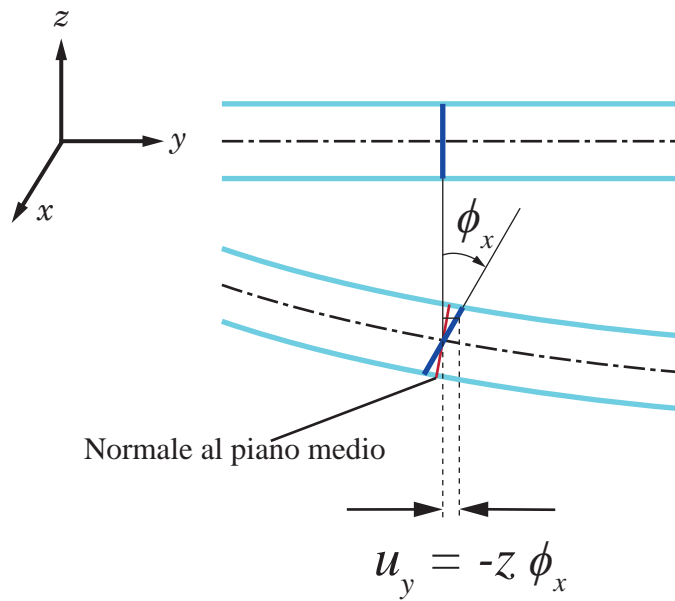


Figura 3.3: Rappresentazione della rotazione della sezione normale al piano medio attorno all'asse X . Descrizione dello spostamento u_y .

Essendo valida l'ipotesi delle piccole deformazioni, lo spostamento di tutti i punti appartenenti alla sezione, lungo l'asse X , è pari a:

$$u_x = z\phi_y \quad (3.1)$$

dove z è la coordinata lungo l'asse Z di un qualsiasi punto giacente sulla sezione, normale al piano medio, in configurazione indeformata.

Si calcola, quindi, la deformazione subita lungo l'asse X , pari a:

$$\varepsilon_x = \frac{\partial u_x}{\partial x} = z \frac{\partial \phi_y}{\partial x} \quad (3.2)$$

Analogamente a quanto calcolato nelle equazioni 3.1 e 3.2 per lo spostamento u_x e per la deformazione ε_x , riferendosi alla figura 3.3, si possono calcolare lo spostamento u_y e la deformazione ε_y :

$$u_y = -z\phi_x \quad (3.3)$$

$$\varepsilon_y = \frac{\partial u_y}{\partial y} = -z \frac{\partial \phi_x}{\partial y} \quad (3.4)$$

E' da notare che il segno negativo nelle equazioni 3.3 e 3.4 è dovuto al fatto che la deformazione induce una rotazione della sezione normale al piano medio negativa rispetto all'asse X , secondo la regola della mano destra.

Successivamente, si calcola la deformazione a taglio γ_{xy} nel piano $X - Y$:

$$\gamma_{xy} = \left[\frac{\partial u_y}{\partial x} + \frac{\partial u_x}{\partial y} \right] = z \left[-\frac{\partial \phi_x}{\partial x} + \frac{\partial \phi_y}{\partial y} \right] \quad (3.5)$$

Per le deformazioni a taglio lungo lo spessore h , γ_{xz} e γ_{yz} , si procede analogamente:

$$\gamma_{xz} = \frac{\partial u_x}{\partial z} + \frac{\partial u_z}{\partial x} \quad (3.6)$$

$$\gamma_{yz} = \frac{\partial u_y}{\partial z} + \frac{\partial u_z}{\partial y} \quad (3.7)$$

Sostituendo le equazioni 3.1 e 3.3, nelle equazioni 3.6 e 3.7, e ricordando che $u_z = w(x, y)$, si ottengono infine:

$$\gamma_{xz} = \phi_y(x, y) + \frac{\partial w(x, y)}{\partial x} \quad (3.8)$$

$$\gamma_{yz} = -\phi_x(x, y) + \frac{\partial w(x, y)}{\partial y} \quad (3.9)$$

Raggruppando le deformazioni ottenute, si possono ottenere il vettore delle deformazioni dovute a deformazioni flessionali $\boldsymbol{\varepsilon}_b$ e l'analogo vettore per le deformazioni a taglio $\boldsymbol{\varepsilon}_s$:

$$\boldsymbol{\varepsilon}_b = \begin{bmatrix} \varepsilon_x \\ \varepsilon_y \\ \gamma_{xy} \end{bmatrix} \quad (3.10)$$

$$\boldsymbol{\varepsilon}_s = \begin{bmatrix} \gamma_{xz} \\ \gamma_{yz} \end{bmatrix} \quad (3.11)$$

Volendo ora calcolare le tensioni, ricordando l'ipotesi iniziale di $\sigma_z = 0$, le leggi di Hooke affermano che:

$$\varepsilon_x = \frac{1}{E} [\sigma_x - \nu\sigma_y] \quad (3.12)$$

$$\varepsilon_y = \frac{1}{E} [\sigma_y - \nu\sigma_x] \quad (3.13)$$

dove E e ν sono, rispettivamente, il modulo di Young, o modulo di elasticità, e il coefficiente di Poisson del materiale. Risolvendo per σ_x e σ_y , si ottengono:

$$\sigma_x = \frac{E}{1 - \nu^2} [\varepsilon_x + \nu\varepsilon_y] \quad (3.14)$$

$$\sigma_y = \frac{E}{1 - \nu^2} [\varepsilon_y + \nu\varepsilon_x] \quad (3.15)$$

La tensione di taglio τ_{xy} si ricava considerando il modulo di taglio $G = \frac{E}{2(1+\nu)}$:

$$\tau_{xy} = G\gamma_{xy} \quad (3.16)$$

Analogamente a quanto effettuato per le deformazioni, si ottiene il vettore delle tensioni $\boldsymbol{\sigma}_b$ dovuto a deformazioni flessionali:

$$\boldsymbol{\sigma}_b = \begin{bmatrix} \sigma_x \\ \sigma_y \\ \tau_{xy} \end{bmatrix} = \frac{E}{1 - \nu^2} \begin{bmatrix} 1 & \nu & 0 \\ \nu & 1 & 0 \\ 0 & 0 & \frac{1-\nu}{2} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \varepsilon_x \\ \varepsilon_y \\ \gamma_{xy} \end{bmatrix} \quad (3.17)$$

Le tensioni a taglio, lungo lo spessore h , sono:

$$\tau_{xz} = kG\gamma_{xz} \quad (3.18)$$

$$\tau_{yz} = kG\gamma_{yz} \quad (3.19)$$

dove con il termine k si indica il fattore di correzione a taglio pari a $k = \frac{\pi^2}{12}$.

Il vettore delle tensioni dovute a forze di taglio $\boldsymbol{\sigma}_s$ è:

$$\boldsymbol{\sigma}_s = \begin{bmatrix} \tau_{xz} \\ \tau_{yz} \end{bmatrix} = kG \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \gamma_{xz} \\ \gamma_{yz} \end{bmatrix} \quad (3.20)$$

Si sono ottenuti, infine, i vettori delle deformazioni e delle tensioni in base alle ipotesi della teoria di Mindlin.

Volendo simulare il comportamento di piastre sottoposte a carichi e condizioni di vincolo, risulta necessario modellare le strutture ed analizzarle tramite dei metodi che permettano di ottenere dei risultati in tempi brevi. Il metodo maggiormente diffuso e più affidabile è il metodo agli elementi finiti o FEM.

3.2 Cenni sul metodo agli elementi finiti

Il metodo agli elementi finiti è una tecnica di calcolo numerica, di tipo matriciale, tramite la quale è possibile ottenere delle soluzioni approssimate a problemi strutturali.

Nella teoria classica del continuo, un qualsiasi corpo o struttura è costituito da infiniti punti materiali e, conseguentemente, possiede infiniti gradi di libertà. L'analisi di una struttura così complessa comporta, come è facile immaginare, delle complicazioni notevoli. La necessità di semplificare l'impostazione del problema e ottenere dei risultati in tempi rapidi ha portato alla formulazione del metodo degli elementi finiti.

Per poter applicare il metodo FEM, risulta necessario creare un modello della struttura in esame che sia discreto e presenti un numero finito di gradi di libertà. La discretizzazione della struttura, o idealizzazione, può essere applicata a qualsiasi tipo di struttura come, ad esempio, travi, piastre o corpi tridimensionali e comporta la creazione di una *mesh* o griglia. I punti d'intersezione di questa mesh sono chiamati *nodi* e rappresentano i punti materiali del modello.

Il corpo continuo, quindi, viene modellato in un insieme di elementi strutturali più piccoli, che possono avere qualsiasi dimensione, e il numero dei gradi di libertà viene ridotto avendo ottenuto un numero finito di nodi. E' importante ricordare che elementi strutturali adiacenti si scambieranno le forze solo tramite i nodi in comune.

Nella figura 3.4, viene illustrata la discretizzazione di un pannello, tramite una mesh ad elementi quadrati.

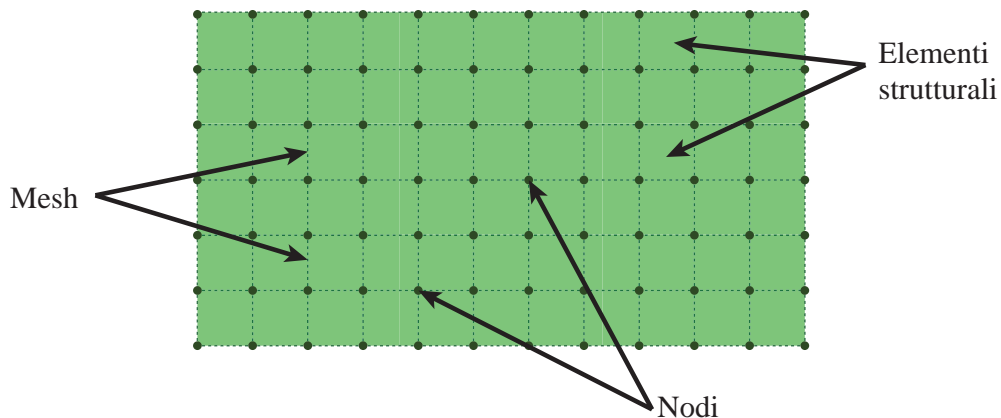


Figura 3.4: Rappresentazione grafica di una mesh FEM su un pannello strutturale.

Il metodo FEM risolve il problema strutturale calcolando gli spostamenti e le forze soltanto sui nodi del modello. Gli spostamenti calcolati sui nodi riprodurranno gli spostamenti dei punti della struttura corrispondenti, mentre gli spostamenti nei

punti intermedi saranno ottenuti tramite un'interpolazione dei risultati. Analogamente, per poter conoscere l'andamento delle tensioni sulla struttura sarà necessario operare un'interpolazione dei dati ottenuti [33].

Per poter determinare le proprietà strutturali degli elementi che discretizzano il modello, è necessario eguagliare le energie di deformazione e cinetica del modello continuo con quelle del modello discretizzato, applicando il principio dei lavori virtuali. Una volta applicato, si sarà ottenuta la matrice di rigidezza dell'elemento.

Tale matrice è di fondamentale importanza poichè, come si è detto, racchiude al suo interno tutte le informazioni riguardanti le proprietà elastiche e strutturali dell'elemento e, tramite il principio di sovrapposizione, permette di creare una matrice di rigidezza globale della struttura.

Una volta calcolata la matrice di rigidezza globale, è possibile risolvere i problemi strutturali ai quali la struttura è sottoposta, calcolando gli spostamenti, le deformazioni, le tensioni sulla struttura e le forze esterne incogniti.

Nel prosieguo della trattazione, verrà illustrato come ottenere la matrice di rigidezza per un elemento *plate*, ossia un elemento in grado di descrivere deformazioni flessionali e a taglio. Tali elementi sono stati utilizzati in tutte le simulazioni effettuate.

3.3 Le funzioni di forma per un elemento isoparametrico

Come si è visto, una mesh può essere formata da elementi di qualsiasi dimensione e tipo. Gli elementi usati più comunemente sono quelli di forma triangolare, quadrata o rettangolare; essi possono essere caratterizzati da più nodi, a seconda del tipo di interpolazione utilizzata (lineare, quadratica, cubica ecc.).

Volendo simulare il comportamento di una piastra soggetta a momenti flettenti e a sforzi di taglio, si è utilizzata una mesh ad elementi quadrati con 4 nodi. Tali elementi vengono chiamati *plate element*. Ad ogni nodo, sono stati associati tre gradi di libertà: lo spostamento fuori dal piano w e le due rotazioni ϕ_x e ϕ_y rispettivamente attorno agli assi X e Y . Gli elementi, inoltre, sono dotati di uno spessore uniforme h , pari allo spessore della piastra.

In figura 3.5, è rappresentato un elemento rettangolare a 4 nodi dotato dei gradi di libertà appena elencati.

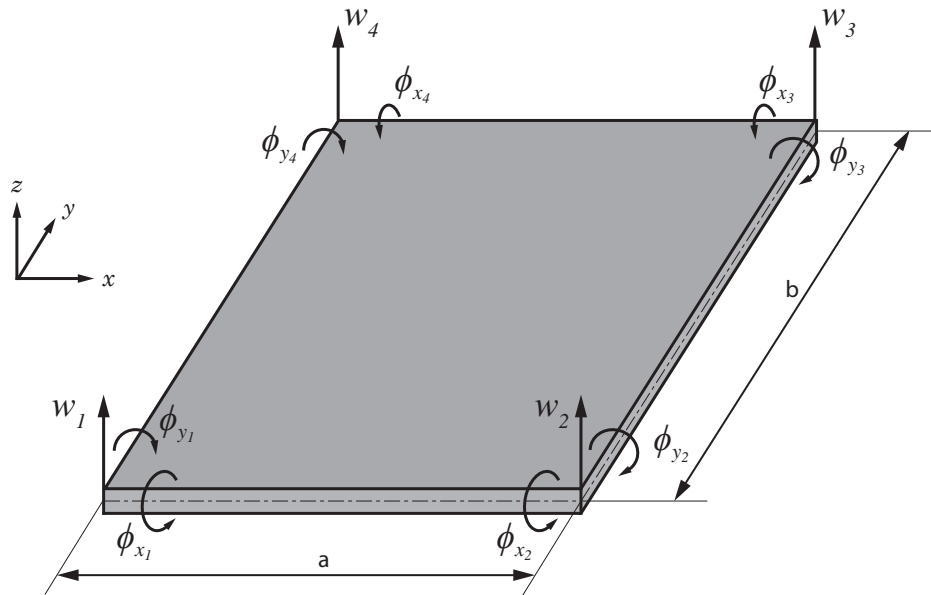


Figura 3.5: Elemento rettangolare utilizzato per modellare la struttura.

Per ottenere degli elementi quadrati, utili per la nostra struttura, basta porre l'uguaglianza tra le lunghezze dei lati del rettangolo a e b . Tuttavia, per mantenere la generalità, verrà effettuato il calcolo della matrice di rigidezza per l'elemento rettangolare.

I gradi di libertà presenti nell'elemento sono i 12 seguenti:

$$\begin{aligned}
 \text{nodo 1: } & \begin{Bmatrix} w_1 \\ \phi_{x_1} \\ \phi_{y_1} \end{Bmatrix} & \text{nodo 2: } & \begin{Bmatrix} w_2 \\ \phi_{x_2} \\ \phi_{y_2} \end{Bmatrix} \\
 \text{nodo 3: } & \begin{Bmatrix} w_3 \\ \phi_{x_3} \\ \phi_{y_3} \end{Bmatrix} & \text{nodo 4: } & \begin{Bmatrix} w_4 \\ \phi_{x_4} \\ \phi_{y_4} \end{Bmatrix}
 \end{aligned} \tag{3.21}$$

e, quindi, il vettore degli spostamenti nodali è:

$$\mathbf{u} = \begin{Bmatrix} w_1 \\ \phi_{x_1} \\ \phi_{y_1} \\ w_2 \\ \phi_{x_2} \\ \phi_{y_2} \\ w_3 \\ \phi_{x_3} \\ \phi_{y_3} \\ w_4 \\ \phi_{x_4} \\ \phi_{y_4} \end{Bmatrix} \tag{3.22}$$

Per poter semplificare la formulazione dell'elemento, soprattutto quando si ha a che fare con forme di elementi complesse, è utile introdurre il concetto di *elemento isoparametrico*.

Tale elemento è di forma semplice, di solito quadrata, ed è definito all'interno di uno spazio chiamato *locale*.

L'esistenza di questo elemento si basa su una corrispondenza biunivoca tra la sua forma semplice nello spazio locale (ξ, η, ζ) e la forma complessa nello spazio cartesiano (x, y, z) . Un qualsiasi elemento di forma complessa, quindi, può essere trasformato nell'elemento semplice che rimane immutato.

Nello spazio tridimensionale, perciò, valgono le seguenti relazioni:

$$\begin{aligned}
 x &= \sum_{i=1}^n N_i(\xi, \eta, \zeta) x_i \\
 y &= \sum_{i=1}^n N_i(\xi, \eta, \zeta) y_i \\
 z &= \sum_{i=1}^n N_i(\xi, \eta, \zeta) z_i
 \end{aligned} \tag{3.23}$$

dove x , y e z sono le coordinate di un qualsiasi punto dell'elemento nello spazio cartesiano; x_i , y_i e z_i ($i = 1, \dots, n$) sono le coordinate cartesiane degli n nodi dell'elemento e $N_i = f(\xi, \eta, \zeta)$ sono le funzioni di trasferimento, chiamate *funzioni di forma*, definite nel sistema locale.

Le funzioni di forma N_i sono in numero pari ai nodi dell'elemento ed il loro valore varia tra 0 e 1. Per l'elemento rettangolare di figura 3.5, quindi, le funzioni di forma sono N_1 , N_2 , N_3 e N_4 e, in corrispondenza del nodo i di coordinate (x_i, y_i, z_i) , la funzione N_i assumerà valore unitario, mentre le altre tre funzioni di forma N_j con $j \neq i$ assumeranno valore nullo. Pertanto, vale la seguente formula:

$$\sum_{i=1}^n N_i = 1 \quad (3.24)$$

Nella figura 3.6, sono raffigurati un elemento rettangolare ed il corrispondente elemento isoparametrico.

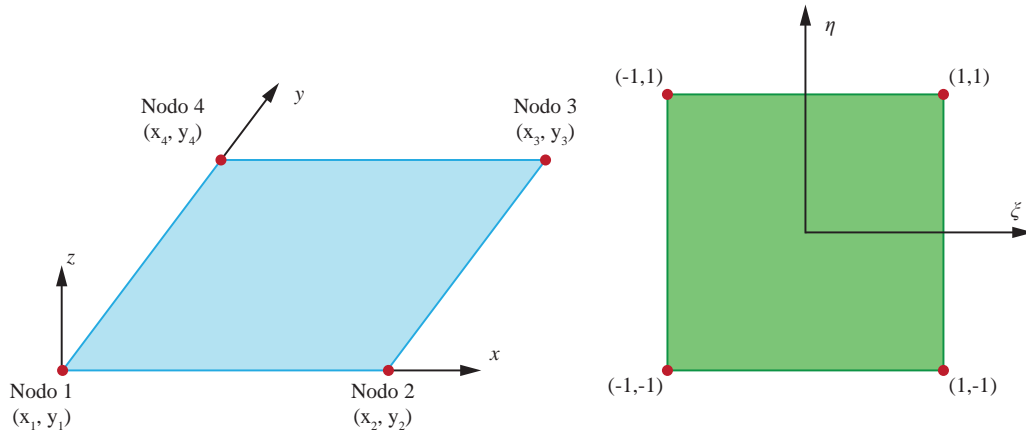


Figura 3.6: Rappresentazione grafica di un elemento rettangolare a 4 nodi, a sinistra, e dell'elemento isoparametrico, a destra.

Facendo riferimento all'elemento plate, raffigurato in figura 3.5, e all'elemento isoparametrico bilineare in figura 3.6, è possibile scrivere le funzioni di forma in funzione delle coordinate isoparametriche (ξ, η) :

$$\begin{aligned} N_1 &= \frac{1}{4} (1 - \xi) (1 - \eta) & N_2 &= \frac{1}{4} (1 + \xi) (1 - \eta) \\ N_3 &= \frac{1}{4} (1 + \xi) (1 + \eta) & N_4 &= \frac{1}{4} (1 - \xi) (1 + \eta) \end{aligned} \quad (3.25)$$

In seguito, è possibile definire il vettore delle funzioni di forma \mathbf{N} :

$$\mathbf{N} = \begin{bmatrix} N_1 \\ N_2 \\ N_3 \\ N_4 \end{bmatrix} \quad (3.26)$$

Le derivate delle funzioni di forma, in funzione delle coordinate isoparametriche (ξ, η) , possono essere scritte in forma matriciale come:

$$\mathbf{dN} = \begin{bmatrix} \frac{\partial N_1}{\partial \xi} & \frac{\partial N_1}{\partial \eta} \\ \frac{\partial N_2}{\partial \xi} & \frac{\partial N_2}{\partial \eta} \\ \frac{\partial N_3}{\partial \xi} & \frac{\partial N_3}{\partial \eta} \\ \frac{\partial N_4}{\partial \xi} & \frac{\partial N_4}{\partial \eta} \end{bmatrix} = \frac{1}{4} \begin{bmatrix} -(1-\eta) & -(1-\xi) \\ (1-\eta) & -(1+\xi) \\ (1+\eta) & (1+\xi) \\ -(1+\eta) & (1-\xi) \end{bmatrix} \quad (3.27)$$

Tuttavia, volendo ottenere una formulazione degli elementi finiti nello spazio cartesiano, è necessario ottenere il vettore delle derivate delle funzioni di forma \mathbf{dN} rispetto alle coordinate cartesiane (x, y) . Si può scrivere, quindi:

$$\frac{\partial N_i}{\partial \xi} = \frac{\partial N_i}{\partial x} \frac{\partial x}{\partial \xi} + \frac{\partial N_i}{\partial y} \frac{\partial y}{\partial \xi} \quad (3.28)$$

$$\frac{\partial N_i}{\partial \eta} = \frac{\partial N_i}{\partial x} \frac{\partial x}{\partial \eta} + \frac{\partial N_i}{\partial y} \frac{\partial y}{\partial \eta} \quad (3.29)$$

che scritte in forma matriciale risultano essere:

$$\begin{bmatrix} \frac{\partial N_i}{\partial \xi} \\ \frac{\partial N_i}{\partial \eta} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \frac{\partial x}{\partial \xi} & \frac{\partial y}{\partial \xi} \\ \frac{\partial x}{\partial \eta} & \frac{\partial y}{\partial \eta} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \frac{\partial N_i}{\partial x} \\ \frac{\partial N_i}{\partial y} \end{bmatrix} \quad (3.30)$$

Osservando il secondo membro dell'equazione 3.30, la matrice 2×2 che moltiplica il vettore delle derivate delle funzioni di forma rispetto alle coordinate cartesiane si chiama *Jacobiano*:

$$\mathbf{J} = \begin{bmatrix} \frac{\partial x}{\partial \xi} & \frac{\partial y}{\partial \xi} \\ \frac{\partial x}{\partial \eta} & \frac{\partial y}{\partial \eta} \end{bmatrix} \quad (3.31)$$

Lo Jacobiano rappresenta la trasformazione tra le coordinate cartesiane (x, y) e le coordinate isoparametriche (ξ, η) . Invertendo l'equazione 3.30, si ottiene il vettore delle derivate delle funzioni di forma rispetto alle coordinate cartesiane:

$$\begin{bmatrix} \frac{\partial N_i}{\partial x} \\ \frac{\partial N_i}{\partial y} \end{bmatrix} = \mathbf{J}^{-1} \begin{bmatrix} \frac{\partial N_i}{\partial \xi} \\ \frac{\partial N_i}{\partial \eta} \end{bmatrix} \quad (3.32)$$

Nel caso in cui lo Jacobiano fosse sconosciuto, ossia non fossero disponibili i coefficienti della matrice 3.31, \mathbf{J} si può calcolare con l'equazione 3.33:

$$\mathbf{J} = \mathbf{dN}^T \mathbf{X}_e \quad (3.33)$$

dove \mathbf{dN}^T è il vettore trasposto delle derivate delle funzioni di forma rispetto alle coordinate isoparametriche (equazione 3.27) e \mathbf{X}_e è il vettore delle coordinate dei nodi dell'elemento nello spazio cartesiano:

$$\mathbf{X}_e = \begin{bmatrix} x_1 & y_1 \\ x_2 & y_2 \\ x_3 & y_3 \\ x_4 & y_4 \end{bmatrix} \quad (3.34)$$

3.4 Calcolo delle deformazioni dell'elemento

A partire dal vettore degli spostamenti nodali \mathbf{u} , riportato nell'equazione 3.22, utilizzando le funzioni di forma 3.25, è possibile mappare tutti gli spostamenti dei punti appartenenti all'elemento raffigurato in figura 3.5.

Si scrivono le seguenti equazioni:

$$w = \sum_{i=1}^n N_i w_i \quad (3.35)$$

$$\phi_x = \sum_{i=1}^n N_i \phi_{x_i} \quad (3.36)$$

$$\phi_y = \sum_{i=1}^n N_i \phi_{y_i} \quad (3.37)$$

Sostituendo le equazioni dalla 3.35 alla 3.37 all'interno dell'equazione 3.10, si ottiene:

$$\boldsymbol{\varepsilon}_b = z \begin{bmatrix} \frac{\partial}{\partial x} \sum_{i=1}^n N_i(\xi, \eta) \phi_{y_i} \\ -\frac{\partial}{\partial y} \sum_{i=1}^n N_i(\xi, \eta) \phi_{x_i} \\ -\frac{\partial}{\partial x} \sum_{i=1}^n N_i(\xi, \eta) \phi_{x_i} + \frac{\partial}{\partial y} \sum_{i=1}^n N_i(\xi, \eta) \phi_{y_i} \end{bmatrix} \quad (3.38)$$

Espandendo i termini racchiusi nella sommatoria all'interno dell'equazione 3.38 e scorporando i termini del vettore degli spostamenti \mathbf{u} (equazione 3.22), si ottiene:

$$\boldsymbol{\varepsilon}_b = z \begin{bmatrix} 0 & 0 & \frac{\partial N_1}{\partial x} & 0 & 0 & \frac{\partial N_2}{\partial x} & 0 & 0 & \frac{\partial N_3}{\partial x} & 0 & 0 & \frac{\partial N_4}{\partial x} \\ 0 & -\frac{\partial N_1}{\partial y} & 0 & 0 & -\frac{\partial N_2}{\partial y} & 0 & 0 & -\frac{\partial N_3}{\partial y} & 0 & 0 & -\frac{\partial N_4}{\partial y} & 0 \\ 0 & -\frac{\partial N_1}{\partial x} & \frac{\partial N_1}{\partial y} & 0 & -\frac{\partial N_2}{\partial x} & \frac{\partial N_2}{\partial y} & 0 & -\frac{\partial N_3}{\partial x} & \frac{\partial N_3}{\partial y} & 0 & -\frac{\partial N_4}{\partial x} & \frac{\partial N_4}{\partial y} \end{bmatrix} \mathbf{u} \quad (3.39)$$

che, scritta in forma matriciale, risulta:

$$\boldsymbol{\varepsilon}_b = z \mathbf{B}_b \mathbf{u} \quad (3.40)$$

dove la matrice \mathbf{B}_b è la matrice delle derivate spaziali ottenute con l'equazione 3.32.

Analogamente a quanto effettuato per il vettore delle deformazioni $\boldsymbol{\varepsilon}_b$, si possono calcolare le componenti del vettore delle deformazioni a taglio $\boldsymbol{\varepsilon}_s$, in funzione del vettore degli spostamenti nodali:

$$\boldsymbol{\varepsilon}_s = \begin{bmatrix} \gamma_{xz} \\ \gamma_{yz} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \sum_{i=1}^n N_i \phi_{y_i} + \frac{\partial}{\partial x} \sum_{i=1}^n N_i w_i \\ -\sum_{i=1}^n N_i \phi_{x_i} + \frac{\partial}{\partial y} \sum_{i=1}^n N_i w_i \end{bmatrix} \quad (3.41)$$

Espandendo i termini racchiusi nella sommatoria all'interno dell'equazione 3.41 e scorporando i termini del vettore degli spostamenti \mathbf{u} (equazione 3.22), si ottiene:

$$\boldsymbol{\varepsilon}_s = \begin{bmatrix} \frac{\partial N_1}{\partial x} & 0 & N_1 & \frac{\partial N_2}{\partial x} & 0 & N_2 & \frac{\partial N_3}{\partial x} & 0 & N_3 & \frac{\partial N_4}{\partial x} & 0 & N_4 \\ \frac{\partial N_1}{\partial y} & -N_1 & 0 & \frac{\partial N_2}{\partial y} & -N_2 & 0 & \frac{\partial N_3}{\partial y} & -N_3 & 0 & \frac{\partial N_4}{\partial y} & -N_4 & 0 \end{bmatrix} \mathbf{u} \quad (3.42)$$

che, scritta in forma matriciale, risulta:

$$\boldsymbol{\varepsilon}_s = \mathbf{B}_s \mathbf{u} \quad (3.43)$$

dove le derivate spaziali delle funzioni di forma si ottengono dall'equazione 3.32.

3.5 Principio dei lavori virtuali

Ottenuti i vettori delle deformazioni ε_b e ε_s in funzione degli spostamenti nodali \mathbf{u} , come riportato nelle equazioni 3.40 e 3.43, si può procedere al calcolo delle matrici di rigidezza per i termini flessionali \mathbf{K}_b e per i termini dovuti agli sforzi di taglio \mathbf{K}_s .

Entrambe le matrici di rigidezza \mathbf{K}_b e \mathbf{K}_s sono costanti avendo assunto come vera l'ipotesi dei piccoli spostamenti e, pertanto, non è possibile simulare i comportamenti non lineari dei materiali, come può essere l'incrudimento, o i fenomeni che coinvolgono grandi deformazioni.

Per procedere al calcolo delle matrici di rigidezza, è necessario introdurre il vettore delle forze nodali \mathbf{F} che avrà 3 componenti per ogni nodo: F_z , M_x e M_y .

$$\begin{aligned} \text{nodo 1: } \begin{Bmatrix} F_1 \\ M_{x_1} \\ M_{y_1} \end{Bmatrix} & \quad \text{nodo 2: } \begin{Bmatrix} F_2 \\ M_{x_2} \\ M_{y_2} \end{Bmatrix} \\ \text{nodo 3: } \begin{Bmatrix} F_3 \\ M_{x_3} \\ M_{y_3} \end{Bmatrix} & \quad \text{nodo 4: } \begin{Bmatrix} F_4 \\ M_{x_4} \\ M_{y_4} \end{Bmatrix} \end{aligned} \tag{3.44}$$

e, quindi, il vettore delle forze nodali è:

$$\mathbf{F} = \begin{Bmatrix} F_1 \\ M_{x_1} \\ M_{y_1} \\ F_2 \\ M_{x_2} \\ M_{y_2} \\ F_3 \\ M_{x_3} \\ M_{y_3} \\ F_4 \\ M_{x_4} \\ M_{y_4} \end{Bmatrix} \tag{3.45}$$

Per ricavare la formulazione delle due matrici di rigidezza \mathbf{K}_b e \mathbf{K}_s , è necessario applicare il *Principio dei Lavori Virtuali* che afferma che il lavoro delle forze esterne virtuali è pari al lavoro delle forze interne virtuali:

$$\mathcal{L}_{v_e} = \mathcal{L}_{v_i} \tag{3.46}$$

Per effettuare il calcolo del lavoro delle forze interne virtuali, analogamente a quanto fatto finora, è possibile scomporre ed analizzare separatamente i contributi dati dalla flessione e dal taglio.

Si faccia sempre riferimento all'elemento in figura 3.5 e si ipotizzi che sia sottoposto a forze di volume \mathbf{X} ed a forze di superficie \mathbf{f} .

Tali forze generano delle tensioni, pari a quelle esplicitate nelle formule 3.17 e 3.20 rispettivamente per $\boldsymbol{\sigma}_b$ e $\boldsymbol{\sigma}_s$. L'elemento, quindi, subirà una deformazione flessionale ($\boldsymbol{\varepsilon}_b$) ed una a taglio ($\boldsymbol{\varepsilon}_s$).

Immaginando uno spostamento virtuale $\delta\mathbf{u}$, le deformazioni virtuali, date le equazioni 3.40 e 3.43, risultano essere:

$$\delta\boldsymbol{\varepsilon}_b = z\mathbf{B}_b\delta\mathbf{u} \quad (3.47)$$

$$\delta\boldsymbol{\varepsilon}_s = \mathbf{B}_s\delta\mathbf{u} \quad (3.48)$$

mentre le tensioni $\boldsymbol{\sigma}_b$ e $\boldsymbol{\sigma}_s$ possono essere scritte in forma matriciale:

$$\boldsymbol{\sigma}_b = \mathbf{D}_b\boldsymbol{\varepsilon}_b \quad (3.49)$$

$$\boldsymbol{\sigma}_s = \mathbf{D}_s\boldsymbol{\varepsilon}_s \quad (3.50)$$

I lavori delle forze esterne ed interne virtuali possono essere esplicitati come:

$$\mathcal{L}_{v_e} = \int_V (\delta\mathbf{d}^T \mathbf{X}) dV + \int_S (\delta\mathbf{d}^T \mathbf{f}) dA \quad (3.51)$$

$$\mathcal{L}_{v_i} = \int_V (\delta\boldsymbol{\varepsilon}_b^T \boldsymbol{\sigma}_b) dV + \int_V (\delta\boldsymbol{\varepsilon}_s^T \boldsymbol{\sigma}_s) dV \quad (3.52)$$

Il vettore degli spostamenti virtuali $\delta\mathbf{d}$, associato alle forze di volume e alle forze di superficie, può essere riscritto attraverso l'uso delle funzioni di forma (equazioni dalla 3.35 alla 3.37):

$$\delta\mathbf{d} = \mathbf{N}\delta\mathbf{u} \quad (3.53)$$

Perciò, il lavoro delle forze esterne virtuali \mathcal{L}_{v_e} risulta essere pari a:

$$\mathcal{L}_{v_e} = \int_V \delta\mathbf{u}^T \mathbf{N}^T \mathbf{X} dV + \int_S \delta\mathbf{u}^T \mathbf{N}^T \mathbf{f} dA \quad (3.54)$$

Il lavoro delle forze interne virtuali \mathcal{L}_{v_i} , sostituendo all'interno dell'equazione 3.52 le equazioni dalla 3.47 alla 3.50 per le deformazioni virtuali $\delta\boldsymbol{\varepsilon}_b$ e $\delta\boldsymbol{\varepsilon}_s$ e per le tensioni in forma matriciale $\boldsymbol{\sigma}_b$ e $\boldsymbol{\sigma}_s$, risulta essere:

$$\mathcal{L}_{v_i} = \int_V z^2 \delta\mathbf{u}^T \mathbf{B}_b^T \mathbf{D}_b \mathbf{B}_b \mathbf{u} dV + \int_V \delta\mathbf{u}^T \mathbf{B}_s^T \mathbf{D}_s \mathbf{B}_s \mathbf{u} dV \quad (3.55)$$

Uguagliando le espressioni 3.54 e 3.55, si ottiene un'equazione valida per ogni vettore degli spostamenti nodali virtuali $\delta \mathbf{u}$ che, pertanto, viene semplificato, ottenendo:

$$\int_V \mathbf{N}^T \mathbf{X} dV + \int_S \mathbf{N}^T \mathbf{f} dA = \int_V z^2 \mathbf{B}_b^T \mathbf{D}_b \mathbf{B}_b \mathbf{u} dV + \int_V \mathbf{B}_s^T \mathbf{D}_s \mathbf{B}_s \mathbf{u} dV \quad (3.56)$$

A primo membro dell'equazione 3.56, vi sono le trasformate, tramite le funzioni di forma, dei vettori delle forze di volume e di superficie, \mathbf{X} ed \mathbf{f} , che corrispondono al vettore delle forze nodali \mathbf{F} riportato nell'equazione 3.45.

A secondo membro, invece, portando fuori dagli integrali il vettore degli spostamenti nodali \mathbf{u} , si ottengono i due termini che corrispondono alla matrice di rigidezza flessionale \mathbf{K}_b ed alla matrice di rigidezza dovuta alle forze di taglio \mathbf{K}_s :

$$\mathbf{K}_b = \int_V z^2 \mathbf{B}_b^T \mathbf{D}_b \mathbf{B}_b dV \quad (3.57)$$

$$\mathbf{K}_s = \int_V \mathbf{B}_s^T \mathbf{D}_s \mathbf{B}_s dV \quad (3.58)$$

L'equazione 3.56, quindi, può essere scritta in forma compatta:

$$\mathbf{K}_b \mathbf{u} + \mathbf{K}_s \mathbf{u} = \mathbf{F} \quad (3.59)$$

Il calcolo dell'integrale della matrice \mathbf{K}_b , equazione 3.57, può essere effettuato osservando che il termine z è l'unico all'interno dell'integrale ad essere funzione dello spessore. Per questo motivo, può essere integrato separatamente tra $-h/2$ e $h/2$ ottenendo un integrale sulla superficie:

$$\mathbf{K}_b = \frac{h^3}{12} \int_{\Omega} \mathbf{B}_b^T \mathbf{D}_b \mathbf{B}_b d\Omega \quad (3.60)$$

Riscrivendo l'integrale in funzione delle coordinate isoparametriche (ξ, η) , si ottiene:

$$\mathbf{K}_b = \frac{h^3}{12} \int_{-1}^1 \int_{-1}^1 \mathbf{B}_b^T(\xi, \eta) \mathbf{D}_b \mathbf{B}_b(\xi, \eta) \mathbf{J}(\xi, \eta) d\xi d\eta \quad (3.61)$$

che può essere risolto tramite un'integrazione per quadratura di Gauss utilizzando quattro punti di integrazione con le seguenti coordinate $(\xi_1 = -\frac{1}{3}, \eta_1 = -\frac{1}{3})$, $(\xi_2 = \frac{1}{3}, \eta_2 = -\frac{1}{3})$, $(\xi_3 = \frac{1}{3}, \eta_3 = \frac{1}{3})$ e $(\xi_4 = -\frac{1}{3}, \eta_4 = \frac{1}{3})$.

Effettuando l'integrazione di Gauss risulta:

$$\mathbf{K}_b = \frac{h^3}{12} \sum_{i=1}^4 \mathbf{B}_b^T(\xi_i, \eta_i) \mathbf{D}_b \mathbf{B}_b(\xi_i, \eta_i) \mathbf{J}(\xi_i, \eta_i) \Delta\xi \Delta\eta \quad (3.62)$$

Il procedimento per il calcolo dell'integrale della matrice \mathbf{K}_s , equazione 3.58, può essere svolto analogamente a quanto appena effettuato. Osservando che si può trasformare l'integrale dell'equazione 3.58 in un integrale di superficie, si ottiene:

$$\mathbf{K}_s = h \int_{\Omega} \mathbf{B}_s^T \mathbf{D}_s \mathbf{B}_s d\Omega \quad (3.63)$$

e, riscrivendo tale integrale in funzione delle coordinate isoparametriche (ξ, η) , si ricava:

$$\mathbf{K}_s = h \int_{-1}^1 \int_{-1}^1 \mathbf{B}_s^T(\xi, \eta) \mathbf{D}_s \mathbf{B}_s(\xi, \eta) \mathbf{J}(\xi, \eta) d\xi d\eta \quad (3.64)$$

Al fine di evitare il fenomeno dello *shear locking*, per il calcolo di \mathbf{K}_s si effettua un'integrazione ridotta, utilizzando un solo punto di integrazione con coordinate $(\xi = 0, \eta = 0)$. L'espressione, quindi, può essere scritta come:

$$\mathbf{K}_s = h \mathbf{B}_s^T(\xi = 0, \eta = 0) \mathbf{D}_s \mathbf{B}_s(\xi = 0, \eta = 0) \mathbf{J}(\xi = 0, \eta = 0) \Delta\xi \Delta\eta \quad (3.65)$$

con i pesi $\Delta\xi = 2$ e $\Delta\eta = 2$.

In conclusione, è possibile calcolare la matrice di rigidezza \mathbf{K} dell'elemento, in funzione dei termini flessionali e di taglio, come:

$$\mathbf{K} = \mathbf{K}_b + \mathbf{K}_s \quad (3.66)$$

Una volta creato il modello agli elementi finiti, la matrice di rigidezza globale della struttura sarà calcolata, in base al principio di sovrapposizione, assemblando nella maniera corretta la matrice di rigidezza \mathbf{K} dell'elemento plate per tutti gli elementi di cui la struttura è composta.

Una volta ottenuta la matrice di rigidezza globale, sarà possibile risolvere i problemi quasi-statici lineari relativi alla struttura. Tramite l'implementazione della matrice di massa dell'elemento, sarà possibile risolvere anche problemi di natura dinamica.

L'equazione del moto in cui è presente anche la matrice di massa risulta essere:

$$\mathbf{M}\ddot{\mathbf{u}} + \mathbf{K}\mathbf{u} = \mathbf{F} \quad (3.67)$$

Capitolo 4

Equazioni del moto per la peridinamica

Nel 2014, O’Grady e Foster hanno pubblicato un articolo [34] presentando una formulazione delle piastre di Kirchhoff Love basata sulla teoria peridinamica state-based non ordinaria.

Nell’articolo pubblicato nel 2015 [24], Diyaroglu et al. hanno studiato una nuova formulazione peridinamica per descrivere il comportamento di piastre sottili e spesse in cui vengono tenute in considerazione le deformazioni a taglio attraverso lo spessore della piastra. Tale nuova formulazione si basa sulla teoria peridinamica bond-based e tratta le piastre secondo la teoria di Mindlin.

4.1 Cinematica per la piastra

Come si è già scritto nel capitolo 2 a pagina 5, il corpo continuo, che deve essere modellato, viene discretizzato tramite una serie di punti materiali chiamati nodi peridinamici.

Ad ogni istante di tempo, le deformazioni fuori dal piano e le rotazioni di una piastra si possono ricondurre alle infinite deformazioni e rotazioni dei nodi peridinamici che costituiscono il modello in esame.

Nella configurazione indeformata, ogni nodo peridinamico può essere identificato dal vettore delle coordinate ad esso associato \mathbf{x}_k (con $k = 1, 2, \dots, t$ numero dei nodi del modello). Ad ogni nodo sono associati anche un volume V_k ed una densità $\rho(\mathbf{x}_k)$.

Si ricorda come la teoria peridinamica sia una teoria non-locale. Preso un nodo di riferimento \mathbf{x}_k , chiamato nodo sorgente, esso interagirà tramite una forza, chiamata forza peridinamica, con tutti i nodi famiglia \mathbf{x}_j appartenenti alla sua sfera di influenza.

Preso un nodo sorgente \mathbf{x}_k , si definisce sfera di influenza H_k la regione di spazio centrata sul nodo sorgente ed avente una distanza massima da esso pari all’orizzonte δ .

L’interazione peridinamica presente nei bond è definita tramite un micropotenziale che è funzione dello stato del bond (indeformato, deformato, rotto) e delle proprietà costitutive del materiale (attraverso un coefficiente chiamato micromodulo); tale interazione ha valore solo per i nodi interni alla sfera d’influenza del nodo

sorgente \mathbf{x}_k . Al di fuori di essa, infatti, il micropotenziale diventa nullo e i nodi esterni non influenzano il comportamento del nodo centrale.

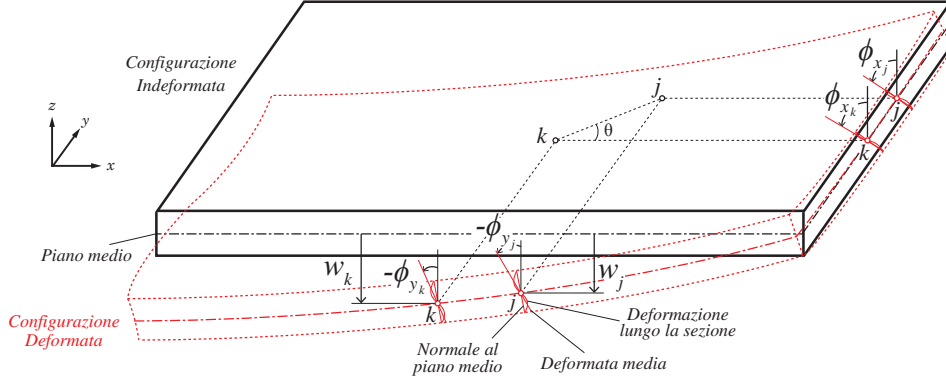


Figura 4.1: Configurazione indeformata e deformata per una piastra di Mindlin. Rappresentazione dei gradi di libertà per i nodi peridinamici k e j .

Si osservi la figura 4.1. Si consideri il nodo k come nodo sorgente ed il nodo j come nodo famiglia. Rispetto alla linea di azione, linea congiungente i punti j e k , la curvatura κ_{kj} si può identificare come:

$$\kappa_{kj} = \frac{\phi_j - \phi_k}{\xi_{kj}} \quad (4.1)$$

dove con ξ_{kj} si indica la distanza tra i punti j e k .

Si possono identificare le rotazioni dei nodi k e j con ϕ_k e ϕ_j . Tali rotazioni sono definite rispetto alla linea di azione. Attraverso un cambio di coordinate, le rotazioni dei nodi possono essere scritte come composizione delle rotazioni dei nodi, attorno all'asse X e all'asse Y ¹. Si ottengono, quindi:

$$\phi_j = \phi_{x_j} \sin \theta - \phi_{y_j} \cos \theta \quad (4.2)$$

$$\phi_k = \phi_{x_k} \sin \theta - \phi_{y_k} \cos \theta \quad (4.3)$$

Sostituendo le equazioni 4.2 e 4.3 all'interno dell'equazione 4.1, si ottiene l'espressione per la curvatura:

$$\kappa_{kj} = \left(\frac{\phi_{x_j} - \phi_{x_k}}{x_j - x_k} \right) \sin^2 \theta + \left(\frac{\phi_{y_k} - \phi_{y_j}}{x_j - x_k} \right) \cos^2 \theta \quad (4.4)$$

nella quale si sono utilizzate:

$$x_j - x_k = \xi_{kj} \cos \theta \quad y_j - y_k = \xi_{kj} \sin \theta \quad (4.5)$$

¹Per rendere coerente la notazione degli elementi FEM con la notazione peridinamica, si è scelta una notazione di erente per ϕ_x e ϕ_y rispetto a quella utilizzata da Diyaroglu et al. nel loro articolo [24]. Nel presente elaborato, si è scelto di considerare positive le rotazioni attorno agli assi secondo la regola della mano destra.

Le deflessioni fuori dal piano per i nodi k e j sono rispettivamente w_k e w_j e la pendenza, sempre rispetto alla linea d'azione tra i due punti, è data da:

$$\vartheta_{kj} = \frac{w_j - w_k}{\xi_{kj}} \quad (4.6)$$

Sempre osservando la figura 4.1, l'angolo di taglio lungo lo spessore (*transverse shear angle*) dei punti j e k può essere scritto come:

$$\varphi_j = \vartheta_{kj} - \phi_j \quad (4.7)$$

$$\varphi_k = \vartheta_{kj} - \phi_k \quad (4.8)$$

Continuando ad assumere il punto k come nodo sorgente ed il punto j come nodo famiglia, allora l'angolo di taglio lungo lo spessore tra il nodo k ed il nodo j , può essere espresso come il valore della semisomma degli angoli calcolati nelle equazioni 4.7 e 4.8, ottenendo:

$$\varphi_{kj} = \frac{w_j - w_k}{\xi_{kj}} - \frac{\phi_j + \phi_k}{2} \quad (4.9)$$

e, ricordando le espressioni per ϕ_j e ϕ_k (equazioni 4.2 e 4.3), si scrive:

$$\varphi_{kj} = \frac{w_j - w_k}{\xi_{kj}} - \frac{(\phi_{x_j} + \phi_{x_k}) \sin \theta - (\phi_{y_j} + \phi_{y_k}) \cos \theta}{2} \quad (4.10)$$

Nelle equazioni 4.4 e 4.10 si sono ottenute, rispettivamente, le espressioni per la curvatura e per l'angolo di taglio lungo lo spessore considerando il nodo k come nodo sorgente ed il nodo j come nodo famiglia. Quando si inverte tale selezione, ossia si prende il nodo j come nodo sorgente ed il nodo k come nodo famiglia, le espressioni per la curvatura e l'angolo di taglio si calcolano in maniera analoga a quanto appena riportato, ottenendo:

$$\kappa_{jk} = \frac{\phi_k - \phi_j}{\xi_{jk}} \quad (4.11)$$

$$\varphi_{jk} = \frac{w_k - w_j}{\xi_{jk}} - \left(-\frac{\phi_k + \phi_j}{2} \right) \quad (4.12)$$

Osservando che $\xi_{kj} = \xi_{jk}$, è utile segnalare che valgono le seguenti relazioni:

$$\kappa_{kj} = -\kappa_{jk} \quad (4.13)$$

$$\varphi_{kj} = -\varphi_{jk} \quad (4.14)$$

4.2 Equazioni del moto

Le equazioni del moto per i nodi peridinamici che costituiscono la piastra possono essere ricavate risolvendo l'equazione di Lagrange, come già descritto nel paragrafo 2.6 a pagina 10.

Preso come nodo sorgente il nodo k , l'equazione di Lagrange risulta essere:

$$\frac{d}{dt} \left(\frac{\partial \mathcal{L}}{\partial \dot{\mathbf{q}}_k} \right) - \frac{\partial \mathcal{L}}{\partial \mathbf{q}_k} \quad (4.15)$$

in cui con il termine \mathbf{q}_k si intende il vettore delle variabili indipendenti (deflessioni fuori dal piano e rotazioni); con il termine $\dot{\mathbf{q}}_k$ si intende il vettore delle derivate delle variabili indipendenti; infine, con il termine \mathcal{L} si intende il *Lagrangiano* esprimibile come:

$$\mathcal{L} = T - U \quad (4.16)$$

dove T è l'energia cinetica totale del sistema ed U l'energia potenziale totale.

Considerando la piastra discretizzata di figura 4.1, il calcolo dell'energia cinetica totale T risulta essere pari a:

$$T = \frac{1}{2} \rho \sum_{k=1}^t [\dot{u}_k^2 + \dot{v}_k^2 + \dot{w}_k^2] V_k \quad (4.17)$$

dove l'indice t indica il numero totale dei nodi della struttura discretizzata.

Sapendo che gli spostamenti nel piano sono in funzione delle rotazioni, essi risultano pari a $u_k = z\phi_{y_k}$ e $v_k = -z\phi_{x_k}$. Successivamente, sostituendo i valori di u_k e v_k all'interno della 4.17 ed integrando lungo lo spessore h della piastra, si ottiene:

$$T = \frac{1}{2} \rho \sum_{k=1}^t \left[\int_{-\frac{h}{2}}^{\frac{h}{2}} \left(z^2 \dot{\phi}_{y_k}^2 + z^2 \dot{\phi}_{x_k}^2 + \dot{w}_k^2 \right) dz \right] A_k \quad (4.18)$$

che risulta essere pari a:

$$T = \frac{1}{2} h \rho \sum_{k=1}^t \left(\frac{h^3}{12} \dot{\phi}_{y_k}^2 + \frac{h^3}{12} \dot{\phi}_{x_k}^2 + \dot{w}_k^2 \right) A_k \quad (4.19)$$

in cui con A_k si intende l'area infinitesimale occupata dal nodo k .

L'energia potenziale totale del sistema può essere calcolata a partire dai micropotenziali dovuti alle deformazioni della struttura. Prendendo sempre come nodo sorgente il nodo k , il micropotenziale dovuto alle deformazioni flessionali è pari a:

$$\tilde{w}_{kj} (\kappa_{kj}) = c_b \frac{\xi_{kj} \kappa_{kj}^2}{h} \quad (4.20)$$

mentre il micropotenziale dovuto alle deformazioni a taglio risulta essere:

$$\hat{w}_{kj} (\varphi_{kj}) = c_s \frac{\xi_{kj} \varphi_{kj}^2}{h} \quad (4.21)$$

dove con i coefficienti c_b e c_s si indicano i micromoduli peridinamici.

Tali coefficienti sono stati calcolati da Diyaroglu et al., nel loro articolo [24], considerando il fatto che quando l'orizzonte δ tende a zero, le equazioni peridinamiche devono convergere a quelle della meccanica classica. Tuttavia, da alcune simulazioni effettuate per il presente lavoro, si è notato che i risultati migliorano quando si fa uso dei micromoduli presentati da Oterkus et al. nel loro articolo [35].

Nei calcoli effettuati da Oterkus et al. [35], c_b e c_s sono pari a:

$$c_b = \frac{3Eh^2}{4\pi\delta^3} \quad (4.22)$$

$$c_s = \frac{9E}{4\pi\delta^3}k \quad (4.23)$$

in cui E indica il modulo di Young del materiale, h è lo spessore della piastra, δ l'orizzonte peridinamico e con k si indica il fattore di correzione a taglio pari a:

$$k = \frac{\pi^2}{12} \quad (4.24)$$

Analogamente a quanto visto per le espressioni 4.13 e 4.14, se si considera il nodo j come nodo sorgente, i micropotenziali saranno $\tilde{w}_{jk}(\kappa_{jk})$ e $\hat{w}_{jk}(\varphi_{jk})$ e, tenuto conto delle equazioni 4.20 e 4.21, risulteranno pari a:

$$\tilde{w}_{jk}(\kappa_{jk}) = c_b \frac{\xi_{jk} \kappa_{jk}^2}{h} \frac{1}{2} \quad (4.25)$$

$$\hat{w}_{jk}(\varphi_{jk}) = c_s \frac{\xi_{jk} \varphi_{jk}^2}{h} \frac{1}{2} \quad (4.26)$$

Ottenute le espressioni dei micropotenziali 4.20, 4.21, 4.25 e 4.26, infine, è possibile scrivere l'equazione per l'energia cinetica potenziale totale:

$$U = \sum_{k=1}^t \left\{ \frac{1}{2} \sum_{j=1}^n \frac{1}{2} [\tilde{w}_{kj}(\kappa_{kj}) + \tilde{w}_{jk}(\kappa_{jk})] V_j - \frac{\tilde{b}_{\alpha_k}}{h} \phi_{\alpha_k} \right\} V_k \\ + \sum_{k=1}^t \left\{ \frac{1}{2} \sum_{j=1}^n \frac{1}{2} [\hat{w}_{kj}(\varphi_{kj}) + \hat{w}_{jk}(\varphi_{jk})] V_j - \frac{\hat{b}_k}{h} w_k \right\} V_k \quad (4.27)$$

dove l'indice n indica il numero di nodi famiglia j appartenenti alla sfera di influenza H_k del nodo sorgente k . I termini \tilde{b}_{α_k} e \hat{b}_k sono, rispettivamente, il momento e la forza risultanti applicati al punto k .

Infine, è utile notare che:

$$\tilde{w}_{kj}(\kappa_{kj}) = \tilde{w}_{jk}(\kappa_{jk}) = \hat{w}_{kj}(\varphi_{kj}) = \hat{w}_{jk}(\varphi_{jk}) = 0 \quad \text{quando } j = k \quad (4.28)$$

Il vettore delle variabili indipendenti \mathbf{q}_k , necessario per risolvere l'equazione di Lagrange (equazione 4.15), è composto dagli spostamenti fuori dal piano w_k e dalle rotazioni ϕ_{x_k} e ϕ_{y_k} del nodo k .

Le equazioni di Lagrange (equazione 4.15) per le tre variabili indipendenti, risultano essere:

$$\frac{d}{dt} \left(\frac{\partial \mathcal{L}}{\partial \dot{w}_k} \right) - \frac{\partial \mathcal{L}}{\partial w_k} = 0 \quad (4.29)$$

$$\frac{d}{dt} \left(\frac{\partial \mathcal{L}}{\partial \dot{\phi}_{x_k}} \right) - \frac{\partial \mathcal{L}}{\partial \phi_{x_k}} = 0 \quad (4.30)$$

$$\frac{d}{dt} \left(\frac{\partial \mathcal{L}}{\partial \dot{\phi}_{y_k}} \right) - \frac{\partial \mathcal{L}}{\partial \phi_{y_k}} = 0 \quad (4.31)$$

Sfruttando la definizione di Lagrangiano nell'equazione 4.16 ed utilizzando le equazioni 4.2, 4.3, 4.4, 4.10, 4.11, 4.12, si possono risolvere le equazioni, ottenendo:

$$\rho \ddot{w}_k + \frac{c_s}{h} \sum_{j=1}^n \left(\frac{w_k - w_j}{\xi_{kj}} + \frac{\phi_{x_k} + \phi_{x_j}}{2} \sin \theta - \frac{\phi_{y_k} + \phi_{y_j}}{2} \cos \theta \right) V_j = \frac{\hat{b}_k}{h} \quad (4.32)$$

$$\begin{aligned} \rho \frac{h^2}{12} \ddot{\phi}_{x_k} + \frac{c_b}{h} \sum_{j=1}^n \left[\left(\frac{\phi_{x_k} - \phi_{x_j}}{\xi_{kj}} \right) \sin \theta + \left(\frac{\phi_{y_j} - \phi_{y_k}}{\xi_{kj}} \right) \cos \theta \right] \sin \theta V_j \\ + \frac{1}{2} \frac{c_s}{h} \sum_{j=1}^n \xi_{kj} \left(\frac{w_k - w_j}{\xi_{kj}} + \frac{\phi_{x_k} + \phi_{x_j}}{2} \sin \theta \right. \\ \left. - \frac{\phi_{y_k} + \phi_{y_j}}{2} \cos \theta \right) \sin \theta V_j = \frac{\tilde{b}_{x_k}}{h} \end{aligned} \quad (4.33)$$

$$\begin{aligned} \rho \frac{h^2}{12} \ddot{\phi}_{y_k} + \frac{c_b}{h} \sum_{j=1}^n \left[\left(\frac{\phi_{x_j} - \phi_{x_k}}{\xi_{kj}} \right) \sin \theta + \left(\frac{\phi_{y_k} - \phi_{y_j}}{\xi_{kj}} \right) \cos \theta \right] \cos \theta V_j \\ + \frac{1}{2} \frac{c_s}{h} \sum_{j=1}^n \xi_{kj} \left(\frac{w_j - w_k}{\xi_{kj}} - \frac{\phi_{x_k} + \phi_{x_j}}{2} \sin \theta \right. \\ \left. + \frac{\phi_{y_k} + \phi_{y_j}}{2} \cos \theta \right) \cos \theta V_j = \frac{\tilde{b}_{y_k}}{h} \end{aligned} \quad (4.34)$$

Le equazioni 4.32, 4.33 e 4.34 descrivono il moto del nodo sorgente k .

La derivazione delle equazioni 4.32, 4.33 e 4.34 è riportata, in maniera esplicita, nell'Appendice A a pagina 125.

4.3 Matrici di rigidezza

Al fine di costruire un modello accoppiato tra griglie peridinamiche ed elementi finiti, risulta necessario costruire la matrice di rigidezza del modello peridinamico.

Si prenda l'equazione 4.32, in cui viene descritta l'equazione del moto per il grado di libertà w_k . Per semplicità, si trascurino i termini relativi alle inerzie ed alle forze esterne. Si considerino solo due nodi: il nodo sorgente k ed un nodo famiglia j .

I termini relativi alla rigidezza possono essere riscritti in forma matriciale, nella seguente maniera:

$$\frac{c_s V_j}{h} \begin{bmatrix} 1 & \frac{\sin \theta}{2} & -\frac{\cos \theta}{2} & -\frac{1}{\xi_{kj}} & \frac{\sin \theta}{2} & -\frac{\cos \theta}{2} \end{bmatrix} \begin{Bmatrix} w_k \\ \phi_{x_k} \\ \phi_{y_k} \\ w_j \\ \phi_{x_j} \\ \phi_{y_j} \end{Bmatrix} \quad (4.35)$$

L'equazione 4.35 rappresenta la rigidezza del bond tra il nodo sorgente k ed un nodo famiglia j . Per ottenere la matrice di rigidezza per il nodo k , considerando tutti i suoi nodi famiglia j , risulta necessario considerare la sommatoria presente nell'equazione 4.32.

La matrice di rigidezza, quindi, risulterà essere una matrice avente un numero di colonne pari a $3(n+1)$ dove n sono i nodi famiglia totali per il nodo k .

Risulta necessario sottolineare che l'angolo θ è l'angolo che la congiungente i nodi k e j forma con l'asse X , come si può osservare in figura 4.1. Tale angolo varia a seconda di quale nodo famiglia j si stia considerando. Pertanto, non è un termine costante all'interno della sommatoria nell'equazione 4.32.

Analogamente a quanto effettuato per l'equazione 4.32, è possibile calcolare la matrice di rigidezza per il singolo bond per gli altri due gradi di libertà ϕ_{x_k} e ϕ_{y_k} a partire dalle equazioni 4.33 e 4.34 e, successivamente, la matrice di rigidezza per il nodo sorgente k , considerando tutti i nodi appartenenti alla sua sfera d'influenza.

Considerando tutti e tre i gradi di libertà in gioco, per la teoria delle piastre di Mindlin, la matrice di rigidezza per un singolo bond si ottiene unendo le tre matrici di rigidezza calcolate in maniera analoga all'equazione 4.35.

Nell'equazione 4.36 sono riportate, in forma matriciale, le equazioni del moto per un nodo sorgente k avente un singolo bond con un nodo famiglia j .

Per semplicità, si è utilizzata la seguente notazione:

$$\sin \theta = s\theta \quad \cos \theta = c\theta \quad \xi_{kj} = \xi$$

$$\begin{bmatrix} \rho & 0 & 0 \\ 0 & \rho \frac{h^2}{12} & 0 \\ 0 & 0 & \rho \frac{h^2}{12} \end{bmatrix} \begin{Bmatrix} \ddot{w}_k \\ \ddot{\phi}_{x_k} \\ \ddot{\phi}_{y_k} \end{Bmatrix} +$$

$$\frac{c_s V_j}{h} \begin{bmatrix} \frac{1}{\xi} & \frac{s\theta}{2} & -\frac{c\theta}{2} & -\frac{1}{\xi} & \frac{s\theta}{2} & -\frac{c\theta}{2} \\ \frac{s\theta}{2} & \frac{c_b s^2\theta}{c_s \xi} + \frac{c_s \xi s^2\theta}{4} & -\frac{c_b c\theta s\theta}{c_s \xi} - \frac{c_s \xi c\theta s\theta}{4} & -\frac{s\theta}{2} & -\frac{c_b s^2\theta}{c_s \xi} + \frac{c_s \xi s^2\theta}{4} & \frac{c_b c\theta s\theta}{c_s \xi} - \frac{c_s \xi c\theta s\theta}{4} \\ -\frac{c\theta}{2} & -\frac{c_b c\theta s\theta}{c_s \xi} - \frac{c_s \xi c\theta s\theta}{4} & \frac{c_b c^2\theta}{c_s \xi} + \frac{c_s \xi c^2\theta}{4} & \frac{c\theta}{2} & \frac{c_b c\theta s\theta}{c_s \xi} - \frac{c_s \xi c\theta s\theta}{4} & -\frac{c_b c^2\theta}{c_s \xi} + \frac{c_s \xi c^2\theta}{4} \end{bmatrix} \begin{Bmatrix} w_k \\ \phi_{x_k} \\ \phi_{y_k} \\ w_j \\ \phi_{x_j} \\ \phi_{y_j} \end{Bmatrix}$$

$$= \begin{Bmatrix} \frac{\hat{b}_k}{h} \\ \frac{\tilde{b}_{x_k}}{h} \\ \frac{\tilde{b}_{y_k}}{h} \end{Bmatrix} \quad (4.36)$$

4.4 Curvatura e angolo di taglio critici

Al fine di descrivere lo stato di un bond (integro o rotto), è necessario introdurre il concetto di curvatura e angolo di taglio critico, rispettivamente κ_c e φ_c . Tali parametri sono analoghi al concetto di allungamento critico.

Le *pairwise force functions* che intercorrono tra i due nodi che costituiscono il bond, dovute agli sforzi di taglio ed alla flessione, rispettivamente \hat{f}_{kj} e \tilde{f}_{kj} , sono:

$$\hat{f}_{kj} = \frac{c_s}{h} \mu(\xi_{kj}) \varphi_{kj} \quad (4.37)$$

$$\tilde{f}_{kj} = \frac{c_b}{h} \mu(\xi_{kj}) \kappa_{kj} \quad (4.38)$$

in cui la funzione scalare $\mu(\xi_{kj})$ è definita rispetto allo stato del bond:

$$\mu(\xi_{kj}) = \begin{cases} 1 & \text{se } \kappa_{kj} < \kappa_c \text{ e } \varphi_{kj} < \varphi_c \\ 0 & \text{altrimenti} \end{cases} \quad (4.39)$$

Risulta chiaro che il bond è integro quando la funzione scalare $\mu(\xi_{kj})$ assume valore unitario.

I valori della curvatura e dell'angolo di taglio critico sono ricavabili in funzione dell'energia di frattura necessaria a rompere tutte le interazioni che intersecano la superficie di frattura.

Basandosi sul testo di Oterkus e Madenci [25] e sull'articolo scritto da Silling e Askari [29], l'energia di frattura dovuta a sforzi flettenti è calcolabile tramite l'energia di frattura del modo I G_{Ic} , ottenendo:

$$G_{Ic} = \frac{1}{2} \frac{c_b}{h} \kappa_c^2 \frac{h\delta^4}{2} \quad (4.40)$$

da cui si ricava la curvatura critica:

$$\kappa_c = \sqrt{\frac{4G_{Ic}}{c_b\delta^4}} \quad (4.41)$$

Analogamente, l'energia di frattura dovuta a sforzi di taglio è calcolabile a partire dall'energia di frattura del modo III G_{IIIc} , ricavando:

$$G_{IIIc} = \frac{1}{2} \frac{c_s}{h} \varphi_c^2 \frac{h\delta^4}{2} \quad (4.42)$$

infine, si può calcolare l'angolo di taglio critico:

$$\varphi_c = \sqrt{\frac{4G_{IIIc}}{c_s\delta^4}} \quad (4.43)$$

Capitolo 5

Accoppiamento delle griglie peridinamiche con gli elementi finiti

La teoria peridinamica, applicata all'analisi strutturale, permette di descrivere in maniera ottimale le deformazioni di corpi nei quali siano presenti delle discontinuità. Il fenomeno delle cricche e la loro propagazione, pertanto, risultano ottimi esempi di applicazione di questo tipo di analisi.

I modelli peridinamici, tuttavia, soffrono di alcune criticità. Infatti, dal momento che i nodi peridinamici interagiscono con numerosi nodi famiglia, i metodi numerici basati sulla teoria peridinamica sono molto più dispendiosi dal punto di vista computazionale rispetto a quelli basati sulla teoria classica del continuo come, ad esempio, i metodi agli elementi finiti.

Un'altra problematica deriva dall'applicazione delle condizioni al contorno che, nella teoria peridinamica, devono essere applicate in regioni di spazio specifiche (fittizie e reali).

L'accoppiamento tra griglie peridinamiche ed elementi finiti, che può essere visto come un caso particolare dell'accoppiamento tra teoria locali e non-locali [26][36], risulta conveniente per sfruttare al meglio le caratteristiche di entrambi i metodi e superare i loro rispettivi limiti. All'interno di un modello, la zona peridinamica si potrebbe limitare alla regione in cui è possibile che la cricca si generi e si propaghi, mentre la restante parte della struttura verrebbe modellata con elementi finiti, in particolare, le zone in cui vanno applicate le condizioni al contorno.

Nel metodo agli elementi finiti, differenti tipi di mesh, realizzate anche con elementi di forme differenti, vengono accoppiate semplicemente condividendo i nodi presenti nella discretizzazione.

Dal momento che, nelle griglie peridinamiche, le condizioni al contorno (come carichi o spostamenti imposti) vanno applicate non su singoli nodi, ma su porzioni di volume, la semplice tecnica di condivisione dei nodi tra griglie peridinamiche e mesh FEM non può essere utilizzata [28].

Per realizzare l'accoppiamento, risulta necessario che esso sia effettuato lungo una regione posta ad una certa distanza, preferibilmente pari ad un orizzonte δ , dalla zona di contatto tra le due differenti discretizzazioni.

Gli articoli e gli studi sull'accoppiamento tra elementi finiti e griglie peridinamiche sono numerosi. Il primo tra questi è lo studio di Macek e Silling [28] nel quale l'accoppiamento viene effettuato includendo i nodi peridinamici all'interno di elementi FEM. Tale possibilità è fornita anche in alcuni software agli elementi finiti come Abaqus.

Un metodo alternativo è stato fornito da Kilic e Madenci [19] che hanno realizzato, nei loro modelli, una zona in cui vengono utilizzate entrambe le equazioni, peridinamiche e del metodo agli elementi finiti, per realizzare l'accoppiamento; utilizzando le funzioni di forma, i valori degli spostamenti vengono interpolati tra i nodi peridinamici, inclusi all'interno degli elementi FEM, ed i nodi FEM stessi.

Alcuni studi [37][38] hanno proposto un diverso approccio in cui l'accoppiamento tra elementi finiti e griglie peridinamiche avviene attraverso una zona di transizione progressiva.

Infine, Seleson et al. [39][40][41] hanno introdotto un metodo per l'accoppiamento tra elementi finiti e griglie peridinamiche per modellare strutture in cui siano presenti fratture.

Nel presente elaborato, la tecnica di accoppiamento utilizzata è quella presentata da Zaccariotto et al. nel loro articolo [22]. Tale metodo è il prosieguo di precedenti studi [20][21].

Nel loro lavoro, Zaccariotto et al. presentano un metodo di accoppiamento convalidato ed introducono una procedura, chiamata *switching strategy*, tramite la quale è possibile trasformare le porzioni FEM del modello in griglie peridinamiche lungo il percorso della cricca. In questo modo, è possibile diminuire di molto i costi computazionali.

Tale strategia non è stata implementata nel presente elaborato, preferendo un approccio più classico nel quale le zone peridinamiche e FEM nel modello vengono stabilite a priori.

5.1 Realizzazione dell accoppiamento

Per realizzare l'accoppiamento, è necessario costruire la matrice di rigidezza accoppiata, utile per risolvere problemi lineari statici, e la matrice di massa del sistema accoppiato.

5.1.1 Matrice di rigidezza accoppiata

La definizione della matrice di rigidezza accoppiata è realizzata tramite un sistema bidimensionale. L'approccio è lo stesso illustrato nell'articolo di Zaccariotto et al. [22] per un modello monodimensionale. Si osservi la figura 5.1:

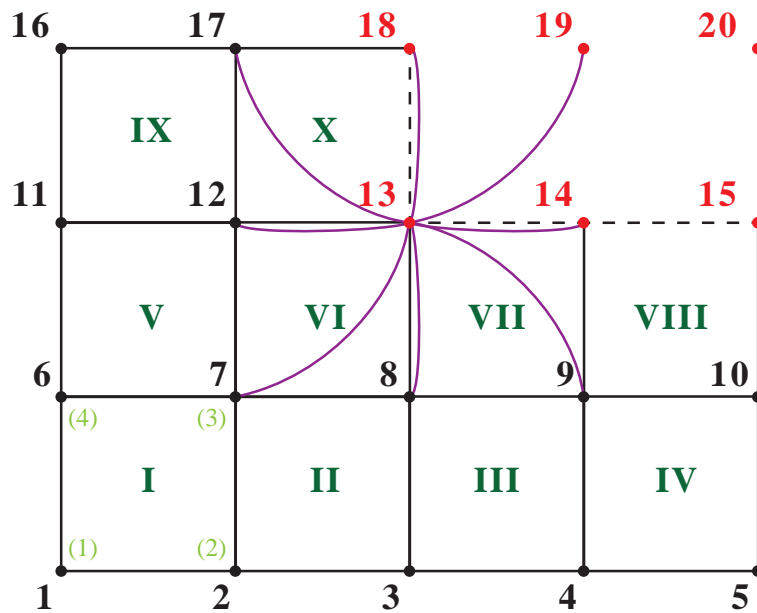


Figura 5.1: Rappresentazione grafica di un modello bidimensionale accoppiato. I nodi neri sono nodi FEM, i nodi rossi sono nodi peridinamici. La numerazione degli elementi FEM è in numeri romani verdi. In verde chiaro, è presente la numerazione locale dei nodi per il primo elemento FEM. In viola, sono raffigurate le interazioni peridinamiche che si creano tra il nodo sorgente (13) ed i rispettivi nodi famiglia.

In figura 5.1, è rappresentato un modello di piastra in cui è presente un accoppiamento tra mesh FEM ed una griglia peridinamica. I nodi presenti sono sia FEM (in nero) che peridinamici (in rosso) e non esiste una zona nel modello in cui essi non siano prettamente distinti.

Si può definire una zona di transizione in cui le forze vengono scambiate tra le due porzioni, FEM e peridinamica, del modello: ad esempio, osservando la figura 5.1, le forze nei bond del nodo peridinamico 13 vengono calcolate considerando gli spostamenti dei nodi FEM 7-8-9-12-17 ed anche gli spostamenti dei nodi peridinamici 14-18-19; analogamente, le forze nell'elemento FEM VI vengono calcolate utilizzando gli spostamenti del nodo peridinamico 13.

Il metodo di accoppiamento utilizzato prevede che la discretizzazione della mesh FEM sia pari al passo di griglia per la zona peridinamica. Tale limitazione è stata superata come viene esplicitato in [21]; nel presente elaborato, tuttavia, si è scelto di mantenere l'uniformità del passo di discretizzazione per la mesh FEM e per la griglia peridinamica.

La tecnica di accoppiamento assume che le forze interne che agiscono su un nodo siano della stessa natura del nodo stesso: su un nodo FEM, agiscono solo forze interne calcolate con il metodo FEM; viceversa, su un nodo peridinamico, agiscono solamente forze interne che derivano dalla teoria peridinamica.

Nella zona ad elementi finiti, in cui sono presenti elementi FEM con soli nodi FEM, e nella zona peridinamica, in cui un nodo peridinamico ha tutti i suoi nodi famiglia di tipo peridinamico, le forze sono state calcolate utilizzando la relativa teoria opportuna.

Elementi FEM puri

Si osservi la figura 5.2, particolare della figura 5.1. Gli elementi FEM I e II sono elementi che hanno tutti i nodi di tipo FEM. Tali elementi vengono chiamati *elementi FEM puri*.

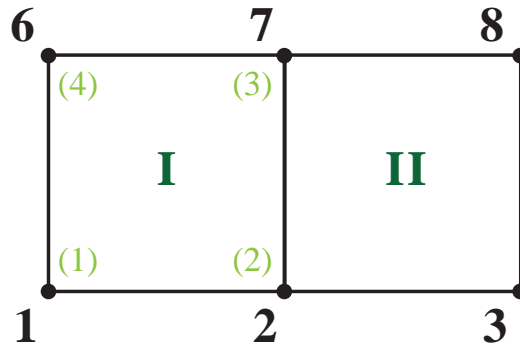


Figura 5.2: Rappresentazione grafica di due elementi FEM puri.

Gli elementi in considerazione sono elementi di tipo plate, i cui nodi hanno i tre gradi di libertà descritti nel paragrafo 3.3 a pagina 34: w_i , ϕ_{x_i} e ϕ_{y_i} .

La matrice di rigidezza del singolo elemento è quella calcolata nel paragrafo 3.5 a pagina 40 ed è identificata con \mathbf{K} .

Risulta utile esplicitare la matrice di rigidezza \mathbf{K} :

$$\mathbf{K} = \begin{bmatrix} \mathbf{K}_{11} & \mathbf{K}_{12} & \mathbf{K}_{13} & \mathbf{K}_{14} \\ \mathbf{K}_{21} & \mathbf{K}_{22} & \mathbf{K}_{23} & \mathbf{K}_{24} \\ \mathbf{K}_{31} & \mathbf{K}_{32} & \mathbf{K}_{33} & \mathbf{K}_{34} \\ \mathbf{K}_{41} & \mathbf{K}_{42} & \mathbf{K}_{43} & \mathbf{K}_{44} \end{bmatrix} \quad (5.1)$$

in cui le matrici \mathbf{K}_{ij} , con $i, j = 1, \dots, 4$, sono matrici $[3 \times 3]$.

Il vettore degli spostamenti \mathbf{u} può anch'esso essere esplicitato come:

$$\mathbf{u} = \left\{ \begin{array}{c} \mathbf{1} \\ \mathbf{2} \\ \mathbf{3} \\ \mathbf{4} \end{array} \right\} \quad (5.2)$$

in cui, ad esempio, il vettore $\mathbf{1}$ è composto dai tre gradi di libertà w_1 , ϕ_{x1} e ϕ_{y1} relativi al nodo locale 1 dell'elemento.

Le forze interne, quindi, vengono calcolate nella seguente maniera:

$$\mathbf{K}\mathbf{u} = \left[\begin{array}{cccc} \mathbf{K}_{11} & \mathbf{K}_{12} & \mathbf{K}_{13} & \mathbf{K}_{14} \\ \mathbf{K}_{21} & \mathbf{K}_{22} & \mathbf{K}_{23} & \mathbf{K}_{24} \\ \mathbf{K}_{31} & \mathbf{K}_{32} & \mathbf{K}_{33} & \mathbf{K}_{34} \\ \mathbf{K}_{41} & \mathbf{K}_{42} & \mathbf{K}_{43} & \mathbf{K}_{44} \end{array} \right] \left\{ \begin{array}{c} \mathbf{1} \\ \mathbf{2} \\ \mathbf{3} \\ \mathbf{4} \end{array} \right\} \quad (5.3)$$

La matrice di rigidezza dei due elementi FEM I e II, si ottiene assemblando le due matrici di rigidezza dei singoli elementi, facendo attenzione alla numerazione globale dei nodi.

Le forze interne per i due elementi sono:

$$\mathbf{K}^I\mathbf{u}^I = \left[\begin{array}{cccc} \mathbf{K}_{11}^I & \mathbf{K}_{12}^I & \mathbf{K}_{13}^I & \mathbf{K}_{14}^I \\ \mathbf{K}_{21}^I & \mathbf{K}_{22}^I & \mathbf{K}_{23}^I & \mathbf{K}_{24}^I \\ \mathbf{K}_{31}^I & \mathbf{K}_{32}^I & \mathbf{K}_{33}^I & \mathbf{K}_{34}^I \\ \mathbf{K}_{41}^I & \mathbf{K}_{42}^I & \mathbf{K}_{43}^I & \mathbf{K}_{44}^I \end{array} \right] \left\{ \begin{array}{c} \mathbf{1} \\ \mathbf{2} \\ \mathbf{7} \\ \mathbf{6} \end{array} \right\} \quad (5.4)$$

$$\mathbf{K}^{II}\mathbf{u}^{II} = \left[\begin{array}{cccc} \mathbf{K}_{11}^{II} & \mathbf{K}_{12}^{II} & \mathbf{K}_{13}^{II} & \mathbf{K}_{14}^{II} \\ \mathbf{K}_{21}^{II} & \mathbf{K}_{22}^{II} & \mathbf{K}_{23}^{II} & \mathbf{K}_{24}^{II} \\ \mathbf{K}_{31}^{II} & \mathbf{K}_{32}^{II} & \mathbf{K}_{33}^{II} & \mathbf{K}_{34}^{II} \\ \mathbf{K}_{41}^{II} & \mathbf{K}_{42}^{II} & \mathbf{K}_{43}^{II} & \mathbf{K}_{44}^{II} \end{array} \right] \left\{ \begin{array}{c} \mathbf{2} \\ \mathbf{3} \\ \mathbf{8} \\ \mathbf{7} \end{array} \right\} \quad (5.5)$$

Procedendo all'assemblaggio delle due matrici si ottiene:

$$\begin{bmatrix}
 \mathbf{K}_{11}^I & \mathbf{K}_{12}^I & 0 & 0 & 0 & \mathbf{K}_{14}^I & \mathbf{K}_{13}^I & 0 \\
 \mathbf{K}_{21}^I & \mathbf{K}_{22}^I + \mathbf{K}_{11}^{II} & \mathbf{K}_{12}^{II} & 0 & 0 & \mathbf{K}_{24}^I & \mathbf{K}_{23}^I + \mathbf{K}_{14}^{II} & \mathbf{K}_{13}^{II} \\
 0 & \mathbf{K}_{21}^{II} & \mathbf{K}_{22}^{II} & 0 & 0 & 0 & \mathbf{K}_{24}^{II} & \mathbf{K}_{23}^{II} \\
 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\
 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\
 \mathbf{K}_{41}^I & \mathbf{K}_{42}^I & 0 & 0 & 0 & \mathbf{K}_{44}^I & \mathbf{K}_{43}^I & 0 \\
 \mathbf{K}_{31}^I & \mathbf{K}_{32}^I + \mathbf{K}_{41}^{II} & \mathbf{K}_{42}^{II} & 0 & 0 & \mathbf{K}_{34}^I & \mathbf{K}_{33}^I + \mathbf{K}_{44}^{II} & \mathbf{K}_{43}^{II} \\
 0 & \mathbf{K}_{31}^{II} & \mathbf{K}_{32}^{II} & 0 & 0 & 0 & \mathbf{K}_{34}^{II} & \mathbf{K}_{33}^{II}
 \end{bmatrix}
 \begin{pmatrix}
 1 \\
 2 \\
 3 \\
 4 \\
 5 \\
 6 \\
 7 \\
 8
 \end{pmatrix}
 \quad (5.6)$$

L'equazione 5.6 rappresenta la matrice di rigidezza assemblata per i due elementi FEM I e II; tale matrice, moltiplicata per il vettore degli spostamenti, genera il vettore delle forze interne.

In maniera analoga a quanto fatto per gli elementi FEM I e II, è possibile assemblare la matrice di rigidezza per gli elementi FEM puri dell'intera struttura.

Elementi FEM ibridi

Si osservi la figura 5.3, particolare della figura 5.1. Gli elementi FEM VI, VII, VIII e X sono elementi che hanno almeno un nodo di tipo peridinamico.

Tali elementi vengono chiamati *elementi FEM ibridi*.

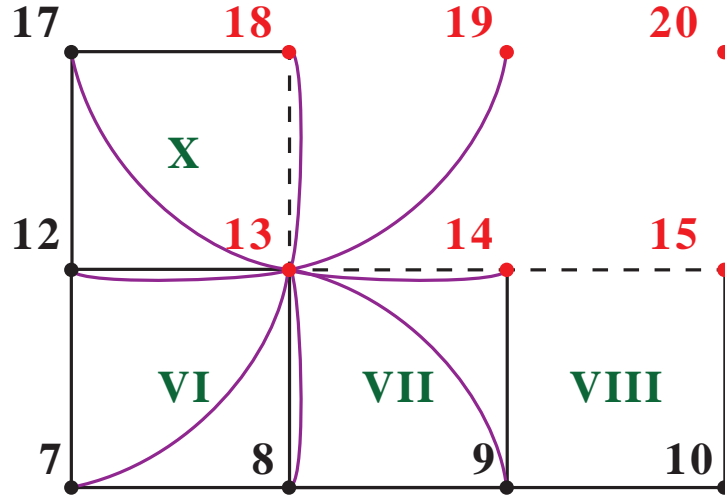


Figura 5.3: Rappresentazione grafica di elementi FEM ibridi.

Per i nodi peridinamici, la matrice di rigidezza di ogni singolo bond è quella fornita dall'equazione 4.36 nel paragrafo 4.3 a pagina 51.

Per semplicità, è utile riportare tale matrice \mathbf{K}_{bond} :

$$\mathbf{K}_{\text{bond}} = [\mathbf{K}_{k_j} \quad \mathbf{K}_{j_k}] \quad (5.7)$$

in cui le matrici \mathbf{K}_{k_j} e \mathbf{K}_{j_k} sono matrici $[3 \times 3]$.

La matrice di rigidezza di un elemento FEM ibrido viene costruita con il seguente metodo: si consideri la matrice di rigidezza dell'elemento FEM, equazione 5.3, in cui le righe che si riferiscono ad un nodo peridinamico vengono sostituite con i termini calcolati tramite la matrice di rigidezza peridinamica.

Preso come nodo sorgente il nodo peridinamico 13, in figura 5.3, i suoi nodi famiglia sono i nodi FEM 7-8-9-12-17 ed i nodi peridinamici 14-18-19.

La matrice di rigidezza peridinamica del nodo in esame, pertanto, sarà così composta:

$$[\mathbf{K}_{7_{13}} \quad \mathbf{K}_{8_{13}} \quad \mathbf{K}_{9_{13}} \quad \mathbf{K}_{12_{13}} \quad \mathbf{K}_{13}^{\text{PD}} \quad \mathbf{K}_{14_{13}} \quad \mathbf{K}_{17_{13}} \quad \mathbf{K}_{18_{13}} \quad \mathbf{K}_{19_{13}}] \quad (5.8)$$

in cui con $\mathbf{K}_{13}^{\text{PD}}$ si intende:

$$\mathbf{K}_{13}^{\text{PD}} = \sum_j \mathbf{K}_{13_j} = \mathbf{K}_{13_7} + \mathbf{K}_{13_8} + \dots \quad (5.9)$$

Presi come riferimento gli elementi FEM VI e VII in figura 5.3, la matrice di rigidezza assemblata per questi elementi risulta:

$$\left[\begin{array}{cccccccccccccccc}
 K_{11}^{\text{VI}} & K_{12}^{\text{VI}} & 0 & 0 & 0 & K_{14}^{\text{VI}} & K_{13}^{\text{VI}} & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\
 K_{21}^{\text{VI}} & K_{22}^{\text{VI}} + K_{11}^{\text{VII}} & K_{12}^{\text{VII}} & 0 & 0 & K_{24}^{\text{VI}} & K_{23}^{\text{VI}} + K_{14}^{\text{VII}} & K_{13}^{\text{VII}} & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\
 0 & K_{21}^{\text{VII}} & K_{22}^{\text{VII}} & 0 & 0 & 0 & K_{24}^{\text{VII}} & K_{23}^{\text{VII}} & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\
 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\
 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\
 K_{41}^{\text{VI}} & K_{42}^{\text{VI}} & 0 & 0 & 0 & K_{44}^{\text{VI}} & K_{43}^{\text{VI}} & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\
 K_{7_{13}} & K_{8_{13}} & K_{9_{13}} & 0 & 0 & K_{12_{13}} & K_{13}^{\text{PD}} & K_{14_{13}} & 0 & 0 & K_{17_{13}} & K_{18_{13}} & K_{19_{13}} & 0 \\
 0 & K_{8_{14}} & K_{9_{14}} & K_{10_{14}} & 0 & 0 & K_{13_{14}} & K_{14}^{\text{PD}} & K_{15_{14}} & 0 & 0 & K_{18_{14}} & K_{19_{14}} & K_{20_{14}} \\
 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\
 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\
 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\
 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\
 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\
 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\
 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\
 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0
 \end{array} \right] \left. \begin{array}{l} 7 \\ 8 \\ 9 \\ 10 \\ 11 \\ 12 \\ 13 \\ 14 \\ 15 \\ 16 \\ 17 \\ 18 \\ 19 \\ 20 \end{array} \right\} \quad (5.10)$$

L'equazione 5.10 rappresenta la matrice di rigidezza assemblata per i due elementi FEM ibridi VI e VII; tale matrice, moltiplicata per il vettore degli spostamenti, genera il vettore delle forze interne.

La matrice di rigidezza per gli elementi FEM ibridi dell'intera struttura può essere calcolata analogamente a quanto effettuato per i due elementi FEM VI e VII.

Infine, la matrice di rigidezza globale della struttura viene calcolata sommando i contributi delle matrici di rigidezza per le diverse regioni: elementi FEM puri, elementi FEM ibridi e zona peridinamica.

5.1.2 Matrice di massa accoppiata

Considerando l'analisi di un corpo omogeneo, dotato di una densità di massa ρ costante, per rappresentare una distribuzione di massa uniforme, si è deciso di assegnare ad ogni nodo, peridinamico o FEM, una massa concentrata.

La matrice di massa risultante è una matrice di tipo *lumped* diagonale. Ogni nodo, peridinamico o FEM, può essere considerato come il centro di una cella quadrata cui è associato un volume, come si può vedere in figura 5.4:

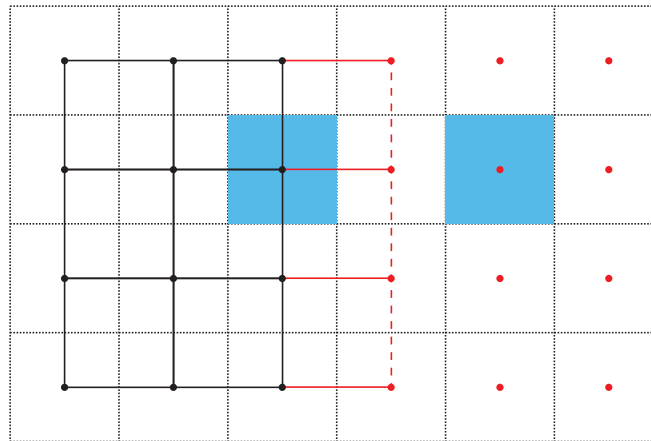


Figura 5.4: Rappresentazione grafica della discretizzazione di massa. Le celle blu rappresentano l'area (per un problema bidimensionale) associata al rispettivo nodo centrale della stessa cella. In nero, sono riportati i nodi FEM; in rosso, i nodi peridinamici.

La matrice di massa, per ogni nodo, risulta essere pari a:

$$\begin{bmatrix} \rho & 0 & 0 \\ 0 & \rho \frac{h^2}{12} & 0 \\ 0 & 0 & \rho \frac{h^2}{12} \end{bmatrix} \begin{Bmatrix} \ddot{w}_k \\ \ddot{\phi}_{x_k} \\ \ddot{\phi}_{y_k} \end{Bmatrix} \quad (5.11)$$

in cui h è lo spessore della piastra. Tale tecnica è stata presentata nell'articolo di Bobaru [42].

Capitolo 6

Analisi statiche

Nel presente capitolo, vengono presentati i risultati riguardanti i patch test e le analisi statiche.

Le analisi condotte sono state effettuate redigendo dei codici MatLab. Il linguaggio di programmazione MatLab, sviluppato da MathWorks, è un linguaggio ideato specificatamente per il calcolo numerico e l'elaborazione di vettori e matrici.

Durante le analisi, i modelli accoppiati, ossia i modelli in cui sono presenti mesh FEM e griglie peridinamiche, sono stati confrontati con modelli discretizzati con solo mesh FEM (*modelli full FEM*), al fine di giudicare la bontà dei risultati ottenuti.

Nelle analisi statiche, l'equazione del moto è descritta dall'equazione 6.1:

$$\mathbf{K}\mathbf{u} = \mathbf{F} \quad (6.1)$$

Per effettuare le simulazioni, sono stati imposti sia degli spostamenti \mathbf{u} che dei carichi \mathbf{F} sulla struttura, al fine di stabilire se i modelli potessero essere validati.

Tutte le condizioni di carico e di vincolo sono state poste sui nodi appartenenti a soli elementi FEM puri, sia per quanto riguarda i modelli full FEM, sia per i modelli accoppiati, per tutti i tipi di analisi.

6.1 Patch test

Si sono svolti diversi tipi di patch test al fine di verificare che sui modelli non comparissero delle *ghost forces*. Tali forze, infatti, sono dovute ad un'errata impostazione del problema o ad una costruzione sbagliata del modello.

A tal fine, si è costruito un modello di piastra con le caratteristiche geometriche presentate in tabella 6.1 e con le proprietà meccaniche mostrate in tabella 6.2.

Tabella 6.1: Caratteristiche geometriche del modello di piastra utilizzato nei patch test.

Caratteristiche geometriche	Valore
L	1 [m]
W	1 [m]
h	0.1 [m]

Tabella 6.2: Proprietà meccaniche del modello di piastra utilizzato nei patch test.

Proprietà meccaniche	Valore	
E	1	[Pa]
ρ	1	[kg/m ³]
ν	0.3333	

I valori delle caratteristiche geometriche e delle proprietà meccaniche sono valori arbitrari. Per i patch test, infatti, non risulta necessario indagare sui risultati ottenuti in termini quantitativi, dovendo solamente verificare che non siano presenti *ghost forces* e che il modello accoppiato sia ben costruito.

Si è scelto di discretizzare il modello con un passo di griglia $\Delta x = \Delta y = 0.01$ [m], al fine di ottenere una discretizzazione regolare. Il passo di discretizzazione utilizzato è stato il medesimo per la mesh FEM e per la griglia peridinamica. In figura 6.1, è mostrato il modello accoppiato discretizzato utilizzato durante i patch test, mentre in figura 6.2 ne viene mostrato un dettaglio.

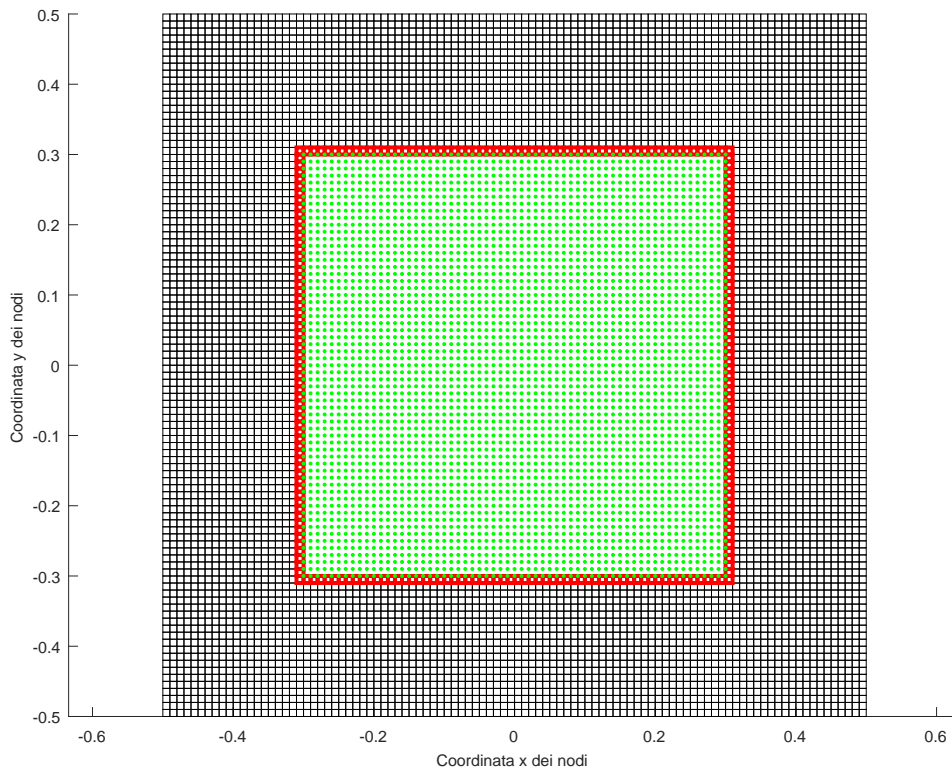


Figura 6.1: Rappresentazione grafica della discretizzazione del modello accoppiato. Gli elementi FEM puri sono i rettangoli neri; in rosso, sono evidenziati gli elementi FEM ibridi. In verde, sono raffigurati i nodi peridinamici.

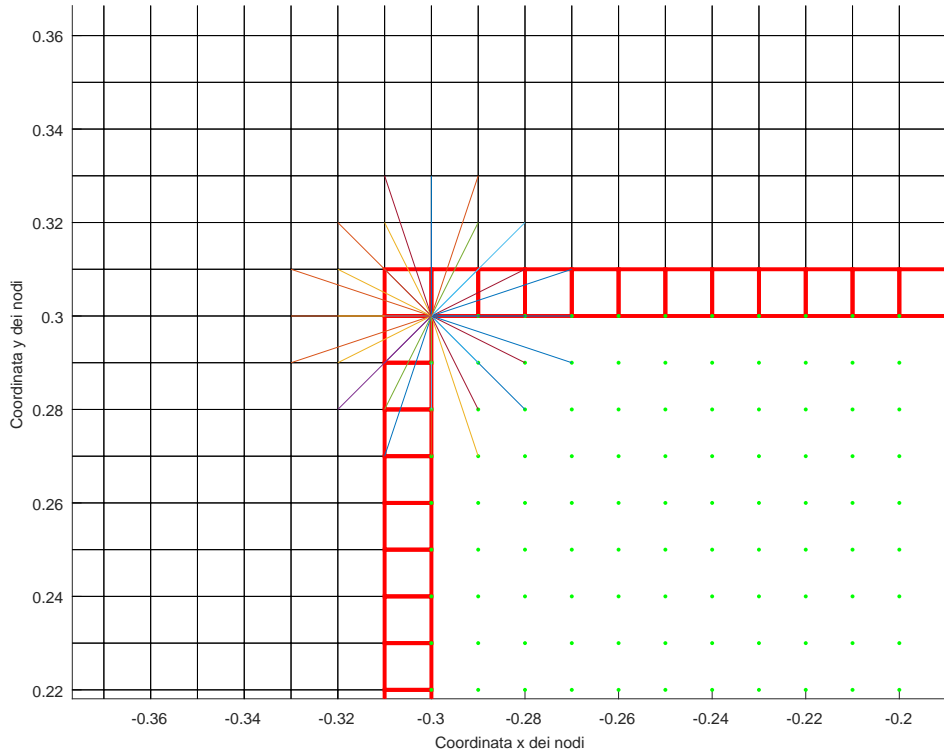


Figura 6.2: Dettaglio della discretizzazione del modello accoppiato. Gli elementi FEM puri sono i rettangoli neri, in rosso sono evidenziati gli elementi FEM ibridi. In verde, sono raffigurati i nodi peridinamici. Vengono raffigurate, inoltre, le interazioni di un nodo sorgente con i suoi nodi famiglia.

La zona peridinamica è stata posta al centro della piastra e si tratta di un quadrato avente lato pari a 0.6 [m]. Per la zona peridinamica del modello, nella scelta del valore dell'orizzonte δ , si è assunto un rapporto m pari a:

$$m = \frac{\delta}{\Delta x} = 3 \quad (6.2)$$

In figura 6.2, sono raffigurate le interazioni che un nodo sorgente ha con i nodi famiglia interni alla sua sfera d'influenza, dato un orizzonte pari a $\delta = m\Delta x$.

Infine, dato il valore dell'orizzonte δ , secondo le equazioni 4.22 e 4.23 a pagina 49, si deducono i valori dei micromoduli c_b e c_s :

$$c_b = \frac{3Eh^2}{4\pi\delta^3} = 88.42 \text{ [N/m}^3\text{]} \quad c_s = \frac{9E}{4\pi\delta^3}k = 21817 \text{ [N/m}^5\text{]} \quad (6.3)$$

Nel presente elaborato, si sono utilizzati dei valori dei micromoduli costanti, così come presentato negli articoli [24][35]; Chen et al. hanno proposto diverse altre possibili leggi di variazione del micromodulo [43].

Nel modello accoppiato, sono presenti in totale 10201 nodi di cui 3721 di tipo peridinamico. Gli elementi FEM puri sono 6156, mentre gli elementi FEM ibridi sono 244.

Il modello full FEM è composto, invece, da 10201 nodi e 10000 elementi FEM puri.

6.1.1 Traslazione rigida in direzione z

Uno dei patch test eseguiti è una traslazione rigida della piastra in direzione z , raffigurata in figura 6.3:

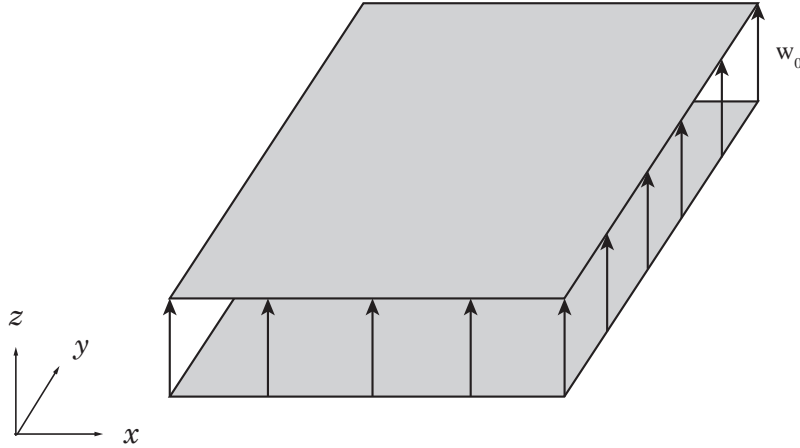


Figura 6.3: Patch test riguardante una traslazione rigida in direzione z .

Come condizione al contorno, si è imposto uno spostamento rigido w_0 , in direzione z , su tutti i nodi di bordo della piastra e la struttura non è stata vincolata in alcun modo.

La soluzione analitica a questo problema è, ovviamente, una traslazione rigida di tutti i nodi della piastra, in direzione z , pari allo spostamento rigido imposto sui nodi di bordo.

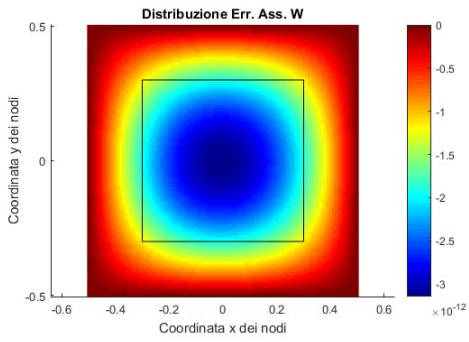
A seguito dell'analisi, si sono osservati i risultati e si sono verificati i valori degli spostamenti, al fine di giudicare la validità del modello che è risultato ben costruito.

Sono stati calcolati gli errori assoluti e relativi tra i valori degli spostamenti ottenuti sul modello full FEM e sul modello accoppiato, per i tre gradi di libertà w , ϕ_x e ϕ_y , secondo le seguenti relazioni:

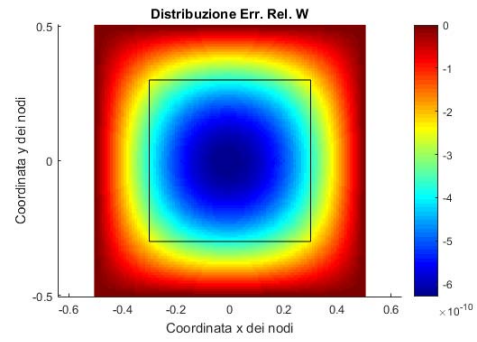
$$e_a = u_{FEM} - u_{acc} \quad e_r = \frac{u_{FEM} - u_{acc}}{u_{acc}} \cdot 100 \quad (6.4)$$

Gli errori sono stati calcolati per ogni nodo e, nella figura 6.4, si presentano, rispettivamente, le distribuzioni degli errori assoluti e relativi per il grado di libertà w e le distribuzioni degli errori assoluti per i gradi di libertà ϕ_x e ϕ_y . Le distribuzioni degli errori relativi per i due gradi di libertà rotazionali non sono state presentate in quanto prive di significato.

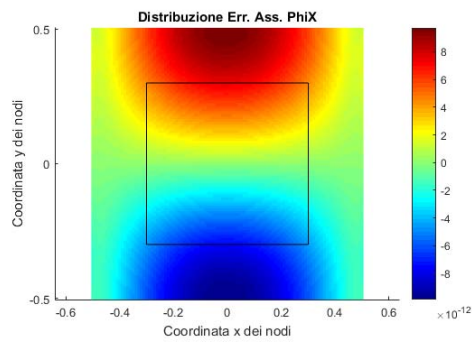
Come si può facilmente notare, gli errori sono estremamente contenuti e possono ritenersi trascurabili, perciò, si è ritenuto valido il modello accoppiato.



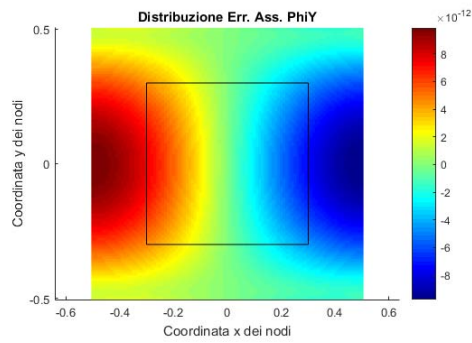
(a) *Distribuzione degli errori assoluti per w .*



(b) *Distribuzione degli errori relativi per w .*



(c) *Distribuzione degli errori assoluti per ϕ_x .*



(d) *Distribuzione degli errori assoluti per ϕ_y .*

Figura 6.4: Traslazione rigida in direzione z : distribuzione degli errori assoluti e relativi per i tre gradi di libertà w , ϕ_x e ϕ_y . In nero, è evidenziato il confine della zona peridinamica sul modello accoppiato.

6.1.2 Traslazione rigida di un bordo di piastra incernierata

Il patch test successivo è stato eseguito su una piastra incernierata come quella raffigurata in figura 6.5:

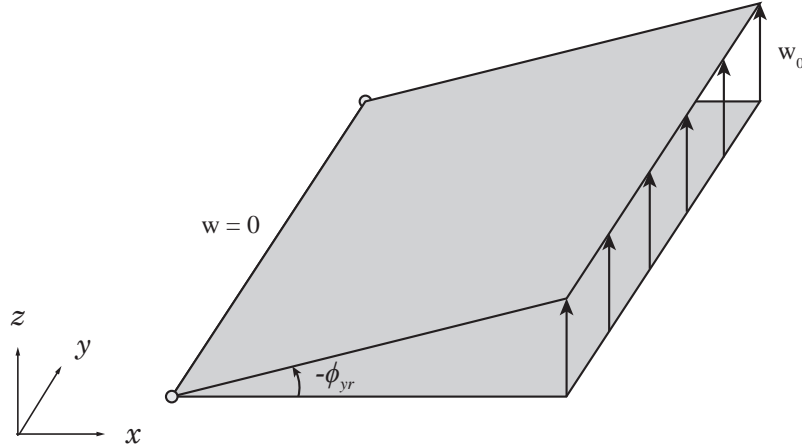


Figura 6.5: Patch test riguardante una traslazione rigida su piastra incernierata.

Come condizione al contorno, si è imposto uno spostamento rigido w_0 , in direzione z , su tutti i nodi di un bordo della piastra. I nodi del bordo opposto, invece, sono stati vincolati per quando riguarda il grado di libertà $w = 0$.

La soluzione analitica a questo problema è una traslazione rigida, in direzione z , di tutti i nodi della piastra in funzione della loro coordinata x . Inoltre, avviene una rotazione rigida di tutti i nodi pari a $-\phi_{yr}$, come è osservabile in figura 6.5.

Operando nell'ipotesi di piccoli spostamenti, la rotazione rigida $-\phi_{yr}$ è facilmente calcolabile come rapporto tra lo spostamento imposto w_0 e la lunghezza L della piastra in direzione x .

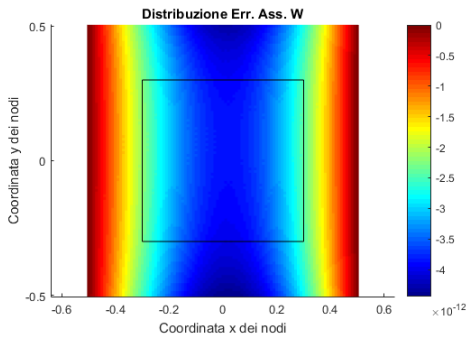
Si ricorda che il segno negativo è dato dal sistema di riferimento utilizzato nel presente elaborato, secondo il quale gli angoli sono positivi secondo la regola della mano destra.

A seguito dell'analisi, si sono osservati i risultati e si sono verificati i valori degli spostamenti, al fine di giudicare la validità del modello che è risultato ben costruito.

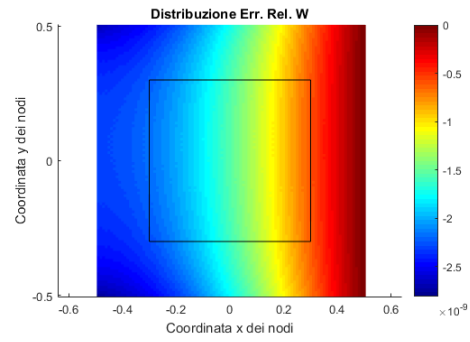
Sono stati calcolati gli errori assoluti e relativi tra i valori degli spostamenti ottenuti sul modello full FEM e sul modello accoppiato, per i tre gradi di libertà w , ϕ_x e ϕ_y , secondo le relazioni dell'equazione 6.4.

Gli errori sono stati calcolati per ogni nodo e, nella figura 6.6, si presentano rispettivamente le distribuzioni degli errori assoluti e relativi per i gradi di libertà w e ϕ_y e la distribuzione degli errori assoluti per il grado di libertà ϕ_x . La distribuzione degli errori relativi per il grado di libertà ϕ_x non è stata presentata in quanto priva di significato.

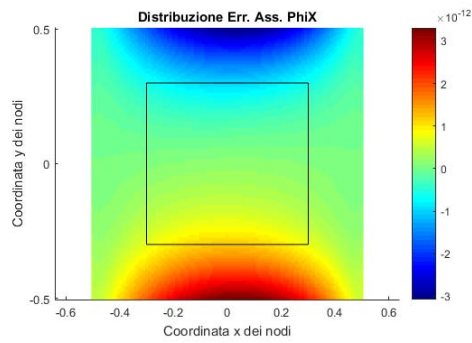
Come si può facilmente notare, gli errori sono estremamente contenuti e possono ritenersi trascurabili, perciò, si è ritenuto valido il modello accoppiato.



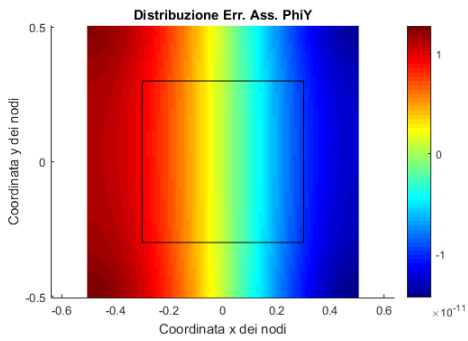
(a) *Distribuzione degli errori assoluti per w .*



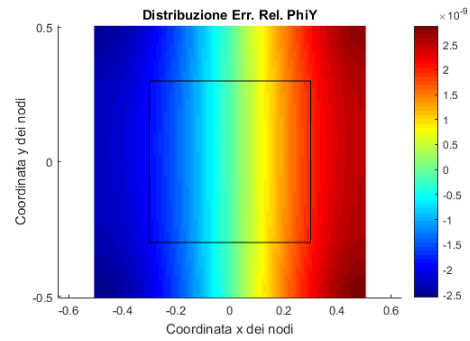
(b) *Distribuzione degli errori relativi per w .*



(c) *Distribuzione degli errori assoluti per ϕ_x .*



(d) *Distribuzione degli errori assoluti per ϕ_y .*



(e) *Distribuzione degli errori relativi per ϕ_y .*

Figura 6.6: Traslazione rigida su piastra incernierata: distribuzione degli errori assoluti e relativi per i tre gradi di libertà w , ϕ_x e ϕ_y . In nero, è evidenziato il confine della zona peridinamica sul modello accoppiato.

6.1.3 Rotazione rigida di un bordo di piastra incernierata

Infine, l'ultimo patch test eseguito è nuovamente su una piastra incernierata come quella raffigurata in figura 6.7:

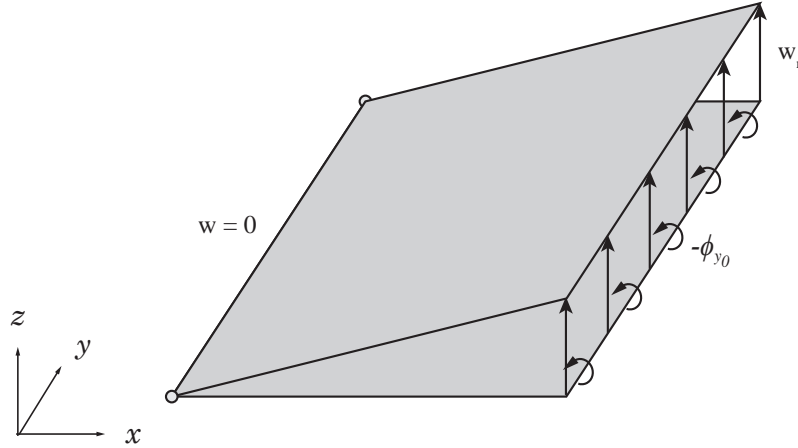


Figura 6.7: Patch test riguardante una rotazione rigida su piastra incernierata.

Come condizione al contorno, si è imposta una rotazione rigida $-\phi_{y_0}$ su tutti i nodi di un bordo della piastra. I nodi del bordo opposto, invece, sono stati vincolati per quando riguarda il grado di libertà $w = 0$.

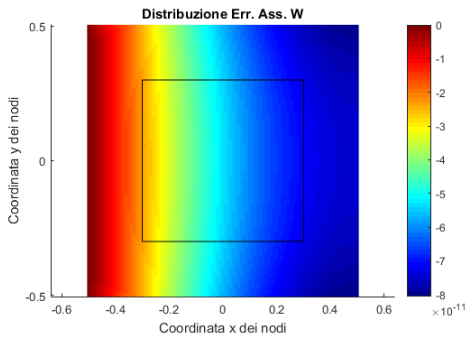
La soluzione analitica a questo problema è una rotazione rigida di tutti i nodi della piastra pari alla rotazione rigida imposta. Inoltre, avviene una traslazione rigida, in direzione z , di tutti i nodi della piastra in funzione della loro coordinata x , come è osservabile in figura 6.7. La traslazione rigida massima w_r è data dal prodotto tra la rotazione rigida imposta $-\phi_{y_0}$ e la lunghezza L della piastra lungo la direzione x . La traslazione rigida conseguente è positiva in base al sistema di riferimento assegnato.

A seguito dell'analisi, si sono osservati i risultati e si sono verificati i valori degli spostamenti, al fine di giudicare la validità del modello che è risultato ben costruito.

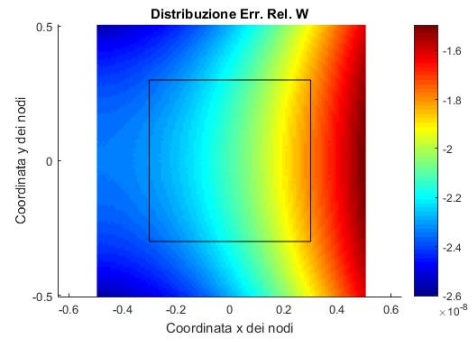
Sono stati calcolati gli errori assoluti e relativi tra i valori degli spostamenti ottenuti sul modello full FEM e sul modello accoppiato, per i tre gradi di libertà w , ϕ_x e ϕ_y , secondo le relazioni dell'equazione 6.4.

Gli errori sono stati calcolati per ogni nodo e, nella figura 6.8, si presentano rispettivamente le distribuzioni degli errori assoluti e relativi per i gradi di libertà w e ϕ_y e la distribuzione degli errori assoluti per il grado di libertà ϕ_x . La distribuzione degli errori relativi per il grado di libertà ϕ_x non è stata presentata in quanto priva di significato.

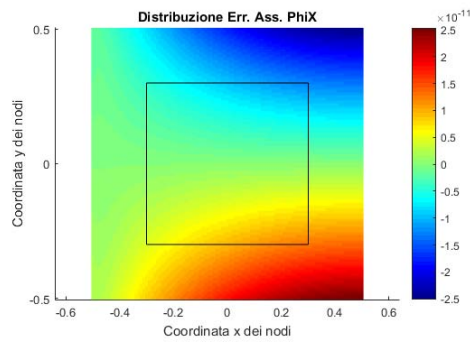
Come si può facilmente notare, gli errori sono estremamente contenuti e possono ritenersi trascurabili, perciò, si è ritenuto valido il modello accoppiato.



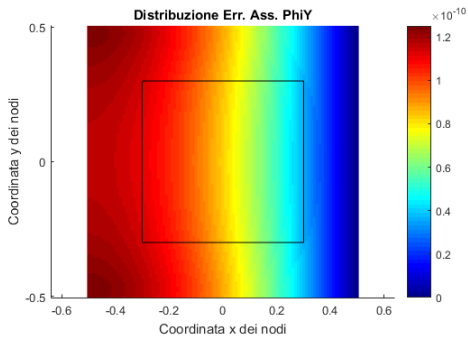
(a) *Distribuzione degli errori assoluti per w .*



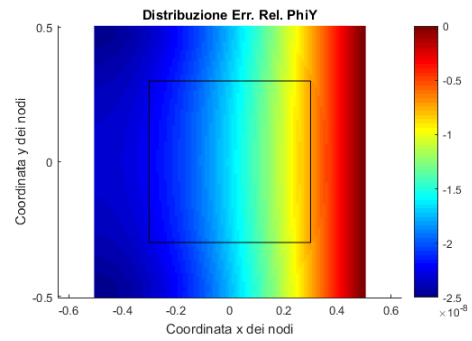
(b) *Distribuzione degli errori relativi per w .*



(c) *Distribuzione degli errori assoluti per ϕ_x .*



(d) *Distribuzione degli errori assoluti per ϕ_y .*



(e) *Distribuzione degli errori relativi per ϕ_y .*

Figura 6.8: Rotazione rigida su piastra incernierata: distribuzione degli errori assoluti e relativi per i tre gradi di libertà w , ϕ_x e ϕ_y . In nero, è evidenziato il confine della zona peridinamica sul modello accoppiato.

6.1.4 Confronti e commenti

Si è visto come, per ogni caso, la soluzione numerica sia stata confrontata con la soluzione esatta e siano state riportate le distribuzioni degli errori assoluti e relativi tra i due modelli: il primo discretizzato con solo elementi FEM ed il secondo accoppiato tramite una mesh FEM ed una griglia peridinamica.

I risultati dimostrano come il modello accoppiato riporti l'esatta soluzione in termini di spostamenti. Gli errori sono dovuti ad inevitabili approssimazioni numeriche.

Nelle tabelle 6.3, 6.4 e 6.5, vengono riportate rispettivamente le norme del vettore delle forze esterne agenti sui modelli e le norme degli errori assoluti e relativi dei tre gradi di libertà per i tre diversi patch test. Tali valori sono stati calcolati usando le seguenti espressioni:

$$F = \sqrt{\sum_{i=1}^{3n} F_i^2} \quad e_{abs} = \sqrt{\sum_{i=1}^n e_{abs,i}^2} \quad e_{rel} = \sqrt{\sum_{i=1}^n e_{rel,i}^2} \quad (6.5)$$

dove i è l'indice del nodo ed n è il numero totale dei nodi della struttura (10201 nelle analisi effettuate). Per quanto riguarda la norma del vettore delle forze esterne, nella sommatoria compare il fattore $3n$ poiché il calcolo è stato fatto comprendendo sia le forze che i momenti esterni per ogni nodo.

Tabella 6.3: Norme del vettore delle forze esterne agenti sui modelli per i diversi patch test.

Patch test	F
Trasl. rigida in direzione z	1.0309e-15
Trasl. rigida su piastra incernierata	4.6195e-16
Rotaz. rigida su piastra incernierata	7.2631e-16

Tabella 6.4: Norme degli errori assoluti dei tre gradi di libertà per i diversi patch test.

Patch test: errori assoluti	e_{abs}		
	w	ϕ_x	ϕ_y
Trasl. rigida in direzione z	1.6046e-10	4.8379e-10	4.8381e-10
Trasl. rigida su piastra incernierata	2.8550e-10	1.0443e-10	8.8169e-10
Rotaz. rigida su piastra incernierata	5.4778e-9	9.8420e-10	8.5445e-9

Tabella 6.5: Norme degli errori relativi dei tre gradi di libertà per i diversi patch test.

Patch test: errori relativi	e_{rel} [%]		
	w	ϕ_x	ϕ_y
Trasl. rigida in direzione z	3.2709e-8	/	/
Trasl. rigida su piastra incernierata	1.6708e-7	/	1.7634e-7
Rotaz. rigida su piastra incernierata	2.1420e-6	/	1.7089e-6

Come si può osservare dalla tabella 6.3, le forze agenti sul sistema si possono considerare nulle e non si riscontra la presenza di *ghost forces*. Ciò è in linea con i risultati attesi dal momento che nei patch test eseguiti non vi è presenza di forze esterne.

Dall'analisi delle tabelle 6.4 e 6.5, si osserva che le norme degli errori assoluti e relativi sono trascurabili e che gli errori presenti sono dovuti a sole inevitabili approssimazioni numeriche.

Per tutti questi motivi, si è ritenuto che il modello accoppiato sia ben costruito e si è deciso di proseguire con altri tipi di analisi.

6.2 Analisi statiche

Dopo aver concluso i patch test ed osservato come il modello sia ben costruito, data l'assenza delle *ghost forces*, si è proseguito con l'analisi di alcuni problemi lineari statici.

Il modello della piastra utilizzato presenta le stesse caratteristiche geometriche e le stesse proprietà meccaniche riportate nelle tabelle 6.1 e 6.2. La discretizzazione considerata per la creazione della mesh FEM e della griglia peridinamica è la stessa utilizzata nel modello sfruttato per i patch test. Per questo motivo, il modello accoppiato discretizzato è lo stesso mostrato in figura 6.1. Tutte le analisi, al pari di quanto fatto per i patch test, sono state effettuate sia su un modello composto da soli elementi FEM sia su un modello accoppiato, al fine di confrontare e validare i risultati.

6.2.1 Piastra incastrata alla cui estremità è applicato uno spostamento

Si è deciso di effettuare l'analisi di una piastra incastrata alla cui estremità è applicato uno spostamento come raffigurato in figura 6.9:

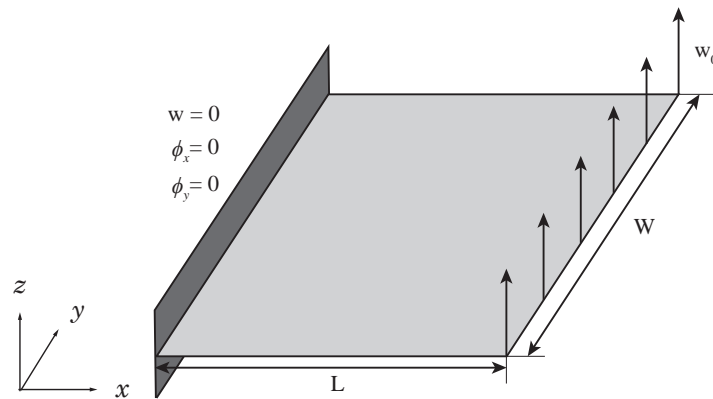


Figura 6.9: Raffigurazione della piastra incastrata utilizzata per l'analisi.

Si tratta di una piastra avente un lato incastrato. I vincoli sono stati posti sui nodi degli elementi FEM puri corrispondenti al bordo della piastra incastrato.

Sui nodi FEM del lato opposto è stato imposto uno spostamento, in direzione z , pari a $w_0 = 0.5$ [m].

Si ricorda ulteriormente come, per questo tipo di analisi, i risultati ottenuti non siano quantitativi, visti i valori inseriti per le proprietà meccaniche e le caratteristiche geometriche del modello.

Lo scopo dell'analisi è osservare la bontà dei risultati ottenuti con il modello accoppiato, quando confrontati con i risultati ottenuti con il modello full FEM.

Si è voluto osservare la configurazione deformata assunta dalla piastra a seguito dello spostamento imposto; una sezione è riportata in figura 6.10. Gli errori assoluti commessi effettuando l'analisi su un modello accoppiato rispetto al modello full FEM sono mostrati in figura 6.11.

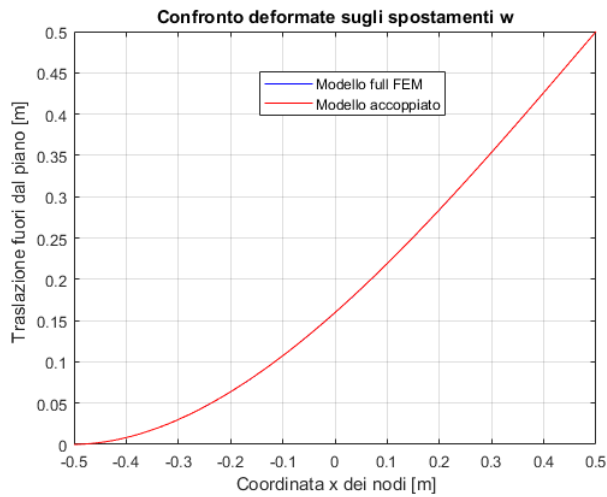
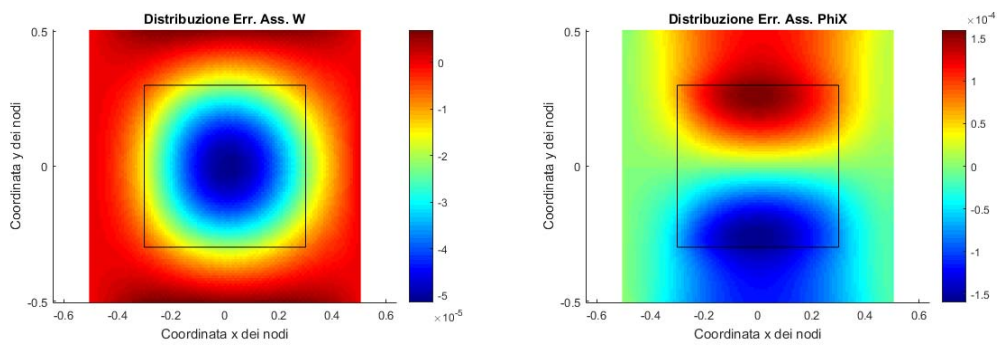
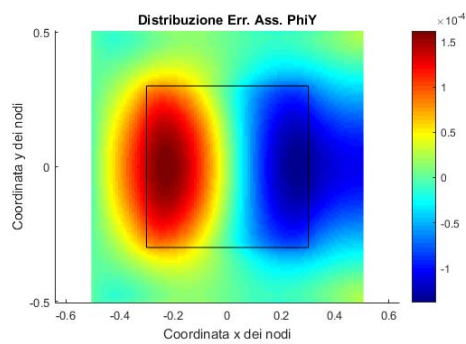


Figura 6.10: Confronto tra le configurazioni deformate assunte dalla piastra su un modello full FEM e su un modello accoppiato.



(a) *Distribuzione degli errori assoluti per w .* (b) *Distribuzione degli errori assoluti per ϕ_x .*



(c) *Distribuzione degli errori assoluti per ϕ_y .*

Figura 6.11: Distribuzione degli errori assoluti tra il modello full FEM ed il modello accoppiato per i tre gradi di libertà w , ϕ_x e ϕ_y .

Come si può osservare dalla figura 6.10, il modello accoppiato ben rappresenta la configurazione deformata assunta dalla piastra a seguito della deformazione subita. Gli errori commessi, mostrati in figura 6.11, sono dell'ordine di 10^{-4} e, quindi, si possono ritenere trascurabili.

6.2.2 Piastra incastrata alla cui estremità è applicata una rotazione attorno all'asse x

Successivamente, si è effettuata l'analisi di una piastra incastrata alla cui estremità è applicata una rotazione, attorno all'asse x , come raffigurato in figura 6.12:

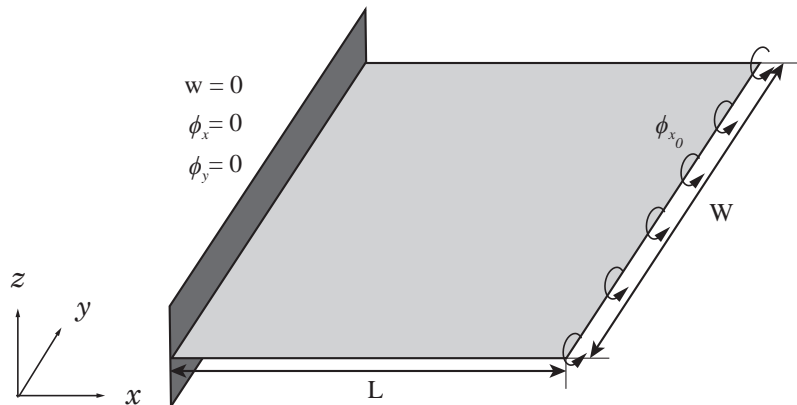


Figura 6.12: Raffigurazione della piastra incastrata utilizzata per l'analisi.

Si tratta di una piastra avente un lato incastrato. I vincoli sono stati posti sui nodi degli elementi FEM puri corrispondenti al bordo della piastra incastrato.

Sui nodi FEM del lato opposto, è stata imposta una rotazione, attorno all'asse x , pari a $\phi_{x_0} = 0.5$ [rad].

Analogamente a quanto effettuato per l'analisi di una piastra incastrata con uno spostamento imposto fuori dal piano, si è voluto osservare la configurazione deformata assunta dalla piastra a seguito della rotazione imposta, sia per il modello full FEM, in figura 6.13, sia per il modello accoppiato, in figura 6.14.

Gli errori assoluti commessi effettuando l'analisi su un modello accoppiato rispetto al modello full FEM sono mostrati in figura 6.15.

Come si può osservare confrontando le figure 6.13 e 6.14, il modello accoppiato ben rappresenta la configurazione deformata assunta dalla piastra a seguito della deformazione subita. Gli errori commessi, mostrati in figura 6.15, sono dell'ordine di 10^{-4} e, quindi, si possono ritenere trascurabili.

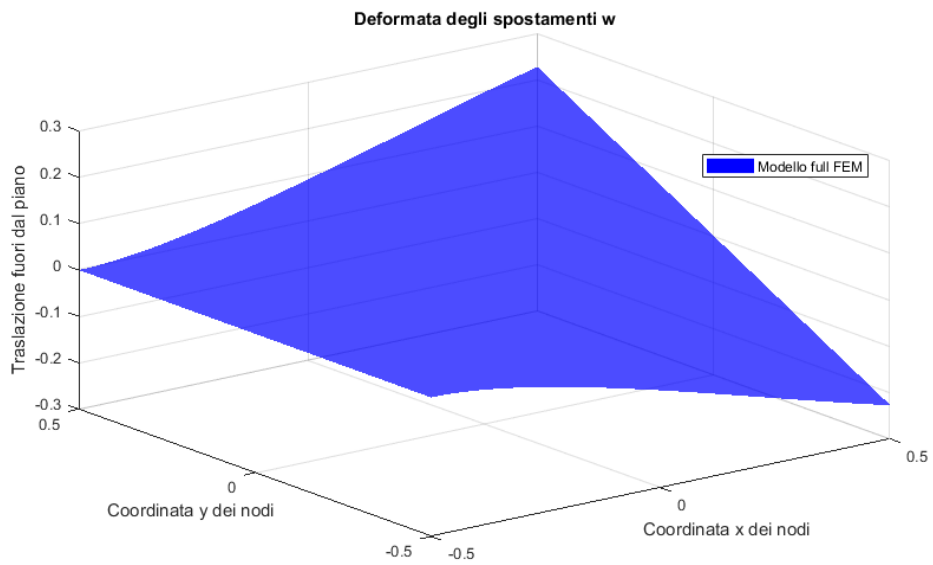


Figura 6.13: Deformata degli spostamenti w ottenuti su un modello full FEM di piastra incastrata alla cui estremità è applicata una rotazione attorno all'asse x .

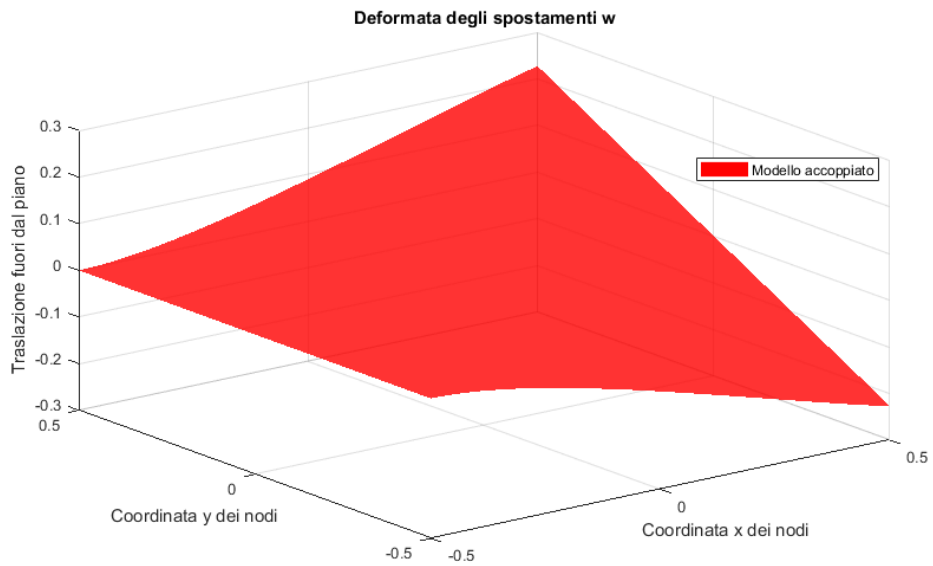
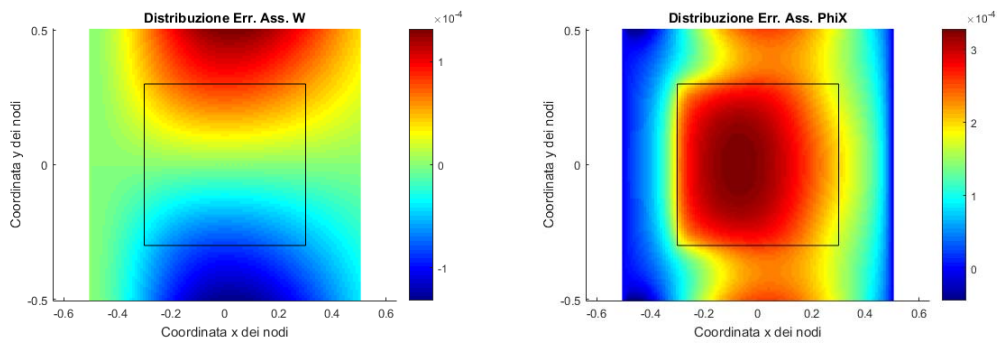
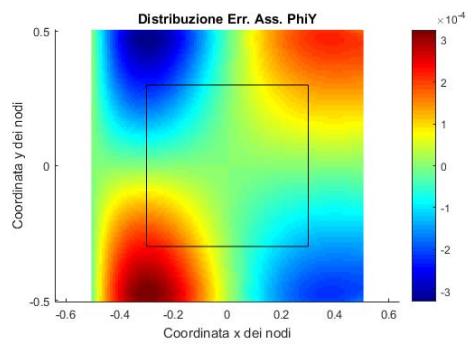


Figura 6.14: Deformata degli spostamenti w ottenuti su un modello accoppiato di piastra incastrata alla cui estremità è applicata una rotazione attorno all'asse x .



(a) *Distribuzione degli errori assoluti per w .* (b) *Distribuzione degli errori assoluti per ϕ_x .*



(c) *Distribuzione degli errori assoluti per ϕ_y .*

Figura 6.15: Distribuzione degli errori assoluti tra il modello full FEM ed il modello accoppiato per i tre gradi di libertà w , ϕ_x e ϕ_y .

6.2.3 Piastra incastrata alla cui estremità è applicata una rotazione attorno all'asse y

Infine, si è deciso di effettuare l'analisi di una piastra incastrata alla cui estremità è applicata una rotazione, attorno all'asse y , come raffigurato in figura 6.16:

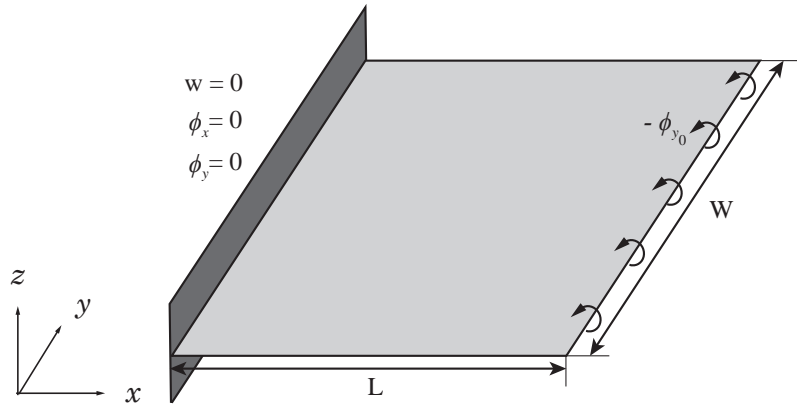


Figura 6.16: Raffigurazione della piastra incastrata utilizzata per l'analisi.

Analogamente alle due precedenti analisi, si tratta di una piastra avente un lato incastrato. I vincoli sono stati posti sui nodi degli elementi FEM puri corrispondenti al bordo della piastra incastrato.

Sui nodi FEM del lato opposto, è stata imposta una rotazione, attorno all'asse y , pari a $-\phi_{y0} = -0.5$ [rad].

In figura 6.17, è illustrata una sezione della piastra, al fine di mostrare la configurazione deformata a seguito della rotazione imposta. Gli errori assoluti commessi effettuando l'analisi su un modello accoppiato rispetto al modello full FEM sono mostrati in figura 6.18.

Come si può osservare dalla figura 6.17, il modello accoppiato rappresenta in maniera efficace la configurazione deformata assunta dalla piastra a seguito della deformazione subita. Gli errori commessi, mostrati in figura 6.18, sono dell'ordine di 10^{-4} e, quindi, si possono ritenere trascurabili.

Dall'analisi dei risultati delle tre simulazioni effettuate, si è potuto dedurre che il modello accoppiato sia ben rappresentativo del comportamento statico lineare della struttura.

Con l'implementazione di una zona peridinamica all'interno di un modello full FEM, gli errori commessi rispetto ad un approccio classico, si possono ritenere trascurabili e, quindi, il modello accoppiato si può definire affidabile per l'analisi statica delle strutture piane.

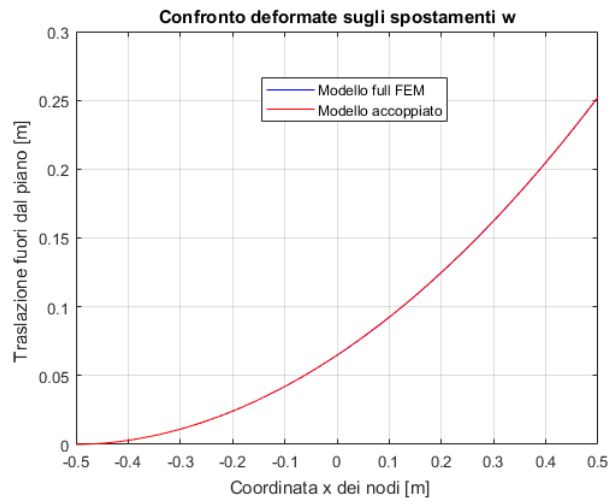
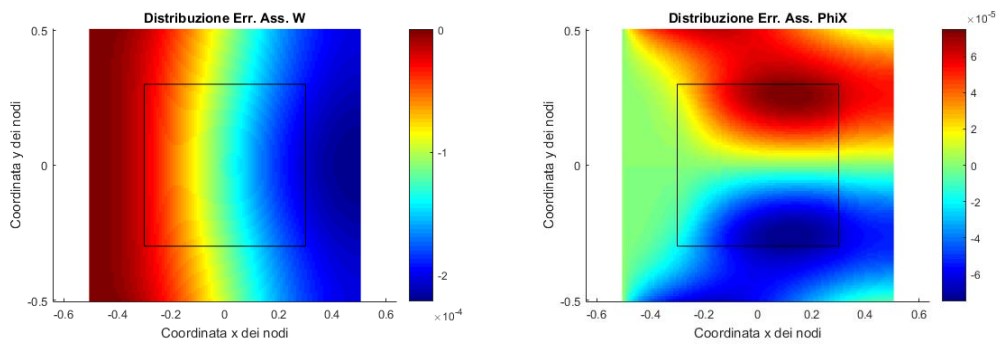
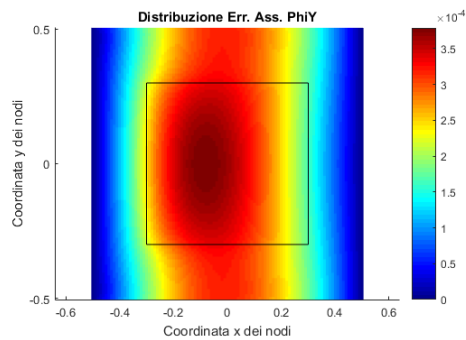


Figura 6.17: Confronto tra le configurazioni deformate assunte dalla piastra su un modello full FEM e su un modello accoppiato.



(a) *Distribuzione degli errori assoluti per w .* (b) *Distribuzione degli errori assoluti per ϕ_x .*



(c) *Distribuzione degli errori assoluti per ϕ_y .*

Figura 6.18: Distribuzione degli errori assoluti tra il modello full FEM ed il modello accoppiato per i tre gradi di libertà w , ϕ_x e ϕ_y .

6.3 Analisi di una piastra soggetta a forze e momenti esterni

Nell'articolo pubblicato nel 2015 [24], Diyaroglu et al. hanno presentato le equazioni peridamiche del moto secondo la teoria delle piastre di Mindlin. All'interno del loro articolo, i ricercatori hanno riportato due casi di studio di una piastra soggetta ad una forza e ad un momento esterno applicato.

Per continuare l'analisi sui modelli accoppiati, si è deciso di confrontare i risultati presenti nell'articolo [24] con i risultati ottenuti dalle simulazioni su un modello full FEM e su un modello discretizzato tramite mesh FEM e griglia peridinamica.

Si è deciso, inoltre, di effettuare una simulazione su un modello discretizzato con solamente una griglia peridinamica (*modello full PD*), al fine di replicare i risultati ottenuti nell'articolo [24].

La piastra modellata per effettuare le analisi presenta le caratteristiche geometriche e le proprietà meccaniche riportate, rispettivamente, nelle tabelle 6.6 e 6.7:

Tabella 6.6: Caratteristiche geometriche del modello di piastra utilizzato nell'articolo di Diyaroglu et al. [24].

Caratteristiche geometriche	Valore	
L	1	[m]
W	1	[m]
h	0.1	[m]

Tabella 6.7: Proprietà meccaniche del modello di piastra utilizzato nell'articolo di Diyaroglu et al. [24].

Proprietà meccaniche	Valore	
E	200	[GPa]
ρ	7850	[kg/m ³]
ν	0.3333	

La piastra è stata discretizzata con un passo di griglia pari a $\Delta x = \Delta y = 0.01$ [m], per un totale di 10201 nodi. L'orizzonte è stato scelto pari a $\delta = 3\Delta x = 0.03$ [m] e, secondo le equazioni 4.22 e 4.23 a pagina 49, si sono dedotti i valori dei micromoduli c_b e c_s :

$$c_b = \frac{3Eh^2}{4\pi\delta^3} = 1.7684e+13 \text{ [N/m}^3\text{]} \quad c_s = \frac{9E}{4\pi\delta^3}k = 4.3633e+15 \text{ [N/m}^5\text{]} \quad (6.6)$$

Le simulazioni dei ricercatori si sono incentrate sull'analisi del comportamento di una piastra incastrata soggetta ad una forza in direzione z e ad un momento flettente applicato in direzione y , come raffigurato nelle figure 6.19 e 6.20:

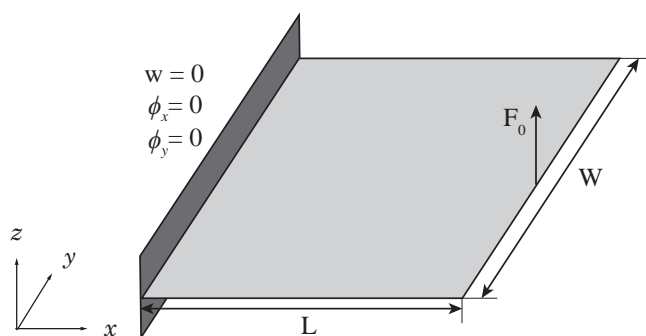


Figura 6.19: Rappresentazione della piastra incastrata utilizzata per l'analisi quando soggetta ad una forza in direzione z .

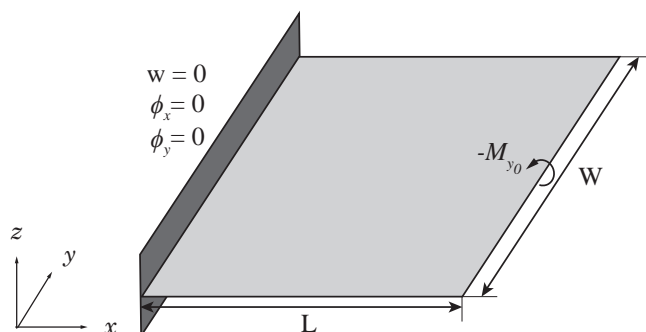


Figura 6.20: Rappresentazione della piastra incastrata utilizzata per l'analisi quando soggetta ad un momento flettente in direzione y .

Come viene riportato nei paragrafi 2.7.2 e 2.7.3 a pagina 13, le condizioni di vincolo e di carico devono essere poste in maniera adeguata su un modello peridynamico.

Le condizioni di vincolo, infatti, devono essere imposte su una *regione fittizia*, “creata” esternamente alla regione reale del modello, e tale regione deve essere larga almeno un orizzonte δ .

Le condizioni di carico, invece, devono essere poste su una regione reale del modello che abbia una larghezza Δ opportuna: nell'articolo di Diyaroglu et al. [24] le condizioni di carico sono state poste su una singola fila di nodi.

Nelle figure 6.21 e 6.22, vengono illustrate le discretizzazioni utilizzate per le analisi, quando si è fatto uso di un modello full PD. In particolare, vengono evidenziate le regioni fittizie, in blu, nelle quali sono state poste le condizioni di vincolo, e le regioni reali, in verde, nelle quali sono state poste le condizioni di carico.

Le condizioni di carico utilizzate nell'articolo di Diyaroglu et al. [24] sono pari a:

$$\hat{b} = 5 \times 10^8 \text{ [N/m}^2\text{]} \quad -\tilde{b}_y = -3.33 \times 10^8 \text{ [N/m]} \quad (6.7)$$

e, una volta divise per lo spessore h , sono state inserite all'interno dell'equazione 4.36 a pagina 52, per poter effettuare l'analisi.

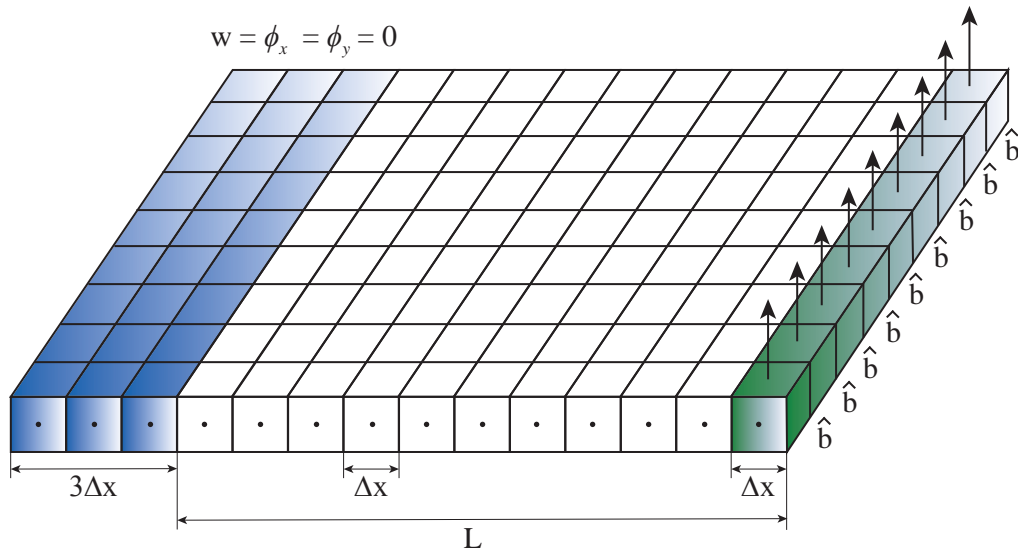


Figura 6.21: Rappresentazione del modello full PD per l'analisi del comportamento della piastra quando soggetta ad una forza in direzione z . In blu, è evidenziata la regione fittizia, esterna alla regione reale del modello, nella quale sono state poste le condizioni di vincolo. In verde, è evidenziata la regione reale del modello nella quale sono state poste le condizioni di carico \hat{b} .

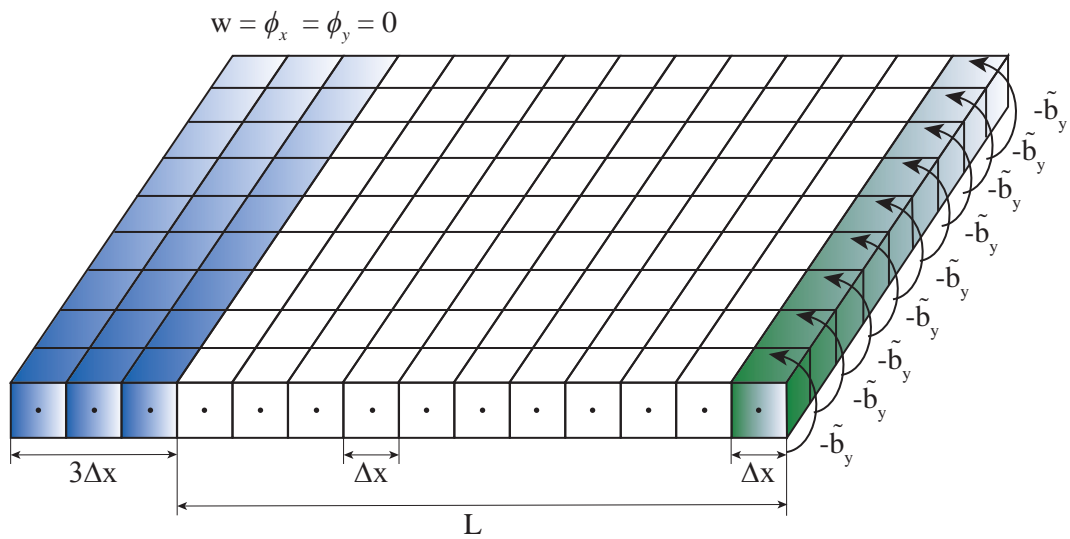


Figura 6.22: Rappresentazione del modello full PD per l'analisi del comportamento della piastra quando soggetta ad un momento flettente in direzione y . In blu, è evidenziata la regione fittizia, esterna alla regione reale del modello, nella quale sono state poste le condizioni di vincolo. In verde, è evidenziata la regione reale del modello nella quale sono state poste le condizioni di carico \tilde{b}_y .

6.3.1 Piastra incastrata soggetta ad una forza in direzione z

Le simulazioni si sono svolte dapprima costruendo un modello discretizzato con solo una griglia peridinamica e successivamente elaborando due modelli, il primo con una mesh FEM, il secondo accoppiando una mesh FEM con una griglia peridinamica.

I modelli sono tutti costituiti da 10201 nodi. Il modello full FEM è costituito da 10000 elementi FEM quadrati puri; mentre, il modello accoppiato presenta una regione peridinamica analoga a quella raffigurata in figura 6.1 ed è costituito da 3721 nodi di tipo peridinamico, 6156 elementi FEM puri e 244 elementi FEM ibridi.

Sul modello full PD, le condizioni di vincolo e di carico sono state applicate in maniera analoga a quanto raffigurato in figura 6.21, dopo aver creato ad hoc la regione fittizia per le condizioni di vincolo.

Sul modello full FEM e sul modello accoppiato, le condizioni di vincolo e di carico sono state applicate solamente sui nodi FEM dei bordi della piastra. La condizione di carico applicata è pari a:

$$\hat{b} = 5 \times 10^4 \text{ [N]} \quad (6.8)$$

Al fine di effettuare un confronto qualitativo con i risultati presentati nell'articolo [24], si riportano i due grafici, ottenuti dai ricercatori, relativi allo spostamento in direzione z ed alla rotazione attorno all'asse y^1 , subite dalla piastra a seguito delle condizioni di carico applicate.

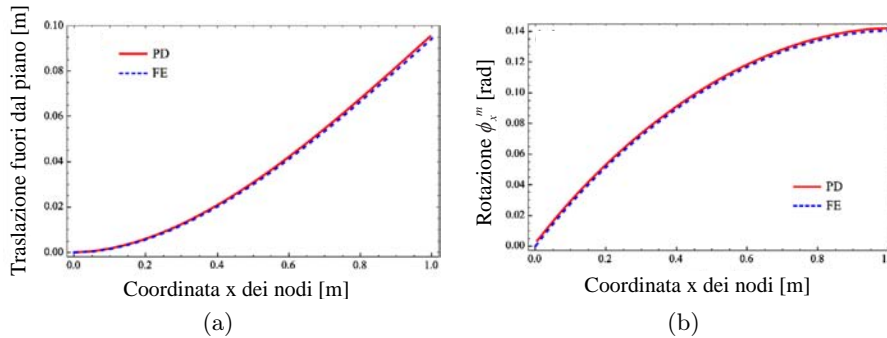


Figura 6.23: (a) Raffigurazione della traslazione fuori dal piano e (b) raffigurazione delle rotazioni ϕ_x^m (b) subite dalla piastra a seguito dell'applicazione di una forza in direzione z (op. cit. [24], p. 161).

Nei grafici riportati in figura 6.23, sono raffigurati gli spostamenti e le rotazioni ottenuti dai ricercatori sul modello peridinamico e tramite delle analisi effettuate con un software agli elementi finiti: ANSYS.

Nelle figure 6.24 e 6.25, vengono riportate le configurazioni deformate sugli spostamenti w e sulle rotazioni ϕ_y subite dalla piastra con i tre diversi modelli di discretizzazione. In figura 6.25, in particolare, sono riportati i valori assoluti degli andamenti delle rotazioni ϕ_y , al fine di rendere i risultati più facilmente confrontabili con quelli forniti in figura 6.23(b).

¹Si noti come nel presente elaborato si stia usando un sistema di riferimento diverso rispetto a quello utilizzato da Diyaroglu et al. nell'articolo [24]. Si fa presente, quindi, che i gradi di libertà rotazionali utilizzati dai ricercatori ϕ_x^m e ϕ_y^m corrispondono ai seguenti gradi di libertà usati: $\phi_x^m = -\phi_y$ e $\phi_y^m = \phi_x$.

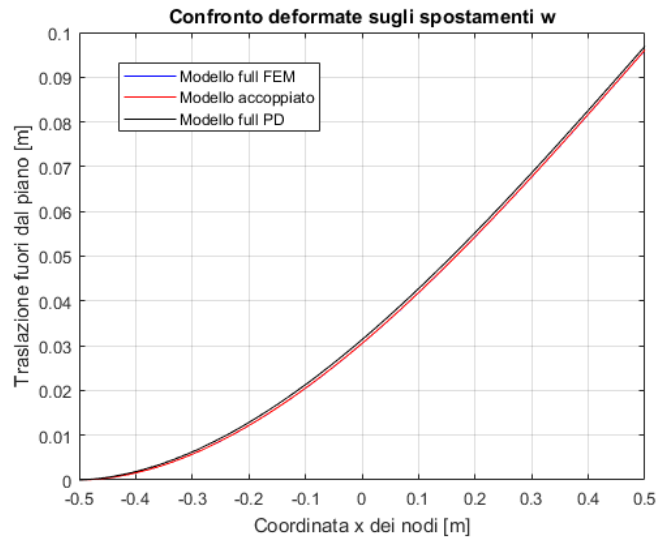


Figura 6.24: Confronto delle deformate sugli spostamenti w . In blu, la deformata sul modello full FEM; in rosso, la deformata sul modello accoppiato; in nero, la deformata sul modello full PD.

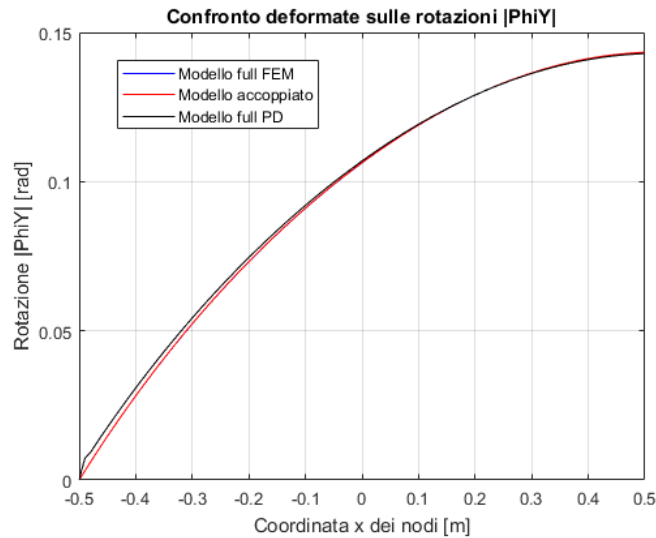


Figura 6.25: Confronto delle deformate sui valori assoluti delle rotazioni ϕ_y . In blu, la deformata sul modello full FEM; in rosso, la deformata sul modello accoppiato; in nero, la deformata sul modello full PD.

Osservando i dati presenti nella figura 6.24, si può notare come la simulazione effettuata sul modello accoppiato ben rappresenti sia la soluzione ottenuta sul modello full FEM sia la soluzione su un modello full PD; inoltre, confrontando qualitativamente i dati ottenuti con i risultati riportati in figura 6.23(a), si può affermare che le simulazioni effettuate siano in pieno accordo con i risultati presentati da Diyaroglu et al. [24].

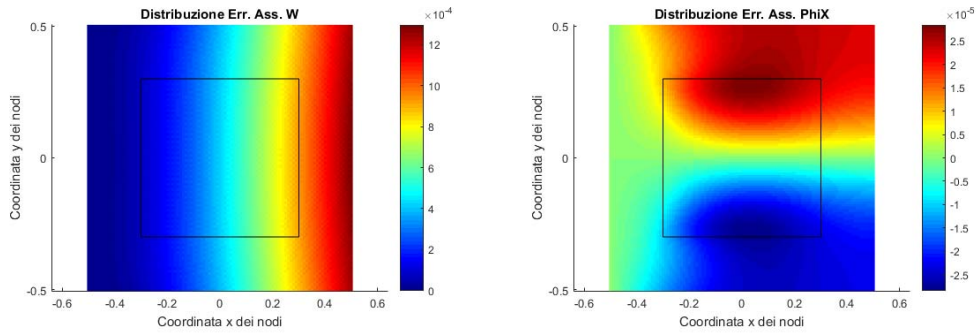
Prendendo in considerazione i dati proposti in figura 6.25, si può osservare come l'andamento delle rotazioni sui modelli accoppiato e full FEM siano simili, mentre sorgano delle differenze maggiori se paragonati all'andamento delle rotazioni sul modello full PD; ciò può essere dovuto al fatto che nel modello full PD non si è tenuto conto del problema del *softening*.

Il problema del *softening* è dovuto ad una maggior cedevolezza della struttura discretizzata con soli nodi PD quando non si tiene conto del fatto che i nodi di bordo hanno la rispettiva sfera d'influenza non interamente contenuta all'interno della regione reale discretizzata.

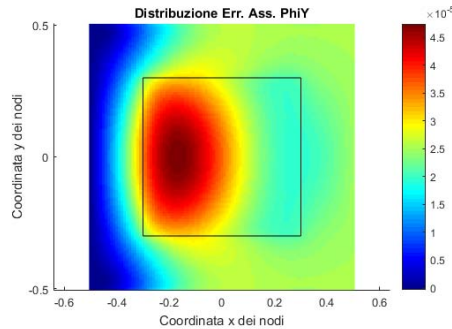
Per ovviare a questo problema, si fa uso di alcuni fattori correttivi da applicare ai micromoduli c_b e c_s per i nodi peridinamici in essere. Tali fattori, utilizzati da Diyaroglu et al. nel loro articolo [24], non sono stati implementati nelle simulazioni effettuate.

Tuttavia, da un confronto qualitativo tra i dati ottenuti dalle simulazioni, proposti in figura 6.25, ed i dati raccolti dai ricercatori, illustrati in figura 6.23(b), si può notare come gli andamenti delle deformate sulle rotazioni siano del tutto paragonabili.

Infine, in figura 6.26, sono riportate le distribuzioni degli errori assoluti tra il modello full FEM ed il modello accoppiato per i tre gradi di libertà w , ϕ_x e ϕ_y :



(a) Distribuzione degli errori assoluti per w . (b) Distribuzione degli errori assoluti per ϕ_x .



(c) Distribuzione degli errori assoluti per ϕ_y .

Figura 6.26: Distribuzione degli errori assoluti tra il modello full FEM ed il modello accoppiato per i tre gradi di libertà w , ϕ_x e ϕ_y .

Come si può facilmente notare, gli errori sono dell'ordine di 10^{-4} e, quindi, si può ritenere che il modello accoppiato ben rappresenti la soluzione ottenuta con un modello full FEM.

Per dimostrare che i risultati delle simulazioni su modelli accoppiati non dipendono dalla posizione della zona peridinamica all'interno del modello, si è deciso di effettuare un'analisi variando la posizione della griglia peridinamica e di confrontare i risultati ottenuti per le due simulazioni effettuate con modelli accoppiati.

In figura 6.27, è riportata la discretizzazione del secondo tipo utilizzata per effettuare la simulazione.

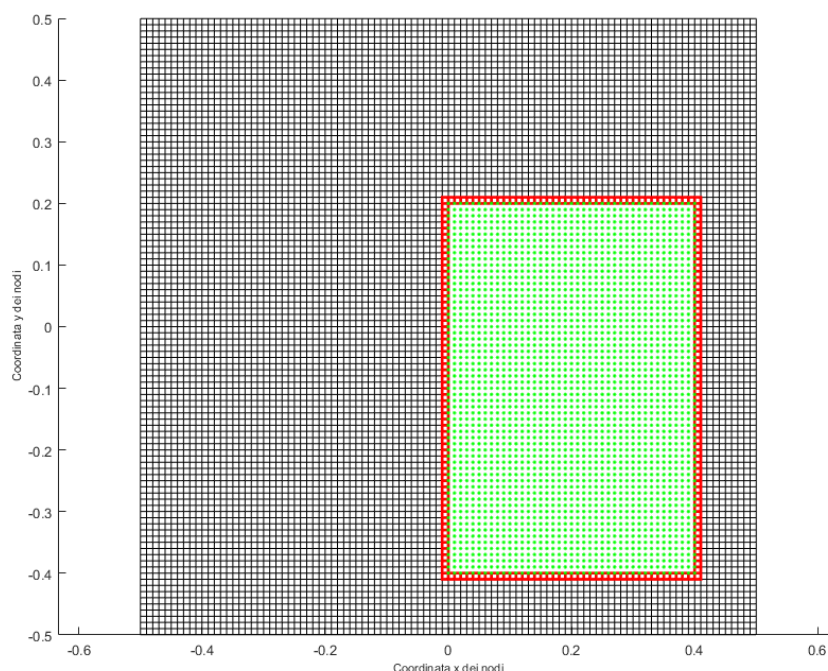


Figura 6.27: Rappresentazione grafica della discretizzazione del modello accoppiato del secondo tipo. Gli elementi FEM puri sono i rettangoli neri; in rosso, sono evidenziati gli elementi FEM ibridi. In verde, sono raffigurati i nodi peridinamici.

Il modello è costituito da 2501 nodi peridinamici, 7396 elementi FEM puri e 204 elementi FEM ibridi.

Nella figura 6.28, vengono raffigurate le configurazioni deformate assunte dalla piastra per i due modelli accoppiati: con una griglia peridinamica del primo tipo, che si riferisce al modello accoppiato usato nelle analisi precedenti; e con una griglia peridinamica del secondo tipo che si riferisce alla discretizzazione raffigurata in figura 6.27. Come si può osservare, le configurazioni deformate sono pressoché identiche.

In figura 6.29, sono riportati gli errori assoluti tra i due modelli accoppiati per i tre gradi di libertà w , ϕ_x e ϕ_y .

Gli errori commessi sono dell'ordine di 10^{-4} e, pertanto, si può affermare come i risultati delle simulazioni siano indipendenti dalla posizione della griglia peridinamica e dal numero di nodi peridinamici presenti nel modello.

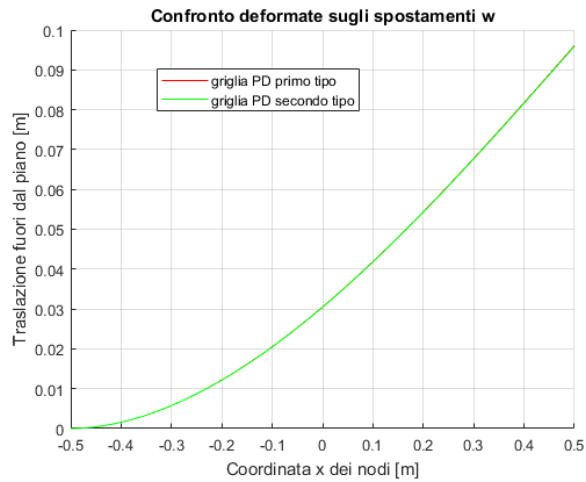
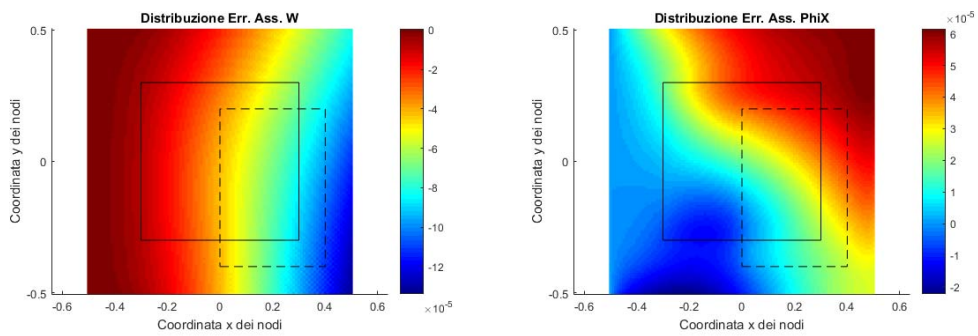
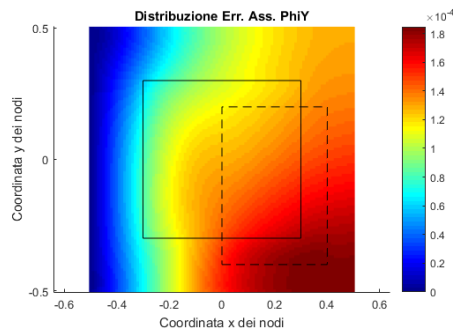


Figura 6.28: Confronto delle deformate sugli spostamenti w . In rosso, la deformata sul modello accoppiato del primo tipo; in verde, la deformata sul modello accoppiato del secondo tipo.



(a) Distribuzione degli errori assoluti per w . (b) Distribuzione degli errori assoluti per ϕ_x .



(c) Distribuzione degli errori assoluti per ϕ_y .

Figura 6.29: Distribuzione degli errori assoluti tra il modello accoppiato del primo tipo ed il modello accoppiato del secondo tipo per i tre gradi di libertà w , ϕ_x e ϕ_y . La linea continua nera delimita il confine della zona peridinamica sul modello del primo tipo; la linea tratteggiata nera delimita, invece, il confine della zona peridinamica sul modello del secondo tipo.

6.3.2 Piastra incastrata soggetta ad un momento flettente in direzione y

Analogamente a quanto effettuato per una piastra soggetta ad una forza in direzione z , si sono svolte le simulazioni costruendo un modello full PD, un modello full FEM e, infine, un modello accoppiato come quello raffigurato in figura 6.1.

Sul modello full PD, le condizioni di vincolo e di carico sono state applicate in maniera analoga a quanto raffigurato in figura 6.22, dopo aver creato ad hoc la regione fittizia per le condizioni di vincolo.

Sul modello full FEM e sul modello accoppiato, le condizioni di vincolo e di carico sono state applicate solamente sui nodi FEM dei bordi della piastra. La condizione di carico applicata è pari a:

$$-\tilde{b}_y = -3.33 \times 10^4 \text{ [Nm]} \quad (6.9)$$

Al fine di effettuare un confronto qualitativo con i risultati presentati nell'articolo [24], si riportano i due grafici, ottenuti dai ricercatori, relativi allo spostamento in direzione z ed alla rotazione attorno all'asse y^2 , subiti dalla piastra a seguito delle condizioni di carico applicate.

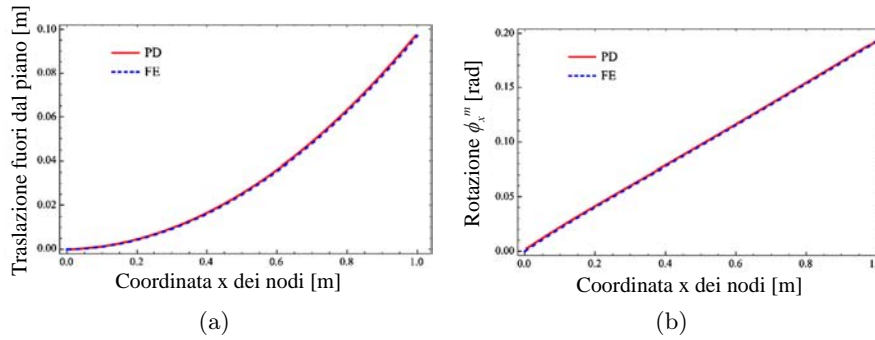


Figura 6.30: (a) Raffigurazione della traslazione fuori dal piano e (b) raffigurazione delle rotazioni ϕ_x^m subite dalla piastra a seguito dell'applicazione di un momento flettente in direzione y (op. cit. [24], p. 161).

Nei grafici riportati in figura 6.30, sono raffigurati gli spostamenti e le rotazioni ottenuti dai ricercatori sul modello peridinamico e tramite delle analisi effettuate con un software agli elementi finiti: ANSYS.

Nelle figure 6.31 e 6.32, vengono riportate le configurazioni deformate sugli spostamenti w e sulle rotazioni ϕ_y subite dalla piastra con i tre diversi modelli di discretizzazione. In figura 6.32, in particolare, sono riportati i valori assoluti degli andamenti delle rotazioni ϕ_y , al fine di rendere i risultati più facilmente confrontabili con quelli forniti in figura 6.30(b).

Osservando i dati presenti nella figura 6.31, si può notare come la simulazione effettuata sul modello accoppiato ben rappresenti sia la soluzione ottenuta sul modello full FEM sia quella ottenuta sul modello full PD e, inoltre, confrontando qualitativamente i dati ottenuti con i risultati riportati in 6.30(a), si può affermare che le

²Si fa presente che i gradi di libertà rotazionali utilizzati dai ricercatori ϕ_x^m e ϕ_y^m corrispondono ai seguenti gradi di libertà usati: $\phi_x^m = -\phi_y$ e $\phi_y^m = \phi_x$.

simulazioni effettuate siano in pieno accordo con i risultati presentati da Diyaroglu et al. [24].

Esaminando la figura 6.32, è possibile effettuare delle considerazioni analoghe alle precedenti, analizzando le soluzioni ottenute sul modello accoppiato e sul modello full FEM.

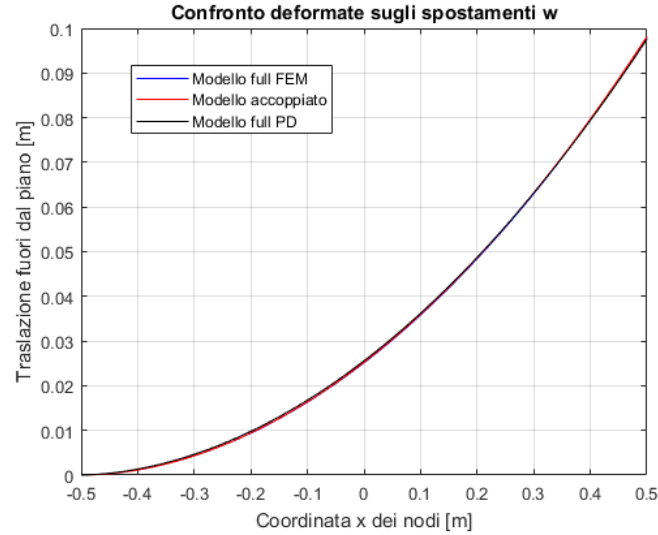


Figura 6.31: Confronto delle deformate sugli spostamenti w . In blu, la deformata sul modello full FEM; in rosso, la deformata sul modello accoppiato; in nero, la deformata sul modello full PD.

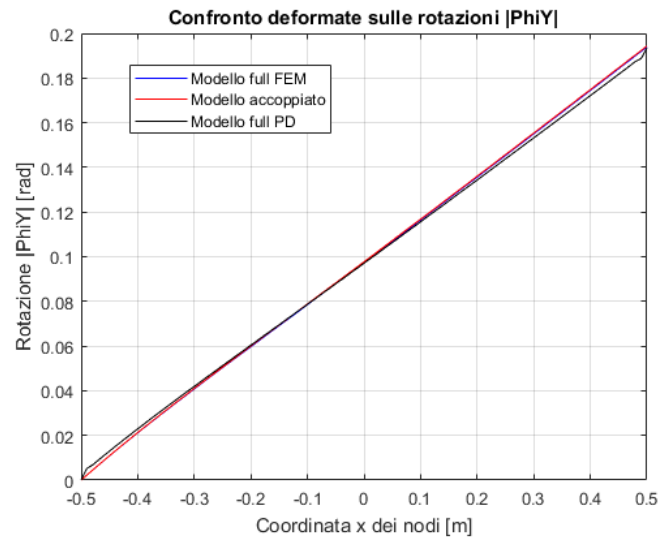
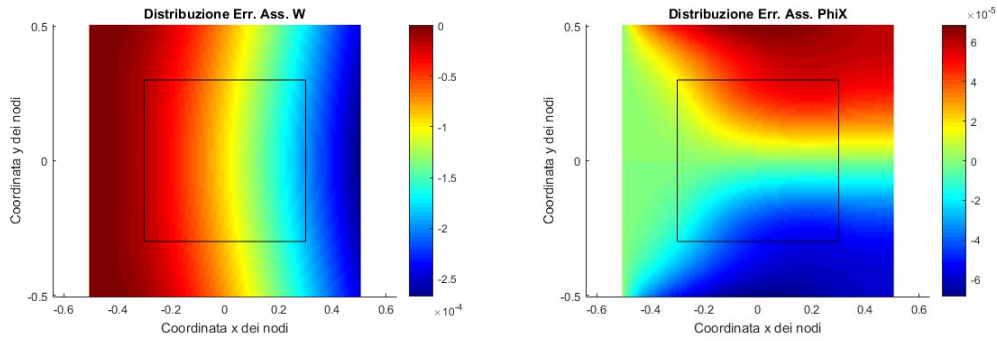


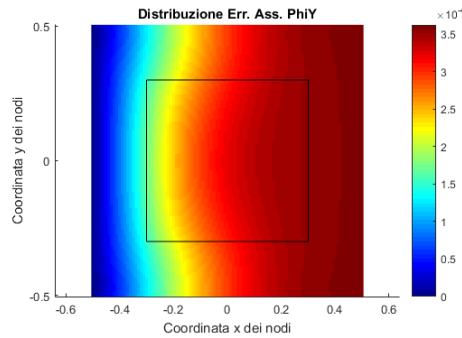
Figura 6.32: Confronto delle deformate sui valori assoluti delle rotazioni ϕ_y . In blu, la deformata sul modello full FEM; in rosso, la deformata sul modello accoppiato; in nero, la deformata sul modello full PD.

Prendendo in considerazione i dati relativi al modello full PD, presentati in figura 6.32, si nota come i risultati siano in leggero disaccordo con quelli ricavati dalle soluzioni ottenute con il modello full FEM e con il modello accoppiato. Si ritiene che la spiegazione per questa discordanza nei risultati sia riscontrabile nel problema del *softening*; si ricorda, infatti, che non sono stati applicati i coefficienti correttivi sui micromoduli c_b e c_s , come effettuato da Diyaroglu et al. nel loro articolo [24].

Infine, in figura 6.33, sono riportate le distribuzioni degli errori assoluti tra il modello full FEM ed il modello accoppiato per i tre gradi di libertà w , ϕ_x e ϕ_y :



(a) *Distribuzione degli errori assoluti per w .* (b) *Distribuzione degli errori assoluti per ϕ_x .*



(c) *Distribuzione degli errori assoluti per ϕ_y .*

Figura 6.33: Distribuzione degli errori assoluti tra il modello full FEM ed il modello accoppiato per i tre gradi di libertà w , ϕ_x e ϕ_y .

Come si può facilmente notare, gli errori sono dell'ordine di 10^{-4} e, quindi, si può ritenere che il modello accoppiato ben rappresenti la soluzione ottenuta con un modello full FEM.

Analogamente a quanto effettuato per il caso precedente, si è effettuata una simulazione su un modello accoppiato discretizzato come in figura 6.27, per dimostrare che i risultati delle simulazioni su modelli accoppiati non dipendono dalla posizione della zona peridinamica all'interno del modello.

Nella figura 6.34, vengono raffigurate le configurazioni deformate assunte dalla piastra per i due modelli accoppiati: con una griglia peridinamica del primo tipo, che si riferisce al modello accoppiato in figura 6.1; e con una griglia peridinamica del secondo tipo che si riferisce alla discretizzazione raffigurata in figura 6.27. Come si può osservare, le configurazioni deformate sono pressoché identiche.

In figura 6.35, sono riportati gli errori assoluti tra i due modelli accoppiati per i tre gradi di libertà w , ϕ_x e ϕ_y .

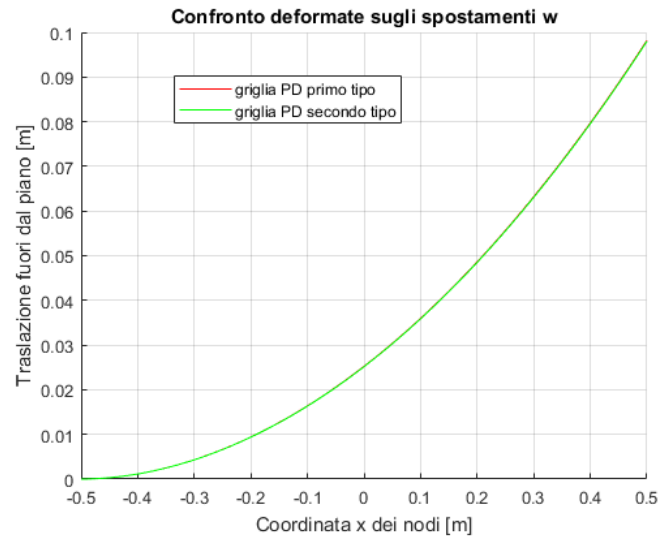
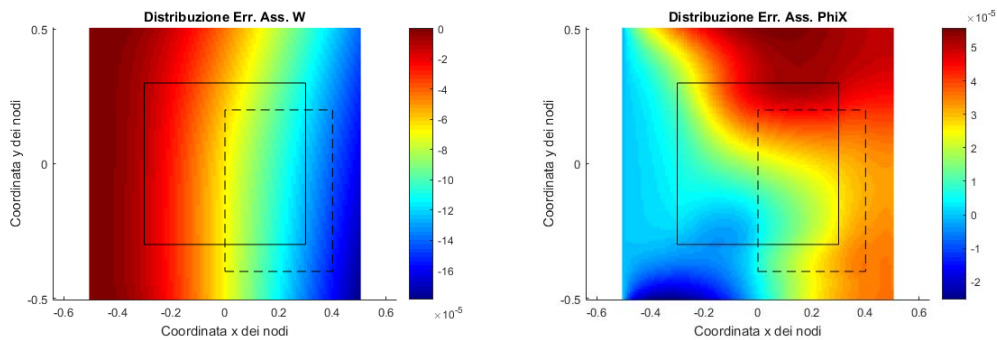


Figura 6.34: Confronto delle deformate sugli spostamenti w . In rosso, la deformata sul modello accoppiato del primo tipo; in verde, la deformata sul modello accoppiato del secondo tipo.

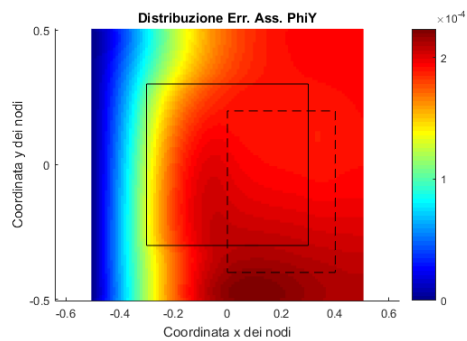
Gli errori commessi sono dell'ordine di 10^{-4} e, pertanto, si può affermare come i risultati delle simulazioni siano indipendenti dalla posizione della griglia peridinamica e dal numero di nodi peridinamici presenti nel modello.

Dall'osservazione dei risultati presentati, si è dedotto che la modellazione di piastre tramite elementi finiti e griglie peridinamiche sia ben rappresentativa del comportamento statico delle piastre, quando sottoposte a spostamenti rigidi e condizioni di carico.



(a) *Distribuzione degli errori assoluti per w .*

(b) *Distribuzione degli errori assoluti per ϕ_x .*



(c) *Distribuzione degli errori assoluti per ϕ_y .*

Figura 6.35: Distribuzione degli errori assoluti tra il modello accoppiato del primo tipo ed il modello accoppiato del secondo tipo per i tre gradi di libertà w , ϕ_x e ϕ_y . La linea continua nera delimita il confine della zona peridinamica sul modello del primo tipo; la linea tratteggiata nera delimita, invece, il confine della zona peridinamica sul modello del secondo tipo.

Capitolo 7

Analisi dinamiche

Nel presente capitolo, vengono presentati i risultati riguardanti le analisi dinamiche.

I modelli accoppiati, ossia i modelli in cui sono presenti mesh FEM e griglie peridinamiche, sono stati confrontati, durante le analisi, con modelli discretizzati con solo mesh FEM (*modelli full FEM*), al fine di giudicare la bontà dei risultati ottenuti.

Nelle analisi dinamiche, l'equazione del moto è descritta dall'equazione 7.1:

$$\mathbf{M}\ddot{\mathbf{u}} + \mathbf{C}\dot{\mathbf{u}} + \mathbf{K}\mathbf{u} = \mathbf{F} \quad (7.1)$$

I termini relativi allo smorzamento $\mathbf{C}\dot{\mathbf{u}}$ non sono stati implementati nelle analisi eseguite per questo elaborato, tuttavia, per fornire una trattazione più completa dell'argomento, si è deciso di considerarli.

Durante le analisi, sono stati imposti degli spostamenti $\mathbf{u}(t)$, al fine di osservare il comportamento della piastra nel tempo.

Tutte le condizioni di carico e di vincolo sono state poste sui nodi appartenenti a soli elementi FEM puri, sia per quanto riguarda i modelli full FEM, sia per i modelli accoppiati, per tutti i tipi di analisi.

7.1 Metodi di integrazione numerica diretta in analisi tempo varianti

L'analisi dinamica di una struttura è richiesta per conoscere il suo comportamento, quando sottoposta a carichi o spostamenti che variano nel tempo. Esistono due metodi di integrazione numerica per risolvere questo tipo di analisi: i metodi modali ed i metodi di integrazione diretta. Per un'analisi più approfondita dell'argomento, si rimanda al testo *Concepts and Applications of Finite Element Analysis* scritto da Cook et al. [44].

Nel presente elaborato, si è fatto uso di un metodo di integrazione diretta per lo svolgimento delle analisi dinamiche.

I metodi di integrazione diretta sono utilizzati per risolvere vari problemi di dinamica strutturale e di propagazione di onde sulle strutture; inoltre, vengono utilizzati anche quando sono presenti delle non linearità.

Nei metodi di integrazione diretta, o metodi *step-by-step*, viene utilizzata un'approssimazione alle differenze finite per sostituire le derivate degli spostamenti presenti nell'equazione 7.1. In altri termini, le derivate $\ddot{\mathbf{u}}$ e $\dot{\mathbf{u}}$ vengono rimpiazzate da differenze degli spostamenti \mathbf{u} in diversi istanti temporali.

Nel metodo di integrazione diretta, l'approccio utilizzato è quello di scrivere l'equazione del moto 7.1 ad uno specifico istante temporale:

$$\mathbf{M}\ddot{\mathbf{u}}_n + \mathbf{C}\dot{\mathbf{u}}_n + \mathbf{K}\mathbf{u}_n = \mathbf{F}_n \quad (7.2)$$

in cui l'indice n indica l'istante temporale $n\Delta t$ dove Δt è il passo di discretizzazione temporale o *time step*.

Dal momento che si sono voluti analizzare problemi di natura lineare, le matrici di massa \mathbf{M} , dello smorzamento \mathbf{C} e di rigidità \mathbf{K} si sono considerate costanti nel tempo.

I metodi alle differenze finite per l'integrazione diretta dell'equazione 7.2 sono suddivisi in *metodi espliciti* e *metodi impliciti*. I metodi espliciti assumono la forma seguente:

$$\mathbf{u}_{n+1} = f(\mathbf{u}_n, \dot{\mathbf{u}}_n, \ddot{\mathbf{u}}_n, \mathbf{u}_{n-1}, \dots) \quad (7.3)$$

in cui lo spostamento \mathbf{u}_{n+1} al passo $(n+1)\Delta t$ è calcolato in base alla conoscenza degli spostamenti e delle derivate degli spostamenti al passo $n\Delta t$ e precedenti.

I metodi impliciti, invece, assumono la forma seguente:

$$\mathbf{u}_{n+1} = f(\dot{\mathbf{u}}_{n+1}, \ddot{\mathbf{u}}_{n+1}, \mathbf{u}_n, \dots) \quad (7.4)$$

e, quindi, il calcolo dello spostamento \mathbf{u}_{n+1} al passo $(n+1)\Delta t$ è basato sulla conoscenza delle derivate temporali $\dot{\mathbf{u}}_{n+1}$ e $\ddot{\mathbf{u}}_{n+1}$ che sono incognite.

La scelta del metodo di integrazione, esplicito o implicito, comporta notevoli implicazioni pratiche.

Quando i termini a secondo membro delle equazioni 7.3 e 7.4 contengono informazioni che si riferiscono solamente al passo di integrazione $n\Delta t$, i metodi sono chiamati *single-step*. Quando, invece, i termini a secondo membro contengono informazioni che si riferiscono a step temporali $(n-1)\Delta t$, si parla di metodi *two-step*.

I metodi *single-step* permettono di iniziare l'integrazione più facilmente a partire dalle condizioni iniziali; i metodi *multi-step*, invece, necessitano di alcune procedure atte ad iniziare il calcolo, che possono introdurre degli errori.

Nel presente elaborato, si è fatto uso di un metodo di integrazione diretto esplicito, di tipo *multi-step*, chiamato metodo alle differenze centrali.

7.1.1 Metodo alle differenze centrali

Il metodo esplicito alle differenze centrali è uno dei metodi espliciti di integrazione diretta maggiormente diffusi.

Prendendo in considerazione gli spostamenti \mathbf{u}_{n+1} e \mathbf{u}_{n-1} ed espandendoli in serie di Taylor rispetto al passo $n\Delta t$, si ottengono:

$$\mathbf{u}_{n+1} = \mathbf{u}_n + \Delta t \dot{\mathbf{u}}_n + \frac{\Delta t^2}{2} \ddot{\mathbf{u}}_n + \frac{\Delta t^3}{6} \dddot{\mathbf{u}}_n + \dots \quad (7.5)$$

$$\mathbf{u}_{n-1} = \mathbf{u}_n - \Delta t \dot{\mathbf{u}}_n + \frac{\Delta t^2}{2} \ddot{\mathbf{u}}_n - \frac{\Delta t^3}{6} \dddot{\mathbf{u}}_n + \dots \quad (7.6)$$

Dalle due equazioni 7.5 e 7.6, è possibile ottenere la derivata prima degli spostamenti, al passo $n\Delta t$, $\dot{\mathbf{u}}_n$ e la derivata seconda $\ddot{\mathbf{u}}_n$, rispettivamente, sottraendo l'equazione 7.6 dall'equazione 7.5 e sommando entrambe:

$$\dot{\mathbf{u}}_n = \frac{1}{2\Delta t} (\mathbf{u}_{n+1} - \mathbf{u}_{n-1}) \quad (7.7)$$

$$\ddot{\mathbf{u}}_n = \frac{1}{\Delta t^2} (\mathbf{u}_{n+1} - 2\mathbf{u}_n + \mathbf{u}_{n-1}) \quad (7.8)$$

in entrambe le equazioni 7.7 e 7.8, si sono trascurati i termini di $O(\Delta t^2)$.

Sostituendo le equazioni 7.7 e 7.8 all'interno dell'equazione 7.2, si ottiene:

$$\left(\frac{1}{\Delta t^2} \mathbf{M} + \frac{1}{2\Delta t} \mathbf{C} \right) \mathbf{u}_{n+1} = \mathbf{F}_n - \mathbf{K} \mathbf{u}_n + \frac{1}{\Delta t^2} \mathbf{M} (2\mathbf{u}_n - \mathbf{u}_{n-1}) + \frac{1}{2\Delta t} \mathbf{C} \mathbf{u}_{n-1} \quad (7.9)$$

L'equazione 7.9 viene utilizzata per ricavare lo spostamento \mathbf{u}_{n+1} in funzione degli spostamenti al passo $n\Delta t$ e $(n-1)\Delta t$.

E' utile precisare che, partendo dal passo di integrazione $n=0$, è necessaria la conoscenza del vettore degli spostamenti \mathbf{u}_{-1} che può essere calcolato come segue:

$$\mathbf{u}_{-1} = \mathbf{u}_0 - \Delta t \dot{\mathbf{u}}_0 + \frac{\Delta t^2}{2} \ddot{\mathbf{u}}_0 \quad (7.10)$$

in cui $\ddot{\mathbf{u}}_0$ si ricava dall'equazione del moto 7.2, al passo $n=0$:

$$\ddot{\mathbf{u}}_0 = \mathbf{M}^{-1} (\mathbf{F}_0 - \mathbf{K} \mathbf{u}_0 - \mathbf{C} \dot{\mathbf{u}}_0) \quad (7.11)$$

Si ricorda, ancora una volta, che i termini relativi allo smorzamento non sono stati implementati nelle analisi condotte per questo elaborato.

Considerazioni sul time step

Il metodo alle differenze centrali, così come qualsiasi metodo di integrazione esplicito, è condizionatamente stabile e richiede un Δt pari a:

$$\Delta t \leq \frac{2}{\omega_{max}} \quad (7.12)$$

dove ω_{max} è la più grande frequenza naturale del $\det(\mathbf{K} - \omega^2\mathbf{M}) = 0$.

Se il Δt utilizzato è troppo grande, il metodo non giunge a convergenza. Se il time step è troppo piccolo, chiaramente, l'analisi diventa molto dispendiosa dal punto di vista computazionale.

Risulta chiara, quindi, la necessità di determinare ω_{max} per la struttura. Nel testo di Cook [44], è dimostrato che ω_{max} , per una struttura discretizzata ad elementi finiti, è delimitata dalla massima frequenza di un singolo elemento, non vincolato, che costituisce la mesh.

La massima frequenza naturale di un elemento è pari a:

$$\omega_{max_e} = \frac{2c}{L} \quad (7.13)$$

in cui $c = \sqrt{E/\rho}$ è la velocità di propagazione d'onda nel materiale di cui è costituito l'elemento ed L è la dimensione caratteristica più piccola dell'elemento.

Sostituendo l'equazione 7.13 all'interno dell'equazione 7.12, si ottiene lo step temporale minimo affinché l'integrazione alle differenze centrali sia stabile:

$$\Delta t \leq \frac{L}{c} \quad (7.14)$$

che è chiamata *condizione CFL* da Courant, Friedrichs e Lewy [45].

7.2 Problemi lineari

Per poter svolgere le varie simulazioni, si è implementato un codice MatLab che tenesse conto dell'equazione 7.9. Si ricorda che i termini relativi allo smorzamento non sono stati considerati.

Si sono svolte diverse analisi su una piastra che presenta le caratteristiche geometriche presentate in tabella 7.1:

Tabella 7.1: Caratteristiche geometriche del modello di piastra utilizzato nelle analisi dinamiche.

Caratteristiche geometriche	Valore
L	0.1 [m]
W	0.04 [m]
h	1 [m]

Le proprietà meccaniche del materiale che costituisce la piastra sono mostrate in tabella 7.2:

Tabella 7.2: Proprietà meccaniche del modello di piastra utilizzato nelle analisi dinamiche.

Proprietà meccaniche	Valore	
E	1	[Pa]
ρ	1	[kg/m ³]
ν	0.3333	

Si è scelto di discretizzare la piastra in maniera regolare, assumendo un passo di griglia $\Delta x = \Delta y = 0.0005$ [m].

La piastra è stata modellata con un modello con soli elementi FEM puri (*modello full FEM*) e con un modello accoppiato tramite una mesh FEM ed una griglia peridinamica.

In figura 7.1, è riportata la discretizzazione del modello accoppiato:

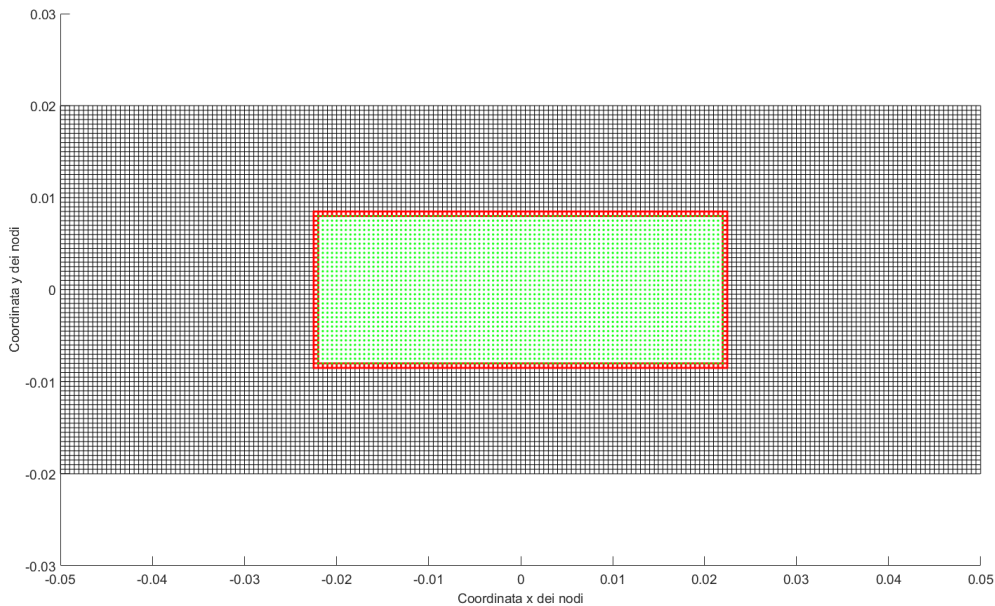


Figura 7.1: Rappresentazione grafica della discretizzazione del modello accoppiato. Gli elementi FEM puri sono i rettangoli neri; in rosso, sono evidenziati gli elementi FEM ibridi. In verde, sono raffigurati i nodi peridinamici.

Il modello full FEM è composto da 16000 elementi. Il modello accoppiato è caratterizzato da 2937 nodi peridinamici, 12940 elementi FEM puri e 244 elementi FEM ibridi.

Per la zona peridinamica del modello, nella scelta del valore dell'orizzonte δ , si è assunto un rapporto m pari a:

$$m = \frac{\delta}{\Delta x} = 3 \quad (7.15)$$

Il valore dell'orizzonte, quindi, risulta pari a $\delta = m\Delta x = 0.0015$ [m].

Ricordando le equazioni 4.22 e 4.23 a pagina 49, si ottengono i valori dei micro-moduli c_b e c_s :

$$c_b = \frac{3Eh^2}{4\pi\delta^3} = 7.0736e+7 \text{ [N/m}^3\text{]} \quad c_s = \frac{9E}{4\pi\delta^3}k = 1.7453e+8 \text{ [N/m}^5\text{]} \quad (7.16)$$

Il passo di discretizzazione temporale Δt è stato scelto in base all'equazione 7.14:

$$\Delta t \leq \frac{L}{c} = \frac{\Delta x}{\sqrt{E/\rho}} = 0.0005 \text{ [s]} \quad (7.17)$$

e, pertanto, si è scelto un $\Delta t = 0.0001$ [s].

Le simulazioni dinamiche si sono effettuate su una piastra incastrata, visibile in figura 7.2, sottoposta ad uno spostamento $w_0(t)$, in direzione z , variabile nel tempo.

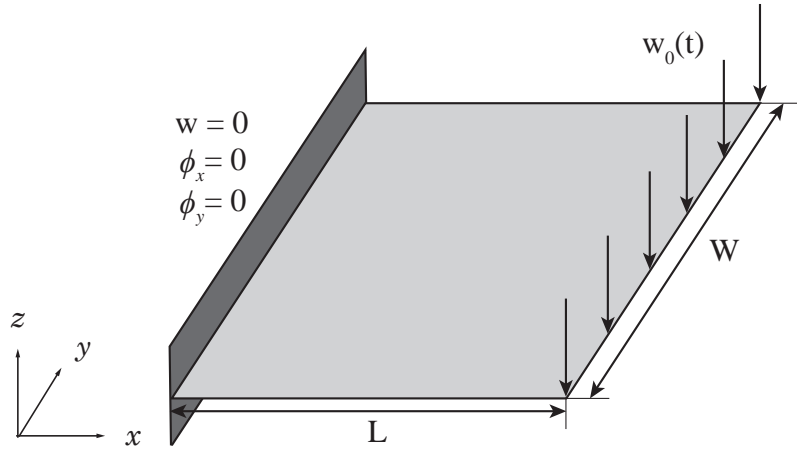


Figura 7.2: Rappresentazione grafica di una piastra incastrata, sottoposta ad uno spostamento $w_0(t)$, in direzione z , variabile nel tempo.

I vincoli sono stati posti sui nodi appartenenti ad elementi FEM puri lungo un bordo della piastra. Sul lato opposto, sempre su nodi appartenenti ad elementi FEM, si è imposto lo spostamento variabile nel tempo $w_0(t)$.

Al fine di indagare il comportamento dinamico della struttura, si sono imposti diversi tipi di spostamento.

7.2.1 Spostamento imposto con $\lambda=0.015$ [m]

Nella figura 7.3, viene mostrato lo spostamento imposto $w_0(t)$ nella prima simulazione.

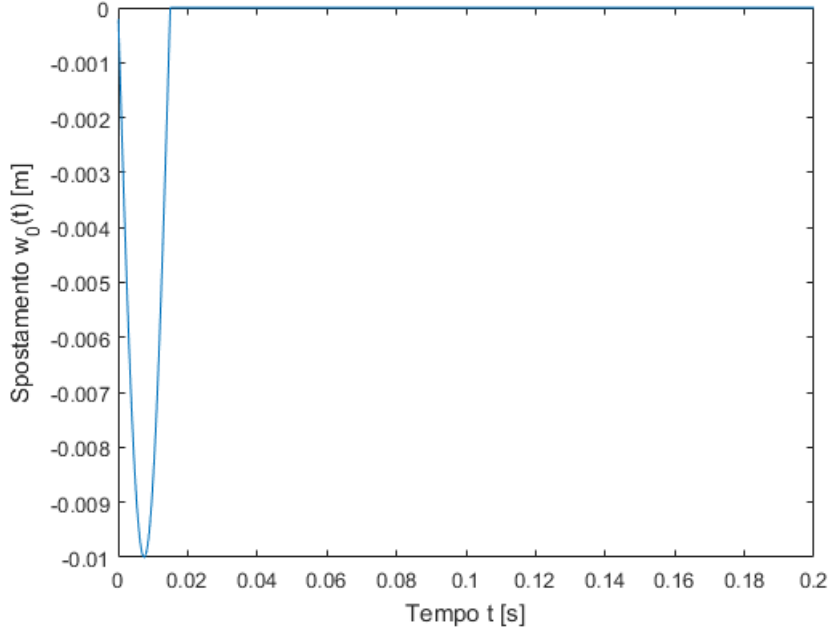


Figura 7.3: Spostamento $w_0(t)$ imposto con semilunghezza d'onda $\lambda=0.015$ [m].

Lo spostamento imposto equivale alla seguente relazione:

$$w_0(t) = \begin{cases} -0.01 \sin\left(\frac{2\pi}{T} \cdot t\right) & \text{se } t \leq T/2 \text{ [s]} \\ 0 & \text{se } t > T/2 \text{ [s]} \end{cases} \quad (7.18)$$

Il primo tratto dello spostamento imposto è una mezza senoide, di periodo $T = 0.03$ [s], avente una semilunghezza d'onda $\lambda = 0.015$ [m].

Il tempo totale della simulazione è di 1 s, al fine di evitare che delle onde riflesse, alla fine della piastra, inficino la soluzione numerica.

La semilunghezza d'onda λ può essere messa in relazione al valore dell'orizzonte peridinamico δ :

$$\frac{\lambda}{\delta} = 10 \quad (7.19)$$

Per poter confrontare i risultati ottenuti su un modello full FEM e su un modello peridinamico, si è scelto di mostrare, in figura 7.4, la soluzione ottenuta a diversi step temporali; in particolare per $t=0.04$ [s], $t=0.08$ [s], $t=0.12$ [s] e $t=0.16$ [s].

Come si può notare, la natura non-locale della zona peridinamica introduce alcune differenze nella soluzione dinamica del modello accoppiato se confrontata con la soluzione ottenuta sul modello full FEM.

Osservando la figura 7.4, infatti, è possibile notare che l'onda principale è seguita, nella zona peridinamica, da delle onde più piccole che non sono presenti nel modello full FEM. Inoltre, nella zona FEM del modello accoppiato, sorgono delle onde riflesse al confine tra la zona peridinamica e la zona FEM del modello.

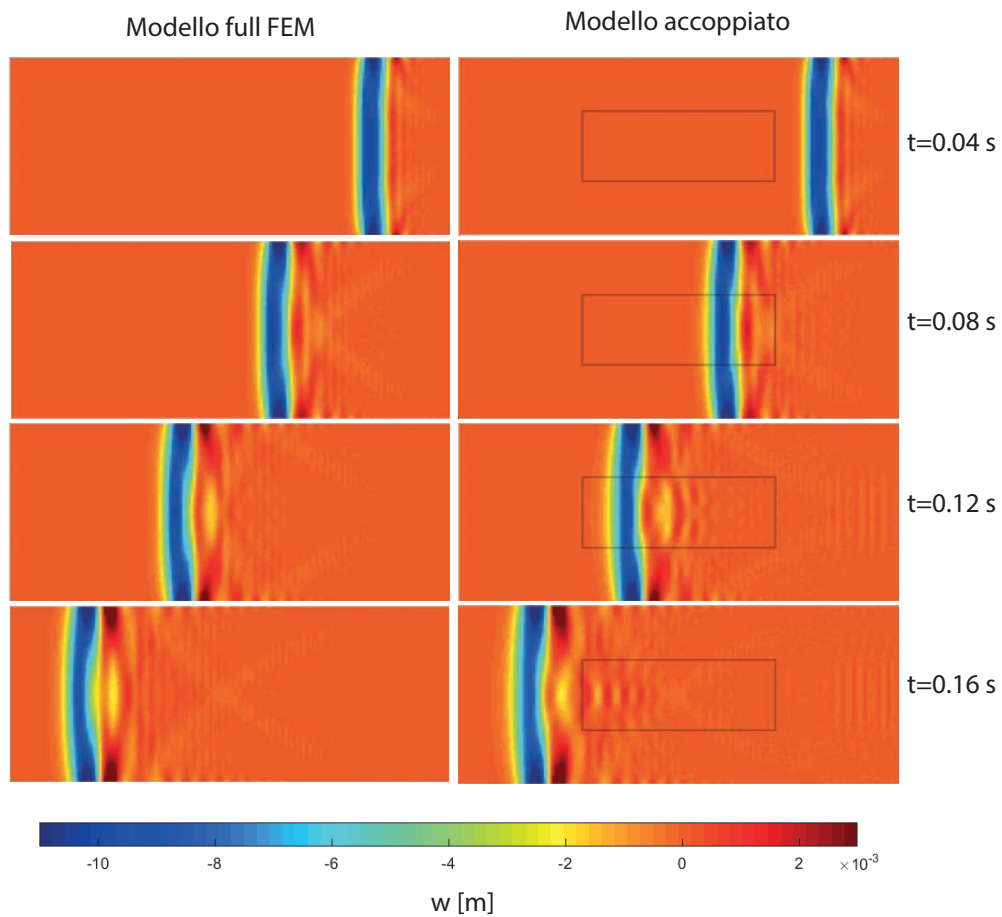


Figura 7.4: Soluzione ottenuta per uno spostamento imposto $w_0(t)$ con $\lambda = 0.015$ [m]. A sinistra, la soluzione ottenuta su un modello full FEM. A destra, la soluzione ottenuta su un modello accoppiato; la linea nera continua delimita il confine della zona peridinamica.

7.2.2 Spostamento imposto con $\lambda=0.045$ [m]

Si è successivamente deciso di variare il periodo e la lunghezza d'onda dello spostamento imposto, assumendo $T = 0.09$ [s]. A partire dalla relazione seguente:

$$w_0(t) = \begin{cases} -0.01 \sin\left(\frac{2\pi}{T} \cdot t\right) & \text{se } t \leq T/2 \text{ [s]} \\ 0 & \text{se } t > T/2 \text{ [s]} \end{cases} \quad (7.20)$$

si è ottenuto lo spostamento imposto mostrato in figura 7.5:

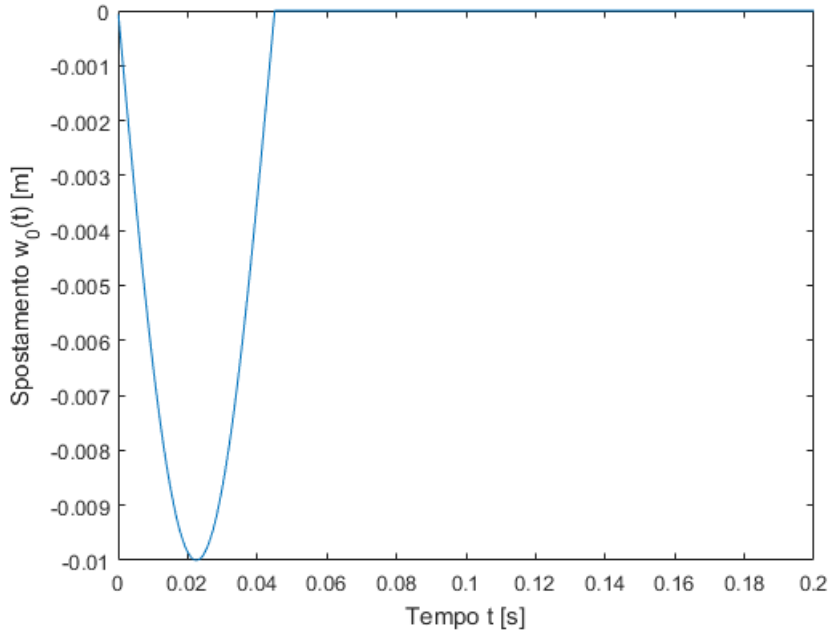


Figura 7.5: Spostamento $w_0(t)$ imposto con semilunghezza d'onda $\lambda=0.045$ [m].

Il primo tratto dello spostamento imposto è una mezza senoide, avente una semilunghezza d'onda pari a $\lambda = 0.045$ [m].

Il tempo totale della simulazione è di 1 s, al fine di evitare che delle onde riflesse, alla fine della piastra, inficino la soluzione numerica.

La semilunghezza d'onda λ può essere messa in relazione al valore dell'orizzonte peridinamico δ :

$$\frac{\lambda}{\delta} = 30 \quad (7.21)$$

Per poter confrontare i risultati ottenuti su un modello full FEM e su un modello peridinamico, si è scelto di mostrare, in figura 7.6, la soluzione ottenuta a diversi step temporali; in particolare per $t=0.05$ [s], $t=0.09$ [s], $t=0.13$ [s] e $t=0.17$ [s].

Come si può notare dai risultati, la natura non-locale della zona peridinamica introduce alcune differenze nella soluzione dinamica del modello accoppiato se confrontata con la soluzione ottenuta sul modello full FEM.

Tuttavia, mettendo a confronto le soluzioni ottenute per lo spostamento con $\lambda=0.015$ [m], riportate in figura 7.4, con i dati riportati in figura 7.6, è possibile notare come i risultati ottenuti applicando uno spostamento imposto con lunghezza d'onda maggiore siano maggiormente in sintonia tra i due modelli analizzati.

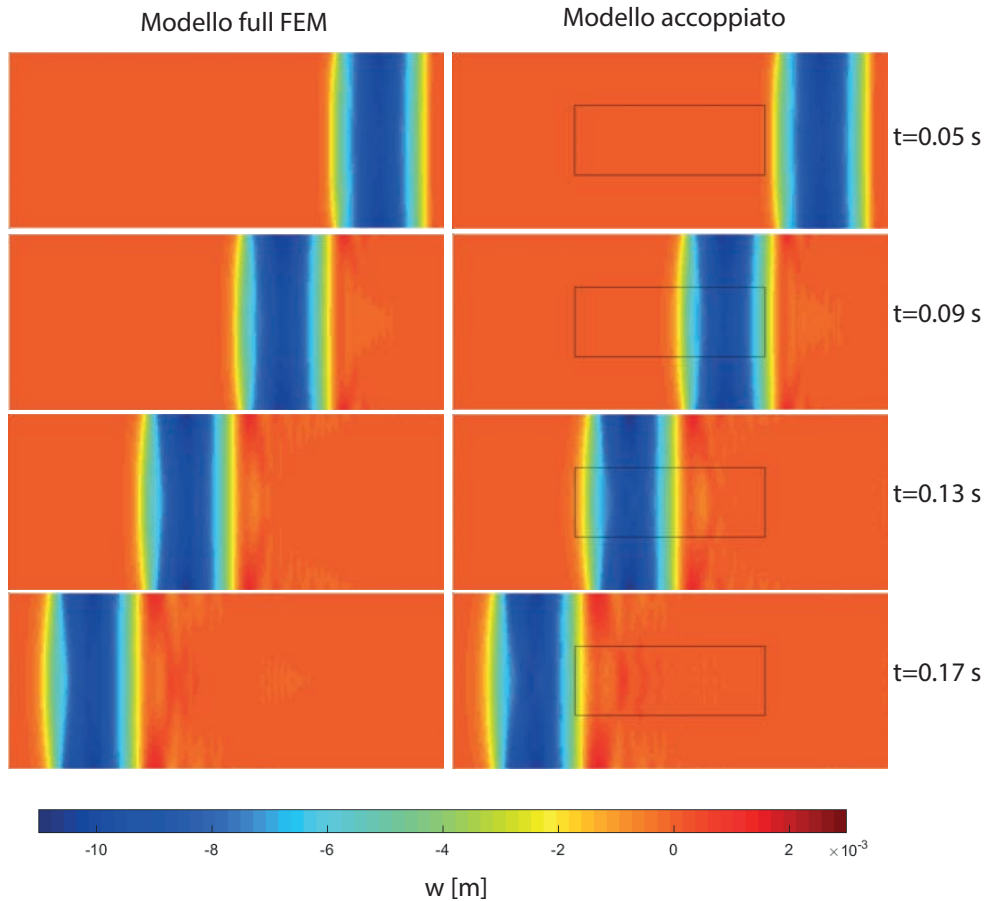


Figura 7.6: Soluzione ottenuta per uno spostamento imposto $w_0(t)$ con $\lambda = 0.045$ [m]. A sinistra, la soluzione ottenuta su un modello full FEM. A destra, la soluzione ottenuta su un modello accoppiato; la linea nera continua delimita il confine della zona peridinamica.

Zaccariotto et al., nel loro articolo [22], hanno giustificato questo comportamento analizzando il rapporto tra la semilunghezza d'onda λ dello spostamento imposto e l'orizzonte peridinamico δ .

I ricercatori hanno osservato, infatti, che le differenze tra le soluzioni ottenute su modelli full FEM e su modelli accoppiati diminuiscono all'aumentare del rapporto λ/δ ; ciò è dovuto alla natura non-locale della zona peridinamica del modello accoppiato, che introduce dei fenomeni non descritti dalle equazioni di carattere locale proprie del metodo agli elementi finiti.

Pertanto, considerati gli studi riportati nell'articolo [22], risulta chiaro che, dato il rapporto $\lambda/\delta=30$ nel caso di spostamento imposto con una semilunghezza d'onda $\lambda=0.045$ [m], i risultati mostrati in figura 7.6 siano in maggior accordo tra loro, a differenza dei dati riportati in figura 7.4.

7.2.3 Spostamento imposto con un'onda sfasata avente $\lambda=0.015$ [m]

Successivamente, si è deciso di implementare un diverso spostamento imposto $w_0(t)$, come rappresentato in figura 7.7:

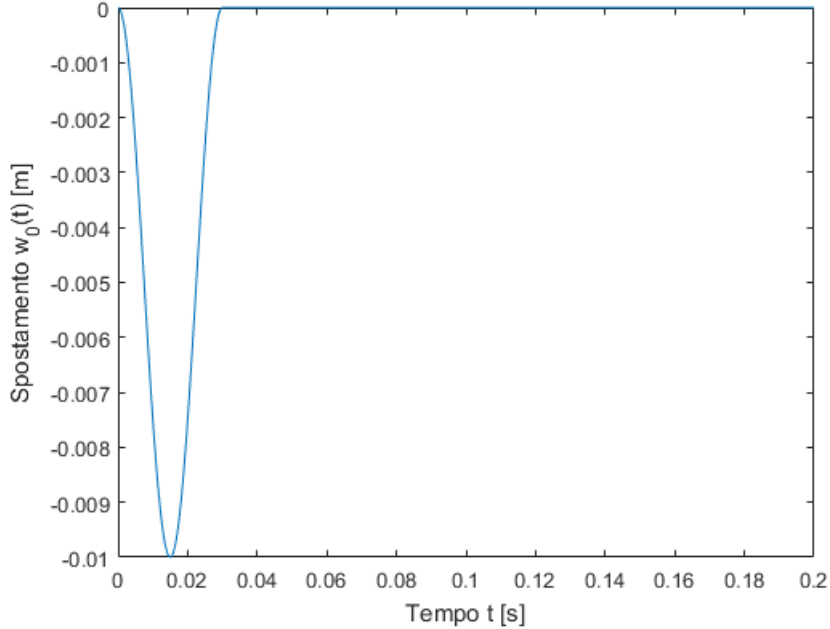


Figura 7.7: Spostamento $w_0(t)$ imposto tramite un'onda sfasata con semilunghezza d'onda $\lambda = 0.015$ [m].

Lo spostamento imposto equivale alla seguente relazione:

$$w_0(t) = \begin{cases} \frac{1}{2} (-0.01 - 0.01 \sin(\frac{2\pi}{T} \cdot t + \frac{3}{4}T)) & \text{se } t \leq T \text{ [s]} \\ 0 & \text{se } t > T \text{ [s]} \end{cases} \quad (7.22)$$

Il primo tratto dello spostamento imposto è una sinusoide completa, di periodo $T = 0.03$ [s], sfasata di $3/4 T$, avente una semilunghezza d'onda $\lambda = 0.015$ [m].

Il tempo totale della simulazione è di 1 s, al fine di evitare che delle onde riflesse, alla fine della piastra, inficino la soluzione numerica.

La semilunghezza d'onda λ , analogamente a quanto effettuato per le analisi precedenti, può essere messa in relazione al valore dell'orizzonte peridinamico δ :

$$\frac{\lambda}{\delta} = 10 \quad (7.23)$$

Per poter confrontare i risultati ottenuti su un modello full FEM e su un modello peridinamico, si è scelto di mostrare, in figura 7.8, la soluzione ottenuta a diversi step temporali; in particolare per $t=0.04$ [s], $t=0.08$ [s], $t=0.12$ [s] e $t=0.16$ [s].

Analogamente a quanto riferito per i dati in figura 7.4, osservando i risultati riportati in figura 7.8, si può notare che la natura non-locale della zona peridina-

mica introduce alcune differenze nella soluzione dinamica del modello accoppiato se confrontata con la soluzione ottenuta sul modello full FEM.

Osservando la figura 7.8, tuttavia, si può notare che le differenze tra le soluzioni ottenute sui due modelli sono meno marcate rispetto all'analisi illustrata al paragrafo 7.2.1. Si può ritenere che tale risultato sia dovuto alla minor pendenza della curva, mostrata in figura 7.7, rispetto al primo spostamento imposto $w_0(t)$, illustrato in figura 7.3, in prossimità dell'inizio e della fine dell'onda.

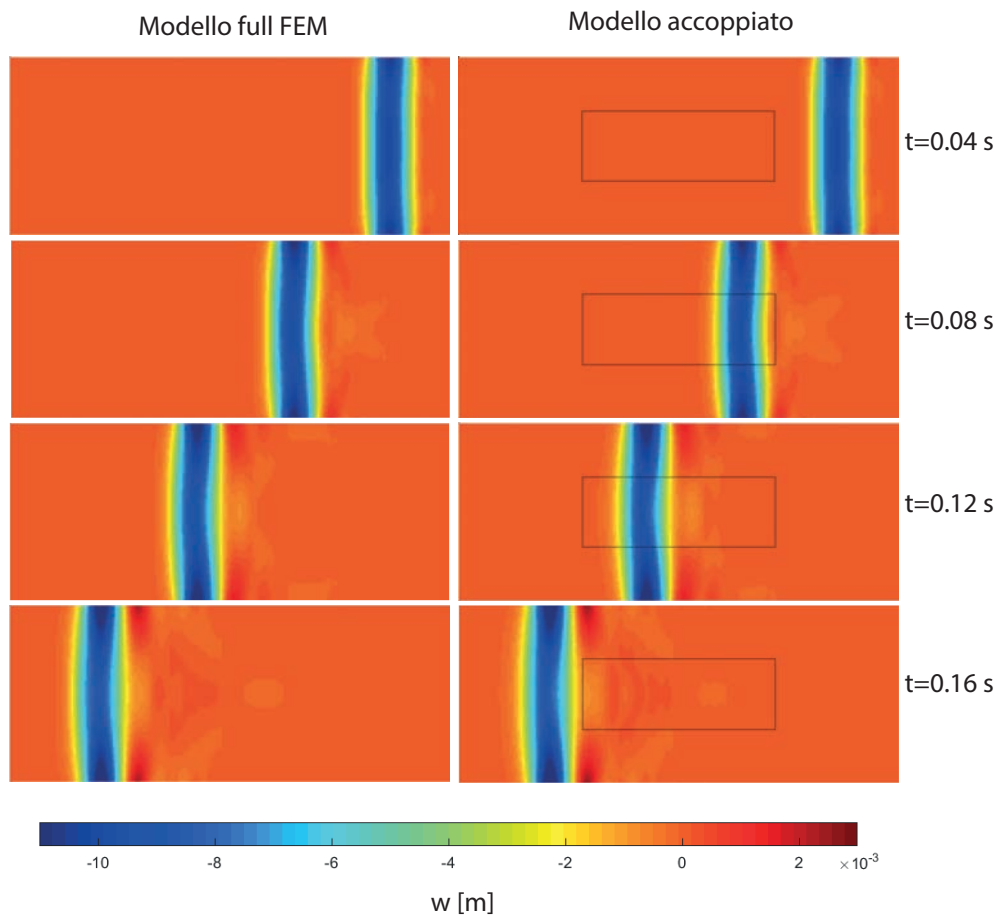


Figura 7.8: Soluzione ottenuta per uno spostamento imposto $w_0(t)$ tramite un'onda sfasata con semilunghezza d'onda $\lambda = 0.015$ [m]. A sinistra, la soluzione ottenuta su un modello full FEM. A destra, la soluzione ottenuta su un modello accoppiato; la linea nera continua delimita il confine della zona peridinamica.

7.2.4 Spostamento imposto con un'onda sfasata avente $\lambda=0.045$ [m]

Analogamente a quanto effettuato in precedenza, si è svolta una simulazione con un diverso spostamento imposto $w_0(t)$, come rappresentato in figura 7.9:

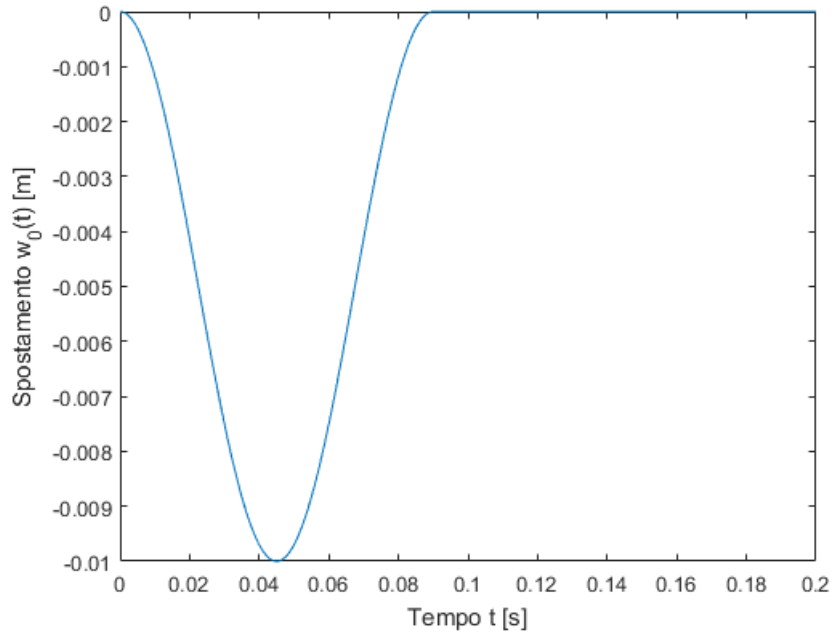


Figura 7.9: Spostamento $w_0(t)$ imposto tramite un'onda sfasata con semilunghezza d'onda $\lambda = 0.045$ [m].

Lo spostamento imposto equivale alla seguente relazione:

$$w_0(t) = \begin{cases} \frac{1}{2} (-0.01 - 0.01 \sin(\frac{2\pi}{T} \cdot t + \frac{3}{4}T)) & \text{se } t \leq T \text{ [s]} \\ 0 & \text{se } t > T \text{ [s]} \end{cases} \quad (7.24)$$

Il primo tratto dello spostamento imposto è una sinusoide completa, di periodo $T = 0.09$ [s], sfasata di $3/4 T$, avente una semilunghezza d'onda $\lambda = 0.045$ [m].

Il tempo totale della simulazione è di 1 s, al fine di evitare che delle onde riflesse, alla fine della piastra, inficino la soluzione numerica.

La semilunghezza d'onda λ , analogamente a quanto effettuato per le analisi precedenti, può essere messa in relazione al valore dell'orizzonte peridinamico δ :

$$\frac{\lambda}{\delta} = 30 \quad (7.25)$$

Per poter confrontare i risultati ottenuti su un modello full FEM e su un modello peridinamico, si è scelto di mostrare, in figura 7.10, la soluzione ottenuta a diversi step temporali; in particolare per $t=0.05$ [s], $t=0.09$ [s], $t=0.13$ [s] e $t=0.17$ [s].

Osservando la figura 7.10, si può osservare che le differenze tra le soluzioni ottenute sui due modelli risultano trascurabili.

Il motivo per il quale la soluzione ottenuta sui due modelli è pressoché la stessa è riscontrabile osservando il rapporto λ/δ che risulta elevato. Inoltre, la minor pendenza della curva, all' inizio ed alla fine dell'onda, rispetto allo spostamento imposto raffigurato in figura 7.5, rende la soluzione ottenuta sul modello accoppiato più rappresentativa della soluzione ottenuta sul modello FEM.

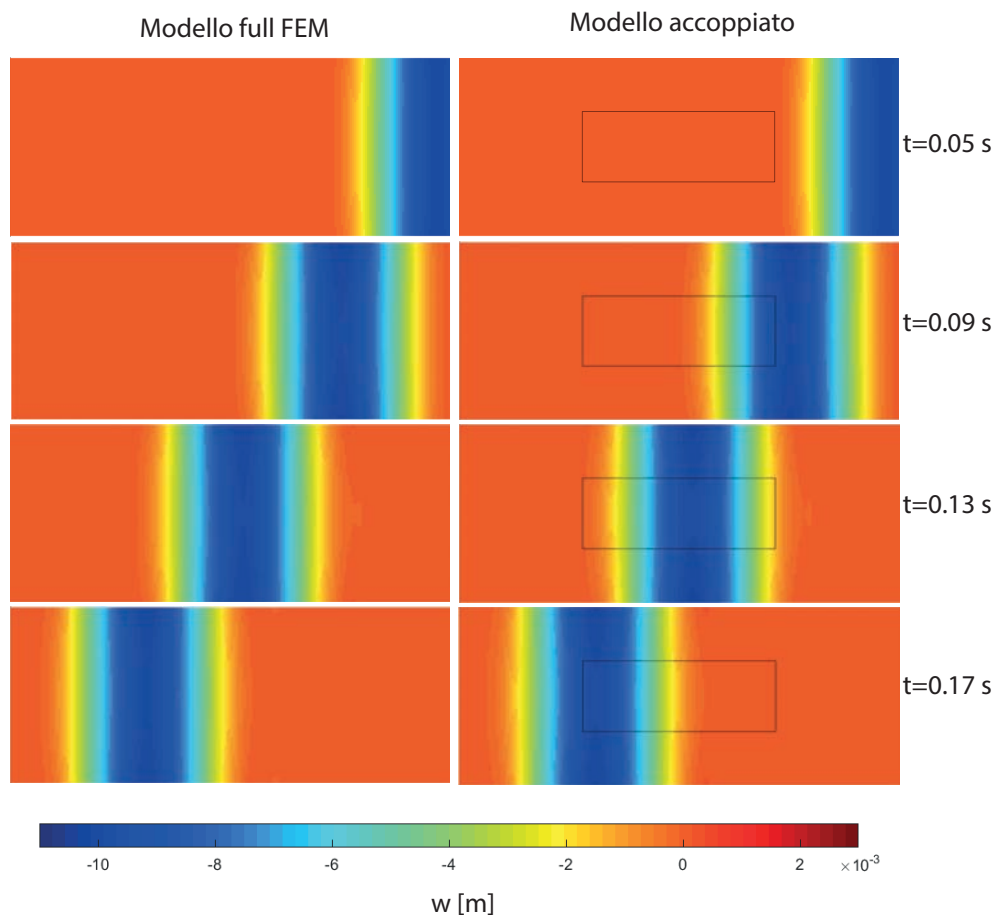


Figura 7.10: Soluzione ottenuta per uno spostamento imposto $w_0(t)$ tramite un'onda sfasata con semilunghezza d'onda $\lambda = 0.045$ [m]. A sinistra, la soluzione ottenuta su un modello full FEM. A destra, la soluzione ottenuta su un modello accoppiato; la linea nera continua delimita il confine della zona peridinamica.

7.2.5 Variazione delle spessore della piastra $h=0.01$ [m]

Infine, si è deciso di effettuare delle simulazioni variando lo spessore della piastra per renderla più *realistica*. Lo spessore adottato è stato di $h=0.01$ [m].

La piastra è stata sottoposta a due spostamenti imposti come quelli raffigurati nelle figure 7.3 e 7.5.

I risultati, per uno spostamento imposto caratterizzato da una semilunghezza d'onda $\lambda=0.015$ [m], sono mostrati in figura 7.11:

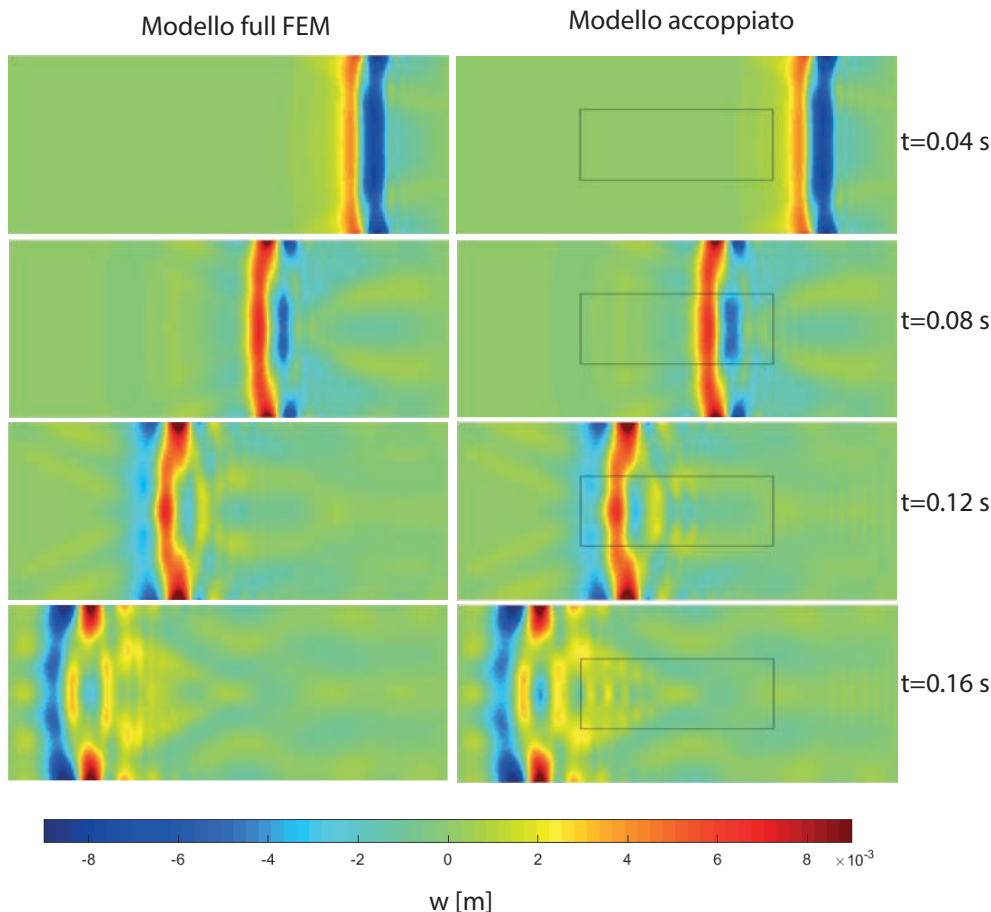


Figura 7.11: Soluzione ottenuta su una piastra con spessore $h=0.01$ [m], per uno spostamento imposto $w_0(t)$ con $\lambda = 0.015$ [m]. A sinistra, la soluzione ottenuta su un modello full FEM. A destra, la soluzione ottenuta su un modello accoppiato; la linea nera continua delimita il confine della zona peridinamica.

Per poter confrontare i risultati ottenuti su un modello full FEM e su un modello peridinamico, si è scelto di mostrare, in figura 7.11, la soluzione ottenuta a diversi step temporali; in particolare per $t=0.04$ [s], $t=0.08$ [s], $t=0.12$ [s] e $t=0.16$ [s].

Esaminando la figura 7.11, si possono notare le differenze tra le due soluzioni dovute alla natura non-locale della zona peridinamica nel modello accoppiato.

Si osserva, inoltre, che sulla piastra compare una seconda onda (in figura 7.11, è l'onda rossa), dapprima davanti all'onda dello spostamento imposto. Successivamen-

te, quest'onda si sposta e viene “inglobata” finendo dietro all'onda dello spostamento imposto $w_0(t)$.

In figura 7.12, vengono mostrati i risultati ottenuti, per uno spostamento imposto caratterizzato da una semilunghezza d'onda $\lambda=0.045$ [m], per diversi step temporali; in particolare per $t=0.05$ [s], $t=0.09$ [s], $t=0.13$ [s] e $t=0.17$ [s].

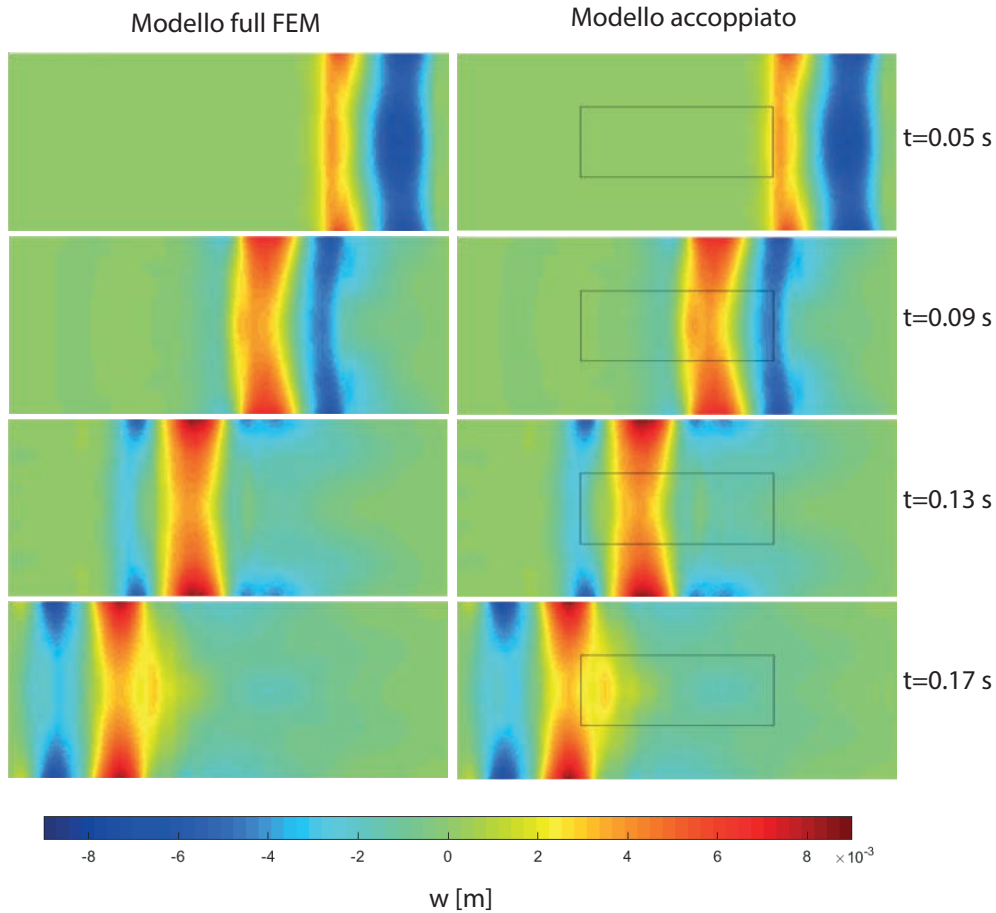


Figura 7.12: Soluzione ottenuta su una piastra con spessore $h=0.01$ [m], per uno spostamento imposto $w_0(t)$ con $\lambda = 0.045$ [m]. A sinistra, la soluzione ottenuta su un modello full FEM. A destra, la soluzione ottenuta su un modello accoppiato; la linea nera continua delimita il confine della zona peridinamica.

Come si può notare esaminando la figura 7.12, in accordo con i risultati precedentemente ottenuti, le differenze rilevate sui due modelli sono meno marcate dato il maggior rapporto λ/δ .

Analogamente a quanto illustrato in figura 7.11, sulla piastra viene a formarsi una seconda onda (onda rossa in figura 7.12) che risulta, in un primo momento, davanti allo spostamento imposto e, successivamente, dietro ad esso.

Si può ipotizzare che la minor rigidezza della piastra, dovuta al minor spessore h , sia la causa della comparsa di questa seconda onda, tuttavia, ulteriori studi sono necessari per approfondire questo fenomeno.

I dati ottenuti dalle varie simulazioni hanno dimostrato che il modello accoppiato può ben rappresentare il comportamento dinamico delle strutture quando sottoposte a spostamenti variabili nel tempo. Va evidenziata, in particolare, l'influenza del parametro λ/δ sulle soluzioni ottenute: più l'orizzonte perid dinamico δ è piccolo in confronto alla semilunghezza d'onda λ , minori sono le differenze riscontrate [46].

Pertanto, ulteriori studi possono essere effettuati utilizzando dei modelli con un passo di discretizzazione minore, al fine di diminuire l'orizzonte δ (mantenendo il rapporto $m=3$).

7.3 Risultati preliminari di fenomeni di propagazione delle cricche

Infine, è stata effettuata una simulazione per osservare il fenomeno di propagazione di una cricca.

Il modello di piastra utilizzato è mostrato in figura 7.13:

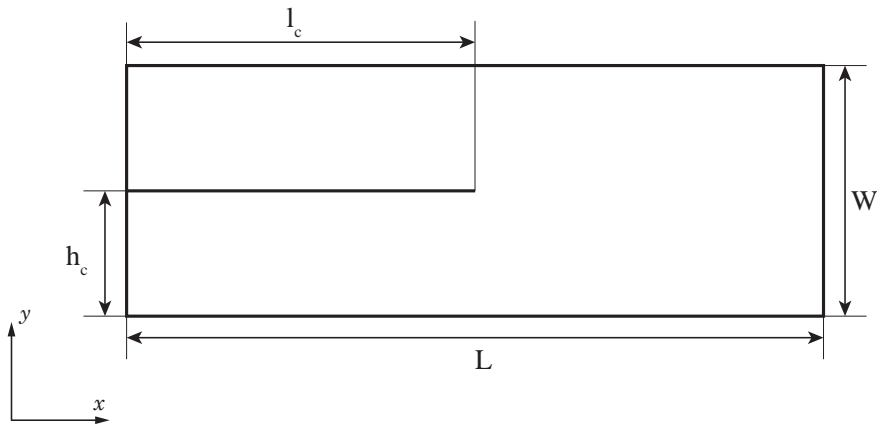


Figura 7.13: Raffigurazione del modello di piastra utilizzato per simulare il fenomeno di propagazione di una cricca. Vengono evidenziate le dimensioni caratteristiche del modello. In particolare, si può osservare la presenza di una precricca.

Si tratta di una piastra nella quale è presente una precricca. Le dimensioni geometriche sono riportate in tabella 7.3:

Tabella 7.3: Caratteristiche geometriche del modello di piastra utilizzato per simulare il fenomeno di propagazione di una cricca.

Caratteristiche geometriche	Valore	
L	0.1	[m]
W	0.041	[m]
h	1	[m]
h_c	0.0205	[m]
l_c	0.05	[m]

Le proprietà meccaniche del materiale che costituisce la piastra sono mostrate in tabella 7.4:

Tabella 7.4: Proprietà meccaniche del modello di piastra utilizzato per simulare il fenomeno di propagazione di una cricca.

Proprietà meccaniche	Valore	
E	65	[GPa]
ρ	2235	[kg/m ³]
ν	0.3333	
G_{Ic}	27.21	[J/m ²]
G_{IIIc}	1211.2	[J/m ²]

7.3.1 Modello coarse

Si è scelto di discretizzare la piastra in maniera regolare, assumendo un passo di griglia di $\Delta x = \Delta y = 0.001$ [m].

La piastra è stata modellata con un modello accoppiato tramite elementi finiti e una griglia peridinamica, visibile in figura 7.14.

Il modello accoppiato è composto da 2130 nodi peridinamici, 1844 elementi FEM puri e 201 elementi FEM ibridi.

La precricca implementata sul modello è stata modellata eliminando gli elementi FEM attraversati da essa ed eliminando i bond che intersecano il suo percorso lungo la piastra.

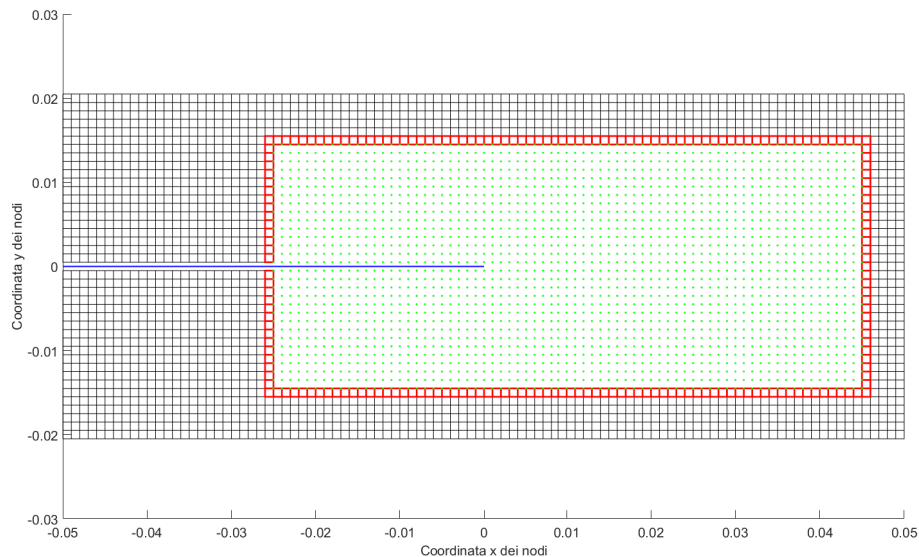


Figura 7.14: Rappresentazione grafica della discretizzazione del modello accoppiato di tipo coarse. Gli elementi FEM puri sono i rettangoli neri; in rosso, sono evidenziati gli elementi FEM ibridi. In verde, sono raffigurati i nodi peridinamici. In blu, è illustrata la precricca presente sul modello.

Per la zona peridinamica del modello, nella scelta del valore dell'orizzonte δ , si è assunto un rapporto m pari a:

$$m = \frac{\delta}{\Delta x} = 3 \quad (7.26)$$

Il valore dell'orizzonte, quindi, risulta pari a $\delta = m\Delta x = 0.003$ [m].

Ricordando le equazioni 4.22 e 4.23 a pagina 49, si ottengono i valori dei micro-moduli c_b e c_s :

$$c_b = \frac{3Eh^2}{4\pi\delta^3} = 5.7473e+17 \text{ [N/m}^3\text{]} \quad c_s = \frac{9E}{4\pi\delta^3}k = 1.4181e+18 \text{ [N/m}^5\text{]} \quad (7.27)$$

Il passo di discretizzazione temporale Δt è stato scelto in base all'equazione 7.14:

$$\Delta t \leq \frac{L}{c} = \frac{\Delta x}{\sqrt{E/\rho}} = 185.4 \text{ [ns]} \quad (7.28)$$

e, pertanto, si è scelto un $\Delta t = 12.5$ [ns], mentre il tempo totale della simulazione è pari a 50 [μ s].

L'analisi è stata effettuata su una piastra incastrata, visibile in figura 7.15, sottoposta ad uno sforzo trasversale F_0 , in direzione z , ed uno sforzo $-F_0$ in direzione opposta.

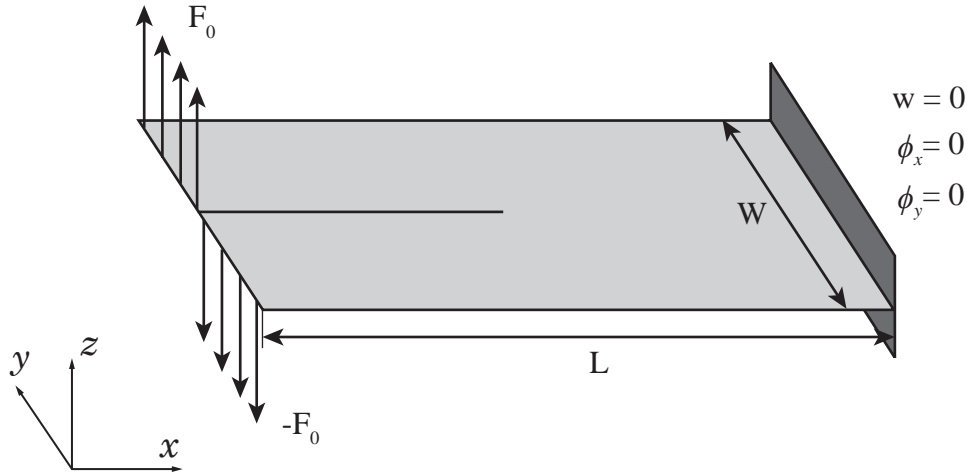


Figura 7.15: Rappresentazione grafica di una piastra incastrata, sottoposta ad uno sforzo trasversale F_0 , in direzione z , ed uno sforzo $-F_0$ in direzione $-z$.

Il valore dello sforzo trasversale è pari a $F_0 = 25$ [kN].

I vincoli sono stati posti sui nodi appartenenti ad elementi FEM puri lungo un bordo della piastra. Sul lato opposto, sempre su nodi appartenenti ad elementi FEM, si è imposto lo sforzo trasversale F_0 sui nodi sopra la precricca e lo sforzo trasversale $-F_0$ sui nodi posti al di sotto di essa.

Volendo simulare il fenomeno di propagazione di una cricca è necessario calcolare i valori della curvatura e dell'angolo di taglio critici, rispettivamente, κ_c e φ_c , al fine di descrivere lo stato di un bond (integro o rotto).

Nel paragrafo 4.4 a pagina 53, si è descritta la procedura per ricavare i valori di curvatura e angolo di taglio critici e, ricorrendo alle equazioni 4.41 e 4.43, si ottengono:

$$\kappa_c = \sqrt{\frac{4G_{Ic}}{c_b\delta^4}} = 0.0015 \text{ [m}^{-1}\text{]} \quad (7.29)$$

$$\varphi_c = \sqrt{\frac{4G_{IIIc}}{c_s\delta^4}} = 0.0065 \quad (7.30)$$

Ottenuti tali valori, è possibile calcolare ad ogni step temporale, per ogni bond presente nel modello, la funzione scalare $\mu(\xi_{kj})$, definita dall'equazione 4.39, qui riportata per comodità:

$$\mu(\xi_{kj}) = \begin{cases} 1 & \text{se } \kappa_{kj} < \kappa_c \text{ e } \varphi_{kj} < \varphi_c \\ 0 & \text{altrimenti} \end{cases} \quad (7.31)$$

Infine, sul modello di piastra analizzato, è possibile implementare il concetto di danno come definito nell'equazione 2.65 a pagina 20, qui riportato per semplicità:

$$\varphi(\mathbf{x}_k, t) = 1 - \frac{\int_H \mu(\mathbf{x}_j - \mathbf{x}_k, t) dV_j}{\int_H dV_j} \quad (7.32)$$

In figura 7.16, è possibile osservare la propagazione della cricca a diversi step temporali; in particolare per $t=25 \text{ [\mu s]}$, $t=30 \text{ [\mu s]}$, $t=40 \text{ [\mu s]}$, $t=45 \text{ [\mu s]}$ e $t=50 \text{ [\mu s]}$.

La cricca comincia a propagarsi a $t_{inizio}=22.32 \text{ [\mu s]}$.

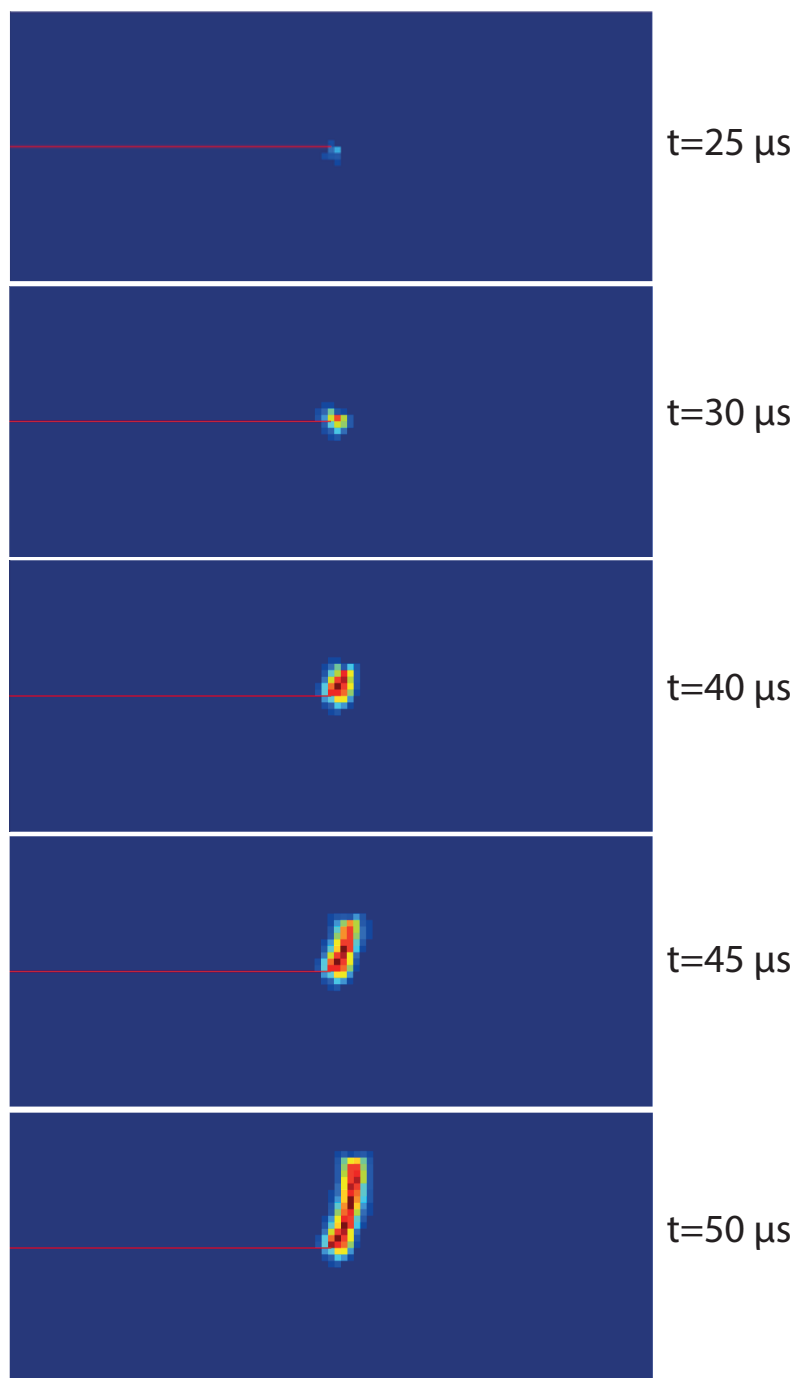


Figura 7.16: Rappresentazione grafica della propagazione della cricca per $t=25 \mu\text{s}$, $t=30 \mu\text{s}$, $t=40 \mu\text{s}$, $t=45 \mu\text{s}$ e $t=50 \mu\text{s}$.

7.3.2 Modello refined

Successivamente, si è deciso di effettuare lo stesso tipo di analisi su un modello con un maggior numero di nodi.

Si è scelto di discretizzare la piastra in maniera regolare, assumendo un passo di griglia di $\Delta x = \Delta y = 0.0005$ [m].

La piastra è stata modellata con un modello accoppiato tramite elementi finiti e una griglia peridinamica, visibile in figura 7.17.

Il modello accoppiato è composto da 8460 nodi peridinamici, 7489 elementi FEM puri e 401 elementi FEM ibridi.

Il valore dell'orizzonte δ è stato scelto assumendo un rapporto $m = 3$, ottenendo $\delta = m\Delta x = 0.0015$ [m].

Ricordando le equazioni 4.22 e 4.23 a pagina 49, si ottengono i valori dei micro-moduli c_b e c_s :

$$c_b = \frac{3Eh^2}{4\pi\delta^3} = 4.5978e+18 \text{ [N/m}^3] \quad c_s = \frac{9E}{4\pi\delta^3}k = 1.1345e+19 \text{ [N/m}^5] \quad (7.33)$$

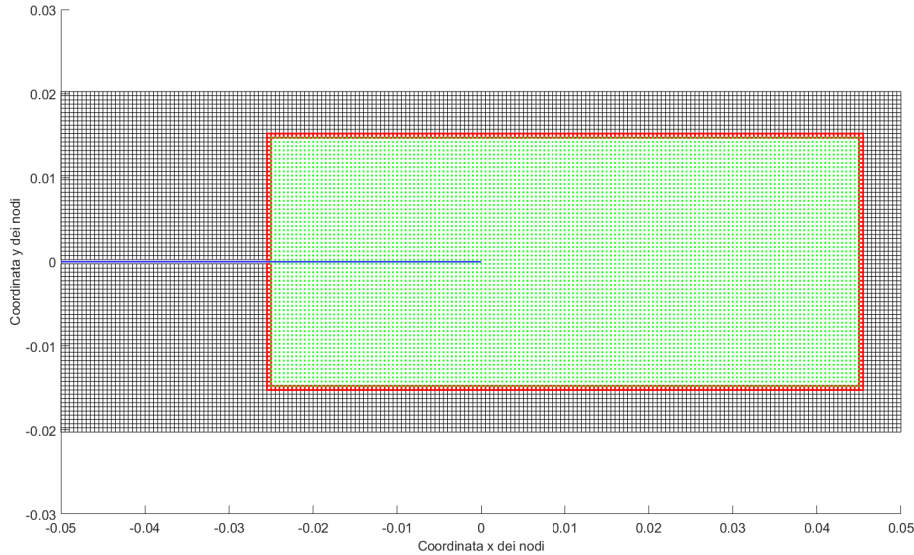


Figura 7.17: Rappresentazione grafica della discretizzazione del modello accoppiato di tipo refined. Gli elementi FEM puri sono i rettangoli neri; in rosso, sono evidenziati gli elementi FEM ibridi. In verde, sono raffigurati i nodi peridinamici. In blu, è illustrata la precricca presente sul modello.

Il passo di discretizzazione temporale Δt è stato scelto in base all'equazione 7.14:

$$\Delta t \leq \frac{L}{c} = \frac{\Delta x}{\sqrt{E/\rho}} = 92.72 \text{ [ns]} \quad (7.34)$$

e, pertanto, si è scelto un $\Delta t = 12.5$ [ns], mentre il tempo totale della simulazione è pari a 30 [μ s].

L'analisi è stata effettuata sullo stesso tipo di piastra incastrata, visibile in figura 7.15, sottoposta ad uno sforzo trasversale F_0 , in direzione z , ed uno sforzo $-F_0$ in direzione opposta.

Il valore dello sforzo trasversale è pari a $F_0 = 25$ [kN].

I vincoli sono stati posti in maniera analoga all'analisi effettuata sul modello coarse.

Al fine di simulare il fenomeno di propagazione di una cricca è necessario calcolare i valori della curvatura e dell'angolo di taglio critici, rispettivamente, κ_c e φ_c , ricorrendo alle equazioni 4.41 e 4.43 a pagina 53:

$$\kappa_c = \sqrt{\frac{4G_{Ic}}{c_b\delta^4}} = 0.0022 \text{ [m}^{-1}\text{]} \quad (7.35)$$

$$\varphi_c = \sqrt{\frac{4G_{IIIc}}{c_s\delta^4}} = 0.0092 \quad (7.36)$$

In figura 7.18, è possibile osservare la propagazione della cricca a diversi step temporali; in particolare per $t=20$ [μs], $t=22.5$ [μs], $t=23.75$ [μs], $t=25$ [μs], $t=27.5$ [μs] e $t=30$ [μs].

La cricca comincia a propagarsi a $t_{inizio}=18.15$ [μs].

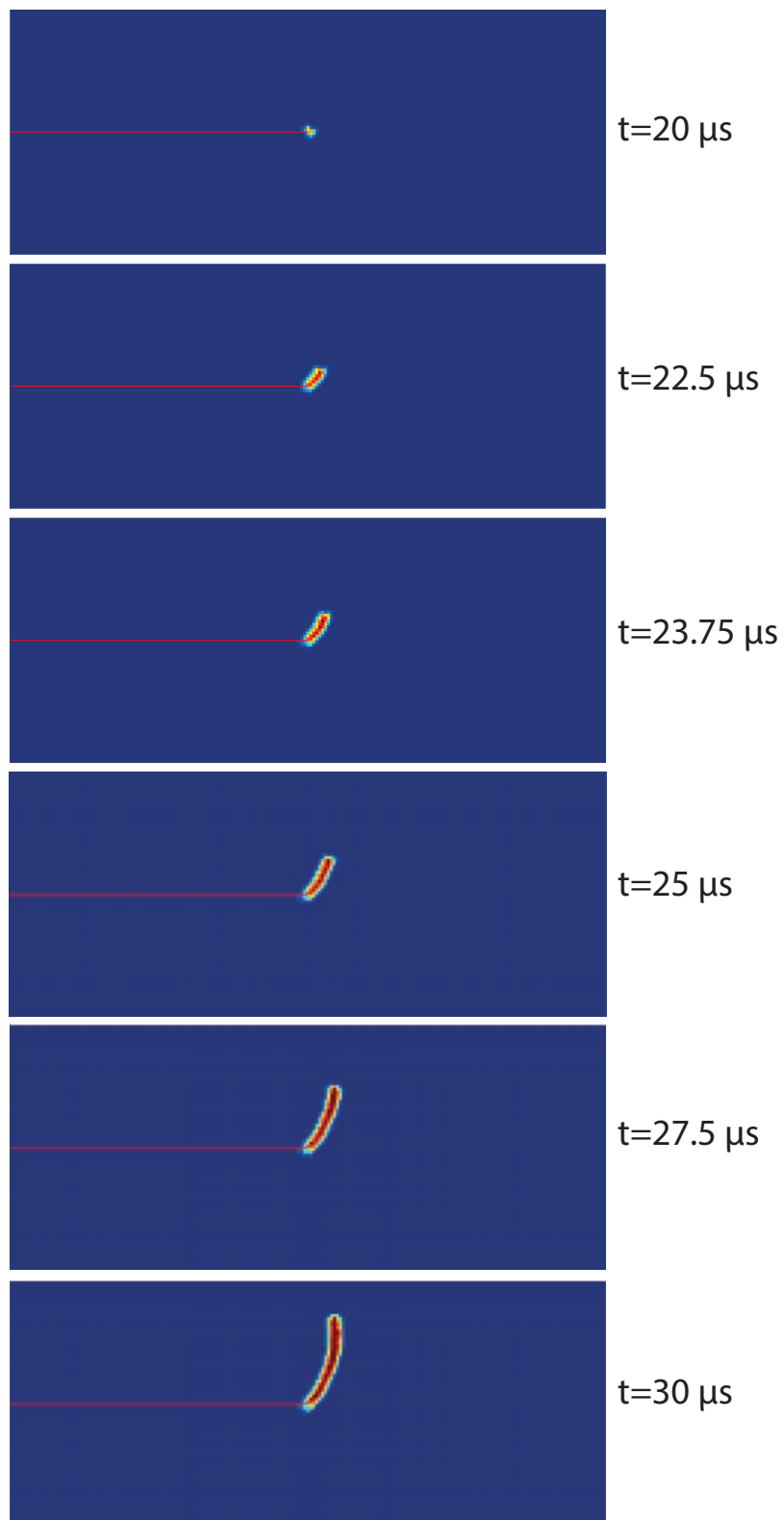


Figura 7.18: Rappresentazione grafica della propagazione della cricca sul modello refined per $t=20 [\mu\text{s}]$, $t=22.5 [\mu\text{s}]$, $t=23.75 [\mu\text{s}]$, $t=25 [\mu\text{s}]$, $t=27.5 [\mu\text{s}]$ e $t=30 [\mu\text{s}]$.

7.3.3 Modello di una piastra in polimetilmetacrilato

Infine, si è deciso di effettuare un'analisi su un modello di piastra in polimetilmetacrilato (PMMA) le cui proprietà meccaniche sono mostrate in tabella 7.5:

Tabella 7.5: Proprietà meccaniche del PMMA.

Proprietà meccaniche	Valore	
E	3.227	[GPa]
ρ	1190	[kg/m ³]
ν	0.3333	
G_{Ic}	548.16	[J/m ²]
G_{IIIc}	24396	[J/m ²]

Si è scelto di discretizzare la piastra in maniera regolare, assumendo un passo di griglia di $\Delta x = \Delta y = 0.0005$ [m].

La piastra è stata modellata con un modello accoppiato tramite elementi finiti e una griglia peridinamica; si tratta dello stesso modello visibile in figura 7.17.

Il modello accoppiato è composto da 8460 nodi peridinamici, 7489 elementi FEM puri e 401 elementi FEM ibridi.

Il valore dell'orizzonte δ è stato scelto assumendo un rapporto $m = 3$, ottenendo $\delta = m\Delta x = 0.0015$ [m].

Ricordando le equazioni 4.22 e 4.23 a pagina 49, si ottengono i valori dei micro-moduli c_b e c_s :

$$c_b = \frac{3Eh^2}{4\pi\delta^3} = 4.2826e+17 \text{ [N/m}^3\text{]} \quad c_s = \frac{9E}{4\pi\delta^3}k = 5.6322e+17 \text{ [N/m}^5\text{]} \quad (7.37)$$

Il passo di discretizzazione temporale Δt è stato scelto in base all'equazione 7.14:

$$\Delta t \leq \frac{L}{c} = \frac{\Delta x}{\sqrt{E/\rho}} = 303.63 \text{ [ns]} \quad (7.38)$$

e, pertanto, si è scelto un $\Delta t = 12.5$ [ns], mentre il tempo totale della simulazione è pari a 75 [μ s].

L'analisi è stata effettuata sullo stesso tipo di piastra incastrata, visibile in figura 7.15, sottoposta ad uno sforzo trasversale F_0 , in direzione z , ed uno sforzo $-F_0$ in direzione opposta. Il valore dello sforzo trasversale è pari a $F_0 = 50$ [kN].

I vincoli sono stati posti in maniera analoga all'analisi effettuata sul modello refined.

Al fine di simulare il fenomeno di propagazione di una cricca è necessario calcolare i valori della curvatura e dell'angolo di taglio critici, rispettivamente, κ_c e φ_c , ricorrendo alle equazioni 4.41 e 4.43 a pagina 53:

$$\kappa_c = \sqrt{\frac{4G_{Ic}}{c_b\delta^4}} = 0.0436 \text{ [m}^{-1}\text{]} \quad \varphi_c = \sqrt{\frac{4G_{IIIc}}{c_s\delta^4}} = 0.185 \quad (7.39)$$

In figura 7.19, è possibile osservare la propagazione della cricca a diversi step temporali. La cricca comincia a propagarsi a $t_{inizio}=48.75 [\mu s]$.

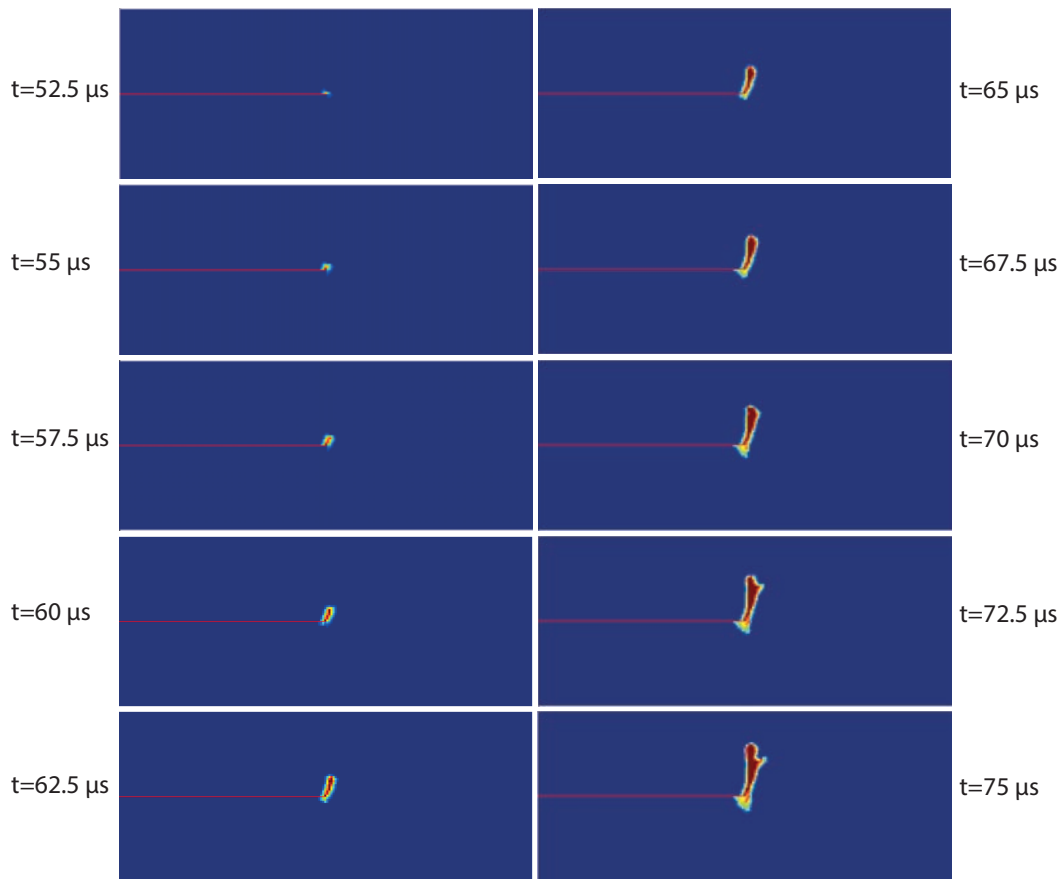


Figura 7.19: Rappresentazione grafica della propagazione della cricca sul modello di piastra in PMMA per $t=52.5 [\mu s]$, $t=55 [\mu s]$, $t=57.5 [\mu s]$, $t=60 [\mu s]$, $t=62.5 [\mu s]$, $t=65 [\mu s]$, $t=67.5 [\mu s]$, $t=70 [\mu s]$, $t=72.5 [\mu s]$ e $t=75 [\mu s]$.

Dalle simulazioni ottenute, si è dimostrato che il modello accoppiato può descrivere il fenomeno della propagazione delle cricche, tuttavia, data la complessità del fenomeno e l'importanza che ricopre in ambito ingegneristico, ulteriori studi ed analisi sono necessari affinché tale modello si possa definire affidabile e coerente con eventuali dati sperimentali.

Capitolo 8

Conclusioni

Nel presente elaborato, si è implementata per la prima volta una tecnica di accoppiamento tra elementi finiti e griglie peridinamiche, al fine di creare modelli utili a simulare il comportamento di piastre quando sottoposte a carichi statici e dinamici.

La teoria peridinamica è una nuova teoria del continuo, non-locale, utile per descrivere i fenomeni di formazione e propagazione di cricche. La presenza di questi danneggiamenti sul materiale comporta una variazione del comportamento della struttura, quando sottoposta a carichi, e, in generale, ne determina un indebolimento complessivo; per tale motivo, lo studio di questo fenomeno ha assunto una rilevanza importante in ambito ingegneristico.

Si è osservato che, a causa della formulazione stessa, la teoria peridinamica è molto onerosa dal punto di vista computazionale e deve essere implementata con dei particolari accorgimenti, soprattutto per quanto riguarda l'applicazione delle condizioni al contorno del problema.

L'accoppiamento tra il metodo agli elementi finiti e la teoria peridinamica permette di sfruttare le potenzialità di entrambi i metodi numerici e superare le rispettive problematiche.

Nel presente lavoro, è stata presentata, per linee generali, la formulazione della teoria peridinamica, con particolare riferimento alla teoria peridinamica bond-based.

Successivamente, si è descritto il metodo agli elementi finiti e si è illustrato il metodo di calcolo della matrice di rigidezza di un elemento plate utile a descrivere il comportamento di una piastra secondo la teoria delle piastre di Mindlin. Questa teoria permette di descrivere le deformazioni a taglio attraverso lo spessore subite da una piastra e rappresenta un'estensione della teoria delle piastre di Kirchhoff-Love.

Si sono ricavate le equazioni peridinamiche del moto per una piastra di Mindlin e la matrice di rigidezza dei nodi peridinamici.

Infine, è stata presentata la tecnica di accoppiamento utilizzata per la costruzione dei modelli accoppiati utilizzati durante le simulazioni.

Per validare i modelli accoppiati, sono stati effettuati diversi tipi di patch test atti a verificare che i modelli fossero ben costruiti e che non ci fosse la presenza di ghost forces. I risultati ottenuti su un modello accoppiato sono stati confrontati con i dati ottenuti dalle stesse simulazioni effettuate su un modello full FEM, riscontrandone l'efficacia.

Dopo aver eseguito i patch test e verificato la validità del modello, si è proseguito effettuando delle analisi statiche. Si sono svolte delle simulazioni su una piastra incastrata ad un'estremità e si è osservato il suo comportamento al variare del tipo di carico. Lo scopo di queste simulazioni era di testare ulteriormente il modello accoppiato e di confrontarne i risultati con un modello agli elementi finiti. Si è osservato che il modello accoppiato ben rappresenta il comportamento della piastra al pari di un modello full FEM.

Successivamente, si è replicata l'analisi statica effettuata da Diyaroglu et al., nel loro articolo [24], su tre modelli: un modello accoppiato, un modello full FEM ed un modello full PD. Si è osservato che il modello accoppiato ben rappresenta tutte le soluzioni statiche ottenute dai ricercatori. Pertanto, si può concludere che la tecnica di accoppiamento proposta tra elementi finiti e griglie peridinamiche sia valida ed efficace.

In seguito, si sono effettuate delle simulazioni sulla piastra quando soggetta a dei carichi di natura dinamica. In particolare, è stata sottoposta a degli spostamenti imposti variabili nel tempo, di natura ondulatoria, con delle semilunghezze d'onda definite. Si è osservato, dai risultati ottenuti, che il modello accoppiato ben rappresenta la soluzione tramite un modello full FEM e che tale soluzione è influenzata dal rapporto tra la semilunghezza d'onda λ dello spostamento imposto e l'orizzonte peridinamico δ utilizzato nel modello accoppiato. Più tale rapporto è elevato, più la soluzione sul modello accoppiato si avvicina alla soluzione ottenuta su un modello full FEM. Ciò è in linea con i risultati ottenuti da Zaccariotto et al. nel loro articolo [22].

Infine, sono stati mostrati degli studi preliminari di propagazione di una cricca su una piastra incastrata caratterizzata dalla presenza di una precricca. I dati ottenuti hanno dimostrato che il modello accoppiato sviluppato può essere utilizzato per delle simulazioni atte a descrivere il fenomeno di formazione e propagazione delle cricche, tuttavia, sono necessari ulteriori studi ed approfondimenti.

Dai risultati ottenuti, si può concludere che il modello accoppiato ben rappresenti il comportamento di una piastra quando soggetta a carichi statici e dinamici e, quindi, possa essere implementato anche per lo studio di fenomeni che prevedano la propagazione delle cricche.

In futuro, si potrà estendere l'accoppiamento per tener conto anche degli spostamenti nel piano medio della piastra.

Appendice A

Derivazione delle equazioni peridinamiche del moto

Nella seguente appendice, vengono riportate nel dettaglio le derivazioni delle equazioni peridinamiche del moto per le piastre di Mindlin: si vedano le equazioni 4.32, 4.33 e 4.34, paragrafo 4.2 a pagina 48.

Preso come nodo sorgente il nodo k , l'equazione di Lagrange risulta essere:

$$\frac{d}{dt} \left(\frac{\partial \mathcal{L}}{\partial \dot{\mathbf{q}}_k} \right) - \frac{\partial \mathcal{L}}{\partial \mathbf{q}_k} \quad (\text{A.1})$$

Per ottenere la formulazione delle equazioni del moto per il nodo k , è necessario applicare l'equazione di Lagrange per i tre gradi di libertà w_k , ϕ_{x_k} e ϕ_{y_k} .

Andranno, quindi, sviluppate le seguenti equazioni:

$$\frac{d}{dt} \left(\frac{\partial \mathcal{L}}{\partial \dot{w}_k} \right) - \frac{\partial \mathcal{L}}{\partial w_k} = 0 \quad (\text{A.2})$$

$$\frac{d}{dt} \left(\frac{\partial \mathcal{L}}{\partial \dot{\phi}_{x_k}} \right) - \frac{\partial \mathcal{L}}{\partial \phi_{x_k}} = 0 \quad (\text{A.3})$$

$$\frac{d}{dt} \left(\frac{\partial \mathcal{L}}{\partial \dot{\phi}_{y_k}} \right) - \frac{\partial \mathcal{L}}{\partial \phi_{y_k}} = 0 \quad (\text{A.4})$$

Si riportano, per comodità del lettore, alcune equazioni utili per la risoluzione delle equazioni peridinamiche del moto, considerando il nodo k come nodo sorgente e il nodo j come nodo famiglia. Tutte queste equazioni sono riportate al paragrafo 4.2 a pagina 48.

Si scrive, quindi, la curvatura:

$$\kappa_{kj} = \frac{\phi_{x_j} - \phi_{x_k}}{\xi_{kj}} \sin \theta + \frac{\phi_{y_k} - \phi_{y_j}}{\xi_{kj}} \cos \theta \quad (\text{A.5})$$

Si riporta l'angolo di taglio lungo lo spessore h :

$$\varphi_{kj} = \frac{w_j - w_k}{\xi_{kj}} - \frac{(\phi_{x_j} + \phi_{x_k}) \sin \theta - (\phi_{y_j} + \phi_{y_k}) \cos \theta}{2} \quad (\text{A.6})$$

Si ricordano le relazioni seguenti:

$$\xi_{kj} = \xi_{jk} \quad \kappa_{kj} = -\kappa_{jk} \quad \varphi_{kj} = -\varphi_{jk} \quad (\text{A.7})$$

Si considera l'equazione che descrive l'energia cinetica totale della struttura, già discretizzata:

$$T = \frac{1}{2} h \rho \sum_{k=1}^t \left(\frac{h^3}{12} \dot{\phi}_{y_k}^2 + \frac{h^3}{12} \dot{\phi}_{x_k}^2 + \dot{w}_k^2 \right) A_k \quad (\text{A.8})$$

Analogamente, si riscrive l'equazione per l'energia potenziale totale della struttura:

$$U = \sum_{k=1}^t \left\{ \frac{1}{2} \sum_{j=1}^n \frac{1}{2} [\tilde{w}_{kj}(\kappa_{kj}) + \tilde{w}_{jk}(\kappa_{jk})] V_j - \frac{\tilde{b}_{\alpha_k}}{h} \phi_{\alpha_k} \right\} V_k \\ + \sum_{k=1}^t \left\{ \frac{1}{2} \sum_{j=1}^n \frac{1}{2} [\hat{w}_{kj}(\varphi_{kj}) + \hat{w}_{jk}(\varphi_{jk})] V_j - \frac{\hat{b}_k}{h} w_k \right\} V_k \quad (\text{A.9})$$

Infine, si riportano i valori dei micropotenziali dovuti alle deformazioni flessionali e a taglio:

$$\tilde{w}_{kj}(\kappa_{kj}) = c_b \frac{\xi_{kj}}{h} \frac{\kappa_{kj}^2}{2} \quad (\text{A.10})$$

$$\hat{w}_{kj}(\varphi_{kj}) = c_s \frac{\xi_{kj}}{h} \frac{\varphi_{kj}^2}{2} \quad (\text{A.11})$$

e i valori degli stessi micropotenziali quando si considera come nodo sorgente il nodo j e come nodo famiglia il nodo k :

$$\tilde{w}_{jk}(\kappa_{jk}) = c_b \frac{\xi_{jk}}{h} \frac{\kappa_{jk}^2}{2} \quad (\text{A.12})$$

$$\hat{w}_{jk}(\varphi_{jk}) = c_s \frac{\xi_{jk}}{h} \frac{\varphi_{jk}^2}{2} \quad (\text{A.13})$$

A.1 Equazione del moto per il grado di libertà w_k

L'equazione A.2 può essere riscritta come:

$$\frac{d}{dt} \frac{\partial T}{\partial \dot{w}_k} + \frac{\partial U}{\partial w_k} = 0 \quad (\text{A.14})$$

Riprendendo le equazioni per l'energia cinetica e per l'energia potenziale, equazioni A.8 e A.9, ed eliminando la sommatoria su tutti i nodi k , si può scrivere:

$$\begin{aligned} h\rho\ddot{w}_k A_k + \frac{1}{2} \left\{ \sum_{j=1}^n \frac{1}{2} \left[\frac{\partial \tilde{w}_{kj}(\kappa_{kj})}{\partial w_k} + \frac{\partial \tilde{w}_{jk}(\kappa_{jk})}{\partial w_k} \right] V_j - \frac{\partial}{\partial w_k} \left(\frac{\tilde{b}_{\alpha_k} \phi_{\alpha_k}}{h} \right) \right\} V_k \\ + \frac{1}{2} \left\{ \sum_{j=1}^n \frac{1}{2} \left[\frac{\partial \hat{w}_{kj}(\varphi_{kj})}{\partial w_k} + \frac{\partial \hat{w}_{jk}(\varphi_{jk})}{\partial w_k} \right] V_j - \frac{\partial}{\partial w_k} \left(\frac{\hat{b}_k w_k}{h} \right) \right\} V_k = 0 \quad (\text{A.15}) \end{aligned}$$

L'equazione può essere semplificata dividendo per il volume V_k , ottenendo:

$$\begin{aligned} \rho\ddot{w}_k + \left\{ \frac{1}{2} \sum_{j=1}^n \frac{1}{2} \left[\frac{\partial \tilde{w}_{kj}(\kappa_{kj})}{\partial w_k} + \frac{\partial \tilde{w}_{jk}(\kappa_{jk})}{\partial w_k} \right] V_j - \frac{\partial}{\partial w_k} \left(\frac{\tilde{b}_{\alpha_k} \phi_{\alpha_k}}{h} \right) \right. \\ \left. + \frac{1}{2} \sum_{j=1}^n \frac{1}{2} \left[\frac{\partial \hat{w}_{kj}(\varphi_{kj})}{\partial w_k} + \frac{\partial \hat{w}_{jk}(\varphi_{jk})}{\partial w_k} \right] V_j - \frac{\partial}{\partial w_k} \left(\frac{\hat{b}_k w_k}{h} \right) \right\} = 0 \quad (\text{A.16}) \end{aligned}$$

Le derivate parziali dei micromoduli rispetto al grado di libertà w_k possono essere riscritte differenziando rispetto alla curvatura e all'angolo di taglio lungo lo spessore. Si può scrivere, infatti:

$$\frac{\partial \tilde{w}_{kj}(\kappa_{kj})}{\partial w_k} = \frac{\partial \tilde{w}_{kj}(\kappa_{kj})}{\partial \kappa_{kj}} \frac{\partial \kappa_{kj}}{\partial w_k} \quad (\text{A.17})$$

$$\frac{\partial \hat{w}_{kj}(\varphi_{kj})}{\partial w_k} = \frac{\partial \hat{w}_{kj}(\varphi_{kj})}{\partial \varphi_{kj}} \frac{\partial \varphi_{kj}}{\partial w_k} \quad (\text{A.18})$$

Sostituendo quindi, con le dovute accortezze, le equazioni A.17 e A.18 all'interno dell'equazione A.16, si ottiene:

$$\begin{aligned}
\rho \ddot{w}_k + \left\{ \frac{1}{2} \sum_{j=1}^n \frac{1}{2} \left[\frac{\partial \tilde{w}_{kj}(\kappa_{kj})}{\partial \kappa_{kj}} \frac{\partial \kappa_{kj}}{\partial w_k} + \frac{\partial \tilde{w}_{jk}(\kappa_{jk})}{\partial \kappa_{jk}} \frac{\partial \kappa_{jk}}{\partial w_k} \right. \right. \\
+ \left. \frac{\partial \tilde{w}_{kj}(\kappa_{kj})}{\partial \kappa_{jk}} \frac{\partial \kappa_{jk}}{\partial w_k} + \frac{\partial \tilde{w}_{jk}(\kappa_{jk})}{\partial \kappa_{kj}} \frac{\partial \kappa_{kj}}{\partial w_k} \right] V_j \\
+ \frac{1}{2} \sum_{j=1}^n \frac{1}{2} \left[\frac{\partial \hat{w}_{kj}(\varphi_{kj})}{\partial \varphi_{kj}} \frac{\partial \varphi_{kj}}{\partial w_k} + \frac{\partial \hat{w}_{jk}(\varphi_{jk})}{\partial \varphi_{jk}} \frac{\partial \varphi_{jk}}{\partial w_k} \right. \\
+ \left. \frac{\partial \hat{w}_{kj}(\varphi_{kj})}{\partial \varphi_{jk}} \frac{\partial \varphi_{jk}}{\partial w_k} + \frac{\partial \hat{w}_{jk}(\varphi_{jk})}{\partial \varphi_{kj}} \frac{\partial \varphi_{kj}}{\partial w_k} \right] V_j - \frac{\hat{b}_k}{h} \left. \right\} = 0 \quad (\text{A.19})
\end{aligned}$$

Le derivate dei micropotenziali dovuti agli effetti flessionali, equazione A.10, e dovuti alle deformazioni a taglio, equazione A.11, eseguite rispetto alla curvatura e all'angolo di taglio lungo lo spessore, possono essere facilmente calcolate ricordando le relazioni A.7:

$$\frac{\partial \tilde{w}_{kj}(\kappa_{kj})}{\partial \kappa_{kj}} = \frac{\partial \tilde{w}_{jk}(\kappa_{jk})}{\partial \kappa_{kj}} = c_b \frac{\xi_{kj}}{h} (-\kappa_{jk}) \quad (\text{A.20})$$

$$\frac{\partial \tilde{w}_{kj}(\kappa_{kj})}{\partial \kappa_{jk}} = \frac{\partial \tilde{w}_{jk}(\kappa_{jk})}{\partial \kappa_{jk}} = c_b \frac{\xi_{kj}}{h} \kappa_{jk} \quad (\text{A.21})$$

$$\frac{\partial \hat{w}_{kj}(\varphi_{kj})}{\partial \varphi_{kj}} = \frac{\partial \hat{w}_{jk}(\varphi_{jk})}{\partial \varphi_{kj}} = c_s \frac{\xi_{kj}}{h} (-\varphi_{jk}) \quad (\text{A.22})$$

$$\frac{\partial \hat{w}_{kj}(\varphi_{kj})}{\partial \varphi_{jk}} = \frac{\partial \hat{w}_{jk}(\varphi_{jk})}{\partial \varphi_{jk}} = c_s \frac{\xi_{kj}}{h} \varphi_{jk} \quad (\text{A.23})$$

Per il calcolo delle derivate della curvatura e dell'angolo di taglio lungo lo spessore rispetto a w_k , si ricordano le equazioni A.5 e A.6. Tenendo in considerazione le relazioni A.7, si possono scrivere:

$$\frac{\partial \kappa_{kj}}{\partial w_k} = \frac{\partial \kappa_{jk}}{\partial w_k} = 0 \quad (\text{A.24})$$

$$\frac{\partial \varphi_{kj}}{\partial w_k} = -\frac{1}{\xi_{kj}} \quad (\text{A.25})$$

$$\frac{\partial \varphi_{jk}}{\partial w_k} = \frac{1}{\xi_{kj}} \quad (\text{A.26})$$

Sostituendo, quindi, le equazioni A.20-A.23 e le equazioni A.24-A.26 all'interno dell'equazione A.19, si può scrivere:

$$\rho\ddot{w}_k + \left\{ \frac{1}{2} \sum_{j=1}^n \frac{1}{2} \left[c_s \frac{\xi_{kj}}{h} (-\varphi_{jk}) \left(-\frac{1}{\xi_{kj}} \right) + c_s \frac{\xi_{kj}}{h} (-\varphi_{jk}) \left(-\frac{1}{\xi_{kj}} \right) + c_s \frac{\xi_{kj}}{h} \varphi_{jk} \frac{1}{\xi_{kj}} + c_s \frac{\xi_{kj}}{h} \varphi_{jk} \frac{1}{\xi_{kj}} \right] V_j - \frac{\hat{b}_k}{h} \right\} = 0 \quad (\text{A.27})$$

Dopo alcuni semplici passaggi algebrici, si ottiene:

$$\rho\ddot{w}_k + \sum_{j=1}^n \left(\frac{c_s}{h} \varphi_{jk} \right) V_j - \frac{\hat{b}_k}{h} = 0 \quad (\text{A.28})$$

Infine, sostituendo φ_{jk} con il suo valore dato dall'equazione A.6, applicate le relazioni A.7, e portando fuori dalla sommatoria i termini costanti, si ricava l'equazione del moto per il grado di libertà w_k :

$$\rho\ddot{w}_k + \frac{c_s}{h} \sum_{j=1}^n \left(\frac{w_k - w_j}{\xi_{kj}} + \frac{\phi_{x_k} + \phi_{x_j}}{2} \sin \theta - \frac{\phi_{y_k} + \phi_{y_j}}{2} \cos \theta \right) V_j = \frac{\hat{b}_k}{h} \quad (\text{A.29})$$

A.2 Equazione del moto per il grado di libertà ϕ_{x_k}

L'equazione A.3 può essere riscritta come:

$$\frac{d}{dt} \frac{\partial T}{\partial \dot{\phi}_{x_k}} + \frac{\partial U}{\partial \phi_{x_k}} = 0 \quad (\text{A.30})$$

Riprendendo le equazioni per l'energia cinetica e per l'energia potenziale, equazioni A.8 e A.9, ed eliminando la sommatoria su tutti i nodi k , si può scrivere:

$$\begin{aligned} \rho \frac{h^3}{12} \ddot{\phi}_{x_k} A_k + \frac{1}{2} \left\{ \sum_{j=1}^n \frac{1}{2} \left[\frac{\partial \tilde{w}_{kj}(\kappa_{kj})}{\partial \phi_{x_k}} + \frac{\partial \tilde{w}_{jk}(\kappa_{jk})}{\partial \phi_{x_k}} \right] V_j - \frac{\partial}{\partial \phi_{x_k}} \left(\frac{\tilde{b}_{\alpha_k} \phi_{\alpha_k}}{h} \right) \right\} V_k \\ + \frac{1}{2} \left\{ \sum_{j=1}^n \frac{1}{2} \left[\frac{\partial \hat{w}_{kj}(\varphi_{kj})}{\partial \phi_{x_k}} + \frac{\partial \hat{w}_{jk}(\varphi_{jk})}{\partial \phi_{x_k}} \right] V_j - \frac{\partial}{\partial \phi_{x_k}} \left(\frac{\hat{b}_k w_k}{h} \right) \right\} V_k = 0 \quad (\text{A.31}) \end{aligned}$$

L'equazione può essere semplificata dividendo per il volume V_k , ottenendo:

$$\begin{aligned} \rho \frac{h^2}{12} \ddot{\phi}_{x_k} + \left\{ \frac{1}{2} \sum_{j=1}^n \frac{1}{2} \left[\frac{\partial \tilde{w}_{kj}(\kappa_{kj})}{\partial \phi_{x_k}} + \frac{\partial \tilde{w}_{jk}(\kappa_{jk})}{\partial \phi_{x_k}} \right] V_j - \frac{\partial}{\partial \phi_{x_k}} \left(\frac{\tilde{b}_{\alpha_k} \phi_{\alpha_k}}{h} \right) \right. \\ \left. + \frac{1}{2} \sum_{j=1}^n \frac{1}{2} \left[\frac{\partial \hat{w}_{kj}(\varphi_{kj})}{\partial \phi_{x_k}} + \frac{\partial \hat{w}_{jk}(\varphi_{jk})}{\partial \phi_{x_k}} \right] V_j - \frac{\partial}{\partial \phi_{x_k}} \left(\frac{\hat{b}_k w_k}{h} \right) \right\} = 0 \quad (\text{A.32}) \end{aligned}$$

Le derivate parziali dei micromoduli rispetto al grado di libertà ϕ_{x_k} possono essere riscritte differenziando rispetto alla curvatura e all'angolo di taglio lungo lo spessore. Si può scrivere, infatti:

$$\frac{\partial \tilde{w}_{kj}(\kappa_{kj})}{\partial \phi_{x_k}} = \frac{\partial \tilde{w}_{kj}(\kappa_{kj})}{\partial \kappa_{kj}} \frac{\partial \kappa_{kj}}{\partial \phi_{x_k}} \quad (\text{A.33})$$

$$\frac{\partial \hat{w}_{kj}(\varphi_{kj})}{\partial \phi_{x_k}} = \frac{\partial \hat{w}_{kj}(\varphi_{kj})}{\partial \varphi_{kj}} \frac{\partial \varphi_{kj}}{\partial \phi_{x_k}} \quad (\text{A.34})$$

Sostituendo quindi, con le dovute accortezze, le equazioni A.33 e A.34 all'interno dell'equazione A.32, si ottiene:

$$\begin{aligned}
\rho \frac{h^2}{12} \ddot{\phi}_{x_k} + \left\{ \frac{1}{2} \sum_{j=1}^n \frac{1}{2} \left[\frac{\partial \tilde{w}_{kj}(\kappa_{kj})}{\partial \kappa_{kj}} \frac{\partial \kappa_{kj}}{\partial \phi_{x_k}} + \frac{\partial \tilde{w}_{jk}(\kappa_{jk})}{\partial \kappa_{kj}} \frac{\partial \kappa_{kj}}{\partial \phi_{x_k}} \right. \right. \\
+ \frac{\partial \tilde{w}_{kj}(\kappa_{kj})}{\partial \kappa_{jk}} \frac{\partial \kappa_{jk}}{\partial \phi_{x_k}} + \left. \frac{\partial \tilde{w}_{jk}(\kappa_{jk})}{\partial \kappa_{jk}} \frac{\partial \kappa_{jk}}{\partial \phi_{x_k}} \right] V_j - \frac{\tilde{b}_{x_k}}{h} \\
+ \frac{1}{2} \sum_{j=1}^n \frac{1}{2} \left[\frac{\partial \hat{w}_{kj}(\varphi_{kj})}{\partial \varphi_{kj}} \frac{\partial \varphi_{kj}}{\partial \phi_{x_k}} + \frac{\partial \hat{w}_{jk}(\varphi_{jk})}{\partial \varphi_{kj}} \frac{\partial \varphi_{kj}}{\partial \phi_{x_k}} \right. \\
\left. \left. + \frac{\partial \hat{w}_{kj}(\varphi_{kj})}{\partial \varphi_{jk}} \frac{\partial \varphi_{jk}}{\partial \phi_{x_k}} + \frac{\partial \hat{w}_{jk}(\varphi_{jk})}{\partial \varphi_{jk}} \frac{\partial \varphi_{jk}}{\partial \phi_{x_k}} \right] V_j \right\} = 0 \quad (\text{A.35})
\end{aligned}$$

Le derivate dei micropotenziali dovuti agli effetti flessionali, equazione A.10, e dovuti alle deformazioni a taglio, equazione A.11, eseguite rispetto alla curvatura e all'angolo di taglio lungo lo spessore, sono state ricavate nelle equazioni A.20-A.23.

Per il calcolo delle derivate della curvatura e dell'angolo di taglio lungo lo spessore rispetto a ϕ_{x_k} , si ricordano le equazioni A.5 e A.6. Tenendo in considerazione le relazioni A.7, si possono scrivere:

$$\frac{\partial \kappa_{kj}}{\partial \phi_{x_k}} = -\frac{\sin \theta}{\xi_{kj}} \quad (\text{A.36})$$

$$\frac{\partial \kappa_{jk}}{\partial \phi_{x_k}} = \frac{\sin \theta}{\xi_{kj}} \quad (\text{A.37})$$

$$\frac{\partial \varphi_{kj}}{\partial \phi_{x_k}} = -\frac{\sin \theta}{2} \quad (\text{A.38})$$

$$\frac{\partial \varphi_{jk}}{\partial \phi_{x_k}} = \frac{\sin \theta}{2} \quad (\text{A.39})$$

Pertanto, sostituendo le equazioni A.20-A.23 e le equazioni A.36-A.39 all'interno dell'equazione A.35, si può scrivere:

$$\begin{aligned}
\rho \frac{h^2}{12} \ddot{\phi}_{x_k} + \left\{ \frac{1}{2} \sum_{j=1}^n \frac{1}{2} \left[c_b \frac{\xi_{kj}}{h} (-\kappa_{jk}) \left(-\frac{\sin \theta}{\xi_{kj}} \right) + c_b \frac{\xi_{kj}}{h} (-\kappa_{jk}) \left(-\frac{\sin \theta}{\xi_{kj}} \right) \right. \right. \\
+ c_b \frac{\xi_{kj}}{h} \kappa_{jk} \left(\frac{\sin \theta}{\xi_{kj}} \right) + c_b \frac{\xi_{kj}}{h} \kappa_{jk} \left(\frac{\sin \theta}{\xi_{kj}} \right) \left. \right] V_j - \frac{\tilde{b}_{x_k}}{h} \\
\frac{1}{2} \sum_{j=1}^n \frac{1}{2} \left[c_s \frac{\xi_{kj}}{h} (-\varphi_{jk}) \left(-\frac{\sin \theta}{2} \right) + c_s \frac{\xi_{kj}}{h} (-\varphi_{jk}) \left(-\frac{\sin \theta}{2} \right) \right. \\
\left. \left. + c_s \frac{\xi_{kj}}{h} \varphi_{jk} \left(\frac{\sin \theta}{2} \right) + c_s \frac{\xi_{kj}}{h} \varphi_{jk} \left(\frac{\sin \theta}{2} \right) \right] V_j \right\} = 0 \quad (\text{A.40})
\end{aligned}$$

Dopo alcuni semplici passaggi algebrici, si ottiene:

$$\rho \frac{h^2}{12} \ddot{\phi}_{x_k} + \sum_{j=1}^n \left(\frac{c_b}{h} \kappa_{jk} \sin \theta \right) V_j + \frac{1}{2} \sum_{j=1}^n \left(c_s \frac{\xi_{kj}}{h} \varphi_{jk} \sin \theta \right) V_j - \frac{\tilde{b}_{x_k}}{h} = 0 \quad (\text{A.41})$$

Infine, sostituendo κ_{jk} e φ_{jk} con i loro valori dati dalle equazioni A.5 e A.6, applicate le relazioni A.7, e portando fuori dalla sommatoria i termini costanti, si ricava l'equazione del moto per il grado di libertà ϕ_{x_k} :

$$\begin{aligned} \rho \frac{h^2}{12} \ddot{\phi}_{x_k} + \frac{c_b}{h} \sum_{j=1}^n \left[\left(\frac{\phi_{x_k} - \phi_{x_j}}{\xi_{kj}} \right) \sin \theta + \left(\frac{\phi_{y_j} - \phi_{y_k}}{\xi_{kj}} \right) \cos \theta \right] \sin \theta V_j \\ + \frac{1}{2} \frac{c_s}{h} \sum_{j=1}^n \xi_{kj} \left(\frac{w_k - w_j}{\xi_{kj}} + \frac{\phi_{x_k} + \phi_{x_j}}{2} \sin \theta \right. \\ \left. - \frac{\phi_{y_k} + \phi_{y_j}}{2} \cos \theta \right) \sin \theta V_j = \frac{\tilde{b}_{x_k}}{h} \quad (\text{A.42}) \end{aligned}$$

A.3 Equazione del moto per il grado di libertà ϕ_{y_k}

L'equazione A.4 può essere riscritta come:

$$\frac{d}{dt} \frac{\partial T}{\partial \dot{\phi}_{y_k}} + \frac{\partial U}{\partial \phi_{y_k}} = 0 \quad (\text{A.43})$$

Riprendendo le equazioni per l'energia cinetica e per l'energia potenziale, equazioni A.8 e A.9, ed eliminando la sommatoria su tutti i nodi k , si può scrivere:

$$\begin{aligned} \rho \frac{h^3}{12} \ddot{\phi}_{y_k} A_k + \frac{1}{2} \left\{ \sum_{j=1}^n \frac{1}{2} \left[\frac{\partial \tilde{w}_{kj}(\kappa_{kj})}{\partial \phi_{y_k}} + \frac{\partial \tilde{w}_{jk}(\kappa_{jk})}{\partial \phi_{y_k}} \right] V_j - \frac{\partial}{\partial \phi_{y_k}} \left(\frac{\tilde{b}_{\alpha_k} \phi_{\alpha_k}}{h} \right) \right\} V_k \\ + \frac{1}{2} \left\{ \sum_{j=1}^n \frac{1}{2} \left[\frac{\partial \hat{w}_{kj}(\varphi_{kj})}{\partial \phi_{y_k}} + \frac{\partial \hat{w}_{jk}(\varphi_{jk})}{\partial \phi_{y_k}} \right] V_j - \frac{\partial}{\partial \phi_{y_k}} \left(\frac{\hat{b}_k w_k}{h} \right) \right\} V_k = 0 \quad (\text{A.44}) \end{aligned}$$

L'equazione può essere semplificata dividendo per il volume V_k , ottenendo:

$$\begin{aligned} \rho \frac{h^2}{12} \ddot{\phi}_{y_k} + \left\{ \frac{1}{2} \sum_{j=1}^n \frac{1}{2} \left[\frac{\partial \tilde{w}_{kj}(\kappa_{kj})}{\partial \phi_{y_k}} + \frac{\partial \tilde{w}_{jk}(\kappa_{jk})}{\partial \phi_{y_k}} \right] V_j - \frac{\partial}{\partial \phi_{y_k}} \left(\frac{\tilde{b}_{\alpha_k} \phi_{\alpha_k}}{h} \right) \right. \\ \left. + \frac{1}{2} \sum_{j=1}^n \frac{1}{2} \left[\frac{\partial \hat{w}_{kj}(\varphi_{kj})}{\partial \phi_{y_k}} + \frac{\partial \hat{w}_{jk}(\varphi_{jk})}{\partial \phi_{y_k}} \right] V_j - \frac{\partial}{\partial \phi_{y_k}} \left(\frac{\hat{b}_k w_k}{h} \right) \right\} = 0 \quad (\text{A.45}) \end{aligned}$$

Le derivate parziali dei micromoduli rispetto al grado di libertà ϕ_{y_k} possono essere riscritte differenziando rispetto alla curvatura e all'angolo di taglio lungo lo spessore. Si può scrivere, infatti:

$$\frac{\partial \tilde{w}_{kj}(\kappa_{kj})}{\partial \phi_{y_k}} = \frac{\partial \tilde{w}_{kj}(\kappa_{kj})}{\partial \kappa_{kj}} \frac{\partial \kappa_{kj}}{\partial \phi_{y_k}} \quad (\text{A.46})$$

$$\frac{\partial \hat{w}_{kj}(\varphi_{kj})}{\partial \phi_{y_k}} = \frac{\partial \hat{w}_{kj}(\varphi_{kj})}{\partial \varphi_{kj}} \frac{\partial \varphi_{kj}}{\partial \phi_{y_k}} \quad (\text{A.47})$$

Sostituendo quindi, con le dovute accortezze, le equazioni A.46 e A.47 all'interno dell'equazione A.45, si ottiene:

$$\begin{aligned}
\rho \frac{h^2}{12} \ddot{\phi}_{y_k} + \left\{ \frac{1}{2} \sum_{j=1}^n \frac{1}{2} \left[\frac{\partial \tilde{w}_{kj}(\kappa_{kj})}{\partial \kappa_{kj}} \frac{\partial \kappa_{kj}}{\partial \phi_{y_k}} + \frac{\partial \tilde{w}_{jk}(\kappa_{jk})}{\partial \kappa_{jk}} \frac{\partial \kappa_{jk}}{\partial \phi_{y_k}} \right. \right. \\
+ \frac{\partial \tilde{w}_{kj}(\kappa_{kj})}{\partial \kappa_{jk}} \frac{\partial \kappa_{jk}}{\partial \phi_{y_k}} + \left. \frac{\partial \tilde{w}_{jk}(\kappa_{jk})}{\partial \kappa_{kj}} \frac{\partial \kappa_{kj}}{\partial \phi_{y_k}} \right] V_j - \frac{\tilde{b}_{y_k}}{h} \\
+ \frac{1}{2} \sum_{j=1}^n \frac{1}{2} \left[\frac{\partial \hat{w}_{kj}(\varphi_{kj})}{\partial \varphi_{kj}} \frac{\partial \varphi_{kj}}{\partial \phi_{y_k}} + \frac{\partial \hat{w}_{jk}(\varphi_{jk})}{\partial \varphi_{jk}} \frac{\partial \varphi_{jk}}{\partial \phi_{y_k}} \right. \\
\left. \left. + \frac{\partial \hat{w}_{kj}(\varphi_{kj})}{\partial \varphi_{jk}} \frac{\partial \varphi_{jk}}{\partial \phi_{y_k}} + \frac{\partial \hat{w}_{jk}(\varphi_{jk})}{\partial \varphi_{kj}} \frac{\partial \varphi_{kj}}{\partial \phi_{y_k}} \right] V_j \right\} = 0 \quad (\text{A.48})
\end{aligned}$$

Le derivate dei micropotenziali dovuti agli effetti flessionali, equazione A.10, e dovuti alle deformazioni a taglio, equazione A.11, eseguite rispetto alla curvatura e all'angolo di taglio lungo lo spessore, sono state ricavate nelle equazioni A.20-A.23.

Per il calcolo delle derivate della curvatura e dell'angolo di taglio lungo lo spessore rispetto a ϕ_{y_k} , si ricordano le equazioni A.5 e A.6. Tenendo in considerazione le relazioni A.7, si possono scrivere:

$$\frac{\partial \kappa_{kj}}{\partial \phi_{y_k}} = \frac{\cos \theta}{\xi_{kj}} \quad (\text{A.49})$$

$$\frac{\partial \kappa_{jk}}{\partial \phi_{y_k}} = -\frac{\cos \theta}{\xi_{kj}} \quad (\text{A.50})$$

$$\frac{\partial \varphi_{kj}}{\partial \phi_{y_k}} = \frac{\cos \theta}{2} \quad (\text{A.51})$$

$$\frac{\partial \varphi_{jk}}{\partial \phi_{y_k}} = -\frac{\cos \theta}{2} \quad (\text{A.52})$$

Pertanto, sostituendo le equazioni A.20-A.23 e le equazioni A.49-A.52 all'interno dell'equazione A.48, si può scrivere:

$$\begin{aligned}
\rho \frac{h^2}{12} \ddot{\phi}_{y_k} + \left\{ \frac{1}{2} \sum_{j=1}^n \frac{1}{2} \left[c_b \frac{\xi_{kj}}{h} (-\kappa_{jk}) \left(\frac{\cos \theta}{\xi_{kj}} \right) + c_b \frac{\xi_{kj}}{h} (-\kappa_{jk}) \left(\frac{\cos \theta}{\xi_{kj}} \right) \right. \right. \\
+ c_b \frac{\xi_{kj}}{h} \kappa_{jk} \left(-\frac{\cos \theta}{\xi_{kj}} \right) + \left. \left. c_b \frac{\xi_{kj}}{h} \kappa_{jk} \left(-\frac{\cos \theta}{\xi_{kj}} \right) \right] V_j - \frac{\tilde{b}_{y_k}}{h} \right. \\
\frac{1}{2} \sum_{j=1}^n \frac{1}{2} \left[c_s \frac{\xi_{kj}}{h} (-\varphi_{jk}) \left(\frac{\cos \theta}{2} \right) + c_s \frac{\xi_{kj}}{h} (-\varphi_{jk}) \left(\frac{\cos \theta}{2} \right) \right. \\
\left. \left. + c_s \frac{\xi_{kj}}{h} \varphi_{jk} \left(-\frac{\cos \theta}{2} \right) + c_s \frac{\xi_{kj}}{h} \varphi_{jk} \left(-\frac{\cos \theta}{2} \right) \right] V_j \right\} = 0 \quad (\text{A.53})
\end{aligned}$$

Dopo alcuni semplici passaggi algebrici, si ottiene:

$$\rho \frac{h^2}{12} \ddot{\phi}_{y_k} + \sum_{j=1}^n \left(\frac{c_b}{h} \kappa_{kj} \cos \theta \right) V_j + \frac{1}{2} \sum_{j=1}^n \left(c_s \frac{\xi_{kj}}{h} \varphi_{kj} \cos \theta \right) V_j - \frac{\tilde{\delta}_{y_k}}{h} = 0 \quad (\text{A.54})$$

Infine, sostituendo κ_{kj} e φ_{kj} con i loro valori dati dalle equazioni A.5 e A.6 e portando fuori dalla sommatoria i termini costanti, si ricava l'equazione del moto per il grado di libertà ϕ_{y_k} :

$$\begin{aligned} \rho \frac{h^2}{12} \ddot{\phi}_{y_k} + \frac{c_b}{h} \sum_{j=1}^n \left[\left(\frac{\phi_{x_j} - \phi_{x_k}}{\xi_{kj}} \right) \sin \theta + \left(\frac{\phi_{y_k} - \phi_{y_j}}{\xi_{kj}} \right) \cos \theta \right] \cos \theta V_j \\ + \frac{1}{2} \frac{c_s}{h} \sum_{j=1}^n \xi_{kj} \left(\frac{w_j - w_k}{\xi_{kj}} - \frac{\phi_{x_k} + \phi_{x_j}}{2} \sin \theta \right. \\ \left. + \frac{\phi_{y_k} + \phi_{y_j}}{2} \cos \theta \right) \cos \theta V_j = \frac{\tilde{\delta}_{y_k}}{h} \quad (\text{A.55}) \end{aligned}$$

Bibliogra a

- [1] Alfano G., Crisfield M. A., *Finite element interface models for the delamination analysis of laminated composites mechanical and computational issue* - International Journal of Numerical Methods in Engineering (2001) vol. 50 (7), pp. 1701-1736.
- [2] Zi C., Belytschko T., *New crack-tip elements for XFEM and applications to cohesive cracks* - International Journal of Numerical Methods in Engineering (2003) vol. 57 (15), pp. 2221-2240.
- [3] Pandolfi A., Ortiz M., *An eigenerosion approach to brittle fracture* - International Journal of Numerical Methods in Engineering (2012) vol. 92 (8), pp. 694-714.
- [4] Miehe C., Hofacker M., Welschinger F., *A phase field model for rate-independent crack propagation: Robust algorithmic implementation based on operator splits* - Computer Methods in Applied Mechanics and Engineering (2010) vol. 199, pp. 2765-2778.
- [5] Silling S. A., *Reformulation of elasticity theory for discontinuities and long-range forces* - Journal of Mechanics and Physics of Solids (2000) vol. 48, pp. 175-209.
- [6] Silling S. A., Epton M., Weckner O., Xu J., Askari E., *Peridynamic States and Constitutive Modeling* - Journal of Elasticity (2007) vol. 88, pp. 151-184.
- [7] Silling S. A., Bobaru F., *Peridynamic modeling of membranes and fibers* - International Journal of Non-Linear Mechanics (2005) vol. 40, pp. 395-409.
- [8] Mitchell J. A., *A Nonlocal, Ordinary, State-Based Plasticity Model for Peridynamics* - Sandia National Laboratories (2011) SAND2011-3166.
- [9] Madenci E., Oterkus S., *Ordinary state-based peridynamics for plastic deformation according to von Mises yield criteria with isotropic hardening* - Journal of the Mechanics and Physics of Solids (2016) vol. 86, pp. 192-219.
- [10] Ta tan A., Yolum U., G ler M. A., Zaccariotto M., Galvanetto U., *A 2D Peridynamic Model for Failure Analysis of Orthotropic Thin Plates Due to Bending* - 21st European Conference on Fracture, ECF21, (2016).
- [11] Hu Y. L., De Carvalho N. V., Madenci E., *Peridynamic modeling of delamination growth in composite laminates* - Composite Structures (2015) vol. 132, pp. 610-620.

- [12] Gerstle W., Silling S. A., Read D., Tewary V., Lehoucq R. B., *Peridynamic Simulation of Electromigration* - Tech Science Press, CMC, (2008) vol. 8 (2), pp. 75-92.
- [13] Bobaru F., Duangpanya M. A., *Peridynamic formulation for transient heat conduction in bodies with evolving discontinuities* - Journal of Computational Physics (2012) vol. 231, pp. 2764-2785.
- [14] Oterkus S., Madenci E., Agwai A., *Fully coupled peridynamic thermomechanics* - Journal of the Mechanics and Physics of Solids (2014) vol. 64, pp. 1-23.
- [15] Wildman R. A., Gazonas G. A., *A Dynamic Electro-Thermo-Mechanical Model of Dielectric Breakdown in Solid using Peridynamic* - Journal of Mechanics of Materials and Structures (2015) vol. 10, pp. 613-630.
- [16] Oterkus S., *Peridynamics for the solution of multiphysics problems* - Dissertation for PhD Degree, Department of Aerospace and Mechanical Engineering (2015) UA.
- [17] Oterkus S., Madenci E., *Crack Growth Prediction in Fully-Coupled Thermal and Deformation Fields Using Peridynamic Theory* - 54th AIAA/ASME/ASCE/AHS/ASC Structures (2013) Structural Dynamics and Materials Conference, Boston, Massachusetts, Paper No. AIAA 2013-1477.
- [18] Oterkus S., Madenci E., Oterkus E., Hwang Y., Bae J., Han S., *Hygro-Thermo-Mechanical Analysis and Failure Prediction in Electronic Packages by Using Peridynamics* - 64th Electronic Components & Technology Conference (2014) Lake Buena Vista, FL, USA.
- [19] Kilic B., Madenci E., *Coupling of peridynamic theory and the finite element method* - Journal of Mechanics of Materials and Structures (2010) vol. 5, pp. 707-735.
- [20] Galvanetto U., Mudric T., Shojaei A., Zaccariotto M., *An effective way to couple FEM meshes and Peridynamics grids for the solution of static equilibrium problems* - Mechanics Research Communications (2016) vol. 76, pp. 41-47.
- [21] Zaccariotto M., Tomasi D., Galvanetto U., *An enhanced coupling of PD grids to FE meshes* - Mechanics Research Communications (2017) vol. 84, pp. 125-135.
- [22] Zaccariotto M., Mudric T., Tomasi D., Shojaei A., Galvanetto U., *Coupling of FEM meshes with Peridynamics grids* - Computer Methods in Applied Mechanics and Engineering (2018) vol. 330, pp. 471-497.
- [23] Taylor M., Steigmann D. J., *A two-dimensional peridynamic model for thin plates* - Mathematics and Mechanics of Solids (2013) vol. 20, pp. 1-13.
- [24] Diyaroglu C., Oterkus E., Oterkus S., Madenci E., *Peridynamics for bending of beams and plates with transverse shear deformation* - International Journal of Solids and Structures (2015) vol. 69-70, pp. 152-168.

- [25] Oterkus E., Madenci E., *Peridynamic Theory and Its Applications* - Springer (2014) ISBN 978-1-4614-8464-6.
- [26] Bobaru F., Foster J. T., Geubelle P. H., Silling S. A., *Handbook of Peridynamic Modelling* - CRC Press (2016).
- [27] Silling S. A., Lehoucq R. B., *Convergence of Peridynamics to Classical Elasticity Theory* - Journal of Elasticity (2008) vol. 93, pp. 13-37.
- [28] Macek R. W., Silling S. A., *Peridynamics via finite element analysis* - Finite Elements in Analysis and Design (2007) vol. 43, pp. 1169 1178.
- [29] Silling S. A., Askari E., *A meshfree method based on the peridynamic model of solid mechanics* - Computers and Structures (2005) vol. 83, pp. 1526 1535.
- [30] Kebing Y., *Enhanced Integration Methods for the Peridynamic Theory* - Dissertation for PhD Degree, Department of Mechanical and Nuclear Engineering, College of Engineering (2011) KSU.
- [31] Blaauwendraad J., *Plates and FEM* - Springer (2010) ISBN 978-90-481-3595-0.
- [32] Timoshenko S., Woinowsky-Krieger S., *Theory of plates and shells* - McGraw-Hill (1989) ISBN 0-07-064779-8.
- [33] Przemieniecki J. S., *Theory of Matrix Structural Analysis* - Dover Publications, Inc. (2017) ISBN 978-0486649481.
- [34] O'Grady J., Foster J., *Peridynamic plates and flat shells: A non-ordinary, state-based model* - International Journal of Solids and Structures (2014) vol. 51, pp. 4572-4579.
- [35] Yang Z., Oterkus E., Nguyen C. T., Oterkus S., *Implementation of peridynamic beam and plate formulations in finite element framework* - Continuum Mechanics and Thermodynamics (2018) pp. 1-15.
- [36] Wildman R. A., Gazonas G. A., *A finite difference-augmented peridynamics method for reducing wave dispersion* - Journal of Fractures (2014) vol. 190, pp. 39-52.
- [37] Lubineau G., Azdoud Y., Han F., Rey C., Askari A., *A morphing strategy to couple non-local to local continuum mechanics* - Journal of the Mechanics and Physics of Solids (2012) vol. 60, pp. 1088-1102.
- [38] Han F., Lubineau G., *Coupling of nonlocal and local continuum models by the Arlequin approach* - International Journal of Numerical Methods in Engineering (2016) vol. 89, pp. 671-685.
- [39] Seleson P., Beneddine S., Prudhomme S., *A force-based coupling scheme for peridynamics and classical elasticity* - Computational Materials Science (2013) vol. 66, pp. 34 49.

- [40] Seleson P., Ha Y. D., Beneddine S., *Concurrent Coupling of bond-based Peridynamics and the Navier equations of classical elasticity by blending* - International Journal for Multiscale Computational Engineering (2015) vol. 13, pp. 91-113.
- [41] Littlewood D. J., Silling S. A., Mitchell J. A., Seleson P., Bond S. D., Parks M. L., Turner D. Z., Burnett D. J., Ostien J., Gunzburger M., *Strong Local-Nonlocal Coupling for Integrated Fracture Modeling* - SANDIA Report (2015).
- [42] Bobaru F., Ha Y. D., *Adaptive refinement and multiscale modeling in 2d peridynamics* - International Journal for Multiscale Computational Engineering (2011) vol. 9 (6), pp. 635-660.
- [43] Chen Z., Bakenhus D., Bobaru F., *A constructive peridynamic kernel for elasticity* - Computer Methods in Applied Mechanics and Engineering (2016) vol. 311, pp. 356-373.
- [44] Cook R. D., Malkus D. S., Plesha M. E., Witt R. J., *Concepts and Applications of Finite Element Analysis* - John Wiley and Sons, Inc. (2001) ISBN 978-0471356059.
- [45] Courant R., Friedrichs K. O., Lewy H., *On the partial differential equations of mathematical physics* - Courant Institute of Mathematical Sciences, Report NYO-7689 (1956) NYU.
- [46] Seleson P., Parks M. L., Gunzburger M., Lehoucq R. B., *Peridynamics as an Upscaling of Molecular Dynamics* - Journal on Multiscale Modeling and Simulation (2009) vol. 8, pp. 204-227.

