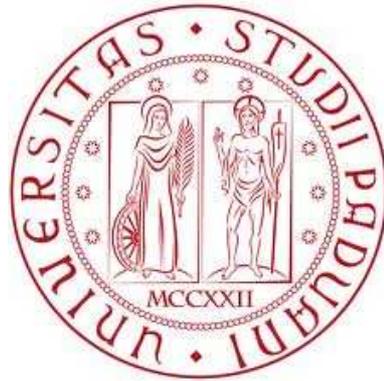


UNIVERSITA' DEGLI STUDI DI PADOVA

FACOLTA' DI INGEGNERIA



CORSO DI LAUREA TRIENNALE IN

INGEGNERIA ELETTRONICA

CRITERI DI STABILITA' PER SISTEMI CON RITARDO

Relatore: Chiar.ma Prof.ssa MARIA ELENA VALCHER

Candidato: LORENZO BORTOT

ANNO ACCADEMICO 2009-2010

Henri Poincaré diceva:

«l'uomo non studia la Natura perché è utile farlo; la studia perché ne trae diletto, e ne trae diletto perché la Natura è bella. Se non fosse bella, non varrebbe la pena di conoscerla, e se non valesse la pena di conoscere la Natura, la vita non sarebbe degna di essere vissuta».

Dedico questo Scritto a tutti i miei insegnanti, di ieri e di oggi:

*ognuno di essi, in misura più o meno importante, ha contribuito alla formazione della mia persona, mostrandomi come la conoscenza non sia una sterile accozzaglia di nozioni eterogenee, ma un fiore di rara bellezza, da contemplare e rispettare.
Solo così ci farà partecipi delle sue più segrete meraviglie.*

L'ultimo pensiero va ad una massima Senecana, che mi ha dato forza nei momenti più difficili della vita come studente:

<<non scholae sed vitae discimus>>

Sommario

1 Concetti elementari ed esempi.....	3
1.1 Introduzione.....	3
1.2 La regolazione della doccia	4
1.3 La gestione del magazzino	6
1.4 Spuntino al Portello.....	8
1.5 Osservazioni preliminari	9
2 Sistemi in retroazione unitaria con ritardo temporale finito	11
2.1 Generalità.....	11
2.1.1 Esempio	12
2.2 Funzioni di trasferimento dei sistemi con ritardo.....	13
2.2.1 Esempio	15
2.3 Diagrammi di Bode e Nyquist del ritardo temporale puro	17
2.4 Estensione del Criterio di Nyquist ai sistemi con ritardo	19
2.5 Guadagno costante e ritardo temporale finito	22
2.6 Polo stabile e ritardo temporale finito.....	27
2.7 Polo nell'origine e ritardo temporale finito	31
2.8 Polo nell'origine, polo a parte reale negativa e ritardo temporale finito	36
2.9 Rete Anticipatrice e ritardo temporale finito	41
2.10 Rete Attenuatrice e ritardo temporale finito.....	45
2.11 Calcolo del Guadagno Critico e del Ritardo Critico	50

2.11.1 Primo caso: Guadagno Critico	51
2.11.2 Secondo caso: Ritardo Critico	52
3 Criteri di Stabilità per Sistemi con ritardo temporale finito.....	53
3.1 Approssimanti di Padé.....	53
3.1.1 Esempio	56
3.2 Criterio di Michailov	59
3.3 Criterio di Hermite Biehler	63
3.3.1 Esempio	66
Appendice A.....	69
Dimostrazione del Criterio di Michailov esteso	69

Capitolo 1

Concetti elementari ed esempi

1.1 Introduzione

in questa prima parte si è deliberatamente scelto di adottare un lessico estremamente elementare, in quanto lo scopo è quello di introdurre in maniera agile ed intuitiva le problematiche che in un secondo momento saranno affrontate con strumenti più opportuni.

A tutti sarà sicuramente capitato almeno una volta nella vita di entrare sotto la doccia, e all'atto di giocare con la leva del rubinetto per trovare la temperatura ottimale dell'acqua, di passare da momenti di gelo a fasi di lieve cottura, accompagnate da una punta di frustrazione.

Questa comune situazione altro non è che una delle più semplici e basilari manifestazioni nella vita di tutti i giorni dei cosiddetti ritardi, o per meglio precisare dei ritardi temporali finiti; in particolare, nella sua accezione più ampia, un ritardo rappresenta un intervallo temporale che intercorre tra l'istante in cui il sistema riceve un generico INPUT o forzante, e quello in cui esso manifesta l'OUTPUT o risposta.

Alcune interazioni sono praticamente istantanee, come azionare un interruttore e veder accendersi una luce, mentre altre richiedono del tempo per manifestarsi, come ad esempio la risposta del mercato al lancio di un nuovo prodotto, il livello di sensibilizzazione delle persone a seguito di campagne informative - propagandistiche mirate su determinati argomenti, oppure la diffusione su larga scala di un'infezione di natura epidemica a seguito di un contagio iniziale.

I ritardi temporali possono essere presenti in tutti i sistemi, dipendono dalla natura intima di quest'ultimi e non possono venire banalizzati oppure trascurati, ma anzi imparare a scovare e comprendere la natura dei ritardi e tenerne efficacemente conto nella fase di sollecitazione e controllo dei sistemi diventa cruciale ai fini di ottenere stabilità di funzionamento e qualità nella risposta.

Importante fin da subito è notare che ci si sta riferendo a "sistemi" senza entrare nel merito del loro tipo, contesto applicativo, tipologia di realizzazione o complessità, e ciò viene fatto deliberatamente in quanto le dinamiche dei ritardi che ci si appresta ad analizzare sono critiche anche per una moltitudine di settori che esulano dal mondo dell'ingegneria: settori quali l'economia, la logistica, le relazioni interpersonali, il marketing, oltre a quelli percepiti come più "classici", quali l'industria e l'energia.

Si propongono alcuni esempi semplificati ed intuitivi per introdurre la diffusione, il ruolo e l'importanza dei ritardi temporali nei sistemi, nonché per dedurre una serie di conclusioni di validità del tutto generale.

1.2 La regolazione della doccia

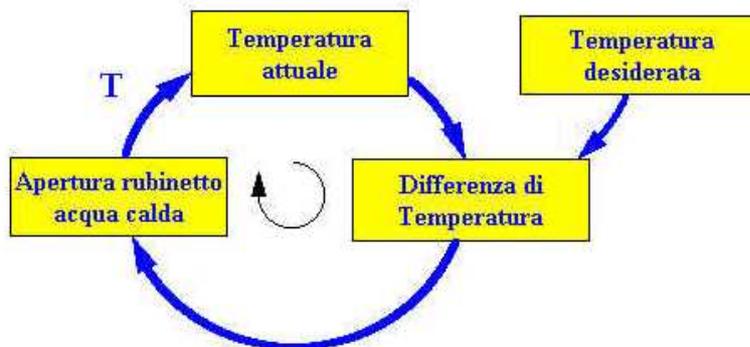
Nel momento in cui ci si accinge a far la doccia, l'esperienza quotidiana dimostra che quando si afferra il rubinetto, la regolazione che si va ad imprimere non consiste in un unico movimento (singolo input di posizionamento del rubinetto), ma avviene attraverso alcuni passaggi in cui si gioca con la leva di controllo al fine di ottenere la temperatura ottimale dell'acqua, l'output richiesto.

Tale fenomeno è tanto più marcato quanto minore è la conoscenza nei confronti dell'impianto termoidraulico della struttura o del modello di sistema:

infatti mentre per quanto concerne i rubinetti di casa l'esperienza domestica fornisce già a priori indicazioni sulla posizione ottimale del rubinetto (un esempio di feedback basato sui ricordi personali), nel momento in cui ci si interfaccia con un sistema sconosciuto, quale ad esempio quello di un albergo, le difficoltà sono molto più marcate.

La figura seguente rappresenta lo schema a blocchi del sistema doccia:

il riferimento è fornito dalla persona stessa che si interfaccia tramite un sensore (la propria pelle), il quale misura l'errore dell'uscita del sistema (differenza tra temperatura desiderata e temperatura attuale percepita), e un attuatore (la mano) che agisce su un organo di regolazione (il rubinetto) ai fini di ottenere l'output desiderato (errore nullo).



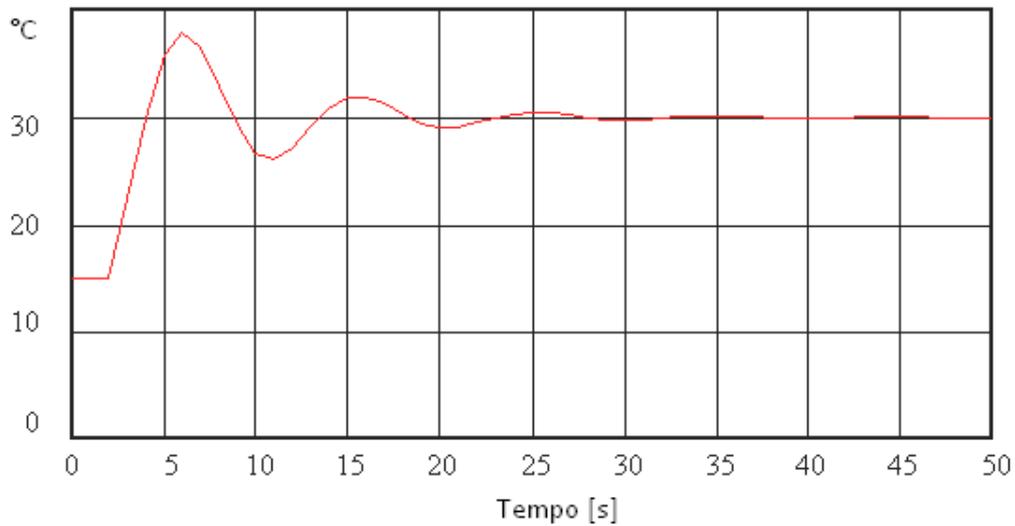
La lettera T rappresenta il ritardo temporale, ovvero il tempo che intercorre tra l'azione di regolazione e la risposta del sistema, dovuto all'acqua presente nei tubi che dal miscelatore arrivano alla cornetta della doccia.

Conoscendo la lunghezza delle tubazioni L [m], la sezione S [m²], la portata della doccia Q [m³/s], nell'ipotesi di incomprimibilità del fluido, di moto permanente e di sezione costante, tale ritardo T è pari al tempo di percorrenza dell'acqua nel tubo, quindi

$$v = \frac{Q}{A} [m/s] \quad T = \frac{L}{v} [s]$$

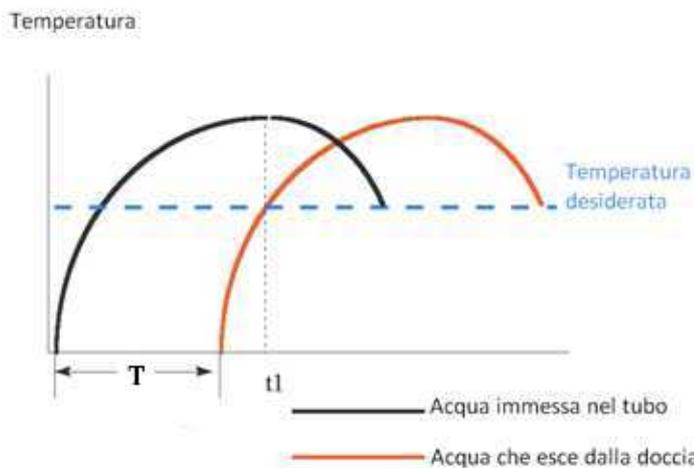
L'andamento oscillatorio smorzato della temperatura, riportato nel grafico seguente, è direttamente imputabile proprio alla presenza del parametro T:

Regolazione della temperatura della doccia



temperatura acqua in gradi _____

Per interpretare tale fenomeno oscillatorio si può fare riferimento alla figura seguente:



inizialmente esce l'acqua che si è raffreddata stazionando nelle condutture, così si regola il rubinetto sulla massima temperatura e si lascia fluire acqua molto calda; fino al tempo T non si notano variazioni nell'uscita del sistema.

Al tempo t1 si percepisce la temperatura ottimale, ma quella dell'acqua continua a salire, quindi si riduce drasticamente l'af-

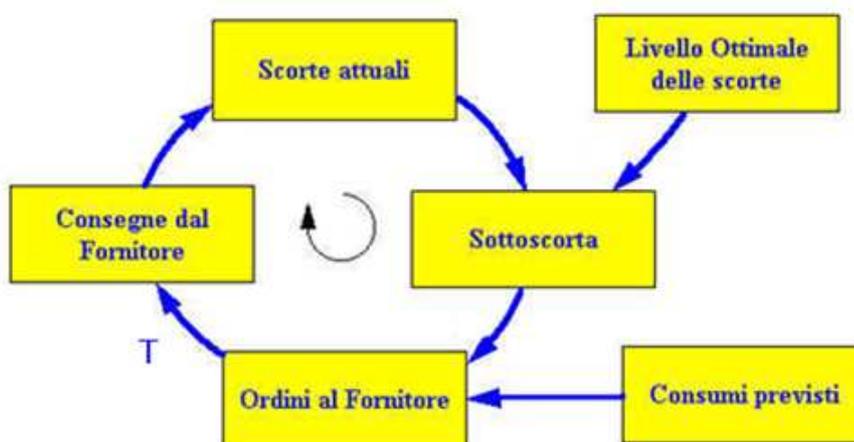
flusso di acqua calda, perdurando in ogni caso una fase di sovratemperatura di alcuni secondi: si transita di nuovo per il punto ottimale, dopodiché si percepisce una spiacevole sensazione di freddo, così che la regolazione del rubinetto si sposta nuovamente sull'acqua calda anche se all'uscita il fluido diventa sempre più freddo, generando un transitorio di sotto temperatura.

Il problema è che la posizione dell'organo regolatore viene decisa sulla base della temperatura percepita istantaneamente, mentre l'effetto di tale regolazione si manifesta con ritardo: inoltre risulta evidente che più grande è il ritardo, più la regolazione diventa difficoltosa, in quanto l'essere umano tende ad assumere un comportamento reattivo (dettato dall'impazienza e dalla stizza) caratterizzato da forzature della regolazione e da brusche variazioni della posizione del rubinetto.

Tale atteggiamento di controllo risulta essere estremamente controproducente in quanto amplifica l'entità delle oscillazioni della temperatura dell'acqua, rendendo quindi ancora più complicato il controllo del sistema.

1.3 La gestione del magazzino

Come è stato fatto per la doccia, anche in questo esempio si può procedere ad un modello molto rudimentale del sistema che si vuole sommariamente analizzare, tramite uno schema a blocchi.



La grandezza di riferimento, in questo caso, è la conoscenza da parte del magazziniere del livello ottimale delle scorte (parametro quanto mai empirico, basato su scelte di gestione personali).

L'addetto confronta questo valore con le merci presenti ad un determinato istante al fine di generare un nuovo parametro, la sottoscorta; questa a sua volta è confrontata con le vendite o i consumi previsti, e in base a ciò viene commissionato l'ordine al fornitore.

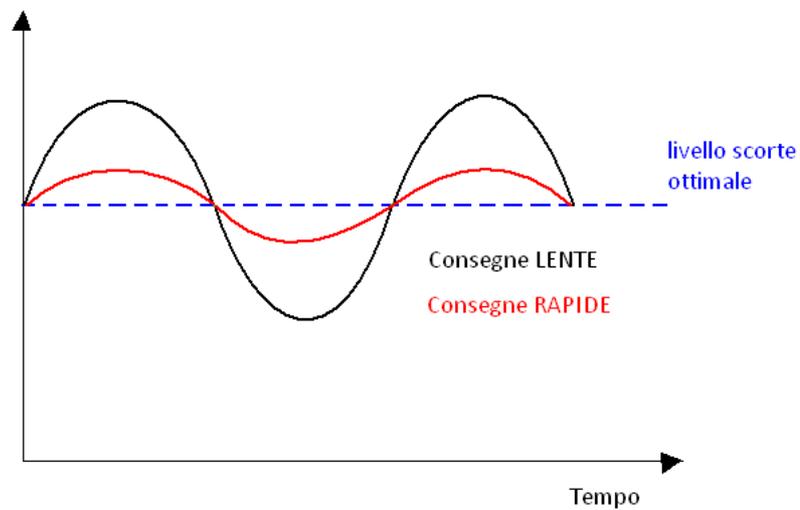
Anche in questo sistema può essere individuato un ritardo temporale dovuto ai tempi di compilazione ed elaborazione dell'ordine, della preparazione del carico, del trasporto e infine della consegna e stoccaggio della nuova merce.

La presenza di questo intervallo temporale influisce negativamente sulla gestione delle scorte, in quanto la quantità di quest'ultime continua ad oscillare nel magazzino intorno a quello che si è stabilito essere il livello ottimale.

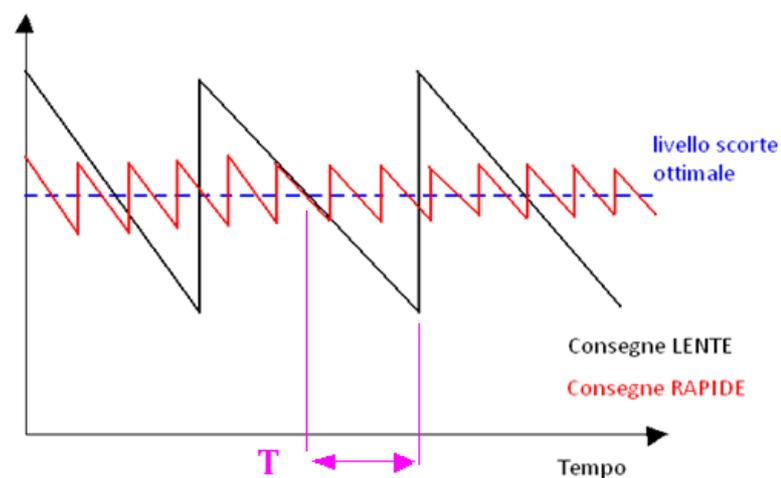
Tale situazione può essere interpretata in modo molto efficace attraverso un approccio grafico.

Modello Continuo: approssimazione limite di un magazzino molto esteso in cui la singola consegna e la singola vendita sono infinitesime rispetto al valore del livello di scorte ottimale, e quindi la variazione delle variabili avviene con continuità.

La velocità di esecuzione delle consegne degli ordini gioca un ruolo fondamentale nel determinare l'ampiezza delle oscillazioni.



Modello Discretizzato: l'andamento sia nel caso di consegne rapide che di consegne lente può essere approssimato da una curva a dente di sega.



Inizialmente le scorte sono abbondanti, quindi decrescono secondo l'ipotesi di un andamento lineare: quando la rampa discendente incontra il livello ottimale delle scorte si può assumere che venga impartito l'ordine di acquisto di nuova merce.

Le discontinuità presenti nella curva a dente di sega rappresentano la consegna del rifornimento.

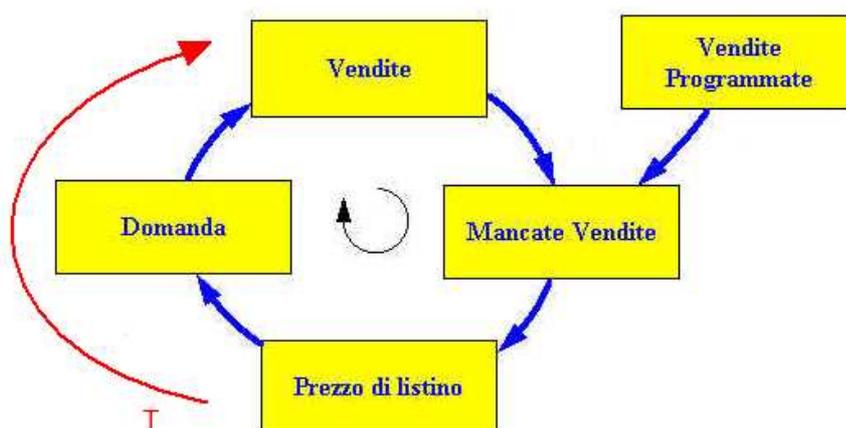
Le consegne rapide portano ad una gestione e ad uno sfruttamento del magazzino maggiormente ottimizzati.

Questa forma di ritardo nel contesto della logistica è causa di una perdita economica in quanto si dovrà necessariamente provvedere al sovradimensionamento del magazzino per ovviare alle oscillazioni di capienza, con conseguente incremento delle spese di costruzione, manutenzione e funzionamento (luce, riscaldamento, tasse sull'estensione planimetrica, stipendi di personale aggiuntivo..). Ne risulta in conclusione una struttura che risulta praticamente sempre sotto sfruttata.

Anche qui è verificata l'intuizione ricavata dall'esempio precedente: maggiore è il ritardo, maggiori sono le ampiezze delle oscillazioni, e anzi per un ritardo tale per cui i tempi di consegna sono superiori al tempo di esaurimento delle scorte (oppure una costante di tempo T per le consegne maggiore della più grande costante di tempo caratterizzante il processo), il sistema diventa totalmente instabile, portando inevitabilmente l'attività verso il fallimento o comunque la non concorrenzialità.

1.4 Spuntino al Portello

Si prenda in considerazione un punto di ristoro collocato al Portello, quindi soggetto suo malgrado alle leggi del mercato concorrenziale: lo schema a blocchi proposto ipotizza un decisore che opera dei ritocchi di listino al fine di conseguire un miglioramento delle prestazioni della propria attività.



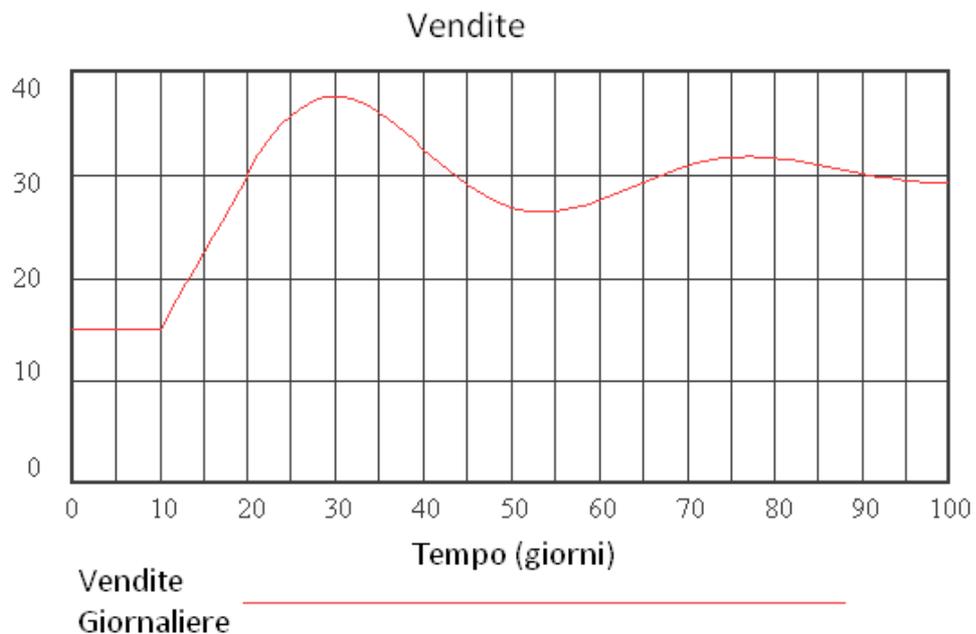
Il valore di riferimento, il numero di unità da vendere, viene determinato a priori dal titolare, che lo fissa in base a considerazioni di bilancio aziendale: per centrare

l'obiettivo egli può agire tramite un attuatore economico, ovvero la modifica del prezzo del bene che si accinge a vendere, e in base a questo input il sistema del libero mercato risponde con una variazione delle volume delle vendite.

Questa variazione non è istantanea, in quanto come minimo è presente un ritardo temporale necessario perché i consumatori possano acquisire la consapevolezza della variazione di prezzo o dell'offerta proposta.

Questo ritardo può essere anche notevole, in assenza di un'adeguata campagna di marketing, e può portare l'esercente a tenere un comportamento reattivo nei confronti della definizione dell'importo da onorare per il prodotto, come prima accadeva per l'ipotetica persona che si stava scottando sotto la doccia.

La variazione di prezzo sarà stabilita sulla base delle vendite attuali, mentre l'effetto di tale variazione manifesterà la proprie conseguenze solo in un futuro prossimo: ciò provoca l'insorgere di comportamenti oscillatori, come illustrato nel grafico seguente.



1.5 Osservazioni preliminari

Alla luce degli esempi appena analizzati si possono quindi trarre alcune osservazioni di carattere del tutto generale, valide indipendentemente dal campo applicativo e dal sistema preso in analisi.

-Un ritardo temporale si manifesta ogni qualvolta un sistema presenti fenomeni di propagazione e/o di trasporto, ed è dunque intimamente legato a peculiarità e caratteristiche della struttura stessa del processo in analisi:

la propagazione riguarda principalmente la diffusione a “velocità finita” di perturbazioni (quali informazioni, sollecitazioni meccaniche, campi elettromagnetici..);

il trasporto riguarda invece lo spostamento, sempre a “velocità finita”, di grandezze fisiche attraverso il sistema (quali merci su veicoli, fluidi negli impianti dell’industria chimica, beni all’interno di catene di produzione nelle fabbriche..).

Per quanto riguarda l’espressione tra virgolette, essa merita una precisazione, in quanto le velocità per la fisica del nostro universo son tutte finite, ma vanno messe in relazione col sistema nella quale si manifestano, in particolare ad esempio il fluire dell’acqua in una condotta rispetto ai tempi di osservazione di un essere umano rappresenta una quantità finita, mentre la propagazione di un’onda elettromagnetica in un sensore fotocellula viene considerata istantanea per le comuni applicazioni su piccola scala, quali il cancello di casa o la porta dell’ascensore.

-Un ritardo temporale porta sempre ad un peggioramento di quelle che possono essere considerate le qualità della risposta temporale del sistema in esame:

in particolare si è visto tramite diagrammi che compaiono delle fastidiose oscillazioni che rendono più difficoltoso controllare il processo, al fine di ottenere le prestazioni desiderate.

-Nei casi più estremi ritardi con costanti di tempo dominanti nel processo possono portare alla completa instabilità del sistema, con conseguente distruzione dello stesso:

banalmente si pensi ad un impianto antincendio che si attiva con consistente ritardo, le conseguenze non sono affatto piacevoli.

Risulta quindi evidente come sia di importanza cruciale nella fase di costruzione ed analisi dei sistemi, saper individuare e quantificare la presenza o meno di ritardi temporali intrinseci, in quanto prendere il problema alla leggera o peggio ancora trascurare questi aspetti porta sulla carta a modelli erronei, e nella realtà a danneggiamenti spesso e volentieri di notevole entità economica.

Quello che si vuole andare ad approfondire risulta quindi un settore chiave nella teoria dei controlli, settore che sta diventando sempre più importante in quanto il pesante sviluppo tecnologico delle applicazioni di ogni campo e l’implementazione di prestazioni sempre più spinte porta alla richiesta di modelli costantemente più accurati, modelli che ora contemplano ritardi un tempo ragionevolmente trascurati.

Capitolo 2

Sistemi in retroazione unitaria con ritardo temporale finito

2.1 Generalità

Nello studio dei sistemi dinamici si sono sempre assunte delle ipotesi restrittive, dettate tuttavia dalla consapevolezza che un vasto numero di applicazioni significative e d'interesse pratico ricade dentro le categorie che rispettano tali requisiti. Esse sono:

- un solo ingresso e una sola uscita (sistemi SISO, ovvero Single Input Single Output);
- linearità, perciò vale il principio di sovrapposizione degli effetti;
- tempo invarianza, ovvero ad una traslazione temporale delle cause corrisponde la medesima traslazione degli effetti;
- causalità, con ciò intendendo che ad ogni causa manifestatasi all'istante t corrisponde un effetto che non si manifesta mai prima di t ;
- tempo continuo.

Una volta accettate tali ipotesi, il modello matematico che ne risulta è un'equazione differenziale del tipo

$$a_n D^n y(t) + \sum_{i=0}^{n-1} a_i D^i y(t) = \sum_{i=0}^m b_i D^i u(t)$$

dove si è posto per compattezza di notazione

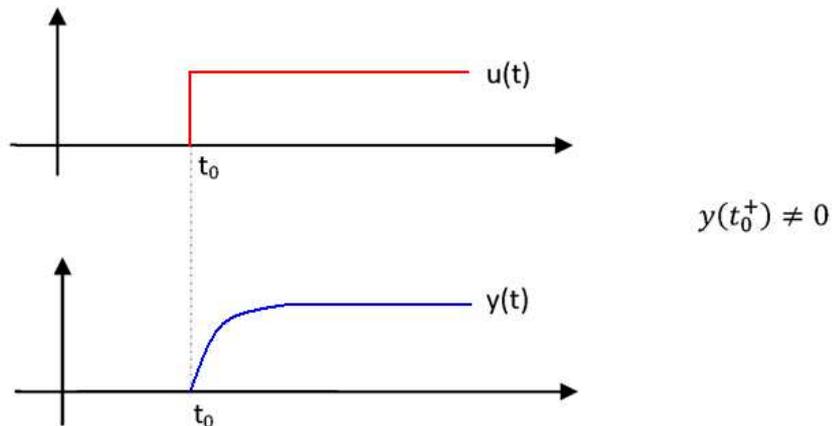
$$D^i y(t) = \frac{d^i y(t)}{dt^i}$$

Si richiede anche che i coefficienti costanti rispettino la condizione $n \geq m$ $a_n, b_m \neq 0$, in quanto ciò manifesta l'inerzialità del sistema in esame, e corrisponde ad un requisito di fisica realizzabilità.

Come conseguenza dell'assunzione di tutte le ipotesi sopra citate, la Funzione di Trasferimento associata al modello differenziale e scritta nella variabile complessa di Laplace ' s ', si presenta sempre come una funzione razionale propria o strettamente propria.

Tale modalità di rappresentazione è tuttavia valida solo per sistemi che rispondono istantaneamente alle variazioni della forzante in ingresso, sistemi che vengono detti a parametri concentrati.

Una generica risposta di un sistema causale senza ritardo è rappresentata nella figura seguente.

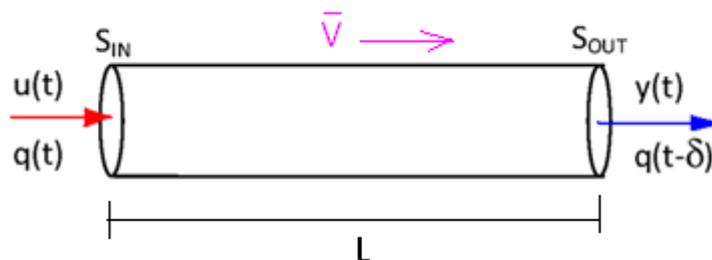


Tuttavia in molti casi pratici, in particolare quando sono presenti fenomeni di propagazione e/o trasporto all'interno del sistema fisico che si sta analizzando, tale ipotesi di "istantaneità" non è verificata in quanto si manifestano ritardi finiti; cade quindi il modello algebrico differenziale testè illustrato.

2.1.1 Esempio

Si consideri un tratto di tubazione di lunghezza L . All'istante generico t viene aperta una saracinesca appena a monte del tratto di tubo e in corrispondenza della sezione di ingresso S_{in} viene immessa una certa portata $q(t)$ di fluido incompressibile (ad esempio la comunissima acqua) che si propaga con velocità costante V nell'impianto.

Definendo:



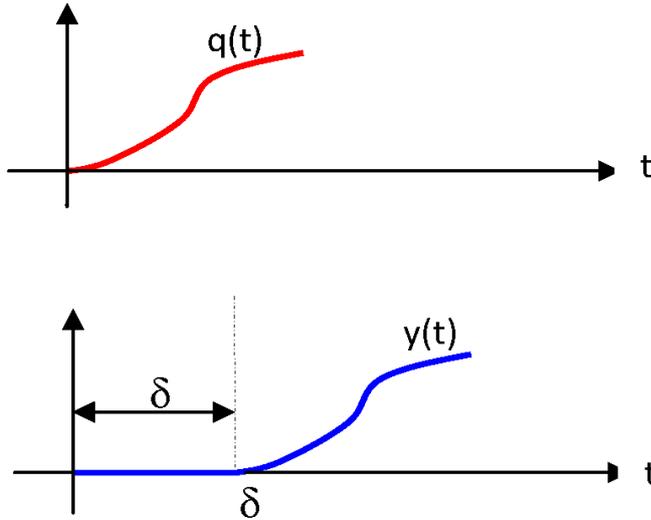
- $u(t) = q(t)$ [m^3/s]
la portata in ingresso nella sezione S_{in} ;

- $y(t) = q(t - \delta)$ [m³/s]

la portata misurata all'istante t nella sezione di uscita S_{out} ;

- $\delta = \frac{L}{v}$ [s] Il ritardo temporale di trasporto;

si ricava facilmente come l'uscita dipenda dalla portata in ingresso attraverso un legame di tipo statico del tipo $y(t) = q(t - \delta)$ che coinvolge un ritardo temporale definito con la



lettera δ , il quale dipende sia dalla lunghezza del tubo che dalla velocità di transito del fluido.

Si può dare una veste grafica nel dominio del tempo alla dinamica del sistema:

l'uscita è identica all'ingresso (come deve essere per l'equazione di continuità applicata al tubo di flusso), ma risulta traslata di una quantità pari a δ .

Il ritardo è dunque il tem-

po che si deve attendere affinché una variazione dell'ingresso si manifesti in una corrispondente variazione dell'uscita.

2.2 Funzioni di trasferimento dei sistemi con ritardo

È necessario a questo punto riuscire a tradurre in un modello matematico ciò che è stato osservato empiricamente, in particolare risulta fondamentale caratterizzare in termini di FDT (sia in forma analitica che di schema a blocchi) i sistemi dinamici con ritardi finiti, al fine di poterne osservare il comportamento, le prestazioni e le proprietà di stabilità nel funzionamento in catena chiusa con retroazione.

Sarà quindi opportuno procedere col dare una veste formale a quell'entità di cui finora si è accettata la presenza, senza dare troppa importanza al fatto di poterla determinare in termini "più scientifici".

Per fare ciò si ricorre a una delle molteplici proprietà notevoli della Trasformata di Laplace (nel seguito abbreviata in TDL per compattezza di notazione).

Teorema di traslazione del tempo

Sia $Y(s)$ la TDL del segnale $y(t)$, ovvero

$$\mathcal{L}[y(t)] = Y(s)$$

La TDL del segnale ritardato $y(t - \delta)$, in cui $\delta = cost$, si ottiene applicando la definizione stessa dell'integrale Laplaciano:

$$\mathcal{L}[y(t - \delta)] = \int_{0^-}^{+\infty} y(t - \delta) e^{-st} dt$$

operando il cambio di variabile $t - \delta = \tau$, $t = \delta + \tau$, aggiornando il differenziale $dt = d\tau$ e gli estremi di integrazione si ottiene la forma

$$\mathcal{L}[y(t - \delta)] = \int_{-\delta}^{+\infty} y(\tau) e^{-s(\tau+\delta)} d\tau$$

essendo il segnale causale l'integrazione può fermarsi a 0^- , in quanto prima è una funzione identicamente nulla. Portando fuori la quantità costante $e^{-\delta s}$ si ottiene

$$\mathcal{L}[y(t - \delta)] = e^{-\delta s} \int_{0^-}^{+\infty} y(\tau) e^{-s\tau} d\tau = Y(s) e^{-\delta s}.$$

Applicando il teorema appena analizzato all'esempio precedente diventa agevole determinare la FDT del sistema tubo-portata

$$U(s) = Q(s), \quad Y(s) = \mathcal{L}[q(t - \delta)] = Q(s)e^{-\delta s}, \quad W(s) = \frac{Y(s)}{U(s)}$$

e quindi $W(s) = e^{-\delta s}$.

Questa è una funzione trascendente e contiene il termine esponenziale complesso tipico della tipologia dei sistemi caratterizzati da fenomeni interni di propagazione e/o trasporto.

Più in generale la FDT in catena aperta di un processo SISO con ritardo temporale finito e costante viene rappresentata nella forma

$$W(s) = \frac{A(s)}{B(s)} e^{-\delta s} \quad \text{dove } B(s) \text{ e } A(s) \text{ sono forme polinomiali.}$$

Tale legame rappresenta una vasta casistica di situazioni applicative, ma ovviamente non è unico, in quanto modelli differenziali I/O di carattere più generico portano a FDT dalla forma molto più complessa:

si pensi ad un legame dinamico del tipo $\frac{dy(t-\delta)}{dt} - y(t) = u(t - \delta)$

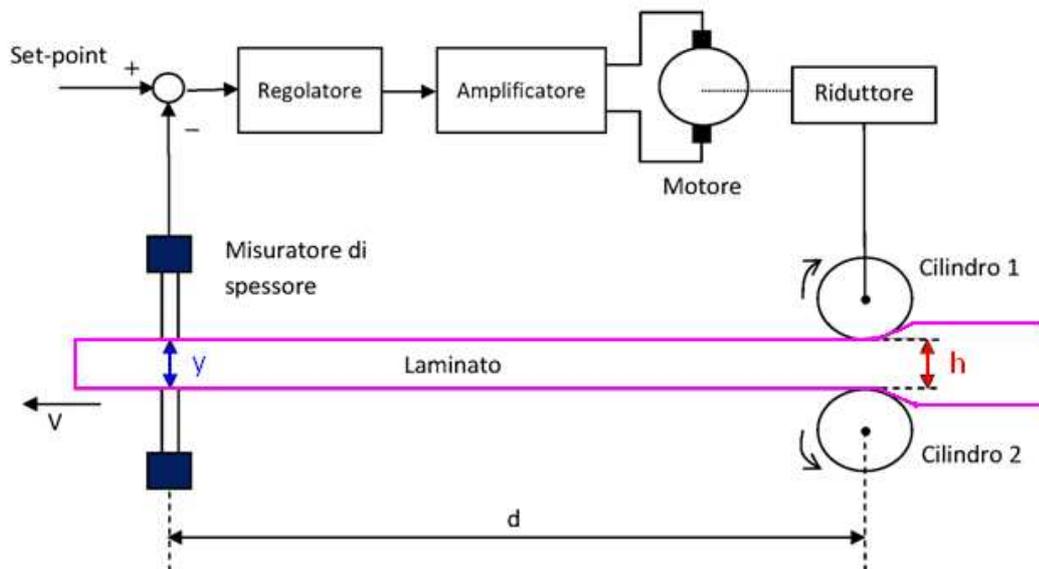
al quale corrisponde una trasformata $Y(s)(se^{-\delta s} - 1) = U(s)e^{-\delta s}$

ed una funzione di trasferimento pari a $W(s) = \frac{e^{-\delta s}}{se^{-\delta s} - 1}$

che non può essere evidentemente ricondotta al caso precedente. Il semplice esempio a seguire vuole illustrare come si procede in pratica per tenere conto di tali ritardi.

2.2.1 Esempio

La laminazione a caldo è un processo di lavorazione meccanica ad alta temperatura eseguito per ridurre lo spessore della lamiera e fa parte delle lavorazioni plastiche. Si consideri un impianto di laminazione il cui schema a blocchi è rappresentato in figura.



Si tratta di un processo industriale il cui controllo è garantito da un anello chiuso in retroazione: il laminato scorre da destra verso sinistra dove passa attraverso un sensore di spessore; tale trasduttore è usualmente posizionato, per motivi pratici e di ingombro, ad una certa distanza dai due rulli.

La misura viene acquisita con continuità, tradotta in un segnale elettrico (ad esempio una corrente proporzionale allo spessore stesso) e confrontata con la grandezza di riferimento o di 'set point', determinata a priori in base alle esigenze della lavorazione.

L'uscita della comparazione viene elaborata da un blocco regolatore, il quale per mezzo di un amplificatore è incaricato di interfacciarsi direttamente agli avvolgimenti di un motore a passo, al fine di pilotarlo con precisione.

Questi a sua volta trasmette il proprio moto a delle grosse viti senza fine a passo d'elica molto ridotto, che fungono da organo strutturale di sostegno ai cilindri di laminazione:

facendole ruotare nei due sensi si va a modificare quella che è letteralmente la forzante del sistema, ovvero lo spessore concesso dal gioco tra i due rulli per il transito del laminato.

Risulta evidente la presenza di un ritardo temporale intrinseco al processo, dovuto alla collocazione spaziale delle varie parti del sistema (in particolare la coppia rulli-sensore), legate temporalmente dalla velocità di transito del laminato attraverso la macchina di lavorazione.

Il legame tra l'uscita del sistema, $y(t)$, e l'ingresso $h(t)$ è descritto dalla seguente relazione:

$$y(t) = h(t - \delta), \quad \delta = \frac{d}{v} \text{ [s]}.$$

Risulta di immediata determinazione la FDT $W(s)$ di tale processo, infatti utilizzando il Teorema della traslazione temporale

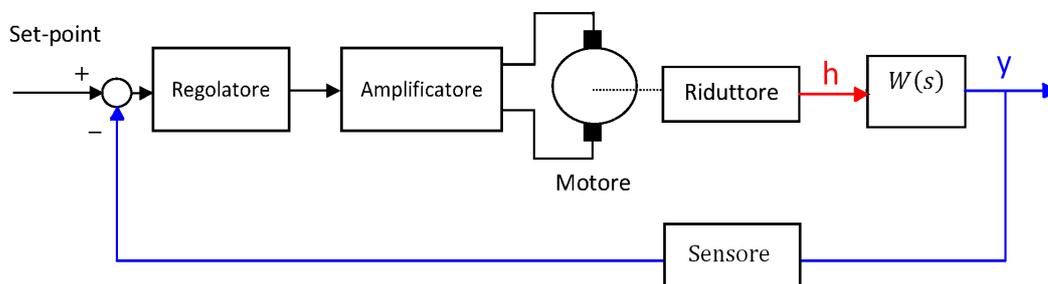
$$W(s) = \frac{\mathcal{L}[h(t - \delta)]}{\mathcal{L}[y(t)]} = \frac{H(s)}{Y(s)} = e^{-\frac{d}{v}s}$$

Si è visto che il ritardo temporale nel dominio di Laplace diventa un esponenziale il cui argomento contiene l'entità del ritardo stesso, esponenziale che moltiplica la FDT di risposta istantanea del sistema in esame.

Si consideri la figura seguente:

essa rappresenta lo schema a blocchi associato alla FDT in catena chiusa del processo della laminazione, in cui i vari componenti sono rappresentati per semplicità in forma implicita, senza sviluppare nella variabile complessa s i legami ingresso uscita che competono loro.

Per tenere conto della presenza del ritardo è sufficiente rappresentarlo con un blocco dedicato, quello di FDT $W(s)$ la cui espressione è stata precedentemente ricavata, e collegarlo in serie all'interno della catena di processo nella posizione corretta, in particolare tra i cilindri di laminazione (il blocco riduttore) e il sensore di misura.



2.3 Diagrammi di Bode e Nyquist del ritardo temporale puro

L'esempio del laminatoio ha evidenziato il fatto che la presenza di ritardi finiti all'interno dei processi sia tutt'altro che trascurabile, ma anzi si manifesta palesemente sia all'interno delle FDT, rendendole trascendenti per la comparsa di termini esponenziali del tipo $e^{-\delta s}$, che all'interno degli annessi schemi a blocchi, con l'introduzione di unità dedicate alla rappresentazione del ritardo stesso.

È ora il caso di entrare più in intimità col fenomeno, tramite gli opportuni strumenti che la teoria dei controlli fornisce.

Lo scopo infatti è quello di comprendere se e come tali ritardi possano influire sulla stabilità dei sistemi a ciclo chiuso, e per far ciò ci si servirà dei diagrammi di Bode e Nyquist, dei criteri di stabilità di Nyquist e dell'analisi grafica delle risposte dei sistemi nel dominio del tempo.

Si comincia quindi col considerare una FDT puramente esponenziale del tipo $W(s) = e^{-\delta s}$ e si procede con l'analisi della risposta armonica, o risposta in frequenza, definita in termini del tutto equivalenti come la Trasformata di Laplace valutata sull'asse immaginario del piano di Gauss o come la Trasformata di Fourier limitata al semipiano positivo delle ascisse:

$$W(j\omega) = \int_{0^-}^{+\infty} w(t) e^{-j\omega t} dt$$

dove $\omega \in \mathbb{R}$ rappresenta la pulsazione angolare.
La risposta armonica vale (in forma complessa)

$$W(j\omega) = e^{-j\delta\omega}$$

È molto più semplice studiarne separatamente l'andamento in modulo e fase, e per individuarle basta ricordare la rappresentazione polare di un numero complesso e procedere con una semplice identità

$$a + jb = Me^{j\varphi}, \text{ dove } M = \sqrt{a^2 + b^2} \text{ e } \varphi = \tan^{-1}\left(\frac{b}{a}\right) \quad a > 0$$

$$\varphi = \tan^{-1}\left(\frac{b}{a}\right) + \pi \quad a < 0$$

$$\varphi = \operatorname{sgn}(b) \frac{\pi}{2} \quad a = 0$$

Quindi assumendo per $e^{-j\delta\omega}$ la rappresentazione in modulo e fase si deducono immediatamente le espressioni di modulo e fase della $W(j\omega)$:

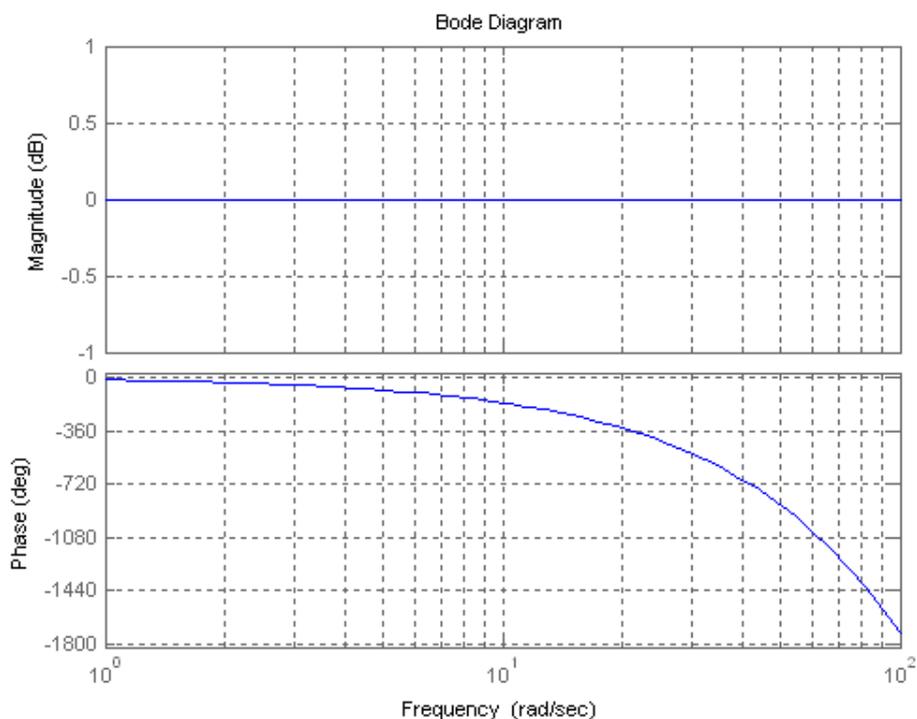
$$M(\omega) = 1 \quad \varphi(\omega) = -\omega\delta$$

Tale FDT ha dunque una funzione di risposta armonica il cui valore del modulo è unitario su tutte le frequenze, mentre è presente uno sfasamento negativo (o ritardo di fase) che cresce in maniera lineare all'aumentare della frequenza: il coefficiente angolare o pendenza negativa di tale retta corrisponde proprio all'entità stessa del ritardo δ .

In particolare si asserisce che se l'ingresso al blocco di ritardo temporale è di tipo sinusoidale, come ad esempio il segnale $u(t) = A \sin(\omega t)$, la risposta che il sistema fornisce sarà ancora una sinusoide

$y(t) = A \sin[\omega(t - \delta)]$ di modulo invariato, ma sfasata in ritardo di un angolo pari a $\omega\delta$ [s^{-1}].

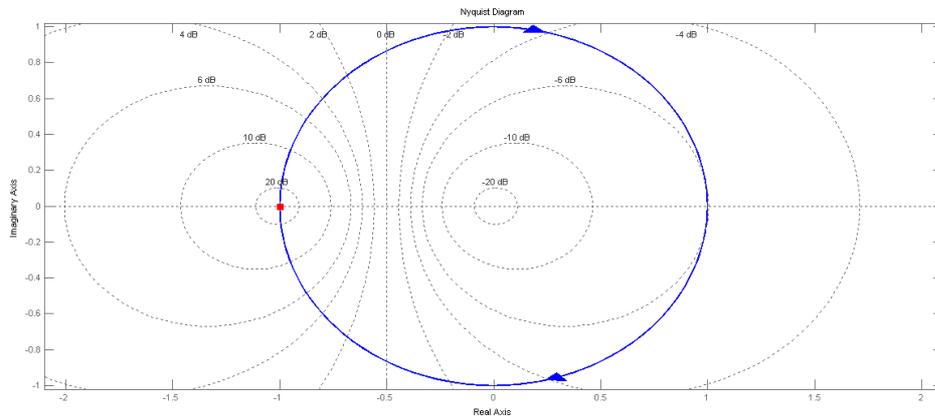
I diagrammi di Bode della funzione $W(j\omega) = e^{-j\delta\omega}$ sono riportati a seguire.



Per quanto concerne il diagramma delle fasi, l'andamento esponenziale decrescente è dovuto al fatto che la funzione lineare viene distorta per effetto della scala semilogaritmica adottata nel grafico.

Tale curvatura nell'andamento delle fasi è tanto più marcata quanto più grande è il ritardo temporale, o per meglio dire a parità di frequenza lo sfasamento introdotto è tanto più marcato quanto maggiore è δ .

In questo esempio si è considerato $\delta = 0.3$ secondi.



Il diagramma di Nyquist mostra la funzione che percorre all'infinito la circonferenza di modulo unitario

La rotazione è impressa dalla fase che divergendo verso $-\infty$ per $\omega \rightarrow +\infty$ percorre infiniti multipli dell'angolo giro.

2.4 Estensione del Criterio di Nyquist ai sistemi con ritardo

Come si è già potuto intuire dai semplici esempi illustrati nell'introduzione, ritardi temporali hanno notoriamente effetti deleteri sulla stabilità dei sistemi a ciclo chiuso; si vuole ora procedere con l'analisi delle proprietà di stabilità dei processi retroazionati in presenza di ritardi temporali finiti.

Per fare ciò risulta assolutamente necessario estendere la validità del criterio di stabilità di Nyquist alle funzioni trascendenti complesse, al fine di poterlo impiegare con profitto nelle successive analisi.

In particolare nel seguito si considereranno FDT che presentano una struttura in catena aperta caratterizzata da combinazioni di funzioni polinomiali razionali proprie e termini esponenziali:

$$G(s) = K \frac{1 \prod_i (1 + sT'_i)^{u'_i}}{s^v \prod_i (1 + sT_i)^{u_i}} e^{-\delta s}$$

In matematica una funzione analitica è tale se può essere espressa in ogni suo punto da una serie di potenze convergente, o, secondo un approccio più empirico, una funzione è analitica se è infinitamente derivabile su tutto il proprio dominio di definizione.

Ricordando come nel campo dell'analisi matematica complessa il termine funzione analitica sia un sinonimo di funzione olomorfa, si richiamano alcune proprietà notevoli:

- la somma, il prodotto e la composizione di funzioni olomorfe sono olomorfe;
- tutte le funzioni polinomiali nella variabile complessa s con coefficienti complessi sono olomorfe sull'intero dominio complesso \mathbb{C} ;
- la funzione esponenziale complessa è una funzione olomorfa.

Da ciò si deduce immediatamente che tutte le funzioni nella forma sopra presentata sono olomorfe.

Per capire ora se il criterio di Nyquist sia spendibile nell'ambito delle FDT con ritardo temporale occorre scendere fino alle fondamenta di questo risultato notevole, analizzandone ipotesi ed eventuali condizioni restrittive.

Il compito apparentemente difficile è notevolmente semplificato da un risultato dell'analisi complessa estremamente potente, di cui si tralascia la dimostrazione (assai laboriosa e poco interessante agli scopi dell'opera) e che è noto sotto il nome di

Teorema dell'indicatore logaritmico (o principio dell'argomento)

(Carlo Minnaja – Complementi di matematica per l'ingegneria) (Mauro Bisiacco e Maria Elena Valcher – Controlli Automatici)

Sia $f(s)$ una funzione (complessa di variabile complessa) olomorfa con soltanto un numero finito di poli in una regione $\Omega \subseteq \mathbb{C}$ e sia γ un contorno interno ad Ω , orientato in verso antiorario, sul quale f non abbia né zeri né singolarità.

Allora se n e p sono il numero di zeri e di poli di $f(s)$ interni a γ , ciascuno contato con la sua molteplicità, al variare di s lungo γ per un giro completo in senso antiorario, vale la relazione

$$\frac{1}{2\pi j} \oint_{\gamma} \frac{f'(s)}{f(s)} ds = n - p .$$

Di conseguenza il numero di giri (intesi positivi se percorsi in senso antiorario) compiuti da $f(s)$ attorno all'origine, quando s descrive γ (in verso orario) coincide con la quantità $p - n$.

Si definiscono ora $G(s)$ come una generica FDT olomorfa in catena aperta e

$W(s) = \frac{G(s)}{1+G(s)}$ come la FDT del processo ottenuto da $G(s)$ per retroazione unitaria negativa, i quali rispettano le seguenti ipotesi:

- $G(s)$ è strettamente propria e non presenta poli sull'asse immaginario, ovvero

$$|G(j\omega)| < +\infty \quad \forall \omega \in \mathbb{R} , \quad \lim_{\omega \rightarrow \pm\infty} |G(j\omega)| < +\infty ;$$

- $W(s)$ è strettamente propria, ovvero

$$|G(j\omega)| \neq -1 \quad \forall \omega \in \mathbb{R} , \quad \lim_{\omega \rightarrow \pm\infty} G(j\omega) = G(\infty) \neq -1 .$$

Si procede quindi col presentare il criterio di Nyquist, il quale consiste in una brillante applicazione del teorema dell'indicatore logaritmico alla funzione $f(s) = 1 + G(s)$ scegliendo opportunamente il percorso γ , che prende il nome di percorso di Nyquist.

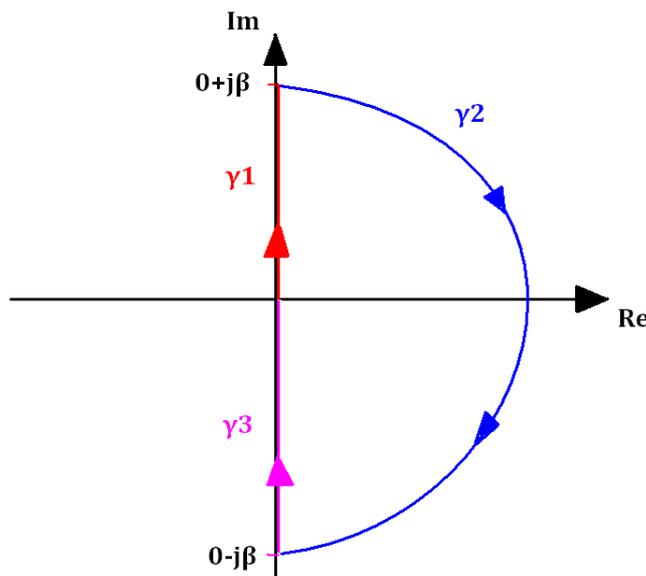
Si noti che i poli di $f(s)$ coincidono con i poli di $G(s)$ e gli zeri di $f(s)$ coincidono con i poli di $W(s)$, in quanto sostituendo

$$G(s) = \frac{n(s)}{d(s)} e^{-\delta s}$$

$$W(s) = \frac{d(s) + n(s)e^{-\delta s}}{d(s)}$$

$$f(s) = 1 + G(s) = \frac{d(s) + n(s)e^{-\delta s}}{d(s)}$$

Si seleziona ora la curva γ (orientata in senso orario), richiesta dal teorema dell'indicatore



logaritmico, consistente nell'unione di tre componenti:

- γ_1 coincidente col tratto di asse immaginario compreso tra $0 + j0$ e $0 + j\beta$ (con β fissato sufficientemente grande);

- γ_2 coincidente con la semicirconferenza di centro l'origine e di raggio β collocata interamente nel semipiano reale positivo aperto;

- γ_3 coincidente col tratto di asse immaginario compreso tra $0 - j\beta$ e $0 + j0$.

Qualora la funzione $f(s)$ presenti poli puramente immaginari si ricorre al noto percorso di Nyquist modificato.

Il trucco sta nello scegliere β sufficientemente grande in modo che l'area racchiusa dalla curva γ includa (senza passarvi attraverso) tutti gli zeri ed i poli a parte reale positiva della $f(s)$:

il numero N di giri (positivi se percorsi in senso orario, negativi altrimenti) compiuti da $f(s)$ attorno all'origine quando s descrive γ coincide con il numero di giri percorsi da $G(s)$ intorno al punto $-1 + j0$ con le medesime regole di conteggio.

In base al Teorema dell'indicatore logaritmico e alle osservazioni sopra esposte vale la seguente relazione:

$$N = (n^\circ \text{ poli di } f(s) \text{ interni a } \gamma) - (n^\circ \text{ zeri di } f(s) \text{ interni a } \gamma)$$

$$= (n^\circ \text{ poli di } G(s) \text{ in } Re(s) > 0) - (n^\circ \text{ poli di } W(s) \text{ in } Re(s) > 0).$$

L'estensione del Criterio di Nyquist risulterà conclusa non appena chiarito il legame esistente tra il diagramma di Nyquist completo e il diagramma che ne risulta percorrendo il percorso di Nyquist.

Per quel che riguarda la curva γ_1 , ad essa corrisponde proprio il diagramma di Nyquist di $G(j\omega)$, $\omega \geq 0$, privato del suo tratto terminale (corrispondente all'intervallo $\omega \in (\beta, +\infty)$), tratto che può essere reso arbitrariamente piccolo a condizione di scegliere β sufficientemente grande.

Per quel che riguarda la curva γ_3 , essa corrisponde alla porzione del diagramma di Nyquist di $G(j\omega)$, $\omega < 0$, privato del suo "tratto iniziale" (corrispondente all'intervallo $\omega \in (-\infty, -\beta)$), riguardo alle cui dimensioni valgono le medesime considerazioni fatte per γ_1 .

Per quanto riguarda la curva γ_2 , parametrizzata nella forma $s = \beta e^{-j\theta}$, $\theta \in [-\pi/2; \pi/2]$, la funzione $G(\beta e^{-j\theta})$ al variare di θ da $-\pi/2$ a $\pi/2$ descrive un semicerchio di raggio piccolissimo (tanto più piccolo quanto più grande è β) centrato nel punto $G(\infty)$.

Infatti essendo $G(s)$ strettamente propria, tale FDT rispetta la condizione $(G(s) - G(\infty)) < \infty$, ed è esprimibile come $L(s)/s$, dove $L(s) := s(G(s) - G(\infty))$ è una funzione razionale propria, per cui $L(\infty) \neq \infty$. Si ha allora

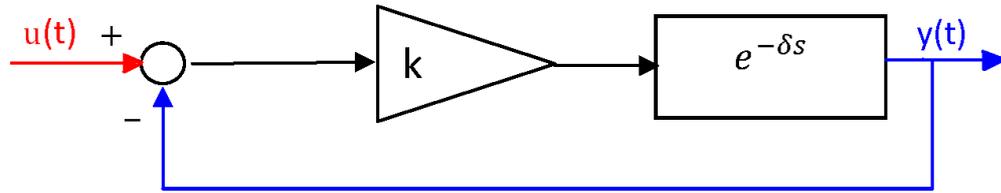
$$G(\beta e^{-j\theta}) = G(\infty) + \frac{L(\beta e^{-j\theta})}{\beta e^{-j\theta}} \approx G(\infty) + \frac{L(\infty)}{\beta} e^{j\theta}$$

che rappresenta proprio un semicerchio, percorso in senso antiorario, di centro $G(\infty)$ e di raggio infinitesimo $L(\infty)/\beta$, tendente a 0 per $\beta \rightarrow \infty$. Risulta quindi evidente che essendo $G(\infty)$ finito e diverso da -1 per ipotesi, il contributo della curva γ_2 nel percorso di Nyquist è inessenziale ai fini della valutazione del numero di giri che il diagramma di Nyquist compie attorno al punto $(-1 + j0)$. Per questo motivo si può ignorare il contributo di γ_2 e far variare ω su tutto l'asse \mathbb{R} invece che tra $-\beta$ e $+\beta$.

Si è dunque visto che la trascendenza della FDT in catena aperta $G(s)$ non rappresenta motivo di fallimento della corretta applicazione del criterio di stabilità di Nyquist per sistemi retroazionati, in quanto ciò che è importante è l'olomorfia (sempre verificata) per questa classe di funzioni.

2.5 Guadagno costante e ritardo temporale finito

Si immagini di considerare il caso più semplice di sistema dotato di controllo in retroazione unitaria negativa, sistema la cui FDT in catena aperta preveda esclusivamente un guadagno di Bode costante e un ritardo temporale finito δ .



Dalla figura si ricava immediatamente il legame tra ingresso e uscita a ciclo chiuso

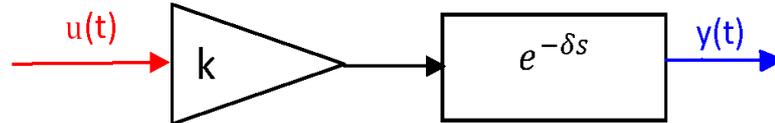
$$y(t) + Ky(t - \delta) = Ku(t - \delta)$$

Per investigare le proprietà di stabilità si passa a formalizzare la FDT

$$W(s) = K \frac{\mathcal{L}[u(t - \delta)]}{\mathcal{L}[y(t) + Ky(t - \delta)]} = \frac{U(s)}{Y(s)} = \frac{Ke^{-\delta s}}{1 + Ke^{-\delta s}}$$

Si vede subito che il polinomio caratteristico $P_{car}(s) = 1 + Ke^{-\delta s}$ è una funzione trascendente che ne complica notevolmente la trattazione per via analitica; per questo risulta estremamente comodo ricorrere al criterio di stabilità di Nyquist, il quale come si è dimostrato copre anche i sistemi dinamici affetti da ritardi finiti.

La risposta armonica a ciclo aperto è $G(j\omega) = Ke^{-j\delta\omega}$.



Le figure a pagina seguente riportano i diagrammi di Nyquist completi per la $G(j\omega)$, parametrizzata secondo due diversi guadagni di Bode:

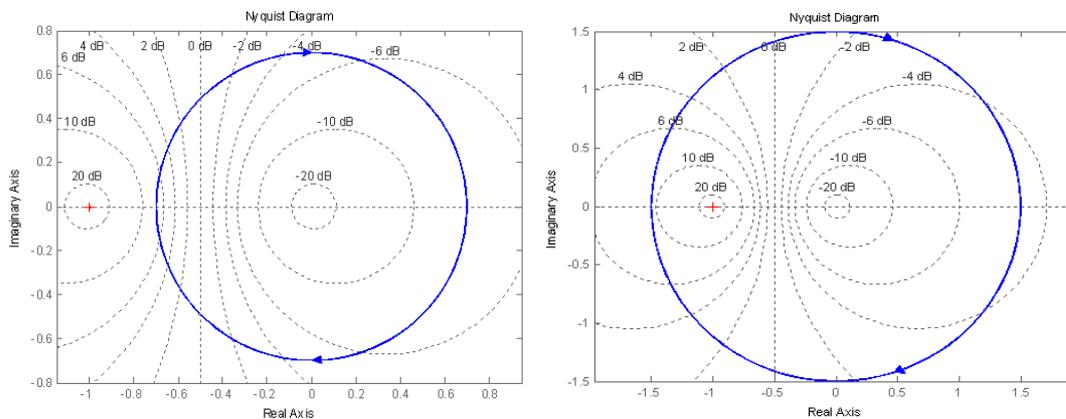
entrambi partono per $\omega = 0^+$ nel punto di coordinate $(K; 0)$, quindi percorrono per $\omega \rightarrow +\infty$ infinite volte in senso orario la circonferenza centrata nell'origine di raggio K .

In virtù del fatto che la $G(s)$ è a coefficienti reali, la risposta in frequenza $G(j\omega)$ gode della simmetria Hermitiana, con ciò intendendo che

$$\overline{G(j\omega)} = G(j\omega) = G(-j\omega).$$

Basterà sempre considerare metà diagramma e poi simmetrizzarlo rispetto all'asse delle ascisse.

A sinistra è riportata la funzione per i parametri $K = 0.7 \delta = 0.4$, a destra per $K = 1.5 \delta = 0.4$.



Si vede che il ritardo, indipendentemente dal valore assunto dal guadagno di Bode, manifesta sempre il medesimo effetto (la rotazione impressa), mentre il sopra citato K modifica il raggio della circonferenza descritta nel piano complesso.

Per coprire tutta la casistica si dovrebbe tracciare un insieme di curve parametrizzate secondo la variabile reale K :

in realtà una banale osservazione permette di semplificare drasticamente l'analisi, in quanto la curva in esame $G(j\omega)$ compie intorno al punto critico $(-1 + j0)$ il medesimo numero di giri che la funzione $\frac{G(j\omega)}{K}$ compie intorno al punto $(-\frac{1}{K}; j0)$.

Invece di tenere fisso il punto critico e considerare la famiglia di curve, si può semplicemente tenere fissa la curva (quella corrispondente a $K = 1$) e far variare la posizione del punto critico, che rimane comunque sull'asse reale e scorre avanti e indietro al variare di K in \mathbb{R} , e valutare come si modifica il valore del numero di giri N .

Ragionando quindi con l'aiuto dei due diagrammi precedenti, si comprende come qualora il valore del guadagno rispetti la condizione $K < 1$, il punto critico per come è stato definito rimanga all'esterno della circonferenza di raggio unitario: dunque il sistema in retroazione risulta stabile in quanto il numero di giri compiuto dal diagramma risulta nullo, ed essendo nullo il numero di poli instabili della funzione in catena aperta, risulta per Nyquist $N = N_{g+} - N_{w+}$; ma $N = N_{g+} = 0$ e quindi $N_{w+} = 0$.

Nel caso in cui sia verificata la condizione $K > 1$ la situazione cambia drasticamente, come si può ben vedere dal diagramma di destra, in cui si è assunto $K = 1.5$.

Il punto critico questa volta si porta all'interno della circonferenza di raggio unitario e la curva vi compie intorno un numero di giri infinito: infatti per effetto della continua variazione di fase dovuta al ritardo, la funzione percorre in senso orario infinite volte il cerchio, $N = N_{g+} + N_{w+}$, ma $N = \infty$, $N_{g+} = 0$ e quindi $N_{w+} = \infty$ e il sistema retroazionato diventa totalmente instabile.

Riassumendo, l'analisi secondo il criterio di Nyquist ha portato dunque alle seguenti conclusioni riguardo al sistema retroazionato:

- STABILE per $K < 1$;
- AL LIMITE DELLA STABILITA' per $K = 1$;
- INSTABILE per $K > 1$.

Per verificare la bontà dei risultati ottenuti si mostrano tre esempi di risposte al gradino unitario $\delta_{-1}(t)$ nel dominio del tempo di sistemi retroazionati con struttura come quella appena discussa, in cui il ritardo è assunto costante e pari a $\delta = 0.3$ secondi.

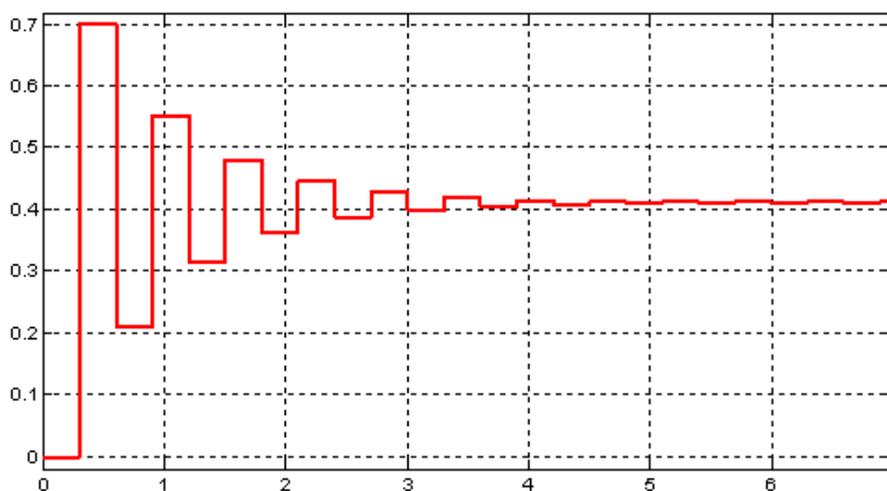
Uscita a ciclo chiuso con $K = 0.7$

Essa può essere determinata a priori attraverso una delle proprietà notevoli della Trasformata di Laplace, che risponde al nome di Teorema del valore finale:

$$\lim_{t \rightarrow +\infty} f(t) = \lim_{s \rightarrow 0^+} sF(s)$$

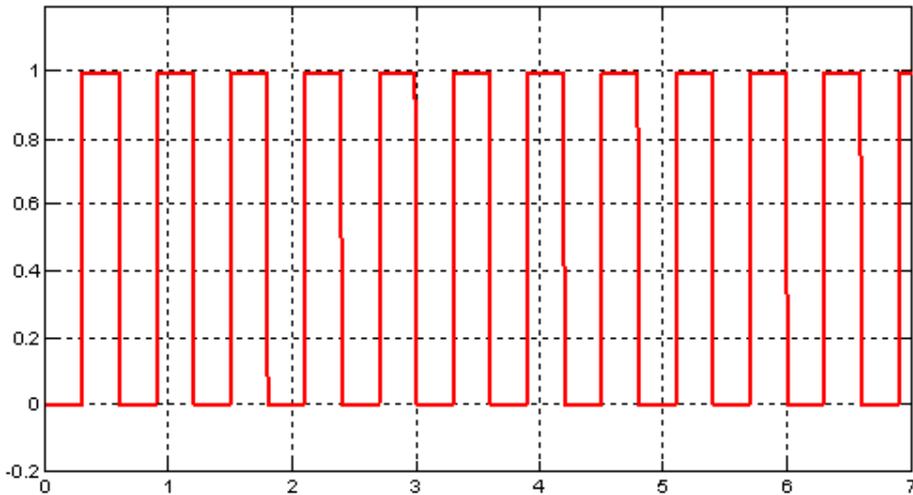
E quindi essendo $y_{regime\ permanente}(t) = W(0)\delta_{-1}(t)$, utilizzando la TDL e il teorema sopra citato

$$\lim_{s \rightarrow 0^+} s \frac{1}{s} \frac{Ke^{-\delta s}}{1 + Ke^{-\delta s}} = \frac{K}{1 + K} \cong 0.412$$



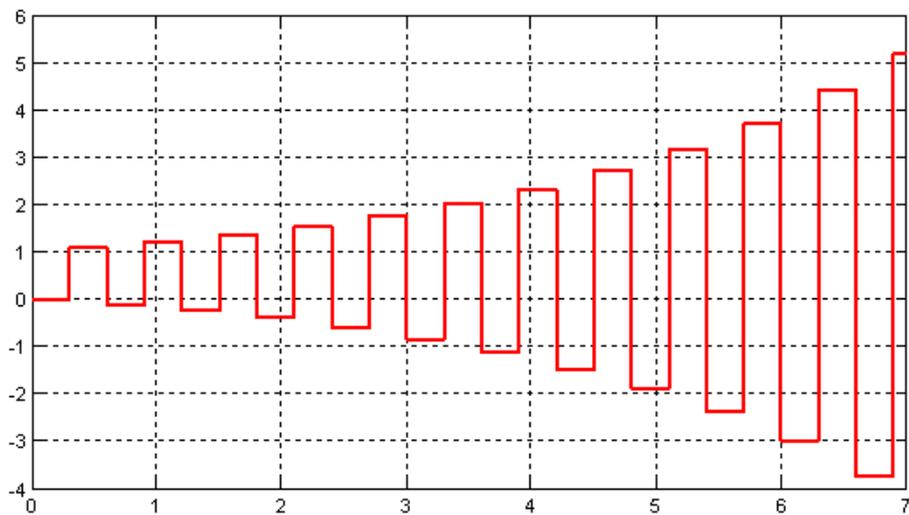
Uscita a ciclo chiuso con $K = 1.0$

Il sistema è al limite della stabilità e presenta un'oscillazione permanente



Uscita a ciclo chiuso con $K = 1.1$

L'uscita diverge in quanto viene a mancare la BIBO stabilità



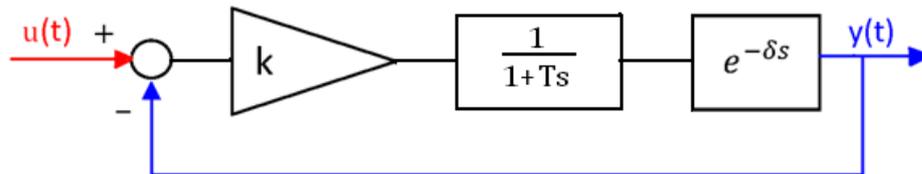
Dalle simulazioni appena presentate si può notare come l'uscita nel dominio del tempo sia costante a tratti con andamento oscillante:

ciò è dovuto al fatto che il segnale in ingresso è costante e ad esso viene sottratta una sua versione traslata e ritardata (a sua volta costante) che cambia col tempo, rendendo quindi l'uscita costante a tratti.

2.6 Polo stabile e ritardo temporale finito

Si considera una FDT in catena aperta del tipo

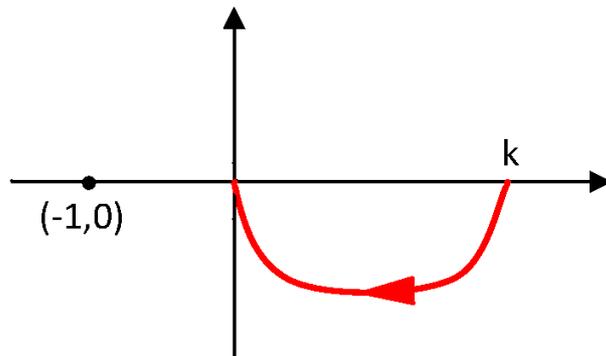
$$G(s) = \frac{K}{1 + Ts} e^{-\delta s}$$



Sia $K > 0$, condizione necessaria per assicurare la stabilità BIBO del sistema retroazionato senza ritardo, come si vedrà immediatamente. Si supponga $T > 0$, o equivalentemente di avere polo stabile a parte reale negativa.

Inizialmente si trascuri la presenza del ritardo. Si verifica facilmente che tale processo ha un diagramma di Nyquist (per quanto concerne l'intervallo $0^+ < \omega < +\infty$) interamente contenuto nel quarto quadrante.

Ciò dipende dal fatto che avendo un unico polo stabile che influisce sulla fase, essa sarà sempre compresa tra $0^\circ > \varphi > -90^\circ$, mentre il modulo per $\omega = 0^+$ parte nel punto $(K; 0)$ e per $\omega \rightarrow +\infty$ va a morire nell'origine.



La figura è squisitamente qualitativa, al fine di mettere in mostra

come anche simmetrizzandola rispetto all'asse reale il punto critico resti sempre escluso: ciò significa che il sistema in catena chiusa è BIBO stabile, qualunque sia il valore di K , in quanto per ipotesi non ci sono poli a parte reale positiva nella FDT in catena aperta.

Se ora invece viene introdotto il ritardo δ le cose cambiano notevolmente: nuovamente il tracciamento è sommariamente qualitativo, permettendo comunque di esprimere delle osservazioni estremamente interessanti.

Per effetto del ritardo la fase non è più compresa nell'intervallo $0^\circ > \varphi > -90^\circ$, ma continua a crescere in modulo, fornendo al

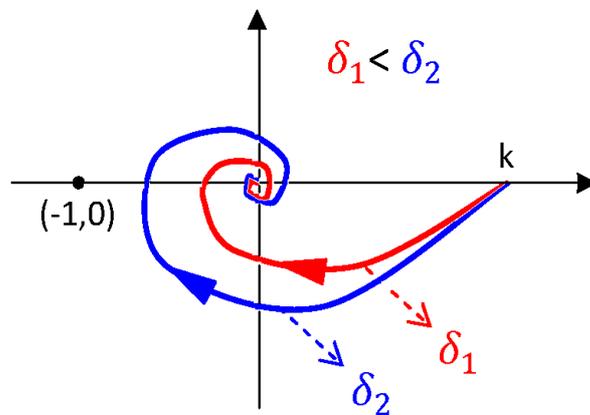


diagramma la tipica forma a spirale o cavatappi, man mano che si ha la convergenza nell'origine per $\omega \rightarrow +\infty$.

Si vede che ora la curva interseca l'asse negativo:

ciò significa che fissato uno specifico valore del ritardo δ , vi sarà un particolare valore di K , denominato $K_{critico}$, tale per cui il diagramma si espande a tal punto da inglobare nel suo spiralizzarsi anche il punto critico, destabilizzando il sistema.

Ciò si può vedere anche utilizzando il trucco esposto prima, quello di considerare il K unitario e il punto critico $(-\frac{1}{K}; j0)$:

in ogni caso, considerato un ritardo δ di entità qualunque, per la destabilizzazione del sistema è necessaria la condizione $K_{critico} > 1$, altrimenti la curva di Nyquist non può uscire dalla circonferenza di raggio unitario (il punto critico funzione di K non entra nella curva di raggio unitario).

Dunque risulta:

- SISTEMA STABILE se $K < K_{critico}$;
- SISTEMA AL LIMITE DELLA STABILITA' se $K = K_{critico}$;
- SISTEMA INSTABILE se $K > K_{critico}$;

In maniera del tutto duale, ora si può assumere un guadagno di Bode $K > 1$, $K = cost.$ e considerare un ritardo variabile, come è stato fatto nella figura precedente:

si vede come al crescere di δ , la curva ruoti più decisamente, portandosi ad intersecare il semiasse negativo delle ascisse per valori di modulo sempre più alti, tendendo per un $\delta \rightarrow +\infty$ al punto di attraversamento asintotico $(-K; j0)$.

Non risulta difficile convincersi allora che esisterà un valore di tale ritardo, chiamato $\delta_{critico}$, il quale permette alla curva di Nyquist di passare alla sinistra del punto critico, destabilizzando così il sistema retroazionato.

Dunque risulta:

- SISTEMA STABILE se $\delta < \delta_{critico}$;
- SISTEMA AL LIMITE DELLA STABILITA' se $\delta = \delta_{critico}$;
- SISTEMA INSTABILE se $\delta > \delta_{critico}$;

Assunta dunque la condizione $K > 1$, in tale classe di processi la stabilità in retroazione dipende sempre da una coppia di condizioni riguardanti il modulo del guadagno e del ritardo, le quali sono in corrispondenza biunivoca: fissata una delle due, resta determinata anche la seconda, e viceversa.

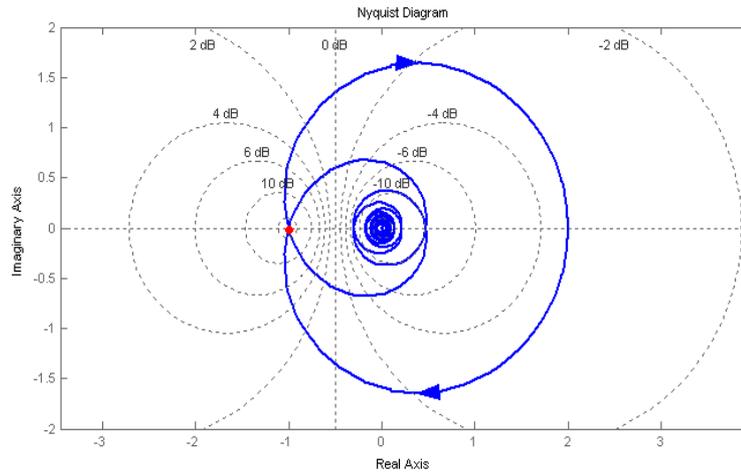
Seguono alcune simulazioni del tipo di sistema appena analizzato.

Sistema al limite della stabilità

Scegliendo un valore di $T = 1$ si possono individuare per tentativi (uno è funzione dell'altro, da quanto esposto prima) una coppia di valori

$$\begin{cases} K_{critico} = 2 \\ \delta_{critico} \cong 1,21 \end{cases}$$

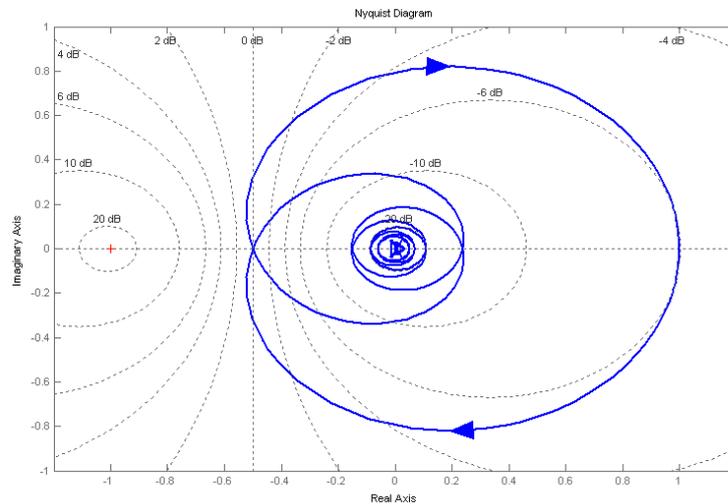
come dimostra il diagramma di Nyquist, in cui si verifica il passaggio della curva proprio per il punt critico.



Sistema stabile

$$\begin{aligned} K &= 1 < K_{critico} (= 2) \\ \delta &= \delta_{critico} = 1.21 \\ T &= 1 \end{aligned}$$

Il sistema retroazionato risulta essere BIBO stabile, in quanto è rispettata solo una delle condizioni di criticità.

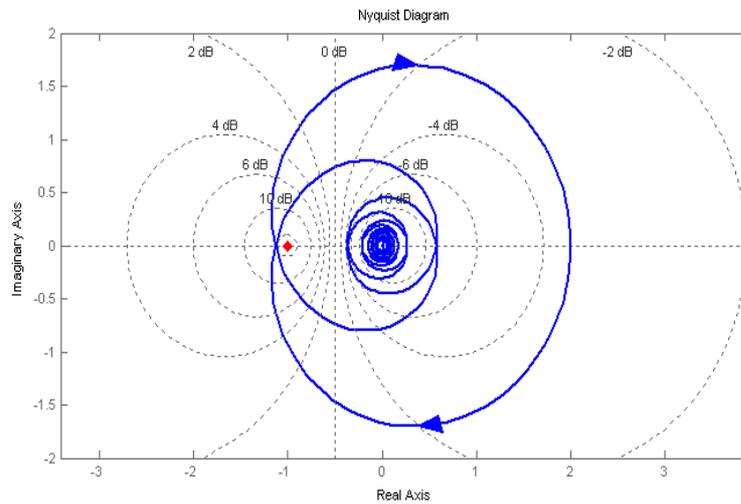


Sistema instabile

$$K = K_{critico} = 2$$

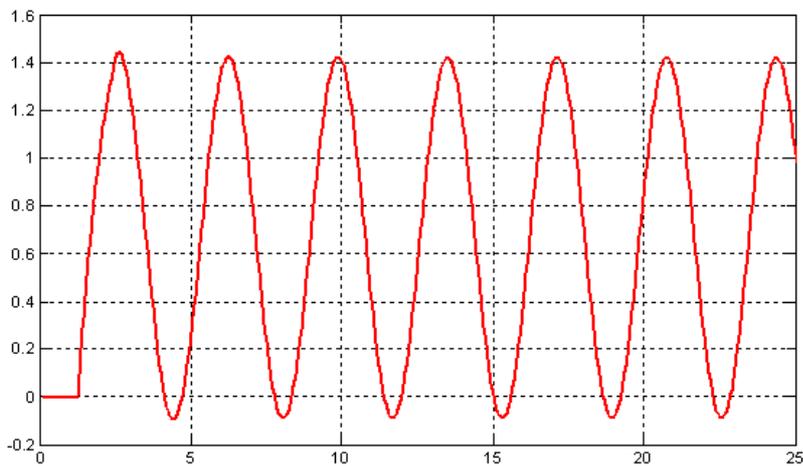
$$\delta = 1.5 > \delta_{critico} (= 1.21)$$

$$T = 1$$

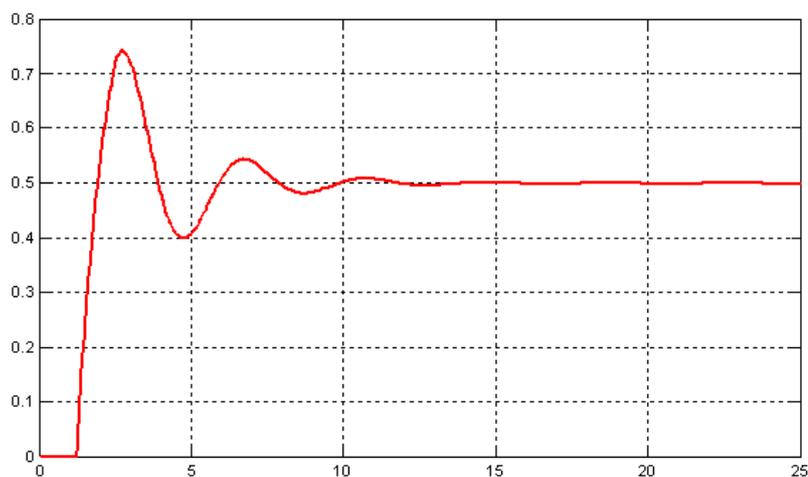


Entrambe le condizioni di criticità sono rispettate. Il sistema dunque si destabilizza, in questo caso $N = -2 = -N_{w+}$. Quindi si manifestano 2 poli a parte reale positiva retroazionando il processo.

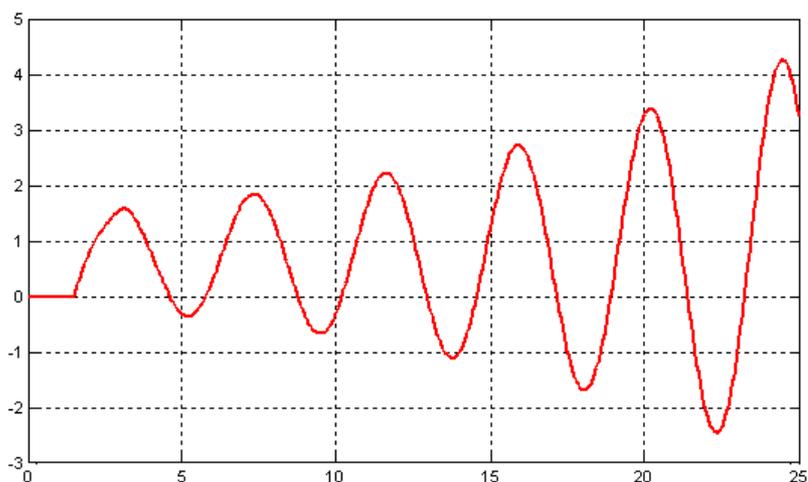
Risposta al gradino per sistema al limite della stabilità



Risposta al gradino per sistema stabile



Risposta al gradino per sistema instabile



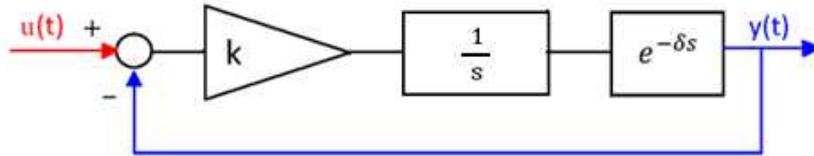
2.7 Polo nell'origine e ritardo temporale finito

Si consideri una FDT in catena aperta del tipo

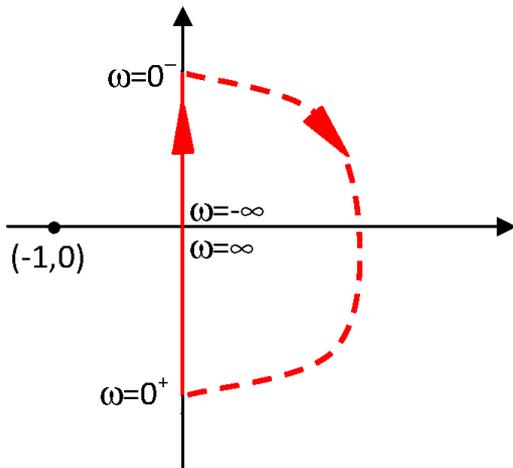
$$G(s) = \frac{K}{s} e^{-\delta s}$$

$K > 0$ per assicurare la stabilità BIBO del sistema retroazionato senza ritardo.

Inizialmente si trascura la presenza del ritardo: si verifica facilmente che tale processo ha un diagramma di Nyquist (per quanto concerne l'intervallo $0^+ < \omega < +\infty$) interamente sovrapposto al semiasse negativo delle ordinate.



Ciò dipende dal fatto che avendo un unico polo che influisce sulla fase, essa sarà sempre pari a -90° , mentre il modulo per $\omega = 0^+$ tende asintoticamente ad un valore ∞ e per $\omega \rightarrow +\infty$ va a morire nell'origine.

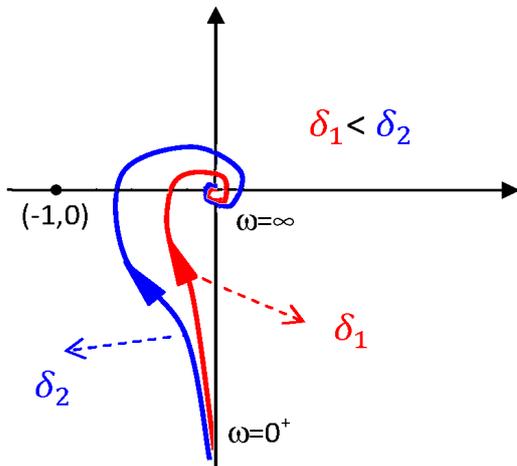


Per quanto riguarda la parte tratteggiata in figura, ad essa corrisponde il percorso di Nyquist modificato, che consiste nel raccordare gli asintoti divergenti con archi di ampiezza $v\pi$ in senso orario, dove v è la molteplicità del polo nell'origine.

In questo caso $v = 1$: si riporta dunque al finito un grafico che per sua natura risulterebbe aperto.

In ogni caso tale funzione è sempre contenuta nel semipiano positivo delle ascisse qualunque sia il valore di K (purché >0): il diagramma esclude sempre il punto critico e pertanto si presenta sempre come

sistema stabile qualora il processo in catena aperta sia retroazionato.



Se ora viene introdotto nell'analisi anche il termine esponenziale associato al ritardo, si verifica un fenomeno qualitativamente molto vicino a quello visto nell'esempio precedente:

si genera un movimento rotatorio che spiralizza l'andamento del diagramma mano a mano che questi degenera nell'origine.

Come si evince dalla figura, il semiasse negativo adesso viene intersecato: per un dato δ , sarà possibile determinare caso per caso un $K_{critico}$ tale per cui il punto critico

viene abbracciato, portando alla destabilizzazione del sistema retro azionato.

Viceversa per un dato K , è sempre possibile individuare un $\delta_{critico}$, grande quanto basta per riuscire a circondare il punto $(-1; j0)$.

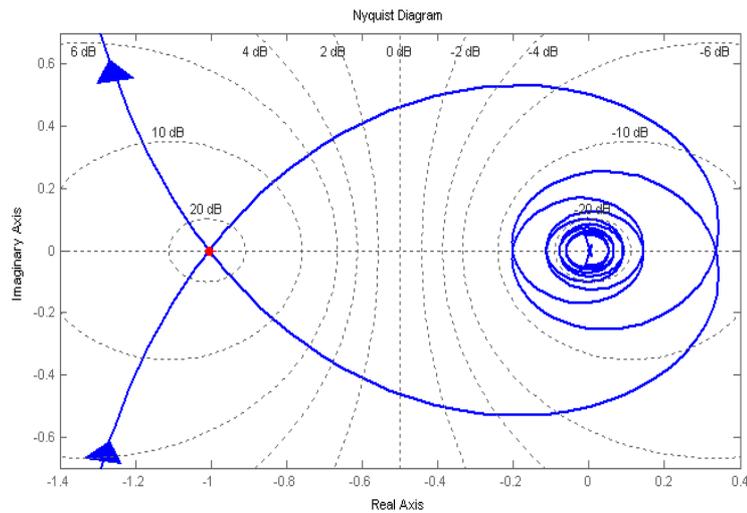
La differenza rispetto al caso precedente consiste nel fatto che non è più garantita la stabilità nemmeno per $K < 1$, in quanto il polo nell'origine spinge per le basse frequenze

il modulo a valori molto alti, che combinati con un sufficiente ritardo permettono comunque di passare a sinistra del punto critico, indipendentemente da K .

Seguono alcune simulazioni del tipo di sistema appena analizzato.

Sistema al limite della stabilità

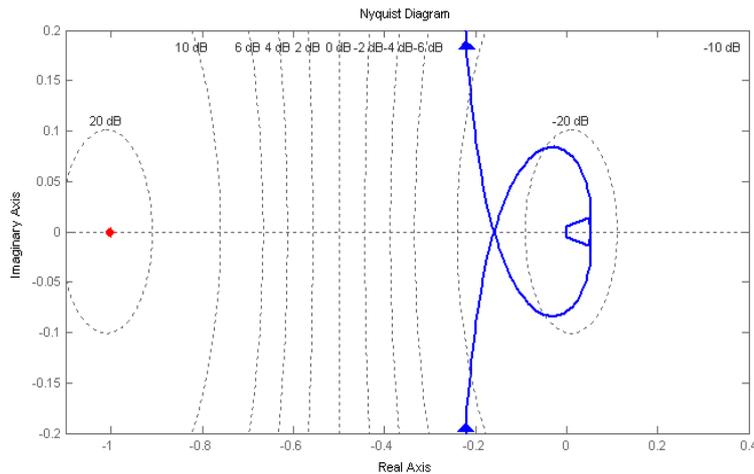
Si può individuare per tentativi una coppia di valori $K = 2$, $\delta \cong 0.79$, come dimostra il diagramma di Nyquist, in cui si verifica il passaggio della curva proprio per il punto critico.



Sistema stabile

$K = 0.5 < K_{critico} (= 2)$
 $\delta = 0.5 < \delta_{critico} (\cong 0.79)$

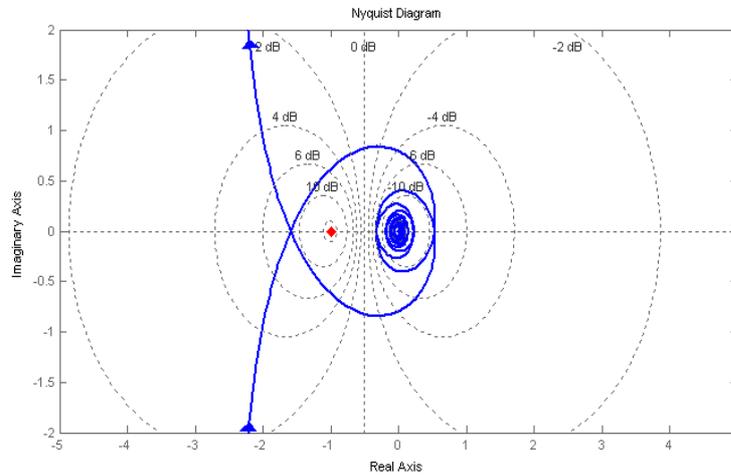
Il sistema retroazionato risulta essere BIBO stabile.



Sistema instabile

$$K = 0.5 < K_{critico}(= 2)$$

$$\delta = 0.5 > \delta_{critico} (\cong 0.79)$$



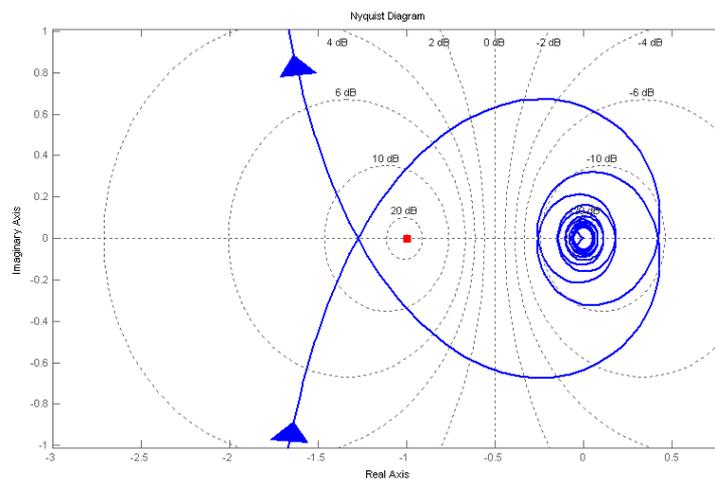
Il sistema si destabilizza, nonostante sia $K < 1$, condizione che nella tipologia di sistemi precedente garantiva la stabilità:

in questo caso $N = -2 = -N_{w+}$ quindi sono presenti 2 poli a parte reale positiva retroazionando il processo.

Sistema instabile

$$K = 10 > K_{critico}(= 2)$$

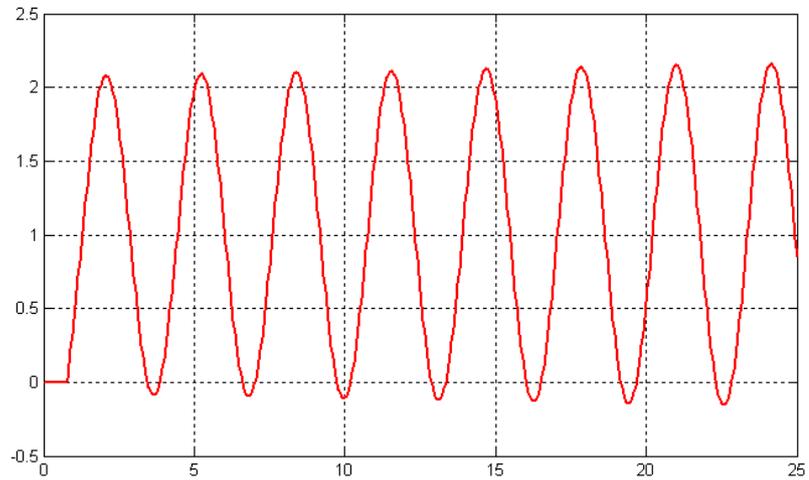
$$\delta = 0.2 < \delta_{critico} (\cong 0.79)$$



Il sistema si destabilizza, nonostante sia $\delta < \delta_{critico}$:

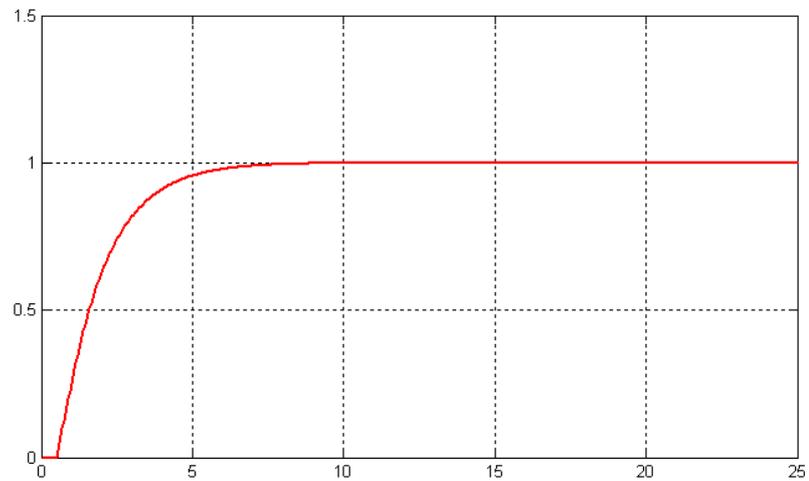
in questo caso $N = -2 = -N_{w+}$ quindi sono presenti 2 poli a parte reale positiva retroazionando il processo.

Risposta al gradino per sistema al limite della stabilità

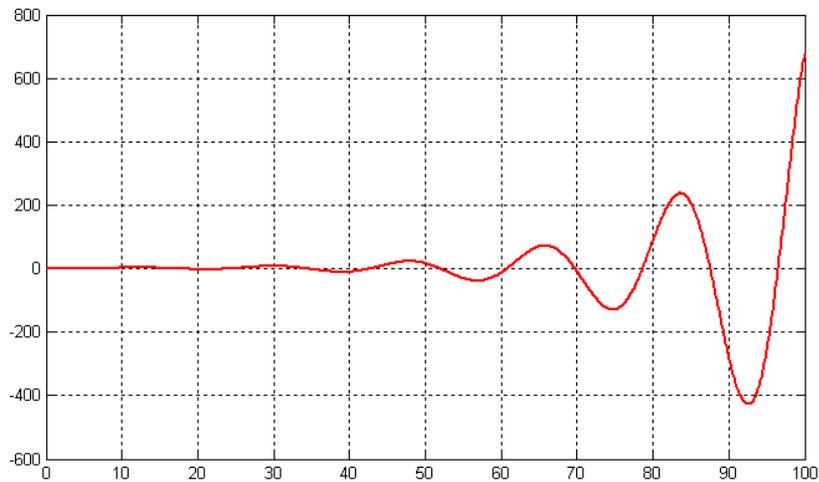


Risposta al gradino per sistema stabile

Il sistema è di tipo 1: infatti insegue il gradino con errore nullo



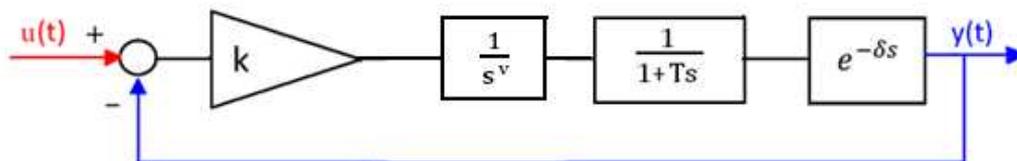
Risposta al gradino per sistema instabile



2.8 Polo nell'origine, polo a parte reale negativa e ritardo temporale finito

Si consideri un sistema in catena aperta del tipo

$$G(s) = \frac{K}{s^v(1+Ts)} e^{-\delta s} \quad K > 0, \quad T > 0.$$

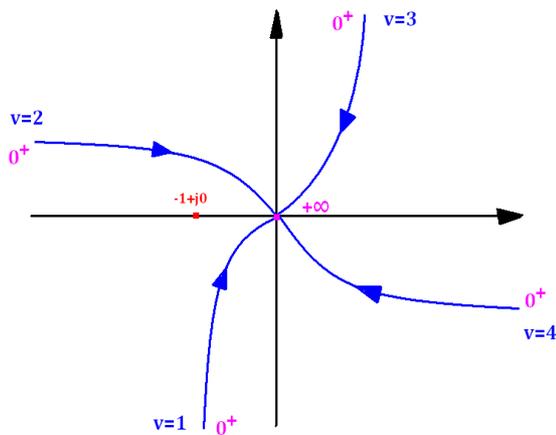


Inizialmente, come è consuetudine, si analizza rapidamente il sistema trascurando la presenza del ritardo, generalizzando le argomentazioni $\forall v$.

Considerando l'intervallo $0^+ < \omega < +\infty$, si nota come l'ordine v decida quale sia il semiasse che funge da asintoto per la curva in esame:

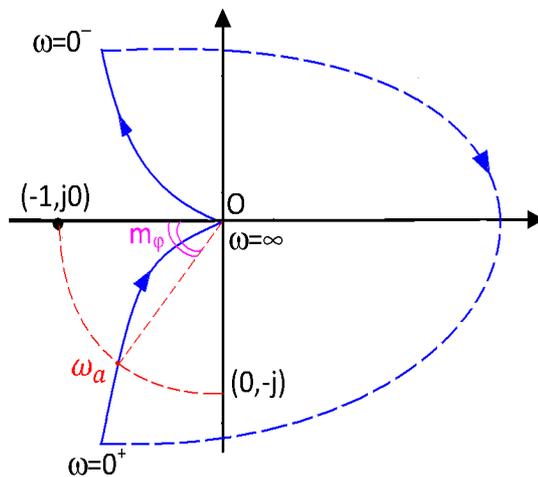
si può pensare a questa semiretta come ad una sorta di lancetta di orologio che per $v = 1$ cade sul semiasse negativo delle ordinate, e per ogni incremento discreto di v compie una rotazione di 90° in senso orario.

Il diagramma è sempre e comunque una curva divergente e va per ogni caso riportata al finito attraverso il criterio di Nyquist modificato, secondo la nota regola che associa archi di raccordo di ampiezza angolare pari a $v\pi$:



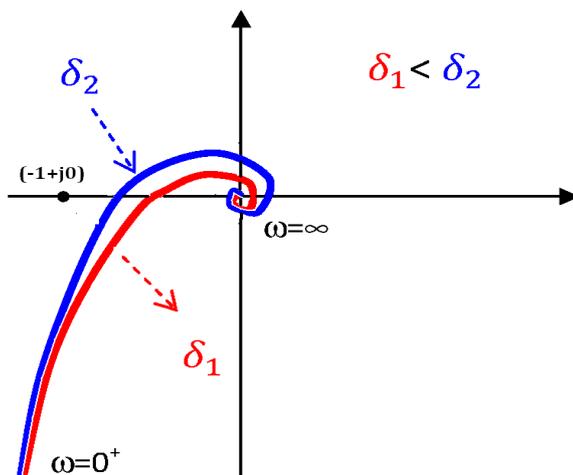
si verifica immediatamente che per $v \geq 2$ (e quindi per archi maggiori o uguali ad una circonferenza il punto critico viene sempre abbracciato da uno o più giri in senso orario, ciò comportando l'impossibilità di ottenere un sistema retroazionato stabile.

L'interesse per la famiglia di FDT degenera allora nell'unico caso che abbia significato pratico, quello in cui la molteplicità del polo nell'origine ha valore unitario.



Assumendo quindi $v = 1$, con l'ausilio delle considerazioni appena fatte e riportando la curva al finito, risulta immediato rendersi conto che tale sistema una volta retroazionato risulta sempre stabile, per ogni valore positivo di K e T .

Nella figura sono anche stati evidenziati i valori della P pulsazione di attraversamento e del m_ϕ margine di fase, che possono essere calcolati immediatamente per via grafica.



Se ora si introduce l'effetto del ritardo temporale, ancora una volta si nota come il diagramma assuma una configurazione "a cavatappi", mano a mano che converge verso l'origine per $\omega \rightarrow +\infty$.

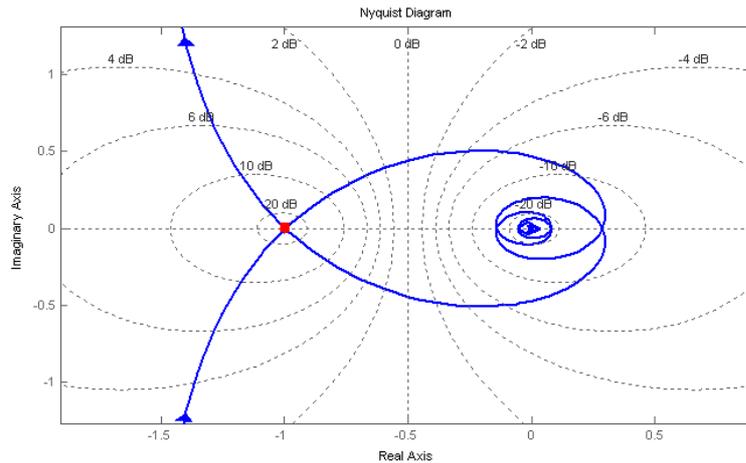
Per effetto del polo nell'origine che alza il modulo a mano a mano che la pulsazione scende, non è rispettata neanche qui la condizione di avere un guadagno critico maggiore di 1:

fissato $K > 0$ qualunque si può sempre individuare un $\delta_{critico}$, e viceversa dato un certo ritardo δ , si può trovare un $K_{critico}$ che porta il sistema a perdere la stabilità in retroazione.

Seguono alcune simulazioni del tipo di sistema appena analizzato

Sistema al limite della stabilità

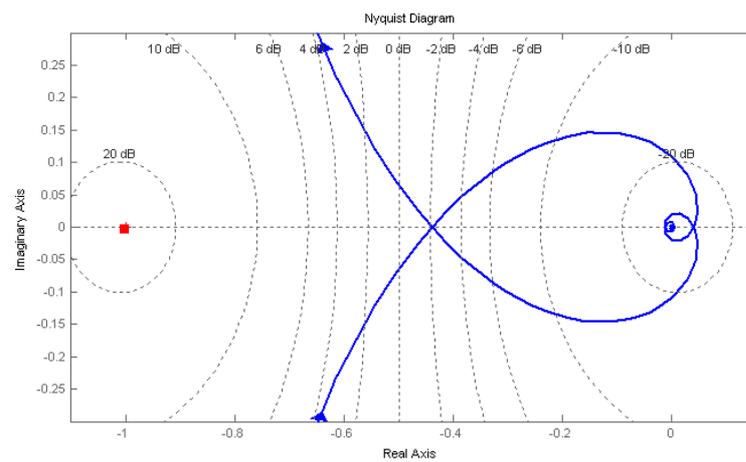
Scegliendo un valore di $T = 0.1$ si possono individuare per tentativi una coppia di valori $K = 2$, $\delta \cong 0.704$, come dimostra il diagramma di Nyquist, in cui si verifica il passaggio della curva proprio per il punto critico.



Sistema stabile

$K = 0.5 < K_{critico} (= 2)$
 $\delta = 0.1 < \delta_{critico} (\cong 0.7)$

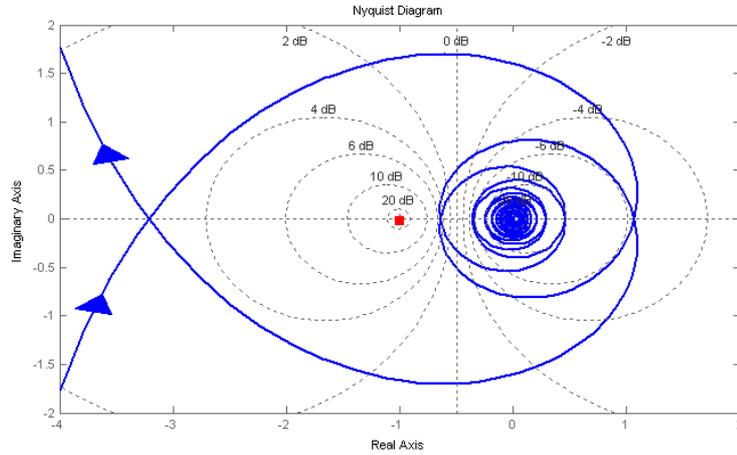
Il sistema retroazionato risulta essere BIBO stabile.



Sistema instabile

$$K = 0.5 < K_{critico}(= 2)$$

$$\delta = 10 > \delta_{critico} (\cong 0.7)$$

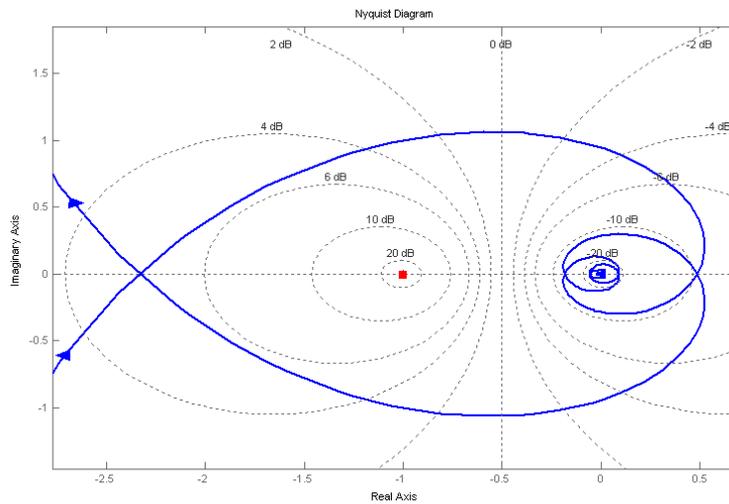


Il sistema si destabilizza, nonostante sia $K < 1$:
 si vede che $N = -2 = -N_{w+}$ quindi sono presenti 2 poli a parte reale positiva retroazionando il processo.

Sistema instabile

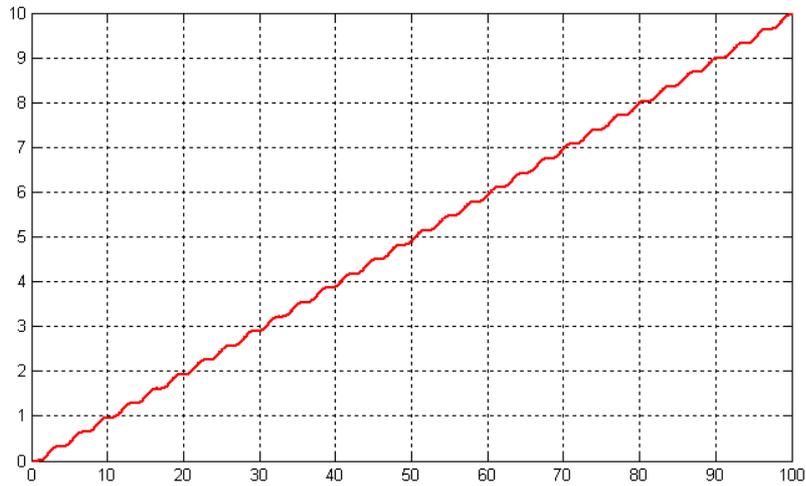
$$K = 10 > K_{critico}(= 2)$$

$$\delta = 0.3 < \delta_{critico} (\cong 0.7)$$

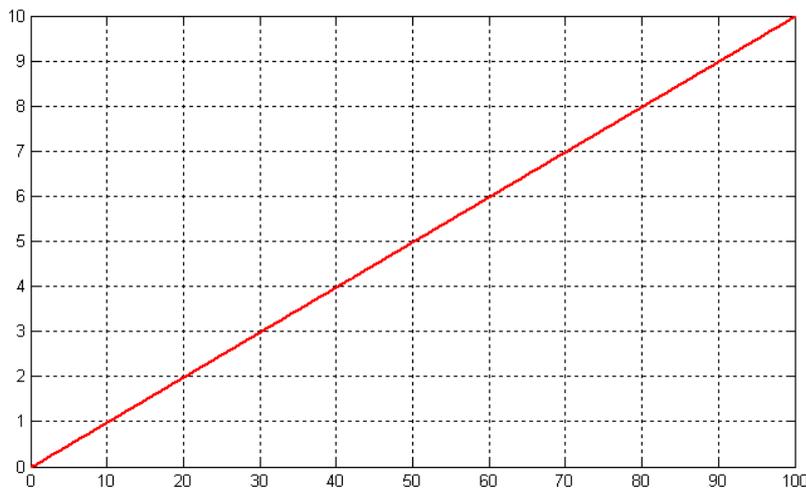


Il sistema si destabilizza, nonostante sia $\delta < \delta_{critico}$:
 si vede che $N = -2 = -N_{w+}$ e quindi sono presenti 2 poli a parte reale positiva retroazionando il processo.

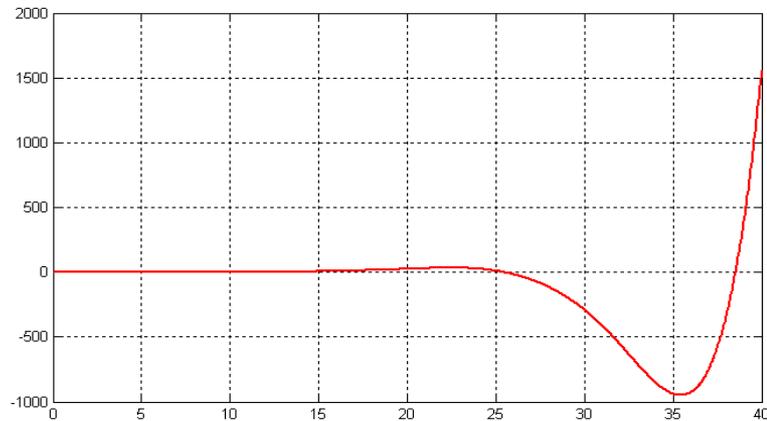
Risposta alla rampa lineare $\delta_{-(\eta+1)} = \frac{t^\eta}{\eta!} \delta_{-1}(t)$, $\eta = 1$ per sistema retroazionato al limite della stabilità



Risposta alla rampa lineare canonica per sistema retroazionato stabile



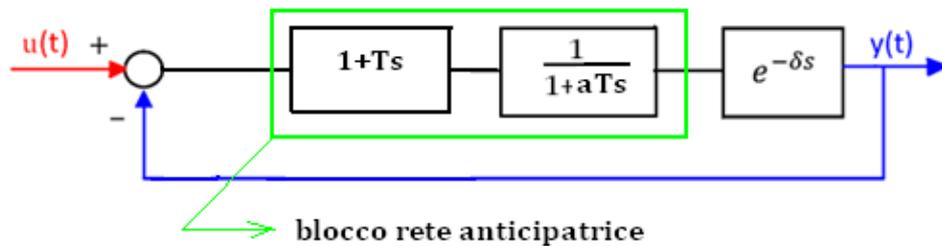
Risposta alla rampa lineare canonica per sistema retroazionato instabile



2.9 Rete Anticipatrice e ritardo temporale finito

Si consideri una FDT in catena aperta del tipo

$$G(s) = \frac{1 + Ts}{1 + \alpha Ts} e^{-\delta s}$$



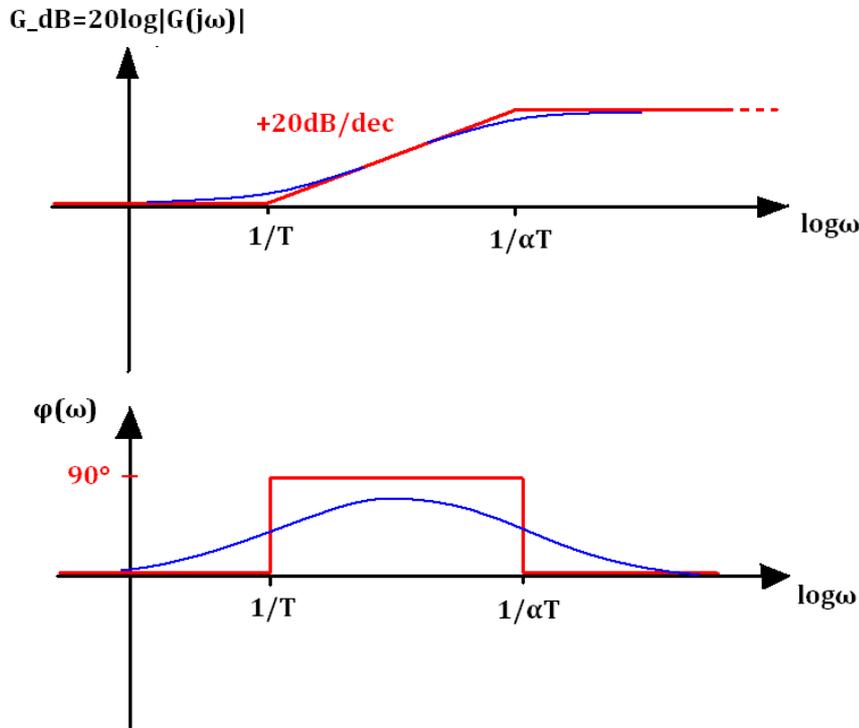
Il blocco rete anticipatrice va inteso come un unico componente, ma viene presentato frammentato per mettere in evidenza i singoli contributi alla FDT.

In tale modello si assumono $T > 0$ ed $\alpha > 0$ così che polo e zero siano a parte reale negativa e quindi stabili.

In più si pone $0 < \alpha < 1$ per fare in modo che il punto di spezzamento dello zero, nel diagramma approssimato di Bode, preceda quello del polo: affinché una rete sia di tipo anticipatore deve essere quindi

$$\alpha T < T \rightarrow \frac{1}{\alpha T} > \frac{1}{T} .$$

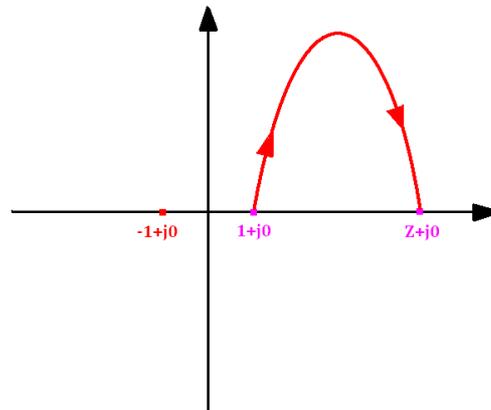
Per maggiore chiarezza si riporta il Diagramma di Bode per tale classe di processi:



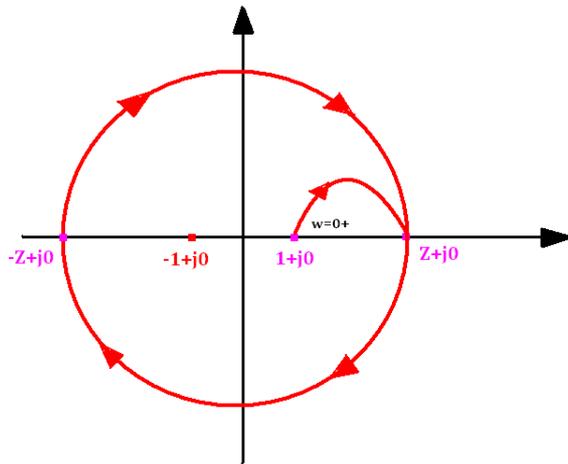
esso è di natura del tutto generale, ed è rappresentato col tratto blu nella sua versione esatta, mentre il tratto rosso corrisponde alla versione spezzata approssimante.

Inizialmente si trascuri la presenza del ritardo:

si verifica facilmente che tale processo in catena aperta ha un diagramma di Nyquist (per quanto concerne l'intervallo $0^+ < \omega < +\infty$) interamente contenuto nel primo quadrante. Per basse pulsazioni il grafico si mantiene con modulo pari all'unità e con fase nulla fino al primo punto di spezzamento, dove, per effetto dello zero stabile, cresce secondo le consuete regole (con pendenza pari a $+20_{dB/Decade}$), fino a che non giunge alla seconda pulsazione di spezzamento, dove il polo stabile manifesta effetti uguali e contrari a quelli dello zero, riportando la fase al valore nullo e bloccando la crescita del modulo. Per $\omega \rightarrow +\infty$ quest'ultimo si mantiene costante (nel disegno qui accanto tale valore è rappresentato dall'ascissa Z).



Se ora viene introdotto nell'analisi anche il termine esponenziale associato al ritardo temporale finito, nulla cambia in termini di modulo, ma è la fase a risentire degli effetti del nuovo fattore, fase che per $\omega \rightarrow +\infty$ diverge a $-\infty$.



Qualitativamente ciò che accade è che come prima il modulo si stabilizza ad un valore costante, mentre la fase imprime un moto rotatorio al diagramma di Nyquist, che si ritrova suo malgrado a percorrere infinite volte in senso orario la circonferenza con centro nell'origine e di raggio Z.

Ciò destabilizza irreparabilmente il sistema in quanto $N = N_{g+} - N_{w+}$, ma $N = \infty$, $N_{g+} = 0$ per ipotesi e quindi $N_{w+} = \infty$.

Non a caso si è disegnata la curva che abbraccia il punto critico:

ragionando infatti sul diagramma di Bode il modulo parte dal valore unitario, (coincide con l'asse delle ascisse) e durante l'intervallo di pulsazioni tra i due punti di spezzamento, esso ha modo di crescere oltre l'unità e portarsi a quello che poi è definito come valore generico costante Z.

Si può fornire una relazione generale delle reti anticipatrici per il calcolo di tale termine

$$Z_{dB} = 20 \log\left(\frac{1}{\alpha T} - \frac{1}{T}\right), \quad Z = 10^{\frac{Z_{dB}}{20}}$$

Certo si può avvicinare polo e zero in termini di pulsazioni di taglio (facendo tendere α al valore unitario), ma farli coincidere non ha senso perché cessa di esistere tale tipo di processo, ed essendo il dominio delle ascisse un insieme denso, per quanto i punti di spezzamento siano vicini sarà sempre presente un intervallo piccolo quanto si vuole che permette al modulo di crescere oltre l'unità.

Ciò significa che, per come è concepita la rete anticipatrice, essa in presenza di qualunque tipo di ritardo, anche di natura estremamente modesta ($\delta \rightarrow 0^+$) si destabilizza in maniera irreparabile una volta sottoposta a retroazione unitaria negativa.

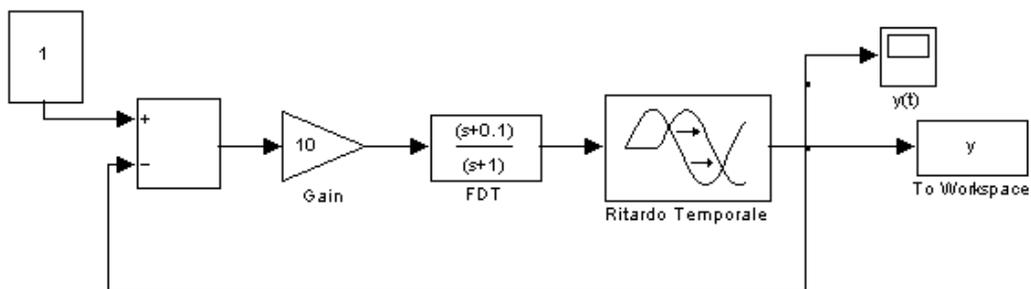
Riassumendo, l'analisi secondo il criterio di Nyquist ha portato dunque alle seguenti conclusioni riguardo al sistema retroazionato:

-INSTABILE sempre e comunque per ogni coppia di valori $\alpha, T > 0$ tali che $\alpha T < T$.

Per render stabile questo tipo di rete si potrebbe pensare di introdurre un guadagno di Bode $0 < K < 1$ tale che tutto il diagramma dei moduli si trovi traslato di una quantità tale da rimanere collocato tutto sotto l'asse delle ascisse, rendendo in questo modo il relativo diagramma di Nyquist interamente contenuto nella circonferenza di raggio unitario con centro nell'origine:

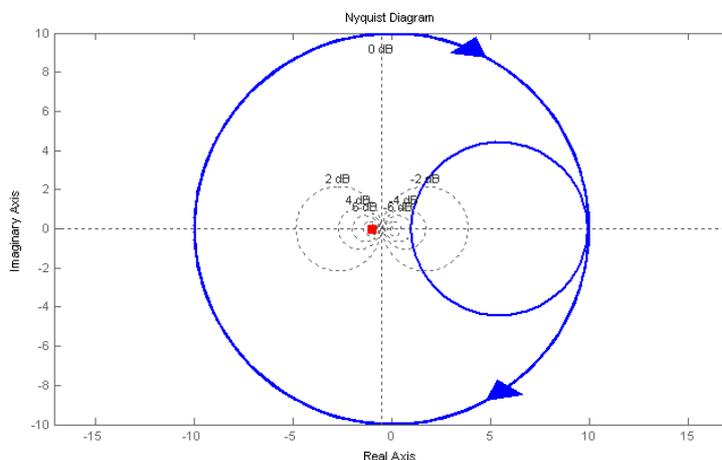
putroppo questo accorgimento è quasi sempre irrealizzabile in quanto rende insoddisfatte le specifiche riguardo all'errore di regime permanente richiesto al sistema, il quale come è noto dipende secondo una relazione di proporzionalità inversa proprio dal guadagno di Bode.

Segue una simulazione di risposta al gradino unitario $\delta_{-1}(t)$ di una rete anticipatrice con ritardo retroazionata, nel caso di un ritardo modesto in gioco.



Sistema instabile

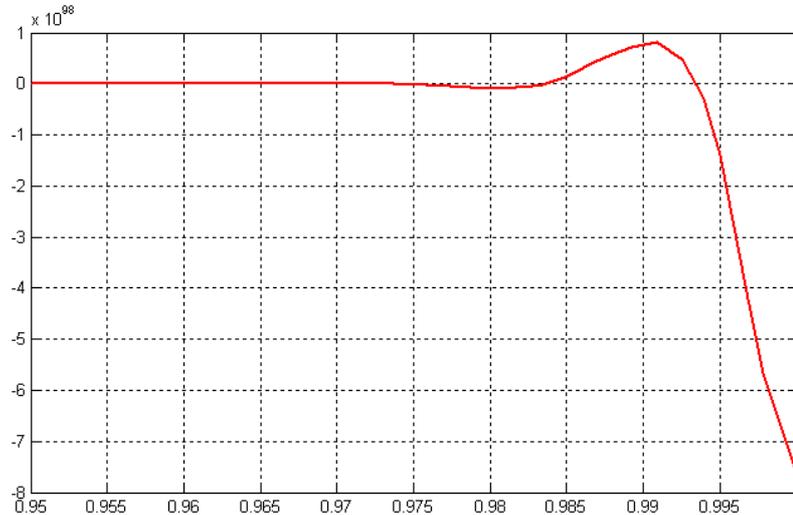
- $\alpha = 0.1$
- $\delta = 0.01$
- $T = 10$



I due punti di spezzamento distano una decade, quindi il valore finale del modulo (o raggio della circonferenza nel diagramma di Nyquist) è pari a 20_{dB} o 10.

Il sistema retroazionato ha infiniti poli a parte reale positiva, quindi non potrà mai essere stabile.

Risposta al gradino per sistema instabile

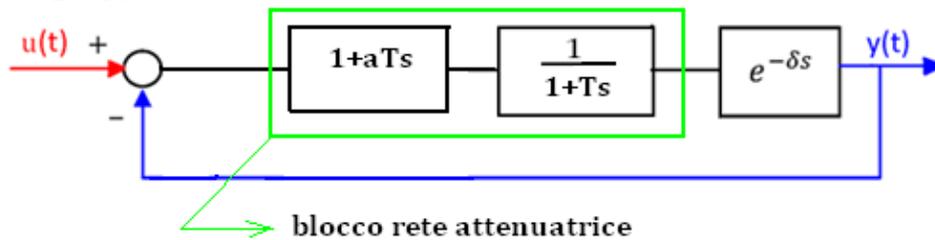


Si è rappresentato solo un dettaglio della simulazione, non tutto l'asse temporale, in quanto la soluzione è divergente e causa problemi al risolutore: gli esponenti in gioco (10^{98} sull'asse delle ordinate!) non lasciano dubbio alcuno sull'instabilità del sistema la cui risposta nel dominio del tempo perde ogni significato pratico.

2.10 Rete Attenuatrice con ritardo temporale finito

Si consideri una FDT in catena aperta del tipo

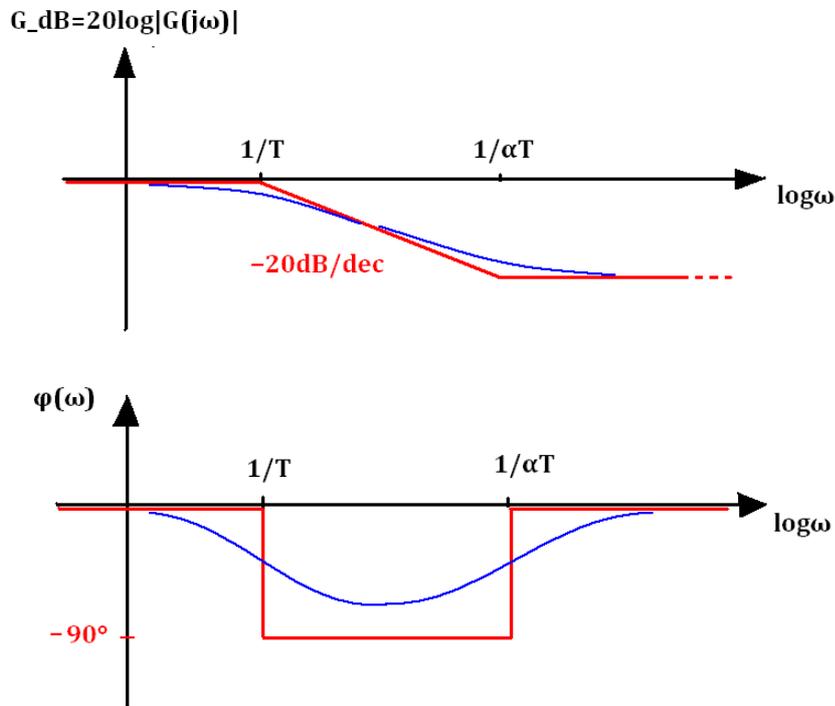
$$G(s) = \frac{1 + \alpha Ts}{1 + Ts} e^{-\delta s}$$



In tale modello si assumono $T > 0$ ed $\alpha > 0$ così che polo e zero siano a parte reale negativa, quindi stabili.

In più si pone l'ulteriore condizione $0 < \alpha < 1$, per fare in modo che il punto di spezzamento del polo nel diagramma approssimato di Bode preceda quello dello zero: affinché una rete sia di tipo attenuatore deve essere quindi

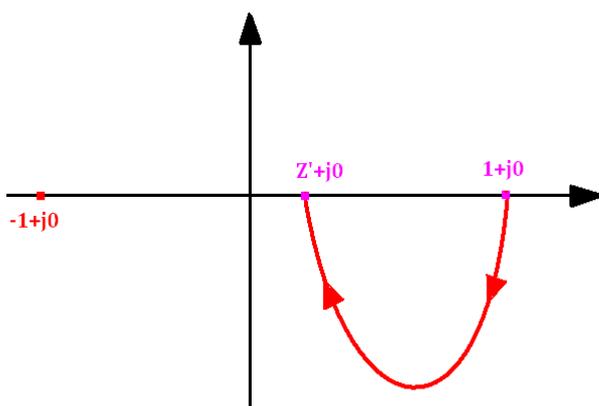
$$\alpha T < T \rightarrow \frac{1}{\alpha T} > \frac{1}{T} .$$



Si è tracciato nella figura soprastante l'andamento qualitativo del Diagramma di Bode per le reti attenuatrici: il tratto blu rappresenta l'andamento esatto, mentre il tratto rosso descrive la versione spezzata approssimante.

Inizialmente si trascuri la presenza del ritardo:

si verifica facilmente che tale processo ha un diagramma di Nyquist (per quanto concerne l'intervallo $0^+ < \omega < +\infty$) interamente contenuto nel quarto quadrante.



Il grafico si mantiene con modulo pari all'unità e con fase nulla fino al primo punto di spezzamento, dove per effetto del polo stabile decresce secondo le consuete regole (con pendenza pari a $-20_{dB}/Decade$), fino a che non giunge alla seconda pulsazione di spezzamento, dove lo zero stabile manifesta effetti uguali e contrari a

quelli dello zero, riportando la fase al valore nullo ed interrompendo la decrescita di valore del modulo: per $\omega \rightarrow +\infty$ questi si mantiene costante (nel disegno tale valore è rappresentato dall'

ascissa Z').

Se ora viene introdotto nell'analisi anche il termine esponenziale associato al ritardo, nulla cambia in termini di modulo, ma è la fase a risentire degli effetti del nuovo fattore, fase che per $\omega \rightarrow +\infty$ diverge a $-\infty$.

Da un punto di vista strettamente qualitativo ciò che accade è che il modulo si stabilizza al valore costante Z' , mentre la fase per effetto del suo divergere imprime un moto rotatorio infinito al diagramma di Nyquist, che si assesta percorrendo all'infinito in senso orario una circonferenza di raggio Z' .

Non a caso si è opportunamente evitato di abbracciare il punto critico sul piano di Gauss: il modulo della curva è infatti per natura stessa della FDT sempre ≤ 1 , quindi il grafico sarà sempre contenuto in una virtuale circonferenza di raggio unitario centrata nell'origine.

Si può fornire una formula di validità generale per le reti attenuatrici, per la determinazione di Z' :

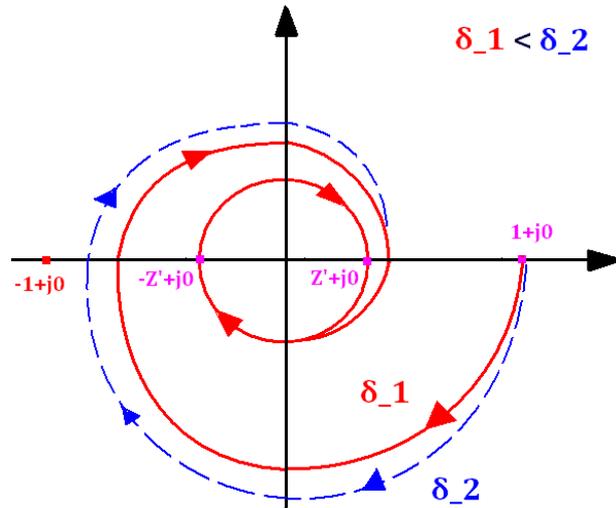
$$Z'_{dB} = -20 \log\left(\frac{1}{\alpha T} - \frac{1}{T}\right), \quad Z' = 10^{\frac{Z'_{dB}}{20}}$$

In figura si è reso manifesto anche l'effetto della magnitudine del ritardo temporale il quale provoca una dilatazione della spirale (curva blu) la quale diventa più ampia nelle proprie spire, fermi restando il punto di partenza, la circonferenza di raggio Z' e la circonferenza limite esterna di raggio unitario: immaginando ora un ritardo molto consistente ($\delta_{critico}$) e/o il punto di spezzamento del polo ad una pulsazione sufficientemente alta ($\frac{1}{T_{critico}}$), accade che alla fase è concessa la possibilità di scendere al valore di -180° prima che il modulo inizi a decrementare per effetto del polo.

Accade così sul diagramma di Nyquist che la curva transiti esattamente per il punto critico $(-1+j0)$, manifestando le peculiarità di un processo retroazionato al limite della stabilità.

Tale situazione critica è anche il caso limite superiore delle due famiglie di curve, parametrizzate rispettivamente secondo l'entità del ritardo e le possibili posizioni del punto di spezzamento del polo:

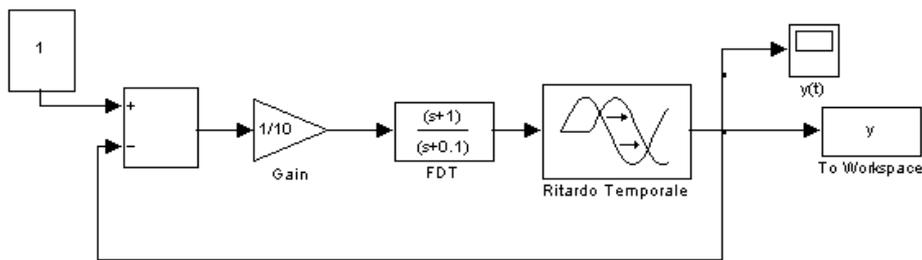
questa categoria di sistemi, se non si ricade nel caso patologico sopra esposto, risulta dunque sempre BIBO stabile qualora sia fatta lavorare in catena chiusa con retroazione.



Riassumendo, l'analisi secondo il criterio di Nyquist ha portato alle seguenti conclusioni riguardo al sistema retro azionato:

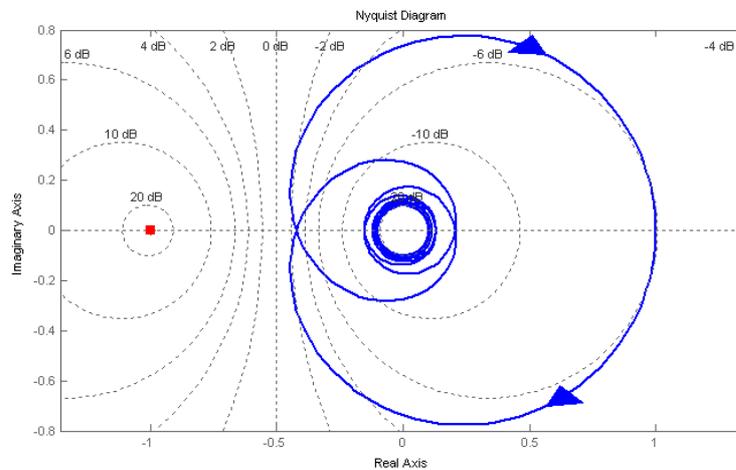
- AL LIMITE DELLA STABILITA' se $T \geq T_{critico}$ e/o $\delta \geq \delta_{critico}$;
- STABILE se $T < T_{critico}$ e $\delta < \delta_{critico}$;

Seguono alcune simulazioni di risposta al gradino unitario $\delta_{-1}(t)$ di reti attenuatrici retroazionate.



Sistema stabile

- $T = 0.1$
- $\alpha = 0.1$
- $\delta = 0.1$



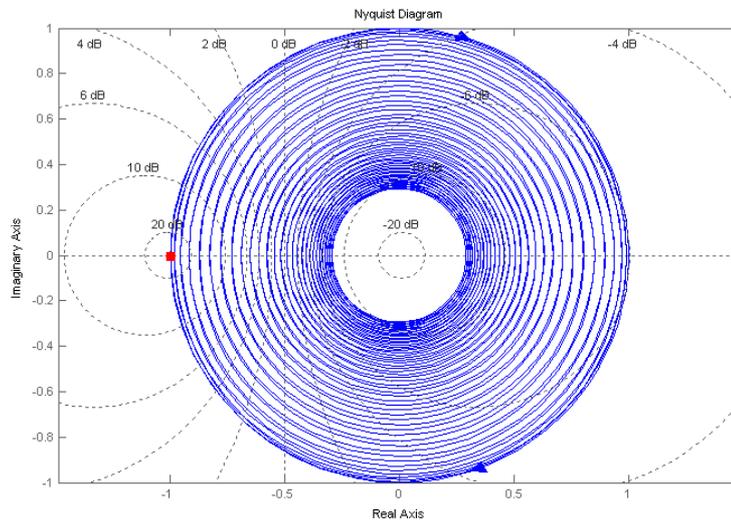
Il punto critico resta defilato sulla sinistra e il sistema retroazionato si presenta BIBO stabile.

Sistema al limite della stabilità

$T = 0.01$

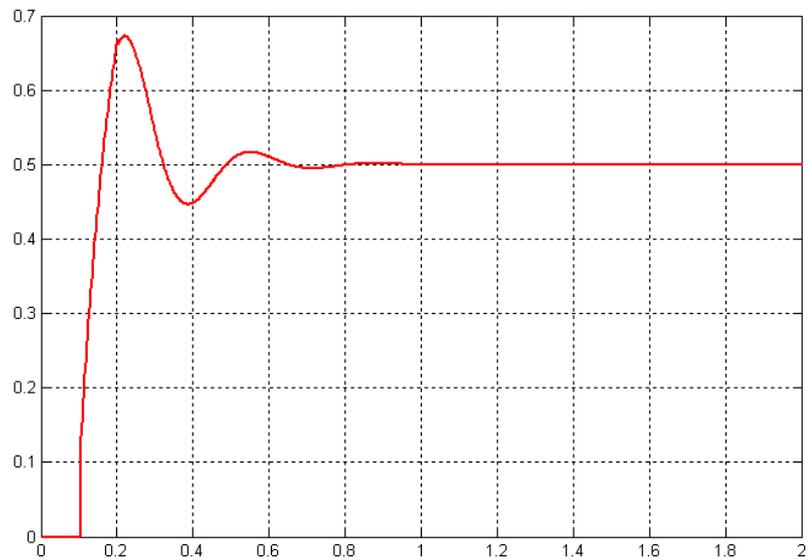
$\alpha = 0.1$

$\delta = 0.5$

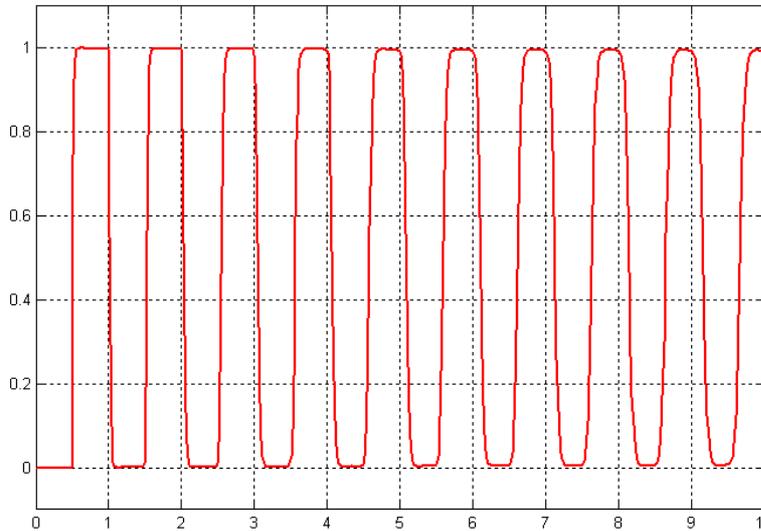


Rispetto al caso precedente si è incrementato il ritardo e si è spinta in alto la pulsazione di taglio del polo in modo che il diagramma di Nyquist transiti per il punto critico.

Risposta al gradino per sistema stabile



Risposta al gradino per sistema al limite della stabilità



Nei primissimi periodi di oscillazione si manifestano delle discontinuità nella derivata della funzione:

ciò è incompatibile con un modello a tempo continuo, infatti tale fenomeno è riconducibile ad approssimazione numerica del risolutore, approssimazione che poi si riduce avvicinandosi sempre più alla forma reale della risposta nel dominio del tempo.

2.11 Calcolo del Guadagno Critico e del Ritardo Critico

Sia data una funzione di trasferimento in catena aperta del tipo

$$G(s) = KG'(s)e^{-\delta s}$$

su cui viene fatta una ipotesi vincolante, sempre assunta valida nei successivi sviluppi:
 \exists e sia unica la soluzione all'equazione

$$|G(j\omega_a)|_{dB} = 20 \log|G(j\omega_a)| = 0$$

o in modo equivalente $|G(j\omega_a)| = 1$, dove con ω_a si è indicata la pulsazione di attraversamento di $G(j\omega)$; si ammette cioè che il diagramma di Bode della FDT in esame attraversi l'asse delle ascisse una volta sola.

In corrispondenza alla ω_a si definiscono due grandezze:

-la fase di attraversamento $\varphi_a \triangleq \arg(G(j\omega_a))$;

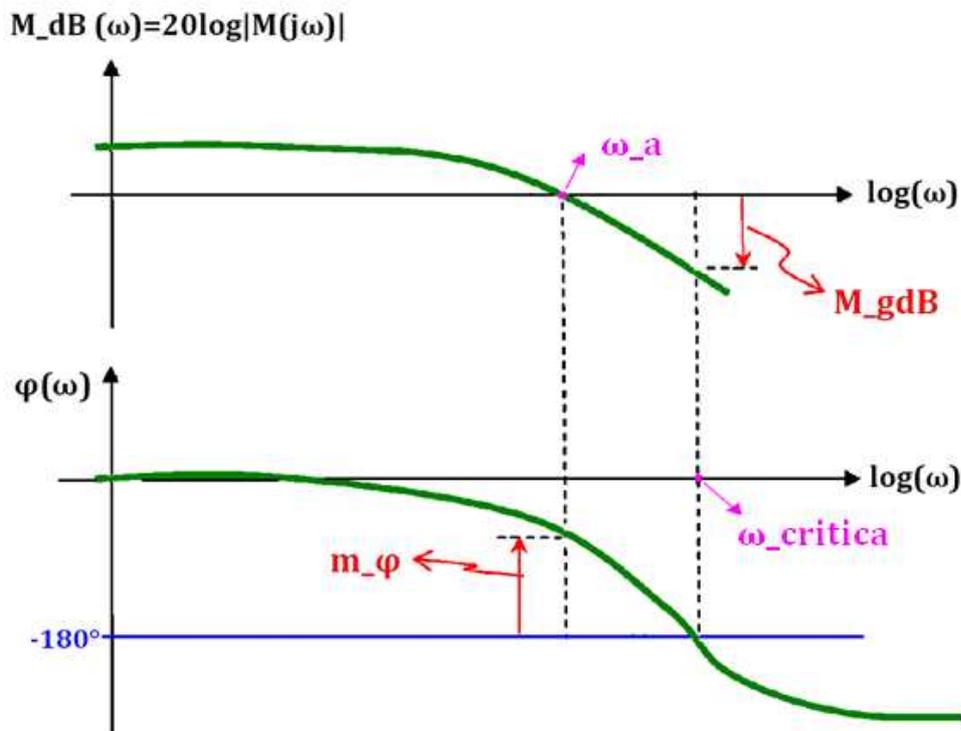
-il margine di fase $m_\varphi \triangleq \pi + \varphi_a$

Va notato che ai fini delle definizioni delle grandezze appena introdotte, non ci sono ulteriori ipotesi da fare riguardo al sotto processo $KG'(s)$, anzi esso può essere strettamente proprio o improprio, avere un guadagno in continua negativo o positivo, in quanto ciò che si richiede è che abbia una ω_a univocamente definita. per comodità di trattazione si assumerà comunque un sistema il quale non presenti poli a parte reale positiva e che rispetti il criterio di stabilità di Nyquist.

2.11.1 Primo caso: Guadagno Critico

Fissato un valore qualunque (ovviamente > 0) per δ , si procede alla determinazione del guadagno $K_{critico}$:

innanzitutto si tracciano i diagrammi di Bode della FDT $M(s) = G'(s)e^{-\delta s}$, ossia la stessa di prima a parte il guadagno che viene assunto unitario.



A questo si deve individuare graficamente la pulsazione $\omega_{critica}$ in corrispondenza alla quale il diagramma delle fasi presenta $m_\varphi = 0$, ovvero attraversa il semiasse negativo delle ascisse nel diagramma di Nyquist.

E' facile convincersi che tale intersezione, se $|M(j\omega_{critica})| = 1$, la funzione passa proprio per il punto $(-1; j0)$, e quindi la determinazione del guadagno critico risulta immediata.

Infatti definita la grandezza $M_{gdB} = |M(j\omega_{critica})|_{dB}$, attribuendo al guadagno in decibel il medesimo valore, il diagramma di Bode dei moduli va ad intersecare l'asse delle ascisse proprio alla pulsazione critica.

Quindi:

$$K_{dB} = M_{gdB} = |M(j\omega_{critica})|_{dB}$$

$$K_{dB} = M_{gdB} = 20 \log |K_{critico}|$$

$$K_{critico} = 10^{\frac{M_{gdB}}{20}} .$$

2.11.2 Secondo caso: Ritardo Critico

Fissato ora un valore qualunque per K , si vuole determinare quale sia il valore del ritardo $\delta_{critico}$. Come il caso precedente si tracciano i diagrammi di Bode della FDT $M(s) = KG'(s)$, considerata col proprio guadagno effettivo e priva del termine esponenziale associato al ritardo temporale, quindi si individua graficamente la pulsazione di attraversamento ω_a e il relativo margine di fase $m_\varphi = \pi + \varphi^*$, supposto per ora > 0 .

L'osservazione da fare è simmetrica rispetto alla situazione precedente:

questa volta il vettore sul piano di Nyquist associato in maniera biunivoca a Bode alla pulsazione considerata, prevede un modulo unitario; ciò significa che se la fase fosse -180° (o $m_\varphi = 0$), la curva passerebbe per il punto critico.

Si richiama il fatto che il ritardo temporale non altera l'andamento dei moduli, ma introduce uno sfasamento proporzionale alla pulsazione secondo l'entità del ritardo stesso, $\varphi_{ritardo} = -\delta\omega$.

Se ora questa grandezza fosse proprio pari in modulo al margine di fase i due contributi si eliderebbero a vicenda, portando esattamente il diagramma delle fasi a transitare per -180° in corrispondenza alla pulsazione di attraversamento.

Dunque

$$m_\varphi = \pi + \varphi^*$$

$$\varphi_{ritardo} = -\delta * \omega \rightarrow |\varphi_{ritardo}| = m_\varphi \text{ da cui si ricava la condizione}$$

$$\delta_{critica} = \frac{m_\varphi}{\omega_a}$$

Nel caso si verifichi la condizione $m_\varphi < 0$, la definizione di un ritardo critico diventa superflua in quanto il sistema presenta un diagramma di Nyquist che comunque abbraccia il punto critico, e quindi è già instabile per propria natura.

Capitolo 3

Criteri di Stabilità per Sistemi con ritardo temporale finito

3.1 Approssimanti di Padé

Qualora sia nota non l'espressione grafica bensì la forma algebrica della FDT in catena aperta con ritardo, è naturale muovere proprio da quest'ultima per lo studio della stabilità del relativo sistema retroazionato.

Si è già detto precedentemente che, dato un qualunque processo del tipo

$$G(s) = G'(s)e^{-\delta s}$$

ad esso è associata una funzione di trasferimento in catena chiusa

$$W(s) = \frac{G'(s)e^{-\delta s}}{1 + G'(s)e^{-\delta s}}$$

al cui denominatore compare un'espressione in forma trascendente, la quale è fonte di molteplici problemi:

- non permette di determinare analiticamente la posizione dei poli del processo nel piano complesso, rendendo di fatto impossibile lo studio della stabilità per via algebrica;
- non permette, qualora il grado del denominatore e/o la difficoltà computazionale lo richieda, di applicare direttamente il criterio di Routh-Hurwitz, ai fini dell'investigazione riguardo alla stabilità del sistema retroazionato;
- non permette di procedere con lo sviluppo in somma di fratti semplici della FDT, e quindi con la conseguente antitrasformazione secondo Laplace, al fine di studiare le risposte nel dominio del tempo del sistema, una volta noti gli ingressi forzanti.

È noto dall'analisi matematica che risulta estremamente utile e comodo poter approssimare una funzione data, quando possibile, con una successione di funzioni facilmente studiabili: se si vuole studiare analiticamente un sistema in retroazione nel cui anello sia compreso un ritardo temporale finito, conviene esprimere tale ritardo con una funzione di più immediata maneggevolezza che lo approssimi, per poter applicare con profitto i metodi forniti dalla Teoria dei Controlli.

A tale scopo si usano correntemente le “approssimanti di Padé”: in matematica, e più precisamente in analisi complessa, l'approssimante di Padé costituisce un metodo di approssimazione di una funzione analitica con una funzione razionale.

Si può considerare una estensione dello sviluppo della funzione in una serie di Taylor troncata (sviluppo limitato) che costituisce una approssimazione della funzione con un polinomio.

Come lo sviluppo troncato in serie di Taylor tende ad una serie di potenze intera, che sotto opportune ipotesi converge alla funzione iniziale, l'approssimante di Padé si può associare ad una successione, poiché si esprime come il troncamento di una frazione continua il cui limite è proprio la funzione iniziale. In questo senso le approssimanti fanno parte della vasta teoria delle frazioni continue.

Più precisamente una funzione razionale $\frac{P(s)}{Q(s)}$, in cui $P(s)$ e $Q(s)$ sono dei polinomi generici di grado p e q , è un'approssimante di Padé di ordine (p, q) della funzione generica $f(s)$, se la serie di potenze di s ottenuta applicando lo sviluppo in serie di Taylor nell'origine alla funzione razionale ha i primi $p + q + 1$ termini uguali a quelli del medesimo sviluppo applicato alla $f(s)$.

Nel caso di una funzione esponenziale il noto teorema

$$f(s) = \sum_{k=0}^{\infty} \frac{f^{(k)}(0)}{k!} s^k$$

applicato alla funzione (analitica) di tipo puramente esponenziale, genera la serie di potenze

$$f(s) = e^{-\delta s} = 1 - \frac{\delta s}{1!} + \frac{(\delta s)^2}{2!} - \frac{(\delta s)^3}{3!} + \frac{(\delta s)^4}{4!} \dots$$

Si può verificare che, posto

$$P(s) \triangleq a_n(\delta s)^n + a_{n-1}(\delta s)^{n-1} + a_{n-2}(\delta s)^{n-2} + \dots + a_0$$

$$Q(s) \triangleq b_d(\delta s)^d + b_{d-1}(\delta s)^{d-1} + b_{d-2}(\delta s)^{d-2} + \dots + b_0$$

i coefficienti delle approssimanti di Padé sono legati ai valori di p e q dalle relazioni

$$a_k = \frac{(p+q-k)! p!}{(p+q)! k! (p-k)!} (-1)^k \quad (k = 0, 1, \dots, p)$$

$$b_k = \frac{(p+q-k)! q!}{(p+q)! k! (q-k)!} (-1)^k \quad (k = 0, 1, \dots, q)$$

Nelle approssimanti di Padé del ritardo finito normalmente si parla di approssimanti di ordine n in quanto si assume $p = q = n$, in particolare le forme approssimanti che si ottengono sono:

-per l'ordine 1, ovvero (1,1)
$$e^{-\delta s} \cong \frac{1-\delta s/2}{1+\delta s/2}$$

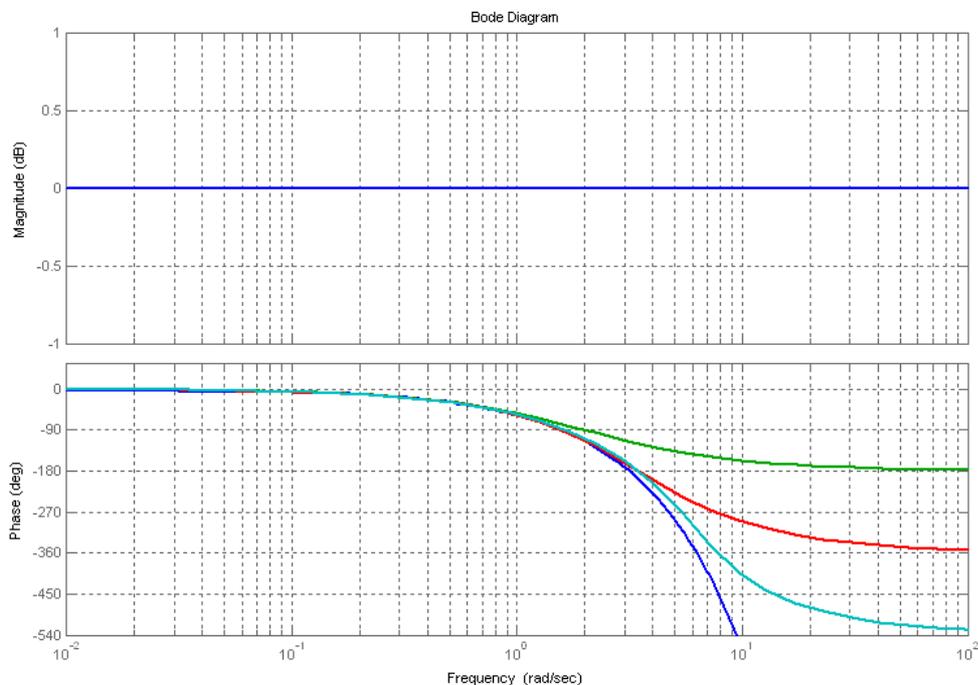
-per l'ordine 2
$$e^{-\delta s} \cong \frac{1-\delta s/2+(\delta s)^2/12}{1+\delta s/2+(\delta s)^2/12}$$

-per l'ordine 3
$$e^{-\delta s} \cong \frac{1-\delta s/2+(\delta s)^2/12-(\delta s)^3/120}{1+\delta s/2+(\delta s)^2/12+(\delta s)^3/120}$$

Le approssimanti di ordine n godono di alcune interessanti proprietà:

- sono funzioni proprie, avendo il medesimo grado al numeratore e denominatore;
- essendo $P(s) = Q(-s)$ gli zeri sono l'immagine speculare rispetto all'asse immaginario dei poli e il modulo della risposta armonica è pari a 1 a tutte le frequenze, esattamente come il modulo della forma esponenziale del ritardo temporale;
- le approssimanti di ordine (n, n) sono sicuramente stabili .

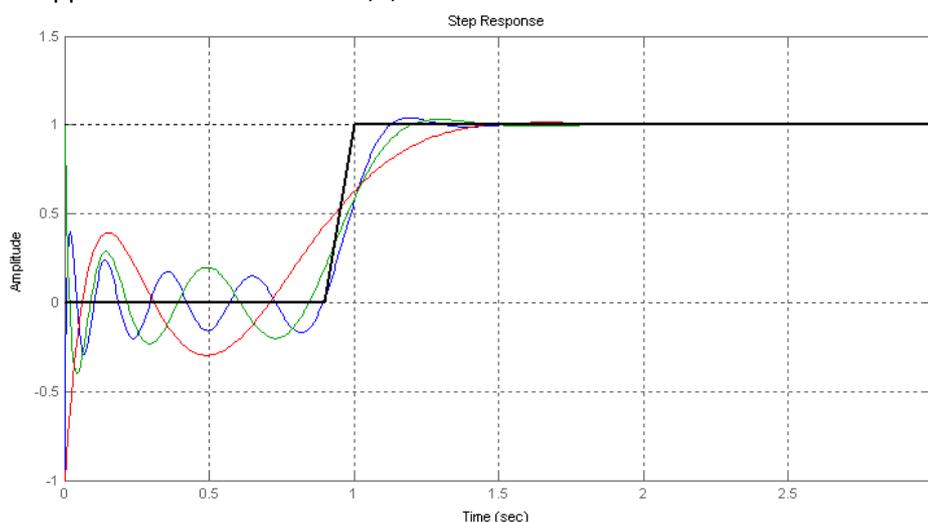
La scelta dell'ordine di approssimazione non può essere determinata in modo aprioristico e arbitrario, bensì va effettuata considerando, caso per caso, il valore del ritardo finito, in rapporto a quelli delle costanti di tempo più significative all'interno dell'anello di retroazione.



Tale tipologia di approssimazioni è limitata dal fatto che è sufficientemente precisa solamente alle basse frequenze, come dimostrano i diagrammi di Bode alla pagina precedente, in quanto per pulsazioni elevate l'errore introdotto nella fase risulta inaccettabile. Si sono tracciate:

- la funzione esatta $f(s) = e^{-s}$ in blu;
- l'approssimante di ordine 1 in verde;
- l'approssimante di ordine 2 in rosso;
- l'approssimante di ordine 3 in celeste.

Vengono quindi riportate le risposte al gradino unitario per la FDT di ritardo puro, e le relative approssimazioni di ordine 3,6,e 9:



Tali andamenti potrebbero sembrare insoddisfacenti, ma considerando che il ritardo è sempre in serie con un sistema (processo o controllore/processo) strettamente proprio (per il requisito di fisica realizzabilità), l'azione filtrante del sistema rende accettabile l'errore di approssimazione.

3.1.1 Esempio

Si consideri infatti come esempio illustrativo il processo caratterizzato dalla seguente FDT in catena aperta

$$G(s) = 1.2 \frac{1}{s(0.01s+1)} e^{-s}$$

Di cui si vuole studiare la risposta al gradino unitario qualora il sistema sia fatto lavorare in retroazione unitaria negativa (curva rossa nella figura a pagina seguente).

Come testé illustrato si procede secondo un approccio algebrico:

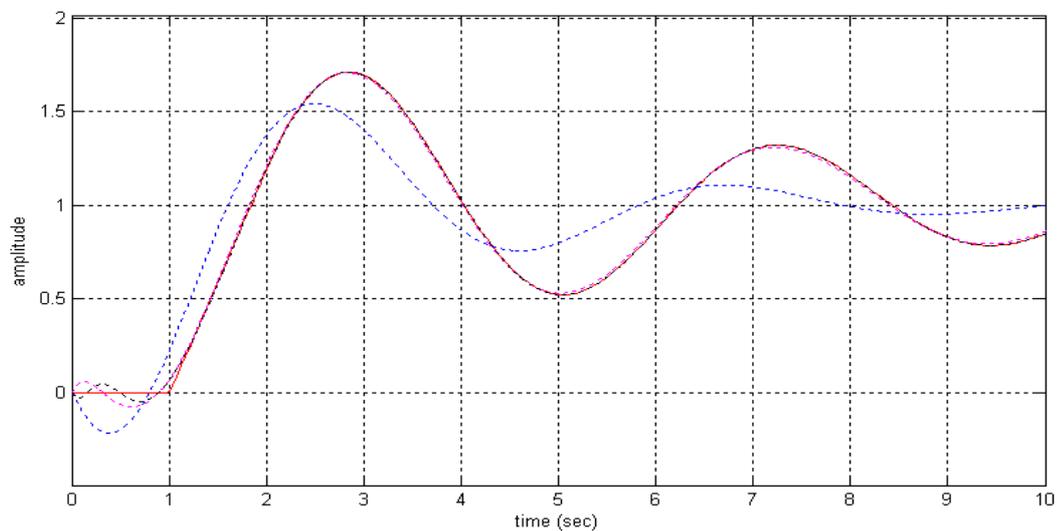
lo stesso sistema viene approssimato secondo gradi differenti di precisione (determinati dall'ordine di troncamento dei polinomi di Padé), con

$$G_1(s) = 1.2 \frac{1}{s(0.01s+1)} \frac{(-s+2)}{(s+2)} \quad \text{relativa risposta al gradino in blu,}$$

$$G_2(s) = 1.2 \frac{1}{s(0.01s+1)} \frac{(s^2-6s+12)}{(s^2+6s+12)} \quad \text{relativa risposta al gradino in violetto,}$$

$$G_3(s) = 1.2 \frac{1}{s(0.01s+1)} \frac{(-s^3+12s^2-60s+120)}{(s^3+12s^2+60s+120)} \quad \text{relativa risposta al gradino in nero.}$$

Le risposte dei sistemi aventi FDT $G_2(s)$ e $G_3(s)$ sono praticamente coincidenti con la curva rossa, eccezion fatta per un breve transitorio iniziale.



Si può vedere come in questo caso un'approssimante troncata al secondo ordine sia sufficiente ad ottenere una verosimiglianza sufficiente nella risposta al gradino.

Ma si può fare qualcosa di più: risulta evidente dalle espressioni di $G_n(s)$, ($n = 1,2,3$), che la FDT del processo in catena aperta è ora nota non più in forma trascendente, ma polinomiale.

Si presta quindi in maniera ottimale ad essere analizzata secondo criteri analitici oltre che grafici: in particolare si può procedere allo studio secondo il criterio di Routh-Hurwitz.

Si individua dunque il denominatore della FDT ottenuta retroazionando $G_2(s)$, semplificando eventuali zeri/poli e riportandosi ad una forma monica, ottenendo

$$\text{denom}(s) = s^4 + 106s^3 + 732s^2 + 480s + 1440$$

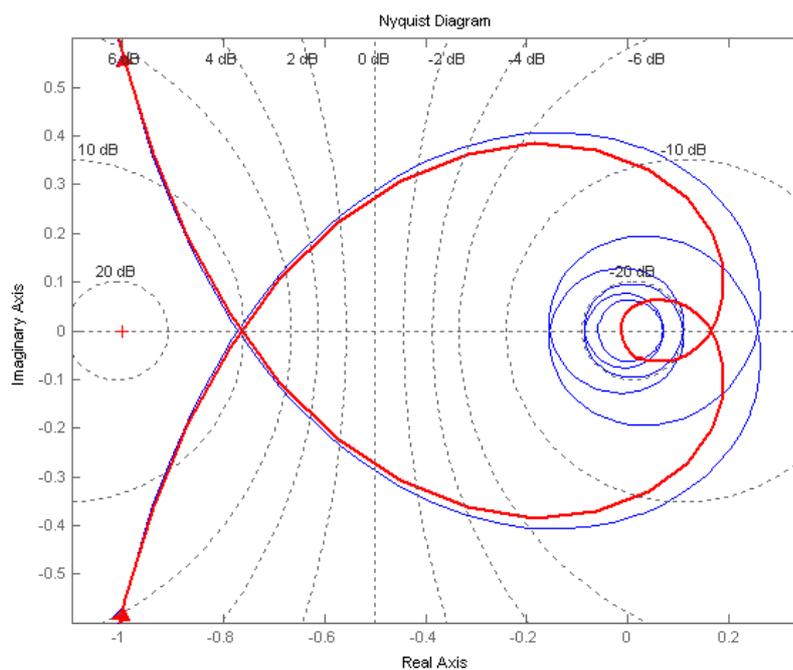
Tabella dei coefficienti di Routh

1	1	732	1440	0
2	106	480	0	0
3	727.5	1440	0	0
4	270.2	0	0	0
5	1440	0	0	0

Il criterio di Routh-Hurwitz, in virtù delle quattro permanenze di segno sulla prima colonna, garantisce l'Hurwizianità del polinomio, ovvero il fatto che le radici siano tutte a parte reale negativa e che quindi il sistema retro azionato sia BIBO stabile.

Le radici di tale polinomio sono infatti

- 98.6259
- 6.9980
- 0.1881 + j 1.4321
- 0.1881 - j1.4321



In figura è stato tracciato in blu il diagramma di Nyquist reale, mentre in rosso quello approssimato secondo la serie di Padé troncata al secondo ordine, per verificare graficamente la bontà del risultato ottenuto algebricamente.

3.2 Criterio di Michailov

Si è visto nel paragrafo precedente che un approccio analitico ai sistemi in cui compaiono ritardi temporali finiti, mediante espansioni troncate di serie approssimanti, presenta notevoli limitazioni e in definitiva limita l'efficacia di tali metodi alle basse frequenze, dove l'approssimazione si mantiene sufficientemente precisa.

Nemmeno i criteri algebrici (quale ad esempio il calcolo esatto dei poli di una FDT) forniscono risultati migliori nell'analisi della stabilità di sistemi che presentano equazioni caratteristiche trascendenti.

Si pensi ad una semplice FDT a cui è associata una risposta in frequenza del tipo

$$W(j\omega) = \frac{1}{1 + e^{j\pi\omega}}$$

che si rivela essere immediatamente un'insidia mortale, in quanto manifesta un numero infinito di poli, in particolare $\forall \omega: \omega = (2z + 1), z \in \mathbb{Z}$.

Ciò conduce alla conclusione generale che gli strumenti di analisi che operano all'interno del dominio della frequenza (quale ad esempio è proprio il criterio di Nyquist) risultano essere più appetibili, in quanto presentano una maggiore semplicità sia concettuale che computazionale, essendo la loro applicazione subordinata al tracciamento di opportune curve su cui si vanno a fare specifiche misure.

Uno di questi metodi è chiamato Criterio di Mikhailov e appartiene alla famiglia dei metodi che applicano il principio dell'argomento per indagare le proprietà di stabilità di un sistema.

Criterio di Mikhailov

Sia dato il seguente polinomio monico (ciò non toglie generalità alle deduzioni seguenti), che può essere interpretato come il denominatore di una qualunque FDT di un sistema retroazionato:

$$P_n(s) = s^n + a_{n-1}s^{n-1} + \dots + a_1s + a_0$$

$$= \prod_i (s - \lambda_i)^{\alpha_i} \prod_i (s^2 + 2\xi_i\omega_{ni}s + \omega_{ni}^2)^{\bar{\alpha}_i}$$

dove si sono separate le radici reali da quelle complesse coniugate, evidenziando per ciascuna di esse la relativa molteplicità. Passando al dominio della frequenza ($s = j\omega$) $P_n(j\omega)$ può essere riscritto evidenziando parte reale e immaginaria:

$$P_n(j\omega) = (a_0 - a_2\omega^2 + a_4\omega^4 - \dots) + j(a_1\omega - a_3\omega^3 + a_5\omega^5 - \dots)$$

È quindi possibile tracciare un diagramma polare di tale polinomio, diagramma che sta alla base del criterio.

Il polinomio $P_n(s)$ ha tutte le radici a parte reale negativa (e quindi la funzione di trasferimento di cui esso rappresenta il denominatore è BIBO stabile) se e solo se:

-il diagramma polare di $P_n(j\omega)$ non attraversa l'origine (non presenta poli immaginari);
 -tale diagramma compie una rotazione di fase antioraria pari a $n\pi/2$ per $\omega \in [0, +\infty)$.

Tale criterio poggia su un'osservazione astutissima: dai diagrammi di Bode è noto che ogni singolo zero reale stabile imprime alla fase una crescita di $+\pi/2$, mentre ogni singola coppia di zeri complessi coniugati stabili imprime una crescita di $+\pi$. Il polinomio, per essere di Hurwitz, deve presentare esclusivamente zeri stabili, e di ciò si ottiene una immediata verifica osservando l'andamento del diagramma polare.

Si vuole ora estendere questo strumento anche all'analisi dei sistemi che manifestano all'interno del processo un ritardo temporale finito.

Si consideri un sistema lineare con ritardo descritto dalla funzione di trasferimento

$$W(s) = \frac{q_0(s) + \sum_{j=0}^{m_2} q_j(s) e^{-\delta_j s}}{p_0(s) + \sum_{i=0}^{m_1} p_i(s) e^{-\varepsilon_i s}} = \frac{N(s)}{D(s)}$$

dove $\delta_j, \varepsilon_i > 0 \forall i, j$ mentre i polinomi di grado non banale $p_i(s)$ e $q_j(s)$ a coefficienti reali hanno una forma del tipo

$$p_0(s) = \sum_{k=0}^n t_{0k} s^k, \quad p_i(s) = \sum_{k=0}^{n_i} t_{ik} s^k, \quad i = 1, 2, \dots, m_1, \quad 0 \leq n_i < n$$

$$q_0(s) = \sum_{k=0}^m u_{0k} s^k, \quad q_j(s) = \sum_{k=0}^{m_j} u_{jk} s^k, \quad j = 1, 2, \dots, m_2, \quad 0 \leq m_j < m$$

dove $t_{0n} \neq 0, u_{0m} \neq 0$.

Il polinomio caratteristico ad esponenti interi positivi del sistema, ovvero il denominatore in una rappresentazione irriducibile della funzione di trasferimento del sistema, dal quale dipendono le proprietà di stabilità, ha una forma generale del tipo

$$D(s) = p_0(s) + \sum_{i=0}^{m_1} p_i(s) e^{-\varepsilon_i s}$$

ed è supposto essere di "tipo ritardato" (retarded type), ovvero soddisfacente la disuguaglianza $\deg p_0(s) > \deg p_i(s), i = 1, 2, \dots, m_1$.

Si assumono anche le condizioni $\deg q_0(s) > \deg q_j(s), j = 1, 2, \dots, m_2, \deg q_0(s) < \deg p_0(s)$.

Queste ipotesi matematiche conseguono dal voler assumere la funzione di trasferimento descrittiva di un processo strettamente proprio (quindi fisicamente realizzabile) e il cui numeratore e denominatore non hanno zeri comuni.

Dalla Teoria dei Controlli (si veda ad esempio Mauro Bisiacco , Maria Elena Valcher – Controlli Automatici – Edizioni Libreria Progetto Padova 2008) è noto il seguente risultato(1):

sia $W(s) = N(s)/D(s)$ una rappresentazione irriducibile di una FDT in retroazione strettamente propria, della forma sopra esposta;
essa risulta BIBO stabile se e solo se la forma polinomio-esponenziale del denominatore non presenta zeri a parte reale non negativa, ovvero $D(s) \neq 0 \quad \forall Re(s) \geq 0$.

Infatti solo in tale caso anti trasformando la FDT si ottengono esclusivamente modi elementari convergenti che rendono sommabile nel dominio del tempo la risposta impulsiva del sistema.

Dal teorema discende immediatamente il seguente lemma.

Lemma 1

La forma quasi polinomiale $D(s)$ non presenta zeri a parte reale non negativa se e solo se tutti i propri zeri rispettano la condizione $|\arg(\lambda)| > \frac{\pi}{2}$, dove $\lambda \in \mathbb{C}$ denota la posizione di un qualunque zero di $D(s)$ nel piano complesso.

Teorema 2 (Criterio di Mikhailov esteso)

Una generica forma quasi polinomiale del tipo $D(s)$ sopra presentato è stabile (ovvero a zeri tutti a parte reale negativa) se e solo se

$$\Delta_{0 \leq \omega < +\infty} \arg D(j\omega) = n \frac{\pi}{2}$$

dove $n > 0$ rappresenta il massimo esponente con cui compare la variabile s (che per le ipotesi fatte, apparterrà a $p_0(s)$), mentre il grafico della funzione $D(j\omega)$, dove $D(j\omega) = D(s)$ per $s = j\omega$ è chiamato il diagramma di Mikhailov generalizzato.

Dimostrazione

Si veda l'appendice A.

Applicare nella pratica questo risultato notevole illustrato nel Teorema 2 risulta per tale classe di funzioni apparentemente impossibile, in quanto:

- $D(j\omega)$ cresce molto rapidamente verso l'infinito per $\omega \rightarrow \infty$, essa è infatti una forma impropria;
- i termini esponenziali associati al ritardo, come si è già potuto osservare più volte in precedenza imprimono per $\omega \rightarrow \infty$ un infinito numero di rotazioni della funzione nel piano complesso, la quale assume una caratteristica a spirale divergente che rende vano ogni tentativo di misurare l'angolo di variazione di fase.

Fortunatamente esiste una strada furbissima per riuscire ad aggirare le difficoltà sopra esposte, ovvero quella di introdurre nel criterio in analisi una nuova attrice, la funzione razionale $\psi(s) = \frac{D(s)}{\omega_r(s)}$, la quale presenta un denominatore del tutto particolare.

$\omega_r(s)$ viene chiamato polinomio di riferimento, ha grado pari al grado massimo (in s) di $D(s)$, che per le ipotesi fatte corrisponde al grado massimo di $p_0(s)$ (trattandosi di sistemi "retarded type") e viene assunto privo di radici instabili, ovvero

$$\omega_r(s) \neq 0 \quad \forall \operatorname{Re}(s) \geq 0.$$

Il polinomio di riferimento assume, ad esempio, la seguente forma:

$$\omega_r(s) = t_{0n}(s + C)^n, \quad C > 0$$

dove t_{0n} e n sono rispettivamente il coefficiente e l'esponente del termine di grado massimo del polinomio $p_0(s)$.

A questo punto si può enunciare un nuovo risultato che è formalmente ancora il Criterio esteso di Mikhailov ma è adattato a una nuova classe di funzioni costruita appositamente per rendere il criterio stesso di utilità applicativa.

Teorema 3

$D(s)$ è stabile se solo se

$$\Delta_{-\infty \leq \omega < +\infty} \arg \psi(j\omega) = 0$$

Dimostrazione

È noto che l'argomento di una funzione razionale complessa può essere espresso come la differenza degli argomenti di numeratore e denominatore, una volta che quest'ultimi siano stati espressi in notazione polare, quindi

$$\Delta_{-\infty \leq \omega < +\infty} \arg \psi(j\omega) = \Delta_{-\infty \leq \omega < +\infty} \arg D(j\omega) - \Delta_{-\infty \leq \omega < +\infty} \arg \omega_r(j\omega)$$

Il polinomio di riferimento $\omega_r(s)$, per come è stato definito, presenta lo stesso grado di $D(s)$, ed è stato costruito per avere solo zeri stabili.

Quindi affinché la forma quasi polinomiale $D(s)$ sia anch'essa Hurwitz, è condizione necessaria e sufficiente che

$$\Delta_{-\infty \leq \omega < +\infty} \arg D(j\omega) = \Delta_{-\infty \leq \omega < +\infty} \arg \omega_r(j\omega)$$

Questa identità implica la correttezza del teorema sopra citato, come volevasi dimostrare.

La condizione del Teorema 3 è rispettata se e solo se il diagramma generalizzato modificato di Mikhailov $\psi(j\omega)$ non forma circonferenze attorno l'origine del piano complesso quando ω percorre il proprio dominio \mathbb{R} da $-\infty$ a $+\infty$.

Questo perché, per come è stata definita la funzione $\psi(j\omega)$, è immediato rendersi conto che

$$\lim_{\omega \rightarrow \pm\infty} \psi(j\omega) = \lim_{\omega \rightarrow \pm\infty} \frac{D(j\omega)}{\omega_r(j\omega)} = 1$$

Da tale osservazione discende un lemma di estrema praticità per una discriminazione preventiva e rapida tra processi che manifestano stabilità BIBO e quelli che non la possiedono.

Lemma 2

La forma quasi polinomiale fratta $W(s)$ non è BIBO stabile se

$$\psi(0) = \frac{D(0)}{\omega_r(0)} = \frac{t_{0,0} + t_{1,0} + \dots + t_{m_1,0}}{t_{0,n}} < 0 .$$

Dimostrazione

Non è difficile convincersi di tale affermazione, la quale discende immediatamente dalla combinazione del Teorema 3 e dell'osservazione precedentemente fatta sul comportamento di $\psi(j\omega)$ al tendere di ω all'infinito: infatti il diagramma partendo e arrivando nella stessa coordinata $(1 + j0)$ sul piano complesso, se dovesse attraversare il semiasse reale negativo, manifesterebbe una variazione di fase

$$\Delta_{-\infty \leq \omega < +\infty} \arg \psi(j\omega) = k2\pi$$

dove k corrisponde al numero di volte che il diagramma taglia il suddetto semiasse, in disaccordo con la condizione posta dal Teorema 3, come volevasi dimostrare.

3.3 Criterio di Hermite Biehler

Il criterio di Hermite-Biehler appartiene anch'esso alla famiglia degli strumenti di analisi di stabilità che operano all'interno del dominio della frequenza, offrendo un'interessante approccio al problema.

Il criterio muove da una serie di considerazioni analitiche che portano a delle conseguenze visibili graficamente, ed è dall'osservazione di queste conseguenze che si può stabilire o meno l'Hurwizianità di una forma polinomiale e/o quasi polinomiale.

Si consideri la generica forma polinomiale di grado n a coefficienti reali

$$P_n(s) = \sum_{i=0}^n a_i s^i$$

Passando al dominio della frequenza ($s = j\omega$), $P_n(j\omega)$ può essere riscritto evidenziando parte reale e immaginaria, che rispettivamente raccolgono le potenze ad esponente pari e quelle ad esponente dispari

$$P_n(j\omega) = (a_0 - a_2\omega^2 + a_4\omega^4 - \dots) + j(a_1\omega - a_3\omega^3 + a_5\omega^5 - \dots) = p(\omega) + jq(\omega),$$

Si definiscano con la generica nomenclatura $\omega_{re(i)}$ e $\omega_{im(j)}$ le radici delle forme polinomiali $p(\omega)$ e $q(\omega)$.

Teorema di Hermite-Biehler

La forma polinomiale $P_n(s)$ è di Hurwitz se e solo se:

- tutti gli zeri di $p(\omega)$ e $q(\omega)$ sono reali e distinti;
- gli zeri reali positivi di $p(\omega)$ e $q(\omega)$ soddisfano la seguente proprietà di 'interallacciamento'

$$0 = \omega_{im1} < \omega_{re1} < \omega_{im2} < \omega_{re2} < \omega_{im3} < \dots < \begin{cases} \omega_{re(n)} & n \text{ pari} \\ \omega_{im(n)} & n \text{ dispari} \end{cases}$$

-se $a_0 > 0$ allora $q(\omega_{re1}) > 0$, se $a_0 < 0$ allora $q(\omega_{re1}) < 0$

Dimostrazione

Si dimostra che le condizioni imposte dal teorema per l'Hurwizianità di una forma polinomiale discendono necessariamente ed esclusivamente dall' Hurwizianità stessa di una forma polinomiale.

E' noto che un polinomio di Hurwitz può essere scritto come

$$P_n(s) = \prod_{j=1}^m (s - \lambda_j)^{\mu_j}$$

dove $\lambda_j \in \mathbb{C}$, $\sum_{j=1}^m \mu_j = n$ e tutti i λ_j appartengono al semipiano aperto sinistro (escluso l'asse immaginario).

Nel dominio della frequenza, dove ($s = j\omega$), per $\omega \in]0; +\infty[$ è noto che ogni polo semplice stabile provoca un incremento della fase della funzione $P_n(j\omega)$ pari a $\pi/2$;

ciò significa che un polinomio di grado n , se di Hurwitz, presenta n radici a parte reale negativa, a cui corrisponde una rotazione della fase della corrispondente funzione di incognita $j\omega$ pari a $n\pi/2$.

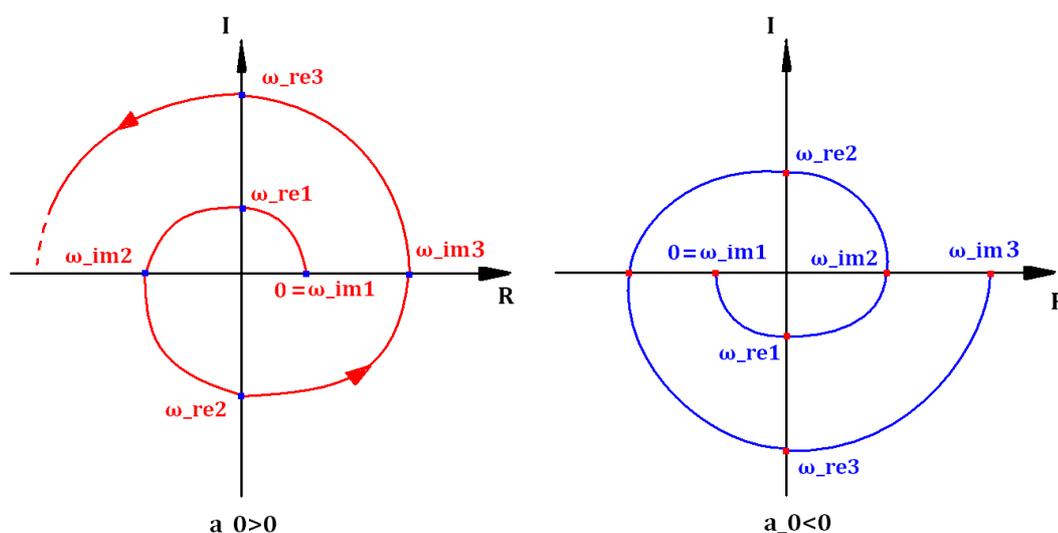
Essendo i polinomi a coefficienti reali, è sempre verificato che $P_n(0) = a_0$, $a_0 \in \mathbb{R}$.

dalle osservazioni fatte è immediato dedurre che il comportamento della curva di Nyquist di $P_n(j\omega)$, per $j\omega \in]0; +\infty[$ può essere qualitativamente solamente di due tipi, riportati a pagina seguente.

Ricordando la decomposizione di $P_n(j\omega)$ come $P_n(j\omega) = p(\omega) + jq(\omega)$, è possibile pensare $p(\omega)$ e $jq(\omega)$ in funzione del diagramma di Nyquist, di cui rappresentano la coppia

di coordinate cartesiane che individuano ogni singolo punto della curva nel piano complesso.

I punti evidenziati sugli assi in figura meritano particolare attenzione, infatti essi rappresentano le radici di $p(\omega)$ quando tali punti sono collocati sull'asse complesso e le radici di $q(\omega)$ quando sono collocati sul asse reale: tali punti infatti per intercettare gli assi devono avere una delle due coordinate nulle, ed essendo le coordinate delle forme polinomiali, il valore di ω che porta il diagramma di Nyquist ad intercettare l'asse è anche radice di uno dei due polinomi.



Essendo poi $P_n(0) \in \mathbb{R}$, $P_n(0) = p(0) + jq(0)$ è immediato che $q(0) = 0$, e che quindi il valore nullo rappresenta sempre una radice di $q(\omega)$.

Ricordando che la curva di Nyquist è orientata per $j\omega \in]0; +\infty[$, non è difficile convincersi che considerando le funzioni polinomiali $p(\omega)$ e $q(\omega)$ sul semipiano positivo cartesiano, esse devono manifestare un numero di passaggi per l'asse positivo delle ascisse pari a n ed in particolare tali passaggi devono ubbidire alla regola dell'interlacciamento, in quanto tale regola nasce direttamente dall'esigenza di una crescita monotona di fase per polinomi che siano di Hurwitz, come discusso all'inizio della dimostrazione.

La terza condizione imposta dal teorema serve a scongiurare un caso patologico: infatti se il polinomio dovesse presentare solo radici a parte reale positiva, in virtù della simmetria Hermitiana della funzione $P_n(j\omega)$ il diagramma di Nyquist sarebbe simmetrico rispetto all'asse reale rispetto a quelli presentati in figura: le prime due condizioni sarebbero soddisfatte, ma non la terza, la quale impone un senso di rotazione antiorario della curva. Come volevasi dimostrare.

3.3.1 Esempio

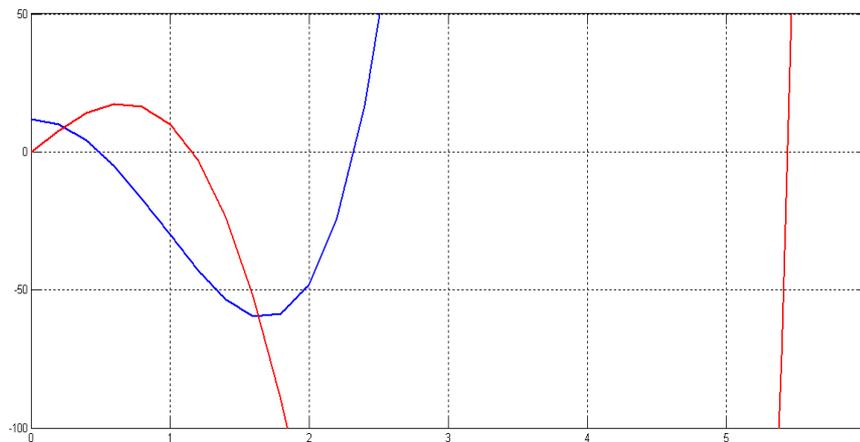
Si consideri il polinomio

$$P_5(s) = s^5 + 9s^4 + 31s^3 + 51s^2 + 40s + 12 = (s + 1)^2(s + 2)^2(s + 3),$$

costruito appositamente per presentare solo poli a parte reale negativa.

Per $s = j\omega$ si ha

$$P_5(j\omega) = (9\omega^4 - 51\omega^2 + 12) + j(\omega^5 - 31\omega^3 + 40\omega) = p(\omega) + jq(\omega).$$



Si fornisce qui sopra un dettaglio dell' andamento dei polinomi $p(\omega)$ e $q(\omega)$ al variare di ω : $p(\omega)$ è tracciato in blu, mentre $q(\omega)$ è tracciato in rosso.

Si noti come gli zeri siano interallacciati, in accordo con la crescita monotona della fase della funzione $P_5(j\omega)$ la quale è di Hurwitz per ipotesi.

L'estensione alle forme quasi polinomiali è immediata.

Si consideri la generica forma quasi polinomiale a coefficienti reali

$$\begin{aligned} G(s) &= d(s) + \sum_{i=1}^m \sum_{j=0}^m a_{ij} s^j e^{-r_i s} \\ &= d(s) + f_0(s) e^{-r_0 s} + f_1(s) e^{-r_1 s} + \dots + f_m(s) e^{-r_m s} \end{aligned}$$

dove il polinomio $d(s)$ ha grado n , mentre $f_j(s)$ sono dei polinomi i cui gradi rispettano $m < n$. Si considera quindi solo la tipologia 'retarded' che come si può verificare nell'appendice A presenta sempre un numero di radici finito e pari a n .

Senza perdita di generalità, si assume che i coefficienti reali presenti negli argomenti dei termini esponenziali rispettino la disuguaglianza $r_m > r_{m-1} > \dots > r_1 > r_0$.

Teorema di Hermite-Biehler esteso

Si consideri la generica forma quasi polinomiale $G(s)$.

Ricordando la relazione di Eulero per i numeri complessi $e^{j\theta} = \cos(\theta) + jsin(\theta)$, si può scomporre la forma quasi polinomiale nella seguente modalità:

$$G(j\omega) = G_r(\omega) + jG_i(\omega)$$

in cui $G_r(\omega)$ e $G_i(\omega)$, $\omega \in \mathbb{R}$, rappresentano rispettivamente le parti reale e immaginaria di $G(j\omega)$.

Se tutti gli zeri di $G(s)$ sono collocati nel semipiano complesso sinistro (escluso l'asse immaginario), allora:

-tutte le radici di $G_r(\omega)$ e $G_i(\omega)$ sono reali, di molteplicità unitaria e godono della proprietà di Interallacciamento

$$0 = \omega_{im1} < \omega_{re1} < \omega_{im2} < \omega_{re2} < \omega_{im3} < \dots < \begin{cases} \omega_{re(n)} & n \text{ pari} \\ \omega_{im(n)} & n \text{ dispari} \end{cases}$$

-vale la condizione

$$G_{fase}(\omega) = G'_i(\omega)G_r(\omega) - G_i(\omega)G'_r(\omega) > 0 \quad \forall \omega \in] - \infty; +\infty[$$

dove $G'_i(\omega)$ e $G'_r(\omega)$ indicano le derivate prime in ω delle funzioni $G_r(\omega)$ e $G_i(\omega)$.

Dimostrazione

Si rimanda alla dimostrazione del criterio ridotto per ciò che concerne il legame tra andamento del diagramma di Nyquist attraverso i quadranti e proprietà di interallacciamento degli zeri di $G_r(\omega)$ e $G_i(\omega)$ nel piano cartesiano.

La condizione $G_{fase}(\omega) > 0 \quad \forall \omega \in] - \infty; +\infty[$ implica che la fase di $G(j\omega)$ è una funzione strettamente crescente, infatti

$$\frac{d}{d\omega} \left(\tan^{-1} \frac{G_i(\omega)}{G_r(\omega)} \right) > 0 \Leftrightarrow \frac{1}{1 + \left(\frac{G_i(\omega)}{G_r(\omega)} \right)^2} \left[\frac{G'_i(\omega)G_r(\omega) - G_i(\omega)G'_r(\omega)}{G_r(\omega)^2} \right] > 0$$

Le condizioni poste al teorema determinano una curva di Nyquist alla quale può essere applicato il criterio esteso di Michailov il quale stabilisce che una generica forma quasi polinomiale del tipo $G(s)$ è stabile se e solo se

$$\Delta_{0 \leq \omega < +\infty} \arg G(j\omega) = n \frac{\pi}{2}$$

Dove $n > 0$ rappresenta il massimo esponente con cui compare la variabile s .

Dunque il criterio esteso di Michailov garantisce che un sistema di tipo retarded a fase monotona crescente che goda della proprietà di interallacciamento degli zeri sia di Hurwitz, come volevasi dimostrare.

Osservazione

Per una dimostrazione esaustiva del teorema di Hermite-Biehler esteso si rimanda all'opera di Guillermo J. Silva, Aniruddha Datta, S.R Bhattacharyya- *PID Controllers for Time-Delay Systems*- Birkhauser Boston 2005.

Tale criterio, pur essendo adottabile anche nello studio dei sistemi dotati di ritardo, risulta di applicazione più complicata rispetto ai ben più noti e rapidi criteri di Nyquist e Michailov, dove esclusivamente tracciando una curva nel piano complesso parametrizzata sulla pulsazione ω , si può visivamente dedurre le caratteristiche di stabilità o meno del sistema in analisi.

Il criterio di Hermite-Biehler invece, richiede la scomposizione manuale della forma quasi polinomiale in parte reale e immaginaria, quindi il tracciamento delle tre curve $G_r(\omega)$, $G_i(\omega)$, e $G_{fase}(\omega)$, procedimento quindi che sulla carta risulta richiedere maggior tempo ed esigere una maggiore complessità computazionale, anche ai fini delle implementazioni numeriche sugli elaboratori elettronici.

Appendice A

Dimostrazione del Criterio di Michailov esteso

Si consideri la generica forma quasi polinomiale di grado n a coefficienti reali

$$G(s) = a_{1n}s^n + \sum_{i=1}^m \sum_{j=0}^{n-1} a_{ij}s^j e^{-r_i s} = 0$$

a cui viene imposta la condizione $a_{1n} \neq 0$ per avere il termine $a_{1n}s^n$, detto *termine conduttore*, esistente e non affetto da ritardo: tale ipotesi restrittiva è condizione necessaria e sufficiente affinché il sistema in esame sia di tipo "retarded".

Senza perdita di generalità, si assume che i coefficienti reali presenti negli argomenti dei termini esponenziali rispettino la disuguaglianza $r_m > r_{m-1} > \dots > r_1 > 0$.

In un ottica generale $G(s)$ potrà contenere un numero infinito di zeri, i quali formano una catena di soluzioni divergente, e ciò è possibile a causa dell'andamento periodico dei valori della funzione esponenziale nel piano complesso.

Si pensi alla forma quasi polinomiale $G(s) = -1 + e^{\pi s}$, $s \in \mathbb{C}$: essa presenta tutti e soli gli zeri del tipo $s = 2z + j0$, $z \in \mathbb{Z}$, i quali formano una catena di soluzioni lungo l'asse reale del piano complesso, catena di valore iniziale (scelto arbitrariamente) $0 + j0$ e passo $2 + j0$ che diverge all'infinito in entrambe le direzioni dell'asse.

La peculiarità dei sistemi di tipo "retarded" è di non presentare mai questa tipologia di classe di soluzioni, di cui si è appena fornito un semplice esempio, come è dimostrato dal seguente

Teorema 1

Si consideri la forma quasi polinomiale $G(s)$. Si ponga per compattezza di notazione

$$M = \sup_{j=0,1 \dots n-1} \sum_{i=1}^m \frac{|a_{ij}|}{|a_{1n}|}$$

Allora nel semipiano destro, incluso l'asse immaginario, $G(s)$ ha al massimo un numero finito di zeri i quali giacciono all'interno di un semicerchio aperto di raggio $M + 1$ centrato nell'origine.

Dimostrazione

Si consideri un punto qualunque s non incluso in tale semicerchio, i.e. $|s| \geq (M + 1)$.
Vale dunque

$$|G(s)| = \left| a_{1n}s^n + \sum_{i=1}^m \sum_{j=0}^{n-1} a_{ij}s^j e^{-r_i s} \right| \geq |a_{1n}s^n| - \left| \sum_{i=1}^m \sum_{j=0}^{n-1} a_{ij}s^j e^{-r_i s} \right|,$$

$$\geq |a_{1n}||s|^n - \sum_{i=1}^m \sum_{j=0}^{n-1} |a_{ij}| |s|^j |e^{-r_i s}| \geq |a_{1n}||s|^n - \sum_{i=1}^m \sum_{j=0}^{n-1} |a_{ij}| |s|^j$$

dove nei passaggi si è utilizzata la disuguaglianza di Chauchy-Schwartz-Bunyakovsky.

Gli esponenziali possono essere trascurati per le seguenti ragioni:

scomponendo s in parte reale ed immaginaria, $s = \sigma + j\omega$, dato che si sta analizzando il comportamento di $G(s)$ nel semipiano aperto destro, per $|s| \geq (M + 1)$, è sicuramente vero che $\sigma > 0$.

Ricordando che per ipotesi $r_i > 0$, $i = 1, 2, \dots, m$ le forme esponenziali, soddisfano dunque

$$|e^{-r_i s}| = |e^{-r_i(\sigma + j\omega)}| \geq |e^{-\sigma r_i}| |e^{-j\omega r_i}| < 1,$$

in quanto l'esponenziale immaginario puro ha sempre modulo unitario, mentre l'esponenziale reale presenta sempre un argomento negativo: risulta così giustificata l'ultima disuguaglianza relativa a $G(s)$.

Adottando la notazione compatta sopra definita, e impiegando la nota espressione della somma dei primi n termini della serie geometrica di ragione $|s|$, si ottiene

$$|G(s)| \geq |a_{1n}||s|^n - \sum_{i=2}^m |a_{in}| |s|^n - \sum_{j=0}^{n-1} \left(\sum_{i=1}^m |a_{ij}| \right) |s|^j,$$

$$\geq |a_{1n}| \left[|s|^n - M \sum_{j=0}^{n-1} |s|^j \right] \geq |a_{1n}| \left[|s|^n - M \frac{(|s|^n - 1)}{(|s| - 1)} \right]$$

$$\geq |a_{1n}| \frac{\{|s|^n[|s| - (M + 1)] + M\}}{|s| - 1} > 0.$$

Questo certamente prova che $G(s)$ non ha zeri di modulo maggiore o uguale a $M+1$.

Se $G(s)$ avesse avuto un numero infinito di zeri nel semipiano complesso di destra, questi per effetto della periodicità dei termini esponenziali avrebbero formato una catena

infinita di soluzioni collocate nel semipiano complesso di destra in posizioni via via tendenti ad infinito, in contraddizione con la condizione $|G(s)| > 0$ che prevede l'assenza di zeri per $s \geq M + 1$. Come volevasi dimostrare.

L'espressione di $G(s)$ può inoltre essere riscritta raccogliendo il termine conduttore, nel seguente modo

$$G(s) = a_{1n}s^n(1 + \Psi(s))$$

dove si è posto per compattezza di notazione

$$\Psi(s) = \sum_{i=2}^m \sum_{j=0}^{n-1} \left(\frac{a_{ij}}{a_{1n}} \right) s^{j-n} e^{-r_i s}$$

Si noti che, per $|s| \geq 1$, è sempre vera la disuguaglianza $|\Psi(s)| < 1$: in particolare, ai fini delle successive deduzioni, ciò è vero nel semipiano destro, privato del semicerchio aperto di raggio unitario.

Dimostrato il fatto che una funzione quasi polinomiale di tipo "retarded" può avere al massimo un numero finito di zeri nel semipiano complesso destro, ha senso procedere ora con l'estensione del Criterio di Mikhailov .

Teorema 2

Si consideri la forma quasi polinomiale $G(s)$. Si ponga per compattezza di notazione

$$M = \sup_{j=0,1 \dots n-1} \sum_{i=1}^m \frac{|a_{ij}|}{|a_{1n}|}$$

Se $G(s)$ non presenta zeri immaginari ¹, allora vale la seguente relazione

$$N = \frac{n}{2} - \frac{1}{2\pi} \Delta_{-jy < s < +jy} \arg G(s) + \frac{1}{2\pi} [\arg(1 + \Psi(jy)) - \arg(1 + \Psi(-jy))]$$

dove n è il grado massimo associato alla forma quasi polinomiale, N rappresenta il numero di zeri della $G(s)$ nel semipiano complesso destro (a parte reale positiva, avendo escluso la presenza di zeri immaginari), $y \in \mathbb{C}$ è un numero qualunque tale che $|y| \geq (M + 1)$, grande a sufficienza in modo che $|\Psi(s)| < 1$ quando $|s| \geq y$.

¹ È noto che quando s percorre l'asse immaginario da $-j\infty$ a $+j\infty$, il diagramma di $G(s)$ nel piano complesso attraversa l'origine degli assi ogni volta che la funzione presenta uno zero immaginario.

Dimostrazione

Si consideri un contorno semicircolare Z orientato in senso antiorario che consiste di una semicirconferenza β centrata nell'origine di raggio y da $-jy$ a jy , e del tratto dell'asse immaginario compreso tra $+jy$ e $-jy$. Per ipotesi $G(s)$ non presenta zeri immaginari.

Percorrendo la curva orientata Z e utilizzandola come dominio della funzione $G(s)$, il teorema dell'indicatore logaritmico applicato a $G(s)$ assicura che tale funzione percorrerà un numero di giri orari intorno all'origine pari al suo numero di zeri a parte reale positiva (visto come si è scelto il percorso).

Ciò equivale a dire che l'argomento di $G(s)$ subirà una variazione, percorrendo Z , pari a $2\pi N$.

Vale quindi la relazione

$$N = \frac{1}{2\pi} \Delta_{\beta} \arg G(s) - \frac{1}{2\pi} \Delta_{-jy < s < +jy} \arg G(s)$$

dove Δ_{β} denota la variazione netta nell'argomento di $G(s)$ percorrendo la semicirconferenza orientata.

Il contributo negativo deriva dalla scelta di dividere il percorso chiuso in due contributi, il secondo dei quali considerato come percorso in senso orario.

Applicando la scomposizione prima formulata $G(s) = a_{1n} s^n (1 + \Psi(s))$ si vede che

$$\Delta_{\beta} \arg G(s) = n \Delta_{\beta} \arg s + \Delta_{\beta} \arg(1 + \Psi(s))$$

$$\Delta_{\beta} \arg G(s) = n \pi + \arg(1 + \Psi(jy)) - \arg(1 + \Psi(-jy))$$

L'ultimo passaggio si spiega col fatto che la funzione $1 + \Psi(s)$ non può compiere rotazioni intorno all'origine: avendo infatti scelto y in modo che $|\Psi(y)| < 1$ per $|s| \geq y$, nel percorrere la semicirconferenza la parte reale di $1 + \Psi(s)$ sarà sempre maggiore di zero, vincolando l'argomento alla condizione $\arg(1 + \Psi(s)) \in]-\pi/2; \pi/2[$. Sostituendo l'ultima espressione di $\Delta_{\beta} \arg G(s)$ nella prima relazione della dimostrazione, si ottiene l'enunciato del teorema. Come volevasi dimostrare.

Corollario 1

Si consideri la forma quasi polinomiale $G(s)$. Se la funzione $G(s)$ non ha zeri immaginari vale

$$N = \frac{n}{2} - \frac{1}{\pi} \Delta_{0 \leq s < +jy} \arg G(s) + \frac{1}{\pi} [\arg(1 + \Psi(jy))]$$

In particolare $N = 0$ se solo se

$$\Delta_{0 \leq s < +jy} \arg G(s) = \frac{n \pi}{2} + \arg(1 + \Psi(jy))$$

Dimostrazione

La prima affermazione discende immediatamente dal fatto che essendo a coefficienti reali, la forma quasi polinomiale gode della simmetria Hermitiana e quindi, in particolare, $1 + \Psi(-jy)$ è il coniugato di $1 + \Psi(jy)$. La seconda affermazione è un caso particolare della prima.

Corollario 2

Si consideri la forma quasi polinomiale $G(s)$. Se la funzione $G(s)$ non ha zeri immaginari, allora vale

$$N = \frac{n}{2} - \frac{1}{\pi} \Delta_{0 \leq s < +j\infty} \arg G(s)$$

In particolare $N = 0$ se solo se

$$\Delta_{0 \leq s < +j\infty} \arg G(s) = \frac{n\pi}{2}$$

Dimostrazione

Per $|s| \rightarrow \infty$, la funzione $(1 + \Psi(s)) \rightarrow 1$, e quindi il termine $\arg(1 + \Psi(jy))$ tende a zero. La seconda affermazione è un caso particolare della prima.

Il Corollario 2 giustifica la relazione assunta come valida nel Criterio esteso di Mikhailov.

Bibliografia:

- Mauro Bisiacco, Maria Elena Valcher, *Controlli Automatici*, edizioni Libreria Progetto Padova, 2008.
- Giovanni Marro, *Controlli Automatici*, Zanichelli editore, 2004.
- Umberto Viaro, Antonio Lepschy, *Guida allo studio dei Controlli Automatici*, Pàtron editore, 1986.
- Alessandro Pisano, *Sistemi con ritardo: appunti di Controlli Automatici, versione 1.0*.
- Carlo Minnaja, *Complementi di Matematica*, materiale didattico del corso di Complementi di Matematica tenuto presso l'Università degli Studi di Padova, Laurea magistrale in Ingegneria Elettrotecnica.
- Zanasi Roberto, *Controlli Automatici*, materiale didattico dell'omonimo corso tenuto presso l'università degli Studi di Modena e Reggio Emilia.
- Mariagrazia Dotoli, *Controlli Automatici*, materiale didattico dell'omonimo corso tenuto presso il Politecnico di Bari.
- Gianni Bianchini, Alberto Tesi, *Progetto dei sistemi di controllo*, materiale didattico dell'omonimo corso tenuto presso l'Università degli Studi di Siena.
- Aurelio Piazzi, *Controlli Automatici A*, materiale didattico dell'omonimo corso tenuto presso l'università degli Studi di Parma.
- Armando Careri, *Approssimanti di Padé*, Tesi di Laurea in Matematica svolta sotto la guida del relatore Dr. Francesco Dell'Accio durante l'anno Accademico 2004-2005 e depositata presso la Facoltà di Scienze Matematiche, Fisiche e Naturali dell'Università degli Studi della Calabria.

- Alberto Tonielli, *Controlli automatici*, , materiale didattico dell'omonimo corso tenuto presso l'Università degli Studi di Bologna.
- Lorenzo Cioni, *La Trasformata di Laplace*, 26 giugno 2009 Dipartimento di Ingegneria della produzione termoeenergetica e modelli matematici (DIPTM), Università di Genova e Dipartimento di Informatica, Università di Pisa.
- *Criteri di stabilità, versione 1.2*, Dispensa liberamente scaricabile all'indirizzo www.ing.unisi.it/~control/psc/dispense/ , e messa a disposizione dal Polo di Ingegneria dell'Università degli Studi di Siena, per i corsi di Automatica.
- Wikipedia L'enciclopedia libera, it.wikipedia.org

Bibliografia specifica riguardante il criterio di Michailov:

- M. BUSŁOWICZ, *Stability of linear continuous-time fractional order systems with delays of the retarded type*, Bulletin of the Polish Academy of Sciences, Technical Sciences Vol. 56, No. 4, 2008.
- Allan M. Krall, *On the Michailov Criterion for Exponential Polynomials*, PENNSYLVANIA STATE UNIVERSITY, University Park, Pa. MAY 1966.
- Kenneth L. Cooke, Pauline Van Den Driessche, *On Zeroes of some Transcendental Functions*, Funkcialaj Ekvacioj (1986) 77-90.

Bibliografia specifica riguardante il criterio di Hermite-Biehler:

- Guillermo J. Silva, Aniruddha Datta, S.R Bhattacharyya, *PID Controllers for Time-Delay Systems*, Birkhauser Boston • Basel • Berlin 2005.
- R. Farkh, K. Laabidi, M. Ksouri, *PI Control for Second Order Delay System with Tuning Parameter Optimization*, International Journal of Electrical, Computer, and Systems Engineering 3:1 2009.