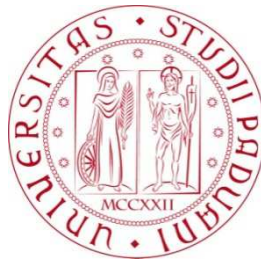


Università degli Studi di Padova
Dipartimento di Scienze Statistiche
Corso di Laurea Magistrale in
Scienze Statistiche



**On the relevance of higher order co-moments
in Portfolio Asset Allocation**

Relatore: Ch.mo Prof. Massimiliano Caporin
Dipartimento di Scienze Economiche

Laureando: Christopher Zuin
Matricola: 1036717

Anno Accademico 2013/2014

Sommario

Introduzione	1
CAPITOLO 1	
Modern Portfolio Theory: media-varianza.....	5
1.1 Teoria dell'Utilità attesa e funzione di Utilità	6
1.1.1 Avversione al rischio.....	8
1.1.2 Funzioni di Utilità notevoli	8
1.2 Modello media-varianza.....	10
1.3 Applicabilità del modello media-varianza	15
CAPITOLO 2	
Estensione del modello media-varianza: 4M	21
2.1 Modello 4M: media - varianza - asimmetria - curtosi.....	23
2.1.1 Definizione dei Co-Momenti	24
2.1.2 Impostazione del problema di ottimo.....	27
CAPITOLO 3	
I Dati	29
3.1 I Dataset	29
3.2 Test di ipotesi	32
3.2.1 Test di Normalità di Jarque e Bera ed Omnibus X^2	32
3.2.2 Test di Normalità di Shapiro-Wilk	33
3.2.3 Test di Normalità di Kolmogorov-Smirnov	33
3.2.4 Test ADF, correlazione seriale ed eteroschedasticità	34
3.3 Analisi dei dataset	35
3.3.1 Dataset DSm, rendimenti a frequenza mensile	36
3.3.2 Dataset DSw, rendimenti a frequenza settimanale	39
3.3.3 Dataset DSd, rendimenti a frequenza giornaliera.....	42
CAPITOLO 4	
Analisi e confronto delle tecniche di allocazione	47
4.1 Analisi	48
4.1.1 Parte I: simulazione in sample su dataset DSm, DSw, Dsd.....	48
4.1.2 Parte II: simulazione in sample su sub campioni	49
4.1.3 Parte III: simulazione out of sample su DSw	49

4.1.4	Valutazione delle performance	51
4.1.5	Algoritmo di ottimizzazione	53
4.2	Risultati parte I	55
4.2.1	Dataset DSm, rendimenti mensili.....	55
4.2.2	Dataset DSw, rendimenti settimanali	60
4.2.3	Dataset Ddw, rendimenti giornalieri.....	64
4.3	Risultati parte II	68
4.3.1	Sub campioni, rendimenti mensili.....	68
4.3.2	Sub campioni, rendimenti settimanali	74
4.3.3	Sub campioni, rendimenti giornalieri.....	80
4.3	Risultati parte III	86
4.3.1	Simulazione Out of Sample: $R_o=2$	87
4.3.2	Simulazione Out of Sample: $R_o=20$	94

CAPITOLO 5

Conclusioni	101
--------------------------	-----

Bibliografia	107
---------------------------	-----

APPENDICE

A.1	Statistiche campionarie multivariate	111
A.2	Simulazione In Sample: power utility.....	113
A.2.1	Dataset DSm, rendimenti mensili	113
A.2.2	Dataset DSw, rendimenti settimanali	116
A.2.3	Dataset DSd, rendimenti giornalieri.....	119
A.3	Parte I: pesi ottimi di portafoglio ed ASR.....	122
A.3.1	Dataset DSm, rendimenti mensili	122
A.3.2	Dataset DSw, rendimenti settimanali	123
A.3.3	Dataset DSd, rendimenti giornalieri.....	124
A.4	Parte II: pesi ottimi di portafoglio ed ASR.....	125
A.4.1	Sub campioni, rendimenti mensili	125
A.4.2	Sub campioni, rendimenti settimanali.....	127
A.4.3	Sub campioni, rendimenti giornalieri	129
A.5	Parte III: rendimenti annui e pesi medi	131
A.5.1	Simulazione Out of Sample: $R_o=2$	131
A.5.2	Simulazione Out of Sample: $R_o=20$	133

A.6 Grafici Momenti e Co-Momenti.....	135
A.6.1 Rendimenti medi.....	135
A.6.2 Varianze e Covarianze.....	136
A.6.2 Asimmetria e Co-Asimmetria.....	137
A.6.3 Curtosi e Co-Curtosi	139

Codice Funzioni Matlab

Funzione "simple_ret()"	143
Funzione "ret_norm_plot()"	143
Funzione "normTest()"	144
Funzione "weightsGraph()"	144
Funzione "seriesMom()"	145
Funzione "portfolioMom()"	145
Funzione "co_moments()"	146
Funzione "co_moments_ext()"	147
Funzione "optimal_weights()"	149
Funzione "full_sample_an()"	152

Introduzione

Il presente lavoro ha come scopo il verificare se l'introduzione di momenti superiori al secondo nel modello di asset allocation utilizzato, porti ad un effettivo miglioramento delle performance del portafoglio. Solitamente, per risolvere il problema dell'allocazione della ricchezza in un portafoglio di titoli rischiosi si utilizza il modello media-varianza, introdotto da Harry Markowitz nel '52. Nella fattispecie, con l'applicazione di tale modello si giunge alla costruzione di portafogli, basandosi esclusivamente sui primi due momenti della distribuzione dei rendimenti dei titoli considerati. Sotto opportune ipotesi enunciate interamente nel primo capitolo, il modello media-varianza produce portafogli ottimali. In particolare, un'ipotesi su cui si basa l'approccio di Markowitz consiste nella normalità della distribuzione dei rendimenti degli asset utilizzati. Il vincolo di normalità viene in seguito rilassato da Chamberlain (1983), il quale dimostra come il modello media-varianza sia applicabile anche in assenza di normalità. Più genericamente, viene richiesta l'ellitticità della distribuzione dei rendimenti, cosicché media e varianza rappresentino statistiche sufficienti. Tali ipotesi, assieme alla necessità di agenti caratterizzati da una funzione di utilità quadratica risultano talvolta troppo stringenti, rendendo l'applicazione del modello di Markowitz sub-ottimale. Vi è infatti una vasta letteratura che dimostra la non normalità della distribuzione dei rendimenti di attività finanziarie. Queste infatti sono spesso caratterizzate da distribuzioni asimmetriche e fortemente leptocurtiche. Tale condizione rappresenta la principale motivazione del presente elaborato, esposto nelle pagine che seguono.

Per l'impostazione del problema di ottimo dell'investitore, si è considerata la metodologia proposta nei lavori di Eric Jondeau, Michael Rockinger (2006) e Warapong Wongwachara (2008). Tutti gli autori sopracitati, risolvono il problema dell'allocazione massimizzando il valore atteso della funzione di utilità dell'agente economico. Si è scelto di operare in modo analogo poiché tale impostazione consente l'introduzione di asimmetria e curtosi nella funzione obiettivo del problema di ottimo, utilizzando dei pesi strettamente connessi alla funzione di utilità. A differenza della più recente tecnica PGP (Polynomial Goal Programming) utilizzata da Lai (1991), Chunchinda *et al.* (1997) e Prakash *et al.* (2003), l'approccio utilizzato consente l'introduzione di momenti di ordine superiore al terzo, semplicemente troncando lo sviluppo in serie di Taylor dell'utilità ad un ordine maggiore. Si ritiene tuttavia inutile utilizzare una funzione obiettivo che incorpori momenti di ordine superiore al quarto, poiché troppo complessi da interpretare. Per la costruzione di portafogli ottimi, si utilizza quindi un modello di asset allocation di tipo four-moments, basando l'allocazione su media, varianza, asimmetria e curtosi dei rendimenti.

Gli asset impiegati nell'analisi sono indici azionari pubblicati da Morgan Stanley Capital International, in particolare si sono utilizzati gli indici "*Europe*", "*Pacific*", "*Norh America*" ed "*Emerging Markets*". Si è scelto di utilizzare degli indici azionari, poiché, a differenza dei singoli titoli, rappresentano l'andamento di interi mercati e sono meno soggetti a forti variazioni di prezzo. Inoltre, in un ottica di Strategic Asset Allocation, si è interessati a capire se l'utilizzo di un modello four-moments apporti dei benefici significativi, rispetto ad un approccio a due momenti. In caso di risposta negativa, non è possibile estendere tale risultato anche all'utilizzo del modello con singoli titoli. A tal proposito, l'efficacia dell'utilizzo di un modello four-moments in presenza di titoli azionari costituisce un possibile sviluppo del presente lavoro di tesi.

Si sono valutate le performance e le differenze delle allocazioni ottenute con modelli media-varianza e four-moments mediante simulazioni in sample, al variare di diversi parametri del problema di ottimo, quali: funzione di utilità

(media-varianza, esponenziale e power utility), frequenza dei rendimenti degli asset (mensile, settimanale, giornaliera), avversione al rischio (si utilizzano 8 differenti valori di avversione assoluta al rischio) e condizioni di mercato (favorevoli e sfavorevoli all'investimento). Si è inoltre costruita una simulazione out of sample su rendimenti settimanali, per stabilire quale fosse la strategia più proficua (utilizzo di modelli a due o quattro momenti) in termini di rendimento.

A differenza da quanto fatto dagli autori citati precedentemente, per la valutazione delle performance di portafoglio, si è impiegato l'Adjusted Sharpe Ratio proposto da Pézier (2004), una variante del ben noto indice di Sharpe che include fattori di penalità per asimmetria negativa ed eccesso di curtosi.

Per la risoluzione del problema di ottimo, si è invece utilizzato un algoritmo di tipo ibrido, scritto appositamente in ambiente Matlab, combinando un algoritmo di tipo deterministico ed uno di tipo genetico.

L'elaborato è organizzato come segue: nel primo capitolo si espone il modello di allocazione proposto da Markowitz, ponendo il focus nei casi in cui tale modello risulta inapplicabile; nel secondo capitolo viene presentato il modello four-moments, come naturale estensione del modello media-varianza; il terzo capitolo riporta le analisi esplorative condotte sui dataset utilizzati nella presente analisi; nel quarto capitolo vengono presentati i risultati ottenuti in ciascuna parte di analisi, mentre nel quinto capitolo vengono espone le conclusioni tratte da tali risultati. Tutte le funzioni scritte e successivamente impiegate per l'elaborazione sono riportate in appendice.

CAPITOLO 1

Modern Portfolio Theory: media-varianza

Abstract

Nel presente capitolo viene spiegata brevemente la metodologia proposta da Markowitz per risolvere il problema dell'asset allocation, considerando un agente economico razionale ed avverso al rischio che investe unicamente in titoli rischiosi. Si pone il focus sulle ipotesi principali sulle quali è basato il modello media-varianza. In particolare vengono espone le principali motivazioni per le quali tale modello risulta inapplicabile.

Introduzione

Ogni agente economico interessato a detenere un portafoglio di assets finanziari, deve affrontare delle scelte durante la fase di investimento, ossia: con che tipologia di asset class lavorare, quali titoli acquistare, che rendimento si vuole ottenere e qual'è il livello di rischio che si è disposti ad accettare. In particolare, vi è un trade-off tra rischio e rendimento atteso di ciascuna attività (titoli maggiormente rischiosi solitamente garantiscono un rendimento più elevato). L'investitore deve quindi decidere come distribuire al meglio la propria

ricchezza, al fine di massimizzare il rendimento del proprio portafoglio e minimizzarne il rischio.

Una prima soluzione a tale problema, venne proposta dall'economista dell'Università di Chicago, Harry Markowitz (*"Portfolio Selection"*, 1952 *Journal of Finance*). Nell'articolo pubblicato da Markowitz, si propose un modello per la costruzione di portafogli di assets, denominato "*modello media-varianza*", che utilizzava i primi due momenti della distribuzione dei rendimenti dei titoli come input, determinando (sotto opportune ipotesi) l'insieme dei portafogli ammissibili.

Nel 1990 Harry Markowitz, assieme a Merton Miller e William Sharpe, vinse il premio Nobel per l'economia, per aver rivoluzionato interamente l'economia finanziaria, gettando le basi della Modern Portfolio Theory (*MPT*). Il modello di Markowitz viene tutt'oggi utilizzato da agenti economici che operano nei mercati finanziari.

1.1 Teoria dell'Utilità attesa e funzione di Utilità

Il processo di costruzione di un portafoglio di assets rischiosi, costringe l'investitore a prendere determinate decisioni in condizioni di incertezza. Non essendo noti infatti i rendimenti futuri di ciascun titolo, anche il rendimento del portafoglio risulta ignoto.

Dalla teoria economica dell'utilità attesa di Von Neumann e Morgenstern (1947), in condizioni di incertezza ciascun agente decide massimizzando il valore atteso della propria funzione di utilità $U(\cdot)$. Questa si presenta come una funzione crescente, a meno di una trasformazione monotona affine¹, che associa a ciascun livello di ricchezza un determinato livello di utilità.

¹ Sia $U(\cdot)$ la funzione di utilità di un agente economico, allora una trasformazione affine del tipo $W(\cdot) = \alpha + \beta U(\cdot)$ rappresenta ancora una funzione di utilità.

In particolare, date due alternative rischiose (ad esempio due portafogli azionari), l'agente economico sceglie l'alternativa che garantisce una maggior utilità attesa, ovvero:

sia $U(\cdot)$ la funzione di utilità dell'agente e siano θ_1 ed θ_2 due progetti rischiosi, allora l'agente preferirà il progetto θ_1 (θ_2) se e solo se

$$E[U(\theta_1)] > E[U(\theta_2)] \quad (E[U(\theta_1)] < E[U(\theta_2)])$$

Ciascun agente è caratterizzato dalla propria funzione di utilità (e dall'avversione al rischio), che ne determina il comportamento in situazioni rischiose. Nella fattispecie, un individuo si definisce avverso al rischio se preferisce ricevere con certezza una quantità monetaria pari al valore atteso di una qualsiasi lotteria, piuttosto che prendervi parte. Formalmente:

sia $U(\cdot)$ la funzione di utilità dell'agente e θ una qualsiasi lotteria (o variabile aleatoria), è presente avversione al rischio se $U(E[\theta]) \geq E[U(\theta)]$. In altre parole, dalla disuguaglianza di Jensen², l'agente è avverso al rischio se la sua funzione di utilità è concava.

Particolarmente importante è il concetto di "*certo equivalente*" (CE), definito come la quantità di ricchezza che determina una utilità pari a quella percepita partecipando alla lotteria, quindi:

$$U(CE_\theta) = E[U(\theta)] \tag{1.1}$$

Per ogni agente avverso al rischio, il certo equivalente è sempre minore o uguale al valore atteso della lotteria θ , infatti:

$$U(CE_\theta) = E[U(\theta)] \leq U(E[\theta])$$

L'avversione al rischio di ciascun agente economico è quindi, una quantità strettamente connessa alla funzione di utilità dello stesso. E' possibile costruire

² Sia $g(\cdot)$ una qualsiasi funzione concava, allora $E[g(x)] \leq g(E[x])$, $\forall x \in R$.

degli indicatori che quantifichino efficacemente l'avversione al rischio, a partire dalla funzione di utilità.

1.1.1 Avversione al rischio

Come precedentemente affermato, l'avversione al rischio implica la concavità della funzione di utilità. L'indicatore maggiormente diffuso per misurare l'avversione al rischio è l'indice di avversione assoluta (R_a) al rischio di Arrow-Pratt definito come segue:

$$R_a = - \frac{\frac{\partial U(W)}{\partial W^2}}{\frac{\partial U(W)}{\partial W}}$$

dove W rappresenta la quantità di ricchezza dell'agente economico.

Per funzioni di utilità concave, la derivata seconda a numeratore è una quantità negativa, di conseguenza l'indicatore R_a risulta essere positivo, indicando la presenza di avversione. In caso di funzione di utilità convessa, l'indicatore risulta negativo, indicando un operatore amante del rischio. L'indicatore sopracitato costituisce una misura assoluta di avversione al rischio, tuttavia, due agenti economici provvisti di differenti dotazioni di ricchezza W , posso dimostrare differenti livelli di avversione. Tale differenza potrebbe dipendere unicamente dalla differenza di dotazione, anziché dalle attitudini al rischio. Per ovviare a tale problema viene utilizzato l'indice di avversione al rischio relativa (R_r), ottenuto come segue:

$$R_r = W * R_a$$

1.1.2 Funzioni di Utilità notevoli

In base agli indicatori di rischio definiti nel §1.1, si possono distinguere alcune tipologie di funzioni di utilità notevoli:

- CARA (*Constant Absolute Risk Aversion*), funzione di utilità caratterizzata da una costante avversione al rischio assoluta. Un esempio di utilità appartenente alla classe CARA è la funzione di utilità esponenziale, definita come:

$$U(W) = -\exp(-\gamma W) \quad (1.2)$$

con $R_a = \gamma$ costante, $\forall W$.

- CRRA (*Constant Relative Risk Aversion*), funzione di utilità caratterizzata da una costante avversione al rischio relativa. Un esempio di utilità appartenente alla classe CRRA è la power utility, definita come:

$$U(\omega) = \begin{cases} \frac{W^{1-\rho}}{1-\rho} & \text{se } \rho > 0 \text{ e } \rho \neq 1 \\ \ln(W) & \text{se } \rho = 1 \end{cases} \quad (1.3)$$

con $R_r = \rho$, $\forall W$.

- HARA (*Hyperbolic Absolute Risk Aversion*), funzione di utilità caratterizzata da avversione al rischio assoluta di tipo iperbolico. Si riporta in seguito un esempio di funzione di utilità appartenente alla classe HARA:

$$U(W) = \frac{1-\gamma}{\gamma} \left[\frac{aW}{1-\gamma} + b \right]^\gamma \quad (1.4)$$

con $b > 0$ ed indice di avversione al rischio assoluto pari a:

$$R_a = a \left[\frac{aW}{1-\gamma} + b \right]^{-1} \forall W$$

1.2 Modello media-varianza

L'investitore che utilizza il modello (di tipo single period) media-varianza per costruire il proprio portafoglio, alloca la propria dotazione di ricchezza iniziale W_t su un numero finito " n " di assets (che possono non essere della stessa tipologia). Al termine dell'orizzonte temporale stabilito, il portafoglio avrà generato un rendimento casuale r_p . Formalmente:

siano a_1, a_2, \dots, a_n gli n strumenti finanziari scelti dall'investitore per costruire il portafoglio; sia W_0 la dotazione disponibile ad inizio periodo, allora la ricchezza al termine dell'orizzonte temporale d'investimento è pari a:

$$W_T = W_0(1 + r_p)$$

dove r_p è il rendimento (aleatorio) del portafoglio. Quest'ultimo si ottiene come media ponderata dei rendimenti $r_{i, i=1..n}$ dei singoli strumenti³ $a_{i, i=1..n}$ quindi:

$$r_p = \sum_{i=1}^n \omega_i r_i$$

o equivalentemente in forma matriciale

$$r_p = \omega^T R$$

dove $R \in \mathbb{R}^n$ è il vettore aleatorio contenente i rendimenti degli n assets ed $\omega \in \mathbb{R}^n$ è il vettore dei pesi del portafoglio.

Come precedentemente affermato, in condizioni di incertezza ciascun agente economico decide massimizzando il valore atteso della propria funzione di utilità. Tuttavia la selezione del vettore ω dei pesi da assegnare ai singoli asset, richiede la risoluzione di un problema di programmazione stocastica non lineare che può risultare non banale, poiché:

³ Asserzione valida unicamente considerando rendimenti percentuali. Lavorando con rendimenti logaritmici, il rendimento del portafoglio non è ottenibile come media ponderata dei log-rendimenti in quanto il logaritmo di una sommatoria differisce dalla sommatoria dei logaritmi.

$$E[U(W_T)] = \int U(W_T) dF(W_T)$$

dove $F(W_T)$ è la funzione⁴ di ripartizione della ricchezza futura (aleatoria), strettamente connessa ai pesi, ancora incogniti, del portafoglio.

A tal proposito, Markowitz propose di approssimare l'utilità attesa $E[U(W_T)]$ con una funzione dipendente dai primi due momenti della distribuzione dei rendimenti dei titoli rischiosi. Per giungere a tale approssimazione si utilizza uno sviluppo in serie di Taylor⁵ del secondo ordine, centrato su $E[W_T]$, valore atteso della ricchezza al termine dell'orizzonte d'investimento. Quest'ultima quantità è pari a:

$$E[W_T] = E[W_0(1 + r_p)] = W_0(1 + E[r_p])$$

quindi ponendo la dotazione W_0 pari ad 1 e tralasciando il termine additivo, è possibile utilizzare (senza perdita di generalità) lo sviluppo in serie di Taylor dell'utilità, centrata sul rendimento atteso del portafoglio $E[r_p]$. Considerando il valore atteso di tale quantità, si ottiene:

$$E[U(r_p)] \cong U(E[r_p]) + \frac{1}{2} U''(E[r_p]) E[(r_p - E[r_p])^2] + E[R_3] \quad (1.5)$$

dove R_3 è il resto dello sviluppo di ordine 2. Tralasciando il termine di resto, dopo opportune semplificazioni si ottiene infine l'approssimazione della funzione di utilità attesa, proposta da Markowitz:

$$E[U(r_p)] \cong U(E[r_p]) - \frac{R_a}{2} Var[r_p] \quad (1.6)$$

Si può facilmente notare come l'utilità attesa dipenda unicamente dai primi due momenti della distribuzione dei rendimenti del portafoglio (da qui il nome "*funzione di utilità media-varianza*") e dall'avversione assoluta al rischio, precedentemente definita. Utilizzando tale approssimazione, che diviene esatta

⁴ Per semplificare la notazione non sono stati inseriti gli estremi di integrazione, tuttavia $U(W_T)$ va integrata su tutto il dominio di W_T

⁵ Lo sviluppo in serie di Taylor, centrato nel punto x_0 di una funzione $f(x)$ infinitamente derivabile, è dato da: $\sum_{k=0}^{+\infty} \frac{f^{(k)}(x_0)(x-x_0)^k}{k!}$ dove $f^{(k)}$ è la derivata di $f(x)$ di ordine k

sotto opportune ipotesi⁶, il problema dell'allocazione della ricchezza su n titoli rischiosi si semplifica notevolmente.

Considerando infatti $R \sim i.i.d(\mu, \Sigma)$, i momenti utilizzati dalla funzione di utilità media-varianza diventano:

$$E[r_p] = \omega^T \mu = \mu_p$$

$$Var[r_p] = E[(r_p - \mu_p)^2] = \omega^T \Sigma \omega = \sigma_p^2$$

con $\mu \in \mathbb{R}^n$ vettore dei valori attesi e Σ matrice (definita positiva) di varianza e covarianza dei rendimenti degli n asset. La soluzione al problema dell'allocazione si ottiene quindi risolvendo il seguente problema di massimo vincolato:

$$Max_{\omega} E[r_p] - \frac{R_a}{2} Var[r_p] \leftrightarrow Max_{\omega} \omega^T \mu - \frac{R_a}{2} \omega^T \Sigma \omega$$

$$s. t. \omega^T I = 1$$

$$r_p = \omega^T R$$

con I vettore di 1, di lunghezza n .

Al variare del coefficiente di avversione R_a si ottengono tutti i possibili portafogli raggiungibili dall'agente. Tuttavia, non tutte le soluzioni individuate risultano efficienti in quanto vi sono portafogli che, a parità di rischio, offrono un rendimento maggiore e viceversa. L'insieme dei portafogli efficienti si ottiene dal seguente problema di ottimo:

$$Max_{\omega} \omega^T \mu$$

$$s. t. \omega^T I = 1$$

$$\omega^T \Sigma \omega = \sigma_p^2$$

⁶ La metodologia proposta da Markowitz richiede che la distribuzione dei rendimenti dei titoli utilizzati sia ellittica (ad esempio Normale) e la funzione di utilità quadratica. Con tale tipologia di utilità, l'espansione in serie di Taylor è priva di resto e l'approssimazione diviene esatta.

o alternativamente:

$$\text{Min}_{\omega} \omega^T \Sigma \omega$$

$$\text{s. t. } \omega^T I = 1$$

$$\omega^T \mu = \mu_p$$

Nel primo caso, fissato un livello di rischio⁷ σ_p^2 , si ricerca il vettore ottimo di pesi ω che massimizzi il rendimento atteso del portafoglio. La seconda soluzione è speculare alla prima poiché, fissato un livello di rendimento μ_p , si cerca il vettore ottimale ω che minimizzi il rischio del portafoglio. Le due specificazioni del problema conducono alla medesima soluzione.

Utilizzando la seconda impostazione, si risolve il problema di ottimo.

Si costruisce quindi il Lagrangiano e le rispettive FOCs (First Order Conditions):

$$\mathcal{L} = \frac{1}{2} \omega^T \Sigma \omega - \gamma_1 (\omega^T \mu - \mu_p) - \gamma_2 (\omega^T I - 1)$$

dove γ_1 e γ_2 sono i moltiplicatori rispettivamente di rendimento e budget.

Le $n+2$ FOCs hanno la seguente forma:

$$\left\{ \begin{array}{l} \frac{\partial \mathcal{L}}{\partial \omega^T} = \Sigma \omega - \gamma_1 \mu - \gamma_2 I = 0 \\ \frac{\partial \mathcal{L}}{\partial \gamma_1} = \omega^T \mu - \mu_p = 0 \\ \frac{\partial \mathcal{L}}{\partial \gamma_2} = \omega^T I - 1 = 0 \end{array} \right.$$

⁷ Essendo la varianza una misura di dispersione del rendimento di un asset finanziario, è utilizzata come un'efficace misura di rischio. In alternativa è possibile utilizzare la deviazione standard.

Per la risoluzione del sistema delle condizioni del primo ordine, risulta particolarmente utile definire le seguenti quantità scalari:

$$A = \mu^T \Sigma^{-1} \mu$$

$$B = \mu^T \Sigma^{-1} I$$

$$C = I^T \Sigma^{-1} I$$

$$\Delta = AC - B^2$$

Utilizzando le quantità sopra definite, si ottengono le seguenti soluzioni:

$$\gamma_1 = \frac{C\mu_p - B}{\Delta} \quad \gamma_2 = \frac{A - B\mu_p}{\Delta}$$

per i moltiplicatori di Lagrange, mentre il vettore ottimo di pesi è dato da:

$$\hat{\omega} = \frac{1}{\Delta} [A\Sigma^{-1}I - B\Sigma^{-1}\mu + (C\Sigma^{-1}\mu - B\Sigma^{-1}I)\mu_p] \quad (1.7)$$

Il portafoglio costruito utilizzando i pesi ottimi del vettore $\hat{\omega}$ avrà quindi momento secondo pari a

$$\sigma_p^2 = \hat{\omega}^T \Sigma \hat{\omega} = \frac{A - 2B\mu_p + C\mu_p^2}{\Delta}$$

quindi, vista come una funzione del rendimento atteso μ_p , la varianza del portafoglio ottimo è una parabola sul piano (μ, σ^2) . Considerando lo scarto quadratico medio σ_p , si ottiene un ramo di iperbole nel piano (μ, σ) , denominato "*frontiera efficiente*". Questa è il luogo di tutti i portafogli aventi la minima varianza, per ogni livello di rendimento atteso. Ogni investitore avente una funzione di utilità di tipo "media-varianza", individua il portafoglio ottimale tra quelli appartenenti alla frontiera efficiente, in base alla propria avversione al rischio.

1.3 Applicabilità del modello media-varianza

Il modello di asset allocation proposto da Markowitz richiede che vengano soddisfatte determinate ipotesi, che possono risultare troppo restrittive e talvolta inadeguate.

Particolarmente rilevanti sono le seguenti ipotesi sottese dal modello:

- distribuzione Normale (o in generale ellittica) dei rendimenti
- funzione di utilità quadratica.

L'ipotesi di Normalità rappresenta una forzatura nella maggior parte dei casi poiché le distribuzioni dei rendimenti di asset finanziari sono spesso caratterizzate da asimmetria e leptocurtosi (Peiro A., "*Skewness in Financial Returns*", *Journal of Banking and Finance* 23 (6), 1999), di conseguenza la distribuzione Normale non si adatta in modo soddisfacente ai dati.

Va infatti considerata l'elevata frequenza, con la quale si manifestano "*extreme returns*" soprattutto in fase di "turbolenza" nei mercati. Tale fenomeno risulta fortemente anomalo in presenza di mercati Normali (*Mandelbrot, 1963; Fama, 1963; Blattberg and Gonedes, 1974; Kon, 1984; Longin, 1996*).

A titolo d'esempio si riportano i grafici a pagina seguente, raffiguranti le stime non parametriche della densità della distribuzione dei rendimenti degli indici azionari *Eurostoxx 50* e *S&P500* (osservazioni mensili, periodo 2003/01 - 2013/07), affiancate alla densità della distribuzione Normale, avente medesime media e varianza. I grafici sono ottenuti con il codice Matlab riportato in appendice (funzione "*ret_norm_plot*").

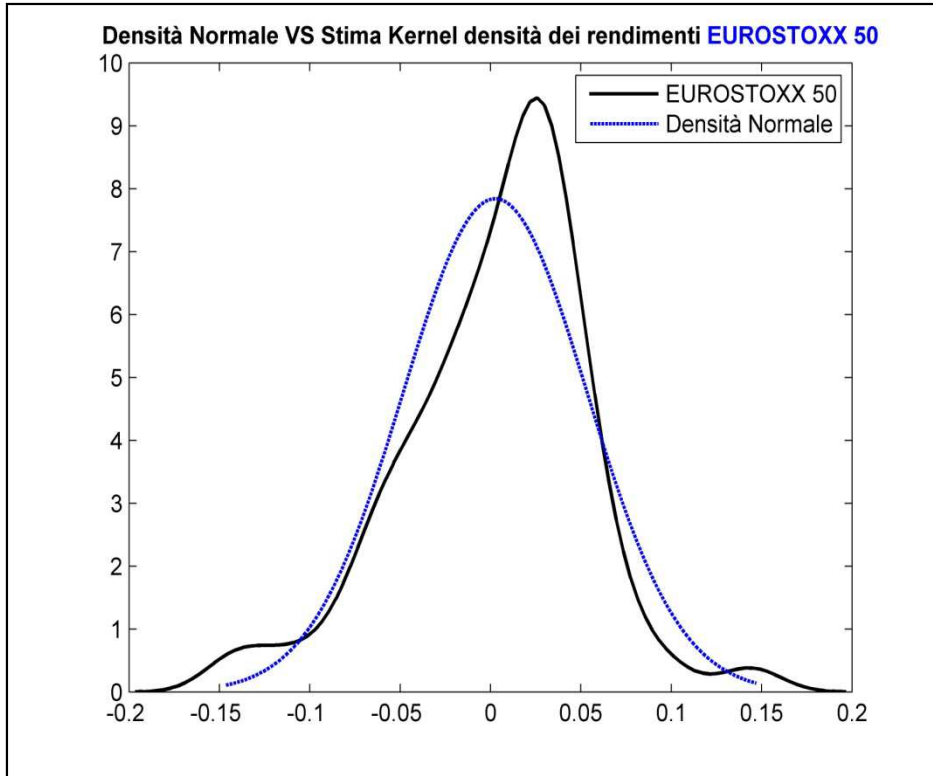


Fig. 1.1

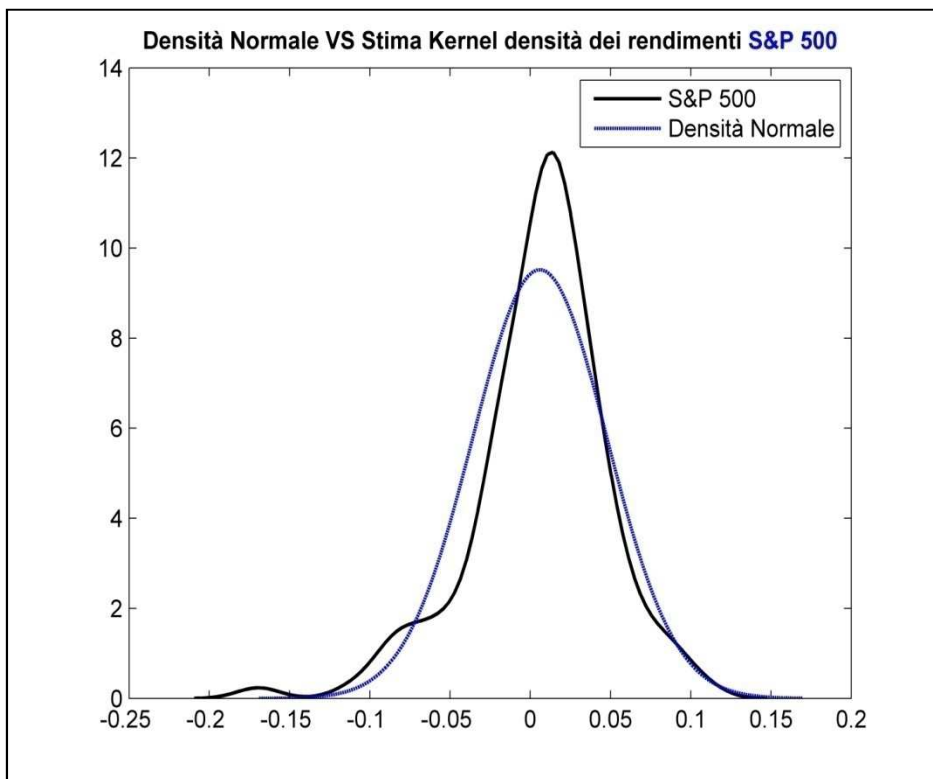


Fig. 1.2

Si nota immediatamente come la stima della distribuzione dei rendimenti mensili di entrambi gli indici, differisca in modo considerevole dalla distribuzione Normale. E' evidente infatti la presenza di leptocurtosi ed asimmetria, tipiche dei rendimenti di strumenti finanziari.

Nonostante la violazione dell'ipotesi di Normalità, è stato dimostrato (*Chamberlain*, 1983) che se i rendimenti seguono una distribuzione ellittica, l'approccio media-varianza risulta comunque soddisfacente. Tuttavia l'utilizzo di una funzione di utilità quadratica per descrivere il sistema di preferenze degli investitori, può risultare inappropriato. Si considera infatti un semplice esempio di utilità quadratica, del tipo:

$$U(W) = W - \frac{\tau}{2} W^2 \quad (1.8)$$

con $\tau > 0$.

Con una simile funzione di utilità, l'espansione in serie di Taylor del secondo ordine non da resto, quindi l'approssimazione dell'utilità attesa diviene esatta. Ciò nonostante emergono due importanti complicazioni:

- graficamente la 1.8 rappresenta una parabola con un punto di massimo in $W = \frac{1}{\tau}$ dopo il quale l'utilità marginale della ricchezza diviene negativa. Tale condizione implica una diminuzione dell'utilità dell'agente all'aumentare della ricchezza, contraddicendo l'assioma di "non sazietà", secondo il quale ciascun individuo preferisce detenere una ricchezza sempre crescente
- la funzione di utilità descritta dalla 1.8 implica un coefficiente crescente di avversione assoluta al rischio, dato da:

$$R_a(W) = \frac{\tau}{1 - \tau W}$$

Derivando rispetto alla ricchezza W , si ottiene:

$$\frac{\partial R_a(W)}{\partial W} = \frac{\tau^2}{(1 - \tau W)^2} > 0 \quad \forall W$$

di conseguenza i titoli più rischiosi vengono considerati di scarso interesse, sebbene offrano un rendimento maggiore. Intuitivamente ci si aspetta che un agente con una disponibilità monetaria elevata sia più propenso a correre dei rischi.

Utilizzando la funzione di utilità media-varianza, implicitamente si suppone che gli agenti economici siano interessati unicamente ai primi due momenti della distribuzione dei rendimenti dei titoli. Nella fattispecie, un investitore con funzione di utilità alla Markowitz è interessato ad ottenere il massimo rendimento da ogni investimento, minimizzando il rischio. Tuttavia, se la funzione di utilità $U(W)$ non è quadratica ma di ordine superiore e la distribuzione dei rendimenti è non ellittica, è necessario introdurre nell'analisi momenti di ordine superiore al secondo.

In particolare, uno studio sviluppato da Kraus e Litzenberger (Kraus and Litzenberger, *"Skewness Preference and the Valuation of Risk Assets"*, 1976) ha dimostrato una preferenza positiva per il momento terzo, evidenziando come gli agenti economici prediligano titoli aventi rendimenti con distribuzione caratterizzata da asimmetria positiva.

Successivamente è stato dimostrato che (Scott R. and Hovarth P., *"On The Direction of Preference for Moments of Higher Order Than The Variance"*, 1980), se un agente è avverso al rischio e possiede utilità marginale positiva con preferenze sui momenti strettamente consistenti⁸, allora:

⁸ Un agente dimostra preferenza strettamente consistente per il momento n -esimo se:

$U^{(n)}(W) > 0 \quad \forall W$,

$U^{(n)} = 0 \quad \forall W$ oppure

$U^{(n)}(W) < 0 \quad \forall W$, dove $U^{(n)}$ è la derivata n -esima della funzione di utilità $U(W)$.

$$U^{(i)}(W) > 0 \quad \forall W \text{ se } i \text{ è dispari}$$

$$U^{(i)}(W) < 0 \quad \forall W \text{ se } i \text{ è pari}$$

con $U^{(i)}$ derivata i -esima della funzione di utilità $U(W)$.

Di conseguenza, considerando momenti fino al quarto ordine, ciascun investitore (avente le caratteristiche sopracitate) predilige valori positivi per media ed asimmetria, ed esibisce avversione verso valori positivi di varianza e curtosi.

In generale, l'inclusione di momenti superiori migliora l'approssimazione dell'utilità attesa se:

$$\frac{U^{2n+1}(E[W_T])}{2n+1} E[(W_T - E[W_T])^{2n+1}] < -\frac{U^{2n+2}(E[W_T])}{2n+2} E[(W_T - E[W_T])^{2n+2}]$$

$\forall n \in \mathbb{N}^*$.

Un ulteriore ammonimento nell'utilizzo del modello media-varianza deriva dall'instabilità dei risultati, poiché piccoli spostamenti lungo la frontiera efficiente, possono provocare notevoli variazioni nella composizione del portafoglio, talvolta non praticabili nella realtà.

In conclusione il modello proposto da Markowitz va utilizzato con molta attenzione, soprattutto quando vengono violate le ipotesi sulle quali fa fondamento. In tal caso può comunque essere utilizzato come strumento descrittivo.

CAPITOLO 2

Estensione del modello media-varianza: 4M

Abstract

Nel presente capitolo viene estesa la metodologia di asset allocation proposta da Markowitz, introducendo i momenti terzo e quarto nell'approssimazione dell'utilità attesa. Si considera un portafoglio statico, con divieto di *short selling*, ipotesi corrispondente all'applicazione di una strategia "*Buy and Hold*". Per continuità si mantiene la notazione definita nel primo capitolo.

Introduzione

Si considera ancora una volta il problema dell'investitore razionale ed avverso al rischio, che deve allocare la propria dotazione di ricchezza su n assets. Come affermato nel capitolo 1, ogni agente prende decisioni in condizioni di incertezza, massimizzando la propria utilità attesa $E[U(W_T)]$. La quantità W_T rappresenta la ricchezza di fine periodo, funzione dei rendimenti aleatori degli n titoli considerati. Il problema dell'allocazione si traduce nel seguente problema di massimizzazione stocastica⁹:

$$\text{Max}_{\omega} E[U(W_T)] = E[U(1 + \omega^T R)] = \int \dots \int U(1 + \omega^T R) dF(R)$$

$$\text{s. t. } \begin{cases} \omega^T I = 1 \\ \omega_i > 0 \quad \forall i = 1..n \end{cases}$$

⁹ Come nel precedente capitolo, si assume che la dotazione iniziale W_0 dell'agente sia pari ad 1.

dove $F(\mathbf{R})$ è la funzione di ripartizione del vettore dei rendimenti aleatori \mathbf{R} .

Assumendo una particolare distribuzione di probabilità per il vettore \mathbf{R} , il precedente problema di massimo vincolato non ha (generalmente) una soluzione in forma chiusa. In tal caso il vettore di pesi ottimi $\hat{\omega}$ si ottiene applicando metodi Bootstrap e simulazioni Monte-Carlo. Tuttavia, utilizzare metodi di integrazione numerica per risolvere il problema di ottimo, diviene complicato quando il numero di titoli considerati è maggiore di 3.

Senza introdurre assunzioni parametriche sulla distribuzione dei rendimenti, si utilizza un'espansione in serie di Taylor dell'utilità, considerandone successivamente il valore atteso, come fatto per la derivazione del modello media-varianza.

In particolare, considerando il valore atteso dell'espansione dell'utilità, centrata sulla ricchezza attesa $E[W_T]$, si ottiene:

$$E[U(W_T)] = \sum_{i=0}^{\infty} \frac{U^{(i)}(E[W_T])}{i!} E[(W_T - E[W_T])^i] \quad (2.1)$$

Si nota quindi che l'utilità attesa dell'agente, dipende direttamente da tutti i momenti centrati della distribuzione della ricchezza di fine periodo.

La regione di convergenza della serie 2.1 dipende dal tipo di funzione di utilità impiegata (Loist, 1976; Lhabitant, 1998). Nello specifico, la funzione di utilità esponenziale (si veda 1.2) o polinomiale risulta convergente per ogni W , mentre per la power utility (si veda 1.3), il range di convergenza è limitato a $[0, 2E[W_T]]$. L'intervallo di convergenza della power utility non rappresenta una forte limitazione, poiché la sua ampiezza è sufficientemente elevata, se si considerano titoli azionari ed obbligazionari; rappresenta invece un ostacolo lavorando con opzioni e futures, a causa dell'effetto di leverage.

L'espansione di ordine infinito non è adatta allo studio in questione, data l'impossibilità di implementazione pratica. Si considera quindi la serie troncata ad un generico valore di soglia m .

In tal caso, il modello media-varianza proposto da Markowitz si ottiene troncando la 2.1 al secondo ordine, con $m=2$ (si veda 1.5).

2.1 Modello 4M: media - varianza - asimmetria - curtosi

Considerando lo sviluppo 2.1, troncato al quarto ordine e privo del termine di resto $E[R_5]$ ¹⁰, si ottiene:

$$\begin{aligned}
 E[U(W_T)] &\cong U(E[W_T]) + U^{(1)}(E[W_T])E[W_T - E[W_T]] \\
 &+ \frac{1}{2}U^{(2)}(E[W_T])E[(W_T - E[W_T])^2] \\
 &+ \frac{1}{3!}U^{(3)}(E[W_T])E[(W_T - E[W_T])^3] \\
 &+ \frac{1}{4!}U^{(4)}(E[W_T])E[(W_T - E[W_T])^4]
 \end{aligned}
 \tag{2.2}$$

Si può facilmente notare come l'utilità attesa, in questo caso, dipenda dai primi 4 momenti centrali (non standardizzati) della distribuzione di W_T , dove il generico momento i -esimo viene pesato tramite il fattore di ponderazione:

$$\frac{1}{i!}U^{(i)}(E[W_T])$$

Si definiscono i momenti terzo (asimmetria) e quarto (curtosi) del rendimento del portafoglio al termine dell'orizzonte d'investimento¹¹:

$$\begin{aligned}
 s_p^3 &= E[(W_T - W_T)^3] = E[(r_p - \mu_p)^3] \\
 k_p^4 &= E[(W_T - W_T)^4] = E[(r_p - \mu_p)^4]
 \end{aligned}
 \tag{2.3}$$

¹⁰ Troncando la 2.1 al quarto ordine, il termine di resto di lagrange è pari a:

$E[R_5] = E\left[\frac{U^{(5)}(\xi)}{5!}[W_T - E[W_T]]^5\right]$, dove $\xi \in]W_T, E[W_T][$ se $W_T < E[W_T]$, o $\xi \in]E[W_T], W_T[$ se $W_T > E[W_T]$

¹¹ I primi due momenti sono definiti nel §1.2

Tali momenti centrali non standardizzati, differiscono dalla classica definizione per un fattore moltiplicativo. Tuttavia, per ricondursi all'usuale forma di asimmetria e curtosi, è sufficiente premoltiplicare le precedenti quantità per σ_p^{-3} e σ_p^{-4} rispettivamente.

Utilizzando le definizioni 2.3, è possibile riscrivere la 2.2 come segue:

$$E[U(W_T)] \cong U(E[W_T]) + \frac{1}{2}U^{(2)}(E[W_T])\sigma_p^2 + \frac{1}{3!}U^{(3)}(E[W_T])s_p^3 + \frac{1}{4!}U^{(4)}(E[W_T])k_p^4 \quad (2.4)$$

La massimizzazione della 2.4 rispetto al vettore di pesi ω , porta all'identificazione del portafoglio ottimale, secondo l'approccio four-moments (4M).

2.1.1 Definizione dei Co-Momenti

L'utilizzo dei co-momenti terzo e quarto, assume una notevole importanza nel risk management e nel portfolio management in particolare. La co-asimmetria fornisce una misura della simmetria della distribuzione di probabilità dei rendimenti di un titolo, rispetto alle distribuzioni dei rimanenti titoli in portafoglio.

La co-curtosi invece, misura la massa di probabilità concentrata sulle code della distribuzione dei rendimenti di un titolo, rispetto alle distribuzioni degli altri assets. I due co-momenti in questione risultano particolarmente importanti, poichè inserire in un portafoglio un asset con co-asimmetria (co-curtosi) elevata, può provocare un aumento dell'asimmetria (curtosi) del portafoglio risultante.

Si considera la matrice di co-asimmetria (coskewness) degli n titoli rischiosi, di dimensioni nxn^2 , definita come segue:

$$\mathcal{M}_3 = E[(R - \mu)(R - \mu)^T \otimes (R - \mu)^T] = [\mathcal{s}_{ijk}]$$

dove \otimes è il prodotto di Kronecker, ed il generico elemento \mathcal{s}_{ijk} è pari a:

$$\mathcal{s}_{ijk} = E[(R_i - \mu_i)(R_j - \mu_j)(R_k - \mu_k)]_{i,j,k=1\dots n}$$

A titolo d'esempio si riporta la matrice (a blocchi) di coskewness costruita considerando 4 titoli:

$$\begin{aligned} \mathcal{M}_3 &= \begin{bmatrix} [\mathcal{s}_{111} & \cdots & \mathcal{s}_{114}] & [\mathcal{s}_{211} & \cdots & \mathcal{s}_{214}] & [\mathcal{s}_{311} & \cdots & \mathcal{s}_{314}] & [\mathcal{s}_{411} & \cdots & \mathcal{s}_{414}] \\ \vdots & \ddots & \vdots & \vdots & \ddots & \vdots & \vdots & \ddots & \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ [\mathcal{s}_{141} & \cdots & \mathcal{s}_{144}] & [\mathcal{s}_{241} & \cdots & \mathcal{s}_{244}] & [\mathcal{s}_{341} & \cdots & \mathcal{s}_{344}] & [\mathcal{s}_{441} & \cdots & \mathcal{s}_{444}] \end{bmatrix} \\ &= [S_{1jk} \mid S_{2jk} \mid S_{3jk} \mid S_{4jk}] \end{aligned}$$

nella quale ciascun blocco S_{ijk} è una matrice di dimensioni 4x4.

Analogamente si definisce la matrice di co-curtosi (cokurtosis), di dimensione $n \times n^3$:

$$\mathcal{M}_4 = E[(R - \mu)(R - \mu)^T \otimes (R - \mu)^T \otimes (R - \mu)^T] = [\mathcal{k}_{ijkl}]$$

con elemento generico \mathcal{k}_{ijkl} definito come segue:

$$\mathcal{k}_{ijkl} = E[(R_i - \mu_i)(R_j - \mu_j)(R_k - \mu_k)(R_l - \mu_l)]_{i,j,k,l=1\dots n}$$

Come per la matrice di varianza e covarianza, anche le matrici di co-asimmetria e co-curtosi godono di una "certa simmetria", infatti non tutti gli elementi matriciali devono essere calcolati. Nella fattispecie, per le matrici di co-skewness e co-kurtosis, vanno calcolati rispettivamente $\frac{n(n+1)(n+2)}{6}$ ed $\frac{n(n+1)(n+2)(n+3)}{24}$ differenti elementi. A tal proposito, si è realizzata una funzione in Matlab che estragga gli elementi non ripetuti dalle matrici di coskewness e cokurtosis (funzione `co_moments_ext`).

I momenti del portafoglio definiti dalla 2.3, possono essere riscritti convenientemente in funzione dei pesi dei singoli titoli, ottenendo quanto segue¹²:

$$\begin{aligned}
\mu_p &= \omega^T \mu \\
\sigma_p^2 &= \omega^T \mathcal{M}_2 \omega \\
s_p^3 &= \omega^T \mathcal{M}_3 (\omega \otimes \omega) \\
K_p^4 &= \omega^T \mathcal{M}_4 (\omega \otimes \omega \otimes \omega)
\end{aligned} \tag{2.5}$$

La notazione 2.5 rende agevole l'operazione di costruzione delle condizioni del primo ordine, necessarie per la risoluzione del problema di ottimo. In particolare, si riportano le derivate delle quantità 2.5, rispetto al vettore dei pesi ω :

$$\begin{aligned}
\frac{\partial \mu_p}{\partial \omega} &= \mu \\
\frac{\partial \sigma_p^2}{\partial \omega} &= 2\mathcal{M}_2 \omega \\
\frac{\partial s_p^3}{\partial \omega} &= 3\mathcal{M}_3 (\omega \otimes \omega) \\
\frac{\partial K_p^4}{\partial \omega} &= 4\mathcal{M}_4 (\omega \otimes \omega \otimes \omega)
\end{aligned} \tag{2.6}$$

In ogni caso è necessaria la conoscenza del vettore dei rendimenti attesi, per il calcolo dei momenti di ordine superiore. Solitamente, si trattano le stime campionarie come veri valori dei parametri. In alternativa, è possibile costruire dei modelli parametrici che catturino l'andamento delle serie dei rendimenti, riuscendo a stimarli consistentemente.

¹² Si riportano per completezza anche i primi due momenti. In particolare $\Sigma = \mathcal{M}_2$

2.1.2 Impostazione del problema di ottimo

Si considerano le due differenti tipologie di funzioni di utilità riportate nel primo capitolo e definite dalla 1.2 ed 1.3.

Utilizzando la 2.4 si costruiscono le funzioni obiettivo da massimizzare per ottenere il vettore ottimo di pesi $\hat{\omega}$; in particolare, per la funzione di utilità esponenziale, appartenente alla classe CARA, si ottiene:

$$E[U(W_T)] \cong -\exp\{-\gamma\mu_p\} \left[1 + \frac{\gamma^2}{2} \sigma_p^2 - \frac{\gamma^3}{3!} s_p^3 + \frac{\gamma^4}{4!} k_p^4 \right] \quad (2.7)$$

Utilizzando le notazioni definite nella 2.6, si costruiscono le condizioni del primo ordine per la risoluzione del problema di massimo vincolato:

$$\begin{aligned} \frac{\partial E[U(W_T)]}{\partial \omega} = 0 &\leftrightarrow \mu \left[1 + \frac{\gamma^2}{2} \omega^T \mathcal{M}_2 \omega - \frac{\gamma^3}{3!} 3\mathcal{M}_3(\omega \otimes \omega) + \frac{\gamma^4}{4!} \omega^T \mathcal{M}_4(\omega \otimes \omega \otimes \omega) \right] \\ &= \left[\gamma \mathcal{M}_2 \omega - \frac{\gamma^2}{2} \mathcal{M}_3(\omega \otimes \omega) + \frac{\gamma^3}{6} \mathcal{M}_4(\omega \otimes \omega \otimes \omega) \right] \end{aligned} \quad (2.8)$$

Considerando invece la funzione di utilità definita dalla 1.3, appartenente alla classe CRRA, la funzione obiettivo risulta pari a:

$$\begin{aligned} E[U(W_T)] \cong &\frac{(1 + \mu_p)^{(1-\rho)}}{(1 - \rho)} - \frac{\rho}{2} (1 + \mu_p)^{-(\rho+1)} \sigma_p^2 + \frac{\rho(\rho + 1)}{3!} (1 + \mu_p)^{-(\rho+2)} s_p^3 \\ &- \frac{\rho(\rho + 1)(\rho + 2)}{4!} (1 + \mu_p)^{-(\rho+3)} k_p^4 \end{aligned}$$

se $\rho > 0$ e $\rho \neq 1$, altrimenti:

$$E[U(W_T)] \cong \ln(1 + \mu_p) - \frac{1}{2} (1 + \mu_p)^{-2} \sigma_p^2 + \frac{2}{3!} (1 + \mu_p)^{-3} s_p^3 - \frac{6}{4!} (1 + \mu_p)^{-4} k_p^4$$

se $\rho = 1$. (2.9)

Per entrambe le tipologie di funzioni di utilità, il problema dell'asset allocation si traduce nel seguente problema di massimo vincolato:

$$\begin{aligned} & \text{Max}_{\omega} E[U(W_T)] \\ & \text{s. t.} \begin{cases} \omega^T I = 1 \\ \omega_i > 0 \quad \forall i = 1..n \end{cases} \end{aligned} \quad (2.10)$$

Per la soluzione del problema di ottimo, è possibile massimizzare la 2.7 (o 2.9, dipende dalla funzione di utilità utilizzata), o equivalentemente, risolvere la 2.8. In entrambe i casi, data la non linearità delle funzioni obiettivo, è necessario ricorrere a procedure numeriche iterative. Nel presente lavoro si utilizza un algoritmo creato appositamente in ambiente Matlab, riportato in appendice (funzione `optimal_weights`).

CAPITOLO 3

I Dati

Abstract

Nel presente capitolo vengono descritti i dati utilizzati nell'analisi, impiegando le usuali statistiche descrittive ed alcuni test per verificare la stazionarietà delle serie dei rendimenti, normalità ed autocorrelazione. In particolare, si pone il focus sull'ipotesi di normalità dei dati, vista l'importanza che riveste nell'applicabilità del modello media-varianza. Per questo motivo tale ipotesi viene saggiata con una batteria di test, presentati in seguito.

3.1 I Dataset

Nel presente lavoro si utilizzano 4 indici azionari, prodotti e pubblicati da Morgan Stanley Capital International (MSCI), società leader nella fornitura di serie storiche finanziarie a livello mondiale. In particolare, nell'analisi vengono utilizzati i seguenti indici, reperiti con Datastream:

- **MSCI Pacific:** indice azionario comprensivo di 463 titoli ad elevata e media capitalizzazione, quotati nei mercati di: Hong Kong, Giappone, Nuova Zelanda, Australia e Singapore.
- **MSCI Europe:** indice azionario composto da 437 titoli ad elevata e media capitalizzazione, quotati nei mercati di: Austria, Belgio, Danimarca,

Finlandia, Francia, Germania, Grecia, Irlanda, Italia, Paesi Bassi, Portogallo, Spagna, Svezia, Svizzera e Gran Bretagna.

- **MSCI North America:** indice azionario comprensivo di 697 titoli ad elevata e media capitalizzazione, quotati nei mercati canadese e statunitense.

- **MSCI EM:** indice azionario comprensivo di 819 titoli, quotati in 21 paesi appartenenti alla categoria "*emerging markets*", quali: Brasile, Chile, Cina, Colombia, Repubblica Ceca, Egitto, Ungheria, India, Indonesia, Korea, Malesia, Messico, Marocco, Perù, Filippine, Polonia, Russia, Sud Africa, Taiwan, Thailandia e Turchia.

Ciascun indice considerato, copre circa l'85% della capitalizzazione di mercato in ciascun paese e raggruppa titoli appartenenti a svariati settori di interesse, quali: IT, Energia, Materie Prime, Telecomunicazioni, Industria, Utilities, Sanità, Beni di largo consumo e di prima necessità. Per tali ragioni, gli indici utilizzati rappresentano reali opportunità d'investimento.

Si considerano 3 dataset (DSm, DSw, DSd), composti dai rendimenti semplici percentuali dei 4 indici sopracitati, che differiscono per cadenza temporale. DSm considera gli indici a cadenza mensile, mentre DSw e DSd utilizzano rispettivamente frequenze settimanali e giornaliere. La decisione di considerare differenti cadenze temporali, è dettata dal fatto che la frequenza dei dati influisce sia sullo scostamento dalla distribuzione Normale, sia sulla correlazione seriale dei rendimenti. Gli indici sono espressi in dollari USA (USD). La tabella che segue riassume le caratteristiche dei 3 dataset utilizzati.

Dataset	Numerosità	Inizio	Fine	Frequenza
DSm	308	29/01/1988	30/08/2013	mensile
DSw	1338	13/01/1988	28/08/2013	settimanale
DSd	3046	01/01/2002	02/09/2013	giornaliera

Tab. 3.1

Ai fini dell'analisi, da ciascun dataset sono stati successivamente selezionati due sub campioni rappresentativi di periodi caratterizzati da bassa (l) ed elevata (h) volatilità dei mercati. Si riportano quindi le caratteristiche di ogni sub campione nella tabella che segue.

Dataset		Numerosità	Inizio	Fine	Frequenza
DSm	DSm _l	55	31/01/2003	31/07/2007	mensile
	DSm _h	73	31/08/2007	30/08/2013	mensile
DSw	DSw _l	239	01/01/2003	25/07/2007	settimanale
	DSw _h	318	01/08/2007	28/08/2013	settimanale
DSd	DSd _l	1195	01/01/2003	31/07/2007	giornaliera
	DSd _h	1589	01/08/2007	02/09/2013	giornaliera

Tab. 3.2

Le soglie per ciascuno split sono state selezionate in modo da massimizzare la differenza di volatilità da un periodo all'altro, ottenendo così due sub campioni per ogni dataset. Nell'immagine che segue, vengono raffigurate le serie dei rendimenti per ogni sub campione e le relative soglie temporali, che ne delimitano i periodi di bassa ed elevata volatilità.

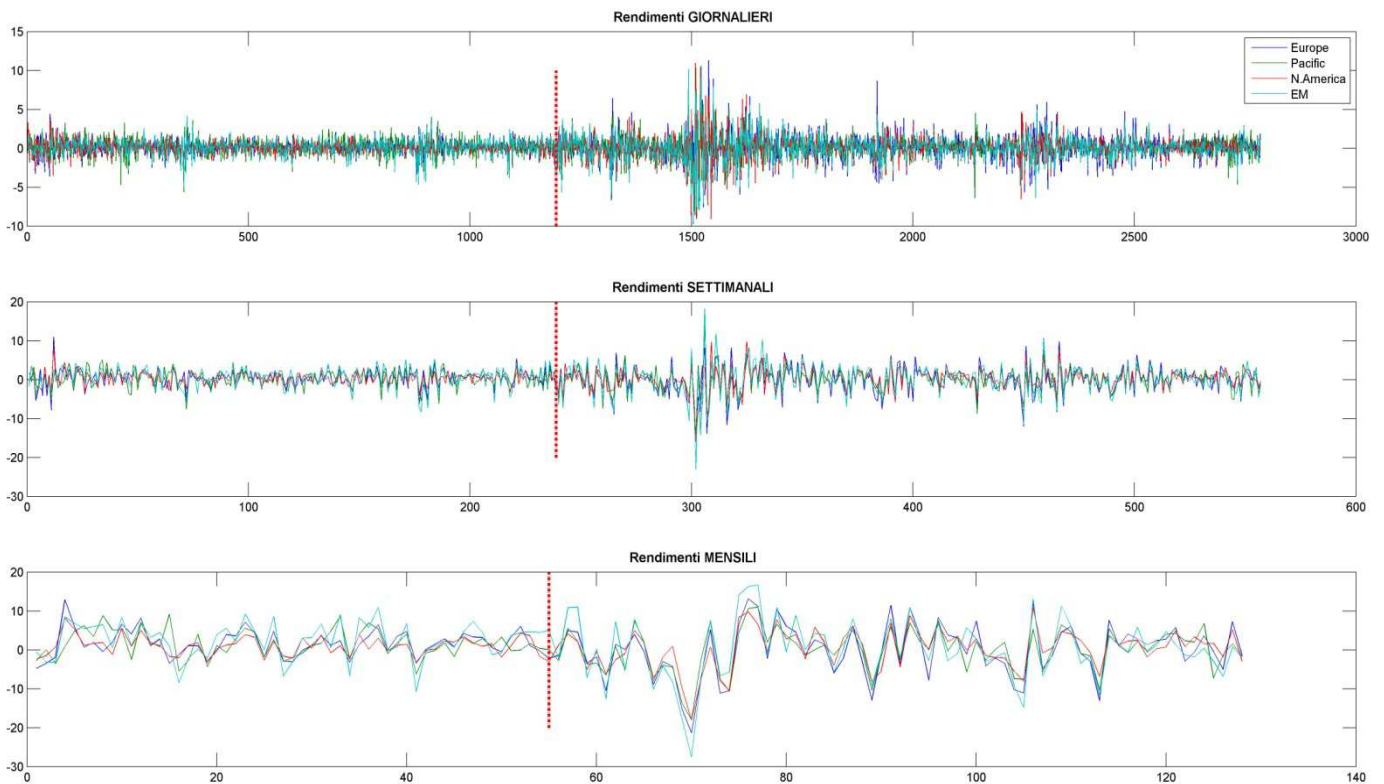


Fig.3. 1

3.2 Test di ipotesi

3.2.1 Test di Normalità di Jarque e Bera ed Omnibus X^2

Il test per la verifica dell'ipotesi nulla di Normalità, proposto da Carlos M. Jarque Uribe ed Anil Kumar Bera (1980), si basa sulle stime campionarie di asimmetria e curtosi. La procedura testa l'ipotesi congiunta di nullità del coefficiente di asimmetria S e dell'eccesso di curtosi $(K-3)$, poiché nella distribuzione normale entrambe le quantità sono nulle. La statistica test utilizzata è quindi:

$$JB = \frac{n}{6} \left(S^2 + \frac{(K-3)^2}{4} \right)$$

dove n è la numerosità campionaria, S e K le stime campionarie dei momenti centrali standardizzati di terzo e quarto ordine. Sotto l'ipotesi nulla di normalità, la statistica si distribuisce come un χ_2^2 . Sebbene tale test sia relativamente semplice da praticare, risulta poco potente in campioni di ridotta numerosità. Inoltre il test è costruito sull'ipotesi di indipendenza ed identica distribuzione dei dati, che come è noto, in presenza di serie storiche finanziarie non sempre è verificata. In fine le statistiche S e K convergono molto lentamente alla distribuzione Normale.

Per ovviare a tale problema, si è utilizzata la statistica X^2 proposta da Ralph B. D'Agostino, che utilizza particolari trasformazioni delle statistiche, che aumentano la velocità di convergenza alla distribuzione Normale. La statistica test è pari a $X^2 = Z_1(S)^2 + Z_2(K-3)^2$ dove $Z_1(\cdot)$ e $Z_2(\cdot)$ sono le due trasformazioni dei momenti campionari (per una trattazione più approfondita si rimanda a "*A suggestion for using powerful and informative tests of normality*", D'Agostino, Ralph B.; Albert Belanger, 1990). La statistica X^2 si distribuisce sotto l'ipotesi nulla di normalità, come un χ_2^2 .

3.2.2 Test di Normalità di Shapiro-Wilk

Il test proposto da Sam S. Shapiro e Martin Bradbury Wilk (1965) è considerato uno dei più potenti per la verifica dell'ipotesi di normalità, soprattutto in presenza di campioni finiti. Si basa sul confronto di due differenti stimatori della varianza, ovvero uno stimatore non parametrico e l'usuale stimatore della varianza campionaria. Lo stimatore non parametrico è costruito utilizzando una combinazione lineare delle statistiche d'ordine del campione, i cui pesi sono disponibili in apposite tavole. La statistica test utilizzata è la seguente:

$$SW = \frac{\left(\sum_{i=1}^n a_i x_{(i)}\right)^2}{\sum_{i=1}^n (x_i - \bar{x})^2}$$

dove \bar{x} è la media campionaria del campione $X=(X_1, X_2...X_n)$ ed $x_{(i)}$ è la statistica ordinata di ordine i . La statistica SW assume valori compresi nell'intervallo $[0, 1]$, e rifiuta l'ipotesi nulla di normalità per valori piccoli. Può essere interpretata come il quadrato del coefficiente di correlazione del diagramma quantile-quantile.

3.2.3 Test di Normalità di Kolmogorov-Smirnov

Il test di Kolmogorov e Smirnov per la verifica dell'ipotesi di normalità, è di tipo non parametrico e si basa sulla "distanza" tra la funzione di ripartizione empirica $\hat{F}_n(x)$ del campione¹³ in esame e la funzione di ripartizione di una variabile casuale Normale. La statistica utilizzata è definita come:

$$D_n = \sup_{-\infty < x < +\infty} |\hat{F}_n(x) - F(x)|$$

¹³ I dati in questione devono essere ordinali

quindi D_n è pari al valore assoluto della massima differenza tra le due funzioni di ripartizione. Il test rifiuta l'ipotesi di normalità per valori elevati della statistica D_n (i valori critici sono tabulati).

3.2.4 Test ADF, correlazione seriale ed eteroschedasticità

Per testare la presenza di radice unitaria nelle serie storiche dei rendimenti, si è utilizzato il test Augmented Dickey Fuller (ADF) che si basa sulla seguente regressione:

$$\Delta y_t = D_t + \gamma y_{t-1} + \sum_{j=1}^p \beta_j \Delta y_{t-j} + a_t$$

con $a_t \sim WN(0, \sigma^2)$ e D_t termine deterministico (ad es. trend lineare o costante) e p opportunamente determinato (si veda la procedura di Ng S. e Perron P.). Il test consiste nel verificare la significatività del parametro γ con la seguente statistica:

$$\tau_{adf} = \frac{\hat{\gamma}}{se(\hat{\gamma})}$$

i cui valori critici sono tabulati per gli usuali livelli di confidenza.

Per esaminare la presenza di eventuale correlazione seriale nelle serie storiche oggetto d'analisi, si è impiegato il test di Ljung Box, che testa l'ipotesi di nullità delle prime k autocorrelazioni. Viene utilizzata la seguente statistica test:

$$Q(k) = n(n+2) \sum_{j=1}^k \frac{\hat{\rho}_j^2}{n-j}$$

dove $\hat{\rho}_j^2$ è la funzione di autocorrelazione campionaria calcolata al j -esimo lag temporale ed n è la lunghezza della serie. Sotto l'ipotesi nulla la statistica $Q(k)$ si distribuisce come un χ_k^2 .

La presenza di eteroschedasticità condizionale (effetti arch) nelle serie dei rendimenti viene testata utilizzando il test LM proposto da Engle (1982) , basato sulla seguente regressione aumentata:

$$\hat{r}_t^2 = \alpha_0 + \alpha_1 \hat{r}_{t-1}^2 + \alpha_2 \hat{r}_{t-2}^2 + \dots + \alpha_k \hat{r}_{t-k}^2$$

dove \hat{r}_t^2 è il quadrato del rendimento semplice al tempo t, in scarto dalla media. Il test consiste nel verificare la nullità dei coefficienti $\alpha_1 \dots \alpha_n$ congiuntamente. La statistica test è pari a $LM = TR^2$ dove T è la lunghezza della serie ed R^2 l'indice di bontà di adattamento del modello precedente. Sotto l'ipotesi nulla la statistica LM si distribuisce come un χ_k^2 .

3.3 Analisi dei dataset

Si riportano le tabelle contenenti le statistiche descrittive di interesse ed i risultati dei test di ipotesi, sui tre dataset considerati. Si considera per ogni test un livello di confidenza α pari a 0.05. Per il test di radice unitaria si considera un lag nell'equazione alle differenze; per il test di Ljung-Box si considerano 4 lag temporali mentre per il test LM di Engle si utilizza un unico lag (i risultati per il test di eteroschedasticità non cambiano introducendo fino a 10 ritardi).

I grafici sono ottenuti utilizzando la funzione "ret_norm_plot()", appositamente scritta e riportata in appendice. Per semplicità di esposizione, le statistiche multivariate quali, matrice di covarianza, di co-asimmetrie e di co-curtosi sono riportate in appendice A.1.

3.3.1 Dataset DSm, rendimenti a frequenza mensile

L'immagine 3.2 riportata di seguito raffigura una stima non parametrica della funzione di densità dei rendimenti (ottenuta con kernel Gaussiano) per ciascuna serie, affiancata dalla densità Normale.

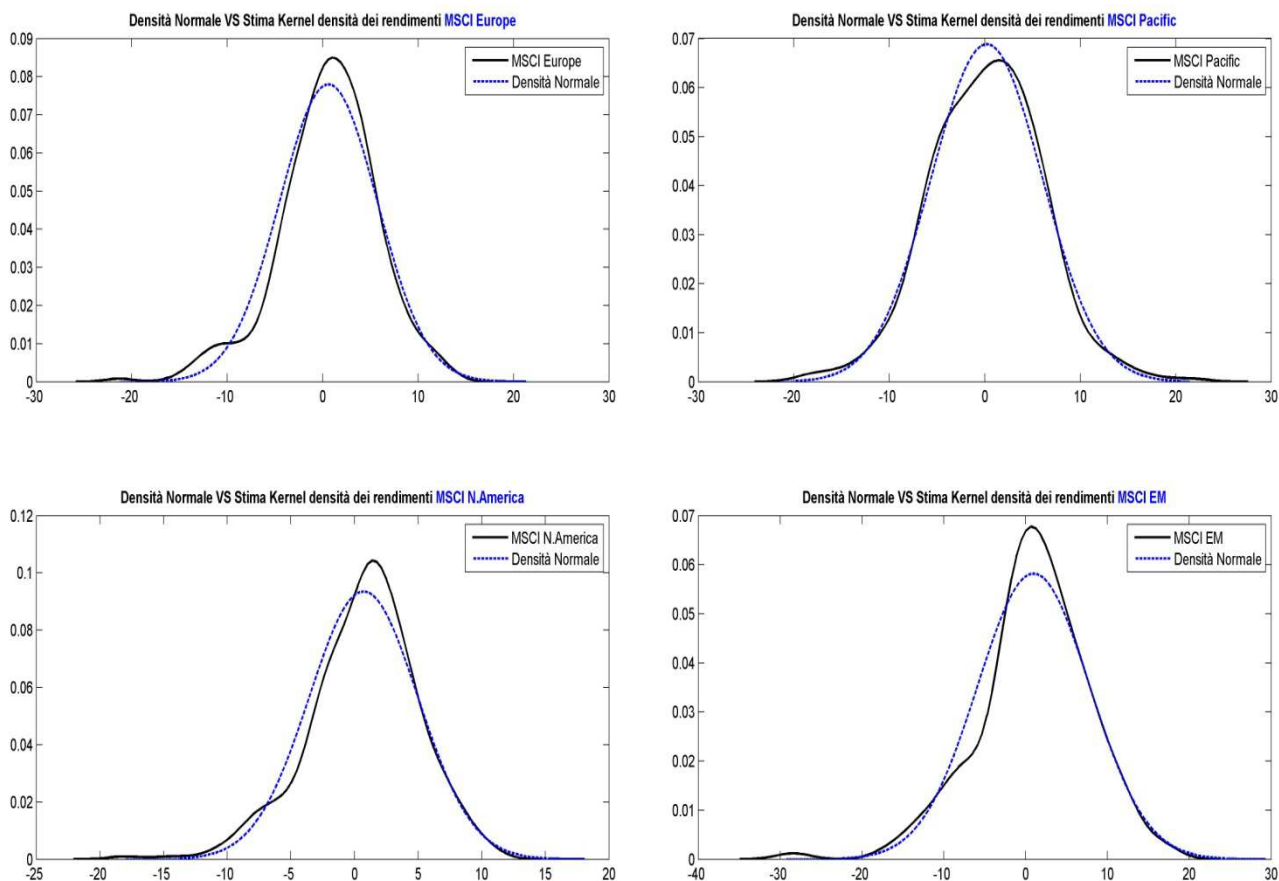


Fig. 3.2

Si nota come per gli indici "Europe", "North America" ed "Emerging Markets", il fit Normale non sia adeguato poiché le distribuzioni stimate presentano una lieve, ma evidente leptocurtosi ed asimmetria negativa. La distribuzione Normale, in questo caso, sottostima sistematicamente la probabilità di ottenere rendimenti fortemente negativi. Per l'indice "Pacific" tuttavia questa sembra adattarsi in modo soddisfacente ai dati.

Nella tabella seguente si riportano le statistiche descrittive dei 4 indici, per l'intero campione.

Dataset DSm (%)						
Series	Mean	Std	Skewness	Kurtosis	Min	Max
MSCI Europe	0.601	5.107	-0.558	4.234	-21.318	13.158
MSCI Pacific	0.213	5.785	0.004	3.709	-18.060	21.514
MSCI N.America	0.709	4.259	-0.614	4.256	-18.068	10.779
MSCI EM	0.968	6.845	-0.633	4.649	-29.286	18.110

Tab. 3.3

Le statistiche descrittive per l'indice "*Pacific*" sono in accordo con quanto evidenziato dal grafico in figura 3.2, infatti asimmetria e curtosi sono prossimi ai valori della distribuzione Normale. Per i rimanenti indici viene confermata la leptocurtosi. Si nota inoltre che l'indice "*Emerging Markets (EM)*" detiene un rendimento mediamente più elevato (0.9677%) rispetto ai rimanenti, esibendo però un rischio maggiore (deviazione standard più elevata).

Si propongono di seguito le stesse statistiche descrittive applicate ai due sub campioni DSm_l e DSm_h.

Dataset DSm _l (%)						
Series	Mean	Std	Skewness	Kurtosis	Min	Max
MSCI Europe	1.646	3.439	0.527	3.707	-4.802	12.918
MSCI Pacific	1.552	3.576	0.090	2.549	-6.254	9.166
MSCI N.America	1.028	2.469	0.308	2.976	-3.364	8.141
MSCI EM	2.569	4.675	-0.677	3.239	-10.764	10.940

Tab. 3.4

Dataset DSm _h (%)						
Series	Mean	Std	Skewness	Kurtosis	Min	Max
MSCI Europe	-0.167	6.943	-0.465	3.190	-21.318	13.158
MSCI Pacific	-0.115	5.552	-0.634	3.579	-17.924	11.034
MSCI N.America	0.290	5.246	-0.695	3.932	-18.068	10.779
MSCI EM	0.072	7.899	-0.423	4.093	-27.500	16.657

Tab. 3.5

Considerando i sub campioni caratteristici dei periodi di bassa (Tabella 3.4) ed elevata (Tabella 3.5) volatilità, emergono delle differenze sostanziali per quanto riguarda rendimento medio e volatilità. Si può notare infatti come il rendimento medio dei titoli, nel periodo di elevata volatilità, sia notevolmente inferiore. Inoltre nel primo periodo (Tabella 3.4), la distribuzione dei rendimenti di ciascun titolo (fatta eccezione per "*Emerging Markets*") è caratterizzata da asimmetria positiva, contrariamente a quanto accade nel secondo periodo. Una plausibile spiegazione va ricercata nella crisi finanziaria globale del 2008.

Si riporta di seguito la tabella contenete i risultati dei test di normalità, radice unitaria, correlazione seriale ed eteroschedasticità condizionale.

	MSCI Europe	MSCI Pacific	MSCI N.America	MSCI EM
Test di Normalità				
JB	35.511	6.449	39.607	55.473
p-value	0.000	0.039	0.000	0.000
X2	24.766	4.793	27.715	32.671
p-value	0.000	0.091	0.000	0.000
KS	0.448	0.380	0.385	0.427
p-value	0.000	0.000	0.000	0.000
SW	0.976	0.991	0.976	0.972
p-value	0.000	0.102	0.000	0.000
Radice unitaria				
ADF	-12.537	-12.299	-11.764	-10.448
p-value	0.000	0.000	0.000	0.000
Autocorrelazione				
Ljung-Box	7.034	3.829	3.632	12.969
p-value	0.134	0.430	0.458	0.011
Eteroschedasticità				
LM	25.942	15.004	18.471	4.463
p-value	0.000	0.000	0.000	0.035

Tab. 3.6

I test di normalità condotti sui 4 indici rifiutano l'ipotesi nulla di normalità dei dati, fatta eccezione per l'indice "*Pacific*", come graficamente constatato. Il test ADF rigetta l'ipotesi nulla di presenza di radice unitaria, per ciascuna delle 4 serie di rendimenti, che risultano quindi stazionarie. Il p-value del test di Ljung-Box non rigetta l'ipotesi di nullità congiunta delle prime 4 autocorrelazioni (a

livello di confidenza 5%) per tutti gli indici, fatta eccezione per EM, per il quale l'ipotesi nulla è accettata all'1%. Il test LM evidenzia la presenza di eteroschedasticità condizionale nelle serie dei rendimenti di "Europe", "Pacific" e "North America", mentre l'ipotesi di omoschedasticità è accettata all'1% (e rifiutata al 5%) per la serie "Emerging Markets".

3.3.2 Dataset DSw, rendimenti a frequenza settimanale

Come fatto per il dataset DS_m, si riportano graficamente le stime delle funzioni di densità dei rendimenti di ciascun titolo, affiancate dalla densità normale.

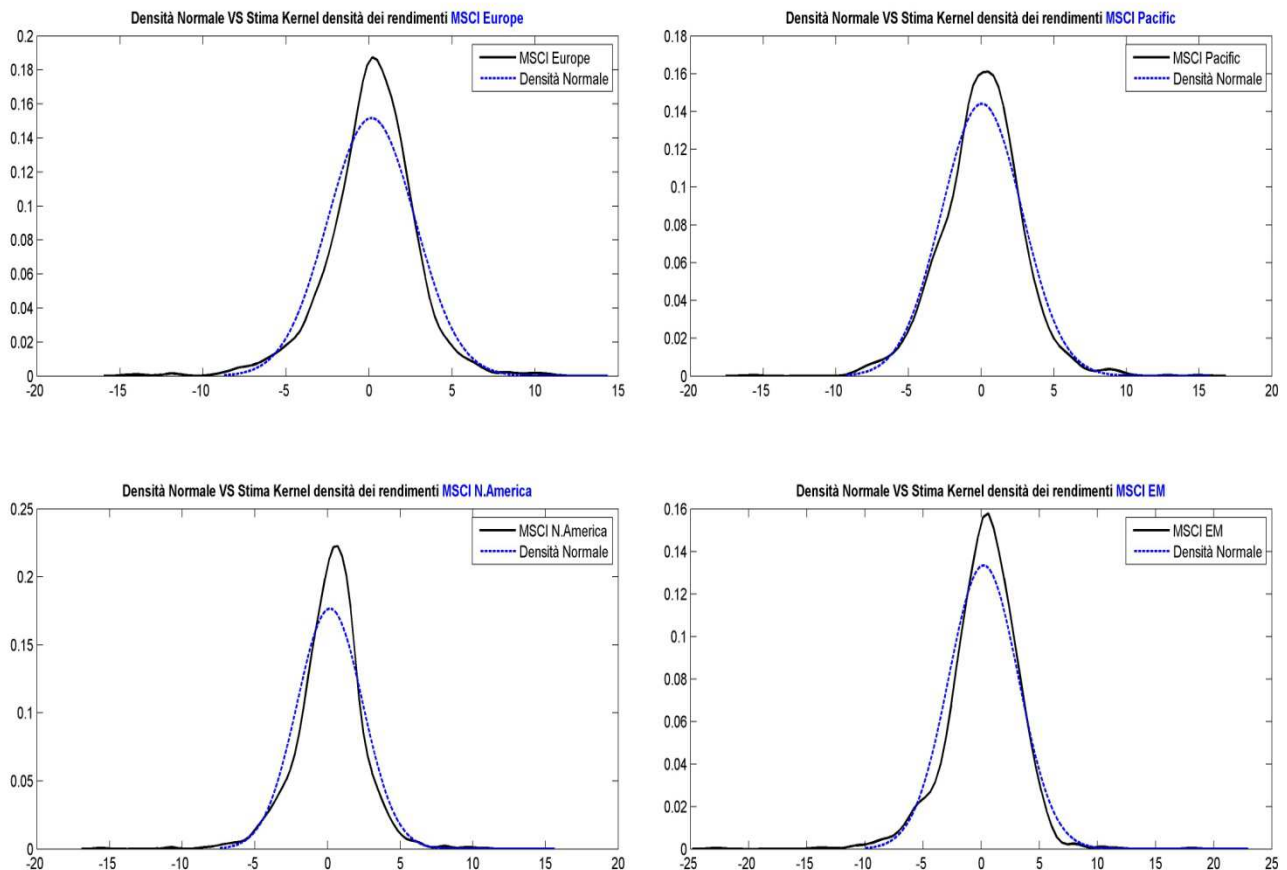


Fig.3.3

Considerando dati a frequenza settimanale, l'adattamento della distribuzione Normale peggiora notevolmente. Le funzioni di densità stimate presentano un

notevole eccesso di curtosi rispetto alla densità Normale e formano un picco attorno allo zero, che la curva gaussiana non è in grado di cogliere.

Nella tabella seguente si riportano le statistiche descrittive per il dataset DSw.

Dataset DSw (%)						
Series	Mean	Std	Skewness	Kurtosis	Min	Max
MSCI Europe	0.144	2.630	-0.501	6.061	-14.364	10.980
MSCI Pacific	0.050	2.767	0.011	5.132	-15.791	15.040
MSCI N.America	0.164	2.258	-0.465	6.923	-15.607	10.834
MSCI EM	0.206	2.990	-0.694	7.747	-22.938	18.251

Tab. 3.4

Si nota come i valori di asimmetria e curtosi siano maggiori degli stessi riportati per il dataset DSm in tabella 3.3. Particolarmente elevata è la curtosi associata alla distribuzione dei rendimenti dell'indice "*Emerging Markets*", condizione usuale data la tipologia dei mercati in esso contenuti.

Si esaminano di seguito i due sub campioni estratti dal dataset DSw, riportandone le statistiche descrittive nelle tabelle 3.5 e 3.6.

Dataset DSw _i (%)						
Series	Mean	Std	Skewness	Kurtosis	Min	Max
MSCI Europe	0.392	2.063	-0.161	6.562	-7.823	10.980
MSCI Pacific	0.383	2.124	-0.581	3.664	-7.588	5.092
MSCI N.America	0.252	1.556	0.343	5.767	-4.210	8.429
MSCI EM	0.595	2.322	-0.844	4.183	-8.266	5.285

Tab. 3.6

Dataset DSw _h (%)						
Series	Mean	Std	Skewness	Kurtosis	Min	Max
MSCI Europe	-0.028	3.652	-0.469	4.402	-14.364	10.549
MSCI Pacific	-0.024	3.033	-0.319	6.593	-15.791	15.040
MSCI N.America	0.063	2.847	-0.825	7.036	-15.607	9.801
MSCI EM	0.005	3.912	-0.595	8.100	-22.938	18.251

Tab. 3.7

In accordo con quanto riscontrato per i sub campioni di rendimenti a frequenza mensile, si nota anche per la frequenza settimanale un netto calo del rendimento

medio nel secondo periodo, a fronte di un aumento della variabilità. Nel periodo di elevata volatilità aumenta la curtosi della distribuzione dei rendimenti di ciascun titolo, eccetto per "Europe". Si può notare, inoltre, come tutti i minimi individuati nell'intero campione in tabella 3.4, si siano verificati nel secondo periodo (Tabella 3.7).

Si riportano in tabella 3.8 i risultati dei test condotti sul dataset DSw.

	MSCI Europe	MSCI Pacific	MSCI N.America	MSCI EM
Test di Normalità				
JB	578.171	253.520	905.921	1363.800
p-value	0.000	0.000	0.000	0.000
X2	151.948	70.141	170.972	237.871
p-value	0.000	0.000	0.000	0.000
KS	0.465	0.465	0.469	0.467
p-value	0.000	0.000	0.000	0.000
SW	0.961	0.980	0.957	0.952
p-value	0.000	0.000	0.000	0.000
Radice unitaria				
ADF	-26.527	-25.914	-27.010	-23.544
p-value	0.000	0.000	0.000	0.000
Autocorrelazione				
Ljung-Box	21.956	7.102	9.394	31.304
p-value	0.000	0.131	0.052	0.000
Eteroschedasticità				
Arch	143.626	45.018	67.714	29.278
p-value	0.000	0.000	0.000	0.000

Tab. 3.8

I p-value dei test di normalità rigettano l'ipotesi nulla di distribuzione Normale dei rendimenti, per tutti e quattro gli indici del dataset DSw, mentre il test ADF ne conferma la stazionarietà. A differenza del dataset DSm, contenente rendimenti mensili, il test di Ljung-Box segnala la presenza di correlazione seriale nelle serie "Pacific" e "North America", mentre il test LM conferma la presenza di effetti arch in tutte e quattro le serie.

3.3.3 Dataset DSd, rendimenti a frequenza giornaliera

Si riportano i grafici delle densità stimate anche per il dataset DSd, contenente i rendimenti a frequenza giornaliera.

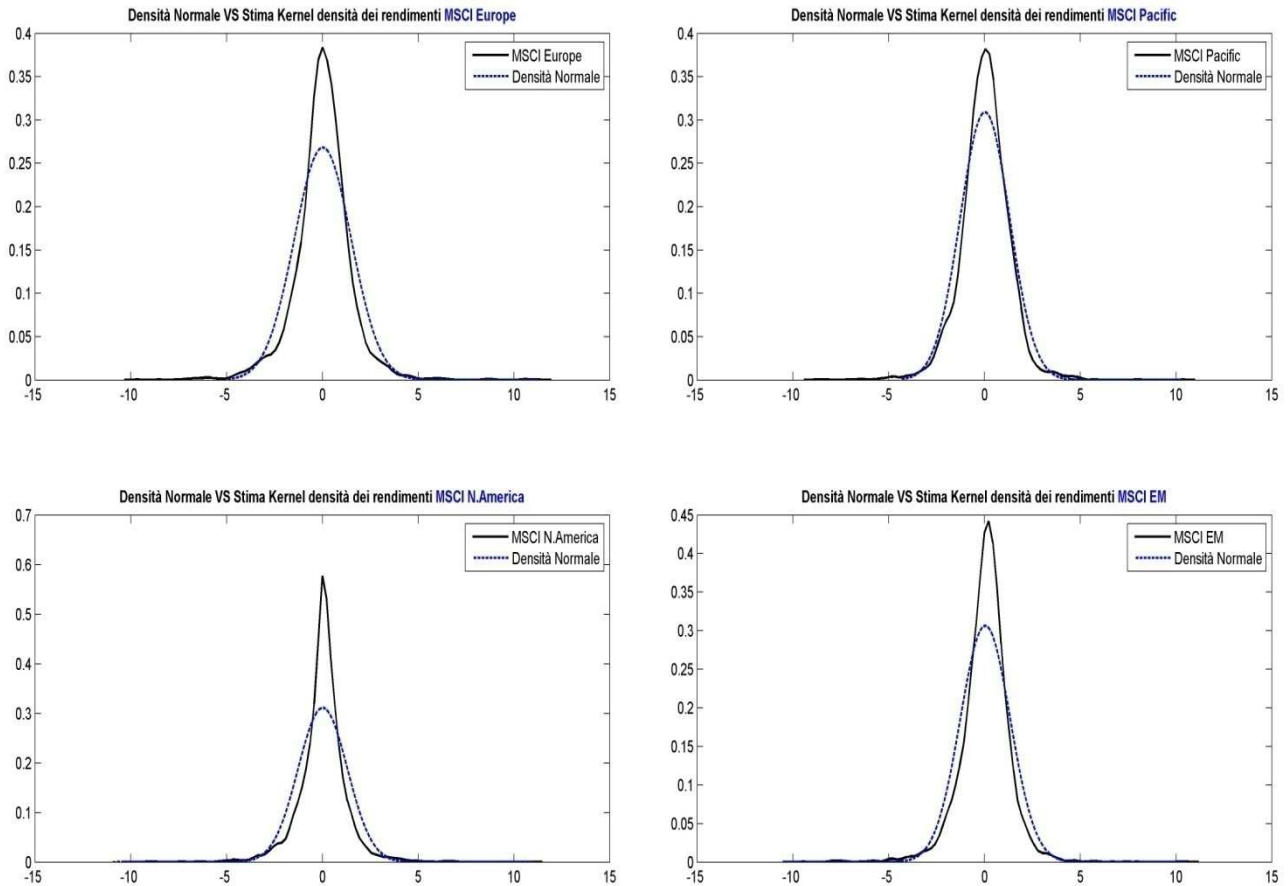


Fig.3.4

Per il dataset DSd, è evidente la non normalità dei dati per tutti gli indici considerati. Le distribuzioni dei rendimenti appaiono fortemente leptocurtiche ed il picco evidenziato nelle densità dei rendimenti settimanali, viene accentuato considerando la frequenza giornaliera. La distribuzione Normale non è quindi adattabile ai dati oggetto d'analisi.

Si riportano in tabella 3.6 le statistiche descrittive per ciascuna serie di rendimenti.

Dataset DSd						
Series	Mean	Std	Skewness	Kurtosis	Min	Max
MSCI Europe	0.023	1.487	0.096	9.843	-9.677	11.291
MSCI Pacific	0.025	1.291	-0.224	8.065	-8.773	10.331
MSCI N.America	0.021	1.283	-0.079	12.134	-9.067	10.991
MSCI EM	0.044	1.302	-0.328	11.185	-9.511	10.598

Tab. 3.6

Come precedentemente constatato dalla figura 3.4, il passaggio da frequenza settimanale a giornaliera provoca una notevole crescita della curtosi nella distribuzione dei rendimenti, per ogni titolo presente in DSd.

Nelle tabelle seguenti sono presenti le statistiche descrittive riguardanti i due sub campioni DSd_l e DSd_h .

Dataset DSd_l (%)						
Series	Mean	Std	Skewness	Kurtosis	Min	Max
MSCI Europe	0.077	0.892	-0.233	4.678	-3.742	4.399
MSCI Pacific	0.073	1.034	-0.267	4.758	-5.608	4.010
MSCI N.America	0.049	0.759	-0.035	4.862	-3.477	3.490
MSCI EM	0.116	0.933	-0.710	5.867	-4.740	4.140

Tab. 3.7

Dataset DSd_h (%)						
Series	Mean	Std	Skewness	Kurtosis	Min	Max
MSCI Europe	-0.002	1.791	0.156	8.322	-9.677	11.291
MSCI Pacific	-0.002	1.459	-0.217	8.205	-8.773	10.331
MSCI N.America	0.018	1.515	-0.151	10.947	-9.067	10.991
MSCI EM	0.001	1.554	-0.180	9.848	-9.511	10.598

Tab. 3.8

Come riscontrato nei precedenti dataset, il secondo periodo è caratterizzato da rendimenti medi minori ed una volatilità maggiore. Sebbene la deviazione standard dei rendimenti nel secondo periodo non superi di molto la stessa nel

primo periodo, si nota come la curtosi dei rendimenti dei titoli in DSd_h sia nettamente maggiore.

Nella tabella 3.8 si riportano i risultati dei test condotti sulle quattro serie di rendimenti appartenenti al dataset DSd.

	MSCI Europe	MSCI Pacific	MSCI N.America	MSCI EM
Test di Normalità				
JB	5945.600	3280.400	10587.000	8553.400
p-value	0.000	0.000	0.000	0.000
X2	432.626	369.548	516.473	532.442
p-value	0.000	0.000	0.000	0.000
KS	0.476	0.479	0.477	0.480
p-value	0.000	0.000	0.000	0.000
SW	0.923	0.952	0.894	0.914
p-value	0.000	0.000	0.000	0.000
Radice unitaria				
ADF	-40.426	-40.768	-42.377	-35.694
p-value	0.000	0.000	0.000	0.000
Autocorrelazione				
Ljung-Box	25.125	6.797	27.558	137.760
p-value	0.000	0.147	0.000	0.000
Eteroschedasticità				
Arch	91.355	93.973	139.791	130.811
p-value	0.000	0.000	0.000	0.000

Tab. 3.7

I test di normalità confermano quanto precedentemente ipotizzato, in quanto rifiutano tutti l'ipotesi nulla di distribuzione Normale dei rendimenti dei quattro indici, agli usuali livelli di confidenza 1%, 5% e 10%. Le serie storiche dei rendimenti giornalieri continuano ad essere stazionarie, come evidenziato dal test di Dickey-Fuller. Si nota, tuttavia, la presenza di correlazione seriale per le serie "Europe", "North America" ed "Emerging Markets", rilevata dal test di Ljung-Box che rigetta l'ipotesi di nullità delle prime 4 autocorrelazioni. Per l'indice "Pacific" viene accettata l'ipotesi nulla di assenza di correlazione seriale, ad ogni livello di confidenza standard. Per tutte le serie di rendimenti contenute in DSd, il test di Engle indica la presenza di eteroschedasticità condizionale.

Per ciascuna serie di rendimenti analizzata, l'ipotesi di normalità¹⁴ viene (nella maggior parte dei casi) rigettata, per la presenza di asimmetria ed eccesso di curtosi. E' presente correlazione seriale nelle serie considerate, tuttavia, essendo stazionarie (ad ogni frequenza) le funzioni di autocorrelazione decadono molto velocemente, così la presenza di autocorrelazioni significativamente diverse da zero non rappresenta un grosso problema. Il test di Engle evidenzia per ogni dataset la presenza di eteroschedasticità condizionale, della quale si tiene conto unicamente nella parte di simulazione out of sample. Nelle sezioni precedenti dell'analisi non si è interessati a modellare la volatilità dei rendimenti, rivolgendo invece l'attenzione verso i momenti non condizionali.

¹⁴ Si è testata l'ipotesi di normalità anche a livello multivariato, utilizzando la statistica test proposta da Jurgen Doornik e Henrik Hansen (Doornik, JA; Hansen H (1994); "An omnibus test for univariate and multivariate normality"; Nuffield College, Oxford). Il risultato è il medesimo per ogni dataset, ovvero l'ipotesi nulla di normalità viene rigettata ad ogni livello di confidenza usuale.

CAPITOLO 4

Analisi e confronto delle tecniche di allocazione

Abstract

Nel presente capitolo vengono presentate le analisi svolte sui dataset descritti precedentemente. Nella prima parte del capitolo si espone lo scopo dell'analisi e la metodologia utilizzata, mentre nelle rimanenti pagine vengono presentati i risultati. Si ricordano le ipotesi di base formulate nei primi capitoli, che consistono in razionalità dell'agente economico, divieto di short selling ed assenza di un titolo privo di rischio.

Introduzione

L'obiettivo principale della presente analisi consiste nel valutare l'effettiva efficacia dell'utilizzo di momenti di ordine superiore al secondo, nella fase di allocazione della ricchezza in un portafoglio di titoli rischiosi. In particolare, si è interessati a valutare le differenze tra le allocazioni costruite utilizzando l'approccio a due e quattro momenti, utilizzando come benchmark l'allocazione individuata con il metodo media-varianza di Markowitz. La motivazione principale che da luogo alla presente ricerca, consiste nella mancata applicabilità del metodo media-varianza, precedentemente discussa nel §1.3 del primo capitolo. Si vuole quindi investigare l'utilità dei metodi che incorporano le

matrici di co-asimmetria e co-curtosi, nei casi in cui l'utilizzo del modello proposto da Markowitz si riveli inappropriato. A tale scopo, l'analisi svolta è suddivisa in tre parti, ciascuna delle quali è descritta nei paragrafi che seguono. La funzione di utilità impiegata è di tipo esponenziale, appartenente alla famiglia di funzioni CARA. Si è inoltre utilizzata un'ulteriore funzione di utilità appartenente alla categoria CRRA, tuttavia, i risultati ottenuti impiegando le due differenti funzioni sono i medesimi. Si è quindi scelto di proseguire lo studio utilizzando la funzione di utilità esponenziale, avente una formulazione meno complessa. Si ricorda inoltre che utilizzando una funzione esponenziale, non vi sono particolari restrizioni per quanto concerne la convergenza dello sviluppo in serie di Taylor, utilizzato per approssimare l'utilità attesa. I risultati riguardanti la prima parte dell'analisi svolta con la power utility sono riportati in appendice A.2. In ogni sezione, le stime dei co-momenti sono calcolate utilizzando la funzione `co_moments(...)`, mentre per la risoluzione di ciascun problema di ottimo viene utilizzata la funzione `optimal_weights(...)`, appositamente scritte e riportate in appendice .

4.1 Analisi

4.1.1 Parte I: simulazione in sample su dataset DSm, DSw, Dsd

In questa prima sezione si vogliono investigare le principali differenze tra le diverse allocazioni, al variare del coefficiente di avversione assoluta al rischio. A tal proposito, si utilizzano 8 differenti valori per l'indice di avversione (Risk aversion $R_a = \{0.5, 1, 2, 5, 10, 15, 20, 25\}$), individuando per ciascuno, l'allocazione ottima di portafoglio, con le funzioni di utilità media-varianza (MV), esponenziale media-varianza (EXP 2° Ord) ed esponenziale four-moments (EXP 4° Ord). Le matrici dei momenti e co-momenti presenti nelle funzioni obiettivo di ciascun problema di ottimo, sono state stimate con le relative quantità campionarie, calcolate considerando l'intero campione. Si assume quindi che le stime campionarie di ciascun momento rappresentino il vero valore dei

parametri di interesse. L'analisi viene replicata per ciascun dataset, al fine di valutare come variano le allocazioni ottime, al variare della frequenza con la quale vengono calcolati i rendimenti (per una descrizione dettagliata di ciascun dataset di veda la tabella 3.1).

4.1.2 Parte II: simulazione in sample su sub campioni

Nella seconda parte dell'analisi si utilizza la stessa impostazione specificata nella prima sezione (per quanto concerne il problema di ottimo e le stime dei parametri), considerando tuttavia periodi campionari differenti. Da ciascun dataset sono stati selezionati due periodi campionari, ricoprenti gli stessi intervalli temporali: Gennaio 2003 - Luglio 2007 ed Agosto 2007 - Agosto 2013 (per una descrizione dettagliata dei sub campioni si rimanda alla tabella 3.2, capitolo 3). In riferimento al primo intervallo temporale, il secondo sub campione comprensivo del periodo di crisi, è caratterizzato da rendimenti medi inferiori, una variabilità nettamente maggiore ed una curtosi generalmente più elevata¹⁵. Esclusa quindi la possibilità di effettuare vendite allo scoperto, si può ragionevolmente affermare che il secondo periodo sia in generale più sfavorevole rispetto al primo.

Con tali premesse, lo scopo della seconda parte dell'analisi consiste nel valutare il comportamento di ciascuna tecnica di allocazione, in periodi di mercato favorevoli e sfavorevoli all'investimento, al variare di frequenza dei rendimenti ed indice di avversione assoluta al rischio.

4.1.3 Parte III: simulazione out of sample su DSw

Nella terza ed ultima parte dell'analisi si è interessati a valutare quale sia, tra i due approcci considerati, la tecnica maggiormente proficua in termini di performance. Si è utilizzato il dataset DSw, composto da rendimenti semplici

¹⁵ Fa eccezione il titolo "Europe" il quale esibisce una maggior curtosi della distribuzione dei rendimenti settimanali e mensili nel primo intervallo temporale.

percentuali a cadenza settimanale, poiché contenente un numero di osservazioni sufficientemente elevato (rispetto al dataset DS_m, contenente rendimenti mensili). Inoltre ciascuna delle quattro serie di rendimenti presenti nel dataset DS_w presenta una notevole deviazione dalla distribuzione Normale (figura 3.3 e tabella 3.8). Diversamente da quanto fatto per le precedenti sezioni, si è scelto di valutare le strategie di allocazione utilizzando unicamente due valori per l'indice di avversione al rischio ($R_a = \{2, 20\}$). Tale scelta è dettata dal fatto che, lavorando con rendimenti mensili, vi sono delle sostanziali differenze nei pesi ottimi dei portafogli individuati con il modello esponenziale media-varianza ed esponenziale four-moments, all'aumentare dell'avversione al rischio. Per la costruzione della simulazione *out of sample*, si era inizialmente ipotizzato l'utilizzo di stime rolling dei co-momenti necessari per l'implementazione del problema di ottimizzazione. Tuttavia, l'utilizzo di tale metodologia, sebbene di semplice impiego, porta a soluzioni non ottimali nei periodi di turbolenza dei mercati. E' stato infatti dimostrato da Vasiellis e Meade (1996), come le stime del vettore dei rendimenti medi e della relativa matrice di varianza e covarianza risultino instabili durante gli shock di mercato. Per ovviare al problema dell'instabilità, si sono stimati i momenti utilizzando uno smorzamento esponenziale, con parametro di smorzamento lambda pari a 0.96. Nella fattispecie, le stime dei momenti e co-momenti per ciascun istante temporale t , si ottengono nel seguente modo:

$$\begin{aligned}
\mu_t &= \lambda\mu_{t-1} + (1 - \lambda)(R_t - \bar{\mu}) \\
\Sigma_t &= \lambda\Sigma_{t-1} + (1 - \lambda)(R_t - \bar{\mu})(R_t - \bar{\mu})^T \\
\mathcal{M}_{3t} &= \lambda\mathcal{M}_{3t-1} + (1 - \lambda)(R_t - \bar{\mu})(R_t - \bar{\mu})^T \otimes (R_t - \bar{\mu})^T \\
\mathcal{M}_{4t} &= \lambda\mathcal{M}_{4t-1} + (1 - \lambda)(R_t - \bar{\mu})(R_t - \bar{\mu})^T \otimes (R_t - \bar{\mu})^T \otimes (R_t - \bar{\mu})^T \quad (4.1)
\end{aligned}$$

$\forall t = 2 \dots T$, dove R_t è il vettore dei rendimenti degli n titoli rischiosi e $\bar{\mu}$ è il vettore dei rendimenti medi campionari (calcolati sull'intero campione). Si è scelto di utilizzare le stime campionarie prodotte nella prima sezione dell'analisi,

per inizializzare l'algoritmo di smoothing. Tale scelta, unitamente ad un parametro lambda prossimo all'unità¹⁶, comportano stime notevolmente più stabili rispetto al classico metodo rolling. Una volta stimati tutti i parametri ed individuato il vettore $\hat{\omega}$ dei pesi ottimi, per ciascun istante temporale si sono ottenuti i rendimenti dei portafogli utilizzando la seguente formula:

$$r_{p_t} = \omega_{t-1}^T R_t \quad (4.2)$$

Le stime dei co-momenti sono state calcolate per ogni settimana, mentre i rendimenti dei portafogli sono determinati a partire dalla prima settimana dell'anno 1994, ottenendo così una serie di 1026 data point.

4.1.4 Valutazione delle performance

Per valutare le differenze tra ciascuna metodologia di allocazione ed in particolare stabilire quale tra queste sia la più proficua, è necessario ricorrere ad un'adeguata misura di performance. Nel presente studio, il celeberrimo indice di Sharpe non è utilizzabile poiché calcola la performance sulla base dei primi due momenti della distribuzione dei rendimenti del portafoglio, ignorando totalmente asimmetria e curtosi. Tale mancanza può condurre a risultati fuorvianti, in quanto, al verificarsi di uno spostamento di massa di probabilità verso destra, la media della distribuzione aumenta sempre, ma tale effetto positivo può essere soppesato da un incremento della varianza. Di conseguenza, sebbene via sia un generale miglioramento di scenario, l'indice di Sharpe risulta minore (Martin E., Tibiletti L., 2009). Per ovviare al suddetto problema, si è utilizzato l'indicatore ASR (Adjusted Sharpe Ratio), una variante dell'indice di Sharpe che include dei fattori di penalità per asimmetria negativa ed eccesso di curtosi. Tale indicatore

¹⁶ Da notare che l'algoritmo di exponential smoothing impiegato, equivale ad un modello IGARCH(1,1) privato della costante per la previsione della volatilità. Il modello è inoltre equivalente al modello RiskMetrics proposto da J.P. Morgan (RiskMetrics, 1996).

viene proposto per la prima volta da P ezier nel 2004, ottenuto da un'espansione in serie di Taylor di quarto ordine della funzione di utilit  esponentiale.

Si riporta di seguito la formulazione dell'indice di performance ASR:

$$ASR = SR \left[1 + \left(\frac{s_p^3}{6} \right) SR - \left(\frac{K_p^4 - 3}{24} \right) SR^2 \right]$$

dove $SR = \frac{\mu_p - r_f}{\sigma_p}$   l'indice di Sharpe¹⁷.

Utilizzando l'approccio four-moments invece dell'usuale media-varianza, si riscontra talvolta una diminuzione della curtosi, unitamente ad una riduzione dell'asimmetria della distribuzione dei rendimenti del portafoglio. Per valutare se tali variazioni siano statisticamente significative, si sono costruiti degli intervalli di confidenza al 95% per asimmetria e curtosi dei portafogli ricavati con il metodo di allocazione a 2 momenti. E' quindi ragionevole affermare che, un portafoglio costruito mediante il metodo four-moments esibisce una curtosi (o asimmetria) statisticamente diversa (a livello alpha 5%), se il suo valore "cade" al di fuori dell'intervallo di confidenza. Per la costruzione degli intervalli di confidenza si   utilizzata la distribuzione asintotica¹⁸ degli stimatori di asimmetria e curtosi, valida unicamente sotto l'ipotesi di indipendenza ed identica distribuzione dei dati. Tuttavia, si ricorda che tutte le serie di rendimenti utilizzate presentano autocorrelazione ed eteroschedasticit  condizionale. Sebbene gli intervalli individuati siano sistematicamente distorti, possono comunque essere utilizzati come un primo strumento di verifica. Intervalli di confidenza robusti possono essere ricavati utilizzando metodologie bootstrap.

¹⁷ Si ricorda che una delle ipotesi di lavoro formulate inizialmente consiste nell'assenza di un titolo privo di rischio, di conseguenza il risk free rate r_f viene posto pari a zero.

¹⁸ Si utilizzano le seguenti distribuzioni asintotiche: $\widehat{s}_p^3 \sim AN\left(0, \frac{6}{T}\right)$, $(\widehat{K}_p^4 - 3) \sim AN\left(0, \frac{24}{T}\right)$.

4.1.5 Algoritmo di ottimizzazione

L'algoritmo scritto appositamente per la risoluzione di ciascun problema di ottimizzazione è di tipo ibrido. Si è preferito utilizzare in primo luogo un algoritmo genetico di ottimizzazione, il cui risultato viene passato in input ad un algoritmo di tipo numerico deterministico. In particolare, stabiliti i vincoli di ammissibilità dei portafogli e di divieto di short selling, l'algoritmo genetico individua un possibile candidato a punto di minimo¹⁹ della funzione obiettivo. Dal punto individuato viene generato un pool di 299 punti conformi al problema di ottimo precedentemente impostato. Viene quindi eseguita un'istanza di minimizzazione per ogni punto creato, compreso il candidato individuato inizialmente dall'algoritmo genetico. Eseguite le trecento elaborazioni viene restituito in output il punto che detiene il minimo valore della funzione obiettivo. E' noto che gli algoritmi deterministici possono fallire la ricerca del punto di ottimo, se il punto di inizio risulta particolarmente distante dal minimo o massimo globale. Passando in input un probabile candidato all'ottimo e generando ulteriori 299 candidati, si cerca di ridurre la probabilità di ottenere un punto di ottimo locale anziché globale. Per ciascuna istanza di ottimizzazione viene utilizzata l'opzione parallel computing, che permette di distribuire il carico di lavoro su più processori, riducendo così il tempo di esecuzione. Il tipo di output ritornato dipende dalla tipologia di simulazione selezionata:

- se la simulazione è di tipo *in-sample* (sezioni I e II) l'output è una matrice $(N+1)*8$ dove N è il numero di colonne della matrice contenente la serie storica multivariata, ed 8 è la lunghezza del vettore contenente i livelli di avversione assoluta al rischio.

¹⁹ Gli algoritmi di ottimizzazione disponibili in Global Optimization Toolbox ed Optimization Toolbox di Matlab sono predisposti per la ricerca del punto di minimo locale o globale della funzione obiettivo $g(x)$ in input. Per la ricerca del punto di massimo di $g(x)$ è sufficiente passare in input la funzione $-g(x)$.

- se la simulazione è di tipo *out-of-sample* (sezione 3) l'output è un array di dimensioni $(N+1)*T*2$. Si ottiene così un vettore di pesi ottimi per ciascun istante temporale t e livello di avversione al rischio $R_a=\{2,20\}$.

In entrambe i casi il numero di righe allocate è pari ad $N+1$ poiché l'algoritmo salva il valore della funzione obiettivo nel punto di ottimo. Di seguito si riporta il flow chart rappresentante l'algoritmo utilizzato.

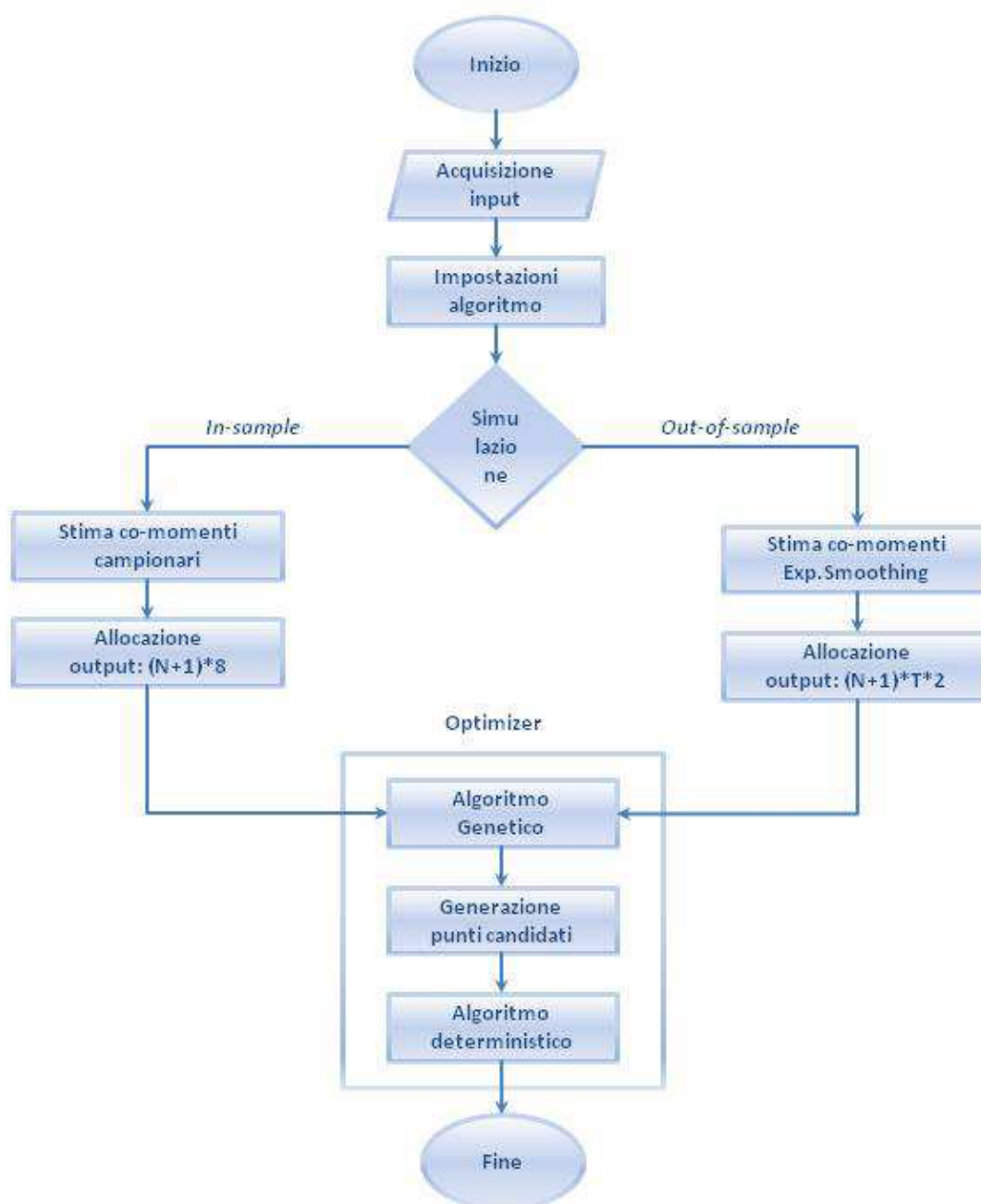


Fig. 4.1

4.2 Risultati parte I

Si presentano di seguito i risultati ottenuti nella prima simulazione, utilizzando i tre dataset contenenti i rendimenti a frequenza mensile, settimanale e giornaliera degli indici "MSCI Europe", "MSCI Pacific", "MSCI North America" e "MSCI Emerging Markets".

4.2.1 Dataset DSm, rendimenti mensili

Il grafico sottostante riporta i pesi ottimi di ciascun titolo, per ogni valore di avversione assoluta al rischio. Sono riportati i pesi per le funzioni di utilità media-varianza, esponenziale media-varianza (Esponenziale 2ord) ed esponenziale four moments (Esponenziale 4ord).

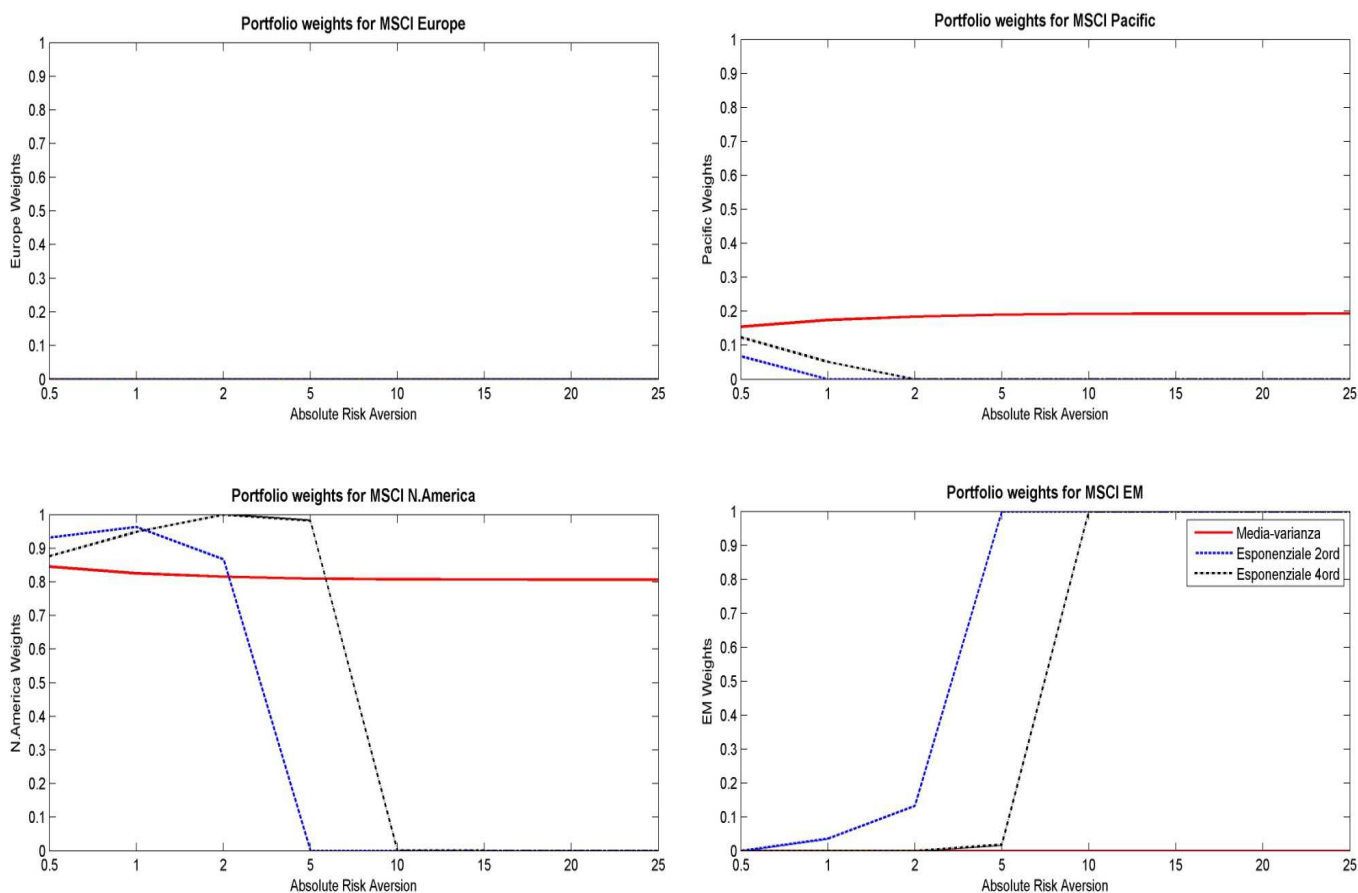


Fig. 4.2

Dalla figura 4.2 si può notare come per ogni titolo considerato, le allocazioni ottenute con funzione esponenziale a due e quattro momenti convergano per valori di avversione al rischio molto bassi o elevati. Le metodologie basate sull'utilità esponenziale determinano la medesima composizione di portafoglio a partire da $R_a=10$. Tali allocazioni si avvicinano a quelle ottenute con la funzione di utilità media-varianza, unicamente per bassi valori di avversione al rischio. Si nota inoltre che tutti e tre gli approcci attribuiscono peso nullo al titolo "Europe". L'allocazione individuata utilizzando la funzione di utilità media-varianza sembra non risentire dell'aumento dell'avversione al rischio, esibendo variazioni minime nei pesi associati a ciascun titolo. Questo particolare risultato è spiegato dalla mancanza di un titolo privo di rischio, di conseguenza l'agente economico ha a disposizione solo una parte della frontiera efficiente sulla quale posizionarsi. Considerando le allocazioni individuate impiegando l'utilità esponenziale, vi è un'evidente contrazione del peso ottimo associato al titolo "North America" ed uno speculare incremento del peso per "Emerging Markets". Sebbene i due modelli diano luogo a composizioni di portafoglio molto simili, sembra che l'esponenziale media-varianza "reagisca" per valori di avversione al rischio minori, rispetto alla funzione di utilità che incorpora i momenti terzo e quarto. Utilizzando l'esponenziale media-varianza, la contrazione rilevata per il titolo "North America" avviene infatti per $R_a=2$. Considerando invece lo sviluppo al quarto ordine dell'utilità esponenziale, si rileva la medesima contrazione per $R_a=5$.

La tabella contenente i pesi ottimi per funzione di utilità ed avversione al rischio è riportata in appendice A.3.1.

Ottenuti i pesi ottimi è possibile calcolare media, varianza, asimmetria e curtosi per ciascun portafoglio, mediante la 2.5. Si riporta di seguito la tabella contenete i suddetti momenti.

Risk aversion		0.5	1	2	5	10	15	20	25
MV	Mean	0.6322	0.6224	0.6175	0.6145	0.6135	0.6132	0.6131	0.6130
	Variance	17.2370	17.2070	17.2000	17.1980	17.1970	17.1970	17.1970	17.1970
	Skewness	-0.6506	-0.6493	-0.6482	-0.6473	-0.6470	-0.6468	-0.6468	-0.6468
	Kurtosis	4.3635	4.3566	4.3513	4.3475	4.3462	4.3457	4.3455	4.3453
Exp 2° ord	Mean	0.6754	0.7183	0.7432	0.9677	0.9677	0.9677	0.9677	0.9677
	Variance	17.5990	18.3000	19.0390	46.8490	46.8490	46.8490	46.8490	46.8490
	Skewness	-0.6393	-0.6489	-0.7254	-0.6333	-0.6333	-0.6333	-0.6333	-0.6333
	Kurtosis	4.3361	4.3830	4.6848	4.6488	4.6488	4.6488	4.6488	4.6488
Exp 4° ord	Mean	0.6476	0.6835	0.7089	0.7135	0.9677	0.9677	0.9677	0.9677
	Variance	17.3220	17.7100	18.1430	18.2120	46.8490	46.8490	46.8490	46.8490
	Skewness	-0.6496	-0.6343	-0.6139	-0.6315	-0.6333	-0.6333	-0.6333	-0.6333
	Kurtosis	4.3645	4.3210	4.2564	4.3191	4.6488	4.6488	4.6488	4.6488

Tab. 4.1

La tabella 4.1 conferma quanto evidenziato dal grafico in figura 4.2, in quanto le allocazioni ottenute impiegando due e quattro momenti producono risultati molto simili, che divengono uguali a partire da $R_a=10$. Si nota un rendimento medio leggermente maggiore per l'esponenziale media-varianza, unitamente ad una variabilità dei rendimenti più elevata. Per valori di avversione pari ad uno, due e cinque, si evince inoltre una lieve diminuzione di asimmetria e curtosi per i portafogli ottenuti con l'approccio a quattro momenti. Ipotizzando indipendenza ed identica distribuzione (*i.i.d.*) dei rendimenti, si sono costruiti degli intervalli di confidenza al 95%, per valutare se lo scostamento di asimmetria e curtosi tra le due metodologie di allocazione sia statisticamente significativo.

Nella figura 4.3 si riportano gli intervalli di confidenza per asimmetria e curtosi dei rendimenti di ciascun portafoglio, sotto ipotesi di indipendenza ed identica distribuzione dei rendimenti.

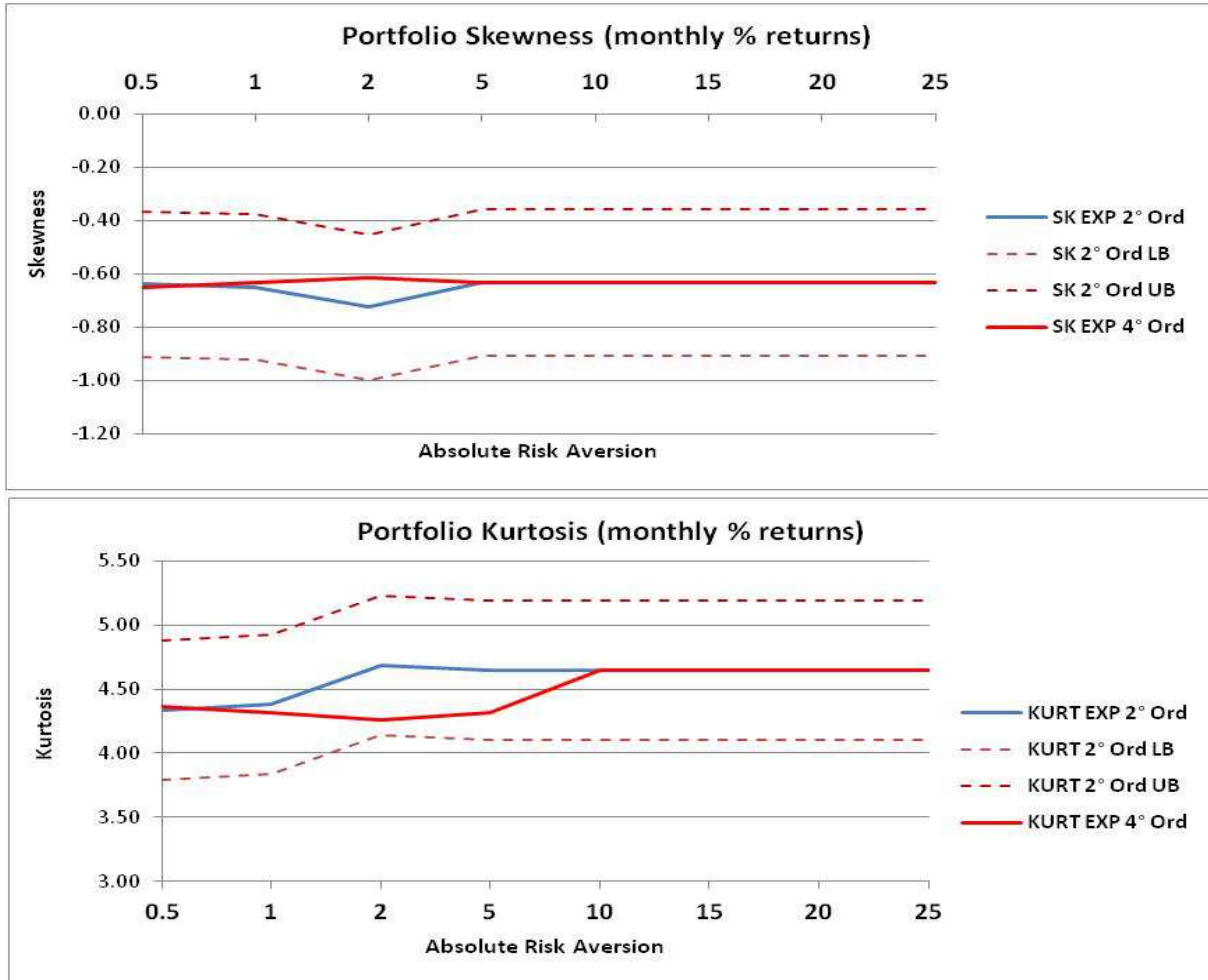


Fig. 4.3

Entrambi i momenti terzo e quarto dei portafogli ottenuti con l'approccio four-moments, si posizionano all'interno degli intervalli di confidenza per asimmetria e curtosi dei portafogli ottenuti con l'esponenziale media-varianza. Di conseguenza, la lieve diminuzione di asimmetria e curtosi rilevata in tabella 4.1 non sembra essere statisticamente significativa (a livello $\alpha=5\%$).

Per valutare la performance di ciascun metodo di allocazione si utilizza l'Adjusted Sharpe Ratio (ASR), introdotto nel §4.1.4. L'indicatore viene presentato graficamente in figura 4.4, la tabella contenente i valori di ASR è invece riportata in appendice A.3.1.

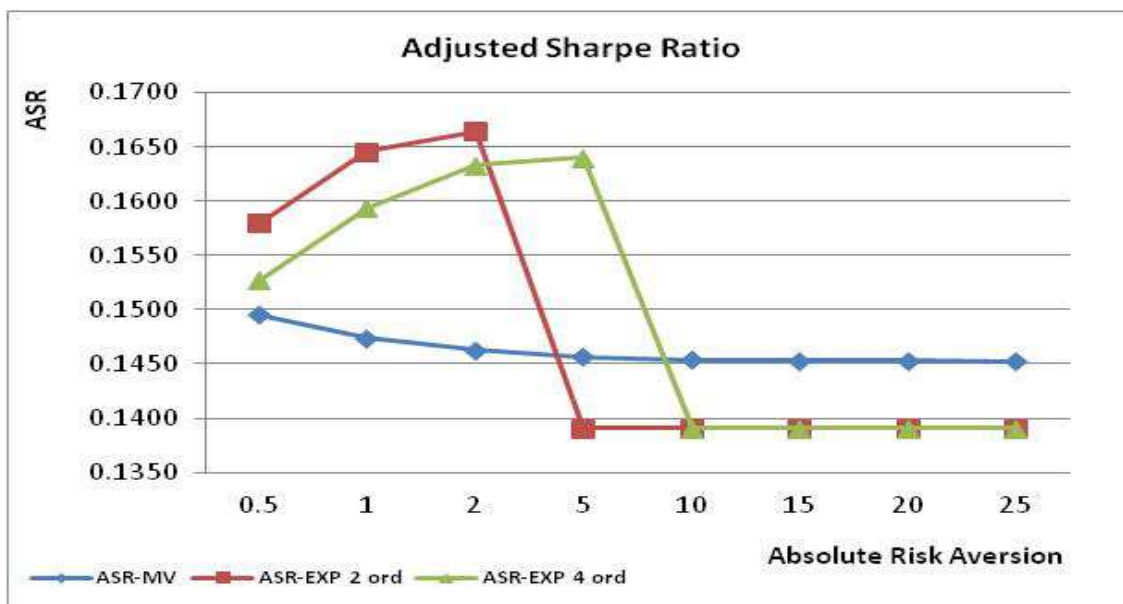


Fig. 4.4

Sebbene il metodo four-moments incorpori momenti di ordine superiore rispetto all'usuale media-varianza, si noti dal grafico in figura 4.4 come la performance dei portafogli ottenuti utilizzando tale modello, sia minore o al più uguale alla performance ottenuta considerando solo i primi due momenti²⁰(fatta eccezione per $R_a=5$). Un particolare degno di nota, consiste nel fatto che l'allocazione individuata con l'usuale funzione di utilità media-varianza produce una performance maggiore delle rimanenti, a partire da un avversione assoluta al rischio pari a dieci.

²⁰ In questo caso ci si riferisce all'esponenziale media-varianza, ovvero lo sviluppo in serie di Taylor del secondo ordine della funzione di utilità esponenziale (EXP 2 Ord)

4.2.2 Dataset DSw, rendimenti settimanali

Si riportano i pesi ottimi individuati con le tre metodologie di allocazione, per ciascun valore di avversione assoluta al rischio.

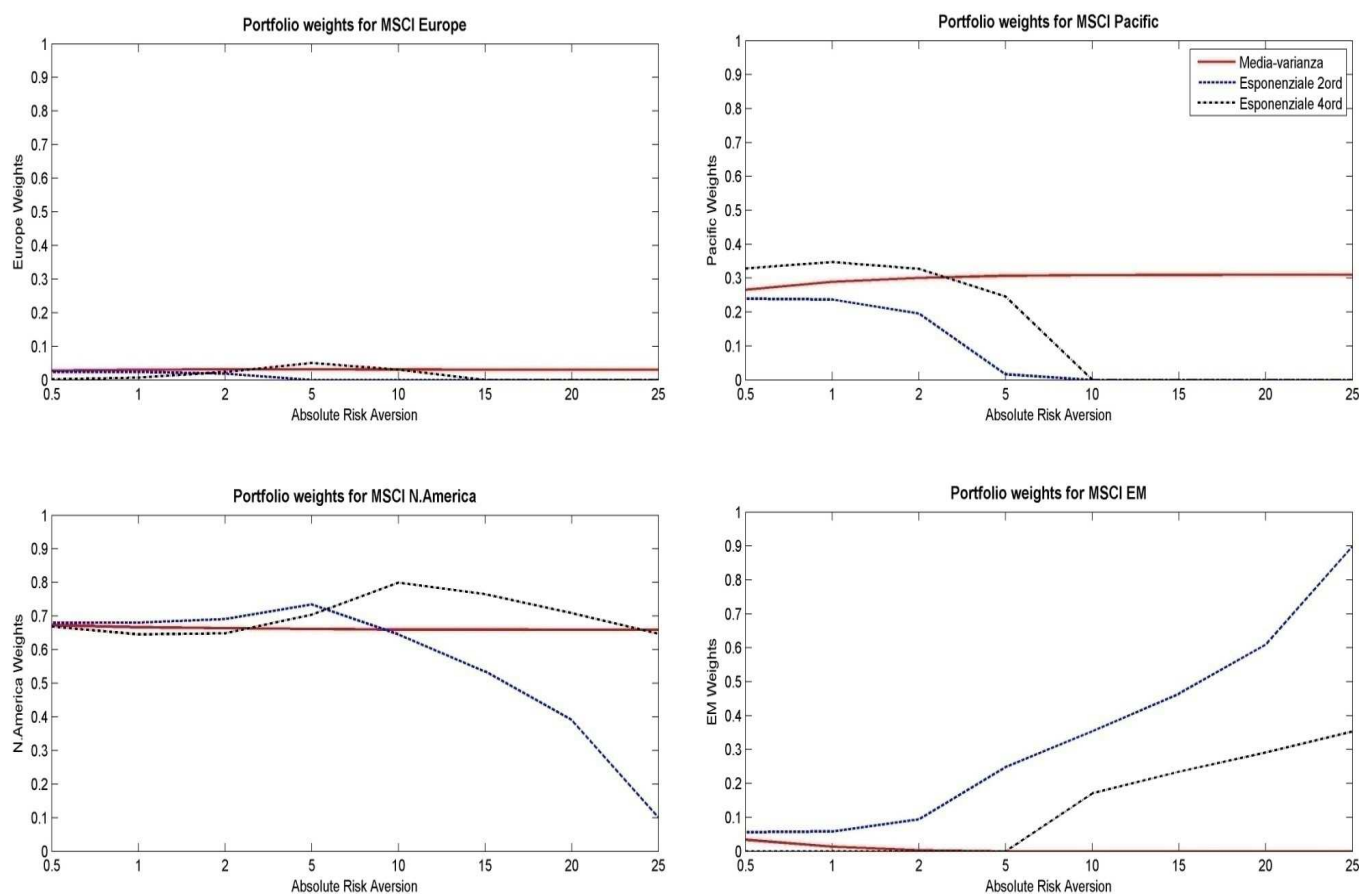


Fig. 4.5

Come osservato precedentemente in figura 4.2, le allocazioni prodotte dai tre metodi convergono per bassi valori di avversione al rischio. Tuttavia, diversamente da quanto riscontrato con rendimenti mensili, i modelli basati sulle espansioni al secondo e quarto ordine della funzione di utilità esponenziale producono risultati notevolmente differenti, per elevati valori di avversione al rischio. Si può notare infatti come vi sia una rilevante contrazione del peso associato al titolo "North America", utilizzando la funzione esponenziale media-varianza. Il metodo four-moments invece, attribuisce a tale titolo un peso

prossimo alla soluzione individuata dall'approccio media-varianza. Inoltre, l'esposizione verso l'asset "*Emerging Markets*" risulta maggiore utilizzando la funzione di utilità esponenziale a due momenti, per tutti i valori di avversione al rischio considerati. Differentemente dalle allocazioni sui rendimenti mensili, i metodi basati sulle tre funzioni di utilità considerate attribuiscono un peso (seppur minimo) non nullo all'indice "*Europe*".

La tabella contenente i pesi ottimi per funzione di utilità ed avversione al rischio è riportata in appendice A.3.2.

Si riportano in tabella 4.2 i momenti dei portafogli descritti graficamente in figura 4.5.

Risk aversion		0.5	1	2	5	10	15	20	25
MV	Mean	0.1344	0.1308	0.1290	0.1282	0.1280	0.1279	0.1279	0.1279
	Variance	4.3775	4.3667	4.3640	4.3634	4.3633	4.3633	4.3633	4.3633
	Skewness	-0.5934	-0.5741	-0.5640	-0.5602	-0.5598	-0.5596	-0.5595	-0.5595
	Kurtosis	7.1083	6.9876	6.9234	6.8976	6.8940	6.8928	6.8922	6.8919
Exp 2 ^{ord}	Mean	0.1384	0.1388	0.1451	0.1725	0.1788	0.1834	0.1895	0.2017
	Variance	4.3978	4.4001	4.4518	4.9297	5.1433	5.4537	6.0711	8.0349
	Skewness	-0.6131	-0.6148	-0.6425	-0.7136	-0.7706	-0.8062	-0.8098	-0.7309
	Kurtosis	7.2285	7.2388	7.3975	7.6098	7.7682	7.9105	7.9816	7.8417
Exp 4 ^{ord}	Mean	0.1263	0.1241	0.1260	0.1348	0.1705	0.1738	0.1761	0.1787
	Variance	4.3660	4.3709	4.3649	4.3890	4.9158	4.9663	5.0299	5.1401
	Skewness	-0.5498	-0.5458	-0.5545	-0.5684	-0.6507	-0.6961	-0.7361	-0.7699
	Kurtosis	6.8651	6.8181	6.8565	7.0004	7.3956	7.5321	7.6538	7.7658

Tab. 4.2

Come nel caso precedente, il rendimento medio ottenuto impiegando la funzione di utilità esponenziale media-varianza risulta superiore a quello ottenuto utilizzando l'esponenziale a 4 momenti. Lo stesso vale per la varianza dei portafogli, per ciascun livello di avversione al rischio. Passando dall'approccio esponenziale media-varianza ad esponenziale four-moments si notano tuttavia delle diminuzioni di asimmetria e curtosi maggiormente rilevanti.

Per valutare se tali scostamenti siano statisticamente significativi, si utilizzano gli intervalli di confidenza proposti in precedenza per l'analisi sui rendimenti mensili.

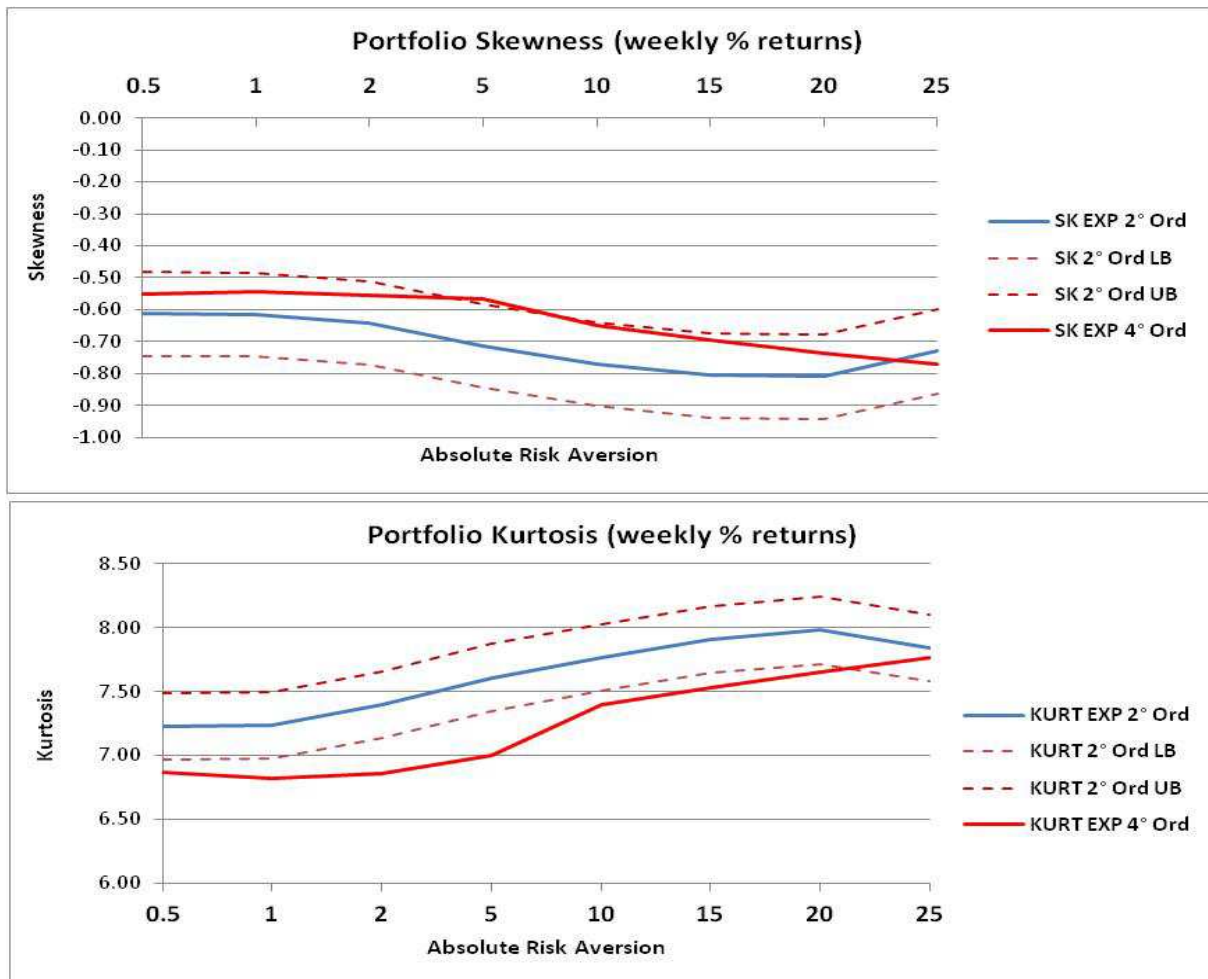


Fig. 4.6

Sotto ipotesi di indipendenza ed identica distribuzione, si nota che solo la diminuzione riscontrata per la curtosi è statisticamente significativa (a livello $\alpha=5\%$) fino a $R_a=20$, poiché situata all'esterno dell'intervallo di confidenza.

Per la valutazione delle performance ex-post delle tre tecniche di allocazione, si utilizza ancora una volta l'indice di Sharpe modificato per tener conto di asimmetria e curtosi dei portafogli. L'indicatore viene presentato graficamente in figura 4.7, mentre i dati sono riportati in appendice A.3.2.

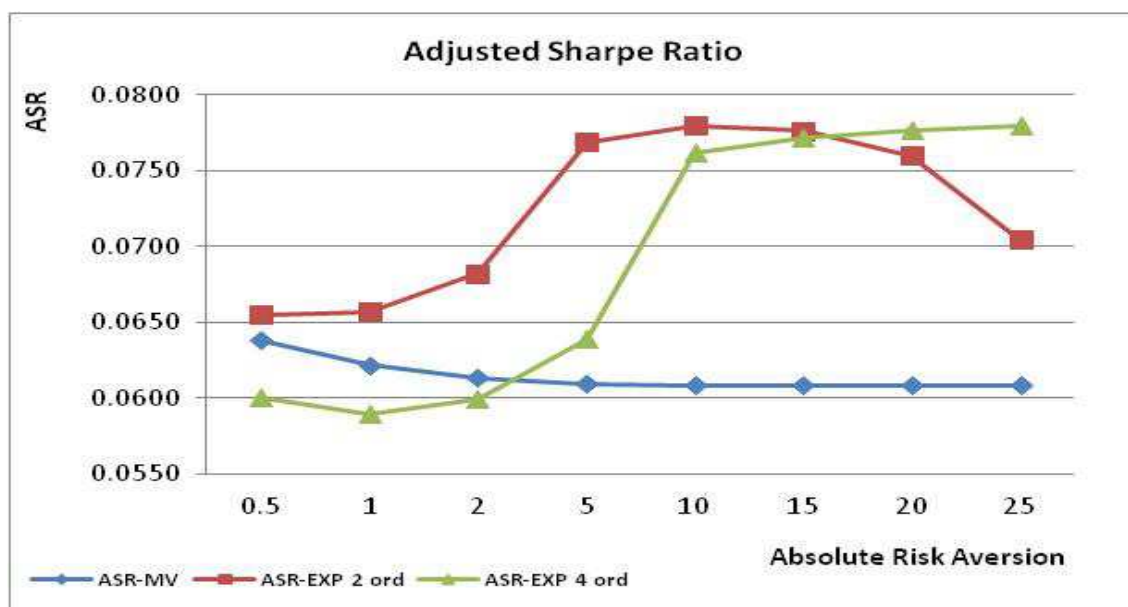


Fig. 4.7

Come riscontrato per l'analisi sui rendimenti mensili, anche utilizzando rendimenti settimanali la metodologia di allocazione che detiene la miglior performance (utilizzando l'ASR) è l'esponenziale media-varianza (o esponenziale a due momenti). L'esponenziale four-moments esibisce una performance maggiore solo per valori di avversione assoluta al rischio pari a venti e venticinque. L'allocazione ottenuta impiegando l'usuale funzione di utilità media-varianza dimostra una performance generalmente inferiore, eccetto per valori di R_a minori o uguali a due. Per tali valori la performance supera quella ottenuta con l'approccio four-moments.

4.2.3 Dataset Ddw, rendimenti giornalieri

Come fatto precedentemente per i rendimenti mensili e settimanali, anche per l'analisi sui rendimenti giornalieri si riporta di seguito l'allocazione ottima, per ciascun livello di avversione assoluta al rischio.

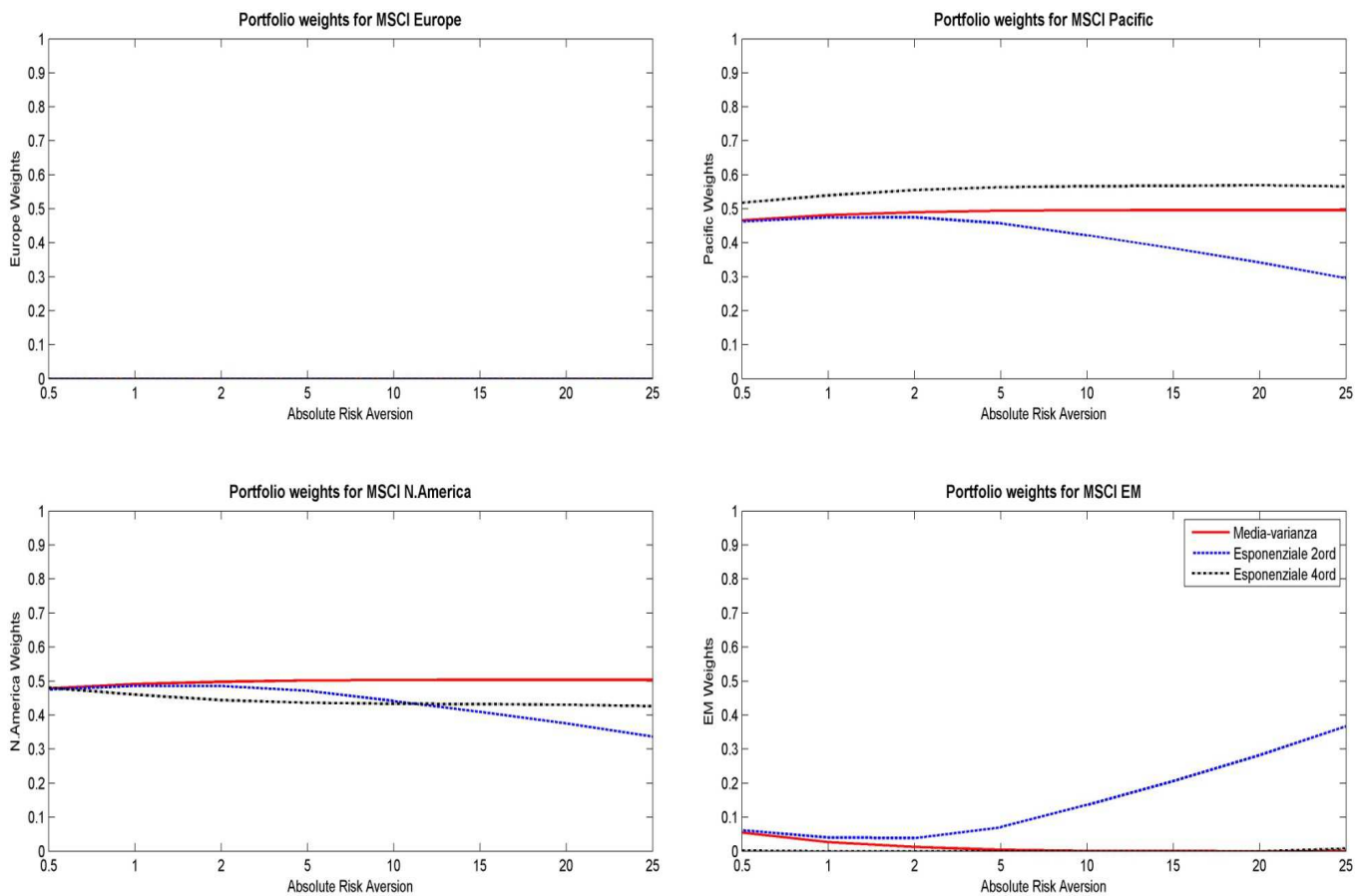


Fig. 4.8

L'analisi sui rendimenti giornalieri conferma in parte quanto visto in precedenza analizzando rendimenti settimanali e mensili. In figura 4.8 si può notare come utilizzando le funzioni di utilità media-varianza, esponenziale media-varianza ed esponenziale four-moments, si ottengano allocazioni ottimali molto vicine, per bassi valori di avversione al rischio. In particolare, i pesi ottimi di portafoglio ricavati con il modello four-moments sono prossimi ai pesi individuati utilizzando la funzione di utilità media-varianza, per ciascun valore di

avversione. Ancora una volta si rileva una contrazione del peso associato all'asset "North America" ed un conseguente incremento dell'esposizione verso "Emerging Markets", ottenuto con funzione esponenziale a due momenti. Tuttavia, le variazioni individuate risultano meno accentuate rispetto alle stesse riscontrate nelle precedenti analisi.

La tabella contenente i pesi ottimi per funzione di utilità ed avversione al rischio è riportata in appendice A.3.3.

In tabella 4.3 si riportano i momenti dei portafogli individuati con le tre tecniche di allocazione.

Risk aversion		0.5	1	2	5	10	15	20	25
MV	Mean	0.0241	0.0236	0.0233	0.0231	0.0230	0.0230	0.0230	0.0230
	Variance	0.9376	0.9358	0.9353	0.9352	0.9352	0.9352	0.9352	0.9352
	Skewness	-0.2477	-0.2460	-0.2451	-0.2445	-0.2443	-0.2443	-0.2443	-0.2443
	Kurtosis	9.0942	8.9852	8.9313	8.8991	8.8884	8.8848	8.8846	8.8847
Exp 2° ord	Mean	0.0243	0.0238	0.0238	0.0245	0.0258	0.0273	0.0289	0.0307
	Variance	0.9382	0.9365	0.9364	0.9390	0.9491	0.9670	0.9946	1.0353
	Skewness	-0.2481	-0.2468	-0.2467	-0.2487	-0.2526	-0.2569	-0.2616	-0.2672
	Kurtosis	9.1200	9.0361	9.0327	9.1545	9.4100	9.6854	9.9760	10.2810
Exp 4° ord	Mean	0.0231	0.0232	0.0232	0.0233	0.0233	0.0233	0.0233	0.0235
	Variance	0.9367	0.9406	0.9454	0.9483	0.9494	0.9500	0.9506	0.9512
	Skewness	-0.2446	-0.2440	-0.2434	-0.2430	-0.2429	-0.2428	-0.2427	-0.2433
	Kurtosis	8.6855	8.5021	8.3794	8.3221	8.3042	8.2937	8.2845	8.3076

Tab. 4.3

I portafogli creati utilizzando la metodologia four-moments esibiscono (come nei casi precedenti) un rendimento medio leggermente inferiore rispetto alle allocazioni ottenute con esponenziale media-varianza. Inoltre, in accordo con quanto precedentemente osservato, utilizzando la funzione di utilità che incorpora le matrici dei co-momenti terzo e quarto si ottengono portafogli aventi valori di asimmetria e curtosi inferiori. Ancora una volta si valuta se gli

scostamenti di tali momenti siano statisticamente significativi, ipotizzando indipendenza ed identica distribuzione dei rendimenti.

Si riportano in figura 4.9 gli intervalli di confidenza al 95% per asimmetria e curtosi dei portafogli, per ogni livello di avversione al rischio considerato nell'analisi.

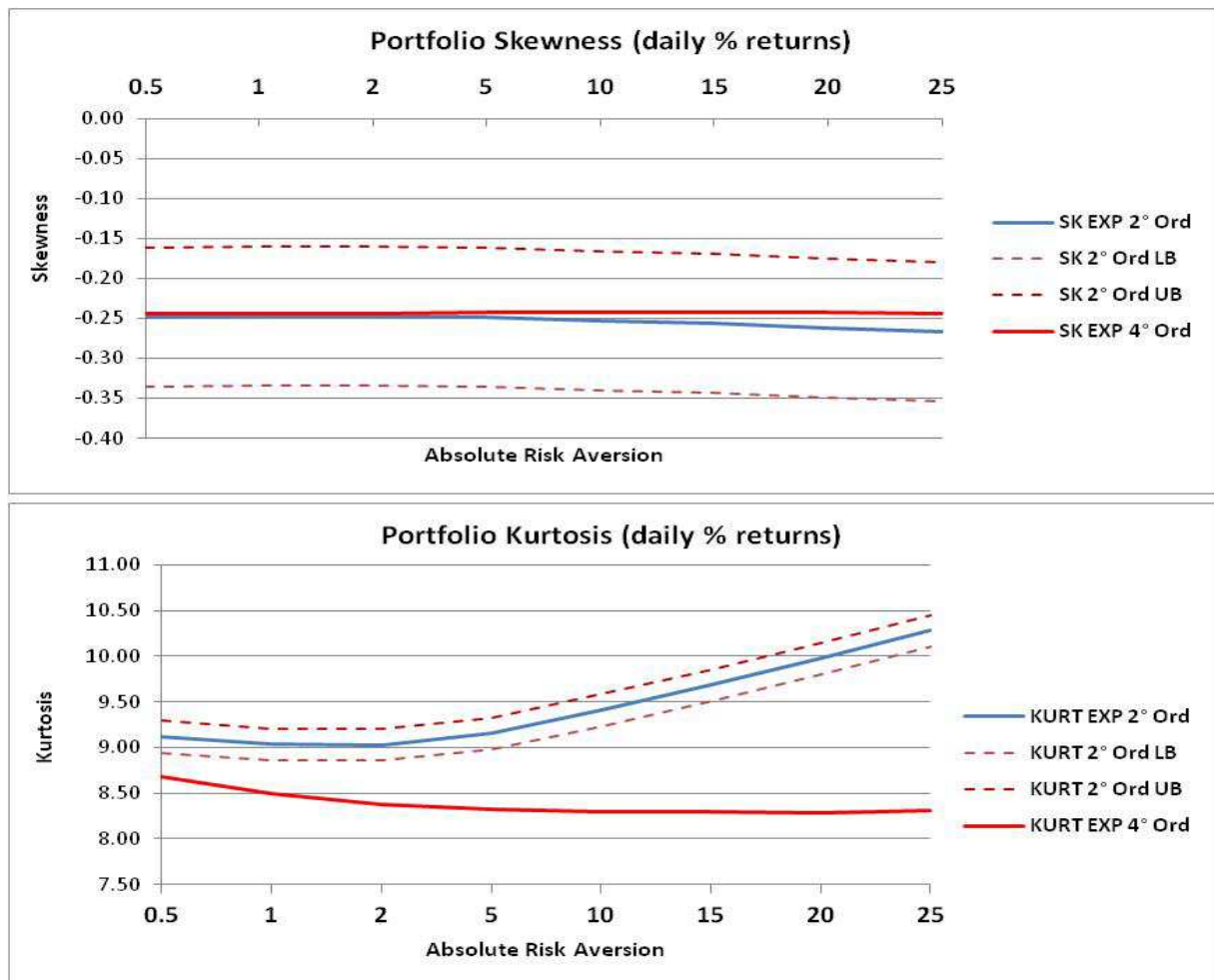


Fig. 4.9

Osservando i grafici in figura 4.9 si può ragionevolmente affermare che, passando da un approccio a due momenti alla naturale estensione a quattro momenti, solo la riduzione della curtosi di portafoglio sembra essere statisticamente significativa a livello $\alpha=5\%$.

Il grafico in figura 4.10 riporta la performance di ciascun portafoglio misurata utilizzando l'Adjusted Sharpe Ratio. La tabella contenente i valori dell' ASR è riportata in appendice A.3.3.

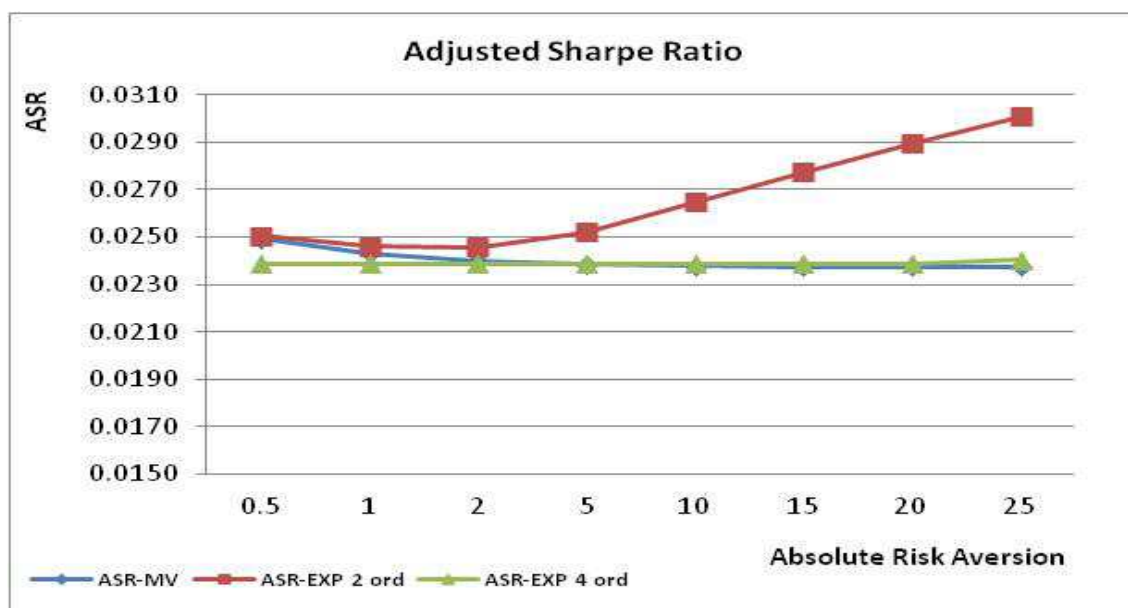


Fig. 4.10

Come precedentemente constatato, la performance dei portafogli ottenuti impiegando la funzione di utilità esponenziale a due momenti risulta generalmente maggiore. Il metodo four-moments esibisce una performance prossima a quella ottenuta impiegando la classica funzione di utilità media-varianza, la quale basa le allocazioni unicamente sui primi due momenti della distribuzione dei rendimenti. Le allocazioni ottenute con funzione di utilità esponenziale a due e quattro momenti dimostrano un risultato assimilabile a quello ottenuto con funzione media-varianza, per bassi valori di avversione al rischio ($R_a \leq 2$).

4.3 Risultati parte II

Nelle pagine seguenti vengono presentati i risultati ottenuti nella seconda parte dell'analisi svolta. Per ciascun dataset si considerano i sub campioni definiti in tabella 3.2.

4.3.1 Sub campioni, rendimenti mensili

Il grafico sottostante riporta i pesi ottimi associati ad ogni asset per ciascuno dei livelli di avversione al rischio considerati. In particolare, nei riquadri di sinistra sono rappresentate le allocazioni ottenute analizzando il primo sub campione, caratterizzato da una minor volatilità, curtosi e da asimmetria positiva nella distribuzione dei rendimenti (eccetto per "Emerging Markets"). I pesi ottimi ottenuti nel secondo sub campione sono invece raffigurati nei riquadri di destra.

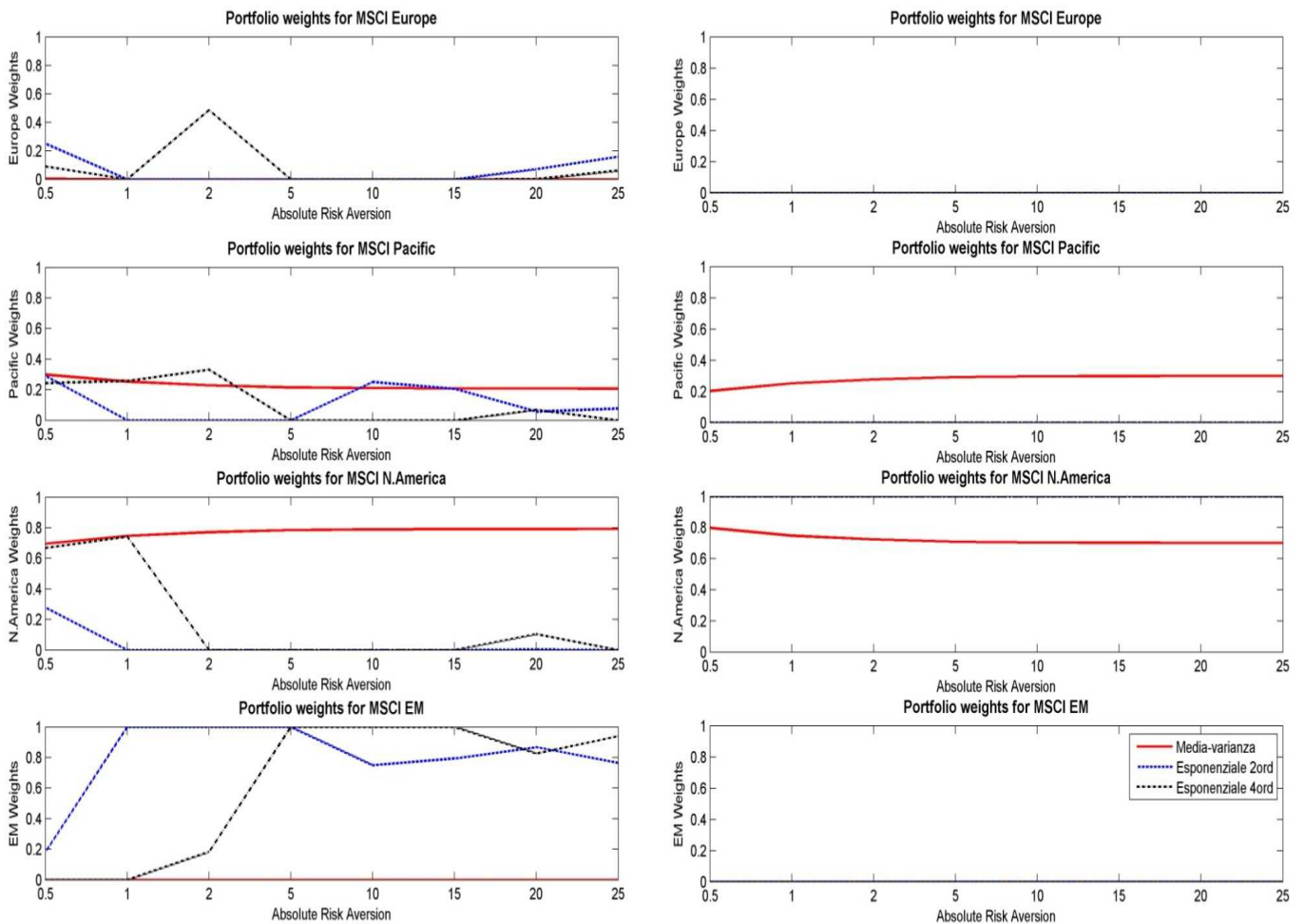


Fig. 4.11

Nel primo periodo considerato, all'aumentare dell'avversione al rischio entrambe le metodologie di allocazione basate sulla funzione di utilità esponenziale aumentano l'esposizione verso "*Emerging Markets*", riducendo al contempo la posizione sul titolo "*North America*". I pesi attribuiti dalle due metodologie all'asset "*Europe*" risultano molto vicini, eccetto per il picco riscontrato per $R_a=2$. Di maggiore interesse, risulta il peso ottimo associato al titolo "*Pacific*". Si nota infatti, come le metodologie esponenziale media-varianza ed esponenziale four-moments diano luogo a pesi ottimi con un andamento speculare, al variare dell'avversione al rischio. All'aumentare dell'esposizione verso "*Pacific*" da parte dell'esponenziale a due momenti, corrisponde invece una riduzione del peso attribuitogli dal metodo four-moments. Utilizzando invece la funzione di utilità media-varianza, si ottiene un'allocazione non dissimile da quella precedentemente rappresentata in figura 4.2.

Nel secondo periodo sia il modello esponenziale media-varianza che esponenziale four-moments danno luogo a portafogli con pesi ottimi estremi, allocando il 100% della ricchezza nel titolo "*North America*". Quest'ultimo è caratterizzato da un rendimento medio maggiore ed una volatilità minore rispetto ai rimanenti (tabelle 3.4 e 3.5). Nessuno dei tre modelli considerati attribuisce una quantità di ricchezza al titolo "*Emerging Markets*", considerato probabilmente troppo rischioso, quindi non appetibile. L'allocazione individuata dal modello media-varianza non sembra differire di molto dal primo periodo, investendo la maggior parte della ricchezza nei titoli aventi minor volatilità.

La tabella contenente i pesi ottimi per ciascuna allocazione è riportata in appendice A.4.1.

Come fatto in precedenza per la prima parte, si riportano i momenti dei portafogli per ciascuno dei due periodi analizzati. I risultati sono presentati in tabella 4.4.

I° PERIODO BASSA VOLATILITA': 01/01/2003 - 31/07/2007									
Risk aversion		0.5	1	2	5	10	15	20	25
MV	Mean	1.1880	1.1603	1.1480	1.1406	1.1382	1.1374	1.1369	1.1367
	Variance	5.6221	5.5359	5.5175	5.5123	5.5116	5.5115	5.5114	5.5114
	Skewness	-0.1680	-0.1039	-0.0674	-0.0446	-0.0368	-0.0342	-0.0329	-0.0321
	Kurtosis	2.5293	2.5758	2.6036	2.6213	2.6274	2.6294	2.6305	2.6311
Exp 2° ord	Mean	1.6135	2.5688	2.5688	2.5688	2.3144	2.3590	2.4385	2.3442
	Variance	8.2989	21.4560	21.4560	21.4560	17.1400	17.7970	18.8790	17.1150
	Skewness	-0.2923	-0.6767	-0.6767	-0.6767	-0.6820	-0.6865	-0.6471	-0.5958
	Kurtosis	2.6434	3.2390	3.2390	3.2390	3.2671	3.2745	3.1787	3.0842
Exp 4° ord	Mean	1.2106	1.1630	1.7838	2.5688	2.5688	2.5688	2.3375	2.5124
	Variance	5.7684	5.5417	9.9086	21.4560	21.4560	21.4560	17.4800	20.2520
	Skewness	-0.0646	-0.1116	-0.2437	-0.6767	-0.6767	-0.6767	-0.6576	-0.6469
	Kurtosis	2.6597	2.5699	2.5978	3.2390	3.2390	3.2390	3.1983	3.1763
II° PERIODO ALTA VOLATILITA': 01/08/2007 - 02/09/2013									
MV	Mean	0.2078	0.1877	0.1777	0.1717	0.1697	0.1691	0.1687	0.1685
	Variance	26.4780	26.4180	26.4030	26.3990	26.3980	26.3980	26.3980	26.3980
	Skewness	-0.7396	-0.7457	-0.7481	-0.7493	-0.7496	-0.7497	-0.7498	-0.7498
	Kurtosis	4.0104	4.0162	4.0170	4.0168	4.0166	4.0165	4.0165	4.0165
Exp 2° ord	Mean	0.2898	0.2898	0.2898	0.2898	0.2898	0.2898	0.2898	0.2898
	Variance	27.1430	27.1430	27.1430	27.1430	27.1430	27.1430	27.1430	27.1430
	Skewness	-0.6951	-0.6951	-0.6951	-0.6951	-0.6951	-0.6951	-0.6951	-0.6951
	Kurtosis	3.9320	3.9320	3.9320	3.9320	3.9320	3.9320	3.9320	3.9320
Exp 4° ord	Mean	0.2898	0.2898	0.2898	0.2898	0.2898	0.2898	0.2898	0.2898
	Variance	27.1430	27.1430	27.1430	27.1430	27.1430	27.1430	27.1430	27.1430
	Skewness	-0.6951	-0.6951	-0.6951	-0.6951	-0.6951	-0.6951	-0.6951	-0.6951
	Kurtosis	3.9320	3.9320	3.9320	3.9320	3.9320	3.9320	3.9320	3.9320

Tab. 4.4

Nel periodo caratterizzato da minor volatilità dei mercati, per bassi livelli di avversione al rischio ($R_a \leq 2$), i portafogli ottenuti mediante il modello four-moments esibiscono un rendimento medio minore, unitamente ad una variabilità,

asimmetria e curtosi leggermente inferiori. All'aumentare dell'indice di avversione, i metodi di allocazione esponenziale media-varianza ed esponenziale four-moments danno luogo a portafogli aventi performance simili. Nel secondo periodo i due modelli sopracitati producono allocazioni equivalenti, aventi quindi gli stessi valori di rendimento medio, variabilità, asimmetria e curtosi. Per valutare se vi siano degli scostamenti significativi sui momenti terzo e quarto, si utilizzano gli intervalli di confidenza al 95% impiegati nella prima parte dell'analisi (si ipotizza indipendenza ed identica distribuzione dei rendimenti di ciascun asset).

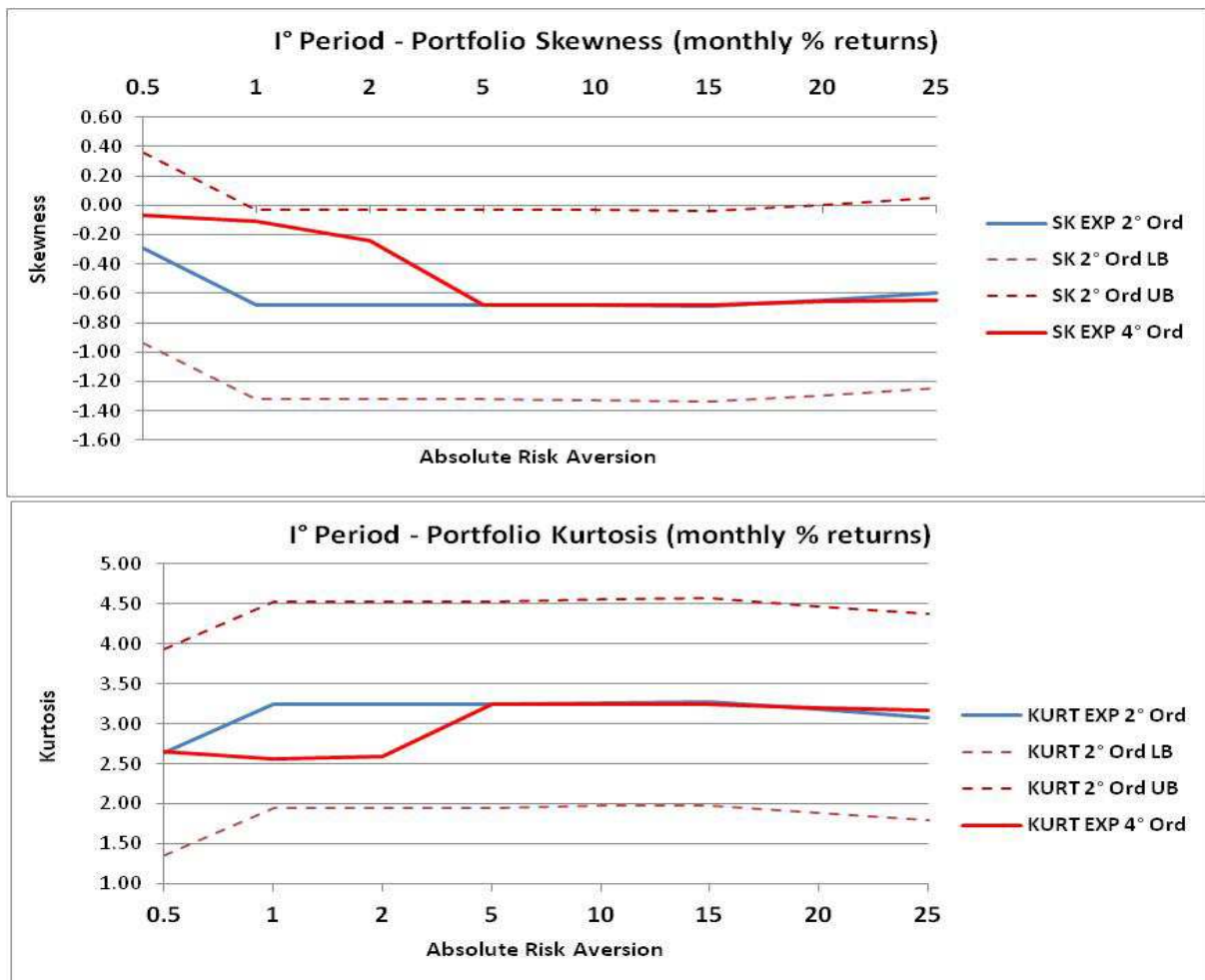


Fig. 4.12

Dai grafici riportati in figura 4.12 non emergono scostamenti di asimmetria e curtosi statisticamente significativi, passando dal modello esponenziale a due

momenti alla versione estesa a 4 momenti. I grafici riguardanti il secondo periodo non vengono riportati, per ovvie ragioni.

Per un accurata valutazione delle performance si utilizza l'Adjusted Sharpe Ratio, come precedentemente fatto nella prima sezione. L'indice viene calcolato per entrambi i sub campioni oggetto d'analisi. Le tabelle contenente i valori dell'indice sono riportate in appendice A.4.1.

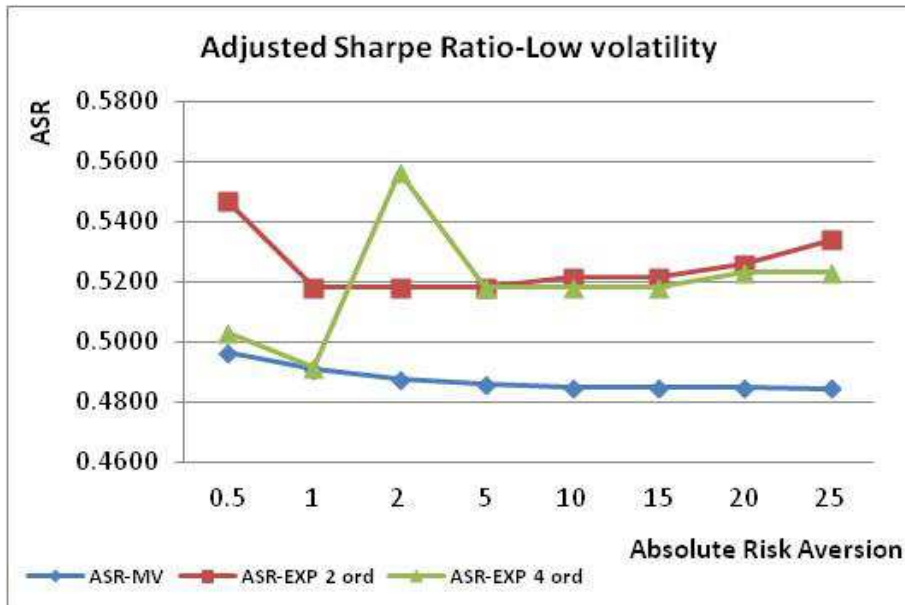


Fig. 4.13

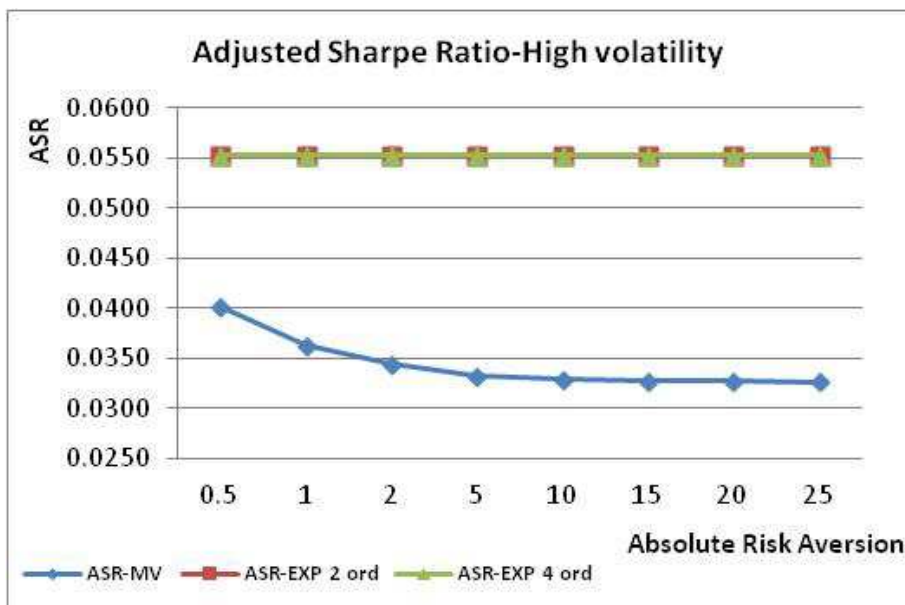


Fig. 4.14

Nel primo periodo considerato, il modello esponenziale media-varianza detiene una performance più elevata, fatta eccezione per $R_a=2$, punto nel quale l'allocazione four-moments dimostra una variabilità notevolmente inferiore. I portafogli ottenuti impiegando la classica funzione di utilità media-varianza ottengono una performance inferiore rispetto ai rimanenti, condizione comunque valida anche nel periodo caratterizzato da volatilità maggiore. Nel secondo periodo, i metodi basati su sviluppi del secondo e quarto ordine della funzione di utilità esponenziale ottengono la stessa performance, poiché generata da allocazioni equivalenti.

4.3.2 Sub campioni, rendimenti settimanali

Nel grafico seguente sono raffigurate le allocazioni ottimali su rendimenti settimanali, ottenute con i tre modelli di asset allocation analizzati. I pesi ottimi dei portafogli raffigurati nel riquadro di sinistra (destra) sono inerenti al primo (secondo) sub campione.

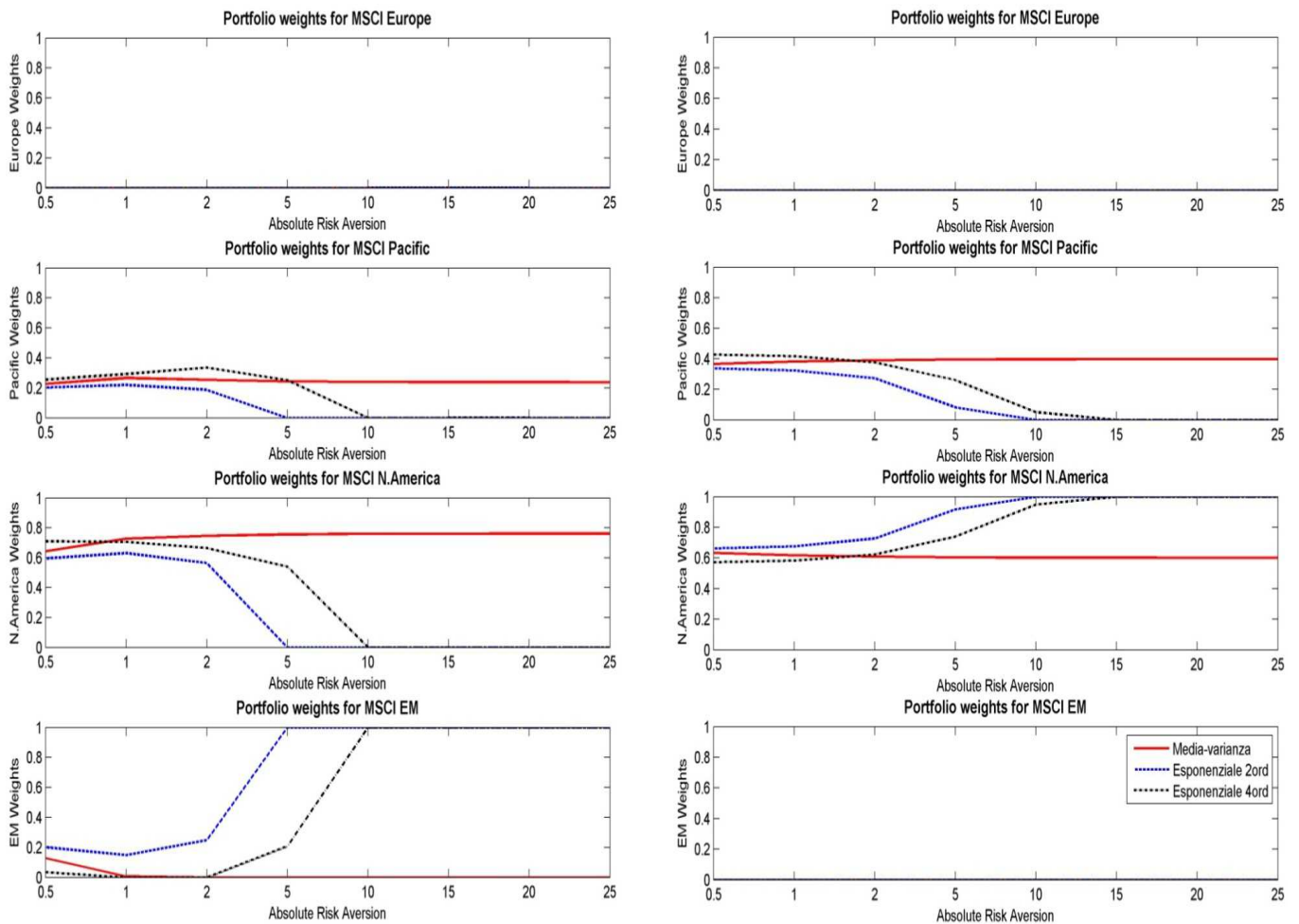


Fig. 4.15

Osservando le allocazioni riguardanti il primo periodo, al variare dell'indice di avversione assoluta al rischio, si può notare come queste dimostrino un andamento prossimo a quello rappresentato in figura 4.5, ottenuto considerando l'intero campione di rendimenti settimanali. Vi è infatti una contrazione del peso attribuito all'asset "North America" ed un conseguente incremento della ricchezza

allocata in "*Emerging Markets*". A differenza delle allocazioni individuate nell'intero campione di rendimenti settimanali, utilizzando il primo sub campione tutti e tre i modelli impiegati attribuiscono peso nullo al titolo "*Europe*". Come precedentemente riscontrato utilizzando dati settimanali, i modelli media-varianza, esponenziale media-varianza ed esponenziale four-moments convergono per bassi valori di avversione al rischio. Limitando invece l'attenzione ai soli metodi basati su espansioni in serie di Taylor dell'utilità esponenziale, si può notare come questi convergano per elevati valori di avversione. A riprova di ciò, è sufficiente notare che l'esponenziale media-varianza e l'estensione a quattro momenti danno luogo alla stessa allocazione, a partire da $R_a=10$.

In riferimento al secondo periodo campionario, i portafogli ottimi concentrano la maggior parte della ricchezza negli asset "*Pacific*" e "*North America*", poiché ritenuti più appetibili nel periodo di mercato sfavorevole (si veda tabella 3.7). Tuttavia, diversamente da quanto riscontrato utilizzando rendimenti mensili nel secondo periodo, i pesi ottimi risultano meno estremi, sebbene concentrati negli stessi asset. La convergenza dei tre metodi di allocazione descritta precedentemente rimane comunque valida, anche in condizioni di mercato sfavorevoli. A differenza del primo periodo campionario, si notano delle differenze molto più contenute nei pesi ottimi ricavati dai due metodi di allocazione basati su funzione di utilità esponenziale. I due metodi in questione suggeriscono la medesima allocazione a partire da $R_a=15$.

Le tabelle contenenti i pesi ottimi di ciascun portafoglio sono riportate in appendice A.4.2.

Si riporta di seguito la tabella contenente i valori di rendimento medio, varianza, asimmetria e curtosi di ogni portafoglio rappresentato in figura 4.15.

I° PERIODO BASSA VOLATILITA': 01/01/2003 - 31/07/2007									
Risk aversion		0.5	1	2	5	10	15	20	25
MV	Mean	0.3255	0.2888	0.2851	0.2838	0.2833	0.2832	0.2831	0.2831
	Variance	2.3042	2.1942	2.1879	2.1870	2.1869	2.1868	2.1868	2.1868
	Skewness	-0.2077	-0.0344	-0.0048	0.0095	0.0142	0.0158	0.0166	0.0171
	Kurtosis	3.5394	3.7424	3.8362	3.8935	3.9131	3.9197	3.9231	3.9250
Exp 2°ord	Mean	0.3475	0.3315	0.3616	0.5945	0.5945	0.5945	0.5945	0.5945
	Variance	2.4057	2.3293	2.4840	5.3668	5.3668	5.3668	5.3668	5.3668
	Skewness	-0.3070	-0.2355	-0.3664	-0.8443	-0.8443	-0.8443	-0.8443	-0.8443
	Kurtosis	3.4742	3.5172	3.4553	4.1830	4.1830	4.1830	4.1830	4.1830
Exp 4°ord	Mean	0.2971	0.2904	0.2958	0.3560	0.5945	0.5945	0.5945	0.5945
	Variance	2.2128	2.1996	2.2252	2.4614	5.3668	5.3668	5.3668	5.3668
	Skewness	-0.0727	-0.0615	-0.1184	-0.3728	-0.8443	-0.8443	-0.8443	-0.8443
	Kurtosis	3.6934	3.6317	3.4668	3.3749	4.1830	4.1830	4.1830	4.1830
II° PERIODO ALTA VOLATILITA': 01/08/2007 - 02/09/2013									
MV	Mean	0.0312	0.0298	0.0291	0.0287	0.0285	0.0285	0.0284	0.0284
	Variance	7.2268	7.2226	7.2215	7.2212	7.2212	7.2212	7.2212	7.2212
	Skewness	-0.9029	-0.8988	-0.8965	-0.8950	-0.8945	-0.8943	-0.8942	-0.8942
	Kurtosis	7.0456	7.0343	7.0283	7.0246	7.0234	7.0229	7.0227	7.0226
Exp 2°ord	Mean	0.0337	0.0348	0.0393	0.0558	0.0630	0.0630	0.0630	0.0630
	Variance	7.2415	7.2511	7.3065	7.7586	8.0791	8.0791	8.0791	8.0791
	Skewness	-0.9084	-0.9101	-0.9122	-0.8655	-0.8252	-0.8252	-0.8252	-0.8252
	Kurtosis	7.0638	7.0710	7.0924	7.0796	7.0355	7.0355	7.0355	7.0355
Exp 4°ord	Mean	0.0259	0.0268	0.0303	0.0404	0.0586	0.0630	0.0630	0.0630
	Variance	7.2256	7.2231	7.2238	7.3242	7.8754	8.0791	8.0791	8.0791
	Skewness	-0.8836	-0.8874	-0.9004	-0.9117	-0.8507	-0.8252	-0.8252	-0.8252
	Kurtosis	6.9986	7.0070	7.0387	7.0960	7.0645	7.0355	7.0355	7.0355

Tab. 4.5

Per quanto concerne il primo periodo, si nota un rendimento medio inferiore per i portafogli ottenuti con il metodo esponenziale four-moments, congiuntamente ad

una riduzione di variabilità ed asimmetria, per $R_a \leq 10$. Nel secondo periodo, i pesi dei portafogli individuati con i modelli esponenziale media-varianza ed esponenziale four-moments risultano molto vicini, di conseguenza non si rilevano particolari differenze nei momenti (fatta eccezione per il rendimento medio e la varianza, ancora una volta inferiori per i portafogli ottenuti con funzione di utilità a 4 momenti).

Ponendo il focus sui momenti terzo e quarto, si costruiscono gli intervalli di confidenza per ciascun periodo, assumendo come in precedenza l'ipotesi di indipendenza ed identica distribuzione dei rendimenti. In figura 4.16 sono riportati i valori di asimmetria dei portafogli ottenuti con i modelli esponenziale media-varianza ed esponenziale four-moments, per ciascuno dei due periodi analizzati.

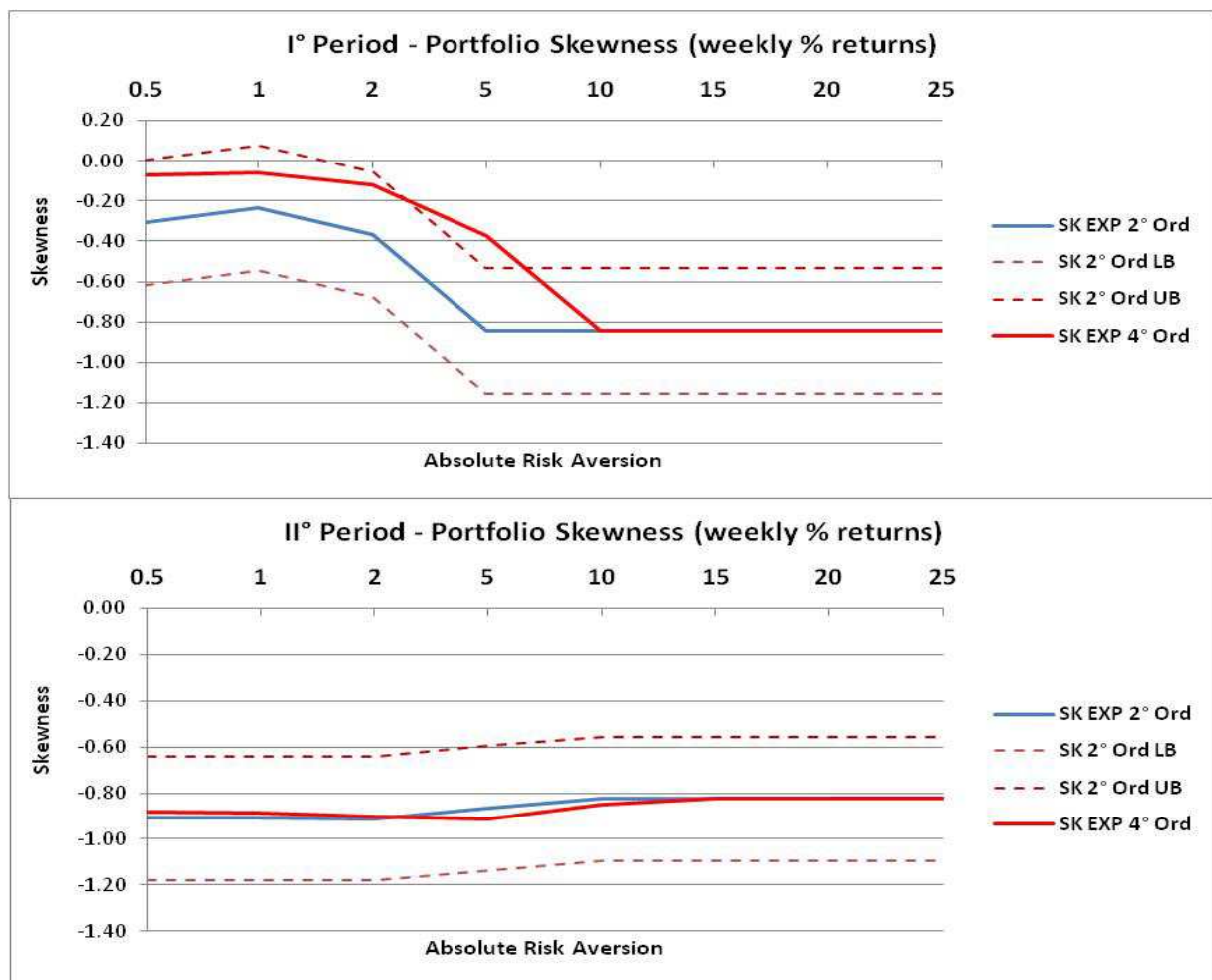


Fig. 4.16

Nel grafico sottostante sono invece riportati i valori della curtosi dei portafogli, nei due periodi campionari.

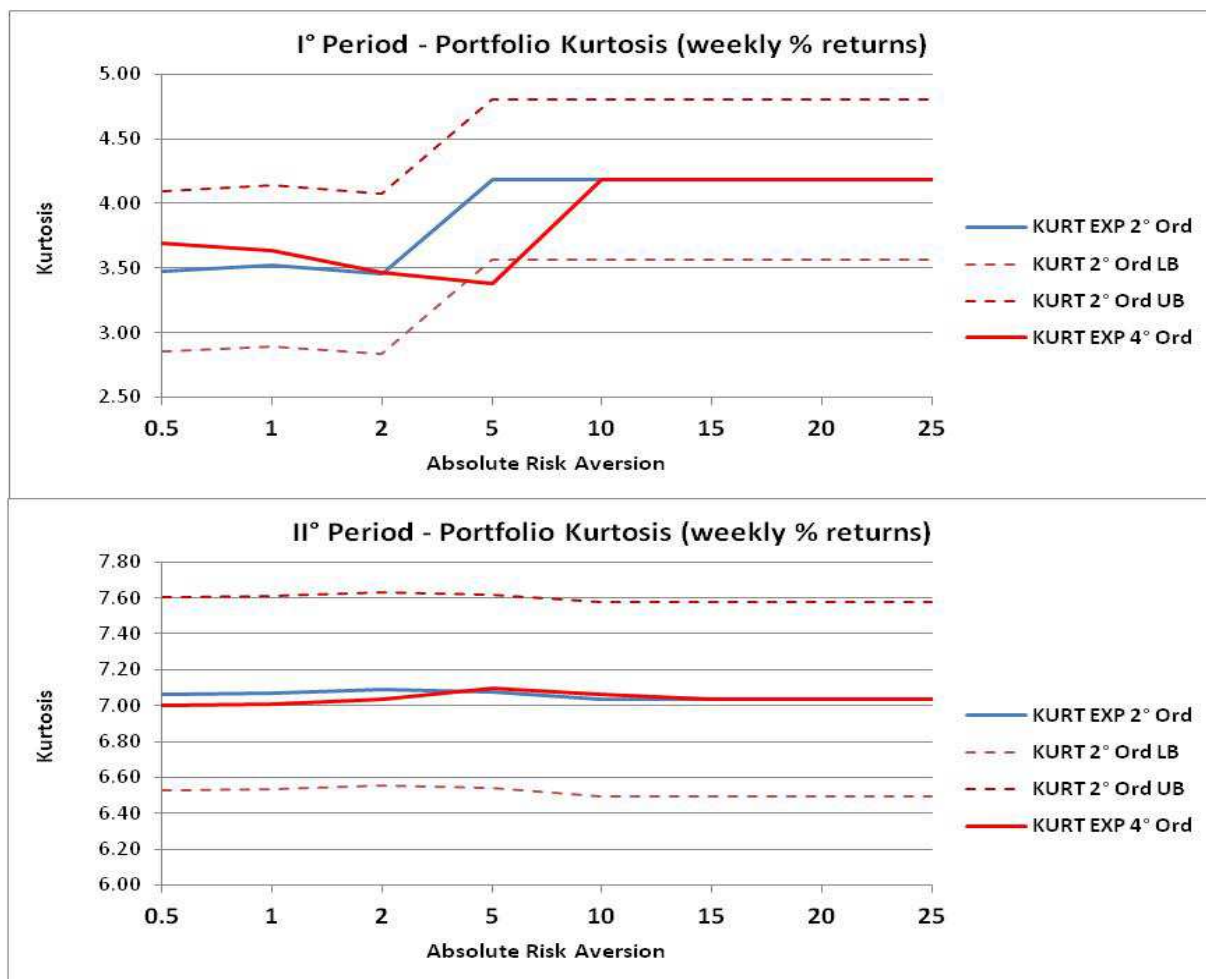


Fig. 4.17

I grafici 4.16 e 4.17 confermano quanto precedentemente affermato osservando la tabella dei momenti 4.5. Non sembrano esservi scostamenti di asimmetria o curtosi statisticamente significativi, passando dal modello esponenziale media-varianza all'estensione a 4 momenti. In aggiunta, per alcuni valori di avversione al rischio si nota un incremento (anche se non significativo) della curtosi ed un aumento di asimmetria.

Come fatto per ciascuna analisi svolta, si ricorre all'indice ASR per la valutazione della performance di ciascun portafoglio. I valori di ASR necessari alla costruzione dei grafici 4.18 e 4.19 sono riportati in appendice A.4.2.

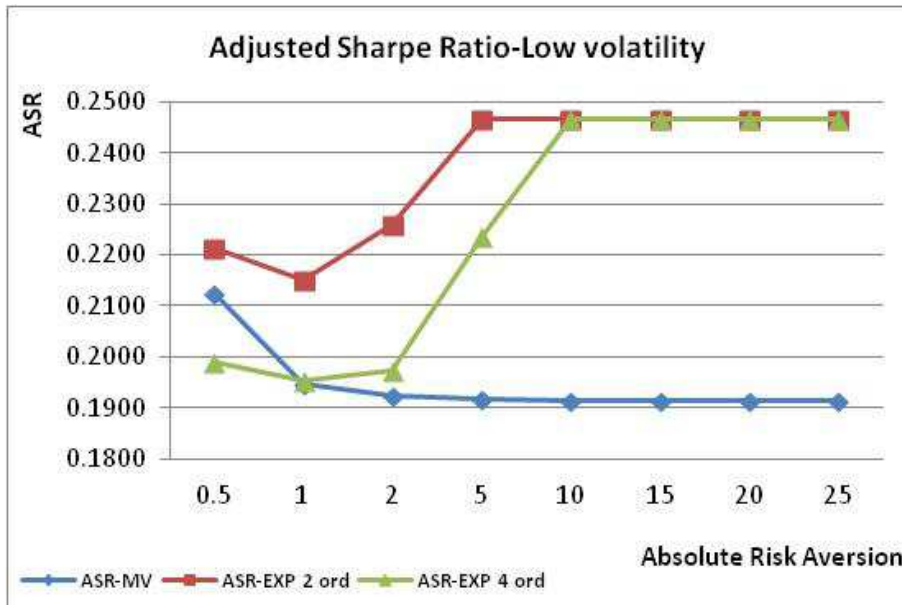


Fig. 4.18

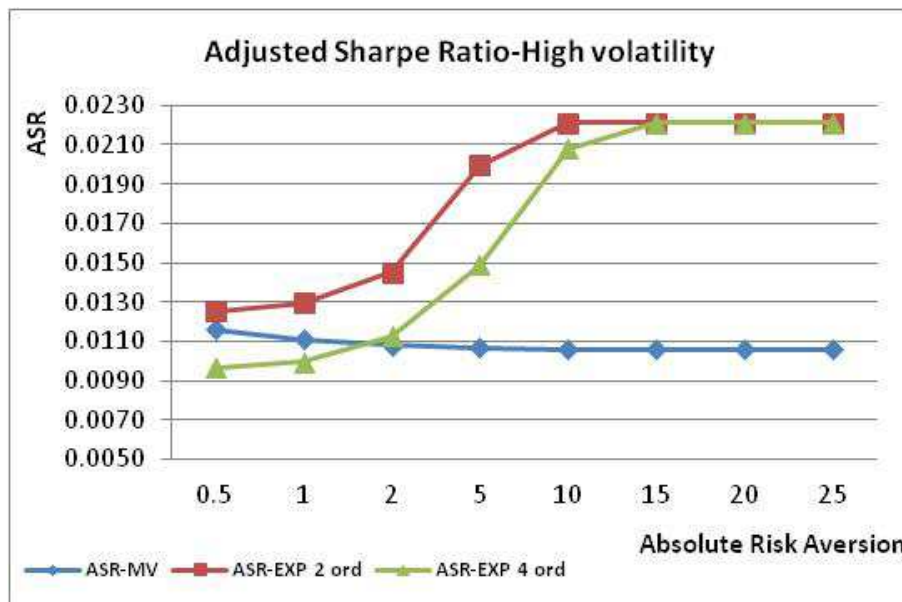


Fig. 4.19

Per entrambi i periodi campionari considerati, i portafogli ottenuti con il metodo esponenziale media-varianza esibiscono una performance maggiore rispetto a

quelli costruiti con approccio four-moments o media-varianza. Per entrambe le metodologie di allocazione basate sulla funzione di utilità esponenziale, la performance dei portafogli sembra aumentare, all'aumentare dell'avversione al rischio (in ciascuno dei due sub campioni). Si nota infatti un andamento simile per l'indice ASR di ciascun portafoglio, nei due periodi campionari.

4.3.3 Sub campioni, rendimenti giornalieri

La figura 4.20 raffigura l'andamento dei pesi ottimi di ciascun portafoglio, al variare del coefficiente di avversione assoluta al rischio. In particolare, utilizzando rendimenti a frequenza giornaliera si ottengono i portafogli per il primo (riquadri di sinistra) e secondo (riquadri di destra) sub campione analizzato.

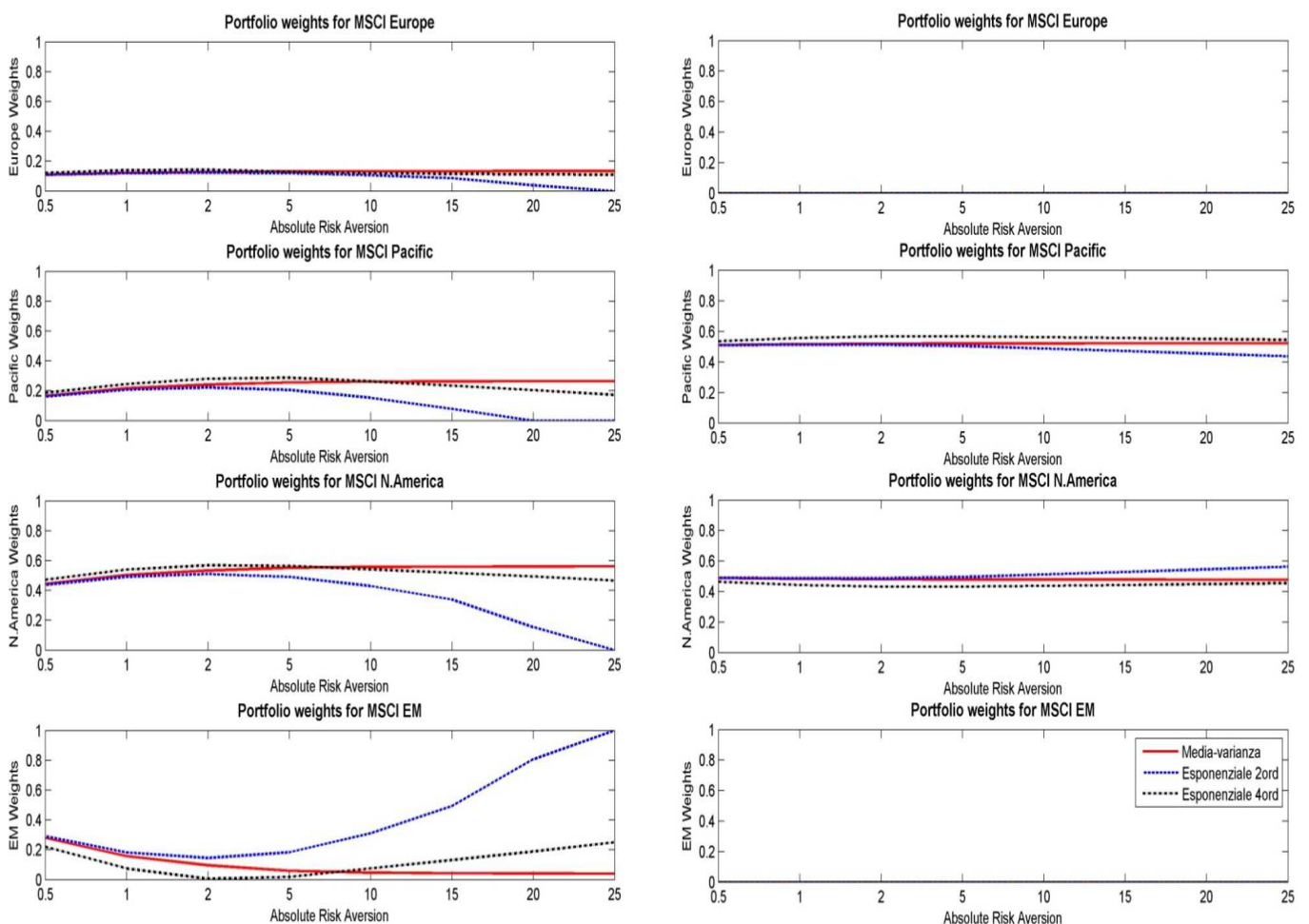


Fig. 4.20

In accordo con le precedenti simulazioni, anche in condizioni di mercato "favorevoli", i tre modelli di allocazione convergono per bassi valori di avversione al rischio. Come riscontrato per il primo sub campione di rendimenti settimanali, anche nel primo periodo campionario di rendimenti giornalieri, l'andamento dei pesi ottimi (al variare dell'avversione al rischio) risulta molto simile a quello descritto in figura 4.8, ottenuta considerando l'intero campione. Ponendo il focus sul modello esponenziale media-varianza, si nota infatti la medesima contrazione del peso attribuito all'asset "*North America*" ed un corrispondente incremento della ricchezza allocata in "*Emerging Markets*". Tali variazioni risultano più accentuate, considerando il sub campione rappresentativo di una condizione di mercato favorevole all'investimento.

Considerando il secondo periodo campionario, rappresentativo di una condizione di mercato sfavorevole (in presenza di vincoli allo short selling), le tre tecniche di allocazione danno luogo a portafogli con pesi molto simili, per ciascun valore di avversione al rischio. Inoltre, tali pesi risultano particolarmente stabili al variare del coefficiente R_a . A differenza del secondo sub campione di rendimenti settimanali, considerando rendimenti giornalieri non si notano posizioni estreme sui titoli "*Pacific*" e "*North America*".

La tabella dei pesi ottimi rappresentati in figura 4.20 è riportata in appendice A.4.3.

Si riporta la tabella contenente i momenti dei portafogli raffigurati in figura 4.20.

I° PERIODO BASSA VOLATILITA': 01/01/2003 - 31/07/2007									
Risk aversion		0.5	1	2	5	10	15	20	25
MV	Mean	0.0747	0.0680	0.0647	0.0627	0.0620	0.0618	0.0617	0.0616
	Variance	0.4245	0.4045	0.3995	0.3981	0.3979	0.3978	0.3978	0.3978
	Skewness	-0.4420	-0.3447	-0.2934	-0.2623	-0.2519	-0.2485	-0.2468	-0.2457
	Kurtosis	4.3272	4.1086	4.0276	3.9899	3.9792	3.9758	3.9742	3.9732
Exp 2°ord	Mean	0.0754	0.0694	0.0674	0.0695	0.0765	0.0865	0.1044	0.1164
	Variance	0.4275	0.4075	0.4032	0.4077	0.4319	0.4922	0.6777	0.8699
	Skewness	-0.4518	-0.3652	-0.3348	-0.3668	-0.4654	-0.5799	-0.6915	-0.7100
	Kurtosis	4.3541	4.1476	4.0913	4.1507	4.3932	4.8005	5.5138	5.8671
Exp 4°ord	Mean	0.0715	0.0637	0.0600	0.0606	0.0636	0.0666	0.0696	0.0730
	Variance	0.4133	0.3986	0.3981	0.3981	0.3987	0.4019	0.4081	0.4180
	Skewness	-0.3951	-0.2742	-0.2210	-0.2356	-0.2813	-0.3251	-0.3697	-0.4170
	Kurtosis	4.2150	4.0137	3.9483	3.9390	3.9935	4.0657	4.1534	4.2608
II° PERIODO ALTA VOLATILITA': 01/08/2007 - 02/09/2013									
MV	Mean	0.0082	0.0081	0.0081	0.0080	0.0080	0.0080	0.0080	0.0080
	Variance	1.2614	1.2611	1.2610	1.2610	1.2610	1.2610	1.2610	1.2610
	Skewness	-0.2533	-0.2528	-0.2525	-0.2523	-0.2523	-0.2523	-0.2523	-0.2523
	Kurtosis	8.3385	8.3000	8.2812	8.2699	8.2662	8.2650	8.2643	8.2640
Exp 2°ord	Mean	0.0083	0.0082	0.0082	0.0084	0.0087	0.0090	0.0094	0.0097
	Variance	1.2616	1.2613	1.2613	1.2622	1.2653	1.2707	1.2783	1.2883
	Skewness	-0.2535	-0.2531	-0.2532	-0.2540	-0.2553	-0.2563	-0.2571	-0.2575
	Kurtosis	8.3508	8.3242	8.3292	8.3920	8.5184	8.6556	8.8012	8.9543
Exp 4°ord	Mean	0.0077	0.0073	0.0071	0.0071	0.0072	0.0073	0.0074	0.0076
	Variance	1.2617	1.2655	1.2688	1.2690	1.2673	1.2656	1.2641	1.2629
	Skewness	-0.2508	-0.2482	-0.2468	-0.2467	-0.2474	-0.2482	-0.2489	-0.2497
	Kurtosis	8.1722	8.0397	7.9806	7.9760	8.0050	8.0387	8.0746	8.1125

Tab. 4.6

I dati contenuti in tabella 4.6 concordano con le analisi svolte in precedenza sui dataset contenenti rendimenti a frequenza settimanale e mensile. Si può notare infatti, come il rendimento medio dei portafogli ottenuti con il modello four-

moments sia inferiore, per ciascun livello di avversione al rischio considerato. Tale condizione rimane valida anche considerando il secondo periodo campionario, rappresentativo di un peggioramento di scenario del mercato. Ponendo il focus sui momenti di ordine superiore, è possibile osservare come nel primo periodo, i portafogli ottenuti con il modello four-moments esibiscano, ancora una volta, una minor asimmetria e curtosi rispetto a quelli costruiti con il metodo esponenziale media-varianza. Si osserva la stessa condizione anche nel secondo sub campione, sebbene la riduzione sia molto più contenuta. Da notare inoltre, la riduzione di variabilità che si ottiene nel primo periodo, passando dal modello di allocazione esponenziale media-varianza all'estensione a 4 momenti.

I grafici sottostanti raffigurano l'andamento del momento terzo dei portafogli ottenuti con esponenziale media-varianza ed esponenziale four-moments, congiuntamente agli intervalli di confidenza al 95% costruiti sotto ipotesi di indipendenza ed identica distribuzione dei rendimenti.

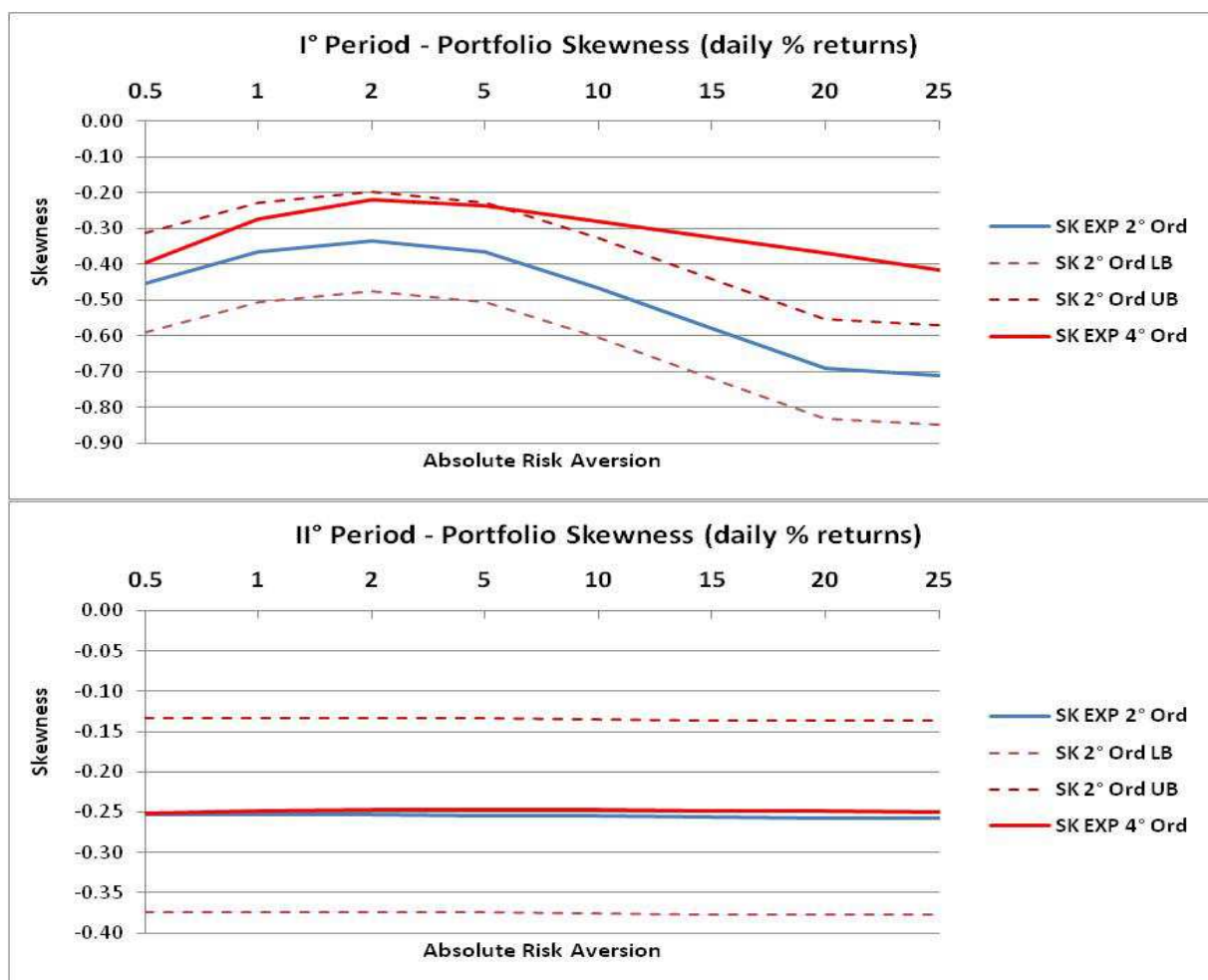


Fig. 4.21

Di seguito vengono riportati i grafici relativi alla curtosi dei portafogli in entrambi i periodi campionari.

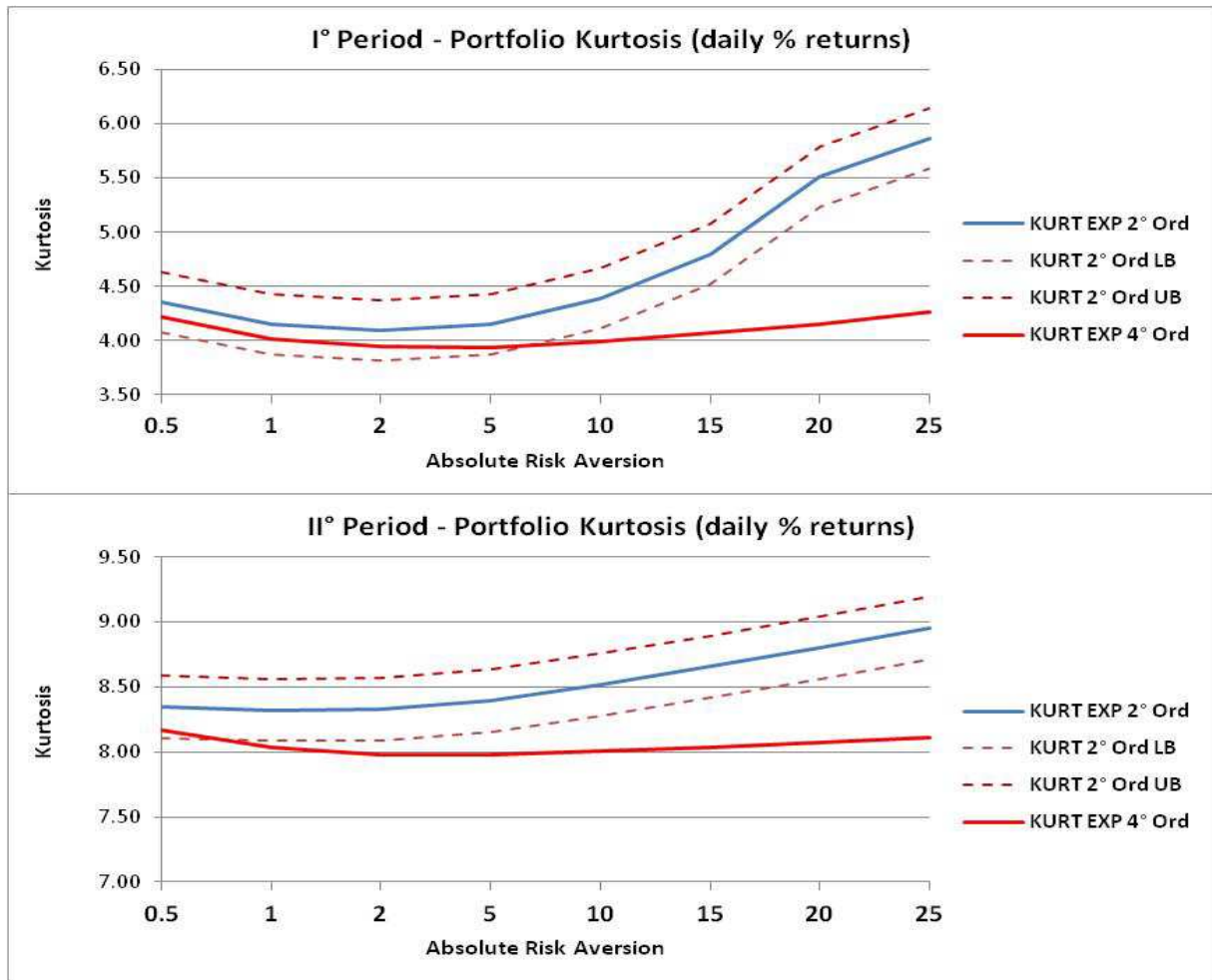


Fig. 4.22

La riduzione di asimmetria riscontrata in tabella 4.6 risulta statisticamente significativa considerando il primo periodo campionario, per $R_a \geq 10$. Nel secondo sub campione la riduzione di curtosi diviene statisticamente significativa a partire da $R_a=1$, mentre considerando il primo periodo campionario, questa diviene significativa per $R_a \geq 10$.

Come fatto nelle precedenti analisi, si utilizza l'Adjusted Sharpe Ratio per valutare la performance di ciascun modello di allocazione. Si riportano quindi i grafici contenenti i valori di ASR di ciascun portafoglio nei due periodi campionari considerati. La tabella di riferimento per i grafici è riportata in appendice A.4.3.

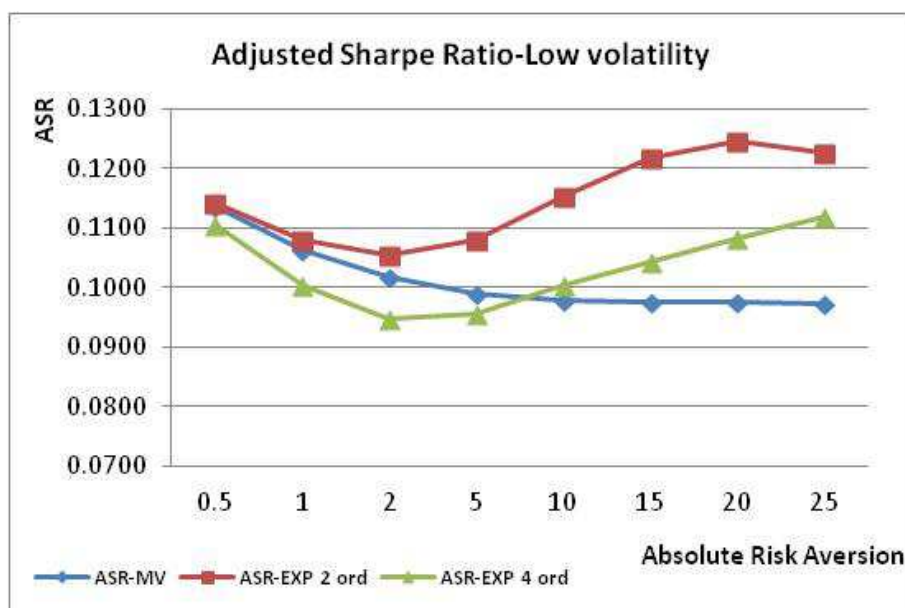


Fig. 4.23

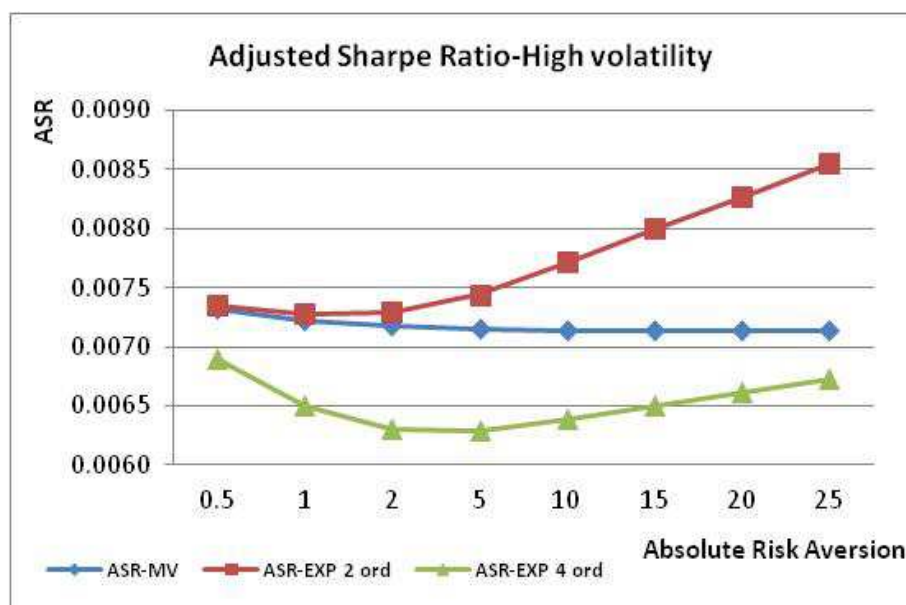


Fig. 4.24

In entrambi i periodi campionari considerati, i portafogli ottenuti con il modello esponenziale media-varianza detengono la performance maggiore, per ogni livello di avversione al rischio utilizzato. Le performance ottenute da ciascuna metodologia di allocazione risultano comunque molto vicine, soprattutto per bassi livelli di avversione al rischio (si ricorda che le tecniche di allocazione considerate tendono a convergere per bassi valori di R_a).

Considerando il secondo sub campione in figura 4.24, si osserva che i portafogli ottenuti con il modello media-varianza, detengono una performance superiore a quelli ottenuti impiegando la funzione di utilità che incorpora asimmetria e curtosi. Tale condizione si verifica anche per il primo periodo campionario, limitatamente ai casi in cui $R_a \leq 5$.

4.3 Risultati parte III

Nelle pagine seguenti sono riportati i risultati della simulazione precedentemente descritta nel §4.1.3. Si è interessati alla performance dei 3 modelli di allocazione utilizzati fino ad ora, in particolare, si vuole valutare se il passaggio da un modello di tipo media-varianza ad un'estensione che coinvolga momenti di ordine superiore, apporti un miglioramento della performance di portafoglio. Utilizzando quindi la 4.1 e 4.2 si sono ottenuti i rendimenti settimanali dei portafogli allocati mediante modello media-varianza, esponenziale media-varianza ed esponenziale four-moments. Si è verificato (si fa riferimento a §4.2 e §4.3) che per valori contenuti di avversione, le tre tecniche di allocazione tendono a convergere, mentre lavorando con rendimenti settimanali, per elevati valori di R_a si notano delle notevoli differenze nei pesi ottimi. L'analisi viene quindi presentata per livelli di avversione assoluta al rischio pari a due e venti.

4.3.1 Simulazione Out of Sample: $R_a=2$

Il grafico seguente riporta le serie dei rendimenti settimanali cumulati dei portafogli ottenuti utilizzando le tre tecniche di allocazione. Si è scelto di utilizzare i rendimenti cumulati, poiché costituiscono uno strumento intuitivo con il quale è possibile stabilire rapidamente, quale dei modelli utilizzati sia il più proficuo. Si ipotizza quindi un agente economico che riallochi il proprio portafoglio su base settimanale.

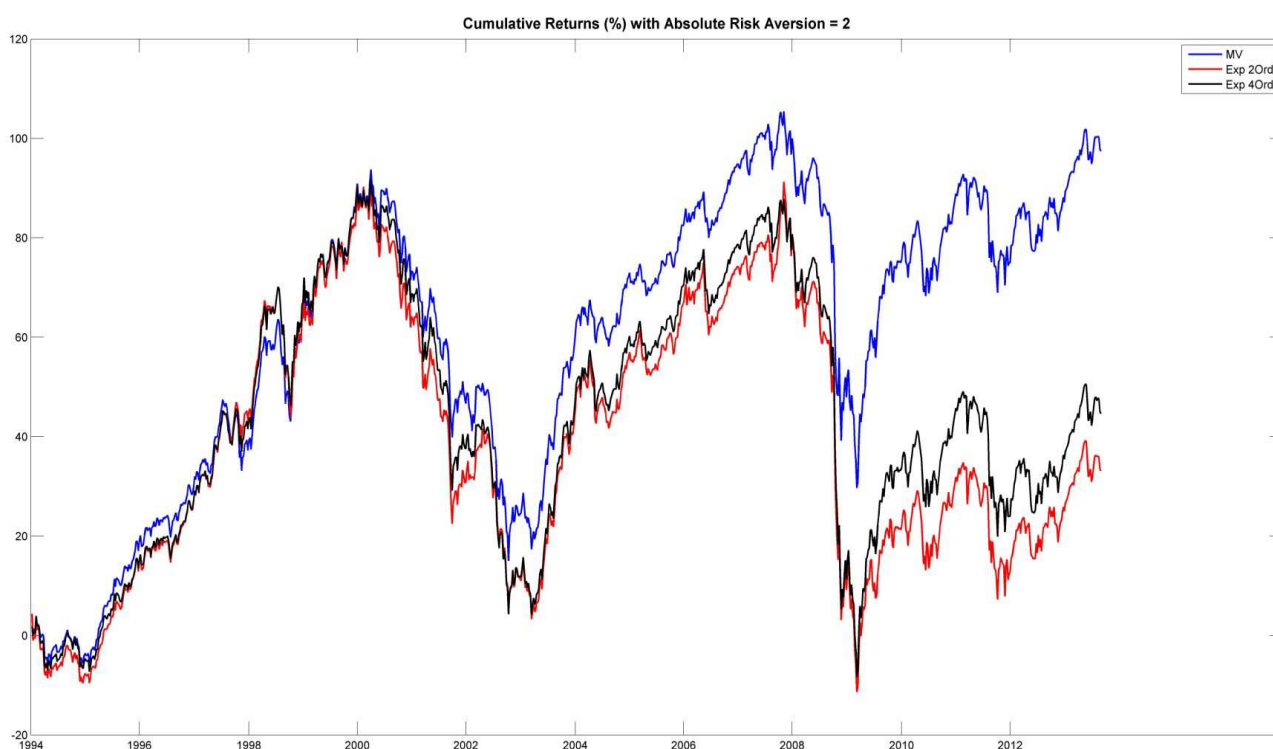


Fig. 4.25

Dal grafico in figura 4.5 si evince che, con un livello di avversione al rischio relativamente basso ($R_a=2$), l'utilizzo dell'approccio four-moments apporti un rendimento di portafoglio sensibilmente maggiore, rispetto al rendimento ottenuto impiegando l'esponenziale media-varianza. La strategia più remunerativa consiste, tuttavia, nell'impiego ripetuto del modello media-varianza. Si nota infatti un rendimento cumulato nettamente maggiore a partire dall'anno 2000.

Avendo a disposizione le tre serie settimanali di rendimenti dei portafogli derivanti da ciascun modello, si sono calcolati: rendimento medio, varianza, asimmetria e curtosi. I dati sono riportati in tabella 4.7.

	MV	EXP 2 Ord	EXP 4 Ord
Mean	0.0950	0.0323	0.0435
Variance	4.6353	4.9940	4.7523
Skewness	-0.7888	-0.8836	-0.9073
Kurtosis	7.3573	6.3879	6.7724
Min	-15.6220	-15.6070	-15.6430
Max	8.3866	7.6607	7.8515
ASR	0.0438	0.0144	0.0199

Tab. 4.7

La tabella 4.7 conferma quanto precedentemente osservato nel grafico 4.25. Contrariamente a quanto visto in precedenza nelle simulazioni in sample, si nota un lieve incremento di asimmetria e curtosi passando dal modello esponenziale media-varianza all'estensione a quattro momenti. L'indicatore Adjusted Sharpe Ratio (ASR) risulta maggiore per i portafogli costruiti utilizzando l'usuale media-varianza. Evidenzia inoltre una performance leggermente superiore per i portafogli allocati con il modello four-moments, rispetto al modello a due momenti.

Per comodità di lavoro, si è deciso di passare dai rendimenti settimanali a rendimenti annuali (composti), ottenendo così tre serie contenenti 20 data point. Si ripropone la tabella dei momenti calcolati su rendimenti annuali.

	MV	EXP 2 Ord	EXP 4 Ord
Mean	5.8781	2.9359	3.6745
Variance	424.7500	466.7900	490.0800
Skewness	-0.5600	-0.8017	-0.7713
Kurtosis	2.7512	3.2478	3.0824
ASR	0.2779	0.1334	0.1624

Tab. 4.8

I dati contenuti in tabella 4.8 sono in accordo con quanto osservato precedentemente in tabella 4.7, fatta eccezione per asimmetria e curtosi. Questi infatti, risultano inferiori per i portafogli ottenuti tramite il modello four-moments, rispetto all'esponenziale media-varianza; tale diminuzione risulta tuttavia irrisoria. Notevolmente maggiore è l'indicatore ASR associato ai portafogli costruiti utilizzando il modello media-varianza. Utilizzando i rendimenti annuali dei portafogli, ottenuti mediante sviluppi in serie della funzione esponenziale, si è successivamente calcolato l'indice di performance Omega:

$$\Omega = \frac{\sum_{t=1}^{20} \max(r_{\text{exp } 4\text{ord},t} - r_{\text{exp } 2\text{ord},t}, 0)}{\sum_{t=1}^{20} \max(r_{\text{exp } 2\text{ord},t} - r_{\text{exp } 2\text{rd},t}, 0)} \quad (4.3)$$

dove $r_{\text{exp } 4\text{ord},t}$ ed $r_{\text{exp } 2\text{ord},t}$ sono i rendimenti al tempo t , dei portafogli ottenuti rispettivamente con il modello esponenziale four-moments ed esponenziale media-varianza. Così facendo, si fissano la soglie di rendimento minimo pari ai rendimenti del portafoglio ottenuto mediante modello di allocazione a due momenti. Se tale indicatore risulta maggiore di uno, allora vi è un effettivo incremento di performance considerando anche la matrici di co-asimmetria e co-curtosi, in fase di costruzione del portafoglio. Con i dati a disposizione, ad un livello di avversione assoluta al rischio pari a due, l'indicatore omega calcolato con la 4.3 risulta pari a 1.6136. Sembra quindi esservi un minimo incremento della performance, utilizzando un modello di tipo four-moments. Sebbene si tratti di funzioni di utilità differenti, risulta comunque utile ed informativo fissare come soglia minima nella 4.3, il rendimento ottenuto dai portafogli media-varianza (MV). Così facendo si ottiene un indice Omega pari a 0.1401, nettamente inferiore all'unità.

L'istogramma seguente raffigura le tre serie di rendimenti annuali dei portafogli. La tabella contenente i dati rappresentati in figura 4.26 è riportata in appendice A.5.1.

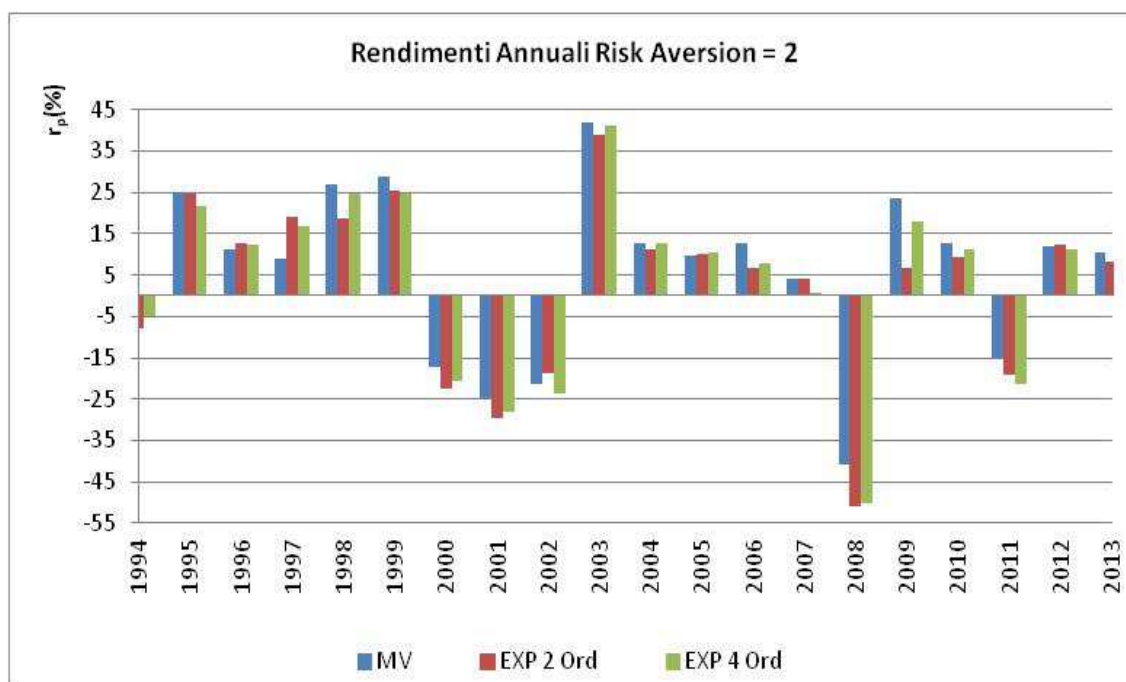


Fig. 4.26

Dal grafico in figura 4.26, si può notare come le tre serie di rendimenti siano comunque molto vicine, per ogni istante temporale. Sembra quindi che l'applicazione dei tre modelli di portfolio allocation produca rendimenti molto correlati. A riprova di ciò, si consideri la seguente tabella, contenente la matrice di correlazione delle tre serie.

	MV	EXP 2 Ord	EXP 4 Ord
MV	1	0.9721	0.9889
EXP 2 Ord		1	0.9903
EXP 4 Ord			1

Tab. 4.9

Le correlazioni in tabella 4.9 sono prossime all'unità, di conseguenza l'ipotesi fatta in precedenza è confermata. Particolarmente elevata è la correlazione tra le serie dei rendimenti dei portafogli four-moments ed esponenziale media-varianza.

Avendo analizzato la serie dei rendimenti annuali, risulta particolarmente interessante studiare l'evoluzione dei pesi ottimi annuali, per ciascuna tecnica di allocazione. A tale scopo si sono ricavati i pesi medi annui, raffigurati nei grafici che seguono. I dati sono riportati in appendice A.5.1.

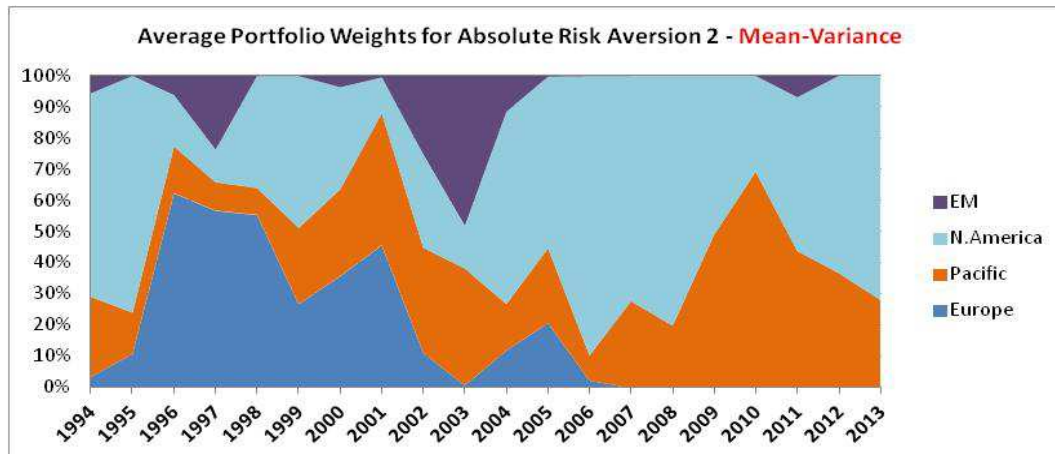


Fig. 4.27

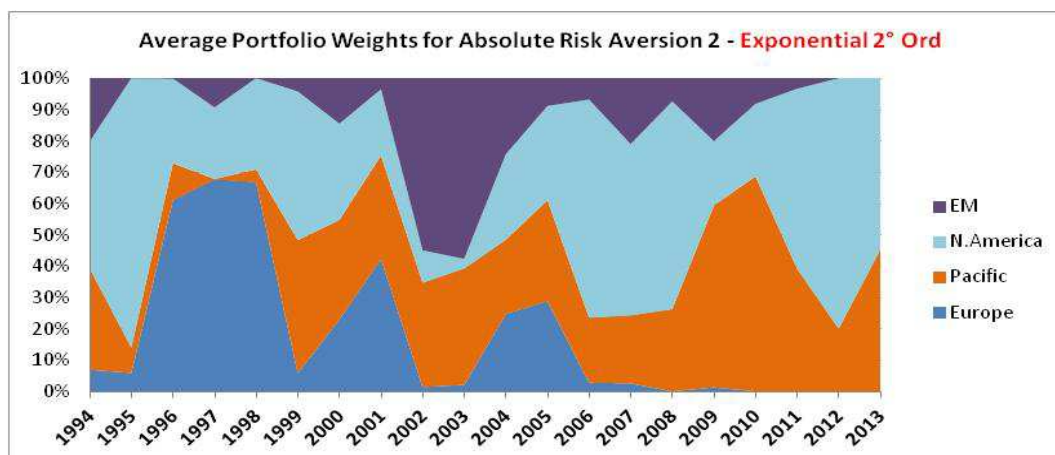


Fig. 4.28

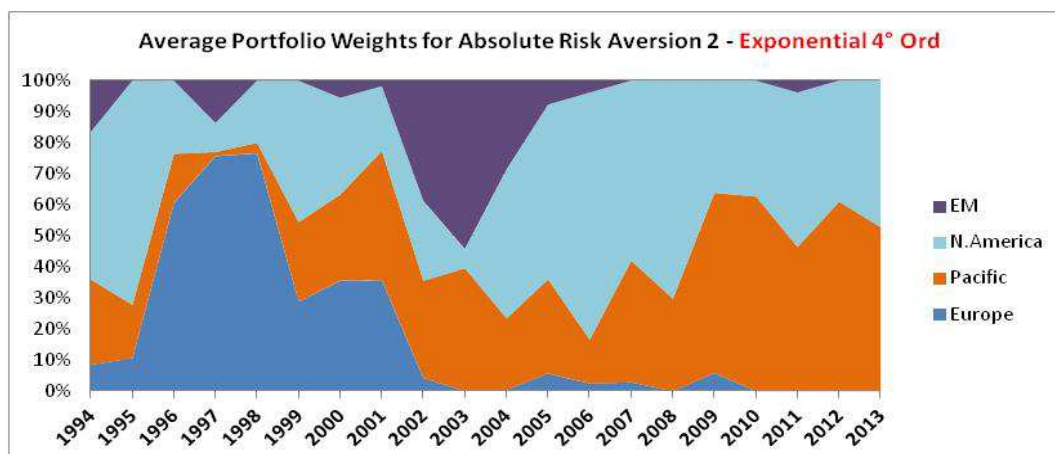


Fig. 4.29

I tre grafici 4.27, 4.28 e 4.29 evidenziano andamenti simili nelle serie dei pesi ottimi, per ciascuna tecnica di allocazione. Ciò spiega l'elevata correlazione tra le tre serie di rendimenti annuali, evidenziata in tabella 4.9. Nonostante la prossimità dei pesi ottimi, ponendo il focus nei grafici 4.28 e 2.29, emergono alcune differenze, seppur di lieve entità. Considerando i pesi ottenuti con il modello four-moments, rispetto all'esponenziale media-varianza, si nota una maggior esposizione verso il titolo "*Europe*" nell'anno 1999 ed un peso minore attribuito all'asset "*Emerging Markets*" negli anni 2000 e 2002. L'esposizione verso i mercati emergenti risulta minore a partire dal 2004, fino alla fine del periodo campionario (poiché considerati troppo rischiosi²¹). Nel medesimo periodo, il peso associato ad "*Emerging Markets*" risulta prossimo al peso ottenuto con il classico modello media-varianza. Un'ulteriore differenza, rispetto all'allocazione esponenziale media-varianza, si osserva nel 2005, anno in cui viene ridotta l'esposizione verso l'asset "*Europe*" a favore di "*North America*". Si notano delle differenze anche nel peso associato a "*Pacific*", in particolare, vi è un peso maggiore attribuito a tale titolo negli anni 2007 e 2012.

Le differenze individuate nei pesi ottimi prodotti dai modelli esponenziale media-varianza ed esponenziale four-moments sono comunque di debole entità; si ricorda inoltre che i portafogli allocati con i due modelli danno luogo a rendimenti altamente correlati (0.9903). Una plausibile spiegazione a tale fenomeno va ricercata nei grafici (riportati in appendice A.6) raffiguranti le serie (mensili) delle coskewness e cokurtosis dei titoli utilizzati. Negli stessi grafici, viene riportata in colore rosso la stima campionaria di ciascun co-momento, calcolata sull'intero campione di rendimenti settimanali. Si può notare come ciascuna serie risulti notevolmente stabile in un intorno della stima campionaria, esibendo alcune variazioni in corrispondenza di shock del mercato. Si osservano picchi negativi di co-asimmetria e picchi positivi di co-curtosi, in corrispondenza

²¹ Si osservino i grafici riportati in appendice A.6, riguardanti le stime dei co-momenti mediante l'algoritmo di exponential smoothing. Nei grafici riguardanti asimmetria e curtosi del titolo "*Emerging Markets*" si nota un picco negativo di asimmetria ed un aumento notevole della curtosi. Situazione analoga si riscontra nei grafici dei co-momenti misti che coinvolgono i mercati emergenti.

dell'inizio del periodo della crisi finanziaria. Fatta eccezione per tale periodo, non vi sono scostamenti o variazioni degne di nota. Tale condizione è in parte una conseguenza della tecnica di lisciamento utilizzata, tuttavia, anche provando con valori inferiori del parametro di smoothing si ottengono risultati analoghi²². Come conseguenza della mancanza di variazioni significative nel livello di ciascuna serie dei co-momenti, l'introduzione delle matrici di coskewness e cokurtosis nella funzione obiettivo del problema di ottimo 2.10, non apporta informazioni particolarmente rilevanti ai fini dell'allocazione. L'algoritmo progettato per risolvere il problema di ottimizzazione restituisce in output, in aggiunta al vettore ottimo di pesi, anche il valore della funzione obiettivo nel punto di ottimo individuato. Con tale informazione, si è quindi calcolata la correlazione tra le serie di valori delle funzioni obiettivo esponenziale media-varianza ed esponenziale four-moments. Un valore elevato di tale correlazione evidenzia un comportamento simile delle funzioni obiettivo, di conseguenza, l'errore commesso troncando lo sviluppo in serie di Taylor dell'utilità al secondo ordine, non sembra essere rilevante. Il valore elevato dell'indice di correlazione (0.9784) conferma l'ipotesi di scarsa rilevanza delle matrici dei co-momenti terzo e quarto.

²² Si sono testati valori inferiori in modo da attribuire una maggior importanza alla componente di shock, a discapito del peso della stima al tempo precedente. Come risultato si ottengono delle serie con picchi leggermente più accentuati; la serie lisciata non dimostra nessun trend significativo, rimanendo sempre in un intorno del momento campionario, stimato su tutto il campione di rendimenti mensili.

4.3.2 Simulazione Out of Sample: $R_a=20$

Come fatto precedentemente per il livello di avversione al rischio pari a due, si riporta il grafico raffigurante i rendimenti cumulati dei portafogli ottenuti con i modelli media-varianza, esponenziale media-varianza ed esponenziale four-moments.

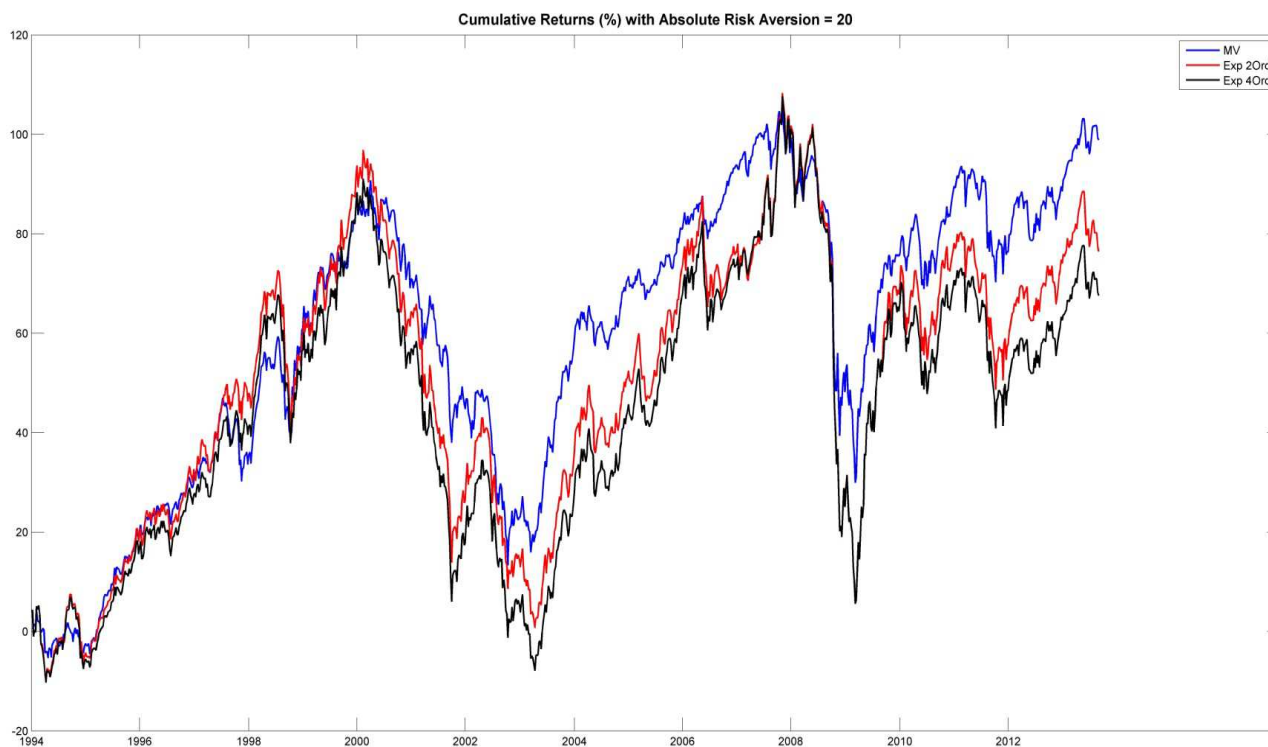


Fig. 4.30

Il grafico in figura 4.30 descrive uno scenario molto simile a quello presentato nella 4.25, per $R_a=2$. In particolare, le serie di rendimenti cumulati esibiscono lo stesso andamento per ciascun istante temporale. Vi sono delle differenze sostanziali dal caso precedente, a partire dall'anno 2006 fino alla fine del periodo campionario. In tale periodo infatti, i rendimenti cumulati dei portafogli costruiti utilizzando la funzione di utilità esponenziale sono più vicini ai rendimenti dei portafogli media-varianza. Considerando quindi un livello di avversione al rischio pari a 20, l'overperformance del modello media-varianza rispetto all'esponenziale media-varianza ed esponenziale four-moments si riduce.

Nel caso precedente, si constatava una performance leggermente inferiore per il modello esponenziale media-varianza rispetto al four-moments; con un livello maggiore di avversione al rischio emerge invece la situazione opposta. Sembra infatti che, considerando unicamente i primi due momenti della distribuzione dei rendimenti, si ottenga una performance superiore, soprattutto in fasi di alta volatilità dei mercati. Questo risultato è conforme a quanto precedentemente riscontrato nelle simulazioni in sample svolte. Come nel caso precedente, si riportano in tabella 4.10 i primi 4 momenti di ciascuna serie settimanale di rendimenti.

	MV	EXP 2 Ord	EXP 4 Ord
Mean	0.0964	0.0745	0.0659
Variance	4.6369	6.6922	6.4483
Skewness	-0.7851	-0.6110	-0.6264
Kurtosis	7.4137	4.8281	4.9892
Min	-15.6230	-15.6070	-15.6070
Max	8.4039	10.2990	10.2990
ASR	0.0445	0.0287	0.0259

Tab. 4.10

L'ultima riga della tabella 4.10 contenente l'Adjusted Sharpe Ratio (ASR) dei portafogli per ciascun modello, conferma quanto graficamente constatato dalla figura 4.30. I portafogli allocati con il metodo esponenziale media-varianza detengono una performance leggermente superiore ai portafogli four-moments. Come nel caso precedente, il modello media-varianza (MV) sembra essere il più proficuo, in quanto esibisce una performance di gran lunga superiore ai modelli basati sull'utilità esponenziale.

Considerando rendimenti annuali anziché settimanali, si ottiene il medesimo risultato, riportato in tabella 4.11.

	MV	EXP 2 Ord	EXP 4 Ord
Mean	5.9040	5.4676	5.0607
Variance	417.1000	614.9900	604.3100
Skewness	-0.5333	-0.7090	-0.7950
Kurtosis	2.7630	3.0109	2.9228
ASR	0.2819	0.2147	0.2003

Tab. 4.11

Si nota un livello di curtosi leggermente inferiore ed una maggior asimmetria (negativa) per i portafogli costruiti con il modello four-moments, rispetto all'esponenziale media-varianza. I momenti terzo e quarto dei portafogli ottenuti con il modello media-varianza risultano comunque inferiori, rispetto ai rimanenti. Oltre all'usuale ASR si è calcolato l'indice di performance Omega introdotto nel precedente paragrafo (si veda la 4.3). Prendendo come soglie i rendimenti dei portafogli dell'esponenziale media-varianza, si ottiene un valore di Omega²³ pari a 0.6337. Pertanto, in accordo gli indicatori calcolati, la miglior strategia tra esponenziale four-moments ed esponenziale media-varianza sembra essere quest'ultima. Fissando invece le soglie pari ai rendimenti dei portafogli media-varianza, si ottiene un valore di Omega di 0.7142. Ancora una volta quindi, l'utilizzo del modello four-moments non sembra essere vantaggioso.

In figura 4.31 è riportato l'istogramma contenente le serie dei rendimenti annuali, per ciascun modello di allocazione. La tabella contenente le serie dei rendimenti annuali è riportata in appendice A.5.2.

²³ Si ricorda che, un valore dell'indicatore inferiore all'unità, suggerisce che il miglior approccio sia quello che genera il rendimento utilizzato come soglia.

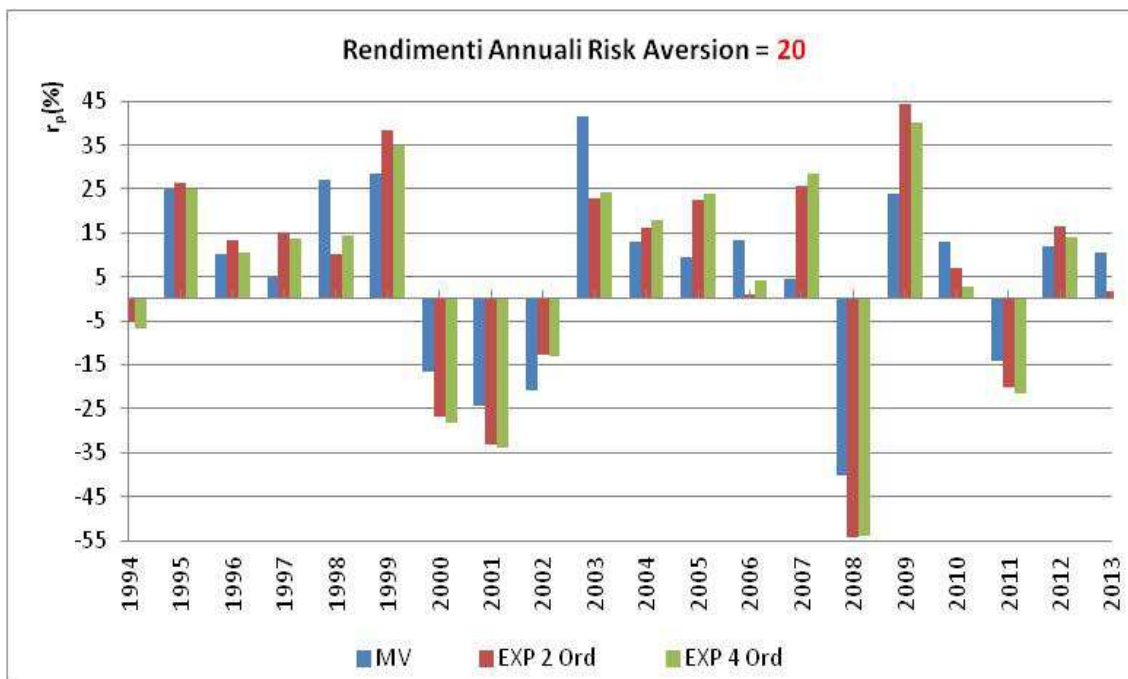


Fig. 4.31

Le serie rappresentate nell'istogramma 4.31 sembrano essere molto correlate, come riscontrato per il caso $R_a=2$. Per una verifica empirica di tale ipotesi, si è calcolata la matrice di correlazione delle serie di rendimenti, riportata di seguito.

	MV	EXP 2 Ord	EXP 4 Ord
MV	1	0.9118	0.9188
EXP 2 Ord		1	0.9966
EXP 4 Ord			1

Tab. 4.12

La tabella 4.12 conferma l'ipotesi di elevata correlazione tra le tre serie di rendimenti annuali. In accordo con quanto riscontrato in figura 4.30, si nota una correlazione sensibilmente maggiore (0.9966) tra i rendimenti dei modelli esponenziale media-varianza e four-moments, rispetto al caso precedente (0.9903). Essendo fortemente correlate, si presume che le serie dei rendimenti siano generate da allocazioni di portafoglio molto simili. Per una verifica empirica di tale presupposto, si sono calcolati i pesi medi annuali per ciascuna tecnica di allocazione, come fatto nel precedente paragrafo.

Le figure sottostanti rappresentano la proporzione media annua di ricchezza allocata in ciascun titolo, utilizzando i modelli media-varianza, esponenziale media-varianza ed esponenziale four-moments. La tabella contenente i pesi medi è riportata in appendice A.5.2.

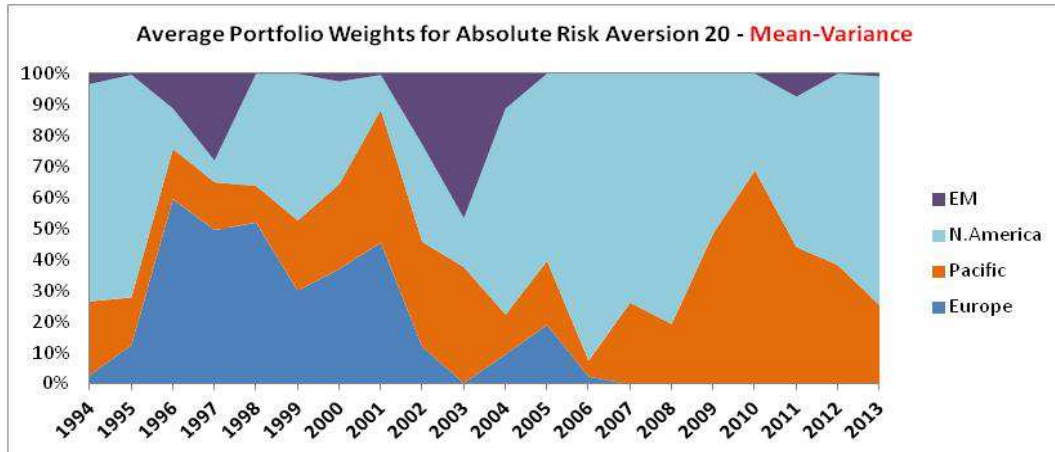


Fig.4. 32

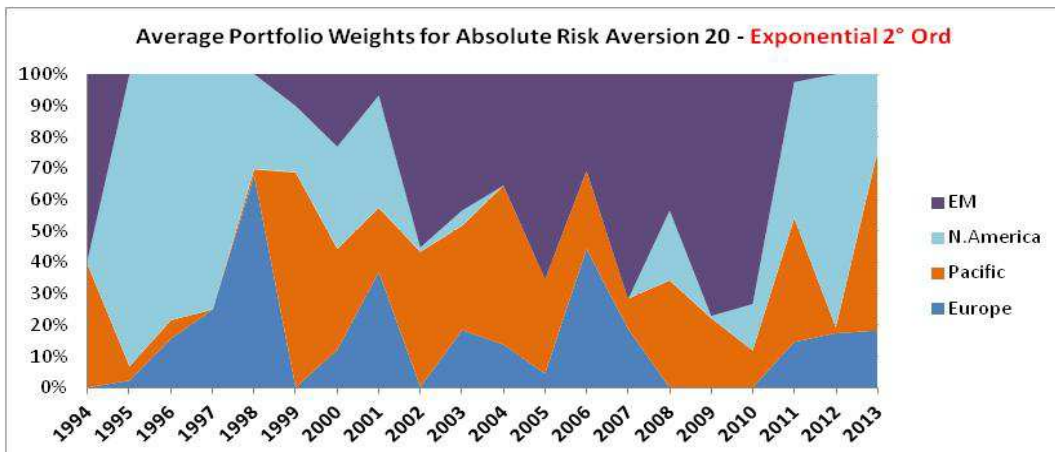


Fig. 4.33

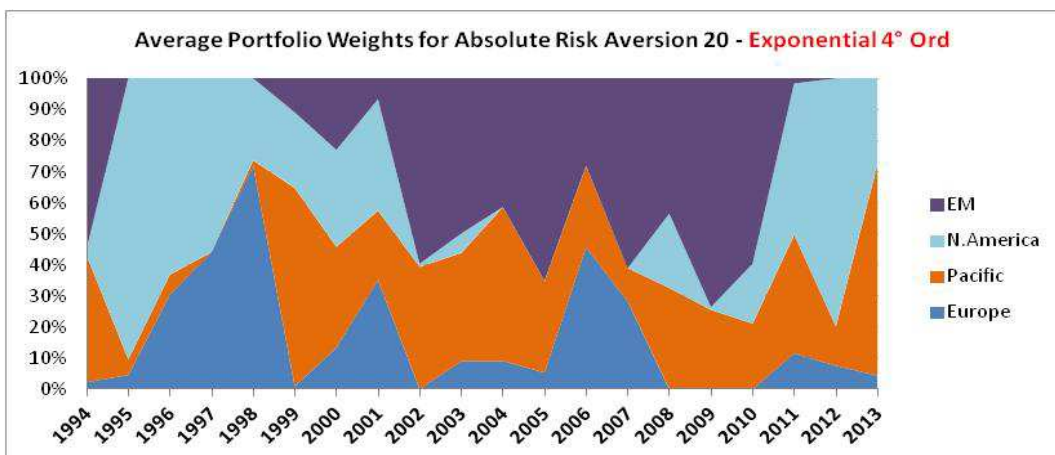


Fig. 4.34

I grafici in figura 4.33 e 4.34 spiegano l'elevata correlazione riscontrata tra le serie dei rendimenti, dei metodi esponenziale media-varianza e four-moments. I pesi medi annuali dei portafogli ottenuti con le due tecniche di allocazione sono infatti molto vicini. Ponendo il focus sui portafogli four-moments, si notano poche differenze rispetto alle allocazioni ottenute con l'esponenziale media-varianza. Una prima differenza consiste nel minor peso attribuito al titolo "*Pacific*" nel 1999 ed un conseguente aumento dell'esposizione verso "*North America*". Negli anni 2003 e 2004 si riscontra inoltre un peso minore per "*Europe*" con conseguente aumento dell'esposizione verso "*Pacific*". In fine, si nota un peso minore attribuito ai mercati emergenti nell'anno 2010. Le differenze presenti sono comunque di debole entità, come riscontrato per l'analisi con livello di avversione assoluta al rischio pari a due.

Maggiormente rilevanti sono le differenze tra i pesi medi ottenuti con il modello media-varianza, e le allocazioni individuate con i modelli esponenziali a due e quattro momenti. Osservando infatti le tabelle 4.12 e 4.9, si nota una diminuzione delle correlazioni tra i rendimenti annuali dei portafogli media-varianza, esponenziale media-varianza e four-moments. In particolare, il modello media-varianza esibisce un'esposizione verso i mercati emergenti molto contenuta, attribuendo un peso maggiore a "*North America*".

La forte somiglianza tra le allocazioni con modelli esponenziale media-varianza ed esponenziale four-moments è dovuta principalmente alla stabilità dei livelli di co-asimmetria e co-curtosi²⁴, visibile nei grafici riportati in appendice A.6.

Come in precedenza, si è calcolata la correlazione tra i valori delle due funzioni obiettivo nei punti di ottimo individuati. Il risultato prossimo all'unità (0.9997) conferma, ancora una volta, che l'introduzione di momenti di ordine superiore nella funzione obiettivo, non apporta informazioni significative per l'allocazione.

²⁴ Per una trattazione più approfondita si rimanda al precedente paragrafo, in particolare al commento sui grafici dei pesi medi annuali.

CAPITOLO 5

Conclusioni

Nel presente lavoro di tesi si era interessati ad indagare l'effettiva utilità di considerare momenti di ordine superiore al secondo, in fase di costruzione di un portafoglio di titoli. A tale scopo, si è considerato un agente economico razionale ed avverso al rischio, che investe interamente la propria ricchezza in titoli esclusivamente rischiosi. Per limitare lo spazio delle possibili allocazioni ottime, si è imposto il vincolo di positività dei pesi di ciascun portafoglio, escludendo quindi la possibilità di short selling. Per l'introduzione dei momenti terzo e quarto si sono utilizzate inizialmente due funzioni di utilità, ovvero la funzione di utilità esponenziale e la power utility. Si è successivamente deciso di proseguire utilizzando solo la funzione esponenziale, poiché più semplice e priva di restrizioni sulla convergenza. Ad ogni modo, i modelli basati sulle due funzioni di utilità producono allocazioni quasi equivalenti. Utilizzando quindi l'impostazione proposta da Jondeau, Rockinger (2006) e Wongwachara (2008), si sono considerati gli sviluppi in serie di Taylor del secondo e quarto ordine dell'utilità esponenziale, per approssimare la funzione di utilità attesa (funzione obiettivo nel problema di ottimo dell'investitore). Si sono quindi ottenute le allocazioni ottimali mediante un algoritmo ibrido di ottimizzazione, per valori crescenti di avversione al rischio e frequenza dei rendimenti. Con lo stesso framework si è valutato il comportamento dei tre modelli di allocazione, in condizioni di mercato caratterizzate da bassa ed elevata volatilità.

In fine, per valutare quale tra i modelli media-varianza, esponenziale media-varianza ed esponenziale four-moments, sia la strategia più proficua, si è costruita una simulazione su rendimenti settimanali.

Dalle simulazioni in sample, è emerso che i portafogli costruiti utilizzando un modello four-moments, esibiscono un livello di rendimento minore rispetto a quelli ottenuti con modelli di allocazione a due momenti. Tuttavia, nella maggior parte dei casi si è riscontrata una sensibile, e talvolta non significativa, diminuzione di asimmetria e curtosi per i portafogli four-moments. Introducendo le matrici dei co-momenti terzo e quarto nella funzione obiettivo da massimizzare, viene attribuito un peso maggiore ad asset che esibiscono valori di co-asimmetria e co-curtosi minori. Utilizzando un indicatore di performance che tenga conto dei momenti di ordine superiore (Adjusted Sharpe Ratio) si è constatato che l'utilizzo del modello four-moments, comporta una performance inferiore o al più uguale a quella ottenuta con modello esponenziale media-varianza. Si ipotizza quindi, che la riduzione dell'asimmetria e curtosi dei portafogli four-moments non sia sufficiente a sopperire al minor rendimento ottenuto.

Inoltre, dalle simulazioni in sample è emersa una convergenza dei modelli esponenziale media-varianza ed esponenziale four-moments, al modello media-varianza di Markowitz, per bassi livelli di avversione assoluta al rischio. Tale condizione rimane valida a prescindere dalle fasi di mercato analizzate e dalla frequenza dei rendimenti.

Nel periodo caratterizzato da elevata volatilità dei mercati ed elevata curtosi nelle distribuzioni dei rendimenti, il modello four-moments converge al modello esponenziale a due momenti, per ciascun valore di avversione considerato. I due modelli producono quindi allocazioni affini in presenza di turbolenza dei mercati. Dalla simulazione out of sample, è emerso che l'applicazione ripetuta del modello four-moments porta ad una performance prossima a quella del metodo esponenziale media-varianza. Nella fattispecie, risulta leggermente superiore in corrispondenza di un basso livello di avversione al rischio. Considerando invece

un livello di avversione più elevato, si riscontra una performance leggermente maggiore per il modello esponenziale a due momenti. In entrambi i casi, i modelli media-varianza, esponenziale media-varianza ed esponenziale four-moments producono rendimenti altamente correlati. In particolare, i metodi basati su funzioni di utilità esponenziale esibiscono pesi medi di portafoglio molto simili, per ciascun istante temporale. La forte somiglianza in termini di rendimenti e pesi medi di portafoglio, è stata attribuita alla scarsa rilevanza delle informazioni apportate dai co-momenti terzo e quarto. Nella fattispecie, analizzando i valori di co-asimmetria e co-curtosi si è osservato che le serie mantengono un livello notevolmente costante, con picchi in prossimità di shock dei mercati. Nella stessa simulazione, si è inoltre osservato come il modello media varianza detenga una performance notevolmente maggiore rispetto ai rimanenti modelli, a prescindere dal livello di avversione al rischio.

Considerando invece l'aspetto computazionale, vi è un numero notevolmente maggiore di parametri da stimare per il modello four-moments. A riprova di ciò, è sufficiente osservare il grafico in figura 5.1.

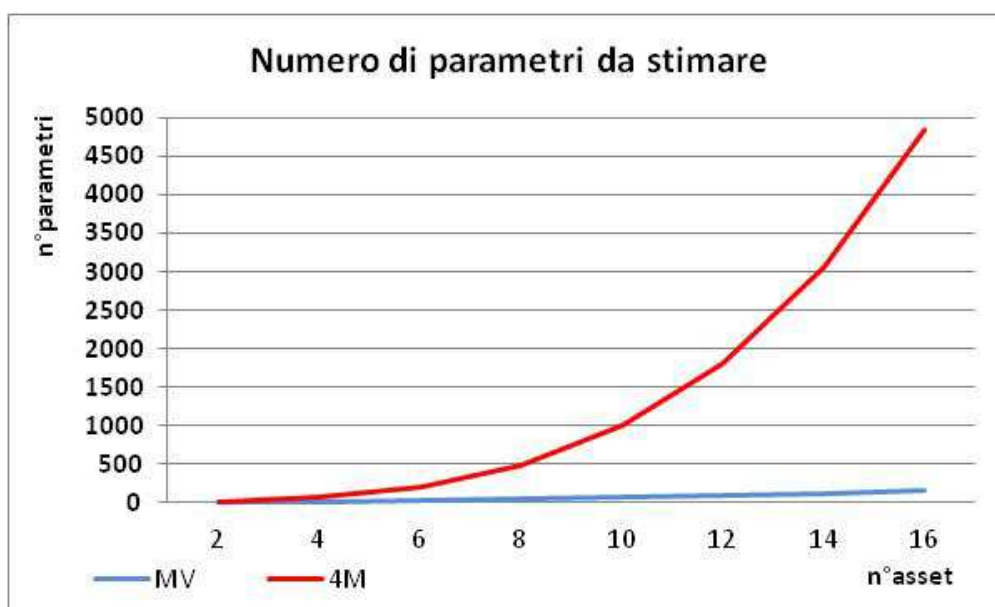


Fig. 5.1

Sebbene i calcolatori moderni dispongano di capacità di calcolo superiori, non va trascurato l'aspetto statistico del problema, in quanto un maggior numero di parametri da stimare comporta un errore di stima maggiore. E' stato dimostrato (Wongwachara, 2008) che introdurre stime distorte dei parametri nei modelli di allocazione, porta alla costruzione di portafogli inefficienti.

Alla luce dei risultati ottenuti nelle simulazioni e delle considerazioni fatte, è possibile affermare che l'utilizzo di un modello four-moments, rispetto ad un modello a due momenti, non apporti alcun beneficio in termini di performance. L'introduzione delle matrici di coskewness e cokurtosis nella funzione obiettivo del problema di ottimo dell'investitore, porta unicamente ad una miglior approssimazione della funzione di utilità attesa (Jondeau E., Rockinger M., 2006). Si conclude suggerendo l'utilizzo dell'usuale modello media-varianza, dimostratosi un valido strumento anche in assenza di normalità e code pesanti nella distribuzione dei rendimenti.

Viste le ipotesi di lavoro formulate, un eventuale sviluppo del presente lavoro di tesi consiste nel ripetere le analisi svolte rilassando il vincolo di positività dei pesi dei portafogli. Un secondo spunto consiste nell'impiegare un diverso modello parametrico per la stima dei co-momenti, utilizzando ad esempio l'impostazione proposta da Lionel Martellini e Volker Ziemann (2007). La presente analisi è svolta in un ottica di Strategic Asset Allocation. Un ulteriore sviluppo consiste nell'uscire da tale ottica, abbandonando l'utilizzo di indici azionari per verificare se l'impiego del modello four-moments su singoli titoli, apporti dei benefici in termini di performance.

Bibliografia

Barberis, N. (1999), "*Investing for Long Run when Return are Predictable*", Journal of Finance, Vol. 55, No. 1, February 2000.

Bodie, Z., Kane, A., Marcus, A., "*Investments* (6th Edition)", New York McGraw-Hill, 2005.

Chamberlain, G., "*A characterization of the distributions that imply mean-Variance utility functions*", Journal of Economic Theory 29.1 (1983): 185-201.

Cvitanić, J., Vassilis P., Zapatero, F., "*Optimal portfolio allocation with higher moments*", Annals of Finance 4.1 (2008): 1-28.

Ederington, L. (1986), "*Mean-Variance as an Approximation to Expected Utility Maximisation*", Working Paper 86-5, Washington University.

Eling, M., Sudheesh, K., Tibiletti, L., "*How skewness influences optimal allocation in a risky asset?*", Applied Economics Letters 20.9 (2013): 842-846.

Eling, M., Tibiletti, L. (2010). "*Sharpe Ratio for skew-normal distributions: a skewness-dependent performance trade-off?*", Journal of Performance Measurement, 14(4), 34-48.

Guidolin, M., Timmermann, A., "*International asset allocation under regime switching, skew, and kurtosis preferences*", Review of Financial Studies 21.2 (2008): 889-935.

Harvey, Campbell R., et al. "Portfolio selection with higher moments", Quantitative Finance 10.5 (2010): 469-485.

Horasanlı, M., Fidan, N., "Portfolio selection by using time varying covariance matrices", Journal of Economic and Social Research 9.2 (2007): 1-22.

Jondeau, E., Rockinger, M., "Optimal portfolio allocation under higher moments", European Financial Management 12.1 (2006): 29-55.

J.P. Morgan and Reuters (1996), "RiskMetrics - Technical Document", New-York.

Jurczenko, E., Maillet, B., Merlin, P., "Hedge funds portfolio selection with higher-order moments: a non-parametric mean-variance-skewness-kurtosis efficient frontier", Available at SSRN 676904 (2005).

Kostakis, A., Kashif, M., Siganos, A., "Higher co-moments and asset pricing on London Stock Exchange", Journal of Banking & Finance 36.3 (2012): 913-922.

Kraus, A., Lintzenberger, R., "Skewness Preference and the Valuation of Risk Assets", 1976.

Levy, H., Markowitz, H., "Approximating expected utility by a function of mean and variance", The American Economic Review 69.3 (1979): 308-317.

Markowitz, H., "Portfolio selection", The journal of finance 7.1 (1952): 77-91.

Scott, R., Horvath, P., "On the direction of preference for moments of higher order than the variance", The Journal of Finance 35.4 (1980): 915-919.

Martellini, L., Ziemann, V.(2007), "*Improved Forecasts of Higher-Order Comoments and Implications for Portfolio Selection*", EDHEC Risk and Asset Management Research Centre working paper.

Mas-Colell, A., Whinston, M., Green, J., "*Microeconomic theory*", Vol. 1. New York: Oxford university press, 1995.

Peiro A., "*Skewness in Financial Returns*", Journal of Banking and Finance 23 (6), 1999

Pezier, J., White, A., "*The relative merits of investable hedge fund indices and of funds of hedge funds in optimal passive portfolios*", Henley Business School, Reading University, 2006.

Rubinstein, M., Jurczenko, E., Maillet, B., "*Multi-moment asset allocation and pricing models*", Vol. 399. Wiley. com, 2006.

Tsay, Ruey S., "*Analysis of financial time series*", Vol. 543. Wiley.com, 2005.

Vasilellis, G. and Meade, N. (1996) "*Forecasting Volatility for Portfolio Selection*", Journal of Business Finance and Accounting 23:125-143.

Williams, J., Ioannidis, C., "*Higher Moments, Utility Functions and Asset Allocation*", University of Essex, Working Paper (2002).

Wongwachara, W., "*Optimal four-moment portfolios: Effects of higher moments and estimation errors*", Cambridge: University of Cambridge Working Paper (2009).

APPENDICE

A.1 Statistiche campionarie multivariate

COVARIANCE MATRIX				
rDSm	Europe	Pacific	N.America	EM
Europe	26.086	18.923	17.157	23.720
Pacific		33.465	13.275	23.541
N.America			18.143	19.854
EM				46.849
rDSw				
Europe	6.915	4.240	4.305	5.424
Pacific		7.659	2.815	4.814
N.America			5.097	4.145
EM				8.941
rDSd				
Europe	2.211	0.742	1.127	1.346
Pacific		1.667	0.215	1.082
N.America			1.645	0.793
EM				1.695

Tab. A.1.1

COSKEWNESS			rDSm	rDSw	rDSd
Europe	Europe	Europe	-74.286	-9.101	0.316
Europe	Europe	Pacific	-65.738	-7.789	-0.555
Europe	Europe	N.America	-62.647	-6.735	0.003
Europe	Europe	EM	-95.918	-10.976	-0.499
Europe	Pacific	Pacific	-36.157	-5.684	-0.528
Europe	Pacific	N.America	-56.324	-5.878	-0.232
Europe	Pacific	EM	-88.321	-7.971	-0.600
Europe	N.America	N.America	-56.149	-5.726	-0.414
Europe	N.America	EM	-88.009	-9.298	-0.269
Europe	EM	EM	-129.965	-12.838	-0.791
Pacific	Pacific	Pacific	0.678	0.223	-0.481
Pacific	Pacific	N.America	-39.954	-5.296	-0.045
Pacific	Pacific	EM	-89.683	-6.722	-0.460
Pacific	N.America	N.America	-46.667	-5.065	-0.329
Pacific	N.America	EM	-72.747	-7.115	-0.069
Pacific	EM	EM	-144.185	-10.345	-0.523
N.America	N.America	N.America	-47.445	-5.346	-0.166
N.America	N.America	EM	-77.796	-8.636	-0.367
N.America	EM	EM	-121.727	-11.925	-0.159
EM	EM	EM	-203.063	-18.545	-0.723

Tab. A.1.2

COKURTOSIS				rDSm	rDSw	rDSd
Europe	Europe	Europe	Europe	2881.500	289.790	48.121
Europe	Europe	Europe	Pacific	2150.900	172.500	16.507
Europe	Europe	Europe	N.America	2101.700	202.790	25.908
Europe	Europe	Europe	EM	3062.700	248.670	31.520
Europe	Europe	Pacific	Pacific	2031.400	160.420	13.173
Europe	Europe	Pacific	N.America	1603.800	126.270	6.658
Europe	Europe	Pacific	EM	2443.200	189.320	14.505
Europe	Europe	N.America	N.America	1715.700	169.920	22.893
Europe	Europe	N.America	EM	2428.900	184.130	17.856
Europe	Europe	EM	EM	3970.600	286.280	26.349
Europe	Pacific	Pacific	Pacific	2163.000	165.550	11.101
Europe	Pacific	Pacific	N.America	1435.300	121.210	4.509
Europe	Pacific	Pacific	EM	2192.500	189.260	11.339
Europe	Pacific	N.America	N.America	1320.300	111.340	5.745
Europe	Pacific	N.America	EM	1959.400	148.780	6.280
Europe	Pacific	EM	EM	3314.500	250.170	14.066
Europe	N.America	N.America	N.America	1458.500	158.420	21.917
Europe	N.America	N.America	EM	2036.500	161.690	16.159
Europe	N.America	EM	EM	3203.900	220.900	15.297
Europe	EM	EM	EM	5533.900	378.850	25.178
Pacific	Pacific	Pacific	Pacific	4153.700	301.040	22.402
Pacific	Pacific	Pacific	N.America	1310.100	124.470	2.010
Pacific	Pacific	Pacific	EM	2601.400	232.150	15.683
Pacific	Pacific	N.America	N.America	1300.300	121.800	6.932
Pacific	Pacific	N.America	EM	1822.500	155.340	4.482
Pacific	Pacific	EM	EM	3777.600	298.850	15.861
Pacific	N.America	N.America	N.America	1147.500	109.170	4.744
Pacific	N.America	N.America	EM	1683.300	139.530	7.091
Pacific	N.America	EM	EM	2741.500	201.860	6.930
Pacific	EM	EM	EM	5463.600	390.900	19.286
N.America	N.America	N.America	N.America	1401.100	179.810	32.829
N.America	N.America	N.America	EM	1825.300	163.770	17.471
N.America	N.America	EM	EM	2915.300	212.690	16.260
N.America	EM	EM	EM	4860.800	306.860	15.981
EM	EM	EM	EM	10203.000	619.380	32.121

Tab.A.1.3

A.2 Simulazione In Sample: power utility

A.2.1 Dataset DSm, rendimenti mensili

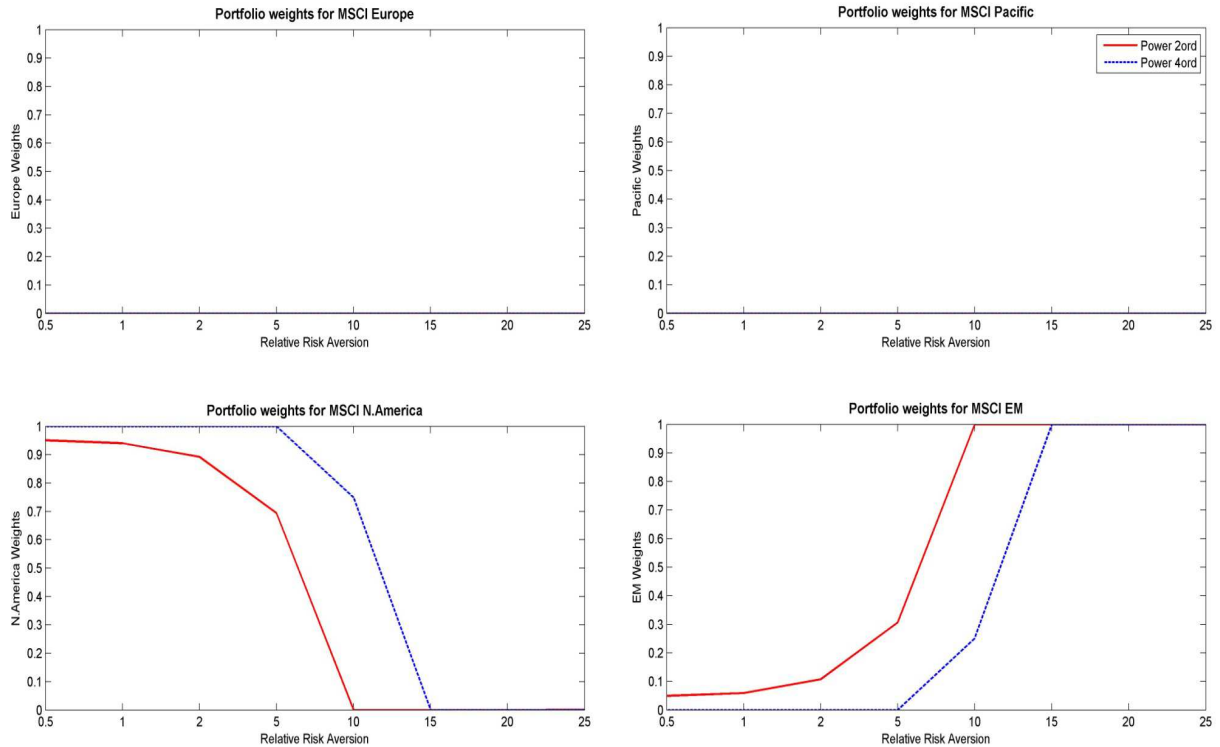


Fig. A.2.1.1

Optimal Portfolio Weights									
Relative Risk aversion		0.5	1	2	5	10	15	20	25
Pow 2 ^{ord}	MSCI Europe	0.00%	0.00%	0.00%	0.00%	0.00%	0.00%	0.00%	0.00%
	MSCI Pacific	0.00%	0.00%	0.00%	0.00%	0.00%	0.00%	0.00%	0.00%
	MSCI N.America	95.05%	94.06%	89.25%	69.37%	0.00%	0.00%	0.00%	0.01%
	MSCI EM	4.95%	5.94%	10.75%	30.63%	100.00%	100.00%	100.00%	99.99%
Pow 4 ^{ord}	MSCI Europe	0.00%	0.00%	0.00%	0.00%	0.00%	0.00%	0.00%	0.00%
	MSCI Pacific	0.00%	0.00%	0.00%	0.00%	0.00%	0.00%	0.00%	0.00%
	MSCI N.America	100.00%	94.06%	100.00%	100.00%	74.88%	0.00%	0.00%	0.00%
	MSCI EM	0.00%	5.94%	0.00%	0.00%	25.12%	100.00%	100.00%	100.00%

Tab. A.2.1.1

Portfolio Moments									
Relative Risk aversion	0.5	1	2	5	10	15	20	25	
Pow 2 ^{ord}	Mean	0.7218	0.7243	0.7367	0.7882	0.9677	0.9677	0.9677	0.9677
	Variance	18.3740	18.4360	18.8030	21.5630	46.8490	46.8490	46.8490	46.8460
	Skewness	-0.6609	-0.6696	-0.7081	-0.7974	-0.6333	-0.6333	-0.6333	-0.6333
	Kurtosis	4.4281	4.4612	4.6128	5.0285	4.6488	4.6488	4.6488	4.6489
Pow 4 ^{ord}	Mean	0.7089	0.7089	0.7089	0.7089	0.7739	0.9677	0.9677	0.9677
	Variance	18.1430	18.1430	18.1430	18.1430	20.5980	46.8490	46.8490	46.8490
	Skewness	-0.6139	-0.6139	-0.6139	-0.6139	-0.7837	-0.6333	-0.6333	-0.6333
	Kurtosis	4.2564	4.2564	4.2564	4.2564	4.9515	4.6488	4.6488	4.6488

Tab. A.2.1.2

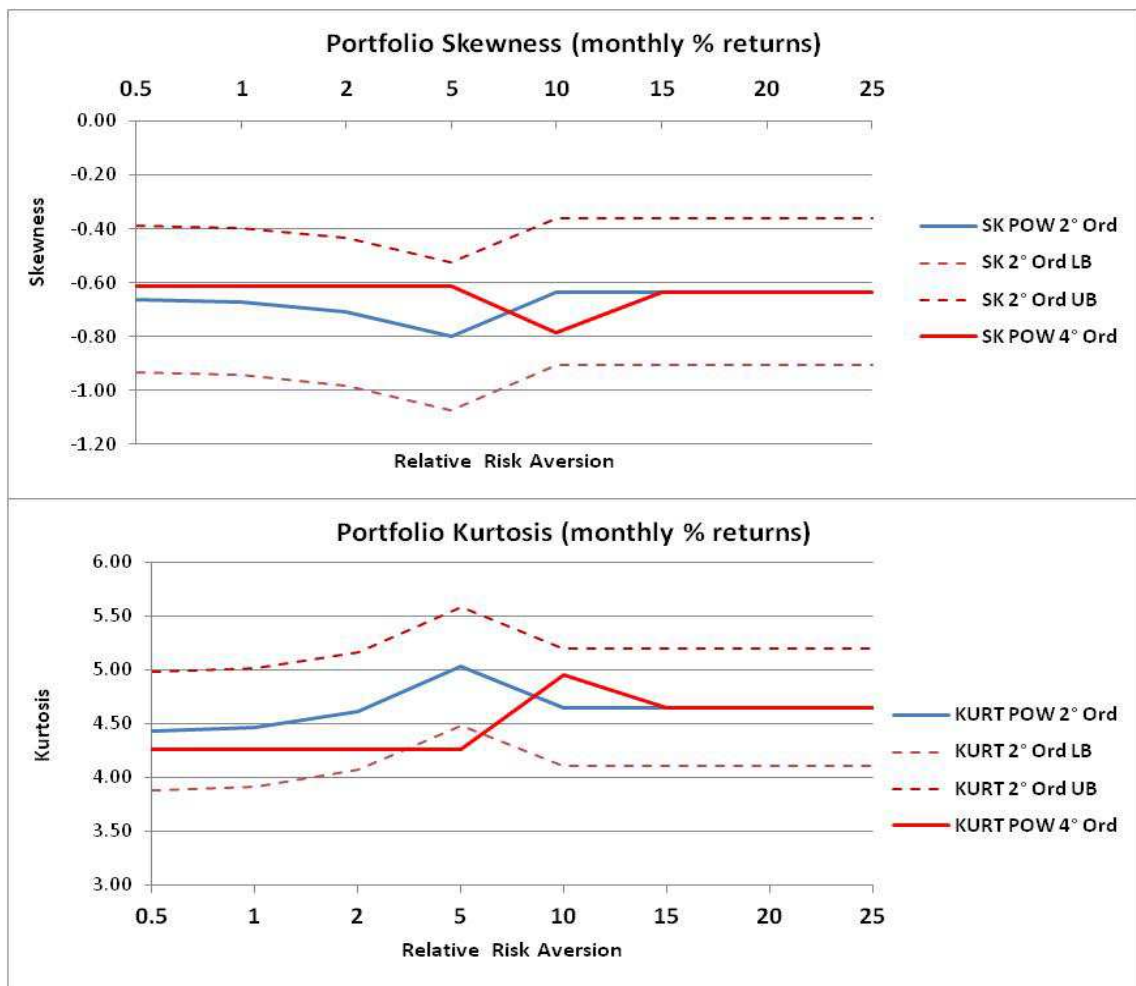


Fig. A.2.1.2

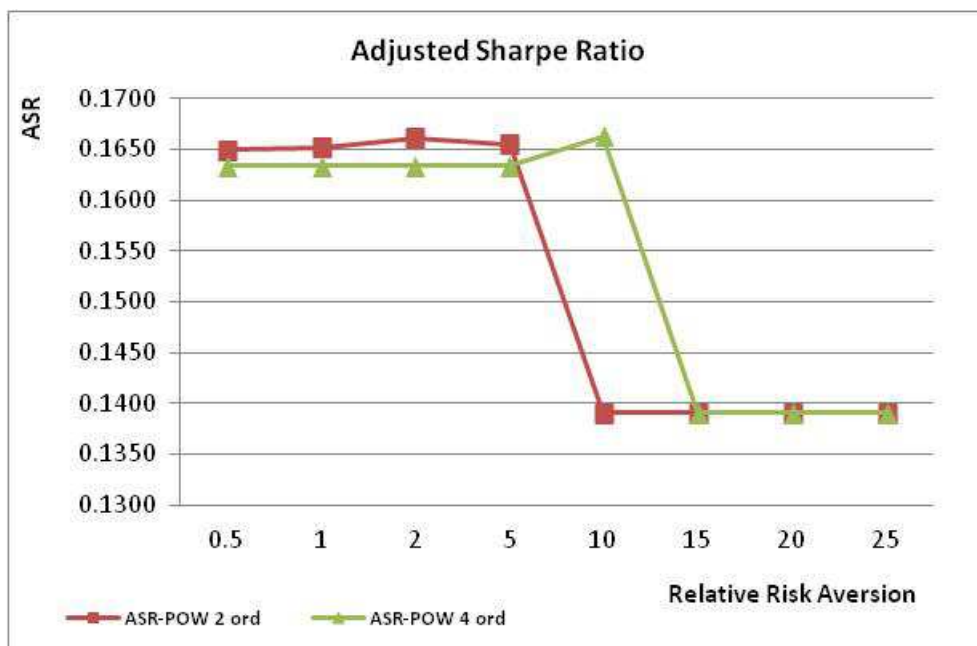


Fig. A.2.1.3

Adjusted Sharpe Index								
Rr	0.5	1	2	5	10	15	20	25
POW 2 Ord	0.1650	0.1652	0.1662	0.1655	0.1391	0.1391	0.1391	0.1391
POW 4 Ord	0.1634	0.1634	0.1634	0.1634	0.1663	0.1391	0.1391	0.1391

Tab. A.2.1.3

A.2.2 Dataset DSw, rendimenti settimanali

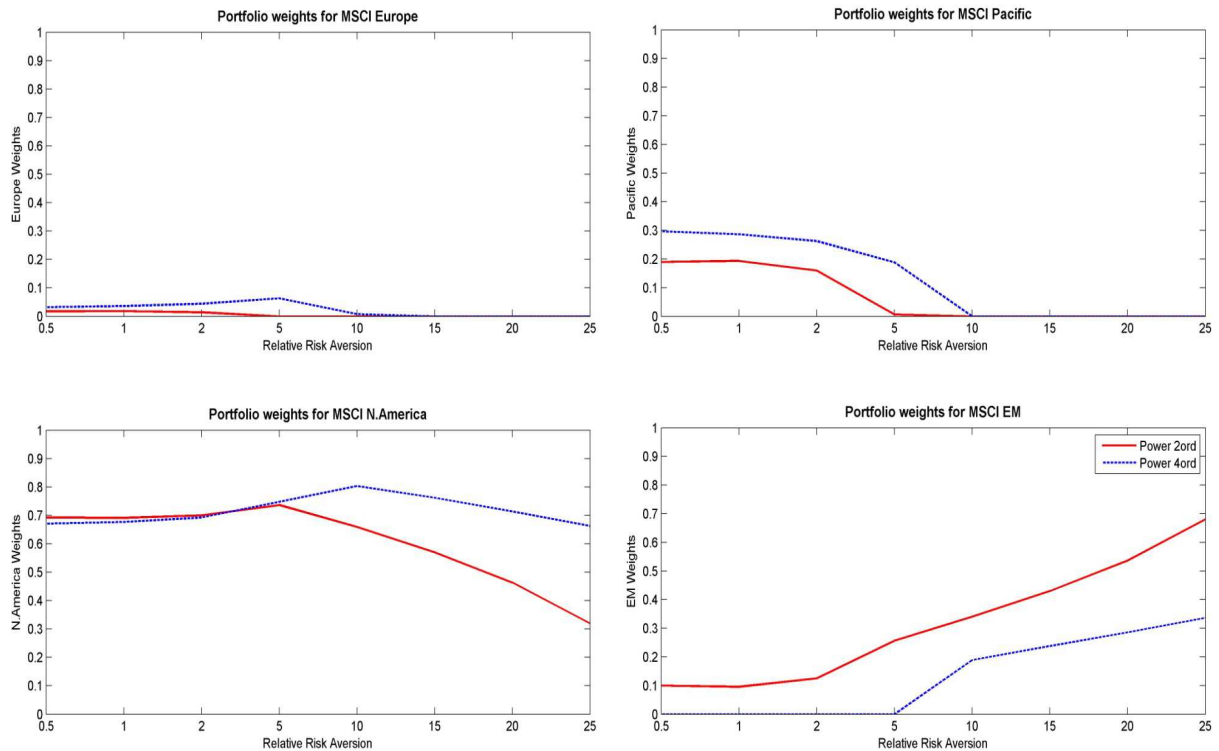


Fig. A.2.2.1

Optimal Portfolio Weights									
Relative Risk aversion		0.5	1	2	5	10	15	20	25
Pow 2 ^{ord}	MSCI Europe	1.80%	1.85%	1.43%	0.00%	0.00%	0.00%	0.00%	0.00%
	MSCI Pacific	18.98%	19.39%	16.03%	0.66%	0.00%	0.00%	0.00%	0.00%
	MSCI N.America	69.25%	69.15%	70.01%	73.68%	65.92%	56.98%	46.37%	31.94%
	MSCI EM	9.97%	9.61%	12.53%	25.66%	34.09%	43.02%	53.63%	68.06%
Pow 4 ^{ord}	MSCI Europe	3.20%	3.63%	4.43%	6.37%	0.76%	0.00%	0.00%	0.00%
	MSCI Pacific	29.67%	28.68%	26.30%	18.86%	0.00%	0.00%	0.00%	0.00%
	MSCI N.America	67.13%	67.69%	69.28%	74.76%	80.32%	76.20%	71.40%	66.31%
	MSCI EM	0.00%	0.00%	0.00%	0.00%	18.92%	23.80%	28.60%	33.69%

Tab. A.2.2.1

Portfolio Moments									
Relative Risk aversion	0.5	1	2	5	10	15	20	25	
Pow 2 ^{ord}	Mean	0.1461	0.1454	0.1506	0.1739	0.1782	0.1820	0.1864	0.1925
	Variance	4.4613	4.4547	4.5140	4.9666	5.1155	5.3415	5.7292	6.4636
	Skewness	-0.6463	-0.6437	-0.6629	-0.7154	-0.7642	-0.7984	-0.8133	-0.7979
	Kurtosis	7.4176	7.4040	7.5016	7.6003	7.7460	7.8744	7.9611	7.9753
Pow 4 ^{ord}	Mean	0.1294	0.1304	0.1330	0.1411	0.1717	0.1739	0.1759	0.1781
	Variance	4.3646	4.3669	4.3773	4.4553	4.9363	4.9691	5.0224	5.1077
	Skewness	-0.5619	-0.5640	-0.5671	-0.5643	-0.6608	-0.6988	-0.7327	-0.7622
	Kurtosis	6.9193	6.9369	6.9759	7.0598	7.4287	7.5399	7.6432	7.7392

Tab. A.2.2.2

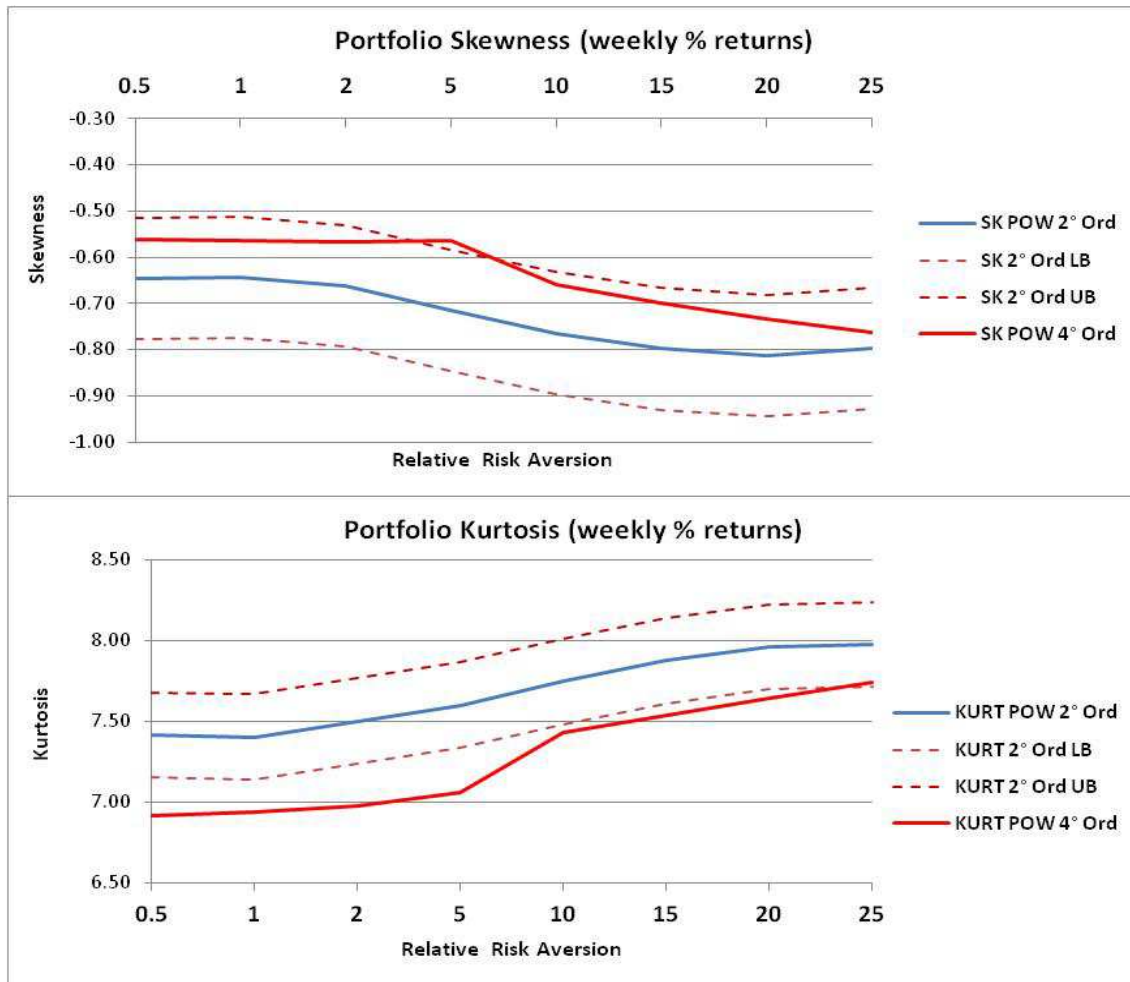


Fig. A.2.2.2

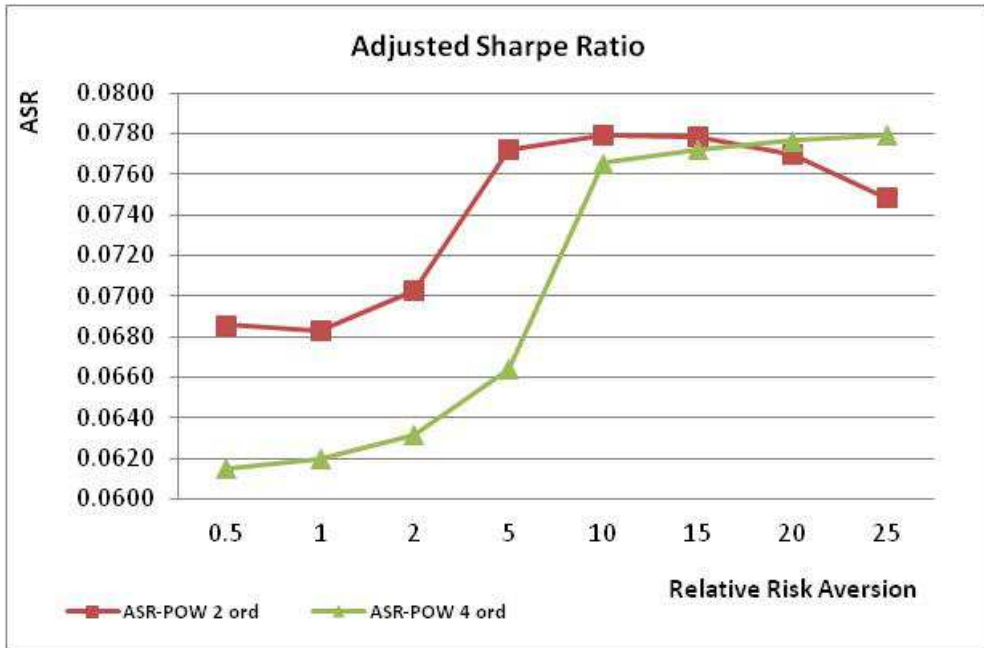


Fig. A.2.2.3

Adjusted Sharpe Index								
Rr	0.5	1	2	5	10	15	20	25
POW 2 Ord	0.0686	0.0683	0.0702	0.0772	0.0779	0.0778	0.0770	0.0749
POW 4 Ord	0.0615	0.0620	0.0631	0.0664	0.0765	0.0772	0.0777	0.0779

Tab. A.2.2.3

A.2.3 Dataset DSd, rendimenti giornalieri

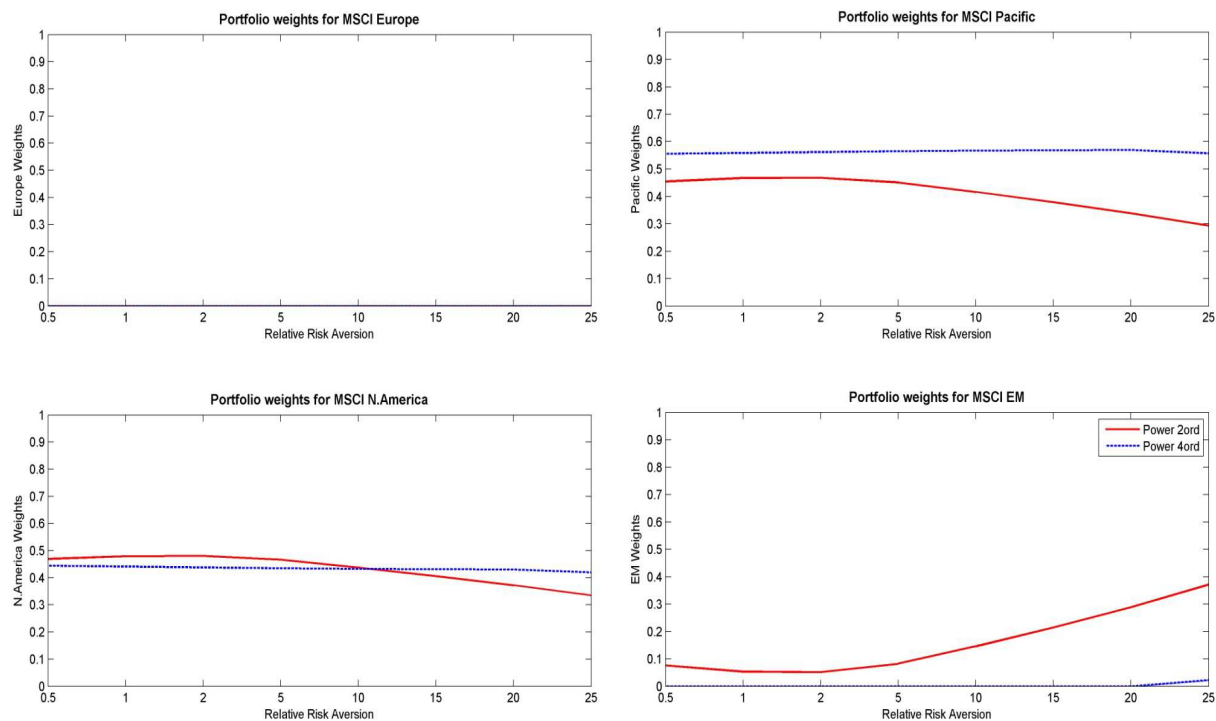


Fig. A.2.3.1

		Optimal Portfolio Weights							
Relative Risk aversion		0.5	1	2	5	10	15	20	25
Pow 2°ord	MSCI Europe	0.00%	0.00%	0.00%	0.00%	0.00%	0.00%	0.00%	0.00%
	MSCI Pacific	45.48%	46.72%	46.80%	45.14%	41.65%	37.90%	33.85%	29.35%
	MSCI N.America	46.92%	47.95%	48.02%	46.63%	43.74%	40.62%	37.25%	33.51%
	MSCI EM	7.60%	5.34%	5.18%	8.23%	14.61%	21.48%	28.90%	37.14%
Pow 4°ord	MSCI Europe	0.00%	0.00%	0.00%	0.00%	0.00%	0.00%	0.00%	0.00%
	MSCI Pacific	55.56%	55.87%	56.19%	56.51%	56.71%	56.86%	56.99%	55.76%
	MSCI N.America	44.44%	44.13%	43.81%	43.49%	43.29%	43.15%	43.01%	41.96%
	MSCI EM	0.00%	0.00%	0.00%	0.00%	0.00%	0.00%	0.00%	2.27%

Tab. A.2.3.1

Portfolio Moments									
Relative Risk aversion	0.5	1	2	5	10	15	20	25	
Pow 2 ^{ord}	Mean	0.0246	0.0241	0.0241	0.0247	0.0261	0.0275	0.0290	0.0308
	Variance	0.9396	0.9374	0.9373	0.9404	0.9513	0.9697	0.9973	1.0376
	Skewness	-0.2490	-0.2476	-0.2475	-0.2494	-0.2532	-0.2574	-0.2620	-0.2675
	Kurtosis	9.1754	9.0876	9.0816	9.1999	9.4498	9.7184	10.0010	10.2950
Pow 4 ^{ord}	Mean	0.0232	0.0233	0.0233	0.0233	0.0233	0.0233	0.0233	0.0238
	Variance	0.9454	0.9464	0.9476	0.9489	0.9497	0.9503	0.9508	0.9518
	Skewness	-0.2434	-0.2433	-0.2431	-0.2430	-0.2429	-0.2428	-0.2427	-0.2445
	Kurtosis	8.3797	8.3574	8.3347	8.3126	8.2988	8.2891	8.2803	8.3642

Tab. A.2.3.2

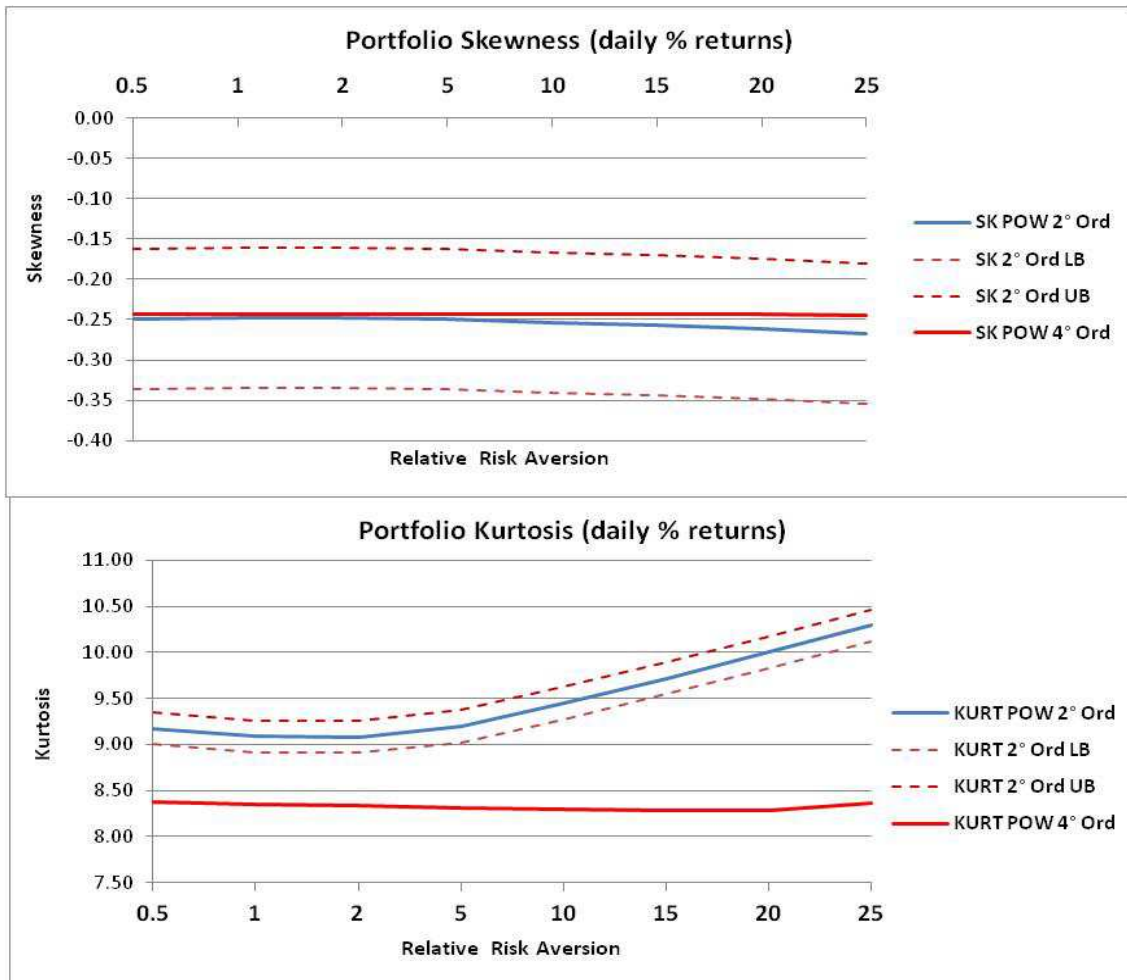


Fig. A.2.3.2

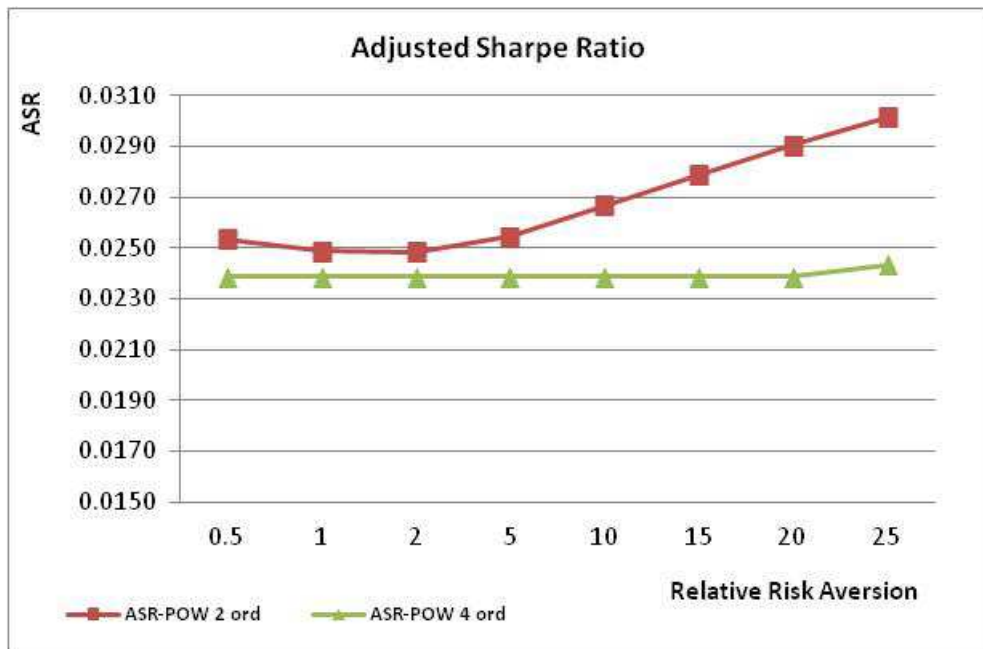


Fig. A.2.3.3

Adjusted Sharpe Index								
Rr	0.5	1	2	5	10	15	20	25
POW 2 Ord	0.0253	0.0249	0.0248	0.0255	0.0267	0.0279	0.0290	0.0301
POW 4 Ord	0.0239	0.0239	0.0239	0.0239	0.0239	0.0239	0.0239	0.0243

Tab. A.2.3.3

A.3 Parte I: pesi ottimi di portafoglio ed ASR

A.3.1 Dataset DS_m, rendimenti mensili

Optimal Portfolio Weights								
Risk aversion	0.5	1	2	5	10	15	20	25
MV	MSCI Europe	0.00%	0.00%	0.00%	0.00%	0.00%	0.00%	0.00%
	MSCI Pacific	15.47%	17.45%	18.44%	19.03%	19.23%	19.30%	19.35%
	MSCI N.America	84.53%	82.55%	81.56%	80.97%	80.77%	80.70%	80.65%
	MSCI EM	0.00%	0.00%	0.00%	0.00%	0.00%	0.00%	0.00%
Exp 2°ord	MSCI Europe	0.00%	0.00%	0.00%	0.00%	0.00%	0.00%	0.00%
	MSCI Pacific	6.76%	0.00%	0.00%	0.00%	0.00%	0.00%	0.00%
	MSCI N.America	93.24%	96.38%	86.77%	0.00%	0.00%	0.00%	0.00%
	MSCI EM	0.00%	3.62%	13.23%	100.00%	100.00%	100.00%	100.00%
Exp 4°ord	MSCI Europe	0.00%	0.00%	0.00%	0.00%	0.00%	0.00%	0.00%
	MSCI Pacific	12.37%	5.13%	0.00%	0.00%	0.00%	0.00%	0.00%
	MSCI N.America	87.63%	94.87%	100.00%	98.22%	0.00%	0.00%	0.00%
	MSCI EM	0.00%	0.00%	0.00%	1.78%	100.00%	100.00%	100.00%

Tab. A.3.1.1

Adjusted Sharpe Index								
Ra	0.5	1	2	5	10	15	20	25
MV	0.1496	0.1474	0.1463	0.1456	0.1454	0.1453	0.1453	0.1453
EXP 2 Ord	0.1580	0.1646	0.1665	0.1391	0.1391	0.1391	0.1391	0.1391
EXP 4 Ord	0.1528	0.1594	0.1634	0.1640	0.1391	0.1391	0.1391	0.1391

Tab. A.3.1.2

A.3.2 Dataset DSw, rendimenti settimanali

Optimal Portfolio Weights									
Risk aversion		0.5	1	2	5	10	15	20	25
MV	MSCI Europe	2.73%	3.02%	3.17%	3.13%	3.08%	3.06%	3.05%	3.04%
	MSCI Pacific	26.56%	28.92%	30.10%	30.73%	30.91%	30.97%	31.00%	31.01%
	MSCI N.America	67.31%	66.71%	66.41%	66.14%	66.02%	65.98%	65.96%	65.95%
	MSCI EM	3.40%	1.35%	0.33%	0.00%	0.00%	0.00%	0.00%	0.00%
Exp 2°ord	MSCI Europe	2.41%	2.38%	1.87%	0.00%	0.00%	0.00%	0.00%	0.00%
	MSCI Pacific	23.96%	23.73%	19.59%	1.64%	0.00%	0.00%	0.00%	0.00%
	MSCI N.America	67.98%	68.04%	69.10%	73.50%	64.59%	53.52%	39.06%	10.06%
	MSCI EM	5.65%	5.86%	9.44%	24.86%	35.41%	46.48%	60.94%	89.95%
Exp 4°ord	MSCI Europe	0.21%	0.67%	2.36%	5.04%	3.01%	0.00%	0.00%	0.00%
	MSCI Pacific	32.89%	34.75%	32.75%	24.57%	0.00%	0.00%	0.00%	0.00%
	MSCI N.America	66.91%	64.58%	64.90%	70.39%	79.92%	76.54%	70.87%	64.73%
	MSCI EM	0.00%	0.00%	0.00%	0.00%	17.07%	23.46%	29.13%	35.27%

Tab. A.3.2.1

Adjusted Sharpe Index								
Ra	0.5	1	2	5	10	15	20	25
MV	0.0638	0.0622	0.0614	0.0610	0.0609	0.0609	0.0608	0.0608
EXP 2 Ord	0.0655	0.0657	0.0682	0.0769	0.0779	0.0776	0.0760	0.0705
EXP 4 Ord	0.0601	0.0590	0.0599	0.0639	0.0762	0.0772	0.0777	0.0779

Tab. A.3.2.2

A.3.3 Dataset DSd, rendimenti giornalieri

Optimal Portfolio Weights									
Risk aversion		0.5	1	2	5	10	15	20	25
MV	MSCI Europe	0.00%	0.00%	0.00%	0.00%	0.00%	0.00%	0.00%	0.00%
	MSCI Pacific	46.62%	48.18%	48.95%	49.42%	49.57%	49.63%	49.63%	49.63%
	MSCI N.America	47.87%	49.16%	49.80%	50.19%	50.32%	50.36%	50.37%	50.37%
	MSCI EM	5.51%	2.67%	1.24%	0.39%	0.11%	0.01%	0.00%	0.00%
Exp 2°ord	MSCI Europe	0.00%	0.00%	0.00%	0.00%	0.00%	0.00%	0.00%	0.00%
	MSCI Pacific	46.26%	47.45%	47.50%	45.77%	42.21%	38.36%	34.21%	29.57%
	MSCI N.America	47.57%	48.55%	48.60%	47.16%	44.20%	41.01%	37.55%	33.70%
	MSCI EM	6.18%	4.00%	3.91%	7.07%	13.60%	20.63%	28.24%	36.73%
Exp 4°ord	MSCI Europe	0.00%	0.00%	0.00%	0.00%	0.00%	0.00%	0.00%	0.00%
	MSCI Pacific	51.76%	53.96%	55.57%	56.37%	56.63%	56.79%	56.92%	56.59%
	MSCI N.America	48.05%	46.04%	44.44%	43.63%	43.37%	43.21%	43.08%	42.62%
	MSCI EM	0.19%	0.00%	0.00%	0.00%	0.00%	0.00%	0.00%	0.79%

Tab. A.3.3.1

Adjusted Sharpe Index								
Ra	0.5	1	2	5	10	15	20	25
MV	0.02491	0.02432	0.02402	0.02384	0.02378	0.02376	0.02375	0.02375
EXP 2 Ord	0.02505	0.02460	0.02458	0.02523	0.02649	0.02773	0.02893	0.03010
EXP 4 Ord	0.02387	0.02387	0.02388	0.02388	0.02388	0.02387	0.02387	0.02404

Tab. A.3.3.2

A.4 Parte II: pesi ottimi di portafoglio ed ASR

A.4.1 Sub campioni, rendimenti mensili

I° PERIODO BASSA VOLATILITA': 01/01/2003 - 31/07/2007									
Risk aversion		0.5	1	2	5	10	15	20	25
MV	MSCI Europe	0.53%	0.00%	0.00%	0.00%	0.00%	0.00%	0.00%	0.00%
	MSCI Pacific	29.95%	25.28%	22.93%	21.52%	21.05%	20.89%	20.82%	20.77%
	MSCI N.America	69.53%	74.73%	77.07%	78.48%	78.95%	79.11%	79.18%	79.23%
	MSCI EM	0.00%	0.00%	0.00%	0.00%	0.00%	0.00%	0.00%	0.00%
Exp 2°ord	MSCI Europe	25.11%	0.00%	0.00%	0.00%	0.00%	0.00%	7.16%	15.82%
	MSCI Pacific	29.08%	0.00%	0.00%	0.00%	25.01%	20.62%	5.69%	7.72%
	MSCI N.America	27.76%	0.00%	0.00%	0.00%	0.00%	0.00%	0.41%	0.00%
	MSCI EM	18.05%	100.00%	100.00%	100.00%	74.99%	79.38%	86.74%	76.46%
Exp 4°ord	MSCI Europe	8.97%	0.00%	48.60%	0.00%	0.00%	0.00%	0.04%	6.11%
	MSCI Pacific	24.29%	25.79%	33.08%	0.00%	0.00%	0.00%	6.97%	0.00%
	MSCI N.America	66.74%	74.21%	0.00%	0.00%	0.00%	0.00%	10.39%	0.00%
	MSCI EM	0.00%	0.00%	18.32%	100.00%	100.00%	100.00%	82.61%	93.89%
II° PERIODO ALTA VOLATILITA': 01/08/2007 - 02/09/2013									
MV	MSCI Europe	0.00%	0.00%	0.00%	0.00%	0.00%	0.00%	0.00%	0.00%
	MSCI Pacific	20.26%	25.20%	27.67%	29.15%	29.65%	29.81%	29.90%	29.94%
	MSCI N.America	79.74%	74.80%	72.33%	70.85%	70.35%	70.19%	70.11%	70.06%
	MSCI EM	0.00%	0.00%	0.00%	0.00%	0.00%	0.00%	0.00%	0.00%
Exp 2°ord	MSCI Europe	0.00%	0.00%	0.00%	0.00%	0.00%	0.00%	0.00%	0.00%
	MSCI Pacific	0.00%	0.00%	0.00%	0.00%	0.00%	0.00%	0.00%	0.00%
	MSCI N.America	100.00%	100.00%	100.00%	100.00%	100.00%	100.00%	100.00%	100.00%
	MSCI EM	0.00%	0.00%	0.00%	0.00%	0.00%	0.00%	0.00%	0.00%
Exp 4°ord	MSCI Europe	0.00%	0.00%	0.00%	0.00%	0.00%	0.00%	0.00%	0.00%
	MSCI Pacific	0.00%	0.00%	0.00%	0.00%	0.00%	0.00%	0.00%	0.00%
	MSCI N.America	100.00%	100.00%	100.00%	100.00%	100.00%	100.00%	100.00%	100.00%
	MSCI EM	0.00%	0.00%	0.00%	0.00%	0.00%	0.00%	0.00%	0.00%

Tab. A.4.1.1

Adjusted Sharpe Index: I° PERIODO BASSA VOLATILITA'								
Ra	0.5	1	2	5	10	15	20	25
MV	0.4965	0.4911	0.4880	0.4859	0.4851	0.4849	0.4847	0.4847
EXP 2 Ord	0.5474	0.5182	0.5182	0.5182	0.5216	0.5214	0.5259	0.5341
EXP 4 Ord	0.5031	0.4917	0.5567	0.5182	0.5182	0.5182	0.5234	0.5234

Tab. A.4.1.2

Adjusted Sharpe Index (high volatility)								
Ra	0.5	1	2	5	10	15	20	25
MV	0.0402	0.0364	0.0344	0.0333	0.0329	0.0328	0.0327	0.0327
EXP 2 Ord	0.0553	0.0553	0.0553	0.0553	0.0553	0.0553	0.0553	0.0553
EXP 4 Ord	0.0553	0.0553	0.0553	0.0553	0.0553	0.0553	0.0553	0.0553

Tab. A.4.1.3

A.4.2 Sub campioni, rendimenti settimanali

I° PERIODO BASSA VOLATILITA': 01/01/2003 - 31/07/2007									
Risk aversion		0.5	1	2	5	10	15	20	25
MV	MSCI Europe	0.00%	0.00%	0.00%	0.00%	0.00%	0.00%	0.00%	0.00%
	MSCI Pacific	22.67%	26.69%	25.38%	24.38%	24.05%	23.94%	23.88%	23.85%
	MSCI N.America	64.51%	72.73%	74.62%	75.62%	75.95%	76.06%	76.12%	76.15%
	MSCI EM	12.82%	0.58%	0.00%	0.00%	0.00%	0.00%	0.00%	0.00%
Exp 2°ord	MSCI Europe	0.00%	0.00%	0.00%	0.00%	0.00%	0.00%	0.00%	0.00%
	MSCI Pacific	20.25%	22.00%	18.71%	0.00%	0.00%	0.00%	0.00%	0.00%
	MSCI N.America	59.57%	63.16%	56.43%	0.00%	0.00%	0.00%	0.00%	0.00%
	MSCI EM	20.19%	14.84%	24.87%	100.00%	100.00%	100.00%	100.00%	100.00%
Exp 4°ord	MSCI Europe	0.00%	0.00%	0.00%	0.00%	0.00%	0.00%	0.00%	0.00%
	MSCI Pacific	25.58%	29.40%	33.56%	25.25%	0.00%	0.00%	0.00%	0.00%
	MSCI N.America	70.98%	70.60%	66.44%	54.01%	0.00%	0.00%	0.00%	0.00%
	MSCI EM	3.44%	0.00%	0.00%	20.75%	100.00%	100.00%	100.00%	100.00%
II° PERIODO ALTA VOLATILITA': 01/08/2007 - 02/09/2013									
MV	MSCI Europe	0.00%	0.00%	0.00%	0.00%	0.00%	0.00%	0.00%	0.00%
	MSCI Pacific	36.66%	38.27%	39.08%	39.56%	39.72%	39.78%	39.80%	39.82%
	MSCI N.America	63.34%	61.73%	60.92%	60.44%	60.28%	60.22%	60.20%	60.18%
	MSCI EM	0.00%	0.00%	0.00%	0.00%	0.00%	0.00%	0.00%	0.00%
Exp 2°ord	MSCI Europe	0.00%	0.00%	0.00%	0.00%	0.00%	0.00%	0.00%	0.00%
	MSCI Pacific	33.75%	32.43%	27.31%	8.32%	0.00%	0.00%	0.00%	0.00%
	MSCI N.America	66.25%	67.57%	72.69%	91.68%	100.00%	100.00%	100.00%	100.00%
	MSCI EM	0.00%	0.00%	0.00%	0.00%	0.00%	0.00%	0.00%	0.00%
Exp 4°ord	MSCI Europe	0.00%	0.00%	0.00%	0.00%	0.00%	0.00%	0.00%	0.00%
	MSCI Pacific	42.74%	41.75%	37.67%	26.07%	5.06%	0.00%	0.00%	0.00%
	MSCI N.America	57.26%	58.25%	62.33%	73.93%	94.95%	100.00%	100.00%	100.00%
	MSCI EM	0.00%	0.00%	0.00%	0.00%	0.00%	0.00%	0.00%	0.00%

Tab. A.4.2.1

Adjusted Sharpe Index: I° PERIODO BASSA VOLATILITA'								
Ra	0.5	1	2	5	10	15	20	25
MV	0.2126	0.1945	0.1924	0.1917	0.1914	0.1913	0.1913	0.1912
EXP 2 Ord	0.2213	0.2151	0.2260	0.2465	0.2465	0.2465	0.2465	0.2465
EXP 4 Ord	0.1990	0.1952	0.1974	0.2235	0.2465	0.2465	0.2465	0.2465

Tab. A.4.2.2

Adjusted Sharpe Index: II° PERIODO ALTA VOLATILITA'								
Ra	0.5	1	2	5	10	15	20	25
MV	0.0116	0.0111	0.0108	0.0106	0.0106	0.0106	0.0106	0.0106
EXP 2 Ord	0.0125	0.0129	0.0145	0.0200	0.0221	0.0221	0.0221	0.0221
EXP 4 Ord	0.0096	0.0099	0.0113	0.0149	0.0208	0.0221	0.0221	0.0221

Tab. A.4.2.3

A.4.3 Sub campioni, rendimenti giornalieri

I° PERIODO BASSA VOLATILITA': 01/01/2003 - 31/07/2007									
Risk aversion		0.5	1	2	5	10	15	20	25
MV	MSCI Europe	10.93%	12.20%	12.83%	13.20%	13.33%	13.37%	13.39%	13.41%
	MSCI Pacific	16.66%	21.65%	24.15%	25.65%	26.15%	26.31%	26.40%	26.45%
	MSCI N.America	44.47%	50.43%	53.41%	55.20%	55.80%	56.00%	56.10%	56.16%
	MSCI EM	27.94%	15.73%	9.61%	5.95%	4.73%	4.32%	4.12%	3.99%
Exp 2° ord	MSCI Europe	10.80%	11.94%	12.32%	11.92%	10.61%	8.72%	3.95%	0.00%
	MSCI Pacific	16.13%	20.64%	22.14%	20.56%	15.36%	7.88%	0.00%	0.00%
	MSCI N.America	43.83%	49.21%	51.01%	49.12%	42.92%	33.98%	15.33%	0.00%
	MSCI EM	29.25%	18.21%	14.54%	18.40%	31.11%	49.42%	80.71%	100.00%
Exp 4° ord	MSCI Europe	12.25%	14.07%	14.31%	12.88%	11.97%	11.56%	11.26%	10.98%
	MSCI Pacific	18.65%	24.54%	28.13%	28.74%	26.23%	23.43%	20.46%	17.22%
	MSCI N.America	47.14%	53.99%	56.95%	56.52%	54.20%	51.85%	49.39%	46.68%
	MSCI EM	21.95%	7.41%	0.62%	1.86%	7.60%	13.17%	18.90%	25.13%
II° PERIODO ALTA VOLATILITA': 01/08/2007 - 02/09/2013									
MV	MSCI Europe	0.00%	0.00%	0.00%	0.00%	0.00%	0.00%	0.00%	0.00%
	MSCI Pacific	51.12%	51.65%	51.91%	52.07%	52.12%	52.14%	52.15%	52.15%
	MSCI N.America	48.88%	48.35%	48.09%	47.93%	47.88%	47.86%	47.85%	47.85%
	MSCI EM	0.00%	0.00%	0.00%	0.00%	0.00%	0.00%	0.00%	0.00%
Exp 2° ord	MSCI Europe	0.00%	0.00%	0.00%	0.00%	0.00%	0.00%	0.00%	0.00%
	MSCI Pacific	50.96%	51.32%	51.25%	50.41%	48.79%	47.13%	45.43%	43.69%
	MSCI N.America	49.05%	48.69%	48.75%	49.59%	51.21%	52.87%	54.57%	56.32%
	MSCI EM	0.00%	0.00%	0.00%	0.00%	0.00%	0.00%	0.00%	0.00%
Exp 4° ord	MSCI Europe	0.00%	0.00%	0.00%	0.00%	0.00%	0.00%	0.00%	0.00%
	MSCI Pacific	53.50%	55.63%	56.69%	56.78%	56.25%	55.65%	55.04%	54.42%
	MSCI N.America	46.51%	44.37%	43.31%	43.22%	43.76%	44.35%	44.96%	45.58%
	MSCI EM	0.00%	0.00%	0.00%	0.00%	0.00%	0.00%	0.00%	0.00%

Tab. A.4.3.1

Adjusted Sharpe Index: I° PERIODO BASSA VOLATILITA'								
Ra	0.5	1	2	5	10	15	20	25
MV	0.1136	0.1063	0.1018	0.0989	0.0979	0.0976	0.0974	0.0973
EXP 2 Ord	0.1143	0.1080	0.1055	0.1081	0.1152	0.1217	0.1248	0.1227
EXP 4 Ord	0.1104	0.1003	0.0947	0.0957	0.1002	0.1044	0.1082	0.1119

Tab. A.4.3.2

Adjusted Sharpe Index: II° PERIODO ALTA VOLATILITA'								
Ra	0.5	1	2	5	10	15	20	25
MV	0.0073	0.0072	0.0072	0.0071	0.0071	0.0071	0.0071	0.0071
EXP 2 Ord	0.0073	0.0073	0.0073	0.0074	0.0077	0.0080	0.0083	0.0085
EXP 4 Ord	0.0069	0.0065	0.0063	0.0063	0.0064	0.0065	0.0066	0.0067

Tab. A.4.3.3

A.5 Parte III: rendimenti annui e pesi medi

A.5.1 Simulazione Out of Sample: $R_a=2$

	Comp>Returns (%) Risk Av=2		
	MV	EXP 2 Ord	EXP 4 Ord
1994	-3.952	-8.018	-5.023
1995	24.880	24.549	21.642
1996	11.107	12.658	12.194
1997	8.941	19.059	16.682
1998	26.802	18.705	24.746
1999	28.704	25.560	24.709
2000	-17.269	-22.442	-20.474
2001	-24.646	-29.570	-28.139
2002	-21.197	-18.817	-23.692
2003	41.704	39.015	41.209
2004	12.713	11.238	12.706
2005	9.713	10.027	10.452
2006	12.553	6.734	7.830
2007	4.125	4.105	0.853
2008	-40.743	-50.956	-50.270
2009	23.676	6.610	17.778
2010	12.829	9.160	11.306
2011	-14.795	-19.154	-21.339
2012	11.934	12.152	11.165
2013	10.481	8.102	9.154

Tab. A.5.1.1

Average Portfolio Weights for Absolute Risk Aversion 2												
	Mean-Variance				Exponential 2° Ord				Exponential 4° Ord			
	Europe	Pacific	N.America	EM	Europe	Pacific	N.America	EM	Europe	Pacific	N.America	EM
1994	3.50%	25.66%	65.24%	5.60%	6.91%	32.51%	40.40%	20.19%	8.53%	27.46%	47.43%	16.59%
1995	10.87%	13.21%	75.92%	0.00%	5.87%	8.22%	85.91%	0.00%	10.60%	17.21%	72.19%	0.00%
1996	62.31%	15.00%	16.51%	6.19%	61.14%	11.86%	26.90%	0.10%	60.59%	15.81%	23.50%	0.10%
1997	56.72%	9.11%	10.39%	23.78%	67.79%	0.20%	22.69%	9.32%	75.67%	1.29%	9.37%	13.67%
1998	55.38%	8.60%	36.02%	0.00%	66.84%	4.17%	28.99%	0.00%	76.56%	3.36%	20.08%	0.00%
1999	26.81%	24.40%	48.75%	0.04%	5.81%	42.62%	47.36%	4.20%	28.82%	25.59%	45.52%	0.06%
2000	35.81%	27.81%	32.74%	3.65%	23.02%	31.86%	30.66%	14.47%	35.61%	27.66%	31.17%	5.56%
2001	45.74%	42.17%	11.62%	0.48%	42.38%	33.06%	21.02%	3.54%	35.71%	41.58%	20.91%	1.80%
2002	11.20%	33.67%	29.87%	25.26%	1.40%	33.44%	10.42%	54.73%	4.25%	31.31%	25.58%	38.85%
2003	0.77%	37.43%	13.47%	48.34%	2.09%	37.28%	3.19%	57.44%	0.00%	39.56%	6.05%	54.39%
2004	12.03%	14.79%	61.60%	11.58%	24.77%	23.77%	27.29%	24.17%	0.45%	23.00%	47.88%	28.68%
2005	20.74%	24.00%	55.03%	0.23%	28.82%	32.35%	30.02%	8.82%	5.67%	30.33%	56.24%	7.76%
2006	2.31%	8.07%	89.57%	0.06%	2.75%	20.96%	69.50%	6.79%	2.44%	14.19%	79.50%	3.86%
2007	0.00%	27.78%	72.22%	0.00%	2.57%	21.88%	54.59%	20.95%	2.85%	39.15%	58.00%	0.00%
2008	0.00%	19.90%	80.10%	0.00%	0.00%	26.37%	66.28%	7.35%	0.00%	29.79%	70.21%	0.00%
2009	0.00%	49.09%	50.91%	0.00%	1.31%	58.21%	20.46%	20.02%	5.81%	57.99%	36.20%	0.00%
2010	0.00%	69.20%	30.80%	0.00%	0.00%	68.79%	23.07%	8.14%	0.00%	62.65%	37.35%	0.00%
2011	0.00%	43.81%	49.32%	6.87%	0.00%	39.27%	57.40%	3.34%	0.00%	46.42%	49.77%	3.81%
2012	0.00%	36.77%	63.23%	0.00%	0.00%	20.17%	79.83%	0.00%	0.00%	60.98%	39.02%	0.00%
2013	0.00%	28.16%	71.84%	0.00%	0.00%	45.40%	54.60%	0.00%	0.00%	52.79%	47.21%	0.00%

Tab. A.5.1.2

A.5.2 Simulazione Out of Sample: $R_a=20$

	Comp>Returns (%) Risk Av=20		
	MV	EXP 2 Ord	EXP 4 Ord
1994	-2.838	-5.411	-6.531
1995	24.869	26.512	24.940
1996	10.103	13.335	10.403
1997	4.830	15.306	13.843
1998	27.140	10.047	14.371
1999	28.620	38.260	34.928
2000	-16.401	-26.602	-28.107
2001	-24.286	-33.180	-33.823
2002	-20.947	-12.681	-13.191
2003	41.667	22.801	24.118
2004	12.853	16.292	17.890
2005	9.573	22.442	23.832
2006	13.252	0.971	4.186
2007	4.643	25.713	28.398
2008	-40.296	-54.161	-53.899
2009	23.977	44.532	40.056
2010	13.087	6.890	2.743
2011	-14.248	-20.207	-21.579
2012	11.982	16.656	14.060
2013	10.499	1.839	4.577

Tab. A.5.2.1

Average Portfolio Weights for Absolute Risk Aversion 20												
	Mean-Variance				Exponential 2° Ord				Exponential 4° Ord			
	Europe	Pacific	N.America	EM	Europe	Pacific	N.America	EM	Europe	Pacific	N.America	EM
1994	2.87%	23.75%	70.03%	3.35%	0.00%	39.07%	2.25%	58.68%	2.29%	40.79%	2.33%	54.59%
1995	12.58%	15.28%	71.77%	0.37%	2.19%	4.52%	93.29%	0.00%	4.56%	5.02%	90.43%	0.00%
1996	59.52%	16.11%	13.16%	11.21%	15.63%	5.85%	78.53%	0.00%	30.47%	6.43%	63.10%	0.00%
1997	49.53%	15.39%	7.11%	27.97%	24.90%	0.00%	75.10%	0.00%	44.17%	0.00%	55.83%	0.00%
1998	51.96%	11.77%	36.18%	0.10%	67.90%	1.88%	30.22%	0.00%	72.02%	1.73%	26.25%	0.00%
1999	30.06%	22.58%	47.32%	0.04%	0.00%	68.76%	21.15%	10.09%	0.96%	63.90%	24.22%	10.93%
2000	37.04%	27.27%	33.14%	2.55%	12.01%	32.31%	32.60%	23.08%	13.42%	32.46%	31.17%	22.96%
2001	45.54%	42.69%	11.35%	0.43%	36.93%	20.50%	35.79%	6.79%	35.23%	22.30%	35.73%	6.74%
2002	12.00%	33.72%	31.39%	22.89%	0.19%	43.20%	1.50%	55.11%	0.05%	39.39%	1.05%	59.51%
2003	0.43%	37.21%	15.81%	46.55%	18.30%	33.38%	4.90%	43.43%	9.03%	34.86%	6.28%	49.84%
2004	9.62%	12.76%	66.34%	11.28%	13.72%	50.83%	0.00%	35.46%	9.11%	49.60%	0.00%	41.30%
2005	19.10%	20.51%	60.39%	0.00%	4.43%	30.33%	0.00%	65.25%	5.35%	29.46%	0.15%	65.04%
2006	2.48%	5.08%	92.44%	0.00%	44.29%	24.86%	0.00%	30.85%	45.70%	26.22%	0.00%	28.08%
2007	0.00%	26.18%	73.82%	0.00%	18.77%	9.61%	0.00%	71.62%	28.28%	10.74%	0.00%	60.98%
2008	0.00%	19.32%	80.68%	0.00%	0.00%	34.22%	22.38%	43.40%	0.00%	32.61%	24.00%	43.40%
2009	0.00%	48.50%	51.50%	0.00%	0.00%	22.11%	0.96%	76.92%	0.00%	25.56%	1.00%	73.44%
2010	0.00%	68.71%	31.29%	0.00%	0.00%	11.82%	15.06%	73.13%	0.06%	21.09%	19.33%	59.51%
2011	0.00%	44.09%	48.50%	7.41%	14.58%	39.51%	43.40%	2.52%	11.51%	38.19%	48.64%	1.66%
2012	0.00%	38.22%	61.79%	0.00%	17.31%	1.92%	80.77%	0.00%	7.57%	12.67%	79.76%	0.00%
2013	0.00%	25.38%	73.70%	0.92%	18.18%	56.91%	24.91%	0.00%	4.41%	67.97%	27.62%	0.00%

Tab. A.5.2.2

A.6 Grafici Momenti e Co-Momenti

A.6.1 Rendimenti medi

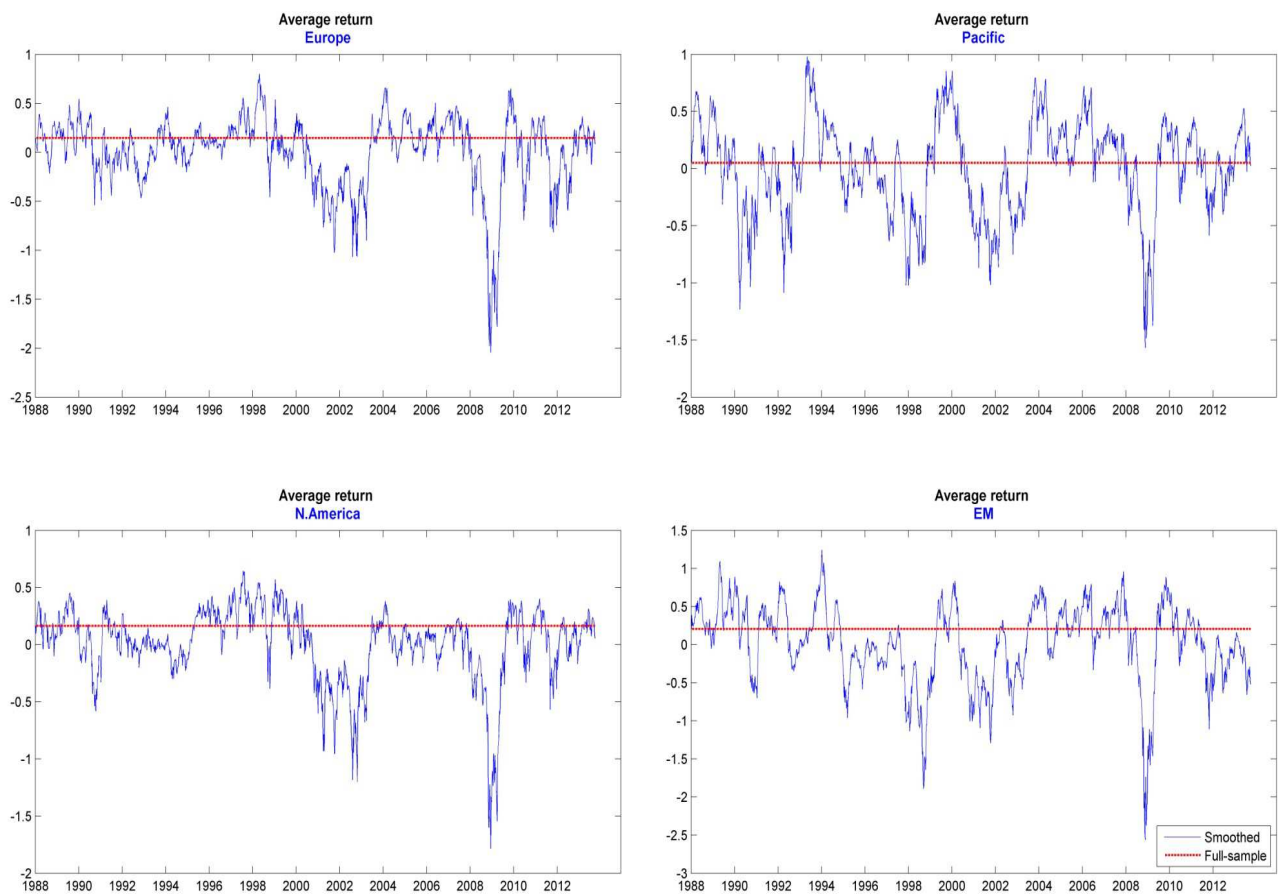


Fig. A.6.1

A.6.2 Varianze e Covarianze

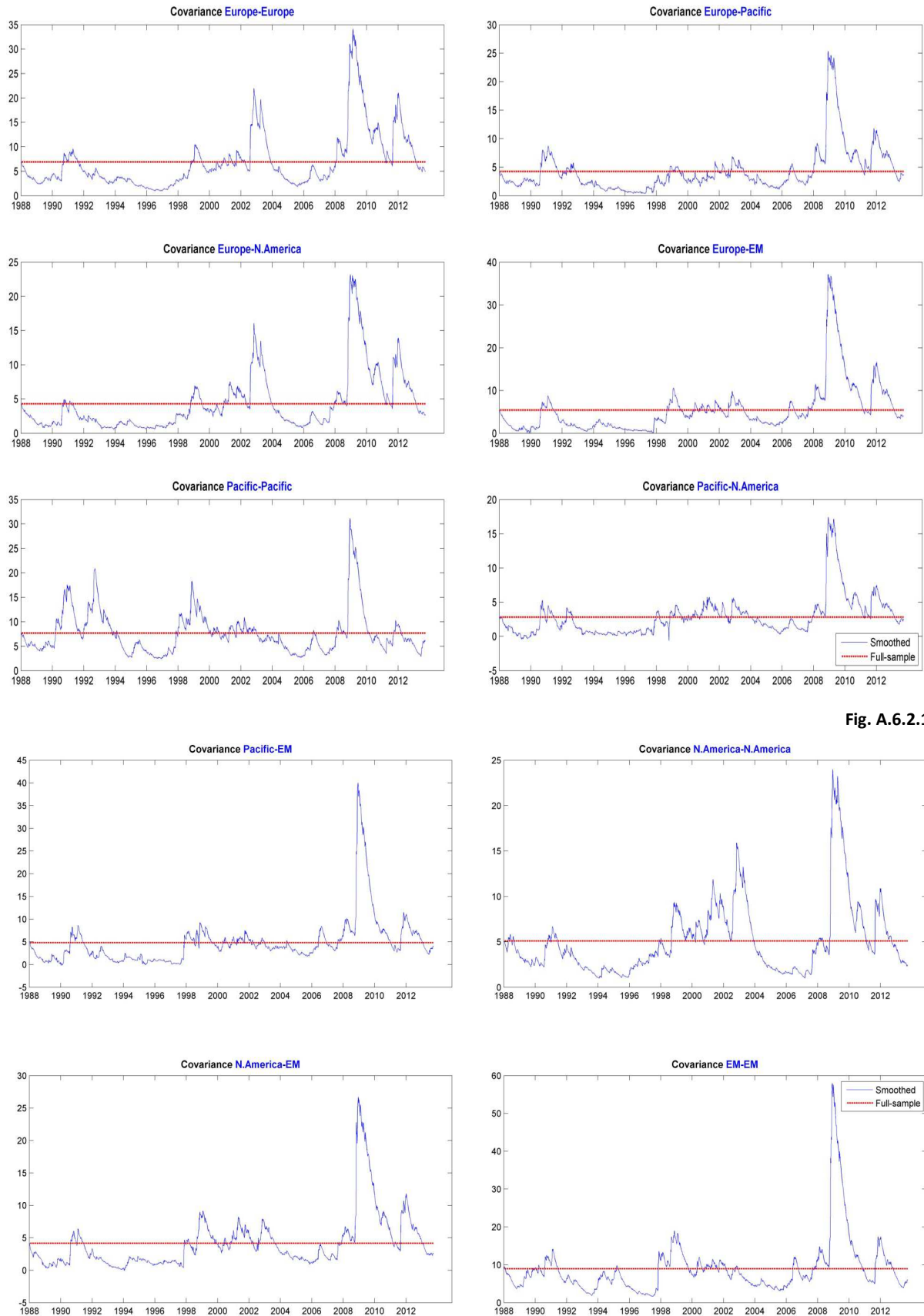


Fig. A.6.2.1

Fig. A.6.2.2

A.6.2 Asimmetria e Co-Asimmetria

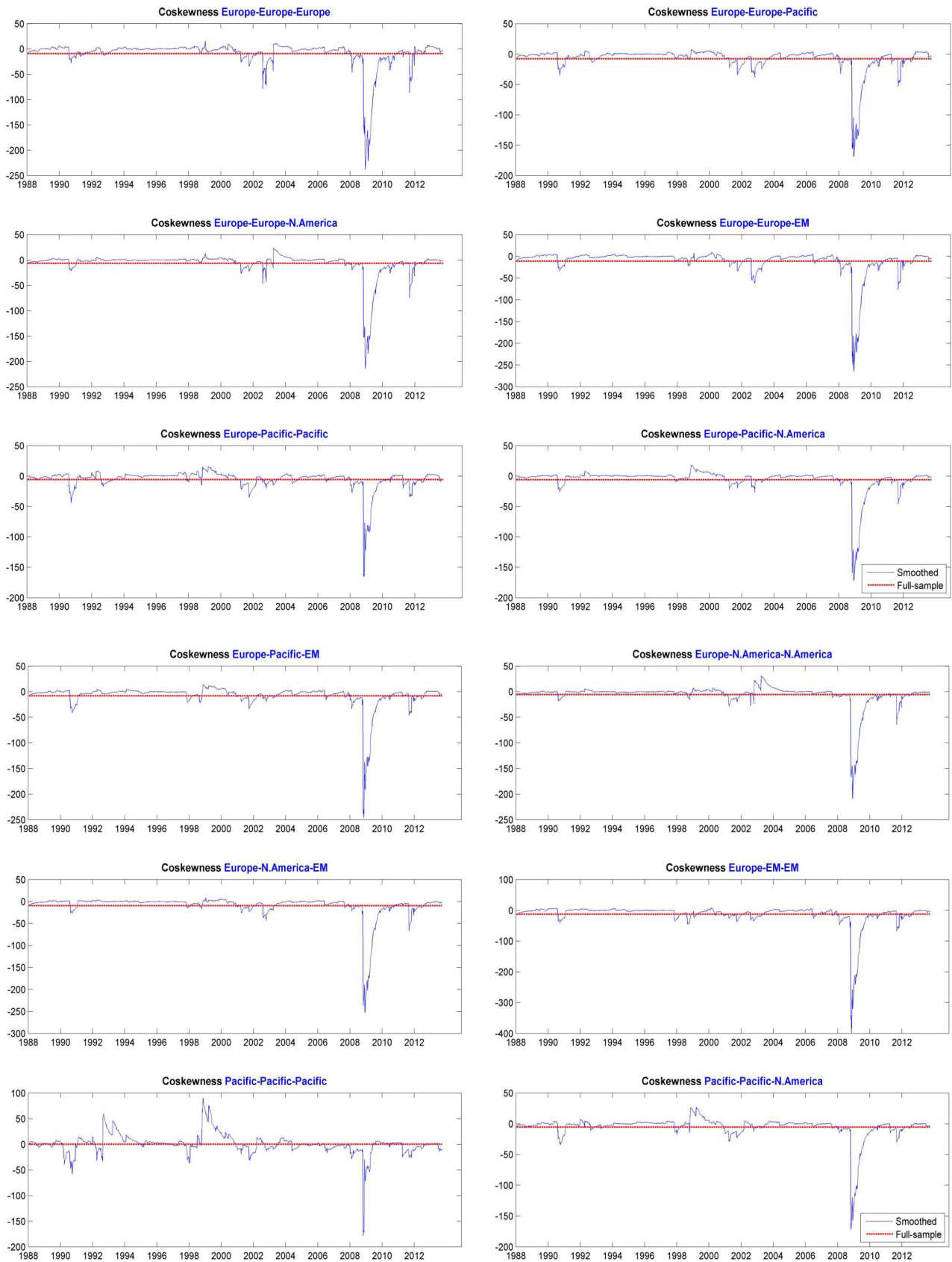


Fig. A.6.2.1

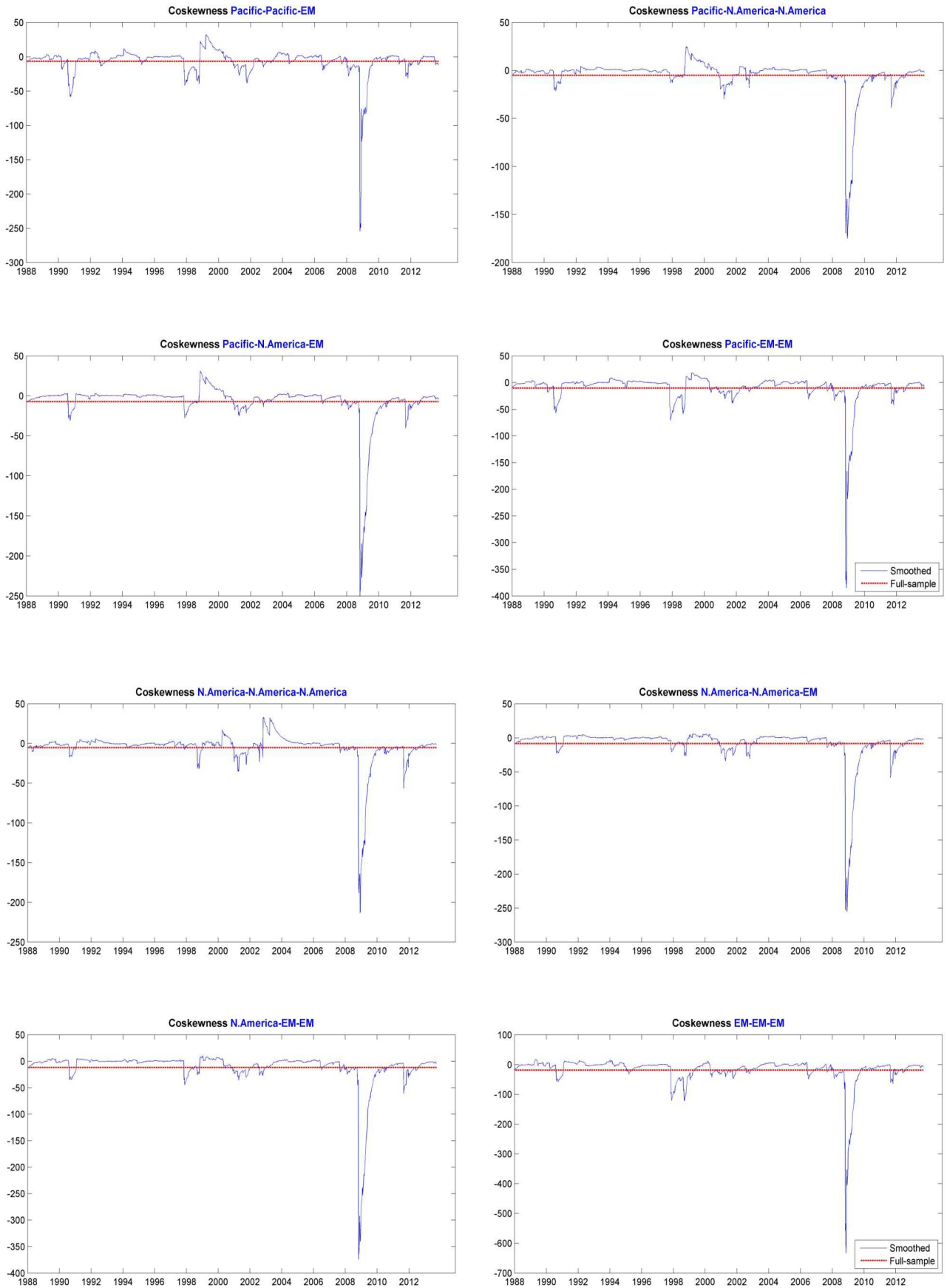


Fig. A.6.2.2

A.6.3 Curtosi e Co-Curtosi

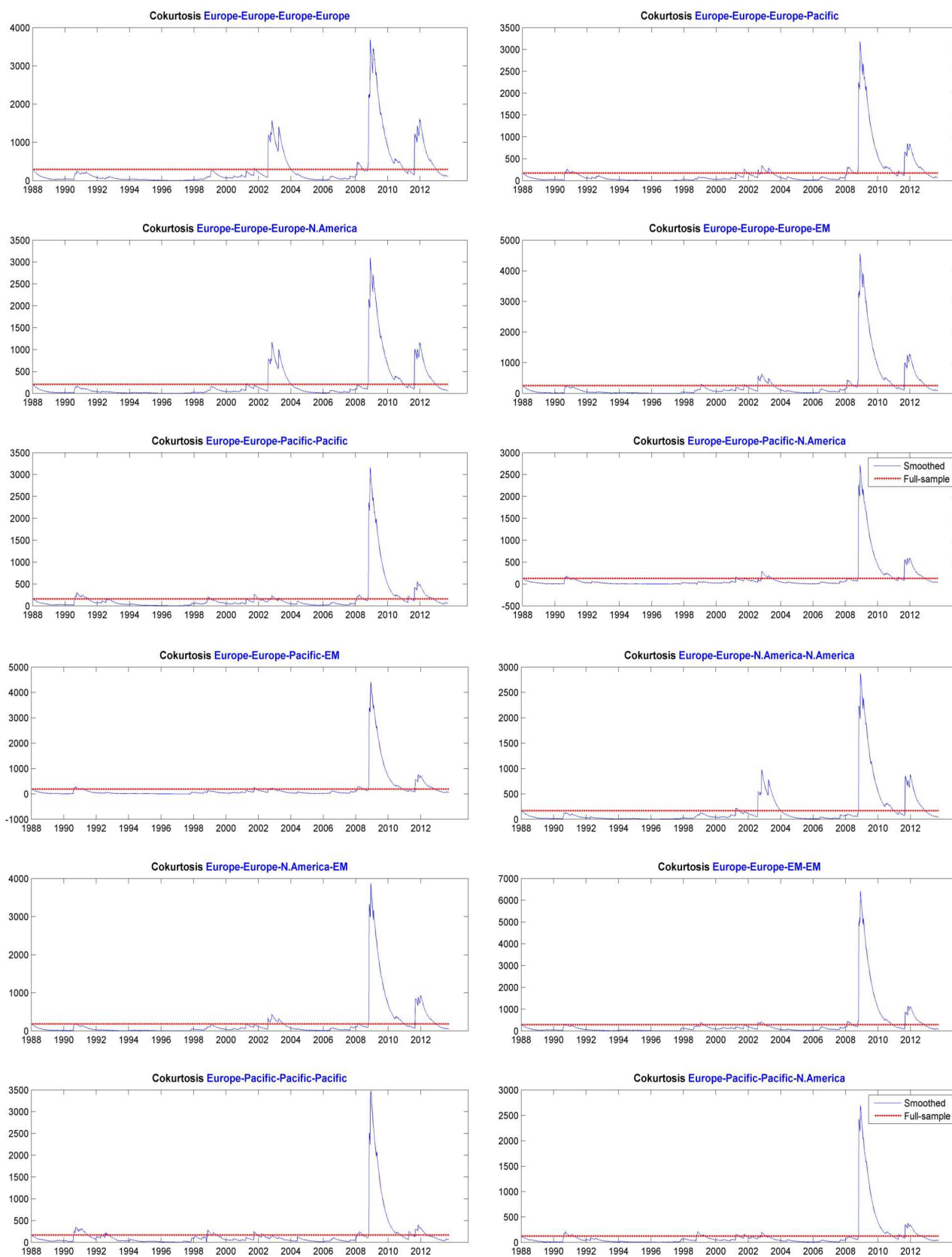


Fig. A.6.3.1

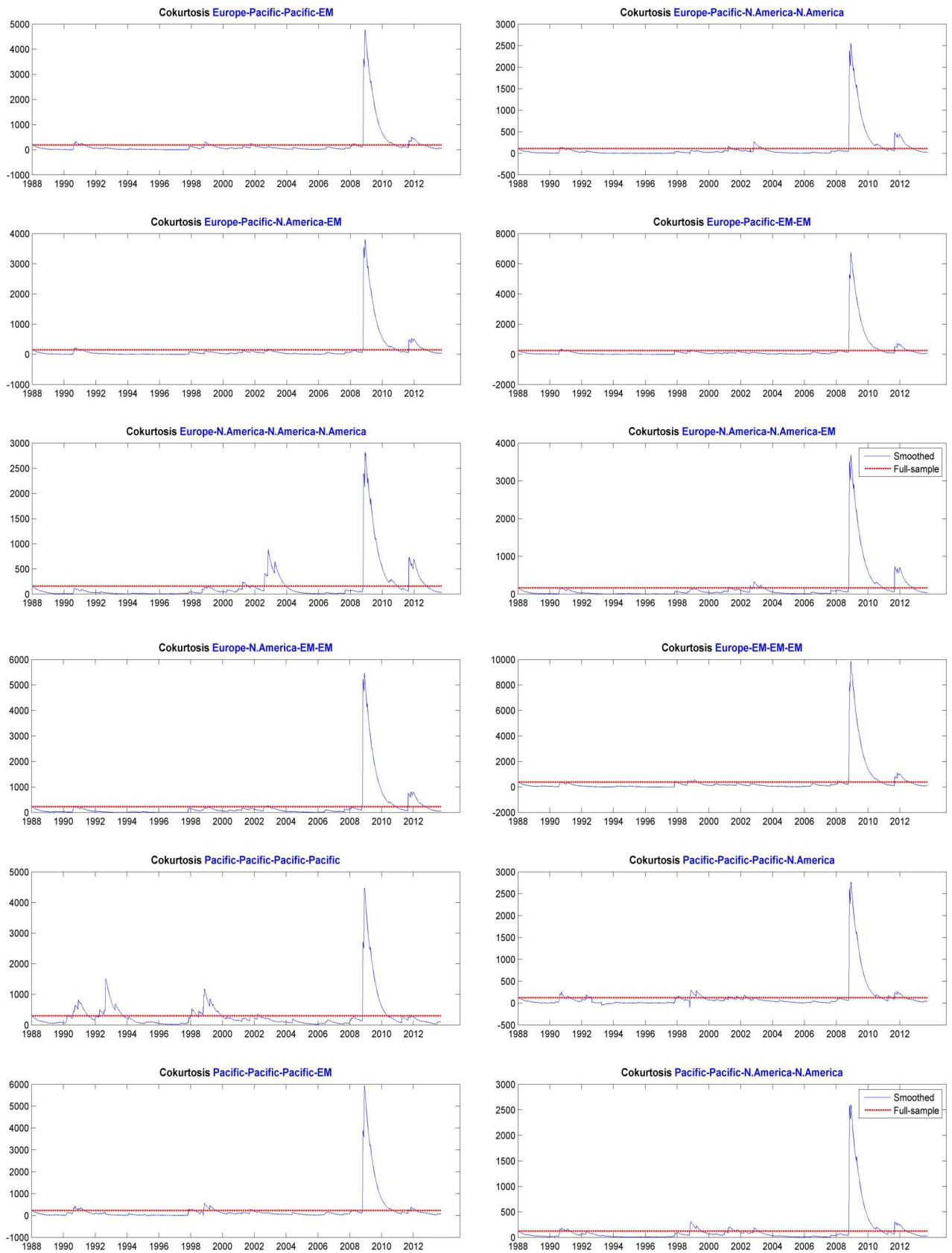


Fig. A.6.3.2

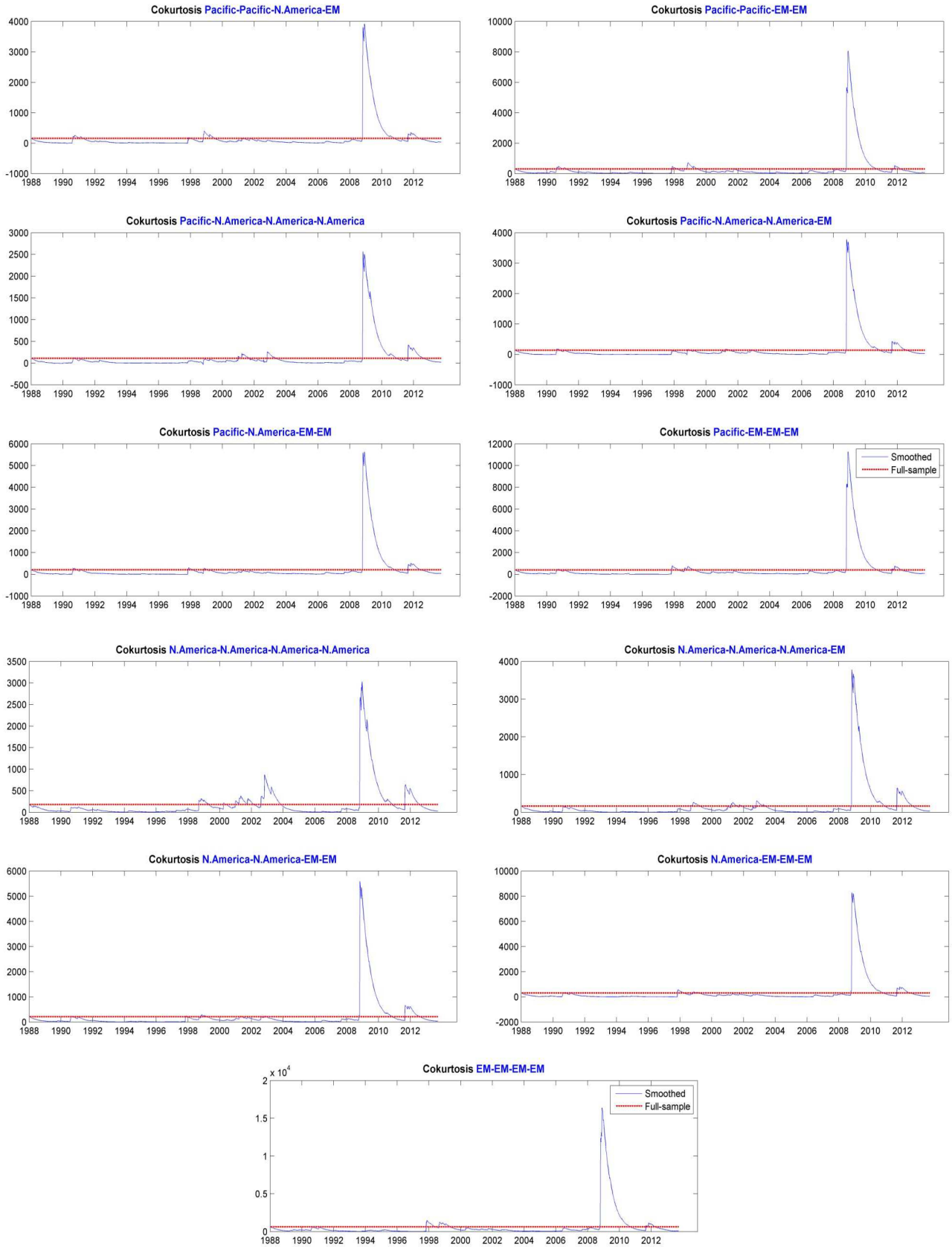


Fig. A.6.3.3

Codice Funzioni Matlab

Funzione "simple_ret()

```
function [ simple_ret ] = simpleRet( priceSeries,ord )
%simpleRet: calcola i rendimenti semplici a partire dalla serie dei
%prezzi
%INPUT: priceSeries, serie storica dei prezzi, "fints" or "array"
%       ord, flag di controllo, se vale 1 la serie è ordinata dal
%       valore più recente al più remoto, 0 altrimenti
%OUTPUT: simple_ret, vettore dei rendimenti semplici

if isa(priceSeries,'fints')
    priceSeries=fts2mat(priceSeries);
end
if(ord==1)
    priceSeries=flipud(priceSeries);
    disp('Serie invertita')
end
if isempty(priceSeries)
    disp('La serie contiene valori mancanti')
else
    simple_ret=zeros(length(priceSeries)-1,1);
    j=1;
    for i=2:length(priceSeries)
        simple_ret(j)=100*(priceSeries(i)/priceSeries(i-1)-1);
        j=j+1;
    end
end
end
```

Funzione "ret_norm_plot()

```
function []= ret_norm_plot( series, name, ord, pr)
%ret_norm_plot: traccia il grafico della pdf dei rendimenti vs densità
%Normale di media e varianza pari alle stime campionarie
%INPUT: series, serie dei prezzi o rendimenti (flag pr),"fints\matrix"
%       ord, flag di controllo, se vale 1 la serie è ordinata
%       dal valore più recente al più remoto, 0 altrimenti
%       pr, flag di controllo, 1 (Prezzi) o 0 (Rendimenti)
%       name: nome dell'asset analizzato, "string"

if(pr==1)
    retVec=simpleRet(series,ord);
else
    retVec=series;
end
if isa(retVec,'fints')
    retVec=fts2mat(retVec);
end
n=length(retVec);
ext=max(max(retVec),abs(min(retVec)));
mu=mean(retVec);
sd=std(retVec);
```

```

x=linspace(-ext,ext,n);
xnorm=normpdf(x,mu,sd);
[f_xi]=ksdensity(retVec);
plot(xi,f,'black','LineWidth',1.5)
hold on
plot(x,xnorm,'--b','LineWidth',1.5)
title(['\fontname{Arial}\bf\fontsize{10}Densità Normale VS Stima...
Kernel densità dei rendimenti \color{blue}',name])
legend(name,'Densità Normale')
end

```

Funzione "normTest()

```

function [ statp ] = normTest( series, conflvl )
%normTest: esegue una batteria di test di normalità: Jarque-Bera (JB),
%Shapiro-Wilk (SW), Kolmogorov-Smirnov (KS), D'Agostino (X2).
%INPUT: series, serie sulla quale va testa la normalità,"fints\matrix"
%       conflvl, livello di confidenza per i test, 'scalar'
%OUTPUT: statp, matrice 4x2 delle statistiche test e p-value.
%
%       statp= |   JB   | p-value |
%              |   X2   | p-value |
%              |   KS   | p-value |
%              |   SW   | p-value |
%
if isa(series,'fints')
    series=fts2mat(series);
end
[~,p_JB,JB,~]=jbstest(series,conflvl);
[X2,p_X2]=DagosPtest(series,conflvl);%versione modificata
dell'originale script DagosPtest.m (ritorna la statistica ed il p-
value, l'originale è void)
[~,p_KS,KS,~]=kstest(series,[],conflvl);
[~,p_SW,SW]=swtest(series,conflvl,0);
statp={'JB', JB, num2str(p_JB,'%1.4f'); 'X2', X2,
num2str(p_X2,'%1.4f'); 'KS', KS, num2str(p_KS,'%1.4f'); 'SW', SW,
num2str(p_SW,'%1.4f')};
end

```

Funzione "weightsGraph()

```

function weightsGraph(data,name)
%weightsGraph: plot simultaneo delle serie dei pesi per ciascun titolo
%INPUT: data, matrice di pesi, ciascuna colonna è' una serie di
%       pesi,matrix
%       name, nome del titolo, string

plot1 = plot(data,'LineWidth',1.5);
set(plot1(1),'Color',[1 0 0],'DisplayName','Media-varianza');
set(plot1(2),'LineStyle','--','Color',[0 0 1],...
'DisplayName','Esponenziale 2ord');
set(plot1(3),'LineStyle','-.','DisplayName','Esponenziale 4ord',...
'Color',[0 0 0]);
set(gca,'XTickLabel',{'0.5','1','2','5','10','15','20','25'});
ylabel([name,'Weights']);

```



```

xlabel('Absolute Risk Aversion');
title(['\fontname{Arial}\bf\fontsize{11}Portfolio weights for MSCI...
',name]);
legend('Media-varianza','Esponenziale 2ord','Esponenziale 4ord');
ylim([0 1]);
end

```

Funzione "seriesMom()

```

function [cent_mom] = seriesMom( series,stdv)
%serMom: calcola i primi quattro momenti centrali della serie dei
%rendimenti di un asset.
%INPUT: series, serie univariata o multivariata di rendimenti, "fints"
%      stdv, flag di controllo 0 (Varianza) o 1(deviazione standard)
%OUTPUT: cent_mom, matrice 4x1 contenente media, varianza\dev.standard
%      asimmetria e curtosi della serie di input

if isa(series,'fints')
    series=fts2mat(series);
end
[~,Nc]=size(series);
cent_mom=zeros(4,Nc);
for i=1:Nc
    cent_mom(1,i)=mean(series(:,i));
    if(stdv==0)
        cent_mom(2,i)=(std(series(:,i)))^2;
    else
        cent_mom(2,i)=std(series(:,i));
    end
    cent_mom(3,i)=skewness(series(:,i));
    cent_mom(4,i)=kurtosis(series(:,i));
end
fprintf('Mean\nVariance-std\nSkewness\nKurtosis\n');
end

```

Funzione "portfolioMom()

```

function [ pmean,pvariance,pskewness,pkurtosis ] = portfolioMom(
weights, series,mean_v,varcov,coskew,cokurt,standardized )
%portfolioMom: calcola i primi 4 momenti del portafoglio
%INPUT: weights, vettore di pesi del portafoglio, "matrix"
%      series, matrice delle serie di rendimenti,"fints\matrix"
%      mean_v, varcov,coskew,cokurt, stime delle matrici dei
%      co-momenti degli asset
%      standardized, flag di controllo, 1(Momenti standardizzati)o 0
%OUTPUT: pmean, rendimento medio del portafoglio
%      pvariance, varianza del portafoglio
%      pskewness, asimmetria del portafoglio
%      pkurtosis, curtosi del portafoglio

if isa(series,'Fints')
    series=fts2mat(series);
end
[~,ncols]=size(weights);

```

```

if (ncols~=1)
    weights=transpose(weights);
%   disp('Vettore di pesi trasposto');
end
pmean=weights'*mean_v';
pvariance=weights'*varcov*weights;
pskewness=weights'*coskew*kron(weights,weights);
pkurtosis=weights'*cokurt*kron(weights,kron(weights,weights));
if(standardized==1)
    pskewness=pskewness/(pvariance)^(3/2);
    pkurtosis=pkurtosis/(pvariance^2);
end

```

Funzione "co_moments()

```

function [mean_ser, varcov, coskewness, cokurtosis] = co_moments(
series,select,lambda)
%co_moments: calcola le matrici dei co momenti di ordine 1,2,3 e 4
%INPUT: series, serie dei rendimenti degli n titoli,"fints\matrix"
%       select, flag di controllo 0 (in sample)o 1
%       (out of sample con exponential smoothing)
%       lambda, parametro di smoothing
%OUTPUT: mean_ser, vettore dei rendimenti medi degli n titoli
%        varcov, matrice di varianza e covarianza degli n titoli
%        coskewness, matrice di co-asimmetria degli n titoli
%        cokurtosis, matrice di co-curtosi degli n titoli

if isa(series,'Fints')
    series=fts2mat(series);
end
i=0;
[T,N]=size(series);
mean_ser=mean(series);
coskew=zeros(N,N^2);
cokurt=zeros(N,N^3);
sm_mean=zeros(1,N,T);
sm_vcov=zeros(N,N,T);
sm_coskew=zeros(N,N*N,T);
sm_cokurt=zeros(N,N*N*N,T);
s_demeaned=series(:,:)-kron(mean_ser,ones(T,1));
%crea una matrice T*N con generico elemento [a_ij-mu_j]con mu_j
rendimento medio del j_esimo asset
vcov=1/T*(s_demeaned)'*(s_demeaned);

for i=1:T
    coskew=coskew+1/T*(kron(s_demeaned(i,:)'*...
        s_demeaned(i,:),s_demeaned(i,:)));
    cokurt=cokurt+1/T*(s_demeaned(i,:)'*...
        kron(s_demeaned(i,:),kron(s_demeaned(i,:),s_demeaned(i,:))));
end
if (select==1)
% Inizializzazione dell'algoritmo di exponential smoothing con momenti
% campionari full-sample
    sm_mean(:,:,1)=mean_ser;
    sm_vcov(:,:,1)=vcov;
    sm_coskew(:,:,1)=coskew;
    sm_cokurt(:,:,1)=cokurt;

```

```

for i=2:T
    sm_mean(:, :, i)=lambda.*sm_mean(:, :, i-1)+...
        (1-lambda).*s_demeaned(i, :);
    sm_vcov(:, :, i)=lambda.*sm_vcov(:, :, i-1)+...
        (1-lambda).*(s_demeaned(i, :))'*(s_demeaned(i, :));
    sm_coskew(:, :, i)=lambda.*sm_coskew(:, :, i-1)+...
        (1-lambda).*(kron(s_demeaned(i, :)'*...
            s_demeaned(i, :), s_demeaned(i, :)));
    sm_cokurt(:, :, i)=lambda.*sm_cokurt(:, :, i-1)+...
        (1-lambda).*(s_demeaned(i, :)'*kron(s_demeaned(i, :), ...
            kron(s_demeaned(i, :), s_demeaned(i, :))));
end
mean_ser=sm_mean;
varcov=sm_vcov;
coskewness=sm_coskew;
cokurtosis=sm_cokurt;
else
    varcov=vcov;
    coskewness=coskew;
    cokurtosis=cokurt;
end
end
end

```

Funzione "co_moments_ext()

```

function [meanVec,vcovVec,coskewVec,cokurtVec,indcov,indskew,indkurt]
= co_moments_ext(mean_ser,varcov,coskew,cokurt)
%co_moments_ext: individua ed estrae le serie lisce degli elementi
%NON RIPETUTI, dagli array dei-comomenti.L'algoritmo divide la matrice
%di coskewness in sotto blocchi di NxN matrici, e la matrice di
%cokurtosis in blocchi di matrici NxN^2, a loro volta divisi in
%sottoblocchi di dimensione NxN.
%L'algoritmo estrae i dati per riga in ogni sottoblocco NxN.
%INPUT: mean_ser,array 1*N*T di serie dei rendimenti medi
%       varcov,array N*N*T di serie delle covarianze degli N asset
%       coskew, array N*N^2*T contenente le serie di coskewness
%       cokurt, array N*N^3*T contenente le serie di cokurtosis

%Ogni colonna nella matrice di Output è indicizzata dalla
%corrispondente riga nella corrispondente matrice ind.
%es:La seconda colonna di vcovV contiene le covarianze tra gli asset
%   incov(2,1) e incov(2,2).

%OUTPUT: meanVec, matrice T*N delle serie delle medie degli N asset
%        vcovVec, matrice T*N delle covarianze (NON RIPETUTE)
%        coskewVec, matrice delle coskewness (NON RIPETUTE)
%        cokurtVec, matrice delle cokurtosis (NON RIPETUTE)
%        incov, matrice di indici di riferimento delle covarianze
%        indskew, matrice di indici di riferimento delle coskewness
%        indkurt, matrice di indici di riferimento per cokurtosis

[~,N,T]=size(varcov);
meanVec=zeros(T,N);
vcovVec=zeros(T, (N*(N+1))/2);
coskewVec=zeros(T, (N*(N+1)*(N+2))/6);

```

```

cokurtVec=zeros(T,(N*(N+1)*(N+2)*(N+3))/24);
indcov=zeros((N*(N+1))/2,2);
indskew=zeros((N*(N+1)*(N+2))/6,3);
indkurt=zeros((N*(N+1)*(N+2)*(N+3))/24,4);
k=repmat([1:N],1,16);
%serve a tradurre l'indice di colonna nel relativo asset
z=0; % flag di controllo
ncs=0;
ind=1;

% Estrazione di medie e covarianze
for i=1:N
    meanVec(:,i)=reshape(mean_ser(1,i,:),T,1);
    for j=i:N
        vcovVec(:,ind)=reshape(varcov(i,j,:),T,1);
%considero elementi della matrice triangolare superiore
        indcov(ind,:)=[i,j];
        ind=ind+1;

    end
end
ind=1;
for block=1:N
    ncs=ncs+(block-1)*N;
    for s_block=block:N
        for i=s_block:N
            if(z==0)
                ncs=ncs+1;
            else
                ncs=ncs+s_block;
            end
            for j=ncs:(ncs+N-i)
                cokurtVec(:,ind)=reshape(cokurt(i,j,:),T,1);
                indkurt(ind,:)=[block,s_block,i,k(j)];
                if(block<=1)
                    coskewVec(:,ind)=reshape(coskew(i,j,:),T,1);
                    indskew(ind,:)=[s_block,i,k(j)];
                end
            end
            ind=ind+1;
        end
        z=0;
    end
    z=1;
end
end
end
end

```

Funzione "optimal_weights0"

```
function [data, mean_s, vcov_s, cosk_s, cok_s] =
optimal_weights(series, u_func, select_sim)
%optimal_weights: allocazione ottimale di portafoglio sulla base dei
%primi 4 momenti della distribuzione dei rendimenti, con vincoli di
%ammissibilità e divieto di vendite short.
%INPUT: series, matrice di serie dei rendimenti,"fints\matrix" TxN
%      u_func, scalare di selezione della funzione di utilità:
%      u_func=1 -> utilità media-varianza
%      u_func=2 -> exponential utility con primi due momenti
%      u_func=3 -> exponential utility con primi 4 momenti
%      u_func=4 -> power utility con primi 2 momenti
%      u_func=5 -> power utility con primi 4 momenti
%      select_sim, flag di controllo 0 (in sample) 1 (out of sample)
%OUTPUT: data, matrice o array contenete le allocazioni ottime
%      mean_s,vcov_s, cosk_s,cok_s, co-momenti full sample

if isa(series,'Fints')
    series=fts2mat(series);
end

if (u_func<1 || u_func>5)
    error('Errore: u_func intero compreso tra 1 e 5');
    return;
end

[T,N]=size(series);
upperb=ones(N,1);      %vincoli no short selling
lowerb=zeros(N,1);
Aeq=ones(1,N);        %vincolo di ammissibilità del portafoglio
Beq=1;
riskav=[0.5,1,2,5,10,15,20,25]; %livelli di avversione al rischio
utility={@mean_variance,@exp_ut2ord,@exp_ut4ord,...
    @pow_ut2ord,@pow_ut4ord};

% Algorithm active-set: quasi-Newton approximation to the Hessian of
the Lagrangian
options=optimset(@fmincon);
options.Algorithm='active-set';
ms=MultiStart('Display','final','UseParallel','always');
rs = RandomStartPointSet('NumStartPoints',300);

% Genetic Algorithm with parallel computing
options_g = gaoptimset(@ga);
options_g.Generations=300;
options_g.MutationFcn=@mutationadaptfeasible;
options_g.UseParallel='always';

if (select_sim==0)
    [mean_s,vcov_s,cosk_s,cok_s]=co_moments(series,select_sim,0);
    data=zeros((N+1),length(riskav));
    for i=1:length(riskav)
        rav=riskav(i);
        data(:,i)=optimizer();
    end
elseif (select_sim==1)
```

```

[sm_mean,sm_vcov,sm_cosk,sm_cok]=co_moments(series,select_sim,0.96);
data=zeros((N+1),T,2);
for i=1:T
    mean_s=sm_mean(:, :, i);
    vcov_s=sm_vcov(:, :, i);
    cosk_s=sm_cosk(:, :, i);
    cok_s=sm_cok(:, :, i);
    rav=riskav(3); %analisi per absolute r. aversion pari a 2
    data(:, i, 1)=optimizer();
    rav=riskav(7);
    data(:, i, 2)=optimizer();
end
else
    error('Selezione non valida: select deve valere o 0(full sample) o
1(dynamic)');
    return;
end

%OPTIMIZIATION ALGORITHM

function [data_out]=optimizer()
%NESTED FUNCTION: COMPUTE THE OPTIMAL ALLOCATION
[wopt_ga, fval_ga, ~, ~]=ga(utility(u_func), N, [], [], ...
    Aeq, Beq, lowerb, upperb, [], options_g);
problem=createOptimProblem('fmincon', 'objective', ...
    utility(u_func), 'x0', wopt_ga, 'Aeq', Aeq, 'beq', Beq, ...
    'lb', lowerb, 'ub', upperb, 'options', options);
rndpoints=list(rs, problem);
startpts = CustomStartPointSet(rndpoints);
[wopt_as, fval_as, ~, ~]=run(ms, problem, startpts);
if(fval_ga<fval_as)&&(Aeq*wopt_ga'==1)
    disp('soluzione GA ottimale');
    data_out(1:N)=wopt_ga';
    data_out(N+1)=fval_ga;
else
    data_out(1:N)=wopt_as;
    data_out(N+1)=fval_as;
end
end

%OBJECTIVE FUNCTIONS:

function [ mv ] =mean_variance(weights)
%NESTED OBJECTIVE FUNCTION: mean-variance utility function
[pmean, pvar, ~, ~]=portfolioMom(weights, series, mean_s, ...
    vcov_s, cosk_s, cok_s, 0);
mv=-pmean+(rav)/2*pvar;
disp(i);
end

function [exp_ut] = exp_ut2ord(weights)
%NESTED OBJECTIVE FUNCTION: exponential utility function, 2nd order
Taylor exp
[pmean, pvar, ~, ~]=portfolioMom(weights, series, mean_s, ...
    vcov_s, cosk_s, cok_s, 0);
exp_ut=(exp(-rav*pmean)*(1+((rav^2)/2)*pvar));
disp(i);

```

```

end

function [exp_ut] = exp_ut4ord(weights)
%NESTED OBJECTIVE FUNCTION: exponential utility function, 4th order
Taylor exp
    [pmean,pvar,psk,pkurt]=portfolioMom(weights,series,mean_s,...
        vcov_s,cosk_s,cok_s,0);
    exp_ut=(exp(-rav*pmean)*(1+((rav^2)/2)*pvar-...
        ((rav)^3/6)*psk+((rav)^4/24)*pkurt));
    disp(i);
end

function [pow_ut] = pow_ut2ord(weights)
%NESTED OBJECTIVE FUNCTION: power utility function, 4th order Taylor
exp
    [pmean,pvar,~,~]=portfolioMom(weights,series,mean_s,...
        vcov_s,cosk_s,cok_s,0);
    pow_ut=-((1+pmean)^(1-rav))/(1-rav)+(rav/2)*...
        ((1+pmean)^(-rav-1))*pvar;
    if(rav==1)
        pow_ut=-log(1+pmean)+(0.5*(1+pmean)^(-2))*pvar;
    end
    disp(i);
end

function [pow_ut] = pow_ut4ord(weights)
%NESTED OBJECTIVE FUNCTION: power utility function, 4th order Taylor
exp
    [pmean,pvar,psk,pkurt]=portfolioMom(weights,series,mean_s,...
        vcov_s,cosk_s,cok_s,0);
    pow_ut=-((1+pmean)^(1-rav))/(1-rav)+(rav/2)*...
        ((1+pmean)^(-rav-1))*pvar-((rav*(rav+1))/6)*((1+pmean)^...
        (-rav-2))*psk+((rav*(rav+1)*(rav+2))/24)*((1+pmean)^...
        (-rav-3))*pkurt;
    if(rav==1)
        pow_ut=-log(1+pmean)+(0.5*(1+pmean)^(-2))*...
            pvar-((2/6)*(1+pmean)^(-3))*psk+((6/24)*...
            (1+pmean)^(-4))*pkurt;
    end
    disp(i);
end

end
end

```

Funzione "full_sample_an0"

```
function [ datamom ] = full_sample_an( dataset,series)
%full_sample_an: calcola momenti dei portafogli e plot dei grafici
%dei pesi per ciascun titolo, al variare dell'avversione al rischio
%INPUT: dataset, output della funzione optimal_weights
%       series, matrice di serie di rendimenti, "fints\matrix"
%OUTPUT: datamom, matrice dei momenti dei portafogli

if isa(series,'Fints')
    series=fts2mat(series);
end
datamom=zeros(12,8);
temp=zeros(1,4);
[mean_ser, varcov, coskewness, cokurtosis]=co_moments(series,0,0);
for i=1:8
    [temp(1),temp(2),temp(3),temp(4)]=portfolioMom(...
        dataset(1:4,i),series,mean_ser, varcov,...
        coskewness, cokurtosis,1);
    datamom(1:4,i)=temp';
    [temp(1),temp(2),temp(3),temp(4)]=portfolioMom(...
        dataset(6:9,i),series,mean_ser, varcov,...
        coskewness, cokurtosis,1);
    datamom(5:8,i)=temp';
    [temp(1),temp(2),temp(3),temp(4)]=portfolioMom(...
        dataset(11:14,i),series,mean_ser, varcov,...
        coskewness, cokurtosis,1);
    datamom(9:12,i)=temp';
end
subplot(2,2,1);
weightsGraph([dataset(1,:)','dataset(6,:)','dataset(11,:)'],'Europe');
subplot(2,2,2);
weightsGraph([dataset(2,:)','dataset(7,:)','dataset(12,:)'],'Pacific');
subplot(2,2,3);
weightsGraph([dataset(3,:)','dataset(8,:)','dataset(13,:)'],'N.America');
subplot(2,2,4);
weightsGraph([dataset(4,:)','dataset(9,:)','dataset(14,:)'],'EM');
end
```


Ringraziamenti

In primis, vorrei ringraziare il professor Massimiliano Caporin per avermi guidato con pazienza nella stesura della tesi.

Un ringraziamento particolare va a mio padre e mia madre, ai quali dedico questo lavoro. Li ringrazio per avermi supportato e sopportato per tutta la durata del corso di studi.

Un grazie a Francesca per avermi sempre sostenuto, aiutandomi a raggiungere questo importante traguardo.

In fine, un grazie a tutti gli amici con i quali sono cresciuto condividendo momenti meravigliosi.

