

UNIVERSITÀ DEGLI STUDI DI PADOVA

Dipartimento di Fisica e Astronomia “Galileo Galilei”

Corso di Laurea Triennale in Fisica

Teoria di Ginzburg-Landau per i superconduttori di tipo I e II

RELATORE:
Prof. Luca Salasnich

LAUREANDO:
Irene Greggi

Anno Accademico 2016/2017

Indice

Introduzione	3
1 Superconduttività nei metalli	5
1.1 Fenomenologia dei superconduttori	5
1.2 Superconduttori di tipo I e II	8
1.3 L'equazione di London	10
2 Il funzionale di Ginzburg-Landau	13
2.1 Parametro d'ordine	13
2.2 Energia libera	14
2.3 Teoria di Ginzburg-Landau per sistemi non omogenei	17
2.4 Superfici di superconduttori	19
3 Teoria di Ginzburg-Landau in campo magnetico	23
3.1 Energia di condensazione	25
3.2 Energia superficiale	26
3.3 Quantizzazione del flusso	29
Conclusioni	35

Introduzione

La prima volta che venne osservato il fenomeno della superconduttività fu nel 1911 da parte del fisico olandese Heike Kamerlingh Onnes, pochi anni prima lo stesso Onnes era stato in grado di produrre per la prima volta elio liquefatto [1], caratterizzato dall'aver punto di ebollizione a $4.24K$ a pressione atmosferica. Questo risultato gli permise di studiare il mercurio a temperature criogeniche. Fu durante queste ricerche che egli osservò che alla temperatura di $4.19K$ la resistività del mercurio si annullava improvvisamente [2]. Dopo la sua scoperta, il fenomeno della superconduttività venne largamente indagato. Tale studio è continuato fino ai giorni nostri e ci ha permesso di mostrare come la maggior parte degli elementi metallici presentano superconduzione a basse temperature. Oggi giorno sono 30 gli elementi che diventano superconduttori a pressione atmosferica (gallio, alluminio, indio, ...) e altri 24 lo diventano se sottoposti ad una pressione superiore a quella atmosferica (litio, silicio, zolfo, ...). Un'altra pietra miliare nello studio della superconduttività avvenne nel 1933 quando Walther Meissner e Robert Ochsenfeld scoprirono [3] che un superconduttore espelle un campo magnetico ad esso applicato; questo fenomeno divenne poi noto come effetto Meissner. Lo studio della superconduttività si rivelò essere particolarmente prospero, e due anni dopo, nel 1935, i fratelli Fritz e Heinz London svilupparono un'equazione che mette in relazione la densità di corrente elettrica all'interno di un superconduttore con il campo magnetico cui questo era sottoposto [4]. Un'importante successo di questa teoria era la capacità di descrivere l'effetto Meissner. Nel 1950 venne ideata da Lev Landau e Vitaly Ginzburg una teoria fenomenologica della superconduttività che prese il nome di *teoria di Ginzburg-Landau* [5]. Questa teoria si basa sulla teoria delle transizioni di fase del secondo ordine sviluppata dallo stesso Landau nel 1937 [6]. La teoria di Ginzburg-Landau esamina il problema della superconduttività studiando le transizioni di fase termodinamiche ed è in grado di descrivere i superconduttori senza esaminare le loro proprietà microscopiche. Nel fare ciò ricorre ad una grandezza, che prende il nome parametro d'ordine ψ , in grado di caratterizzare lo stato del sistema. Successivamente, nel 1957, John Bardeen, Leon Cooper e John Schriffer formulano la teoria completa microscopica della superconduttività. Questa teoria, detta *teoria BCS* [7], descrive la superconduttività come un effetto causato dalla condensazione delle coppie di Cooper [8] in stati simil-bosonici. Una pesante mancanza nella descrizione della superconduttività della teoria BCS venne portata alla luce negli anni '80 quando venne scoperta la superconduttività nei cuprati [9], ossia materiali caratterizzati dall'aver una temperatura critica T_c elevata, per alcuni di questi elementi la temperatura critica arriva fino a circa 130K. La teoria BCS prevede infatti un limite superiore per la temperatura critica a $T_c \sim 30K$, previsione che venne falsificata dai risultati sperimentali. Questo fenomeno poteva essere invece spiegato dalla teoria di Ginzburg-Landau,

caratteristica che mette in evidenza la versatilità di questa teoria, che non è tuttavia in grado di dare una descrizione microscopica. In questo lavoro il primo capitolo verterà su una caratterizzazione fenomenologica della superconduttività nei metalli. Si andranno pertanto ad indagare le proprietà di tali materiali attraverso l'esposizione di alcune evidenze sperimentali che verranno poi descritte attraverso un semplice modello teorico: l'equazione di London. Nel secondo capitolo verrà introdotto il funzionale di Ginzburg-Landau mediante il quale saremo in grado di ricavare un'equazione per il parametro d'ordine ψ . Inizialmente verrà considerato un sistema omogeneo, successivamente verrà analizzato il caso di un sistema non omogeneo con particolare attenzione all'interfaccia tra materiale normale e superconduttore, verrà calcolato esplicitamente il parametro d'ordine in una tale configurazione. Nel terzo capitolo si affronterà il problema della superconduttività in un campo magnetico, pertanto verranno visti quali sono i cambiamenti che il campo magnetico porta al funzionale di Ginzburg-Landau. Successivamente verrà studiata l'energia superficiale della regione di transizione tra materiale normale e superconduttore per vedere come il valore di questa porti alla classificazione dei superconduttori di tipo I e II. Nella parte finale verrà poi brevemente analizzata la quantizzazione del flusso del campo magnetico che penetra i materiali superconduttori di tipo II e verrà poi derivata la relazione che lega i campi critici dei materiali superconduttori di tipo I e II.

1 Superconduttività nei metalli

1.1 Fenomenologia dei superconduttori

Alcuni elementi della tavola periodica diventano superconduttori a basse temperature. Per tali materiali si verifica che l'andamento della resistività ρ in funzione della temperatura T è del tipo mostrato in figura.

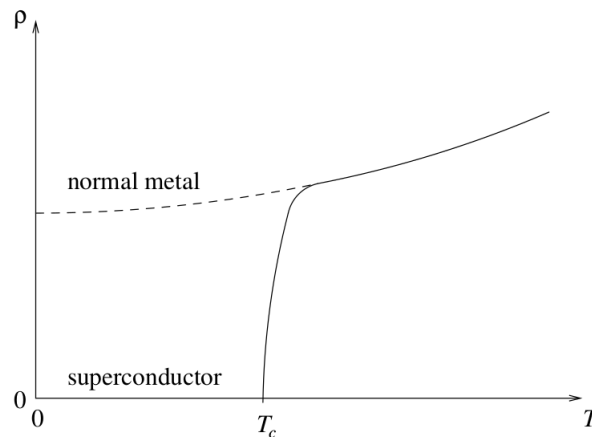


Figura 1: Andamento della resistività ρ in funzione della temperatura T

MATERIAL	T- CRITICAL
Gallium	1.1K
Aluminium	1.2K
Indium	3.4K
Tin	3.7K
Mercury	4.2K
Lead	7.2K

Figura 2: Esempi di temperature critiche T_c per alcuni materiali a pressione atmosferica.

Il passaggio da un valore finito al valore nullo della resistività avviene in corrispondenza di una temperatura T_c detta critica. Tale cambiamento avviene in modo rapido e brusco e segna la separazione tra due diversi stati della materia caratterizzati da diverse proprietà e un diverso comportamento. Questi due stati sono lo stato normale e quello superconduttore, quest'ultimo è caratterizzato dall'aver una resistività esattamente nulla $\rho = 0$. Vediamo ora

una conseguenza immediata della suddetta proprietà: ricordando la relazione $\vec{E} = \rho \cdot \vec{J}$ si vede che, per consistenza, si deve avere un campo elettrico \vec{E} nullo in tutti i punti del superconduttore. In questo modo la densità di corrente elettrica superficiale \vec{J} può essere finita e si ha flusso di corrente anche con campo nullo. Una prova convincente del fatto che i superconduttori abbiano una resistività nulla si trova nell'osservazione di correnti persistenti. Immaginiamo di avere un anello di materiale superconduttore nel quale è possibile far circolare una certa corrente elettrica I .

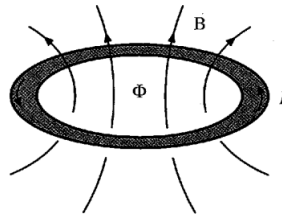


Figura 3: Corrente persistente attorno ad un anello superconduttore

Dal momento che non si ha dissipazione di energia dovuta ad una resistività finita, l'energia immagazzinata nel campo magnetico resta costante e la corrente che circola non decade. Cerchiamo ora di capire come impostare una tale corrente: consideriamo il flusso Φ del campo magnetico \vec{B} attraverso il centro dell'anello superconduttore, questo è definito dall'integrale di superficie :

$$\Phi = \int \vec{B} \cdot d\vec{S} \quad (1.1.1)$$

Usando l'equazione di Maxwell

$$\vec{\nabla} \times \vec{E} = -\frac{\partial \vec{B}}{\partial t} \quad (1.1.2)$$

e il teorema di Stokes

$$\int (\vec{\nabla} \times \vec{E}) \cdot d\vec{S} = \oint \vec{E} \cdot d\vec{r} \quad (1.1.3)$$

possiamo immediatamente vedere che

$$-\frac{d\Phi}{dt} = \oint \vec{E} \cdot d\vec{r} \quad (1.1.4)$$

ove l'integrale lineare viene calcolato lungo un cammino chiuso all'interno dell'anello.

Ricordando quanto detto per il campo elettrico \vec{E} all'interno del superconduttore possiamo concludere immediatamente che

$$\frac{d\Phi}{dt} = 0 \quad (1.1.5)$$

ossia, il flusso magnetico attraverso l'anello resta costante.

Prendiamo ora il superconduttore ad una temperatura maggiore di quella critica, si avrà pertanto che il materiale si trova nel suo stato normale. Di conseguenza se applichiamo un campo magnetico \vec{B}_{ext} quest'ultimo attraverserà facilmente il materiale. Una volta fatto ciò raffreddiamo l'anello ad una temperatura inferiore a quella critica T_c . Abbiamo visto che il flusso del campo magnetico dev'essere costante a prescindere da quanto accade, sarà pertanto tale anche se andiamo a spegnere la sorgente del campo magnetico. Al fine di mantenere il flusso Φ costante il superconduttore genera un proprio campo magnetico \vec{B} attraverso l'anello mediante la formazione di un corrente elettrica I che circola in esso. La corrente avrà il valore necessario per mantenere costante il flusso e per consistenza sarà anch'essa costante. Possiamo concludere notando che un'eventuale presenza di resistenza elettrica porterebbe ad una dissipazione di energia e ad una conseguente caduta della corrente elettrica I , cosa che sperimentalmente non si verifica. La resistività deve pertanto essere esattamente nulla.

Un'altra prova molto importante a supporto del fatto che la superconduttività avvenga in un materiale è l'osservazione dell'*effetto Meissner-Ochsenfeld* [3]. Questo consiste nell'espulsione da parte del superconduttore di un campo magnetico esterno \vec{B}_{apl} debole.

Consideriamo una piccola sfera di un campione del materiale, supponiamo che inizialmente questa sia mantenuta ad una temperatura $T < T_c$ e che non sia sottoposta ad alcun campo magnetico \vec{B}_{apl} . In tale configurazione applichiamo un debole campo esterno aumentandone in modo graduale l'intensità. Ricordando l'equazione di Maxwell (1.1.3) e che il campo elettrico all'interno di un superconduttore dev'essere nullo, si vede immediatamente che il campo magnetico è costante nel tempo in tutti i punti del superconduttore. Di conseguenza, in questa situazione, si ha che il campo magnetico all'interno del campione deve restare nullo, ossia si ha l'espulsione del campo magnetico esterno applicato .

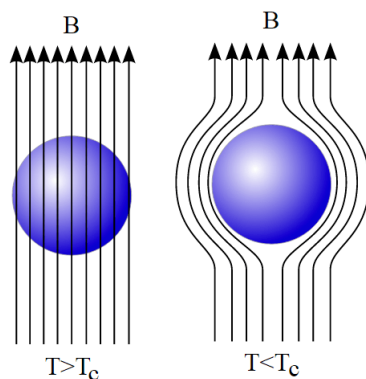


Figura 4: Effetto Meissner-Ochsenfeld

L'effetto Meissner-Ochsenfeld viene preso come prova fondamentale dell'esistenza della superconduttività, questo poiché tale effetto è una proprietà dell'equilibrio termico, a differenza della resistività nulla che è una proprietà di trasporto.

Abbiamo visto che un superconduttore sottoposto ad un campo magnetico debole, \vec{B}_{apl} , genera delle correnti di schermaggio che danno origine ad un campo magnetico \vec{B}_{int} tale da neutralizzare quello esterno. Ossia tali da mantenere il campo magnetico totale all'interno del campione superconduttore nullo, $\vec{B}_{tot} = \vec{B}_{apl} + \vec{B}_{int} = 0$. Per descrivere tali correnti usiamo le equazioni di Maxwell in un mezzo magnetico, si ha che la densità di corrente elettrica totale consta di due contributi, $\vec{J} = \vec{J}_{apl} + \vec{J}_{int}$, con \vec{J}_{int} densità di corrente di schermaggio, tale da produrre una magnetizzazione nel campione \vec{M} per unità di volume, definita da

$$\vec{\nabla} \times \vec{M} = \vec{J}_{int}. \quad (1.1.6)$$

\vec{J}_{app} rappresenta invece la densità delle correnti esterne applicate (ad esempio nelle spire che producono il campo esterno). In accordo con le equazioni di Maxwell in un mezzo magnetico definiamo, in termini di \vec{J}_{apl} , un campo magnetico nella materia \vec{H} , questo terrà conto anche delle correnti microscopiche amperiane, si ha:

$$\vec{\nabla} \times \vec{H} = \vec{J}_{apl} \quad (1.1.7)$$

Da questa condizione si può provare che la componente del campo magnetico \vec{H} parallela alla superficie di separazione del campione deve restare invariata, ossia $\Delta \vec{H}_{||} = 0$, mentre per il campo magnetico \vec{B} si ha che deve restare invariata la componente perpendicolare, ossia $\Delta \vec{B}_{\perp} = 0$.

I tre vettori \vec{B}_{tot} , \vec{M} , \vec{H} sono legati da $\vec{B}_{tot} = \mu_0(\vec{H} + \vec{M})$.

Se andiamo ora ad imporre la condizione di Meissner $\vec{B}_{tot} = 0$, si trova immediatamente per la magnetizzazione $\vec{M} = -\vec{H}$. Ricordando la definizione della suscettività magnetica

$$\chi = \left. \frac{dM}{dH} \right|_{H=0} \quad (1.1.8)$$

si trova che per un superconduttore $\chi = -1$, valore che lo rende un diamagnete perfetto.

1.2 Superconduttori di tipo I e II

A seconda del comportamento che un materiale superconduttore presenta quando sottoposto a campi magnetici via via più intensi possiamo distinguere due tipologie. Abbiamo infatti visto che i superconduttori sono dei diamagneti perfetti, ma questo è vero solamente per piccoli valori del campo

\vec{H} . Vogliamo pertanto capire cosa accade per valori più grandi del campo. Nel primo caso si ha che il campo magnetico \vec{B} all'interno del superconduttore resta nullo in accordo con l'effetto Meissner, ossia $\vec{M} = -\vec{H}$. All'aumentare del campo \vec{H} accade poi che \vec{M} assume improvvisamente valore nullo, con conseguente rottura dello stato superconduttivo in corrispondenza di un campo \vec{H}_c detto campo critico. Tali materiali formano i cosiddetti superconduttori di tipo I.

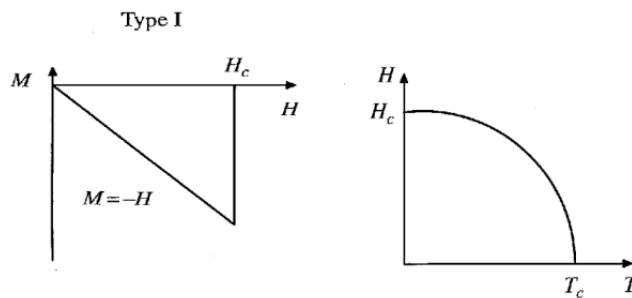


Figura 5: Magnetizzazione M in funzione di H per superconduttori di tipo I e digramma di fase H-T

Nel secondo caso si hanno invece due campi critici, denominati con H_{c1} e H_{c2} . Accade che, per piccoli valori del campo, in particolare per valori minori di H_{c1} , la magnetizzazione segue $\vec{M} = -\vec{H}$, ossia è nullo il campo \vec{B} all'interno del materiale. Si ha poi che \vec{M} inizia a diminuire fino ad assumere valore nullo in corrispondenza di H_{c2} . I materiali che presentano un comportamento di questo tipo sono detti superconduttori di tipo II.

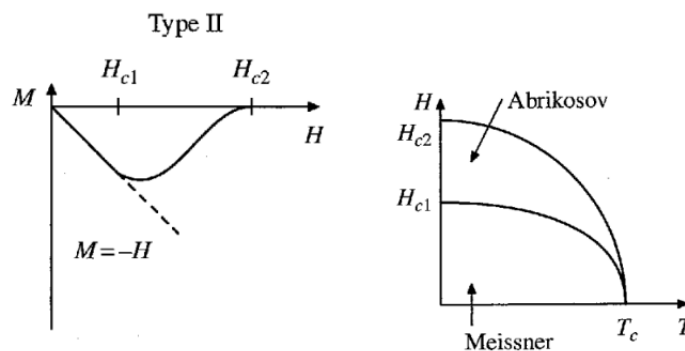


Figura 6: Magnetizzazione M in funzione di H per superconduttori di tipo II e digramma di fase H-T.

La spiegazione fisica della fase termodinamica tra i due valori critici del campo \vec{H} , H_{c1} e H_{c2} , nei superconduttori di tipo II viene data da Abrikosov,

che suggerisce la presenza di vortici, ossia entità costituite da un core di metallo e pertanto tali da permettere la penetrazione del campo, circondati da correnti che schermano quest'ultimo.

1.3 L'equazione di London

La prima teoria sviluppata al fine di descrivere lo stato superconduttore di un materiale fu quella dei fratelli London [4]. Questa teoria si basa sull'assunzione che, in analogia con quanto fatto per i superfluidi, la densità numerica n degli elettroni del materiale possa essere pensata come costituita da due contributi, ossia in formule $N/V = n = n_s + n_n$, ove n_s rappresenta la densità elettronica 'super', ossia degli elettroni in grado di muoversi all'interno del materiale senza dissipazione di energia; mentre n_n rappresenta la densità degli usuali elettroni che trasportano una corrente ohmica.

Partendo da quanto detto e usando la relazione di Drude per la conducibilità elettrica, i fratelli London arrivano ad un'espressione che lega la densità di corrente elettrica \vec{J} all'interno del superconduttore al potenziale vettore del campo magnetico, \vec{A} . Un'altra importante assunzione che viene fatta in questo modello è quella di considerare n_s e n_n come uniformi, ossia vengono analizzati solamente gli stati stazionari. Questa restrizione è ciò che principalmente contraddistingue la teoria di London da quella di Ginzburg Landau. Vediamo ora come arrivare alla suddetta espressione con questo semplice modello che è tuttavia in grado di fare alcune predizioni corrette. Gli elettroni normali trasportano una corrente ohmica, si ha

$$\vec{J}_n = \sigma_n \vec{E} \quad (1.3.1)$$

con σ_n conducibilità elettrica, data dalla legge di Drude [10]:

$$\sigma_n = \frac{e^2 n_n \tau}{m_e} \quad (1.3.2)$$

ove τ è il tempo che intercorre tra una collisione e l'altra dell'elettrone. Ricordiamo che la conducibilità σ è l'inverso della resistività ρ , ossia $\sigma = 1/\rho$. Per il superfluido invece si ha

$$\vec{J}_s = -e^* n_s \vec{v}_s \quad (1.3.3)$$

con e^* carica delle particelle costituenti il superfluido che stiamo considerando. Ricordando ora la legge di Newton $\frac{d}{dt} \vec{v}_s = \frac{\vec{F}}{m} = -\frac{e\vec{E}}{m}$ otteniamo la *prima equazione di London*

$$\frac{\partial \vec{J}_s}{\partial t} = \frac{(e^*)^2 n_s}{m^*} \vec{E} \quad (1.3.4)$$

ove si è indicata con m^* la massa delle particelle costituenti il superfluido. Se ora andiamo a prendere il rotore di quanto trovato,

$$\frac{\partial}{\partial t} \vec{\nabla} \times \vec{J}_s = \frac{(e^*)^2 n_s}{m^*} \vec{\nabla} \times \vec{E} = -\frac{(e^*)^2 n_s}{m^*} \frac{\partial \vec{B}}{\partial t} \quad (1.3.5)$$

ed integriamo poi nel tempo otteniamo

$$\vec{\nabla} \times \vec{J}_s = -\frac{(e^*)^2 n_s}{m^*} \vec{B} + \vec{C}(\vec{r}) \quad (1.3.6)$$

con $\vec{C}(\vec{r})$ costante di integrazione da determinare dalle condizioni iniziali. Per farlo iniziamo avendo un corpo superconduttore sottoposto ad un campo magnetico nullo, si avrà $\vec{J}_s = 0$ e $\vec{B} = 0$ ossia si ha inizialmente $\vec{C}(\vec{r})=0$.

Ricordiamo che per descrivere l'effetto Meissner si deve considerare un corpo che diventa superconduttore, raffreddandosi, in un campo magnetico non nullo. Si ha che tale l'effetto non può essere descritto mediante la teoria di London dal momento che questa assume che n_s resti costante nel tempo.

Per spiegare l'espulsione del flusso, venne postulato $\vec{C} = 0$ a prescindere dalla storia del sistema. Si giunge dunque alla *seconda equazione di London*

$$\vec{\nabla} \times \vec{J}_s = -\frac{(e^*)^2 n_s}{m^*} \vec{B} \quad (1.3.7)$$

se consideriamo ora la legge di Ampère $\vec{\nabla} \times \vec{B} = \mu_0 \vec{J}_s + \mu_0 \vec{J}_n$, dopo alcune manipolazioni matematiche e semplificazioni dovute alla stazionarietà degli stati si ottiene

$$\vec{\nabla}^2 \vec{B} = \mu_0 \frac{(e^*)^2 n_s}{m^*} \vec{B} = \frac{1}{\lambda_L^2} \vec{B} \quad (1.3.8)$$

ove abbiamo definito la *lunghezza di penetrazione di London* come

$$\lambda_L := \sqrt{\frac{m^*}{(e^*)^2 \mu_0 n_s}} \quad (1.3.9)$$

Risolviamo ora quest'espressione in una configurazione unidimensionale in cui il superconduttore riempie lo spazio $x > 0$ in presenza di un campo magnetico parallelo alla superficie di separazione, ossia $\vec{B}_{apl} = B_{apl} \hat{y}$.

Questa ha soluzione,

$$\vec{B}(x) = B_{apl} \hat{y} e^{-x/\lambda_L} \quad \text{per } x > 0 \quad (1.3.10)$$

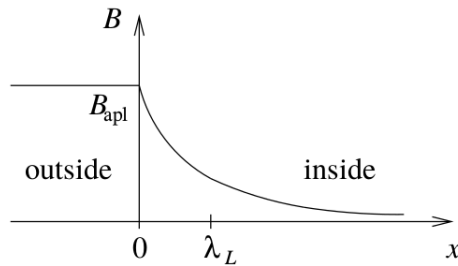


Figura 7: Andamento del campo \vec{B} in un superconduttore.

Si vede che il campo magnetico all'interno del superconduttore non diventa immediatamente nullo, ma decresce in modo esponenziale.

Si può trovare un'espressione analoga per la densità di corrente \vec{J}_s usando la seconda equazione di London (1.3.7) e l'equazione di continuità $\vec{\nabla} \cdot \vec{J}_s = 0$. Si vede che anche la supercorrente scorre in direzione parallela alla superficie e perpendicolare al campo \vec{B} , inoltre decresce all'interno del campione con la stessa scala λ_L .

Può essere utile riscrivere la seconda equazione di London in funzione del potenziale vettore \vec{A} :

$$\vec{J}_s = -\frac{(e^*)^2 n_s}{m^*} \vec{A} \quad (1.3.11)$$

L'espressione che determina \vec{A} a partire dal campo \vec{B} , ossia $\vec{\nabla} \times \vec{A} = \vec{B}$, non definisce in modo univoco un potenziale vettore, ma una classe di potenziali del tipo $\vec{A}' = \vec{A} + \vec{\nabla}\chi$ con χ campo scalare, legati da una trasformazioni di gauge e pertanto tali da produrre lo stesso campo magnetico \vec{B} . Per definire in modo univoco il potenziale vettore \vec{A} dobbiamo fissare la gauge, questa è determinata osservando che la conservazione della carica impone $\vec{\nabla} \cdot \vec{J}_s = 0$ e pertanto $\vec{\nabla} \cdot \vec{A} = 0$, detta gauge di London, ovvero la gauge di Coulomb.

2 Il funzionale di Ginzburg-Landau

La teoria di London appena esaminata assume che la densità di elettroni superconduttori n_s sia costante nel tempo e uniforme nello spazio, ipotesi non ragionevole in prossimità della superficie del superconduttore.

Come abbiamo detto, lo stato normale e quello superconduttore sono fasi termodinamiche separate della materia. E' possibile caratterizzare le transizioni di fase andando a studiare la natura delle singolarità delle variabili termodinamiche, come ad esempio il calore specifico, alla temperatura critica T_c . La teoria di Ginzburg-Landau che ora illustreremo esamina il problema dei superconduttori studiando le transizioni di fase termodinamiche.

2.1 Parametro d'ordine

La teoria di Ginzburg-Landau è costruita a partire dalla teoria delle transizioni termodinamiche di Landau. Quest'ultima introduce una variabile termodinamica, detta *parametro d'ordine* ψ , che risulta essere nulla in una fase della transizione e diventa invece diversa da zero nell'altra fase. Tale approccio all'analisi della superconduttività è analogo al caso della magnetizzazione di un magnete per temperature inferiori a quella di Curie. Per tali temperature si ha che il materiale sviluppa un momento magnetico \vec{M} avente un particolare verso e direzione, dovuto sostanzialmente all'orientamento dei momenti magnetici propri degli atomi o delle molecole del materiale. Al di sopra della temperatura di Curie invece la magnetizzazione risulta essere nulla. In questo contesto la magnetizzazione \vec{M} viene presa come parametro d'ordine. I due fenomeni sono legati dal fatto che entrambi sono transizioni di fase del secondo ordine.

Le transizioni di fase avvengono quando l'energia libera del sistema è non analitica in corrispondenza di alcuni valori delle variabili termodinamiche. Ehrenfest classificò le transizioni di fase basandosi sul comportamento dell'energia libera come funzione di variabili termodinamiche, in particolare le transizioni furono etichettate dalla più bassa derivata dell'energia libera che presenta una discontinuità nella transizione. Pertanto le transizioni di fase del secondo ordine hanno le derivate prime dell'energia libera continue e presentano una discontinuità in una derivata del secondo ordine dell'energia libera.

Per descrivere i superconduttori, Ginzburg e Landau postularono l'esistenza di un parametro d'ordine, ψ , avente un'interpretazione fisica non ben definita, che caratterizza lo stato del sistema al pari del vettore di magnetizzazione. Si ha che ψ risulta essere nulla per $T > T_c$ nello stato normale, mentre si ha $\psi(T) \neq 0$ per $T < T_c$ nello stato superconduttore. Viene inoltre assunto che ψ sia complessa, vedremo nel seguito cosa discende da questa assunzione.

2.2 Energia libera

Ginzburg e Landau ipotizzarono che l'energia libera dovesse dipendere in modo regolare del parametro ψ . Poiché abbiamo assunto ψ complessa e poiché sappiamo che l'energia libera dev'essere reale, si ha che quest'ultima può dipendere da ψ solo attraverso il suo modulo $|\psi|$. Inoltre, dal momento che ψ va a zero alla temperatura critica T_c , possiamo espandere, per temperature vicine a quella critica, l'energia libera in potenze di $|\psi|$. Poiché in un tale intorno $|\psi|$ è piccola, sono necessari solamente i primi due termini dell'espansione, allora la densità di energia libera ($f = F/V$) avrà la forma:

$$f_s(T) = f_n(T) + a(T)|\psi|^2 + \frac{1}{2}b(T)|\psi|^4 + \dots \quad (2.2.1)$$

con $f_s(T)$ e $f_n(T)$ densità di energia libera dello stato superconduttore e normale rispettivamente. Mettiamo in evidenza il fatto che, dal momento che il modello di Ginzburg-Landau si basa sull'espansione di $f_s(T)$ intorno alla transizione di fase, esso sarà valido per temperature $T \simeq T_c$.

La forma in (2.2.1) è l'unica possibile affinché si abbia densità di energia libera f_s reale, per ogni ψ complessa vicino a $\psi = 0$ e affinché f_s sia una funzione differenziabile di ψ e ψ^* in questo intorno, richiesta che impone la presenza delle sole potenze pari di ψ . I parametri fenomenologici della teoria, $a(T)$ e $b(T)$, dipendono in modo regolare dalla temperatura; assumiamo inoltre che $b(T)$ sia positivo, altrimenti la densità di energia libera f non avrebbe minimo, situazione che non è fisica. Ora, a seconda del segno di $a(T)$ si hanno due diverse curve per $f_s - f_n$, come è possibile vedere andando a plottare questa quantità come funzione di ψ per diversi valori del parametro $a(T)$ e quindi, come vedremo nel seguito, della temperatura:

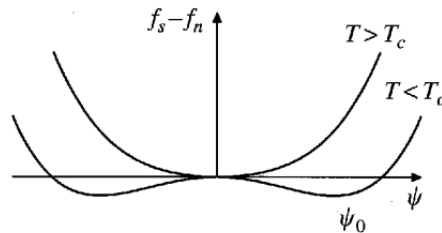


Figura 8: Differenze di energia libera (per unità di volume) tra lo stato normale e quello superconduttore come funzione del parametro d'ordine, ψ .

Notiamo che per $a(T) > 0$ la curva presenta un minimo per $\psi = 0$, mentre per $a(T) < 0$ si ha un minimo per $|\psi|^2 = -a(T)/b(T)$. Possiamo verificare quanto detto considerando un caso semplice quale quello di un campione omogeneo andando ad analizzare solamente la parte interna del campione.

Per tale configurazione si avrà che ψ non dipende dalla posizione, allora i punti di minimo dell'energia libera (che sappiamo esistere dal momento che $b(T) > 0$) sono determinati dalla condizione: $\frac{\partial f_s[\psi, T]}{\partial \psi} = 0$.

Ginzburg e Landau assunsero che per alte temperature, sopra T_c , si abbia $a(T) > 0$, con conseguente minimo per $\psi = 0$ che rappresenta lo stato normale. Si ha poi che $a(T)$ decresce gradualmente al diminuire della temperatura fino a che il parametro non assume valore nullo $a(T) = 0$. In corrispondenza di tale valore lo stato del sistema cambia improvvisamente. Per temperature inferiori si ha il minimo dell'energia libera per $\psi \neq 0$, pertanto possiamo individuare come temperatura critica T_c la temperatura tale per cui il parametro $a(T)$ assume valore nullo. Vicino a tale temperatura critica T_c , una volta assunto che i parametri $a(T)$ e $b(T)$ cambiano in maniera regolare con la temperatura, possiamo espanderli in serie di Taylor:

$$\begin{aligned} a(T) &\approx \dot{a} \times (T - T_c) + \dots \\ b(T) &\approx b + \dots \end{aligned}$$

con \dot{a} e b costanti fenomenologiche. Possiamo riscrivere $|\psi|$ in termini delle costanti \dot{a} e b :

$$|\psi| = \begin{cases} (\frac{\dot{a}}{b})^{1/2} (T - T_c)^{1/2} & \text{se } T < T_c \\ 0 & \text{se } T > T_c \end{cases}$$

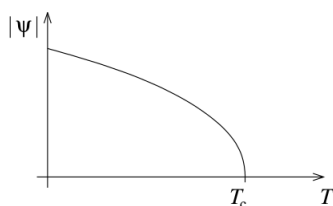


Figura 9: Andamento dell'ampiezza del parametro d'ordine $|\psi|$ in funzione della temperatura.

Si noti il cambiamento brusco dal valore nullo ad uno finito di $|\psi|$ in corrispondenza della temperatura critica T_c . L'andamento di $|\psi|$ mostrato in figura risulta essere peculiare delle transizioni di fase del secondo ordine, analizzate attraverso la teoria generale di Landau.

Mettiamo ora in evidenza una conseguenza del fatto che il parametro d'ordine ψ sia complesso, cioè del tipo: $\psi = |\psi|e^{i\theta}$, con θ fase arbitraria. Infatti dal momento che nell'espressione dell'energia libera il parametro d'ordine ψ entra solamente attraverso il suo modulo, F avrà lo stesso valore per ogni fase θ . Sebbene ci sia un insieme infinito di soluzioni che minimizzano l'energia libera F , corrispondenti a tutti i possibili valori della fase θ , in un dato esperimento si ha che il sistema sceglie spontaneamente solamente uno dei possibili valori di ψ . Tale stato non è invariante per rotazioni di fase,

diciamo che la *simmetria globale* $U(1)$ del sistema, ossia la simmetria per trasformazioni del tipo $e^{i\theta}$, si è spontaneamente rotta. Questo poiché l'energia libera F ha tale invarianza ma il particolare stato di minimo non la presenta. Tale tipo di potenziale è detto 'mexican hat potential'.

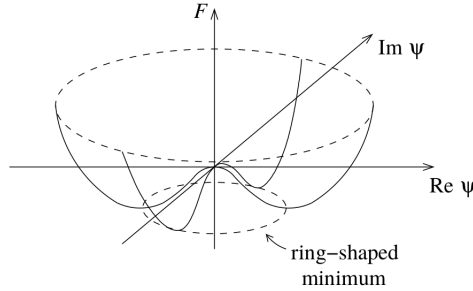


Figura 10: Rappresentazione dell'energia libera F in funzione della parte reale ed immaginaria di parametro d'ordine ψ . Questa mostra un andamento detto a "cappello messicano", caratterizzato dall'aver un luogo di punti di minimo.

Vogliamo ora calcolare alcune variabili termodinamiche, quali l'entropia e il calore specifico, sfruttando la dipendenza dell'energia libera dalla temperatura. Dal momento che l'espressione per la densità di energia libera che abbiamo usato ha solamente contributi dello stato superconduttore, il parametro d'ordine ψ è infatti nullo nello stato normale, avremo che anche l'energia libera F e tutte le sue derivate rispetto alla temperatura T avranno solamente tali contributi.

Ricordiamo ora la definizione di entropia: $S = -\frac{\partial F}{\partial T}$.

Per quanto appena detto si ha che per $T \geq T_c$ si trova $S = 0$, mentre per $T < T_c$ si ottiene:

$$S = -\frac{\partial F}{\partial T} \left(\sqrt{\frac{-a}{b}} \right) = \frac{\partial}{\partial T} \frac{a^2}{2b} \approx \frac{\dot{a}^2}{b} (T - T_c) < 0 \quad (2.2.2)$$

Troviamo che l'entropia è continua in $T = T_c$, pertanto la transizione di fase è continua, ossia non è del primo ordine, come ci aspettavamo.

Per la capacità termica del superconduttore, in formule $C = T \frac{\partial S}{\partial T}$, si trova ancora zero per $T \geq T_c$, ma si ha, per $T < T_c$

$$C = \frac{(\dot{a})^2}{b} T \quad (2.2.3)$$

Pertanto la capacità termica presenta una discontinuità di salto $\Delta C = -\frac{(\dot{a})^2}{b} T_c$ alla temperatura critica T_c confermando quanto detto sull'ordine della transizione.

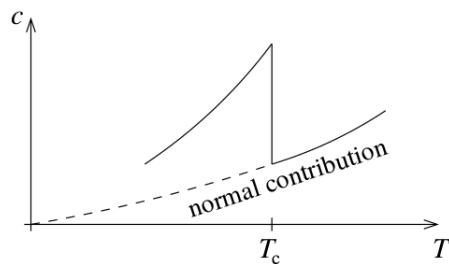


Figura 11: Andamento del calore specifico, $c := C/V$, in funzione della temperatura in un intorno di T_c .

2.3 Teoria di Ginzburg-Landau per sistemi non omogenei

La teoria completa ammette la possibilità che il parametro d'ordine possa dipendere dalla posizione, $\psi(\vec{r})$. Per descrivere situazioni spazialmente non uniformi Ginzburg e Landau postularono che l'energia libera avesse la forma vista nel caso omogeneo con l'aggiunta di un termine dipendente dal gradiente di $\psi(\vec{r})$. Nell'ottica della teoria di Landau, venne assunto che questo termine fosse il più semplice possibile contenente il gradiente ed ammesso dalle regole di simmetria. Ossia la densità di energia libera in un punto \vec{r} , in assenza di campi magnetici esterni diventa:

$$f_s(T) = f_n(T) + \frac{\hbar^2}{2m^*} |\nabla\psi(\vec{r})|^2 + a(T)|\psi(\vec{r})| + \frac{b(T)}{2} |\psi(\vec{r})|^4 \quad (2.3.1)$$

ove il nuovo parametro m^* ha le dimensioni di una massa e rappresenta la massa effettiva del sistema quantistico avente una funzione d'onda macroscopica $\psi(\vec{r})$. Osserviamo che, una volta presa ψ come la funzione d'onda del condensato superconduttore, abbiamo assunto che il termine appena aggiunto contenente il gradiente sia l'energia cinetica. Si può vedere che ponendo $\psi(\vec{r}) = \psi$ i parametri $a(T)$ e $b(T)$ sono gli stessi usati in precedenza.

Per determinare il parametro d'ordine $\psi(\vec{r})$ dobbiamo minimizzare l'energia libera totale del sistema,

$$F_s(T) = F_n(T) + \int \left(\frac{\hbar^2}{2m^*} |\nabla\psi(\vec{r})|^2 + a(T)|\psi(\vec{r})| + \frac{b(T)}{2} |\psi(\vec{r})|^4 \right) d^3r. \quad (2.3.2)$$

In realtà l'espressione appena scritta per l'energia libera è un funzionale $F_s[\psi]$ del parametro d'ordine ψ , detto *funzionale di Landau*. Questo significa che lo scalare F_s dipende dalla funzione $\psi(\vec{r})$ valutata in ogni punto \vec{r} del sistema. Inoltre l'energia libera propria del sistema si avrà in corrispondenza del valore che $F[\psi]$ assume nel suo minimo. Illustriamo ora due diversi approcci per determinare tale punto di minimo.

Nel primo caso si sfrutta il metodo variazionale: consideriamo una variazione infinitesima della funzione $\psi(\vec{r})$:

$$\psi(\vec{r}) \rightarrow \psi(\vec{r}) + \delta\psi(\vec{r}) \quad (2.3.3)$$

Una volta valutati i cambiamenti nell'energia libera totale dovuti a $\delta\psi(\vec{r})$ e trascurati i termini non lineari nella variazione $\delta\psi(\vec{r})$, dal momento che essi sono nulli in un punto di minimo, si trova, dopo alcune manipolazioni:

$$\begin{aligned}\delta F_s[\psi] &= F_s[\psi + \delta\psi] - F_s[\psi] \\ &= \int \delta\psi^* \left(-\frac{\hbar^2}{2m^*} \nabla^2 \psi + a\psi + b\psi|\psi|^2 \right) d^3r \\ &\quad + \int \left(-\frac{\hbar^2}{2m^*} \nabla^2 \psi + a\psi + b\psi|\psi|^2 \right)^* \delta\psi d^3r.\end{aligned}\tag{2.3.4}$$

In accordo con il principio variazionale, la condizione affinché $\psi(\vec{r})$ produca un minimo nell'energia libera è che $\delta F_s[\psi] = 0$ per ogni variazione arbitraria $\delta\psi(\vec{r})$. Si vede che questo accade solamente quando $\psi(\vec{r})$ soddisfa:

$$-\frac{\hbar^2}{2m^*} \nabla^2 \psi + a\psi + b\psi|\psi|^2 = 0\tag{2.3.5}$$

Abbiamo trovato un'equazione simile a quella di Schrödinger indipendente dal tempo per $\psi(\vec{r})$, con l'importante differenza che l'espressione trovata non è lineare a causa della presenza del termine $b\psi|\psi|^2$.

Possiamo giungere allo stesso risultato in modo più formale andando a minimizzare il funzionale di Landau $F[\psi]$; questo sarà minimizzato da una funzione $\psi(\vec{r})$ che soddisfa:

$$\frac{\partial F_s[\psi]}{\partial \psi(\vec{r})} = 0 \qquad \frac{\partial F_s[\psi]}{\partial \psi^*(\vec{r})} = 0\tag{2.3.6}$$

dove le derivate sono da intendersi come derivate di funzionali, che possono essere definite in analogia alle derivate parziali. Ricordiamo come sono definite queste ultime: per una funzione a molte variabili, $f(x_1, x_2, x_3, \dots)$, possiamo esprimere le variazioni nella funzione dovute a variazioni infinitesimali dei parametri usando l'espressione:

$$df = \frac{\partial f}{\partial x_1} dx_1 + \frac{\partial f}{\partial x_2} dx_2 + \frac{\partial f}{\partial x_3} dx_3 + \dots\tag{2.3.7}$$

Considerando ora l'energia libera come funzione di un numero infinito di variabili, $\psi(\vec{r})$ e $\psi(\vec{r})^*$, per tutti i possibili valori di \vec{r} possiamo analogamente scrivere:

$$dF_s = \int \left(\partial\psi(\vec{r}) d\psi(\vec{r}) + \partial\psi^*(\vec{r}) d\psi^*(\vec{r}) \right) d^3r.\tag{2.3.8}$$

Per confronto con (2.3.5) vediamo che ritroviamo l'espressione precedente:

$$\frac{\partial F_s[\psi]}{\partial \psi^*(\vec{r})} = -\frac{\hbar^2}{2m^*} \nabla^2 \psi + a\psi + b\psi|\psi|^2\tag{2.3.9}$$

si ha una relazione analoga per il complesso coniugato, si possono infatti considerare $\psi(\vec{r})$ e $\psi^*(\vec{r})$ come variabili indipendenti.

2.4 Superfici di superconduttori

Un'applicazione dell'equazione sopra derivata riguarda lo studio dell'interfaccia tra materiali ordinari e superconduttori. Consideriamo un modello semplice: supponiamo che lo spazio $x > 0$ sia riempito con del materiale superconduttore e che per $x < 0$ ci sia invece il materiale normale. Si avrà che l'interfaccia tra il metallo normale e quello superconduttore giace lungo il piano yz che separa le due fasi. In una tale configurazione, dal momento che siamo interessati all'andamento del parametro d'ordine in funzione della distanza dal superconduttore, possiamo limitarci al caso unidimensionale, ossia $\psi(\vec{r}) \rightarrow \psi(x)$. Per le proprietà viste del parametro d'ordine ψ abbiamo che quest'ultimo sarà nullo nella regione occupata dal materiale normale, $x < 0$. Assumendo che $\psi(x)$ sia continuo, dobbiamo risolvere l'equazione non lineare di Schrödinger unidimensionale,

$$-\frac{\hbar^2}{2m^*} \frac{d^2\psi(x)}{dx^2} + a(T)\psi(x) + b(T)\psi^3(x) = 0 \quad (2.4.1)$$

nella regione $x > 0$, con condizione al contorno $\psi(0) = 0$. Dal momento che i coefficienti sono reali la soluzione può essere presa reale.

Un'altra condizione da imporre è che per $x \rightarrow +\infty$, ossia lontano dalla superficie, si deve ritrovare la soluzione uniforme, pertanto $\lim_{x \rightarrow +\infty} \psi(x) = \sqrt{-\frac{a}{b}}$.

E' possibile scrivere il parametro d'ordine ψ come $\psi(x) = \sqrt{-\frac{a}{b}} f(x)$, con $f(x)$ funzione reale tale che $\psi(x)$ assuma i valori asintotici richiesti, ossia $f(x) = 1$ per $x \rightarrow +\infty$ e condizione al contorno $f(0) = 0$. Possiamo riscrivere l'espressione precedente, si ottiene:

$$-\frac{\hbar^2}{2m^*a} \frac{d^2f(x)}{dx^2} + f(x) - f^3(x) = 0. \quad (2.4.2)$$

A questo punto definiamo una lunghezza caratteristica ξ detta *lunghezza di coerenza di Ginzburg-Landau*:

$$\xi(T) = \sqrt{-\frac{\hbar^2}{2m^*a}} \approx \sqrt{\frac{\hbar^2}{2m^*a(T_c - T)}} \quad (2.4.3)$$

fortemente dipendente dalla temperatura e tale da divergere per $T = T_c$. $\xi(T)$ può essere pensata come una misura della distanza dalla superficie oltre la quale il parametro d'ordine ψ riacquista il valore che assume nel caso omogeneo, ossia $\psi_0 = \psi_\infty = \sqrt{-\frac{a}{b}}$. A causa della dipendenza di $|a(T)|$, la lunghezza di coerenza $\xi(T)$ dipende dalla temperature secondo la relazione $\xi(T) = \xi(0)\left(\frac{T_c}{T-T_c}\right)^{1/2}$, ove la quantità tra parentesi è l'inverso di quella che prende il nome di *temperatura ridotta*. La divergenza con esponente $\alpha = -1/2$ di $\xi(T)$ alla temperatura critica T_c è tipica delle teorie di campo medio quale quella di GL. Possiamo risolvere analiticamente (2.4.2), si trova:

$$f(x) = \tanh\left(\frac{x}{\sqrt{2}\xi}\right) \quad (2.4.4)$$

che soddisfa le condizioni al contorno per $x = 0$ e $x \rightarrow +\infty$.

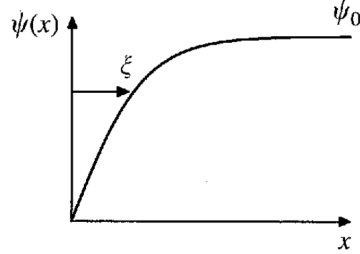


Figura 12: Andamento del parametro d'ordine ψ in prossimità della superficie del superconduttore in funzione della distanza da quest'ultima.

Risolviamo ora esplicitamente l'equazione differenziale appena discussa. Anzitutto la riscriviamo introducendo la lunghezza di coerenza ξ :

$$\xi^2 \frac{d^2 f(x)}{dx^2} + f(x) - f^3(x) = 0 \quad (2.4.5)$$

Dal momento che $f(x)$ è reale e dipende dalla sola variabile x possiamo immaginare di associare $f(x) \rightarrow q(t)$, con $q(t)$ che rappresenta la legge oraria. Si avrà che, presa $m = 1$, $q(t)$ soddisfa l'equazione di Newton, in particolare, per un sistema conservativo:

$$\ddot{q}(t) = F(q) = -\frac{\partial V(q)}{\partial q} \quad (2.4.6)$$

con $F(q)$ che rappresenta la forza, V l'energia potenziale e \ddot{q} che ha l'usuale significato di derivata seconda rispetto al tempo.

Per risolvere questa equazione differenziale si ricorre a quello che prende il nome di *metodo delle quadrature*. Questo consiste nel ridurre l'equazione del secondo ordine ad una del primo mediante l'utilizzo di un integrale primo: l'energia. Abbiamo infatti che per un sistema del tipo che stiamo considerando, ossia un sistema conservativo, l'energia è una costante del moto:

$$E = \frac{1}{2} \dot{q}(t)^2 + V(q) = k \quad (2.4.7)$$

con k costante.

Il valore della costante k viene trovato valutando l'energia cinetica e quella potenziale in punti q in cui il valore di queste ultime è noto. Una volta fatto ciò otteniamo un'espressione per \dot{q} che risulta, in genere, semplice risolvere usando il metodo di separazione delle variabili.

Vediamo ora come si riduce l'equazione (2.4.5) che vogliamo risolvere usando il metodo illustrato. Ricordiamo che in questo caso le derivate verranno fatte rispetto alla posizione x . In analogia con quanto fatto per $q(t)$ esplicitiamo

la derivata seconda di f e la eguagliamo alla derivata rispetto ad f di un generico potenziale V da determinare:

$$\xi^2 \frac{d^2 f(x)}{dx^2} = \xi^2 f''(x) = f(x)^3 - f(x) = -\xi^2 \frac{\partial V(x)}{\partial f} \quad (2.4.8)$$

Per trovare l'energia potenziale V dobbiamo integrare:

$$V = \frac{1}{\xi^2} \int f(x) - f(x)^3 df = \frac{1}{\xi^2} \left[\frac{1}{2} f(x)^2 - \frac{1}{4} f(x)^4 \right] \quad (2.4.9)$$

Esplicitiamo ora la costante del moto k , definita come precedentemente detto:

$$k = \frac{1}{2} (f'(x))^2 + \frac{1}{\xi^2} \left[\frac{1}{2} f(x)^2 - \frac{1}{4} f(x)^4 \right] \quad (2.4.10)$$

per determinarla, valutiamo $f(x)$ e $f'(x)$ in $x = +\infty$ ove si ha che

$$\begin{cases} f(+\infty) = 1 \\ f'(+\infty) = 0 \end{cases}$$

ove la seconda condizione deriva dal fatto che il parametro d'ordine $\psi(x)$ e pertanto $f(x)$ vanno all'infinito in maniera liscia. Si ha:

$k = 0 + \frac{1}{\xi^2} \left[\frac{1}{2} - \frac{1}{4} \right] = \frac{1}{4\xi^2}$. Possiamo ora esplicitare $f'(x)$, dal momento che f aumenta dall'aumentare di x teniamo solamente la radice positiva:

$$f'(x) = \frac{df(x)}{dx} = \frac{1}{\sqrt{2}\xi} \sqrt{1 + f^4 - 2f^2} \quad (2.4.11)$$

ove è stata omessa la dipendenza di f da x per non appesantire la scrittura. L'espressione trovata può essere risolta separando le variabili e integrando:

$$\sqrt{2}\xi \int_{f(0)}^{f(x)} \frac{df}{\sqrt{1 + f^4 - 2f^2}} = \int_0^x \tilde{x} d\tilde{x} \quad (2.4.12)$$

si ha

$$x = \sqrt{2}\xi \int_{f(0)}^{f(x)} \frac{df}{(f^2 - 1)} = \sqrt{2}\xi \operatorname{arctanh}(f(x)). \quad (2.4.13)$$

Andando ora ad esplicitare $f(x)$, si trova quanto predetto:

$$f(x) = \tanh\left(\frac{x}{\sqrt{2}\xi}\right). \quad (2.4.14)$$

Si noti che la variazione spaziale di f è confinata nella regione $|x| \approx \xi$, infatti dalla definizione della tangente iperbolica si può vedere che $1 - |f|$ svanisce esponenzialmente per $|x| \gg \xi$.

Il modello appena esposto può essere usato per analizzare l'effetto di prossimità tra due materiali superconduttori. Per chiarire in cosa consiste questo

effetto consideriamo l'interfaccia tra due diversi materiali superconduttori, caratterizzati dalle temperature critiche T_{c1} e T_{c2} , con $T_{c1} > T_{c2}$. Se partiamo da tale configurazione alla temperatura $T > T_{c1}, T_{c2}$, abbassando la temperatura, si verifica che il materiale con temperatura critica T_{c1} diventa superconduttore per primo e innesca, sulla superficie del secondo materiale, la fase superconduttiva ad una temperatura maggiore di T_{c2} . Se per il materiale con temperatura critica minore T_{c2} consideriamo un film sottile, con spessore paragonabile alla sua lunghezza di coerenza $\xi_2(T)$, viene innescata la superconduttività su tutto il volume del secondo materiale. Il parametro d'ordine ψ_2 viene pertanto forzato ad assumere un valore non nullo per temperature superiori a quella critica naturale T_{c2} , questo si verifica a causa della sua prossimità ad un materiale caratterizzato da una temperatura critica T_{c1} più grande.

3 Teoria di Ginzburg-Landau in campo magnetico

Fino ad ora abbiamo considerato il caso di un superconduttore avente particelle elettricamente neutre, in altre parole, la teoria sviluppata non considerava gli effetti della carica del condensato superconduttore ed è pertanto adatta a descrivere materiali neutri che non interagiscono coi campi elettromagnetici. La vera forza della teoria di Ginzburg e Landau è mostrata quando andiamo ad aggiungere un ulteriore termine dovuto all'effetto di un campo magnetico, estensione necessaria per poter descrivere le interiezioni dei materiali superconduttori con i campi magnetici. Ginzburg e Landau postularono che il campo magnetico entrasse nell'espressione del funzionale come se $\psi(\vec{r})$ fosse la funzione d'onda di particelle cariche con l'usuale sostituzione quantomeccanica, ossia tramite l'accoppiamento minimale:

$$-i\hbar\vec{\nabla} \rightarrow -i\hbar\vec{\nabla} - e^*\vec{A} \quad (3.0.1)$$

con e^* carica e \vec{A} potenziale vettore magnetico.

Ammettiamo la possibilità che e^* non sia la carica dell'elettrone $-e$, assunzione che verrà spiegata dopo lo sviluppo della teoria BCS da Gor'kov [11] che mostrò il legame tra quest'ultima teoria e quella da noi analizzata, dando la corretta interpretazione del parametro d'ordine ψ . In particolare mostrò che $e^* = +2e$. Con questa sostituzione arriviamo ad un'espressione per la densità di energia libera:

$$f_s(T) = f_n(T) + \frac{1}{2m^*} \left| \left(i\hbar\vec{\nabla} + 2e\vec{A} \right) \psi \right|^2 + a|\psi|^2 + \frac{b}{2}|\psi|^4. \quad (3.0.2)$$

Per ottenere l'energia libera totale dobbiamo integrare questa espressione e dobbiamo inoltre aggiungere il contributo dell'energia associata al campo magnetico $\vec{B} = \vec{\nabla} \times \vec{A}$. Pertanto il funzionale energia libera totale del superconduttore e del campo magnetico è:

$$F[\psi, \vec{A}] \cong \int_V \left(\frac{1}{2m^*} \left| \left(i\hbar\vec{\nabla} + 2e\vec{A} \right) \psi \right|^2 + a|\psi|^2 + \frac{b}{2}|\psi|^4 \right) d^3r + \frac{1}{2\mu_0} \int \vec{B}(\vec{r})^2 d^3r. \quad (3.0.3)$$

con il primo termine che rappresenta l'energia libera del campione e viene pertanto esteso a tutto il suo volume, mentre il secondo viene integrato su tutto lo spazio.

Per trovare l'espressione analitica del il parametro d'ordine $\psi(\vec{r})$ dobbiamo minimizzare il funzionale energia libera trovato, $F_s[\psi, \vec{A}]$, rispetto $\psi(\vec{r})$ e $\psi^*(\vec{r})$. Fatto ciò si trova ancora un'equazione non lineare di Schrödinger per $\psi(\vec{r})$ con l'aggiunta di un termine contenente il potenziale vettore magnetico \vec{A} :

$$-\frac{\hbar^2}{2m^*} \left(\vec{\nabla} + \frac{2ei}{\hbar} \vec{A} \right)^2 \psi(\vec{r}) + a\psi(\vec{r}) + b|\psi|^2\psi(\vec{r}) = 0. \quad (3.0.4)$$

La supercorrente dovuta al campo magnetico \vec{B} è invece trovata minimizzando il funzionale $F_s[T]$ rispetto ad \vec{A} , per farlo scriviamo $\vec{A}(\vec{r}) = \vec{A}_0(r) + \vec{a}(\vec{r})$ e andiamo poi a sostituire ricordando che in un minimo si annullano i termini lineari. Se esplicitiamo il campo magnetico $\vec{B} = \vec{\nabla} \times \vec{A}$ possiamo sfruttare la legge di Ampère $\vec{\nabla} \times \vec{B} = \mu_0 \vec{J}$, si ottiene:

$$\vec{J}_s = \frac{1}{\mu_0} \vec{\nabla} \times \vec{B} = \frac{(2e)\hbar i}{2m^*} ([\vec{\nabla}\psi^*]\psi - \psi^*\vec{\nabla}\psi) - \frac{(2e)^2}{m^*} |\psi|^2 \vec{A} \quad (3.0.5)$$

ove quest'ultima espressione può essere riscritta in funzione del solo potenziale vettore \vec{A} , ricordando la relazione che lega quest'ultimo al campo magnetico \vec{B} . Si noti stiamo assumendo che le correnti esterne \vec{J}_{apl} siano trascurabili, altrimenti si avrebbe avuto un contributo anche da queste: $\vec{\nabla} \times \vec{B} = \mu_0(\vec{J}_s + \vec{J}_{apl})$

Le equazioni appena trovate (3.0.4) e (3.0.5) sono equazioni differenziali accoppiate dette *equazioni Ginzburg-Landau*. Ognuna di queste due equazioni ci permette di trovare una lunghezza caratteristica del sistema: dalla prima possiamo ricavare la *lunghezza di coerenza* ξ , come visto in precedenza; dalla seconda ricaviamo invece la *lunghezza di penetrazione del campo magnetico* λ .

Consideriamo una situazione unidimensionale in cui abbiamo il campo magnetico diretto lungo l'asse x : $\vec{B}(z) = B(z)\hat{x}$, ossia $\vec{B} = (B(z), 0, 0)$ e corrispondente potenziale vettore $\vec{A}(z) = A(z)\hat{y}$, ossia $\vec{A} = (0, A(z), 0)$. Pertanto, indicando con " ' " la derivata rispetto a z , si ha $A'(z) = -B(z)$. Presa ψ reale, le equazioni di Ginzburg-Landau diventano:

$$-\frac{\hbar^2}{2m^*} \psi(z)'' + a\psi(z) + b\psi(z)^3 + (2e)^2 \frac{A^2 \psi(z)}{2m^*} = 0 \quad (3.0.6)$$

$$-\frac{1}{\mu_0} B(z)' = \frac{1}{\mu_0} A(z)'' = \frac{(2e)^2 \psi^2 A(z)}{m^*} \quad (3.0.7)$$

ove si è usato il fatto che, presa $\psi \in R$, $\psi \equiv \psi^*$. Le condizioni al contorno per un tale problema sono:

$$\begin{aligned} \psi = 0, \quad B = \mu_0 H_c & \quad \text{per } z \rightarrow -\infty \\ \psi = |\psi|_\infty, \quad B = 0 & \quad \text{per } z \rightarrow +\infty \end{aligned} \quad (3.0.8)$$

la motivazione di tali condizioni per $z \rightarrow -\infty$ verrà chiarita nel seguito quando si illustrerà l'energia di superficie.

Consideriamo ora il limite $z \rightarrow +\infty$, si avrà che il parametro d'ordine sarà costante, in particolare $\psi = |\psi|_\infty$. In questo limite l'equazione (3.0.7) per il potenziale vettore \vec{A} diventa:

$$A''(z) = \mu_0 \frac{(2e)^2}{m^*} \psi_\infty^2 A(z) \quad (3.0.9)$$

vista la forma dell'equazione, ipotizziamo che questa abbia soluzione del tipo

$$A(z) = A(0)e^{-z/\lambda} \quad (3.0.10)$$

con λ avente le dimensioni di una lunghezza. Per determinare la grandezza λ calcoliamo la derivata seconda rispetto a z di un siffatto $A(z)$ e andiamo poi a sostituire. Si avrà: $A(0)\lambda^{-2}e^{-z/\lambda} = \mu_0 \frac{(2e)^2}{m^*} \psi_\infty^2 A(0)e^{-z/\lambda}$.

Esplicitando λ :

$$\lambda = \left(\sqrt{\frac{\mu_0(2e)^2\psi_\infty^2}{m^*}} \right)^{-1} = \sqrt{\frac{m^*}{\mu_0(2e)^2\psi_\infty^2}} \quad (3.0.11)$$

Nel limite che stiamo considerando in cui il parametro d'ordine ψ è costante, l'espressione per la supercorrente \vec{J}_s deve essere equivalente alla seconda equazione di London per consistenza. Si verifica facilmente che tale richiesta è soddisfatta se:

$$|\psi|^2 = n_s \quad (3.0.12)$$

con n_s avente l'usuale significato di densità elettronica 'super'. Ricordiamo che la densità superficiale di corrente superfluida \vec{J}_s è data da:

$$\vec{J}_s = en_s \vec{v}_s \quad (3.0.13)$$

ove \vec{v}_s è la velocità superfluida, definita come $\vec{v}_s = \frac{\hbar}{m} \vec{\nabla} \theta$, con θ fase del parametro d'ordine ψ , ossia $\psi = |\psi|e^{i\theta}$.

A questo punto è immediato vedere che, presa la carica dei costituenti che appare nell'equazione di London $e^* = 2e$, la grandezza λ trovata coincide con la lunghezza di penetrazione λ_L introdotta nel capitolo 1.

3.1 Energia di condensazione

Riprendiamo ora brevemente la termodinamica di base dei materiali magnetici. Per farlo consideriamo una geometria semplice quale quella di un cilindro di materiale immerso in un campo magnetico \vec{H} parallelo all'asse del cilindro, generato da un solenoide che lo contiene. La densità di energia interna u , nella sua forma differenziale risulta essere dipendente dalle variabili S e \vec{B} : $du = Tds + \vec{H} \cdot d\vec{B}$, ove il primo addendo rappresenta la densità di energia termodinamica e il secondo quella magnetica. Il campo magnetico \vec{B} non è tuttavia una buona variabile con cui lavorare e questo è dovuto al fatto che nella maggior parte degli esperimenti risulta impossibile manipolare direttamente il flusso del campo magnetico \vec{B} a causa della presenza delle correnti microscopiche, mentre le correnti esterne (in questo caso le correnti in un solenoide) controllano il campo \vec{H} . Conviene pertanto definire l'analogo magnetico della densità di energia libera di Helmholtz f e Gibbs g :

$$f(T, \vec{B}) = u - Ts \quad \rightarrow \quad df = -sdT + \vec{H} \cdot d\vec{B} \quad (3.1.1)$$

$$g(T, \vec{H}) = f - \vec{B} \cdot \vec{H} \quad \rightarrow \quad dg = -sdT - \vec{B} \cdot d\vec{H} \quad (3.1.2)$$

come indicato, l'energia libera di Gibbs può essere vista in maniera naturale come una funzione di T e \vec{H} ed è pertanto la quantità termodinamica con cui è più conveniente lavorare. A partire dell'espressione differenziale per la densità di energia libera di Gibbs, possiamo definire: $s = -(\frac{\partial g}{\partial T})_H$ e $\vec{B} = (\frac{\partial g}{\partial \vec{H}})_T$. In presenza di un campo magnetico \vec{H} debole è possibile valutare la variazione macroscopica di energia libera di Gibbs a temperatura fissata ($dT = 0$, che corrisponde ad una linea verticale nel diagramma H-T), si ha:

$$g(T, H) - g(T, 0) = \int_0^{H_c} dG = - \int_0^{H_c} B(H)dH. \quad (3.1.3)$$

Nella fase superconduttrice tale variazione sarà nulla, in accordo con l'effetto Meissner; mentre nella fase normale vale $-\frac{\mu_0}{2}H^2$, ove abbiamo assunto che sia trascurabile la magnetizzazione \vec{M} e che sussista pertanto la relazione $\vec{B} = \mu_0\vec{H}$.

Si deve inoltre avere che, in corrispondenza del campo critico $H_c(T)$ che segna la transizione di fase, l'energia libera di Gibbs valutata nelle due diverse fasi dev'essere uguale: $g_n(T, H_c) = g_s(T, H_c) = g_s(T, 0) = g_s(T, H)$, ove per le ultime due uguaglianze si è usato il fatto che nella fase superconduttiva l'energia libera di Gibbs non dipende dal campo magnetico \vec{H} come visto poco sopra. Possiamo ora definire l'energia di condensazione per un campo magnetico $\vec{H} = 0$, come:

$$E_{cond} = g_s(T, 0) - g_n(T, 0) = -\frac{\mu_0}{2}H_c^2(T) \quad (3.1.4)$$

essa è una misura del guadagno in energia libera per unità di volume nella fase superconduttiva rispetto alla fase normale alla stessa temperatura T .

3.2 Energia superficiale

Definiamo ora una grandezza adimensionale, κ , detta *parametro di Ginzburg-Landau*, data dal rapporto tra le due lunghezze caratteristiche λ e ξ della teoria di Ginzburg-Landau:

$$\kappa := \frac{\lambda(T)}{\xi(T)}. \quad (3.2.1)$$

e approssimativamente indipendente dalla temperatura in un intorno di T_c . Si può comprendere il significato del parametro κ appena introdotto studiando l'energia superficiale della regione che separa il materiale normale da quello superconduttore. Tale energia è definita come l'eccesso di energia libera di Gibbs della regione di transizione rispetto all'energia di Gibbs, valutata al campo critico H_c , dello stato normale o superconduttore.

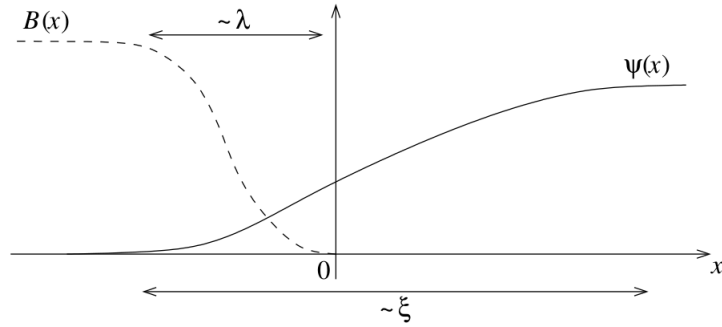


Figura 13: Regione superficiale tra il materiale normale e quello superconduttore per $\lambda \ll \xi$ ($\kappa \ll 1$).

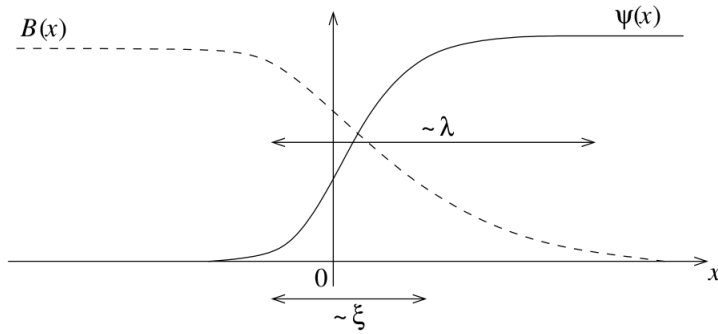


Figura 14: Regione superficiale tra il materiale normale e quello superconduttore $\lambda \gg \xi$ ($\kappa \gg 1$).

Il contorno della regione di transizione è meccanicamente stabile solo se la regione normale è sottoposta ad un campo H_c parallelo alla superficie. Fissata un'asse di riferimento x nel nostro sistema unidimensionale, sfruttando le relazioni appena illustrate possiamo vedere che nella suddetta configurazione si avrà che l'energia libera di Gibbs valutata in profondità nello stato normale $G_n(x \rightarrow -\infty) = G_n(T, 0) - \frac{\mu_0}{2} H_c^2$ eguaglia quella valutata in profondità nella regione superconduttrice $G_s(x \rightarrow +\infty) = G_s(T, 0)$.

La possibilità di avere un'energia superficiale σ_{ns} nasce dall'esistenza delle due lunghezze caratteristiche λ e ξ . Cerchiamo ora di mostrare quanto detto: se il campione fosse interamente normale o interamente superconduttore, allora l'energia libera di Gibbs per unità di area sarebbe $\int_{-\infty}^{+\infty} dx (-\mu_0 H_c^2 / 2\pi)$. Tuttavia, nella regione d'interfaccia, il campo magnetico è espulso per $z \gtrsim \lambda$, mentre l'energia di condensazione aumenta per $z \gtrsim \xi$. Pertanto l'energia di Gibbs per unità di area all'interno del materiale è approssimativamente data

dalla somma di due termini: $\int_{-\infty}^{\lambda} dx \frac{-\mu_0 H_c^2}{2} + \int_{\xi}^{\infty} dx \frac{-\mu_0 H_c^2}{2}$.

Per definizione, l'energia superficiale σ_{ns} è data dalla differenza tra l'attuale energia libera di Gibbs per unità di area e il valore che assumerebbe se il campione fosse uniformemente normale o superconduttore:

$$\sigma_{ns} \approx -\frac{\mu_0 H_c^2}{2} \left(\int_{-\infty}^{\lambda} dx + \int_{\xi}^{\infty} dx - \int_{-\infty}^{\infty} dx \right) \approx (\xi - \lambda) \frac{H_c^2}{8\pi} \quad (3.2.2)$$

Notiamo preliminarmente che σ_{ns} è positiva per $\kappa \ll 1$, ma è negativa per $\kappa \gg 1$. Attraverso questo calcolo approssimativo possiamo quindi vedere come il parametro κ interviene nel definire l'energia di superficie.

La teoria di Ginzburg-Landau ci permette di studiare l'energia superficiale nel dettaglio:

$$\sigma_{ns} = \int_{-\infty}^{\infty} dx \left[g(x) - g_{n0} + \frac{\mu_0 H^2}{2} \right] \quad (3.2.3)$$

$$= \int_{-\infty}^{\infty} dx \left[f(x) + \mu_0 H(x) H_c - f_{n0} + \frac{\mu_0 H^2}{2} \right] \quad (3.2.4)$$

$$= \int_{-\infty}^{\infty} dz \left[a\psi^2 + \frac{b}{2}\psi^4 + (2m^*)^{-1} \left| -i\hbar \vec{\nabla} + \frac{q\vec{A}}{c} \psi \right|^2 + \frac{(H_c - B)^2}{8\pi} \right] \quad (3.2.5)$$

se ora sfruttiamo la prima delle equazioni di Ginzburg-Landau, dopo alcune manipolazioni arriviamo ad una formulazione dell'energia di superficie:

$$\sigma_{ns} = \int_{-\infty}^{\infty} dx \left[\frac{b}{2} |\psi|^4 + \mu_0 \frac{(H_c - H)^2}{2} \right] \quad (3.2.6)$$

che è conveniente esprimere in termini di una lunghezza caratteristica δ :

$$\sigma_{ns} = \frac{\mu_0 H_c^2}{2} \delta, \text{ ove}$$

$$\delta := \int_{-\infty}^{\infty} dx \left[\left(1 - \frac{H}{H_c}\right)^2 - \left| \frac{\psi}{\psi_{\infty}} \right|^4 \right] \quad (3.2.7)$$

Sebbene l'equazione di Ginzburg-Landau per il campo magnetico richieda simulazioni numeriche al fine di valutare δ per valori arbitrari di κ , è possibile determinare alcuni valori esatti di δ considerando dei casi limite:

$$\delta = \begin{cases} \frac{4\sqrt{2}}{3}\xi \approx 1.89\xi & \kappa \ll 1 \\ 0 & \kappa = \frac{1}{\sqrt{2}} \\ -\frac{8}{3}(\sqrt{2}-1)\lambda \approx -1.10\lambda & \kappa \gg 1 \end{cases}$$

si trovano risultati in accordo con la stima qualitativa fatta a partire dall'equazione (3.2.2). L'energia superficiale è importante nel determinare il comportamento di un superconduttore in un campo magnetico applicato, il

materiale è convenzionalmente classificato come di tipo I o di tipo II a seconda che σ_{ns} sia positiva o negativa rispettivamente. Un confronto con i casi appena elencati porta alla classificazione:

$$\begin{aligned} \text{Tipo I: } \quad \kappa < \frac{1}{\sqrt{2}} \quad \xi(T) > \sqrt{2}\lambda(T) \quad \sigma_{ns} > 0 & \quad (3.2.8) \\ \text{Tipo II: } \quad \kappa > \frac{1}{\sqrt{2}} \quad \xi(T) > \sqrt{2}\lambda(T) \quad \sigma_{ns} < 0 & \end{aligned}$$

L'energia di superficie può essere pensata come la differenza tra l'energia spesa per espellere il campo magnetico dal materiale e l'energia guadagnata dalla condensazione dello stato superconduttore. Per superconduttori di tipo I tali che $\xi \gg \lambda$ ci sarà una regione di spessore $\xi - \lambda > 0$ in cui il primo termine in δ sarà grande mentre il secondo si avvicina lentamente al valore che assume in profondità nella regione superconduttrice (si veda figura 13). Si avrà allora, in accordo con quanto già detto, che l'energia superficie $\sigma_{ns} > 0$. Dalla definizione di energia di superficie possiamo vedere che in generale i superconduttori di tipo I tenderanno allora a minimizzare l'area totale della regione di interfaccia. L'energia di superficie positiva dei superconduttori di tipo I mantiene il campione spazialmente omogeneo, il materiale mostra effetto Meissner per tutti i campi magnetici $H < H_c$.

Per superconduttori di tipo II, tali che $\lambda \gg \xi$ si verifica la situazione opposta (figura 14), di conseguenza si avrà $\sigma_{ns} < 0$ e perciò il sistema tende a massimizzare l'area totale della regione. Un materiale di questo tipo tende a suddividersi in domini microscopici non appena il campo magnetico eccede il campo critico inferiore H_{c1} , sempre più piccolo di H_c . Per $H > H_{c1}$ il flusso magnetico penetra il campione in linee quantizzate, dette vortici, in questo regime il campione si trova in uno *stato misto*. Questo stato persiste fino al campo critico superiore H_{c2} oltre il quale il campione diventa normale. E' possibile mostrare che $H_{c2} = \sqrt{2}\kappa H_c$, pertanto per $\kappa = 1/\sqrt{2}$ si avrà che i campi critici dei due diversi tipi di superconduttori coincidono, in accordo con la classificazione precedentemente fatta. Tale conto verrà mostrato esplicitamente nel seguito della trattazione. L'esistenza dei superconduttori di tipo II fu suggerita da Abrikosov [12] nel 1957, egli usò la teoria di Ginzburg-Landau per studiare lo stato misto nel dettaglio.

3.3 Quantizzazione del flusso

Come abbiamo anticipato nel corso della trattazione, in un superconduttore di tipo II il campo magnetico può penetrare nel materiale sotto forma di vortici. Ogni vortice consiste in una regione in cui circola supercorrente attorno ad un piccolo core centrale che è essenzialmente costituito da materiale normale. Il campo magnetico può passare nel campione attraverso il core del vortice e le correnti che circolano attorno ad esso servono per schermare il campo magnetico dal resto del materiale superconduttore. Risulta che ogni

vortice porta un'unità fissata di flusso magnetico, $\phi_0 = h/2e$, ossia il flusso magnetico è quantizzato.

Vogliamo ora usare la teoria di Ginzburg-Landau per mostrare la quantizzazione del flusso. Per farlo consideriamo un anello superconduttore e lo descriviamo usando coordinate cilindriche, $\vec{r} = (r, \phi, z)$, con l'asse z perpendicolare al piano dell'anello. Si vede che, in questa configurazione, il parametro d'ordine $\Psi(\vec{r})$ deve essere periodico in ϕ : $\psi(r, \phi, z) = \psi(r, \phi + 2\pi, z)$. Assumiamo che sia trascurabile la variazione di $\psi(\vec{r})$ attraverso la sezione dell'anello e possiamo quindi trascurare la dipendenza da r e z . Pertanto, il parametro d'ordine all'interno del superconduttore ha la forma $\psi(\phi) = \psi_0 e^{in\phi}$, con n intero e ψ_0 costante.

Una corrente circolante in un superconduttore induce un campo magnetico, assunto che ci sia flusso magnetico Φ attraverso l'anello, possiamo scegliere il potenziale vettore come tangente, ossia: $A_\Phi = \frac{\Phi}{2\pi R}$, con R raggio dell'area racchiusa dall'anello. L'espressione precedente segue da:

$$\Phi := \int \vec{B} \cdot d\vec{S} = \int (\vec{\nabla} \times \vec{A}) \cdot d\vec{S} = \oint \vec{A} \cdot d\vec{r} = 2\pi R A_\Phi. \quad (3.3.1)$$

L'energia libera corrispondente ad una tale funzione d'onda e ad un tale potenziale vettore risulta essere.

$$F_s(T) = F_s^0(T) + V \left(\frac{\hbar^2}{2m^*} \left| \frac{in}{R} - \frac{2ei\Phi}{2\pi\hbar R} \right|^2 |\psi|^2 \right) + \frac{1}{2\mu_0} \int B^2 d^3r \quad (3.3.2)$$

ove V è il volume totale dell'anello superconduttore e $F_s^0(T)$ è l'energia fondamentale dell'anello in assenza di correnti e flusso magnetico. L'ultimo addendo rappresenta l'energia del campo magnetico nel vuoto e può essere espressa in funzione dell'induttanza dell'anello L e della corrente I che scorre in esso, si ha $E_B = \frac{1}{2}LI^2 \propto \phi^2$. D'altro canto possiamo riscrivere anche il secondo termine, che rappresenta l'energia del superconduttore, introducendo ϕ_0 , detto quanto di flusso. Dopo alcune manipolazioni si arriva alla forma più generale per l'energia libera del superconduttore:

$$F_s(T) = F_s^{bulk}(T) + k(\phi - n\phi_0)^2 + k\phi^2 \quad (3.3.3)$$

con k costante, avente l'andamento mostrato in figura:

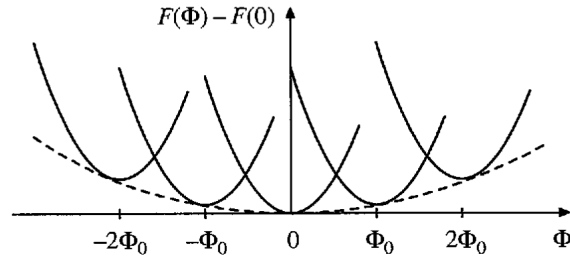


Figura 15: Quantizzazione del flusso in un anello superconduttore. Si hanno minimi di energia quando il flusso ϕ è un multiplo intero del quanto di flusso $\phi_0 = h/2e$. Si noti che lo stato con flusso $\phi = 0$ corrisponde al minimo globale.

Possiamo vedere dalla figura che l'energia libera ha un minimo ogni qualvolta che il flusso attraverso l'anello è dato da $\phi = n\phi_0$. Questo fenomeno prende il nome di *quantizzazione del flusso*. Se prendiamo un anello di materiale nel suo stato normale sopra la temperatura T_c e lo raffreddiamo poi sotto T_c , si verifica che il sistema assume, a seconda del campo magnetico applicato, uno degli stati di minimo dell'energia libera F . Tale sistema risulta essere "intrappolato" in questo stato e la corrente persistente scorrerà attorno all'anello per mantenere costante il flusso $\phi = n\phi_0$, questo accade anche qualora venga spento il campo magnetico esterno. Il flusso magnetico può essere misurato direttamente, la misura conferma che questo sia quantizzato in unità di $\phi_0 = h/2e$.

Abbiamo visto che la più piccola quantità di flusso che può penetrare il materiale è un quanto di flusso ϕ_0 e lo fa sotto forma di vortice. Vogliamo ora capire l'andamento del campo magnetico \vec{B} e del parametro d'ordine ψ in un intorno del core del vortice andando a studiare le equazioni Ginzburg-Landau. Dopo aver imposto la quantizzazione del flusso e le condizioni al contorno arriviamo ad una particolare espressione delle equazioni di Ginzburg-Landau per il parametro d'ordine ψ e per il campo magnetico \vec{B} . A causa della presenza del termine non lineare tali equazioni non possono essere risolte analiticamente, un'integrazione numerica porta al risultato mostrato in figura:

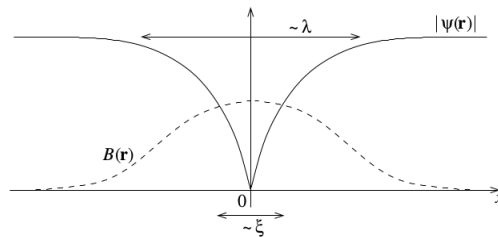


Figura 16: Risultato dell'integrazione numerica, in un intorno del vortice.

Abbiamo fino ad ora considerato la struttura di un vortice isolato, siamo tuttavia interessati a capire in che modo un flusso magnetico finito penetra un superconduttore di tipo II. Sulla base della teoria di Ginzburg-Landau, Abrikosov propose [12], nel 1957, che il flusso entrasse nel materiale sotto forma di un reticolo formato da linee di vortici parallele, trasportanti ognuna un quanto di flusso ϕ_0 . La proposta iniziale di Abrikosov fu quella di un reticolo quadrato, questo però si rivelò in seguito essere un errore, infatti lo stato corrispondente alla più bassa energia libera è un reticolo triangolare.

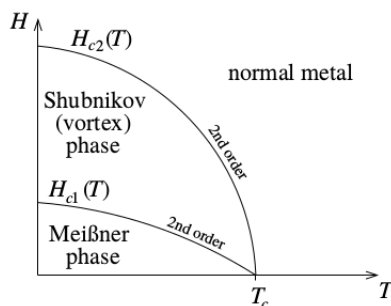


Figura 17: Diagramma H-T per superconduttori di tipo II.

I risultati ottenuti da Abrikosov sono qualitativamente validi in un intorno del campo critico superiore H_{c2} , dal momento che si assume che il campo magnetico \vec{B} sia uniforme, situazione che si verifica per $\lambda \gg l$, con $l = \sqrt{\frac{\phi_0}{B}}$ distanza tipica tra due vortici.

Vogliamo ora mostrare esplicitamente la relazione che lega il campo critico superiore in un superconduttore di tipo II, H_{c2} , al campo critico H_c in un superconduttore di tipo I. Ci limitiamo a considerare campi magnetici H in un intorno del campo critico superiore H_{c2} , ne consegue che, poiché per un superconduttore di tipo II la transizione di fase in H_{c2} è del secondo ordine, si ha che in tale intorno il parametro d'ordine $|\psi|$ è molto piccolo e assume valore nullo in corrispondenza del campo critico H_{c2} . Possiamo pertanto considerare l'equazione di Ginzburg-Landau linearizzata. Si ha inoltre che la magnetizzazione \vec{M} in questo intorno è trascurabile (dal momento che ψ è piccola, la super densità n_s e le correnti di schermaggio svaniranno anch'esse al campo critico H_{c2}). Possiamo assumere con buona approssimazione che $\vec{B} = \mu_0 \vec{H}$ con \vec{H} avente l'usuale significato di campo magnetico applicato tramite un apparato esterno. Si ha poi che in questo intorno possiamo trascurare le variazioni spaziali del campo magnetico \vec{B} , lo si può cioè assumere come costante. La configurazione sarà perciò: $\vec{B} = B\hat{z}$ costante e, per consistenza con la gauge di London, $\vec{A} = \hat{y}Bx$. Definita la frequenza di ciclotrone $\omega_c := \frac{2eB}{m^*}$, si ottiene un'equazione equivalente a quella di Schrödinger per la

funzione d'onda di una particella carica in un campo magnetico:

$$\left(-\frac{\hbar^2}{2m^*}\nabla^2 - \hbar\omega_c ix \frac{\partial}{\partial y} + \frac{m^*\omega_c^2}{2}x^2 \right) \psi(\vec{r}) = |a|\psi(\vec{r}) \quad (3.3.4)$$

che ha una soluzione del tipo: $\psi(\vec{r}) = e^{i(k_y y + k_z z)} f(x)$, combinazione di onde piane in direzione y e z con $f(x)$ funzione da determinare. Per farlo sostituiamo un siffatto parametro d'ordine $\psi(\vec{r})$ nell'equazione di Schrödinger trovata, dopo alcune manipolazioni si giunge a:

$$-\frac{\hbar^2}{2m^*}\frac{d^2 f(x)}{dx^2} + \frac{m^*\omega_c^2}{2}(x-x_0)^2 f(x) = (|a| - \frac{\hbar^2 k_z^2}{2m^*})f(x) \quad (3.3.5)$$

ossia l'equazione di Schrödinger per un oscillatore armonico con minimo traslato in $x = x_0 = -\frac{\hbar k_y}{m\omega_c}$. Pertanto il termine a secondo membro sarà l'energia dell'oscillatore traslato:

$$(n + \frac{1}{2})\hbar\omega_c = |a| - \frac{\hbar^2 k_z^2}{2m^*} \quad (3.3.6)$$

e le $f(x)$ saranno le relative autofunzioni per ogni n .

Immaginiamo di partire da una configurazione in cui è applicato un campo magnetico esterno $H > H_{c2}$ e successivamente ne diminuiamo gradualmente l'intensità, a temperatura T fissata, fintanto che non raggiungiamo lo stato corrispondente all'energia più bassa possibile ($n = 0, k_z = 0$), ossia fintanto che: $\frac{1}{2}\hbar\frac{2eB}{m^*} = \dot{a}(T_c - T)$ ove si è scritto esplicitamente ω_c . Riarrangiando si trova $\mu_0 H_{c2} = B_{c2} = \frac{\phi_0}{2\pi\xi^2(T)}$, si noti che questo risultato implica che per $H = H_{c2}$ si ha esattamente un quanto di flusso, per ogni unità di area $2\pi\xi(T)^2$. Confrontiamo ora quanto trovato con il campo critico H_c di un superconduttore di tipo I. Mostriamo anzitutto che possiamo esprimere tale campo attraverso le costanti fenomenologiche della teoria di Ginzburg-Landau, \dot{a} e b . Riprendiamo brevemente alcuni risultati precedentemente ottenuti per i sistemi omogenei: abbiamo visto che per $T < T_c$ la densità di energia libera presenta un minimo per $|\psi| = \sqrt{-a/b}$, si può facilmente trovare che il valore che ivi assume è: $f_s(T) - f_n(T) = -a(T)^2/2b(T)$. Questo valore corrisponde alla differenza di energia libera (per unità di volume) tra la fase superconduttrice e quella normale ad una data temperatura T , ossia: $f_s(T) - f_n(T) = -\frac{\dot{a}^2(T-T_c)^2}{2b} = -\mu_0 \frac{H_c^2}{2}$ ¹. Possiamo ricavare il campo critico termodinamico in un intorno di T_c :

$$\begin{aligned} H_c &= \frac{\dot{a}}{(\mu_0 b)^{1/2}}(T_c - T) \\ &= \frac{\phi_0}{2\pi\mu_0\sqrt{2}\xi\lambda} \\ &= \frac{H_{c2}}{\sqrt{2}\kappa} \end{aligned} \quad (3.3.7)$$

¹Si può infatti mostrare che questa quantità coincide con l'energia di condensazione precedentemente definita.

e perciò

$$H_{c2} = \sqrt{2}\kappa H_c. \quad (3.3.8)$$

Abbiamo quindi trovato che, per $\kappa = 1/\sqrt{2}$, i campi critici relativi ai due diversi tipi di superconduttori coincidono, $H_{c2} = H_c$. Ricordiamo inoltre che in corrispondenza di tale valore si avrà energia di superficie σ_{ns} nulla. Pertanto si è trovato un risultato in accordo con la previsione precedentemente fatta, ossia che il valore $\kappa = 1/\sqrt{2}$ è il discriminante tra i superconduttori di tipo I e tipo II.

Conclusioni

In questa tesi si è trattata la teoria di Ginzburg-Landau, essa descrive la transizione di fase superconduttiva da un punto di vista termodinamico. Sebbene fosse stata inizialmente pensata come una teoria fenomenologica, successivamente Gor'kov [11], nel 1959, mostrò come questa potesse essere derivata dalla teoria microscopica completa BCS, in un limite opportuno. Infatti la teoria di Ginzburg-Landau è una teoria molto generale e può come tale essere applicata in molte diverse aree della fisica; con opportune modifiche può essere usata per descrivere molti sistemi fisici diversi tra loro, quali il magnetismo, lo studio della transizione liquido-cristallo e delle transizioni che comportano la rottura di una simmetria. La teoria da noi trattata si mostra particolarmente versatile, è in grado di dare una spiegazione e una descrizione di aspetti della superconduttività che altre teorie, quali quella di London e BCS, non sono in grado di dare. La teoria dei fratelli London non era infatti in grado di determinare l'energia di superficie di un'interfaccia che separa un materiale normale da uno superconduttore, la teoria di Ginzburg-Landau permette invece tale descrizione come conseguenza dell'esistenza delle due lunghezze caratteristiche ξ e λ . L'energia di superficie si rivela determinante nella classificazione dei superconduttori di tipo I e tipo II. La teoria BCS, pur avendo il pregio di essere una descrizione microscopica, a causa del limite superiore che impone alla temperatura critica T_c , non riesce a includere nella sua trattazione la superconduttività nei cuprati, caratterizzati da un'elevata temperatura critica T_c . La teoria di Ginzburg-Landau, sebbene non permetta una descrizione microscopica, tiene conto di tali materiali. Il fatto che essa non faccia riferimento alla trattazione microscopica si rivela talvolta essere un vantaggio, soprattutto nelle situazioni in cui il parametro d'ordine ha variazioni complicate.

Riferimenti bibliografici

- [1] H.K. Onnes, *Proc. R. Netherlands Acad. Arts Sci.* **11**, 168 (1909).
- [2] H.K. Onnes, *Communications from the Physical Laboratory of the University of Leiden*, **29**, 1, (1911).
- [3] W. Meissner, R.Ochsenfeld, *Naturwissenschaften*, **21**, 787 (1933).
- [4] H.London,F.London *Proceedings of the Royal Society A*, **149**, 71 (1935).
- [5] V.L. Ginzburg, L.D. Landau, *Soviet Physics JETP*, **20**, 1064 (1950).
- [6] L.D. Landau, *Physikalische Zeitschrift der Sowjetunion*, **4**, 675 (1933).
- [7] J. Bardeen, L. N. Cooper, J. R. Schrieffer, *Physics Review*, **106**, 162 (1957).
- [8] L.N. Cooper, *Physical Review*, **104(4)**, 11891190, (1956).
- [9] J.G. Bednorz,K.A. Müller, *Zeitschrift für Physik B.* **64(2)**, 189-193, (1986).
- [10] P. Drude, *Annalen der Physik*, **306(3)**, 566, (1900).
- [11] L.P. Gor'kov, *Soviet Physics JETP*, **36(9)**, 1364-1367, (1959).
- [12] A.A. Abrikosov, *Journal of Physics and Chemistry of Solids*, **2(3)**, 199-208, (1957).
- [13] J.F. Annet, *Superconductivity, Superfluids and Condensates*, (Oxford University Press, 2005)
- [14] C. Timm, *Theory of Superconductivity*, Lecture Notes, Dresden (2011).
- [15] C. Kittel, *Introduction to solid State Physics*, 7th Edition, (John Wiley and Sons, 1996).
- [16] A.L. Fetter, J.D. Walecka, *Quantum theory of many-particle system*, (McGraw-Hill, 1971).