

UNIVERSITÀ DI PADOVA

DIPARTIMENTO DI TECNICA E GESTIONE

Laurea Magistrale in Ingegneria dell'Innovazione del Prodotto

**Sviluppo di nuove soluzioni analitiche per le distribuzioni
di tensione ed energia in solidi ortotropi con variazioni
geometriche**

Supervisore: Ch.mo Prof. Michele Zappalorto

Candidato: Matteo Pastrello

Anno Accademico 2019/2020

Sommario

In questo progetto di tesi l'obiettivo sarà di formulare una soluzione analitica innovativa per piastre intagliate in materiale ortotropo. L'intaglio analizzato sarà l'intaglio di Neuber.

L'elaborato inizierà con una breve presentazione della teoria piana nei materiali ortotropi, illustrando l'equazione differenziale che governa l'elasticità ortotropa nonché la struttura delle tensioni per un qualsiasi materiale di questo tipo.

Si passerà quindi alla modellazione analitica dell'intaglio analizzato, mostrando la mappa conforme utilizzata e gli adattamenti apportati dalla teoria ortotropa a questa distorsione.

Il seguente capitolo servirà all'esposizione della soluzione più avanzata in letteratura per queste ipotesi, la quale servirà da benchmark per le nuove soluzioni create.

Il corpo principale di questo lavoro sarà la descrizione del processo usato per la ricerca di queste nuove soluzioni. Si dividerà in una parte di valutazioni preliminari, in cui si elencheranno le ipotesi di lavoro, le assunzioni fatte e le principali strategie di imposizione di condizioni al contorno; una parte dedicata al Modo I, analizzando per due materiali con comportamenti opposti l'andamento delle varie soluzioni proposte rispetto alla soluzione in letteratura; e a seguire una parte dedicata al Modo II in cui si genererà una soluzione gemella a quella moderna per il Modo I che sarà poi confrontata con le soluzioni avanzate ottenute con i metodi innovativi proposti. A seguire il capitolo dedicato all'intaglio a V raccordato, in cui si confronteranno i nuovi modelli proposti con i risultati agli elementi finiti per questo intaglio, più comune in ambito industriale.

L'ultimo problema presentato è quello dell'intaglio raccordato bi-materiale in cui si analizzeranno risultati agli elementi finiti per diversi intagli, proponendo diverse strategie per costruire un modello analitico per la ricerca di una soluzione

Il capitolo finale sarà dedicato alle conclusioni in cui si esporranno le soluzioni migliori trovate nelle diverse condizioni analizzate, con relativi punti di forza e criticità, ricercando pattern significativi per cercare di creare una metodologia di analisi per lo studio di future soluzioni a questa tipologia di problemi.

Indice

Sommario	I
Indice	III
Lista delle figure	V
Lista delle tabelle	XI
Introduzione	XIII
1 Teoria piana per materiali ortotropi	1
2 Descrizione analitica dell'intaglio	4
3 Soluzioni analitiche del problema a Modo I	6
3.1 Presentazione della soluzione esistente	6
3.2 Ricerca soluzione migliorativa	8
3.3 Valutazioni preliminari	9
3.4 Soluzione con potenziali a 2 termini, condizioni al contorno per $\theta = \frac{\gamma}{2}$ (Tentativo 1)	13
3.4.1 Materiale 1	15
3.4.2 Materiale 2	18
3.5 Soluzione con potenziali a 2 termini, condizioni al contorno per $\theta = \frac{3\gamma}{4}$ (Tentativo 2)	21
3.5.1 Materiale 1:	21
3.5.2 Materiale 2:	24
3.6 Soluzione con potenziali a 2 termini, condizioni al contorno di gruppo 2 (Tentativo 3)	28
3.6.1 Materiale 1	29
3.6.2 Materiale 2	32
3.7 Soluzione con potenziali a 3 termini, condizioni al contorno di gruppo 2 (Tentativo 4)	35
3.7.1 Materiale 1	36

3.7.2	Materiale 2.....	39
3.8	Comparazione modelli e scelta della miglior soluzione.....	42
4	Soluzioni analitiche del problema a Modo II.....	43
4.1	Soluzione con potenziali a 1 termine, condizioni al contorno di gruppo 1 (Tentativo 1).....	44
4.2	Soluzione con potenziali a 2 termini, condizioni al contorno per $\theta = \frac{3\gamma}{4}$ (Tentativo 2).....	46
4.3	Soluzione con potenziali a 3 termini, condizioni al contorno di gruppo 2 (Tentativo 3).....	52
4.4	Soluzione al materiale 2	57
4.5	Comparazione modelli e scelta della miglior soluzione.....	59
5	Analisi dei risultati	60
6	Intaglio a V raccordato	62
6.1	Modo I-Materiale 1	62
6.2	Modo I-Materiale 2	66
6.4	Modo II-Materiale 1	69
6.5	Modo II-Materiale 2	73
6.6	Analisi dei risultati	74
7	Intagli bi-materiale.....	75
7.1	Soluzione all'intaglio a spigolo vivo bi-materiale (2015).....	76
7.2	Commenti e analisi del modello.....	81
7.3	Analisi preliminari dell'intaglio a V raccordato bi-materiale	81
7.4	Analisi dei risultati e proposta per approcci al problema.....	86
8	Conclusioni.....	87
	Appendice A.....	91
	Appendice B.....	102
	Bibliografia	105
	Ringraziamenti	107

Lista delle figure

Figura 1.1	Sistema di coordinate curvilinee dato da Eq.17.....	4
Figura 3.1	Andamenti tensione principale lungo profilo dell'intaglio per Modo I-Materiale 1 con $\alpha=30^\circ$ $\rho=1$ mm; confronto Fem, Tentativo 1 (Eq. 63) e soluzione 2017 (Eq. 36).....	16
Figura 3.2	Andamenti tensione principale lungo profilo dell'intaglio per Modo I-Materiale 1 con $\alpha=45^\circ$ $\rho=1$ mm; confronto Fem, Tentativo 1 (Eq. 63) e soluzione 2017 (Eq. 36).....	16
Figura 3.3	Andamenti tensione principale lungo profilo dell'intaglio per Modo I-Materiale 1 con $\alpha=67.5^\circ$ $\rho=1$ mm; confronto Fem, Tentativo 1 (Eq. 63) e soluzione 2017 (Eq. 36).....	17
Figura 3.4	Andamenti σ_θ lungo la bisettrice dell'intaglio per Modo I-Materiale 1 con $\alpha=45^\circ$ e ρ variabile; confronto Fem, Tentativo 1 (Eq. 63) e soluzione 2017 (Eq. 36)....	17
Figura 3.5	Andamenti σ_θ lungo la bisettrice dell'intaglio per Modo I-Materiale 1 con $\alpha=45^\circ$ e $\rho=1.25$ mm; confronto Fem, Tentativo 1 (Eq. 63) e soluzione 2017 (Eq. 36)...	18
Figura 3.6	Andamenti tensione principale lungo profilo dell'intaglio per Modo I-Materiale 2 con $\alpha=30^\circ$ $\rho=1$ mm; confronto Fem, Tentativo 1 (Eq. 63) e soluzione 2017 (Eq. 36).....	19
Figura 3.7	Andamenti tensione principale lungo profilo dell'intaglio per Modo I-Materiale 2 con $\alpha=45^\circ$ $\rho=1$ mm; confronto Fem, Tentativo 1 (Eq. 63) e soluzione 2017 (Eq. 36).....	19
Figura 3.8	3.8: Andamenti tensione principale lungo profilo dell'intaglio per Modo I-Materiale 2 con $\alpha=67.5^\circ$ $\rho=1$ mm; confronto Fem, Tentativo 1 (Eq. 63) e soluzione 2017 (Eq. 36).....	20
Figura 3.9	Andamenti tensione principale lungo profilo dell'intaglio per Modo I-Materiale 1 con $\alpha=30^\circ$ $\rho=1$ mm; confronto Fem, Tentativo 2 (Eq. 63) e soluzione 2017 (Eq. 36).....	22
Figura 3.10	3.10: Andamenti tensione principale lungo profilo dell'intaglio per Modo I-Materiale 1 con $\alpha=45^\circ$ $\rho=1$ mm; confronto Fem, Tentativo 2 (Eq. 63) e soluzione 2017 (Eq. 36).....	22
Figura 3.11	Andamenti tensione principale lungo profilo dell'intaglio per Modo I-Materiale 1 con $\alpha=67.5^\circ$ $\rho=1$ mm; confronto Fem, Tentativo 2 (Eq. 63) e soluzione 2017 (Eq. 36).....	23

Figura 3.12	Andamenti σ_θ lungo la bisettrice dell'intaglio per Modo I-Materiale 1 con $\alpha=45^\circ$ e ρ variabile; confronto Fem, Tentativo 2 (Eq. 63) e soluzione 2017 (Eq. 36)....	23
Figura 3.13	Andamenti σ_θ lungo la bisettrice dell'intaglio per Modo I-Materiale 1 con $\alpha=45^\circ$ e $\rho=1.25$ mm; confronto Fem, Tentativo 2 (Eq. 63) e soluzione 2017 (Eq. 36)...	24
Figura 3.14	Andamenti tensione principale lungo profilo dell'intaglio per Modo I-Materiale 2 con $\alpha=30^\circ$ $\rho=1$ mm; confronto Fem, Tentativo 2 (Eq. 63) e soluzione 2017 (Eq. 36).....	25
Figura 3.15	Andamenti tensione principale lungo profilo dell'intaglio per Modo I-Materiale 2 con $\alpha=45^\circ$ $\rho=1$ mm; confronto Fem, Tentativo 2 (Eq. 63) e soluzione 2017 (Eq. 36).....	25
Figura 3.16	Andamenti tensione principale lungo profilo dell'intaglio per Modo I-Materiale 2 con $\alpha=67.5^\circ$ $\rho=1$ mm; confronto Fem, Tentativo 2 (Eq. 63) e soluzione 2017 (Eq. 36).....	26
Figura 3.17	Andamenti σ_θ lungo la bisettrice dell'intaglio per Modo I-Materiale 2 con $\alpha=45^\circ$ e ρ variabile; confronto Fem, Tentativo 2 (Eq. 63) e soluzione 2017 (Eq. 36)....	26
Figura 3.18	Andamenti tensione principale lungo profilo dell'intaglio per Modo I-Materiale 1 con $\alpha=30^\circ$ $\rho=1$ mm; confronto Fem, Tentativo 3 (Eq. 75) e soluzione 2017 (Eq. 36).....	29
Figura 3.19	Andamenti tensione principale lungo profilo dell'intaglio per Modo I-Materiale 1 con $\alpha=45^\circ$ $\rho=1$ mm; confronto Fem, Tentativo 3 (Eq. 75) e soluzione 2017 (Eq. 36).....	30
Figura 3.20	Andamenti tensione principale lungo profilo dell'intaglio per Modo I-Materiale 1 con $\alpha=67.5^\circ$ $\rho=1$ mm; confronto Fem, Tentativo 3 (Eq. 75) e soluzione 2017 (Eq. 36).....	30
Figura 3.21	Andamenti σ_θ lungo la bisettrice dell'intaglio per Modo I-Materiale 1 con $\alpha=45^\circ$ e ρ variabile; confronto Fem, Tentativo 3 (Eq. 75) e soluzione 2017 (Eq. 36)....	31
Figura 3.22	Andamenti σ_θ lungo la bisettrice dell'intaglio per Modo I-Materiale 1 con $\alpha=45^\circ$ e $\rho=1.25$ mm; confronto Fem, Tentativo 3 (Eq. 75) e soluzione 2017 (Eq. 36)...	31
Figura 3.23	Andamenti tensione principale lungo profilo dell'intaglio per Modo I-Materiale 2 con $\alpha=30^\circ$ $\rho=1$ mm; confronto Fem, Tentativo 3 (Eq. 75) e soluzione 2017 (Eq. 36).....	32
Figura 3.24	Andamenti tensione principale lungo profilo dell'intaglio per Modo I-Materiale 2 con $\alpha=45^\circ$ $\rho=1$ mm; confronto Fem, Tentativo 3 (Eq. 75) e soluzione 2017 (Eq. 36).....	33

Figura 3.25	Andamenti tensione principale lungo profilo dell'intaglio per Modo I-Materiale 2 con $\alpha=45^\circ$ $\rho=1$ mm; confronto Fem, Tentativo 3 (Eq. 75) e soluzione 2017 (Eq. 36).....	33
Figura 3.26	Andamenti σ_θ lungo la bisettrice dell'intaglio per Modo I-Materiale 2 con $\alpha=45^\circ$ e ρ variabile; confronto Fem, Tentativo 3 (Eq. 75) e soluzione 2017 (Eq. 36)....	34
Figura 3.27	Andamenti tensione principale lungo profilo dell'intaglio per Modo I-Materiale 1 con $\alpha=30^\circ$ $\rho=1$ mm; confronto Fem, Tentativo 4 (Eq. 78) e soluzione 2017 (Eq. 36).....	37
Figura 3.28	Andamenti tensione principale lungo profilo dell'intaglio per Modo I-Materiale 1 con $\alpha=45^\circ$ $\rho=1$ mm; confronto Fem, Tentativo 4 (Eq. 78) e soluzione 2017 (Eq. 36).....	37
Figura 3.29	3.29: Andamenti tensione principale lungo profilo dell'intaglio per Modo I-Materiale 1 con $\alpha=67.5^\circ$ $\rho=1$ mm; confronto Fem, Tentativo 4 (Eq. 78) e soluzione 2017 (Eq. 36).....	38
Figura 3.30	Andamenti σ_θ lungo la bisettrice dell'intaglio per Modo I-Materiale 1 con $\alpha=45^\circ$ e ρ variabile; confronto Fem, Tentativo 4 (Eq. 78) e soluzione 2017 (Eq. 36)....	38
Figura 3.31	Andamenti σ_θ lungo la bisettrice dell'intaglio per Modo I-Materiale 1 con $\alpha=45^\circ$ e $\rho=1.25$ mm; confronto Fem, Tentativo 4 (Eq. 78) e soluzione 2017 (Eq. 36)...	39
Figura 3.32	Andamenti tensione principale lungo profilo dell'intaglio per Modo I-Materiale 2 con $\alpha=30^\circ$ $\rho=1$ mm; confronto Fem, Tentativo 4 (Eq. 78) e soluzione 2017 (Eq. 36).....	40
Figura 3.33	Andamenti tensione principale lungo profilo dell'intaglio per Modo I-Materiale 2 con $\alpha=45^\circ$ $\rho=1$ mm; confronto Fem, Tentativo 4 (Eq. 78) e soluzione 2017 (Eq. 36).....	40
Figura 3.34	3.34: Andamenti tensione principale lungo profilo dell'intaglio per Modo I-Materiale 2 con $\alpha=67.5^\circ$ $\rho=1$ mm; confronto Fem, Tentativo 4 (Eq. 78) e soluzione 2017 (Eq. 36).....	41
Figura 3.35	Andamenti σ_θ lungo la bisettrice dell'intaglio per Modo I-Materiale 2 con $\alpha=45^\circ$ e ρ variabile; confronto Fem, Tentativo 4 (Eq. 78) e soluzione 2017 (Eq. 36)....	41
Figura 4.1	Schema di carico utilizzato per le analisi agli elementi finiti di Modo II.....	47
Figura 4.2	Andamenti tensione principale lungo profilo dell'intaglio per Modo II-Materiale 1 con $\alpha=22.5^\circ$ $\rho=1.25$ mm; confronto Fem, Tentativo 2 (Eq. 95) e Tentativo 1 (Eq. 87).....	48

Figura 4.3	Andamenti $\tau_{r\theta}$ lungo la bisettrice dell'intaglio per Modo II-Materiale 1 con $\alpha=22.5^\circ$ e $\rho=1.25$ mm; confronto Fem, Tentativo 2 (Eq. 95) e Tentativo 1 (Eq. 87).....	49
Figura 4.4	Andamenti tensione principale lungo profilo dell'intaglio per Modo II-Materiale 1 con $\alpha=45^\circ$ $\rho=1.25$ mm; confronto Fem, Tentativo 2 (Eq. 95) e Tentativo 1 (Eq. 87).....	49
Figura 4.5	Andamenti $\tau_{r\theta}$ lungo la bisettrice dell'intaglio per Modo II-Materiale 1 con $\alpha=45^\circ$ e $\rho=1.25$ mm; confronto Fem, Tentativo 2 (Eq. 95) e Tentativo 1 (Eq. 87).....	50
Figura 4.6	Andamenti tensione principale lungo profilo dell'intaglio per Modo II-Materiale 1 con $\alpha=67.5^\circ$ $\rho=1.25$ mm; confronto Fem, Tentativo 2 (Eq. 95) e Tentativo 1 (Eq. 87).....	50
Figura 4.7	Andamenti $\tau_{r\theta}$ lungo la bisettrice dell'intaglio per Modo II-Materiale 1 con $\alpha=67.5^\circ$ e $\rho=1.25$ mm; confronto Fem, Tentativo 2 (Eq. 95) e Tentativo 1 (Eq. 87).....	51
Figura 4.8	Andamenti tensione principale lungo profilo dell'intaglio per Modo II-Materiale 1 con $\alpha=22.5^\circ$ $\rho=1.25$ mm; confronto Fem, Tentativo 3 (Eq. 104) e Tentativo 1 (Eq. 87).....	54
Figura 4.9	Andamenti $\tau_{r\theta}$ lungo la bisettrice dell'intaglio per Modo II-Materiale 1 con $\alpha=22.5^\circ$ e $\rho=1.25$ mm; confronto Fem, Tentativo 3 (Eq. 104) e Tentativo 1 (Eq. 87).....	54
Figura 4.10	Andamenti tensione principale lungo profilo dell'intaglio per Modo II-Materiale 1 con $\alpha=45^\circ$ $\rho=1.25$ mm; confronto Fem, Tentativo 3 (Eq. 104) e Tentativo 1 (Eq. 87).....	55
Figura 4.11	Andamenti $\tau_{r\theta}$ lungo la bisettrice dell'intaglio per Modo II-Materiale 1 con $\alpha=45^\circ$ e $\rho=1.25$ mm; confronto Fem, Tentativo 3 (Eq. 104) e Tentativo 1 (Eq. 87).....	55
Figura 4.12	Andamenti tensione principale lungo profilo dell'intaglio per Modo II-Materiale 1 con $\alpha=67.5^\circ$ $\rho=1.25$ mm; confronto Fem, Tentativo 3 (Eq. 104) e Tentativo 1 (Eq. 87).....	56
Figura 4.13	Andamenti $\tau_{r\theta}$ lungo la bisettrice dell'intaglio per Modo II-Materiale 1 con $\alpha=67.5^\circ$ e $\rho=1.25$ mm; confronto Fem, Tentativo 3 (Eq. 104) e Tentativo 1 (Eq. 87).....	56

Figura 4.14	Andamenti tensione principale lungo profilo dell'intaglio per Modo II-Materiale 2 con $\alpha=22.5^\circ$ $\rho=1.25$ mm; confronto Fem e Tentativo 1 (Eq. 87).....	58
Figura 4.15	Andamenti $\tau_{r\theta}$ lungo la bisettrice dell'intaglio per Modo II-Materiale 2 con $\alpha=22.5^\circ$ e $\rho=1.25$ mm; confronto Fem e Tentativo 1 (Eq. 87).....	58
Figura 6.1	Geometria di un intaglio a V raccordato.....	62
Figura 6.2	Andamenti tensione principale lungo profilo dell'intaglio per Modo I-Materiale 1 con $\alpha=30^\circ$ $\rho=1$ mm; confronto Fem Blunt V-notch e Tentativo 2 (Eq. 63).....	63
Figura 6.3	Andamenti σ_θ lungo la bisettrice dell'intaglio per Modo I-Materiale 1 con $\alpha=30^\circ$ e $\rho=1$ mm; confronto Fem Blunt V-notch e Tentativo 2 (Eq. 63).....	63
Figura 6.4	Andamenti tensione principale lungo profilo dell'intaglio per Modo I-Materiale 1 con $\alpha=45^\circ$ $\rho=1$ mm; confronto Fem Blunt V-notch e Tentativo 2 (Eq. 63).....	64
Figura 6.5	Andamenti σ_θ lungo la bisettrice dell'intaglio per Modo I-Materiale 1 con $\alpha=45^\circ$ e $\rho=1$ mm; confronto Fem Blunt V-notch e Tentativo 2 (Eq. 63).....	64
Figura 6.6	Andamenti tensione principale lungo profilo dell'intaglio per Modo I-Materiale 1 con $\alpha=67.5^\circ$ $\rho=1$ mm; confronto Fem Blunt V-notch e Tentativo 2 (Eq. 63)....	65
Figura 6.7	Andamenti σ_θ lungo la bisettrice dell'intaglio per Modo I-Materiale 1 con $\alpha=45^\circ$ e $\rho=1$ mm; confronto Fem Blunt V-notch e Tentativo 2 (Eq. 63).....	65
Figura 6.8	Andamenti tensione principale lungo profilo dell'intaglio per Modo I-Materiale 2 con $\alpha=30^\circ$ $\rho=1$ mm; confronto Fem Blunt V-notch e Tentativo 2 (Eq. 63).....	66
Figura 6.9	Andamenti tensione principale lungo profilo dell'intaglio per Modo I-Materiale 2 con $\alpha=45^\circ$ $\rho=1$ mm; confronto Fem Blunt V-notch e Tentativo 2 (Eq. 63).....	67
Figura 6.10	Andamenti σ_θ lungo la bisettrice dell'intaglio per Modo I-Materiale 2 con $\alpha=45^\circ$ e $\rho=1$ mm; confronto Fem Blunt V-notch e Tentativo 2 (Eq. 63).....	67
Figura 6.11	Andamenti σ_θ lungo la bisettrice dell'intaglio per Modo I-Materiale 2 con $\alpha=45^\circ$ e $\rho=1$ mm; confronto Fem Blunt V-notch e Tentativo 2 (Eq. 63).....	68
Figura 6.12	Andamenti tensione principale lungo profilo dell'intaglio per Modo I-Materiale 2 con $\alpha=67.5^\circ$ $\rho=1$ mm; confronto Fem Blunt V-notch e Tentativo 2 (Eq. 63)....	68
Figura 6.13	Andamenti σ_θ lungo la bisettrice dell'intaglio per Modo I-Materiale 2 con $\alpha=67.5^\circ$ e $\rho=1$ mm; confronto Fem Blunt V-notch e Tentativo 2 (Eq. 63).....	69
Figura 6.14	Andamenti tensione principale lungo profilo dell'intaglio per Modo II-Materiale 1 con $\alpha=30^\circ$ $\rho=1$ mm; confronto Fem Blunt V-notch e Tentativo 3 (Eq. 104).....	70
Figura 6.15	Andamenti $\tau_{r\theta}$ lungo la bisettrice dell'intaglio per Modo II-Materiale 1 con $\alpha=30^\circ$ e $\rho=1$ mm; ; confronto Fem Blunt V-notch e Tentativo 3 (Eq. 104).....	70

Figura 6.16	Andamenti tensione principale lungo profilo dell'intaglio per Modo II-Materiale 1 con $\alpha=45^\circ$ $\rho=1$ mm; confronto Fem Blunt V-notch e Tentativo 3 (Eq. 104).....	71
Figura 6.17	Andamenti $\tau_{r\theta}$ lungo la bisettrice dell'intaglio per Modo II-Materiale 1 con $\alpha=45^\circ$ e $\rho=1$ mm; ; confronto Fem Blunt V-notch e Tentativo 3 (Eq. 104).....	71
Figura 6.18	Andamenti tensione principale lungo profilo dell'intaglio per Modo II-Materiale 1 con $\alpha=67.5^\circ$ $\rho=1$ mm; confronto Fem Blunt V-notch e Tentativo 3 (Eq. 104)..	72
Figura 6.19	Andamenti $\tau_{r\theta}$ lungo la bisettrice dell'intaglio per Modo II-Materiale 1 con $\alpha=67.5^\circ$ e $\rho=1$ mm; ; confronto Fem Blunt V-notch e Tentativo 3 (Eq. 104).....	72
Figura 6.20	Andamenti tensione principale lungo profilo dell'intaglio per Modo II-Materiale 2 con $\alpha=30^\circ$ $\rho=1$ mm; confronto Fem Blunt V-notch e Tentativo 1 (Eq. 87).....	73
Figura 6.21	Andamenti $\tau_{r\theta}$ lungo la bisettrice dell'intaglio per Modo II-Materiale 2 con $\alpha=30^\circ$ e $\rho=1$ mm; confronto Fem Blunt V-notch e Tentativo 1 (Eq. 87).....	74
Figura 7.1	Geometria di un intaglio a V raccordato bi-materiale.....	75
Figura 7.2	Geometria della piastra modellata tramite software ANSYS 18.1.....	81
Figura 7.3	Confronto σ_y lungo la bisettrice dell'intaglio con $\alpha=0^\circ$ per diversi raggi di raccordo nel problema dell'intaglio bi-materiale raccordato, acciaio-epox.....	82
Figura 7.4	Confronto σ_y scalati a $d=10^{-4}$ mm lungo la bisettrice dell'intaglio con $\alpha=0^\circ$ per diversi raggi di raccordo nel problema dell'intaglio bi-materiale raccordato, acciaio-epox.....	83
Figura 7.5	Confronto σ_y lungo la bisettrice dell'intaglio con $\alpha=90^\circ$ per diversi raggi di raccordo nel problema dell'intaglio bi-materiale raccordato, acciaio-epox.....	83
Figura 7.6	Confronto σ_y lungo la bisettrice dell'intaglio con $\alpha=135^\circ$ per diversi raggi di raccordo nel problema dell'intaglio bi-materiale raccordato, acciaio-epox.....	84
Figura 7.7	Confronto σ_y lungo la bisettrice dell'intaglio con $\rho=0.1$ mm per diversi angoli di apertura nel problema dell'intaglio bi-materiale raccordato, acciaio-epox.....	84
Figura 7.8	Confronto σ_y lungo la bisettrice dell'intaglio con $\rho=1$ mm per diversi angoli di apertura nel problema dell'intaglio bi-materiale raccordato, acciaio-epox.....	85
Figura 7.9	Confronto σ_y lungo la bisettrice dell'intaglio con $\rho=5$ mm per diversi angoli di apertura nel problema dell'intaglio bi-materiale raccordato, acciaio-epox.....	85

Lista delle tabelle

Tabella 3.1	Valori parametri tensionali Tentativo 1 (Eq. 63) Modo I-Materiale 1.....	15
Tabella 3.2	Valori parametri tensionali Tentativo 1 (Eq. 63) Modo I-Materiale 2.....	18
Tabella 3.3	Valori parametri tensionali Tentativo 2 (Eq. 63) Modo I-Materiale 1.....	21
Tabella 3.4	Valori parametri tensionali Tentativo 2 (Eq. 63) Modo I-Materiale 2.....	24
Tabella 3.5	Valori parametri tensionali Tentativo 3 (Eq. 75) Modo I-Materiale 1.....	29
Tabella 3.6	Valori parametri tensionali Tentativo 3 (Eq. 75) Modo I-Materiale 2.....	32
Tabella 3.7	Valori parametri tensionali Tentativo 4 (Eq. 78) Modo I-Materiale 1.....	36
Tabella 3.8	Valori parametri tensionali Tentativo 4 (Eq. 78) Modo I-Materiale 2.....	39
Tabella 4.1	Valori parametri tensionali Tentativo 1 (Eq. 87) Modo II-Materiale 1.....	45
Tabella 4.2	Valori parametri tensionali Tentativo 2 (Eq. 95) Modo II-Materiale 1.....	48
Tabella 4.3	Valori parametri tensionali Tentativo 3 (Eq. 104) Modo II-Materiale 1.....	53
Tabella 4.4	Valori parametri tensionali Tentativo 1 (Eq. 87) Modo II-Materiale 2.....	57
Tabella 5.1	Numero termini n nei casi analizzati.....	61
Tabella 5.2	Andamento parametro n rispetto al caso isotropo.....	61
Tabella 6.1	Valori parametri tensionali Tentativo 2 (Eq. 63) Modo I-Materiale 1.....	62
Tabella 6.2	Valori parametri tensionali Tentativo 2 (Eq. 63) Modo I-Materiale 2.....	66
Tabella 6.3	Valori parametri tensionali Tentativo 3 (Eq. 104) Modo II-Materiale 1.....	69
Tabella 6.4	Valori parametri tensionali Tentativo 1 (Eq. 87) Modo II-Materiale 2.....	73

Introduzione

L'effetto di distorsione dei campi tensionali dovuto a variazioni geometriche è stato spesso oggetto di studio nella meccanica dei materiali in quanto fori e intagli rappresentano siti preferenziali per la nucleazione di cricche nei componenti meccanici. Nella pratica tecnica tuttavia si deve spesso ricorrere a queste variazioni geometriche per permettere la funzionalità dei componenti e creare giunzioni o articolazioni. Criteri di cedimento per componenti con queste caratteristiche sono quindi necessari per la progettazione in sicurezza di tali componenti; questi criteri richiedono una conoscenza più o meno accurata dei campi tensionali in prossimità di tali variazioni⁽¹⁾⁽²⁾⁽³⁾. Queste informazioni possono essere ricavate da metodi agli elementi finiti, analisi che possono essere condotte con software come ANSYS; tuttavia queste tecniche di analisi presentano notevoli svantaggi. Per ottenere informazioni accurate con questi software è necessaria una modellazione della geometria in esame, rendendo i risultati ottenuti validi solo nel caso di geometrie simili, e una meshatura della geometria estremamente fine, richiedendo alte risorse computazionali, tra cui tempo e memoria. Questi metodi inoltre esonerano l'ingegnere che effettua l'analisi da una comprensione del fenomeno e di come i diversi parametri geometrici ed elastici concorrono a creare il campo tensionale risultante, alienando l'uomo dal problema ed interferendo col processo creativo che porta alla scoperta di nuove e brillanti soluzioni. Per questi motivi soluzioni analitiche, per quanto approssimate, sono preziose e il focus di questo lavoro.

Nel campo dei materiali isotropi le variazioni geometriche sono state ampiamente studiate ed analizzate⁽⁴⁾⁽⁵⁾⁽⁶⁾⁽⁷⁾⁽⁸⁾, nel campo dei materiali anisotropi invece, a causa di un aumento considerevole della complessità analitica richiesta, un numero inferiore di pubblicazioni e testi sono stati redatti riguardanti questo topic. Ciò nonostante soluzioni importanti sono state sviluppate nel corso degli anni, sia per fori⁽⁹⁾⁽¹⁰⁾⁽¹¹⁾⁽¹²⁾, che per cricche⁽¹³⁾.

Teorie 3D sono state create anche per i materiali anisotropi; ispirate dal lavoro di P. Lazzarin et al. del 2015⁽¹⁴⁾, sono state sviluppate soluzioni per piastre spesse indebolite da intagli a spigolo vivo e bimalteriali⁽¹⁵⁾.

Nel caso di intagli parabolici, ad U e iperbolici in materiali ortotropi invece la difficoltà risiede, paradossalmente, nella non singolarità delle tensioni all'apice dell'intaglio, che richiede una modellazione diversa del problema. Diversi sforzi sono stati fatti per la creazione di tali soluzioni, con risultati più o meno precisi, in tutte le varie ipotesi di carico, Modo I, II e III; tra le più rilevanti si citano i lavori di M. Zappalorto e P.A.Carraro del 2015 e del 2017⁽¹⁶⁾⁽¹⁷⁾ e di M. Zappalorto e M.Salviato del 2019⁽¹⁸⁾, soluzioni a cui questo progetto di tesi si è ispirato.

Da questi lavori si evince come sia possibile l'estrazione di soluzioni analitiche esatte, in ipotesi planari o antipianari, per intagli ad U e parabolici; questo grazie alla forma semplice della mappa conforme usata.

Nel caso generale di intaglio iperbolico invece, la mappa conforme utilizzata non permette lo sviluppo esplicito di una soluzione esatta, implicando una necessaria approssimazione dei campi tensionali.

Alcuni tentativi di sviluppo di una soluzione per questi casi, in condizioni di Modo I, sono presenti in letteratura⁽¹⁷⁾ con un notevole grado di accuratezza; tuttavia questi risultati lasciano spazio per un miglioramento ed un'espansione delle soluzioni a diverse ipotesi di carico.

L'obiettivo di questo progetto di tesi è lo sviluppo di una nuova soluzione analitica per un intaglio iperbolico generalizzato, che sia migliorativa rispetto all'attuale soluzione del 2017⁽¹⁷⁾ per il Modo I e che possa facilmente essere adattata al Modo II. Questa soluzione dovrà essere in grado di rappresentare il campo tensionale in prossimità dell'intaglio per diversi materiali che presentano caratteristiche di rigidità diverse, in ipotesi piane di tensione/deformazione.

Si analizzeranno quindi i risultati ottenuti cercando pattern nelle soluzioni nelle diverse ipotesi, cercando di formulare delle linee guida per la ricerca di soluzioni future e nel comportamento delle tensioni in materiali ortotropi.

Queste soluzioni potranno quindi essere utilizzate in futuro per il calcolo di vari parametri tensionali usati nei più comuni criteri di cedimento, tra i quali l'Averaged Strain Energy Density, per un'accurata previsione del comportamento di componenti meccanici.

In unione a metodi efficienti per il calcolo di parametri come il Notch Stress Intensity Factor, che sfruttano la proprietà mesh insensitive della strain energy, sarà possibile lo sviluppo di un metodo facilmente implementabile e computazionalmente economico per la progettazione di componenti in materiale avanzato. Questi metodi apriranno le porte al mondo dell'industria nell'utilizzo di teorie avanzate di progettazione, abbattendo il costo e l'impatto ambientale dei prodotti offrendo prestazioni migliori.

Problema particolare e meno trattato invece è quello dell'intaglio bi-materiale in cui i campi sono soggetti anche alla singolarità dovuta al diverso comportamento dei due materiali. In questo campo diverse soluzioni sono state proposte per intagli a spigolo vivo, tra le più rilevanti si citano i lavori di M. Zappalorto, P.A. Carraro e M. Quaresimin nel 2015⁽²⁴⁾ e di C.-H. Chue, S.-M. Weng del 2002⁽²⁵⁾. L'intaglio a spigolo vivo tuttavia non è mai presente nella realtà ed è una modellizzazione matematica di un intaglio reale che presenta sempre un certo grado di raccordo come giunzioni incollate, problemi di delaminazione o cricche bimateriali. Per questo motivo una soluzione ad intagli raccordati è altamente desiderabile.

1 Teoria piana per materiali ortotropi

Riprendendo le basi della teoria dell'elasticità, si possono scrivere le equazioni di legame, sia in ipotesi di tensione piana che di deformazione piana.

Plane Stress

$$\begin{Bmatrix} \varepsilon_x \\ \varepsilon_y \\ 2\varepsilon_{xy} \end{Bmatrix} = \begin{bmatrix} S_{11} & S_{12} & S_{16} \\ S_{12} & S_{22} & S_{26} \\ S_{16} & S_{26} & S_{66} \end{bmatrix} \begin{Bmatrix} \sigma_x \\ \sigma_y \\ \tau_{xy} \end{Bmatrix} \quad Eq. 1$$

Plane Strain

$$\begin{Bmatrix} \varepsilon_x \\ \varepsilon_y \\ 2\varepsilon_{xy} \end{Bmatrix} = \begin{bmatrix} B_{11} & B_{12} & B_{16} \\ B_{12} & B_{22} & B_{26} \\ B_{16} & B_{26} & B_{66} \end{bmatrix} \begin{Bmatrix} \sigma_x \\ \sigma_y \\ \tau_{xy} \end{Bmatrix} \quad Eq. 2$$

La trasformazione per il cambio di ipotesi è la seguente:

$$\begin{aligned} B_{11} &= \frac{S_{11}S_{33} - S_{13}^2}{S_{33}} & B_{12} &= \frac{S_{12}S_{33} - S_{13}S_{23}}{S_{33}} \\ B_{22} &= \frac{S_{22}S_{33} - S_{23}^2}{S_{33}} & B_{16} &= \frac{S_{16}S_{33} - S_{13}S_{36}}{S_{33}} \\ B_{66} &= \frac{S_{66}S_{33} - S_{36}^2}{S_{33}} & B_{26} &= \frac{S_{26}S_{33} - S_{23}S_{36}}{S_{33}} \end{aligned} \quad Eq. 3$$

E nelle ipotesi di materiale ortotropo:

$$[S_{ij}] = \begin{bmatrix} \frac{1}{E_x} & \frac{-\nu_{yx}}{E_y} & \frac{-\nu_{zx}}{E_z} & 0 & 0 & 0 \\ \frac{-\nu_{xy}}{E_x} & \frac{1}{E_y} & \frac{-\nu_{zy}}{E_z} & 0 & 0 & 0 \\ \frac{-\nu_{yx}}{E_x} & \frac{-\nu_{yz}}{E_y} & \frac{1}{E_z} & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & \frac{1}{G_{xz}} & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & \frac{1}{G_{yz}} & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & \frac{1}{G_{xy}} \end{bmatrix} \quad Eq. 4$$

Unendo le equazioni di legame, congruenza, spostamento ed equilibrio; introducendo le equazioni di Airy (Eq. 5) si ottiene l'equazione differenziale che descrive il problema (Eq. 6):

$$\sigma_x = \frac{\partial^2 \phi}{\partial y^2}; \quad \sigma_y = \frac{\partial^2 \phi}{\partial x^2}; \quad \tau_{xy} = -\frac{\partial^2 \phi}{\partial x \partial y} \quad Eq. 5$$

$$B_{22} \frac{\partial^4 \phi}{\partial x^4} - 2B_{26} \frac{\partial^4 \phi}{\partial x^3 \partial y} + (2B_{12} + B_{66}) \frac{\partial^4 \phi}{\partial x^2 \partial y^2} - 2B_{16} \frac{\partial^4 \phi}{\partial x \partial y^3} + B_{11} \frac{\partial^4 \phi}{\partial y^4} = 0 \quad Eq. 6$$

Si cerca quindi una soluzione del tipo: $\phi = \phi(x + \mu y)$ con μ parametron complesso; sostituendo in Eq. 6 e risolvendo si ottiene l'equazione caratteristica con le seguenti radici:

$$\begin{aligned}
\mu_1\mu_2\mu_3\mu_4 &= \frac{B_{22}}{B_{11}} \\
\mu_1\mu_2\mu_3 + \mu_2\mu_3\mu_4 + \mu_3\mu_4\mu_1 + \mu_4\mu_1\mu_2 &= \frac{2B_{26}}{B_{11}} \\
\mu_1\mu_2 + \mu_2\mu_3 + \mu_3\mu_4 + \mu_4\mu_1 + \mu_1\mu_3 + \mu_2\mu_4 &= \frac{2(B_{12} + B_{66})}{B_{11}} \\
\mu_1 + \mu_2 + \mu_3 + \mu_4 &= \frac{2B_{16}}{B_{11}}
\end{aligned}
\tag{Eq. 7}$$

Nel caso di materiali ortotropi si ottengono coppie di radici puramente complesse coniugate:

$$\begin{aligned}
\mu_j &= i\beta_j \\
\mu_3 &= \bar{\mu}_1 \quad \mu_4 = \bar{\mu}_2
\end{aligned}$$

L'Eq. 6 può essere riscritta come:

$$D_1 D_2 D_3 D_4 \phi = 0 \text{ con } D_k = \frac{\partial}{\partial y} - \mu_k \frac{\partial}{\partial x} \tag{Eq. 8}$$

Da cui si trova:

$$\phi(x, y) = F_1(x + \mu_1 y) + F_2(x + \mu_2 y) + F_3(x + \mu_3 y) + F_4(x + \mu_4 y) \tag{Eq. 9}$$

$$\phi = 2\text{Re}[F_1(x + \mu_1 y) + F_2(x + \mu_2 y)] = F_1(z_1) + F_2(z_2) \tag{Eq. 10}$$

$$\phi_1(z_1) = \frac{\partial F_1}{\partial z_1}; \quad \phi_2(z_2) = \frac{\partial F_2}{\partial z_2} \tag{Eq. 11}$$

E infine:

$$\begin{aligned}
\sigma_x &= 2\text{Re}[\mu_1^2 \phi_1'(z_1) + \mu_2^2 \phi_2'(z_2)] \\
\sigma_y &= 2\text{Re}[\phi_1'(z_1) + \phi_2'(z_2)] \\
\tau_{xy} &= -2\text{Re}[\mu_1 \phi_1'(z_1) + \mu_2 \phi_2'(z_2)]
\end{aligned}
\tag{Eq. 12}$$

È inoltre utile riscrivere Eq. 12 in coordinate polari:

$$\begin{aligned}
\sigma_r &= 2\text{Re}[(\sin \theta - \mu_1 \cos \theta)^2 \phi_1'(z_1) + (\sin \theta - \mu_2 \cos \theta)^2 \phi_2'(z_2)] \\
\sigma_\theta &= 2\text{Re}[(\cos \theta + \mu_1 \sin \theta)^2 \phi_1'(z_1) + (\cos \theta + \mu_2 \sin \theta)^2 \phi_2'(z_2)] \\
\tau_{r\theta} &= 2\text{Re}[(\sin \theta - \mu_1 \cos \theta)(\cos \theta + \mu_1 \sin \theta) \phi_1'(z_1) + (\sin \theta \\
&\quad - \mu_2 \cos \theta)(\cos \theta + \mu_2 \sin \theta) \phi_2'(z_2)]
\end{aligned}
\tag{Eq. 13}$$

O alternativamente:

$$\begin{aligned}
 \sigma_r &= 2\text{Re}[(k_{11} + ik_{12})\phi'_1(z_1) + (k_{21} + ik_{22})\phi'_2(z_2)] \\
 \sigma_\theta &= 2\text{Re}[(m_{11} + im_{12})\phi'_1(z_1) + (m_{21} + im_{22})\phi'_2(z_2)] \\
 \tau_{r\theta} &= 2\text{Re}[(n_{11} + in_{12})\phi'_1(z_1) + (n_{21} + in_{22})\phi'_2(z_2)]
 \end{aligned}
 \tag{Eq. 14}$$

Con:

$$\begin{aligned}
 k_{11} &= \sin^2 \theta - (\beta_1 \cos \theta)^2 & k_{12} &= -2\beta_1 \sin \theta \cos \theta \\
 k_{21} &= \sin^2 \theta - (\beta_2 \cos \theta)^2 & k_{22} &= -2\beta_2 \sin \theta \cos \theta \\
 m_{11} &= \cos^2 \theta - (\beta_1 \sin \theta)^2 & m_{12} &= 2\beta_1 \sin \theta \cos \theta \\
 m_{21} &= \cos^2 \theta - (\beta_2 \sin \theta)^2 & m_{22} &= 2\beta_2 \sin \theta \cos \theta \\
 n_{11} &= \frac{1}{2} \sin 2\theta (1 + \beta_1^2) & n_{12} &= -\beta_1 \cos 2\theta \\
 n_{21} &= \frac{1}{2} \sin 2\theta (1 + \beta_2^2) & n_{22} &= -\beta_2 \cos 2\theta
 \end{aligned}
 \tag{Eq. 15}$$

$$z_j = r_j e^{i\theta_j} \tag{Eq. 16}$$

2 Descrizione analitica dell'intaglio

L'intaglio analizzato in questo lavoro è lo stesso preso in considerazione da Neuber H. nel 1958, da Lazzarin P. e Tovo R. nel 1996 e da parte dei professori Zappalorto M. e Carraro P. A. in studi successivi. La mappatura conforme usata è mostrata in Fig.1.1

$$z = w^q = (u + iv)^q \quad \text{Eq.17}$$

In cui

$$z = x + iy \quad \text{Eq.18}$$

$$w = u + iv \quad \text{Eq.19}$$

$$z = r e^{i\theta} = r(\cos \theta + i \sin \theta) \quad \text{Eq.20}$$

Sostituendo nella mappa si ottiene:

$$u = r^{\frac{1}{q}} \cos\left(\frac{\theta}{q}\right) \quad \text{Eq.21}$$

$$v = r^{\frac{1}{q}} \sin\left(\frac{\theta}{q}\right) \quad \text{Eq.22}$$

Imponendo quindi:

$$x = r \cos \theta = r_0 \quad \text{per } \theta = 0 \quad \text{Eq.23}$$

Si trova:

$$r_0 = u_0^q \quad \text{Eq.24}$$

Da cui sostituendo Eq.24 in Eq.21 si ricava la funzione $r(\theta)$ che mappa il profilo dell'intaglio al variare di θ

$$r(\theta) = \frac{r_0}{\left(\cos \frac{\theta}{q}\right)^q} \quad \text{Eq. 25}$$

Imponendo le condizioni di esistenza ad Eq. 25 ricordando che $r \geq 0$ si trova:

$$0 \leq \cos \frac{\theta}{q} \leq 1 \rightarrow -\frac{\pi q}{2} \leq \theta \leq \frac{\pi q}{2} \quad \text{Eq. 26}$$

A questo punto si impongono gli asintoti per $r \rightarrow \infty$ pari a:

$$y = \tan(\pi - \alpha)x \rightarrow \frac{\pi q}{2} = \pi - \alpha \rightarrow q = \frac{2\gamma}{\pi} \quad \text{Eq. 27}$$

L'ultimo parametro r_0 , si ricava imponendo il raggio di raccordo ρ all'apice:

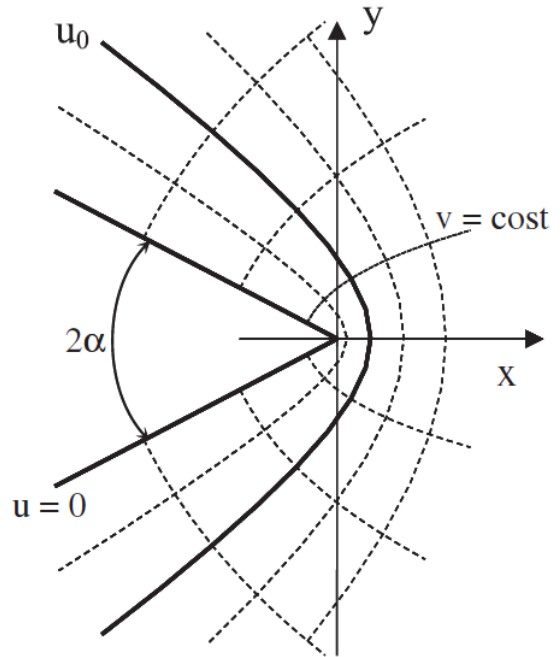


Fig. 1.1: Sistema di coordinate curvilinee dato da Eq.17

$$\rho = \left| \frac{\left[\left(\frac{\partial x}{\partial \theta} \right)^2 + \left(\frac{\partial y}{\partial \theta} \right)^2 \right]^{\frac{3}{2}}}{\frac{\partial x}{\partial \theta} \frac{\partial^2 y}{\partial \theta^2} - \frac{\partial y}{\partial \theta} \frac{\partial^2 x}{\partial \theta^2}} \right| = \frac{qr_0}{q-1} \rightarrow r_0 = \frac{q-1}{q} \rho \quad \text{Eq. 28}$$

La geometria dell'intaglio è ora completamente definita dai due parametri ρ e α .

Applichiamo ora la distorsione introdotta dai parametri μ_j alla mappatura.

$$z_j = w_j^q = (u + \mu_j v)^q \quad \text{Eq. 29}$$

In accordo con M.Zappalorto e P.A.Carraro:

$$z_j = x_j + iy_j = r_j e^{i\theta_j} \quad \text{Eq. 30}$$

$$x_j = x' + r_0 \beta_j^t \quad y_j = \beta_j y \quad \text{Eq. 31}$$

$$r_j = \sqrt{x_j^2 + y_j^2} \quad \theta_j = \text{Arg}(z_j) \quad \text{Eq. 32}$$

Con

$$x' = x - r_0 \quad \text{Eq. 33}$$

Traslazione dell'origine degli assi sull'apice dell'intaglio.

3 Soluzioni analitiche del problema a Modo I

3.1 Presentazione della soluzione esistente

Lo stato dell'arte attuale per questo problema è rappresentato dalla soluzione trovata da M.Zappalorto e P.A.Carraro pubblicata nel 2017. Segue una breve presentazione della suddetta soluzione:

Partendo dalle Eq. 14 si trovano le tensioni nelle coordinate curvilinee u-v applicando una rotazione di $-\frac{\theta}{q}$ al tensore delle tensione in coordinate polari, in accordo con P.Lazzarin e R.

Si trova:

$$\begin{aligned}\sigma_u &= \frac{\sigma_r + \sigma_\theta}{2} + \frac{\sigma_r - \sigma_\theta}{2} \cos \frac{2\theta}{q} - \tau_{r\theta} \sin \frac{2\theta}{q} \\ \sigma_v &= \frac{\sigma_r + \sigma_\theta}{2} - \frac{\sigma_r - \sigma_\theta}{2} \cos \frac{2\theta}{q} + \tau_{r\theta} \sin \frac{2\theta}{q} \\ \tau_{uv} &= \frac{\sigma_r - \sigma_\theta}{2} \sin \frac{2\theta}{q} + \tau_{r\theta} \cos \frac{2\theta}{q}\end{aligned}\tag{Eq. 34}$$

Si scelgono le forme dei due potenziali $\phi'_1(z_1)$ e $\phi'_2(z_2)$:

$$\begin{aligned}\phi'_1(z_1) &= Az_1^{\lambda-1} \\ \phi'_2(z_2) &= Bz_2^{\lambda-1}\end{aligned}\tag{Eq. 35}$$

e sostituendo Eq. 35 in Eq. 14 e successivamente in Eq. 34 si ottengono le seguenti:

$$\begin{aligned}\sigma_r &= Ar_1^{\lambda-1}[k_{11} \cos(1-\lambda)\theta_1 + k_{12} \sin(1-\lambda)\theta_1] \\ &\quad + Br_2^{\lambda-1}[k_{21} \cos(1-\lambda)\theta_2 + k_{22} \sin(1-\lambda)\theta_2] \\ \sigma_\theta &= Ar_1^{\lambda-1}[m_{11} \cos(1-\lambda)\theta_1 + m_{12} \sin(1-\lambda)\theta_1] \\ &\quad + Br_2^{\lambda-1}[m_{21} \cos(1-\lambda)\theta_2 + m_{22} \sin(1-\lambda)\theta_2] \\ \tau_{r\theta} &= Ar_1^{\lambda-1}[n_{11} \cos(1-\lambda)\theta_1 + n_{12} \sin(1-\lambda)\theta_1] \\ &\quad + Br_2^{\lambda-1}[n_{21} \cos(1-\lambda)\theta_2 + n_{22} \sin(1-\lambda)\theta_2]\end{aligned}\tag{Eq. 36}$$

A questo punto si applicano le condizioni al contorno per definire le costanti necessarie. Si ricorda che una costante deve essere lasciata libera per permettere l'imposizione delle condizioni nominali di carico.

Le prime condizioni imposte sono all'infinito per σ_u e τ_{uv} .

Si considera che per $\theta \rightarrow \pm\gamma$ lungo u_0 si ottiene:

$$r_j \approx \sqrt{(x')^2 + (\beta_j y)^2} \cong r \sqrt{\cos^2(\gamma) + (\beta_j \sin(\gamma))^2} = r \rho_j$$

$$\theta_j \approx \text{Arg}(\cos \gamma + i \sin \gamma) = \theta_j(\gamma)$$
Eq. 37

$$\sigma_u|_{u=u_0} = 0$$

$$\tau_{uv}|_{u=u_0} = 0$$
Eq. 38

Da cui si ottiene il sistema:

$$\begin{bmatrix} b_{11} & b_{12} \\ b_{21} & b_{22} \end{bmatrix} \begin{Bmatrix} A \\ B \end{Bmatrix} = 0$$
Eq. 39

Con

$$b_{11} = \rho_1^{\lambda-1} [m_{11} \cos(1-\lambda) \theta_1(\gamma) + m_{12} \sin(1-\lambda) \theta_1(\gamma)]$$

$$b_{12} = \rho_2^{\lambda-1} [m_{21} \cos(1-\lambda) \theta_2(\gamma) + m_{22} \sin(1-\lambda) \theta_2(\gamma)]$$

$$b_{21} = \rho_1^{\lambda-1} [n_{11} \cos(1-\lambda) \theta_1(\gamma) + n_{12} \sin(1-\lambda) \theta_1(\gamma)]$$

$$b_{22} = \rho_2^{\lambda-1} [n_{21} \cos(1-\lambda) \theta_2(\gamma) + n_{22} \sin(1-\lambda) \theta_2(\gamma)]$$
Eq. 40

Imponendo il determinante della matrice $[b_{ij}] = 0$ si possono trovare gli autovalori λ del problema e la relazione tra il parametro A e B

$$B = -A \frac{\rho_1^{\lambda-1} [m_{11} \cos(1-\lambda) \theta_1(\gamma) + m_{12} \sin(1-\lambda) \theta_1(\gamma)]}{\rho_2^{\lambda-1} [m_{21} \cos(1-\lambda) \theta_2(\gamma) + m_{22} \sin(1-\lambda) \theta_2(\gamma)]} = A \chi$$
Eq. 41

Il parametro t invece è trovato imponendo $\sigma_u|_{u=u_0} = 0$ per $\theta = 0$ e si ottiene

$$t = \frac{2 - \frac{\ln -\chi}{\ln \frac{\beta_1}{\beta_2}}}{1 - \lambda}$$
Eq. 42

A questo punto le Eq. 36 si possono riscrivere come segue:

$$\sigma_r = \frac{\sigma_{tip}}{\tilde{A}} \left\{ \left(\frac{r_0}{r_1} \right)^{1-\lambda} [k_{11} \cos(1-\lambda) \theta_1 + k_{12} \sin(1-\lambda) \theta_1] \right.$$

$$\left. + \chi \left(\frac{r_0}{r_2} \right)^{1-\lambda} [k_{21} \cos(1-\lambda) \theta_2 + k_{22} \sin(1-\lambda) \theta_2] \right\}$$

$$\sigma_\theta = \frac{\sigma_{tip}}{\tilde{A}} \left\{ \left(\frac{r_0}{r_1} \right)^{1-\lambda} [m_{11} \cos(1-\lambda) \theta_1 + m_{12} \sin(1-\lambda) \theta_1] \right.$$

$$\left. + \chi \left(\frac{r_0}{r_2} \right)^{1-\lambda} [m_{21} \cos(1-\lambda) \theta_2 + m_{22} \sin(1-\lambda) \theta_2] \right\}$$
Eq. 43

$$\tau_{r\theta} = \frac{\sigma_{tip}}{\tilde{A}} \left\{ \left(\frac{r_0}{r_1} \right)^{1-\lambda} [n_{11} \cos(1-\lambda)\theta_1 + n_{12} \sin(1-\lambda)\theta_1] \right. \\ \left. + \chi \left(\frac{r_0}{r_2} \right)^{1-\lambda} [n_{21} \cos(1-\lambda)\theta_2 + n_{22} \sin(1-\lambda)\theta_2] \right\}$$

Con:

$$\tilde{A} = \beta_1^{t(\lambda-1)} + \chi \beta_2^{t(\lambda-1)} \quad \text{Eq. 44}$$

E σ_{tip} tensione all'apice dell'intaglio.

Questa soluzione è estremamente precisa col vantaggio di essere estremamente semplice, utilizzando pochi parametri, tutti, ad eccezione per l'autovalore, calcolabili in forma chiusa analiticamente.

Questa soluzione tuttavia sottostima, seppur minimamente, la distribuzione di tensione lungo la bisettrice dell'intaglio; inoltre, pur essendo estremamente precisa nella stima delle tensioni lungo il profilo dell'intaglio per aperture $2\alpha \rightarrow 0$, all'incrementare del parametro α la soluzione diventa meno precisa.

3.2 Ricerca soluzione migliorativa

Nel tentativo di sviluppare una soluzione migliorativa in rispetto a quella del 2017 diversi approcci sono stati provati e confrontati con analisi agli elementi finite condotte tramite il software ANSYS.

Assumendo che le funzioni potenziali siano olomorfe nel dominio a meno di un numero finito di punti in cui non sono differenziabili e analitiche, allora in una corona circolare centrata nel punto di singolarità $z_j = 0$ le funzioni potenziali possono essere espresse tramite una serie di Laurent.

$$\phi'_1(z_1) = \sum_{n=-\infty}^{\infty} A_n z_1^n \\ \phi'_2(z_2) = \sum_{n=-\infty}^{\infty} B_n z_2^n \quad \text{Eq. 45}$$

Considerando quindi il comportamento delle tensioni in un intaglio a V non raccordato si può fare l'assunzione che il punto $z_j = 0$ sia una singolarità essenziale delle funzioni potenziali; questo impone che la parte principale dei potenziali sia una serie infinita:

$$\sum_{n=-\infty}^{-1} A_n z_1^n \quad \text{Eq. 46}$$

Oppure che il punto $z_j = 0$ sia un polo delle funzioni potenziali, questo impone che la parte principale dei potenziali sia una serie finita

$$\sum_{n=-k}^{-1} A_n z_1^n \quad \text{Eq. 47}$$

A questo punto si affronta il problema di gestione di una serie infinita di una funzione con un punto di singolarità essenziale, le quali molto spesso manifestano comportamenti complicati da descrivere; o di una serie finita più o meno lunga con diverse costanti da identificare.

Per ovviare questo problema, osservando la forma delle funzioni potenziali (Eq. 35), si intuisce come una serie simile ad una serie di Laurent, finita con esponenti reali, possa approssimare il comportamento delle tensioni mantenendo il numero delle costanti da determinare contenuto.

Per queste ragioni le funzioni potenziali utilizzate nei seguenti tentativi sono caratterizzate dalla forma:

$$\begin{aligned} \phi'_1(z_1) &= A_{11}z_1^{a_1} + A_{12}z_1^{a_2} + \dots \\ \phi'_2(z_1) &= A_{21}z_2^{a_1} + A_{22}z_2^{a_2} + \dots \end{aligned} \quad \text{Eq. 48}$$

In cui i parametri $a_n \in \mathbb{R}$; $a_n < 0$; $a_1 > a_2 > a_3 > \dots$; $A_{nm} \in \mathbb{R}$

3.3 Valutazioni preliminari

Valutiamo ora la forma delle tensioni nelle ipotesi precedenti sostituendo le Eq. 48 in Eq. 14, si ottiene:

$$\begin{aligned} \sigma_r &= 2A_{11} \sum_n \left\{ \chi_{1n} r_1^{a_n} [k_{11} \cos(a_n \theta_1) - k_{12} \sin(a_n \theta_1)] \right. \\ &\quad \left. + \chi_{2n} r_2^{a_n} [k_{21} \cos(a_n \theta_2) - k_{22} \sin(a_n \theta_2)] \right\} \\ \sigma_\theta &= 2A_{11} \sum_n \left\{ \chi_{1n} r_1^{a_n} [m_{11} \cos(a_n \theta_1) - m_{12} \sin(a_n \theta_1)] \right. \\ &\quad \left. + \chi_{2n} r_2^{a_n} [m_{21} \cos(a_n \theta_2) - m_{22} \sin(a_n \theta_2)] \right\} \\ \tau_{r\theta} &= 2A_{11} \sum_n \left\{ \chi_{1n} r_1^{a_n} [n_{11} \cos(a_n \theta_1) + n_{12} \sin(a_n \theta_1)] \right. \\ &\quad \left. + \chi_{2n} r_2^{a_n} [n_{21} \cos(a_n \theta_2) - n_{22} \sin(a_n \theta_2)] \right\} \end{aligned} \quad \text{Eq. 49}$$

In cui $\chi_{1n} = \frac{A_{1n}}{A_{11}}$; $\chi_{2n} = \frac{A_{2n}}{A_{11}}$.

Pensando ora alle tipologie di condizioni al contorno che possono essere imposte al problema in analisi, si trovano 3 gruppi principali di condizioni al contorno:

Condizioni all'infinito lungo $u = u_0$ per $\theta \rightarrow \pm\gamma$

Condizioni lungo $u = u_0 \forall \theta$

Condizioni ai coefficienti della serie di McLaurin all'apice

Il primo gruppo, usato nella soluzione del 2017, permette di approssimare accuratamente il primo autovalore a_1 e costante moltiplicativa χ_{21} . Sfruttando la relazione $a_1 > a_2 > a_3 > \dots$ si può assumere:

$$\begin{aligned}\sigma_r &\cong 2A_{11}\{r_1^{a_1}[m_{11} \cos(a_1 \theta_1) - m_{12} \sin(a_1 \theta_1)] \\ &\quad + \chi_{21}r_2^{a_1}[m_{21} \cos(a_1 \theta_2) - m_{22} \sin(a_1 \theta_2)]\} \\ \sigma_\theta &\cong 2A_{11}\{r_1^{a_1}[m_{11} \cos(a_1 \theta_1) - m_{12} \sin(a_1 \theta_1)] \\ &\quad + \chi_{21}r_2^{a_1}[m_{21} \cos(a_1 \theta_2) - m_{22} \sin(a_1 \theta_2)]\} \\ \tau_{r\theta} &\cong 2A_{11}\{r_1^{a_1}[n_{11} \cos(a_1 \theta_1) - n_{12} \sin(a_1 \theta_1)] \\ &\quad + \chi_{21}r_2^{a_1}[n_{21} \cos(a_1 \theta_2) - n_{22} \sin(a_1 \theta_2)]\}\end{aligned}\tag{Eq. 50}$$

Per $u = u_0$ e $\theta \rightarrow \pm\gamma$. Applicando le condizioni al contorno si trova il Sistema:

$$\begin{aligned}\sigma_u|_{u=u_0} &= 0 \\ \tau_{uv}|_{u=u_0} &= 0\end{aligned}\tag{Eq. 51}$$

$$\begin{bmatrix} b_{11} & b_{12} \\ b_{21} & b_{22} \end{bmatrix} \begin{Bmatrix} A_{11} \\ A_{21} \end{Bmatrix} = 0\tag{Eq. 52}$$

Con

$$\begin{aligned}b_{11} &= \rho_1^{a_1}[m_{11} \cos(a_1 \theta_1(\gamma)) - m_{12} \sin(a_1 \theta_1(\gamma))] \\ b_{12} &= \rho_2^{a_1}[m_{21} \cos(a_1 \theta_2(\gamma)) - m_{22} \sin(a_1 \theta_2(\gamma))] \\ b_{21} &= \rho_1^{a_1}[n_{11} \cos(a_1 \theta_1(\gamma)) - n_{12} \sin(a_1 \theta_1(\gamma))] \\ b_{22} &= \rho_2^{a_1}[n_{21} \cos(a_1 \theta_2(\gamma)) - n_{22} \sin(a_1 \theta_2(\gamma))]\end{aligned}\tag{Eq. 53}$$

Imponendo $Det[[b_{ij}]] = 0$ si trova per via numerica a_1 e in forma chiusa χ_{21} .

Il secondo gruppo di condizioni al contorno implica l'utilizzo di j-equazioni lungo il profilo dell'intaglio pari al numero di costanti da determinare meno 1. Le equazioni sono nella forma:

$$\begin{aligned}\sigma_u(\theta = \theta^j)|_{u=u_0} &= 0 \\ \tau_{uv}(\theta = \theta^j)|_{u=u_0} &= 0\end{aligned}\tag{Eq. 54}$$

Per risolvere questo sistema di equazioni nelle variabili χ_{2n} , χ_{2n} , a_n lasciando A_{11} indeterminato, vanno analizzati due casi: uno con $n = 2$ con $\chi_{12} = 0$ e uno con $n > 2$ o $\chi_{12} \neq 0$.

Caso $n > 2$ o $\chi_{12} \neq 0$: in queste condizioni il sistema di equazioni è caratterizzato da $n+1$ variabili esponenziali, a_n e t , e $2n$ variabili lineari, A_{1n} e A_{2n} . Un metodo efficace e veloce per risolvere un sistema simile è tramite metodi numerici, in questo progetto è stato usato il software Mathematica per risolvere numericamente sistemi simili.

Caso $n = 2$ con $\chi_{12} = 0$: in queste condizioni il sistema di equazioni è caratterizzato da 3 variabili esponenziali, a_1 , a_2 e t , e 3 variabili lineari, A_{11} , A_{21} e A_{22} . A questo punto due strade efficaci sono disponibili per la risoluzione. La prima uguale al caso precedente, lasciando la determinazione della soluzione a metodi numerici. La seconda che permette facilmente una stima accurata, analitica e in forma chiusa delle variabili. A_{21} e A_{22} Quest'ultimo metodo consiste nello sfruttare il primo gruppo di condizioni al contorno per la determinazione di a_1 per via numerica, e χ_{21} in forma chiusa. Determinare in seguito due sistemi di due equazioni nella seguente forma:

$$\sigma_{ij}(\theta = \theta^k)|_{u=u_0} = 0 \quad \text{Eq. 55}$$

$$\begin{bmatrix} c_{11} & c_{12} \\ c_{21} & c_{22} \end{bmatrix} \begin{Bmatrix} A_{11} \\ A_{22} \end{Bmatrix} = 0$$

$$\begin{bmatrix} d_{11} & d_{12} \\ d_{21} & d_{22} \end{bmatrix} \begin{Bmatrix} A_{11} \\ A_{22} \end{Bmatrix} = 0 \quad \text{Eq. 56}$$

Imponendo quindi $Det[[c_{ij}]] = 0$; $Det[[d_{ij}]] = 0$ si ottengono due equazioni nelle variabili esponenziali a_2 e t ; che andranno risolte numericamente. Sostituendo i valori trovati in una delle (Eq. 55) si ottiene infine χ_{22} in forma chiusa. Questo metodo seppur semplice presenta dei difetti in quanto il coefficiente χ_{22} così trovato non risolve perfettamente entrambi i sistemi e una verifica sui valori di $\sigma_{ij}(\theta = \theta^k)|_{u=u_0}$ è necessaria per indentificare la miglior soluzione.

Il terzo gruppo di condizioni al contorno implica l'imposizione a zero dei coefficienti della serie di McLaurin di $\sigma_u(\theta)|_{u=u_0}$ e $\tau_{uv}(\theta)|_{u=u_0}$.

$$\begin{aligned} \frac{\partial \sigma_u}{\partial v} \Big|_{u=u_0, v=0} &= \frac{\partial \sigma_r}{\partial \theta} \Big|_{u=u_0, \theta=0} - \frac{2}{q} \tau_{r\theta} \Big|_{u=u_0, \theta=0} = 0 \\ \frac{\partial \tau_{uv}}{\partial v} \Big|_{u=u_0, v=0} &= \frac{\partial \tau_{r\theta}}{\partial \theta} \Big|_{u=u_0, \theta=0} + \frac{\sigma_r - \sigma_\theta}{q} \Big|_{u=u_0, \theta=0} = 0 \\ &\vdots \end{aligned} \quad \text{Eq. 57}$$

Queste condizioni al contorno sono estremamente utili in quanto permettono una ottima rappresentazione delle tensioni lungo la bisettrice dell'intaglio, ma devono essere risolte numericamente.

Tutte queste condizioni al contorno possono essere usate per trovare le $3n$ costanti da determinare, e nei tentativi testati in questo progetto un mix dei precedenti viene usato per sfruttare le migliori proprietà di ogni gruppo cercando di mantenere la soluzione relativamente semplice.

Le ultime valutazioni preliminari vanno a toccare le varie soluzioni che si ottengono imponendo le precedenti condizioni al contorno al variare dei parametri, χ_{1n} e χ_{2n} .

Durante questo studio si sono trovate diverse tipologie di combinazioni dei parametri t, a_n, χ_{1n} e χ_{2n} che risolvono i vari sistemi di condizioni al contorno. Si possono dividere principalmente in 2 categorie: banali e non banali.

Soluzioni banali

Queste soluzioni sono dovute alla forma simmetrica delle tensioni.

Osservando che $2 \leq n \leq N$ e ipotizzando $\chi_{1n} \neq 0$ e $\chi_{2n} \neq 0 \forall n$, una possibile soluzione a tutte le condizioni al contorno del secondo e terzo gruppo è una soluzione con la seguente struttura:

$$\forall t \rightarrow \left. \begin{array}{l} a_{2m} = a_{2m-1} \\ \chi_{1,2m} = -\chi_{1,2m-1} \\ \chi_{2,2m} = -\chi_{2,2m-1} \\ \chi_{21} = -1 \end{array} \right| \forall m \text{ t. c. } 1 < m \leq N \quad \text{Eq. 58}$$

Imponendo invece $\chi_{1N} = 0$ una struttura che soddisfa tutte le condizioni al contorno del secondo e terzo gruppo è la seguente:

$$\forall t \rightarrow \left. \begin{array}{l} a_{2m} = a_{2m-1} \\ \chi_{1,2m} = -\chi_{1,2m-1} \\ \chi_{2,2m} = -\chi_{2,2m-1} \\ \chi_{21} = -1 \\ \chi_{2N} = 0 \end{array} \right| \forall m \text{ t. c. } 1 < m < N \quad \text{Eq. 59}$$

Queste strutture sfruttano la simmetria delle Eq. 49 per rispettare le soluzioni al contorno ma non migliorano la soluzione rispetto a quella del 2017.

Soluzioni non banali

Queste sono le soluzioni ricercate in questo lavoro. Queste soluzioni sono caratterizzate dalla struttura seguente:

$$\left. \begin{array}{l} a_n \neq a_m \\ \chi_{1,n} \neq \chi_{1,m} \\ \chi_{2,n} \neq \chi_{2,m} \\ \chi_{1,n} \neq \chi_{2,m} \end{array} \right| \forall n \neq m \quad \text{Eq. 60}$$

Inoltre le soluzioni devono avere le seguenti proprietà per essere consistenti con le ipotesi di sviluppo in serie e di condizioni al contorno all'infinito:

$$\begin{array}{l} a_n < 0 \\ a_1 > a_2 > a_3 > \dots \end{array} \quad \text{Eq. 61}$$

Queste soluzioni sono ovviamente in numero molto minore rispetto alle precedenti e diventano esponenzialmente più difficili da trovare al crescere del parametro n. Per questo motivo nei tentativi analizzati in seguito si avrà $n_{max} = 3$ e si imporrà $\chi_{1N} = 0$ per un buon trade-off tra completezza della soluzione e semplicità nella ricerca di una soluzione non banale.

3.4 Soluzione con potenziali a 2 termini, condizioni al contorno per $\theta = \frac{Y}{2}$ (Tentativo 1)

Le seguenti funzioni potenziali sono usate:

$$\begin{array}{l} \Phi'_1(z_1) = Az_1^{\lambda-1} \\ \Phi'_2(z_2) = Bz_2^{\lambda-1} + Cz_2^{\mu-1} \end{array} \quad \text{Eq. 62}$$

Sostituendole in Eq. 14 e raccogliendo A si ottiene:

$$\begin{array}{l} \sigma_r = 2A\{r_1^{\lambda-1}[k_{11} \cos(\lambda - 1) \theta_1 - k_{12} \sin(\lambda - 1) \theta_1] \\ \quad + \chi_{21}r_2^{\lambda-1}[k_{21} \cos(\lambda - 1) \theta_2 - k_{22} \sin(\lambda - 1) \theta_2] \\ \quad + \chi_{22}r_2^{\mu-1}[k_{21} \cos(\mu - 1) \theta_2 - k_{22} \sin(\mu - 1) \theta_2]\} \\ \sigma_\theta = 2A\{r_1^{\lambda-1}[m_{11} \cos(\lambda - 1) \theta_1 - m_{12} \sin(\lambda - 1) \theta_1] \\ \quad + \chi_{21}r_2^{\lambda-1}[m_{21} \cos(\lambda - 1) \theta_2 - m_{22} \sin(\lambda - 1) \theta_2] \\ \quad + \chi_{22}r_2^{\mu-1}[m_{21} \cos(\mu - 1) \theta_2 - m_{22} \sin(\mu - 1) \theta_2]\} \\ \tau_{r\theta} = 2A\{r_1^{\lambda-1}[n_{11} \cos(\lambda - 1) \theta_1 - n_{12} \sin(\lambda - 1) \theta_1] \\ \quad + \chi_{21}r_2^{\lambda-1}[n_{21} \cos(\lambda - 1) \theta_2 - n_{22} \sin(\lambda - 1) \theta_2] \\ \quad + \chi_{22}r_2^{\mu-1}[n_{21} \cos(\mu - 1) \theta_2 - n_{22} \sin(\mu - 1) \theta_2]\} \end{array} \quad \text{Eq. 63}$$

Le condizioni al contorno imposte sono:

Gruppo 1

$$\begin{aligned}\sigma_u|_{u=u_0} &= 0 \\ \tau_{uv}|_{u=u_0} &= 0\end{aligned}\tag{Eq. 64}$$

$$\begin{bmatrix} b_{11} & b_{12} \\ b_{21} & b_{22} \end{bmatrix} \begin{Bmatrix} A \\ B \end{Bmatrix} = 0\tag{Eq. 65}$$

$$\begin{aligned}b_{11} &= \rho_1^{\lambda-1} [m_{11} \cos(1-\lambda) \theta_1(\gamma) + m_{12} \sin(1-\lambda) \theta_1(\gamma)] \\ b_{12} &= \rho_2^{\lambda-1} [m_{21} \cos(1-\lambda) \theta_2(\gamma) + m_{22} \sin(1-\lambda) \theta_2(\gamma)] \\ b_{21} &= \rho_1^{\lambda-1} [n_{11} \cos(1-\lambda) \theta_1(\gamma) + n_{12} \sin(1-\lambda) \theta_1(\gamma)] \\ b_{22} &= \rho_2^{\lambda-1} [n_{21} \cos(1-\lambda) \theta_2(\gamma) + n_{22} \sin(1-\lambda) \theta_2(\gamma)]\end{aligned}\tag{Eq. 66}$$

Per $u = u_0$ e $\theta \rightarrow \pm\gamma$ da cui:

$$B = -A \frac{\rho_1^{\lambda-1} [m_{11} \cos(1-\lambda) \theta_1(\gamma) + m_{12} \sin(1-\lambda) \theta_1(\gamma)]}{\rho_2^{\lambda-1} [m_{21} \cos(1-\lambda) \theta_2(\gamma) + m_{22} \sin(1-\lambda) \theta_2(\gamma)]} = A\chi_{21}\tag{Eq. 67}$$

Mentre λ trovato numericamente dall'equazione: $Det[[b_{ij}]] = 0$

Gruppo 3

$$\left. \frac{\partial \tau_{uv}}{\partial v} \right|_{u=u_0, v=0} = \left. \frac{\partial \tau_{r\theta}}{\partial \theta} \right|_{u=u_0, \theta=0} + \left. \frac{\sigma_r - \sigma_\theta}{q} \right|_{u=u_0, \theta=0} = 0\tag{Eq. 68}$$

Gruppo 2

$$\begin{aligned}\sigma_u(\theta = 0)|_{u=u_0} &= 0 \\ \sigma_u(\theta = \frac{\gamma}{2})|_{u=u_0} &= 0 \\ \tau_{uv}(\theta = \frac{\gamma}{2})|_{u=u_0} &= 0\end{aligned}\tag{Eq. 69}$$

Queste condizioni sono state scelte per cercare di dare un'omogeneità alle soluzione lungo tutto il profilo dell'intaglio.

Le condizioni al contorno sono state organizzate nel seguente modo:

$$\left. \begin{aligned}\sigma_u(\theta = 0)|_{u=u_0} &= 0 \\ \left. \frac{\partial \tau_{uv}}{\partial v} \right|_{u=u_0, v=0} = \left. \frac{\partial \tau_{r\theta}}{\partial \theta} \right|_{u=u_0, \theta=0} + \left. \frac{\sigma_r - \sigma_\theta}{q} \right|_{u=u_0, \theta=0} &= 0\end{aligned} \right\}\tag{Eq. 70}$$

$$\rightarrow \begin{bmatrix} c_{11} & c_{12} \\ c_{21} & c_{22} \end{bmatrix} \begin{Bmatrix} A \\ C \end{Bmatrix} = 0$$

$$\left. \begin{aligned}\sigma_u(\theta = \frac{\gamma}{2})|_{u=u_0} &= 0 \\ \tau_{uv}(\theta = \frac{\gamma}{2})|_{u=u_0} &= 0\end{aligned} \right\} \rightarrow \begin{bmatrix} d_{11} & d_{12} \\ d_{21} & d_{22} \end{bmatrix} \begin{Bmatrix} A \\ C \end{Bmatrix} = 0\tag{Eq. 71}$$

A questo punto è applicato il procedimento mostrato per il caso $n = 2$ con $\chi_{12} = 0$.

Risulta infine utile riscrivere la costante A in funzione della tensione all'apice dell'intaglio σ_{tip} .

$$A = \frac{\sigma_{tip}}{2\{(r_0\beta_1^t)^{\lambda-1} + \chi_{21}(r_0\beta_2^t)^{\lambda-1} + \chi_{22}(r_0\beta_2^t)^{\mu-1}\}} = \frac{\sigma_{tip}}{\tilde{A}} \quad Eq. 72$$

Si procede al confronto dei risultati analitici con i risultati condotti tramite l'analisi agli elementi finiti e con i risultati della soluzione del 2017. Le equazioni sono testate per due materiali con comportamenti opposti, sia lungo il profilo dell'intaglio che lungo la bisettrice dell'intaglio.

3.4.1 Materiale 1

il primo materiale testato è un UD epossidico in fibre di carbonio, con fibre allineate lungo l'asse y in Fig, 1.1, caratterizzato dalle proprietà:

$$E_x = 10Gpa, \quad E_y = 160Gpa, \quad G_{xy} = 5Gpa, \quad \nu_{xy} = 0.01875$$

$$\beta_1 = 0.1799, \quad \beta_2 = 1.3893$$

α	λ	μ	χ_{21}	χ_{22}	t	\tilde{A}
30°	0.502337	-0.808229	-0.121152	0.00566638	1.87304	15.34728
45°	0.508722	-0.722841	-0.110332	0.00560792	1.77546	15.05827
67.5°	0.545639	-0.305372	-0.080422	0.00427314	1.52999	13.46061

Tab. 3.1: Valori parametri tensionali Tentativo 1 (Eq. 63) Modo I-Materiale 1

Il parametro χ_{22} è stato calcolato dal primo sistema (Eq. 70).

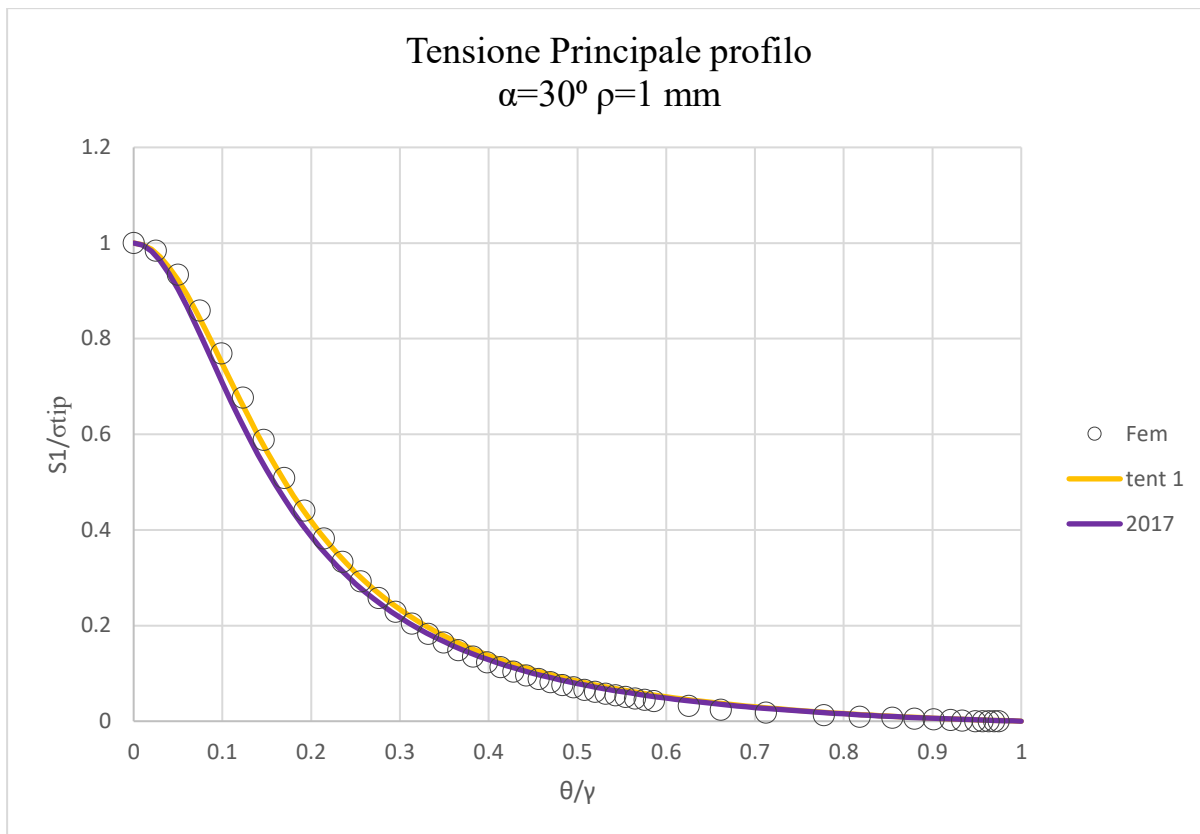


Fig. 3.1: Andamenti tensione principale lungo profilo dell'intaglio per Modo I-Materiale 1 con $\alpha=30^\circ \rho=1 \text{ mm}$; confronto Fem, Tentativo 1 (Eq. 63) e soluzione 2017 (Eq. 36)

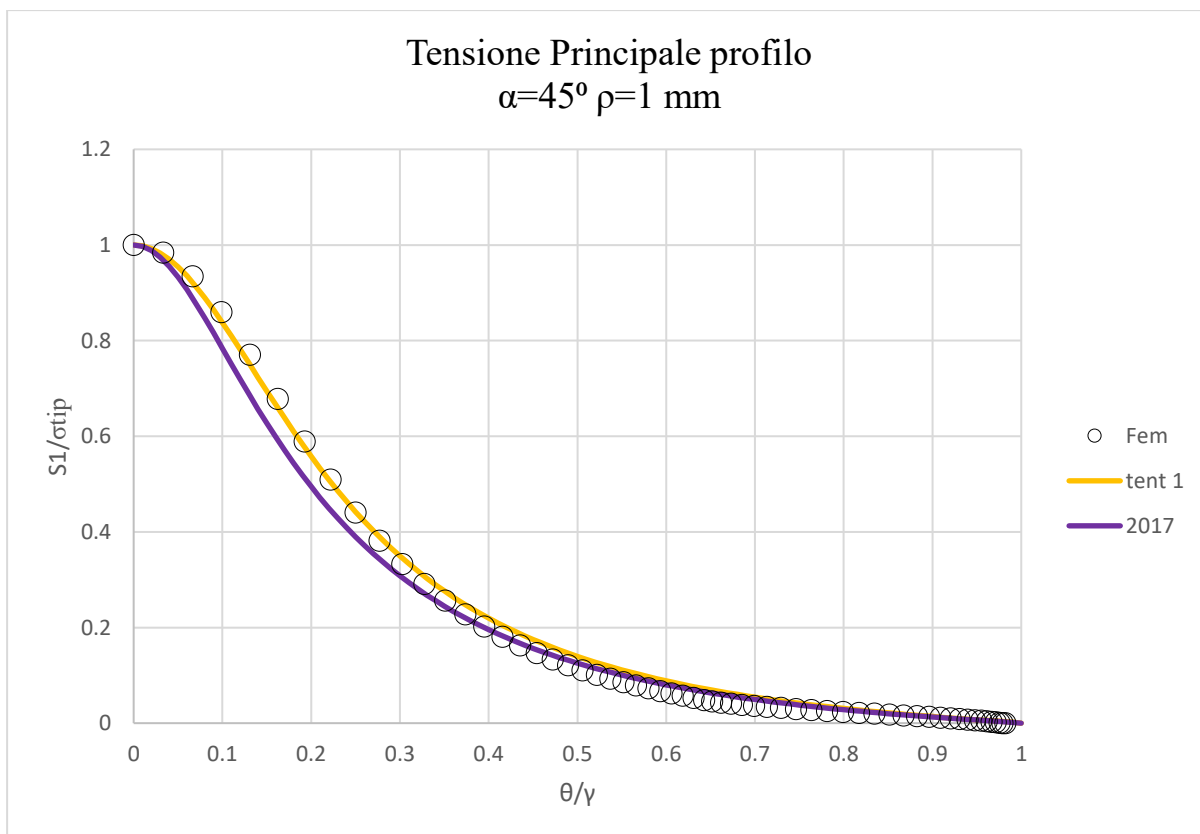


Fig. 1.2: Andamenti tensione principale lungo profilo dell'intaglio per Modo I-Materiale 1 con $\alpha=45^\circ \rho=1 \text{ mm}$; confronto Fem, Tentativo 1 (Eq. 63) e soluzione 2017 (Eq. 36)

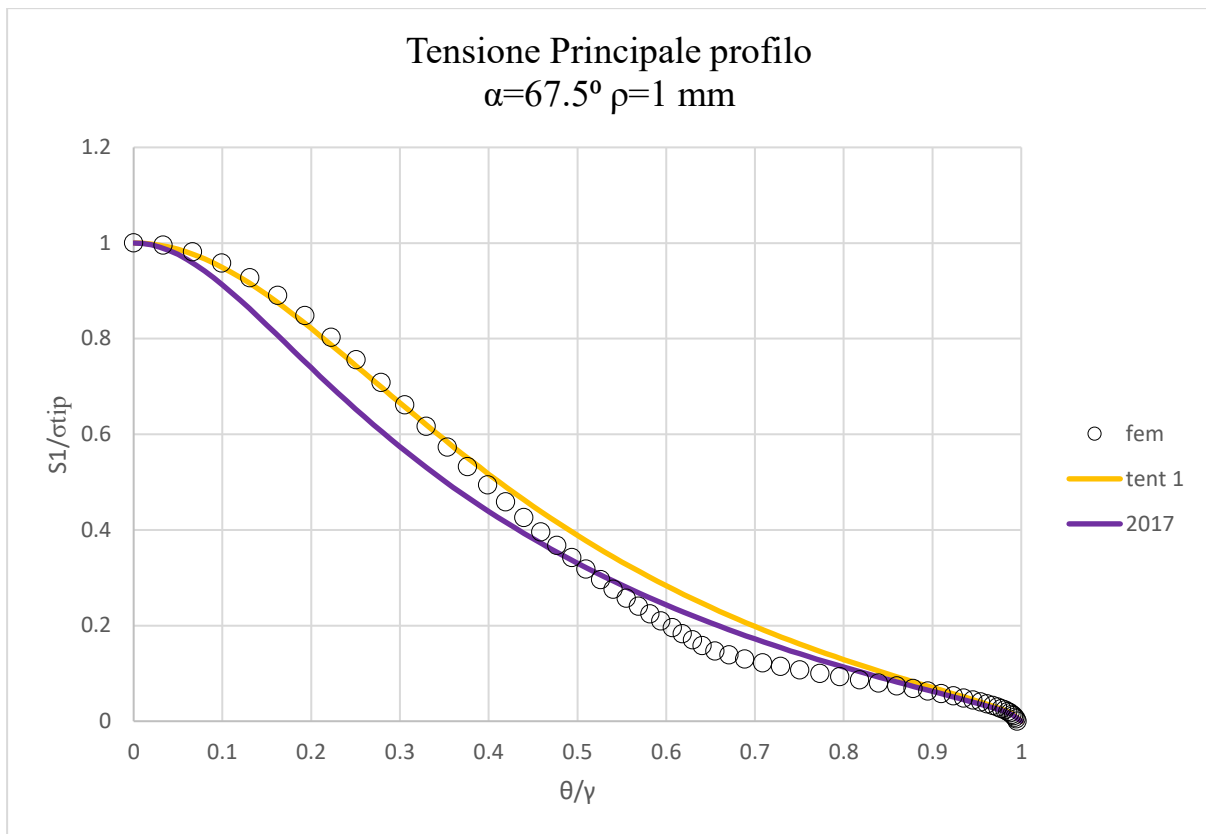


Fig.3.3: Andamenti tensione principale lungo profilo dell'intaglio per Modo I-Materiale 1 con $\alpha=67.5^\circ$ $\rho=1$ mm; confronto Fem, Tentativo 1 (Eq. 63) e soluzione 2017 (Eq. 36)

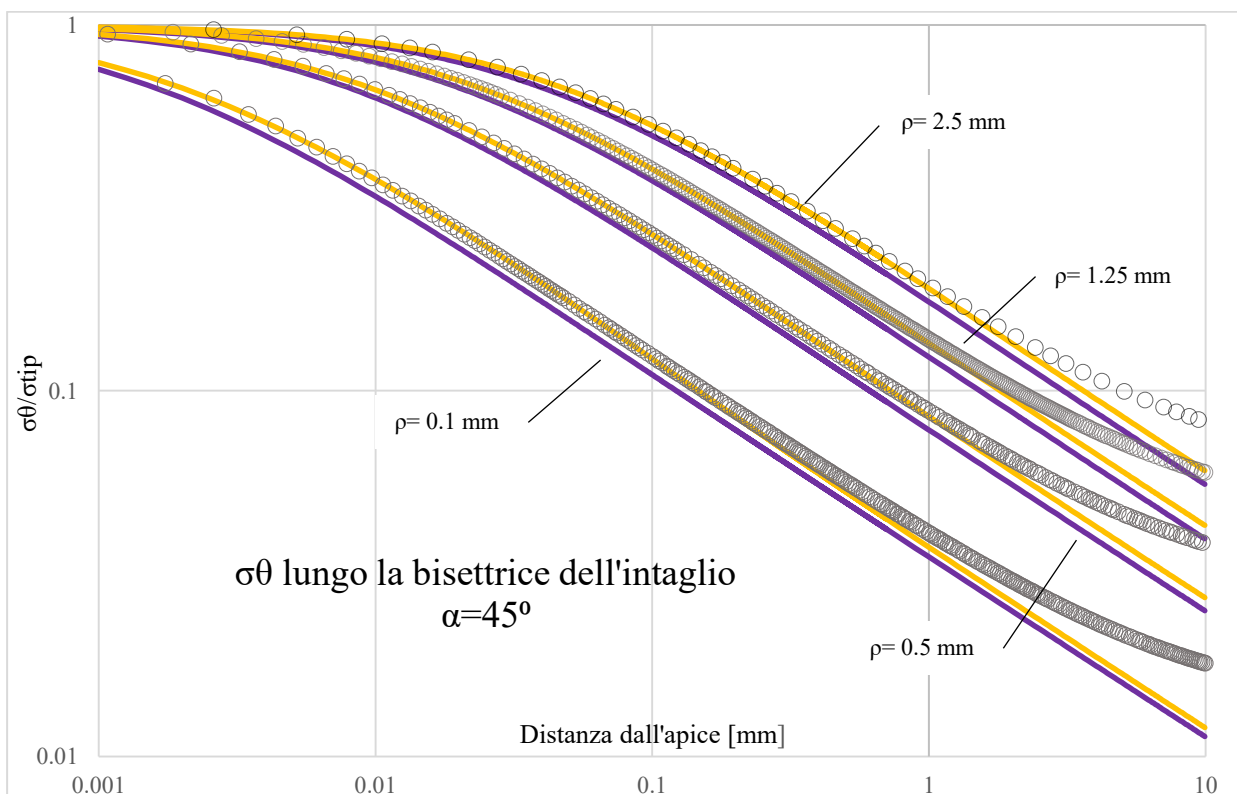


Fig.3.4: Andamenti σ_θ lungo la bisettrice dell'intaglio per Modo I-Materiale 1 con $\alpha=45^\circ$ e ρ variabile; confronto Fem, Tentativo 1 (Eq. 63) e soluzione 2017 (Eq. 36)

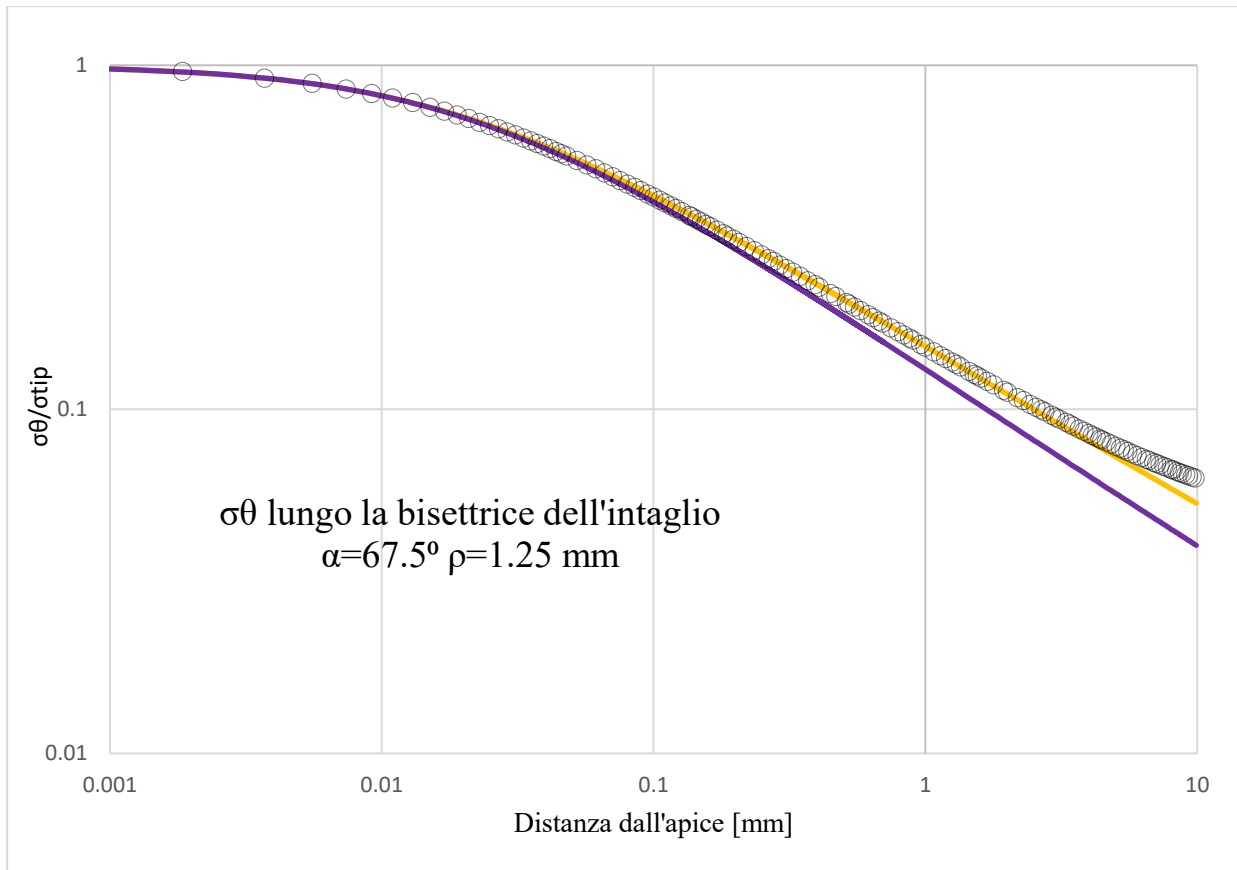


Fig. 3.5: Andamenti σ_θ lungo la bisettrice dell'intaglio per Modo I-Materiale 1 con $\alpha=45^\circ$ e $\rho=1.25$ mm; confronto Fem, Tentativo 1 (Eq. 63) e soluzione 2017 (Eq. 36)

3.4.2 Materiale 2

Il secondo materiale testato è un UD epossidico in fibre di carbonio, con fibre allineate lungo l'asse x in Fig. 1.1, caratterizzato dalle proprietà:

$$E_x = 160Gpa, \quad E_y = 10Gpa, \quad G_{xy} = 5Gpa, \quad \nu_{xy} = 0.3$$

$$\beta_1 = 0.7198, \quad \beta_2 = 5.5572$$

α	λ	μ	χ_{21}	χ_{22}	t	\tilde{A}
30°	0.54257	-10.6883	-0.0821628	-6.27E 8	1.82408	3.867833
45°	0.593635	-8.86068	-0.0607273	-34221	1.62526	3.818315
67.5°	0.726081	0.371561	-0.0349145	0.0017566	1.2323	3.414613

Tab. 3.2 Valori parametri tensionali Tentativo 1 (Eq. 63) Modo I-Materiale 2

Il parametro χ_{22} è stato calcolato dal primo sistema (Eq. 70).

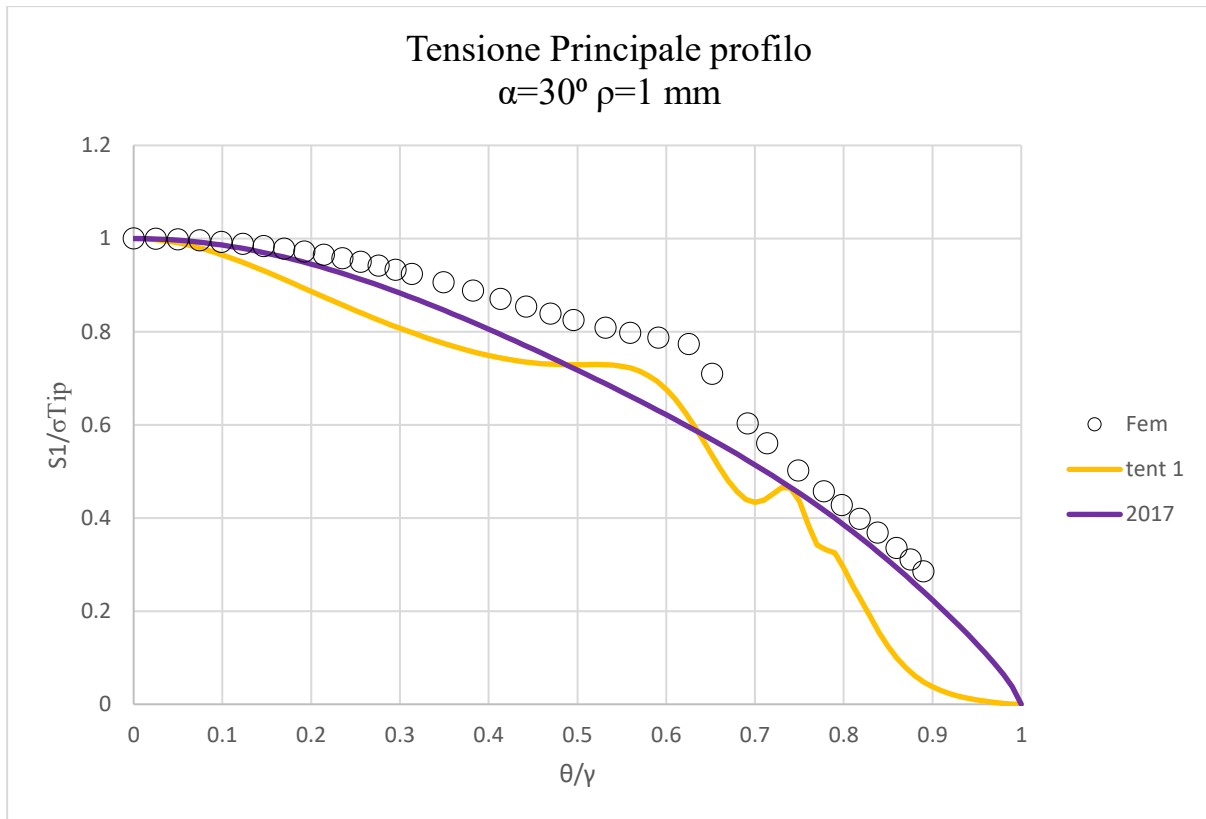


Fig.3.6: Andamenti tensione principale lungo profilo dell'intaglio per Modo I-Materiale 2 con $\alpha=30^\circ \rho=1 \text{ mm}$; confronto Fem, Tentativo 1 (Eq. 63) e soluzione 2017 (Eq. 36)

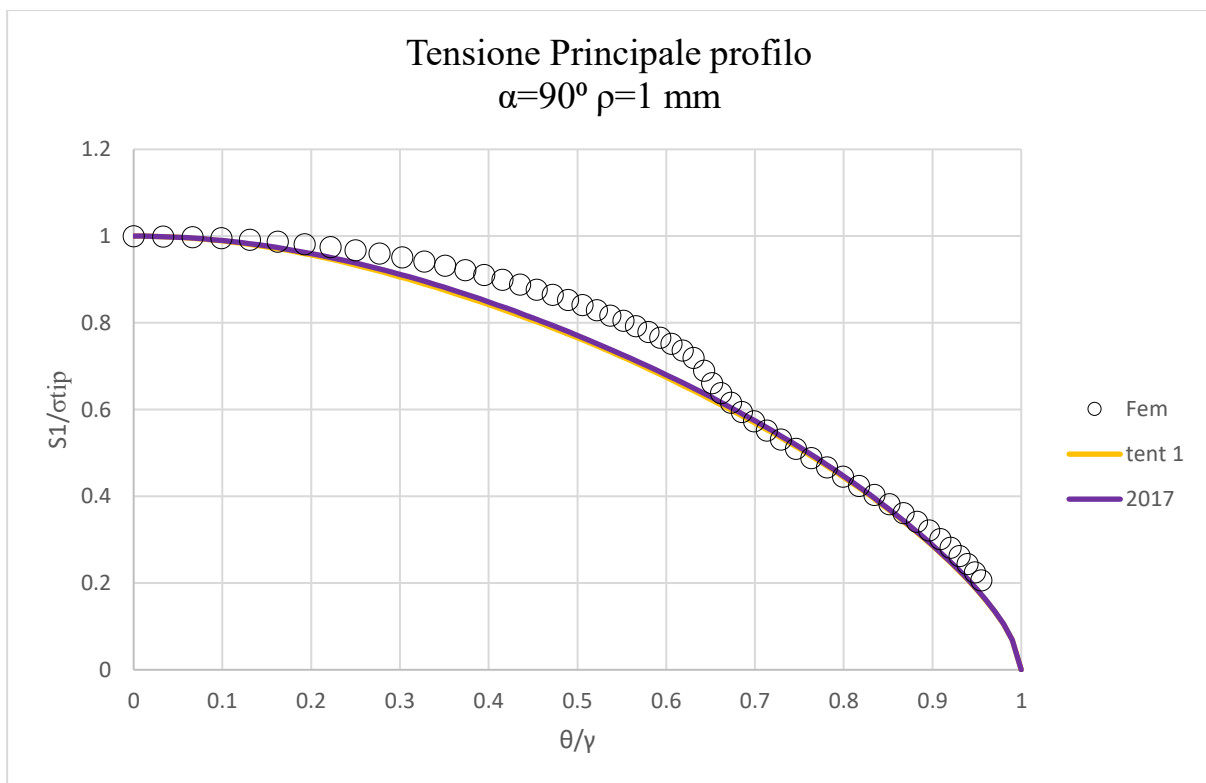


Fig. 3.7 Andamenti tensione principale lungo profilo dell'intaglio per Modo I-Materiale 2 con $\alpha=45^\circ \rho=1 \text{ mm}$; confronto Fem, Tentativo 1 (Eq. 63) e soluzione 2017 (Eq. 36)

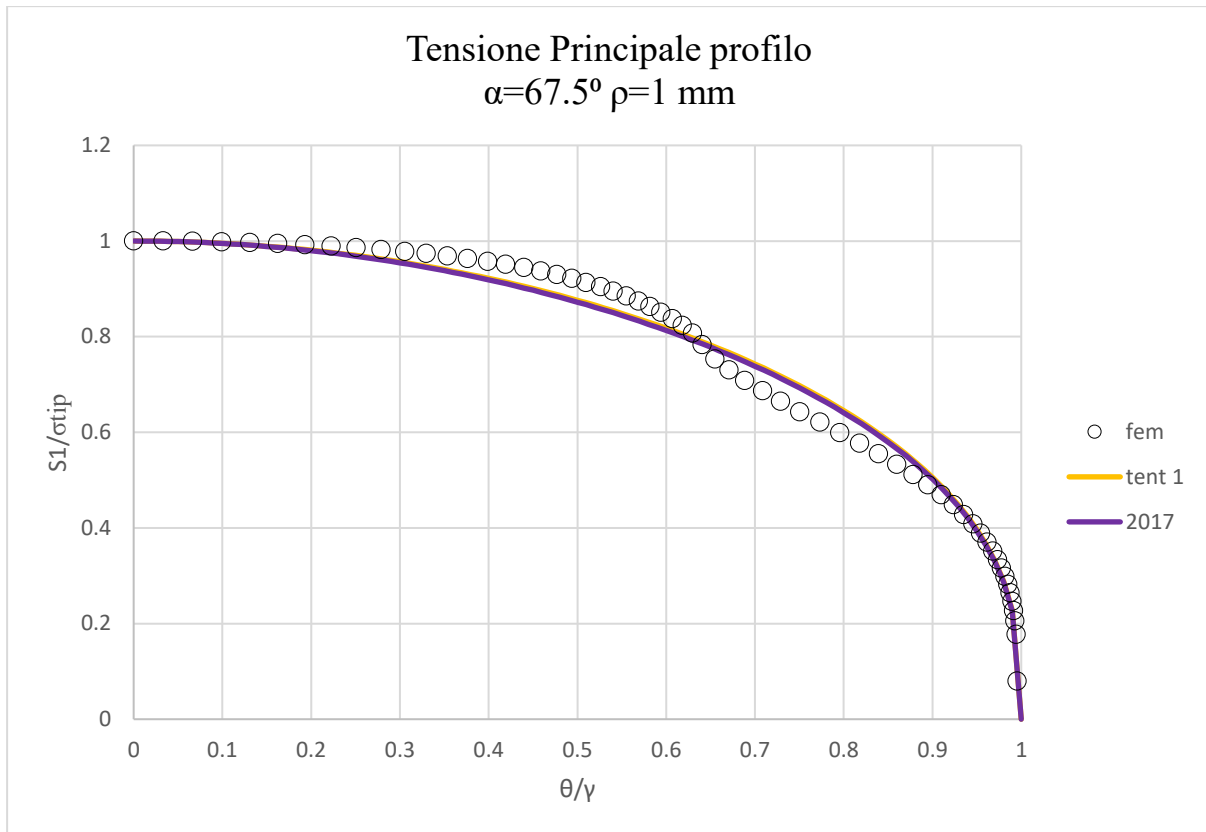


Fig. 3.8: Andamenti tensione principale lungo profilo dell'intaglio per Modo I-Materiale 2 con $\alpha=67.5^\circ \rho=1 \text{ mm}$; confronto Fem, Tentativo 1 (Eq. 63) e soluzione 2017 (Eq. 36)

I risultati lungo la bisettrice con questo materiale usando questo metodo sono instabili, dovuti alle variabili C e μ . Questo può indicare che l'approssimazione dei potenziali della soluzione del 2017 era sufficiente a descrivere il comportamento delle tensioni per un materiale rigido lungo l'asse x ; oppure che le condizioni al contorno imposte siano un caso particolare.

Per verificare queste ipotesi si è provato lo stesso metodo variando leggermente le condizioni al contorno.

3.5 Soluzione con potenziali a 2 termini, condizioni al contorno per $\theta = \frac{3\gamma}{4}$ (Tentativo 2)

Condizioni al contorno imposte:

$$\begin{aligned} \sigma_u(\theta = 0)|_{u=u_0} &= 0 \\ \frac{\partial \tau_{uv}}{\partial v} \Big|_{u=u_0, v=0} &= \frac{\partial \tau_{r\theta}}{\partial \theta} \Big|_{u=u_0, \theta=0} + \frac{\sigma_r - \sigma_\theta}{q} \Big|_{u=u_0, \theta=0} = 0 \\ \sigma_u(\theta = \frac{3\gamma}{4}) \Big|_{u=u_0} &= 0 \\ \tau_{uv}(\theta = \frac{3\gamma}{4}) \Big|_{u=u_0} &= 0 \end{aligned} \quad \text{Eq. 73}$$

3.5.1 Materiale 1:

$$\begin{aligned} E_x = 10Gpa, \quad E_y = 160Gpa, \quad G_{xy} = 5Gpa, \quad \nu_{xy} = 0.01875 \\ \beta_1 = 0.1799, \quad \beta_2 = 1.3893 \end{aligned}$$

α	λ	μ	χ_{21}	χ_{22}	t	\tilde{A}
30°	0.502337	-0.80823	-0.12115	0.00566	1.87304	15.34728
45°	0.508722	-0.72284	-0.11033	0.005608	1.77546	15.05827
67.5°	0.5456639	-0.59495	-0.08042	0.003149	1.178097	13.43169

Tab. 1.3: Valori parametri tensionali Tentativo 2 (Eq. 63) Modo I-materiale 1

Il parametro χ_{22} è stato calcolato dal primo sistema (Eq. 70).

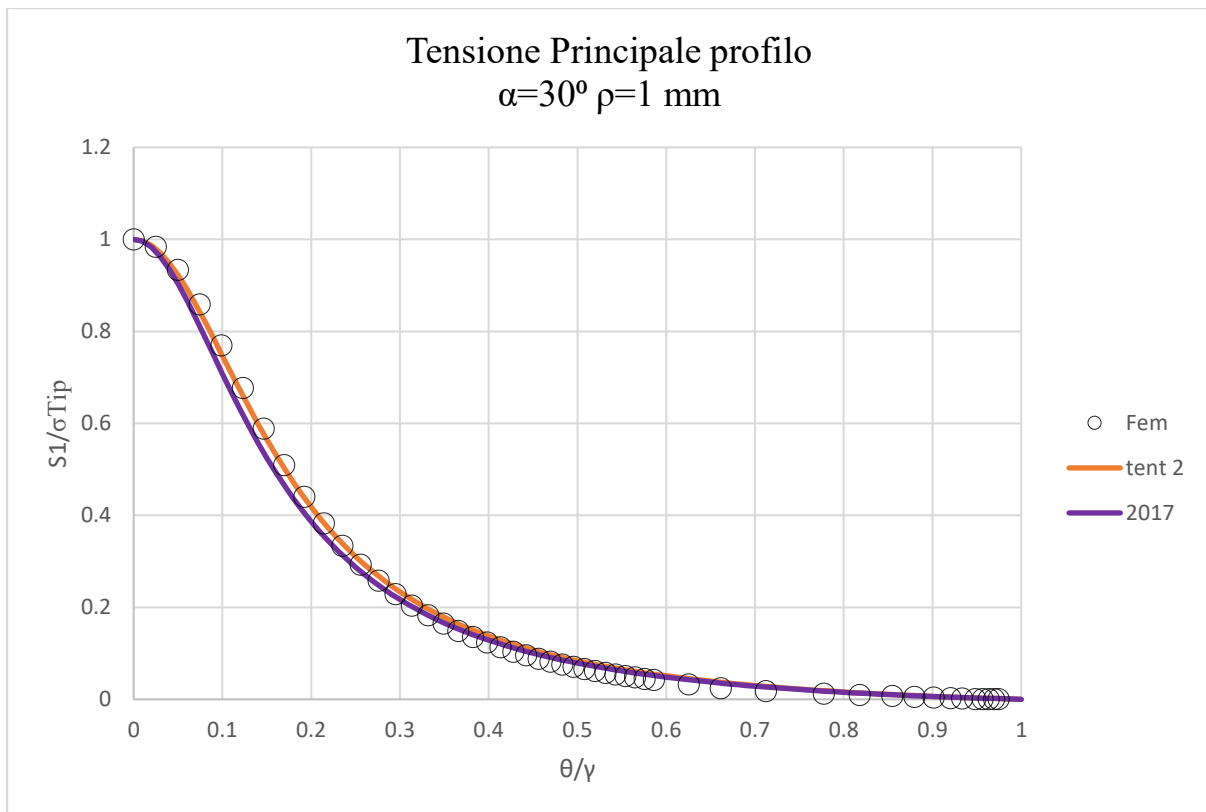


Fig.3.9: Andamenti tensione principale lungo profilo dell'intaglio per Modo I-Materiale 1 con $\alpha=30^\circ \rho=1 \text{ mm}$; confronto Fem, Tentativo 2 (Eq. 63) e soluzione 2017 (Eq. 36)

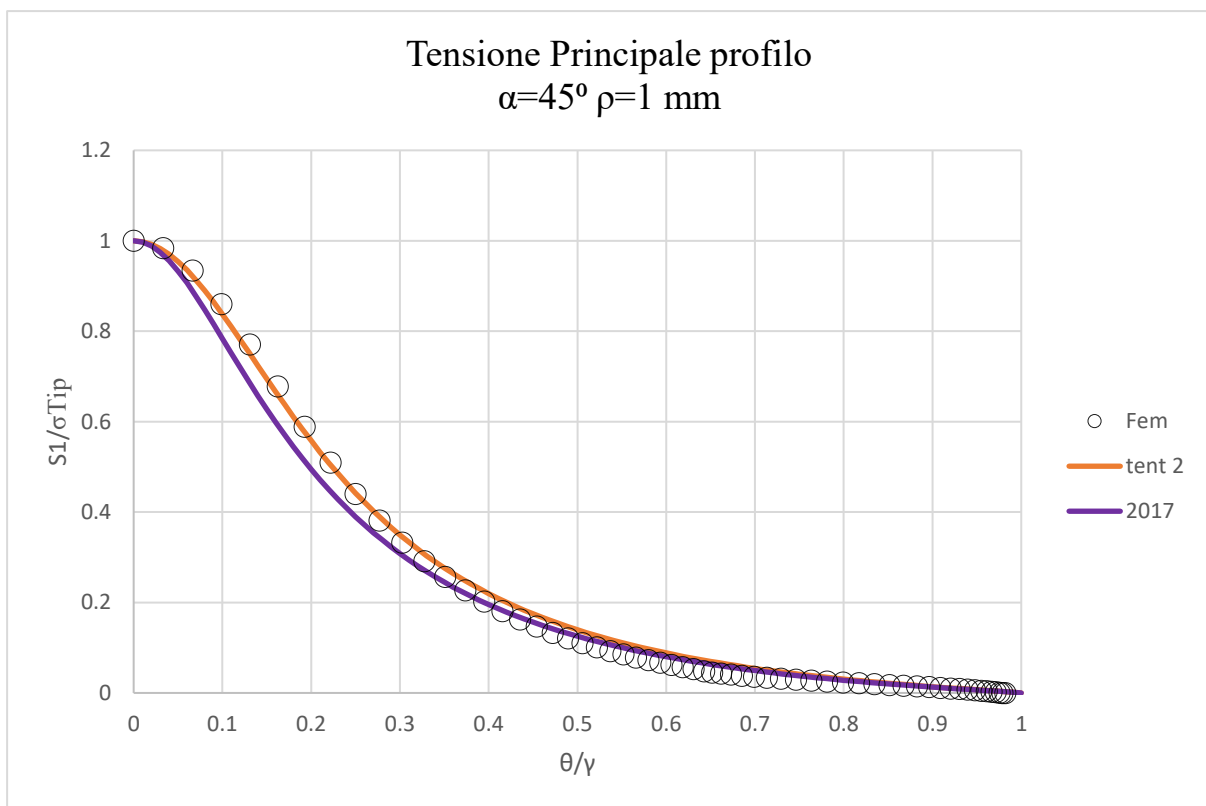


Fig.3.10: Andamenti tensione principale lungo profilo dell'intaglio per Modo I-Materiale 1 con $\alpha=45^\circ \rho=1 \text{ mm}$; confronto Fem, Tentativo 2 (Eq. 63) e soluzione 2017 (Eq. 36)

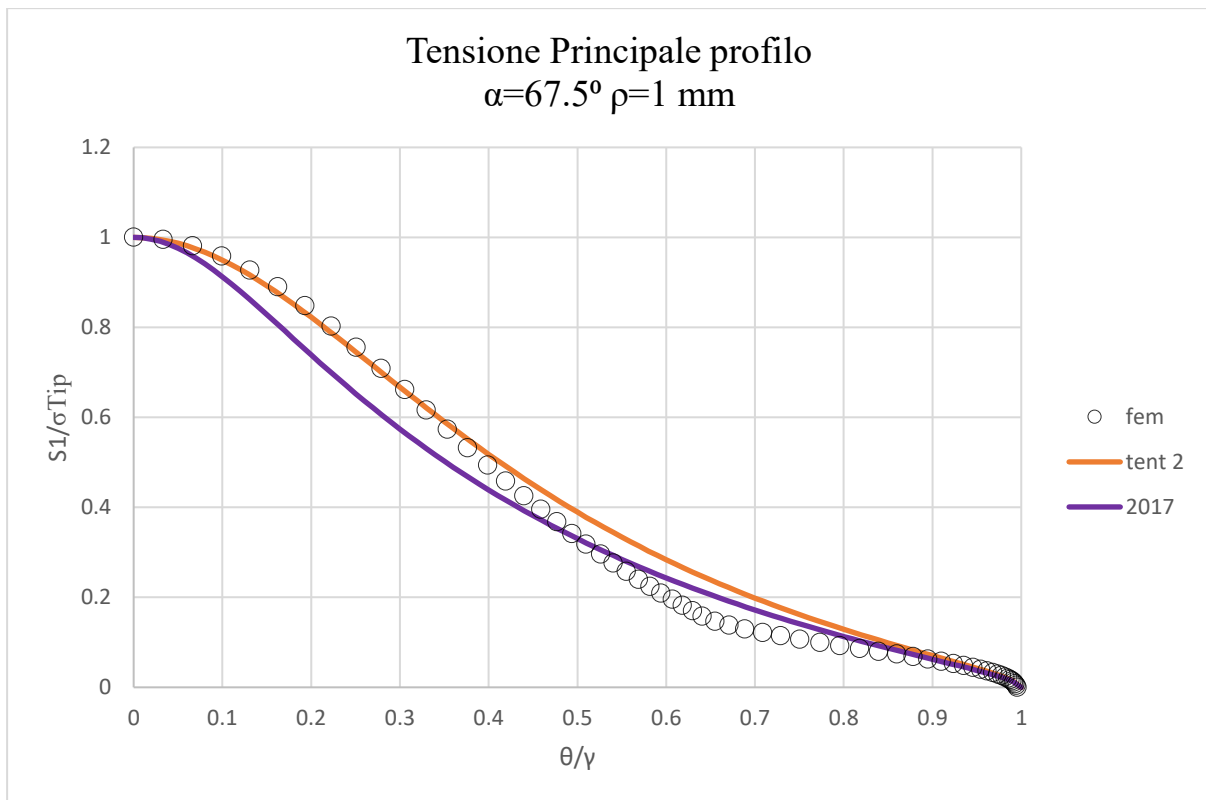


Fig.3.11 Andamenti tensione principale lungo profilo dell'intaglio per Modo I-Materiale 1 con $\alpha=67.5^\circ$ $\rho=1$ mm; confronto Fem, Tentativo 2 (Eq. 63) e soluzione 2017 (Eq. 36)

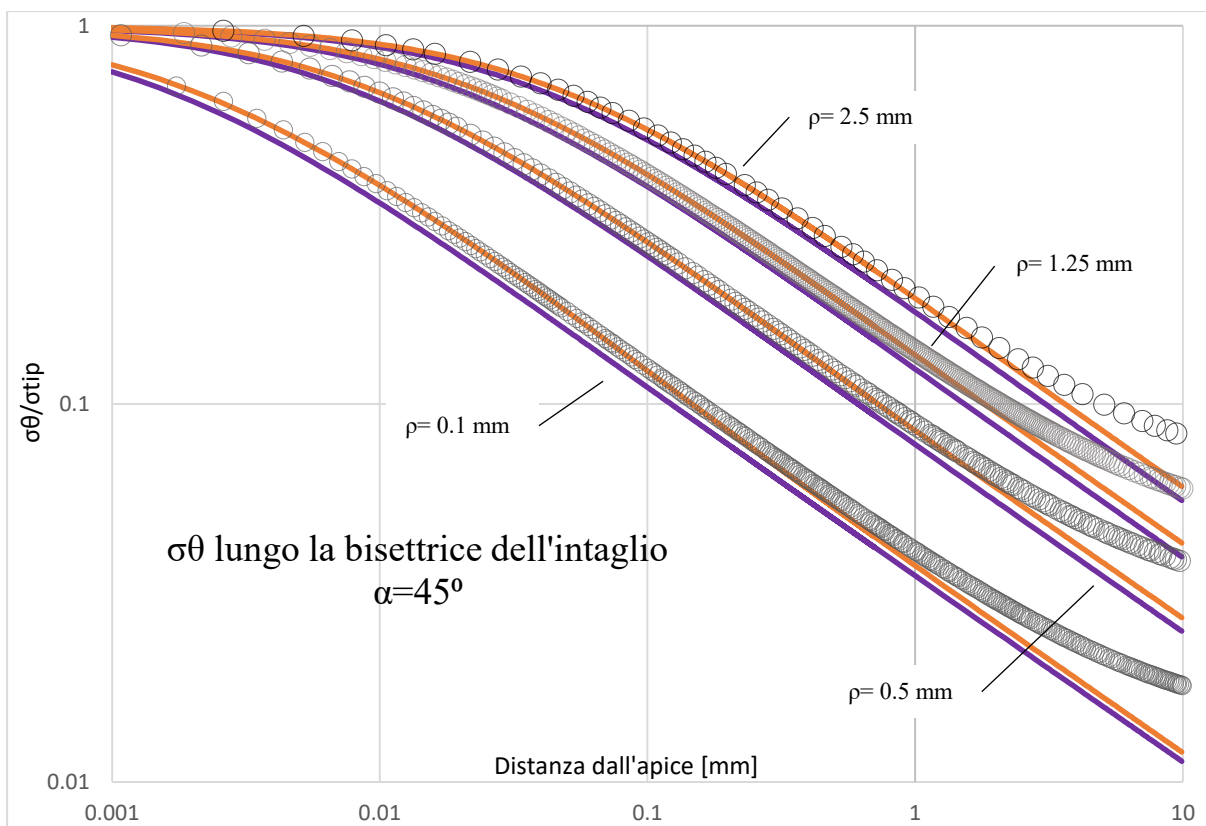


Fig. 3.12: Andamenti σ_θ lungo la bisettrice dell'intaglio per Modo I-Materiale 1 con $\alpha=45^\circ$ e ρ variabile; confronto Fem, Tentativo 2 (Eq. 63) e soluzione 2017 (Eq. 36)

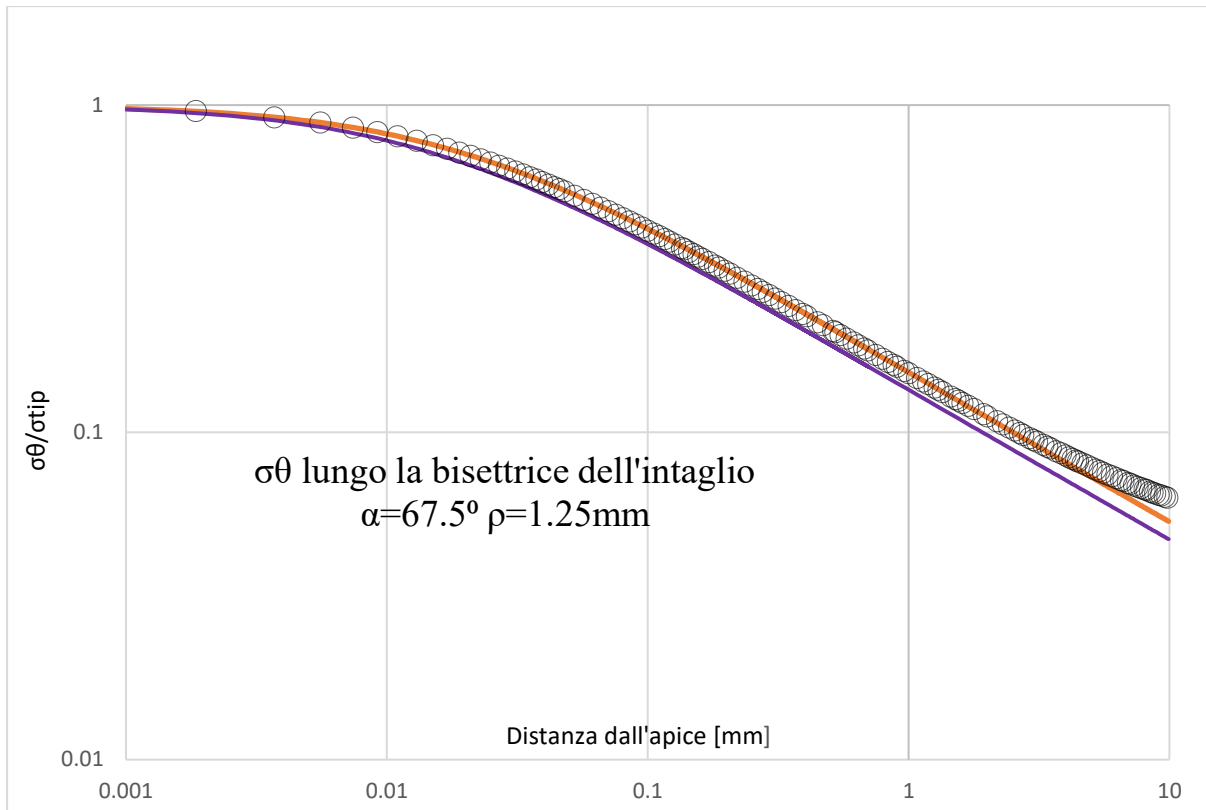


Fig.3.13: Andamenti σ_θ lungo la bisettrice dell'intaglio per Modo I-Materiale 1 con $\alpha=45^\circ$ e $\rho=1.25$ mm; confronto Fem, Tentativo 2 (Eq. 63) e soluzione 2017 (Eq. 36)

3.5.2 Materiale 2:

$$E_x = 160Gpa, \quad E_y = 10Gpa, \quad G_{xy} = 5Gpa, \quad \nu_{xy} = 0.3$$

$$\beta_1 = 0.7198, \quad \beta_2 = 5.5572$$

α	λ	μ	χ_{21}	χ_{22}	t	\tilde{A}
30°	0.54257	-1.02633	-0.0821628	0.104682	1.62391	3.817732
45°	0.593635	-0.532609	-0.0607273	0.0188754	1.47114	3.740494
67.5°	0.726081	-0.300676	-0.0349145	0.00331376	1.19851	3.404238

Tab.3.4: Valori parametri tensionali Tentativo 2 (Eq. 63) Modo I-Materiale 2

Il parametro χ_{22} è stato calcolato dal primo sistema (Eq. 70).

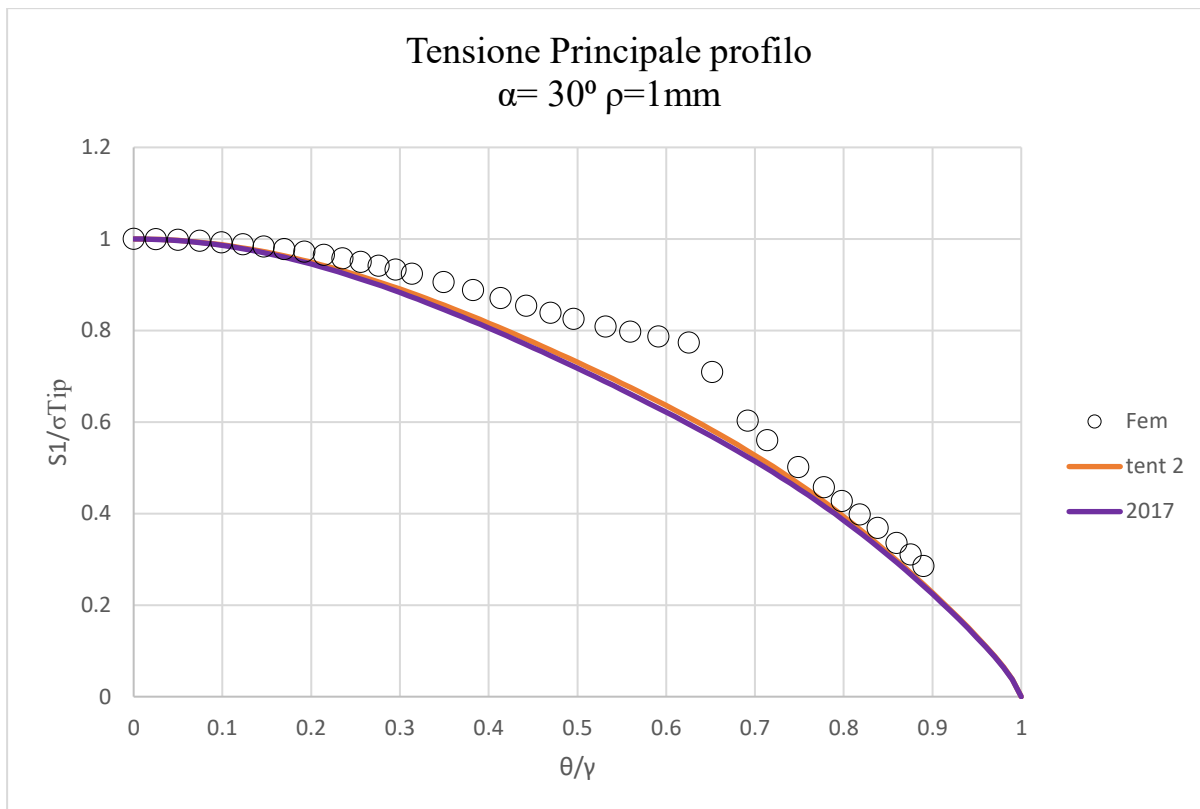


Fig.3.14: Andamenti tensione principale lungo profilo dell'intaglio per Modo I-Materiale 2 con $\alpha=30^\circ \rho=1\text{ mm}$; confronto Fem, Tentativo 2 (Eq. 63) e soluzione 2017 (Eq. 36)

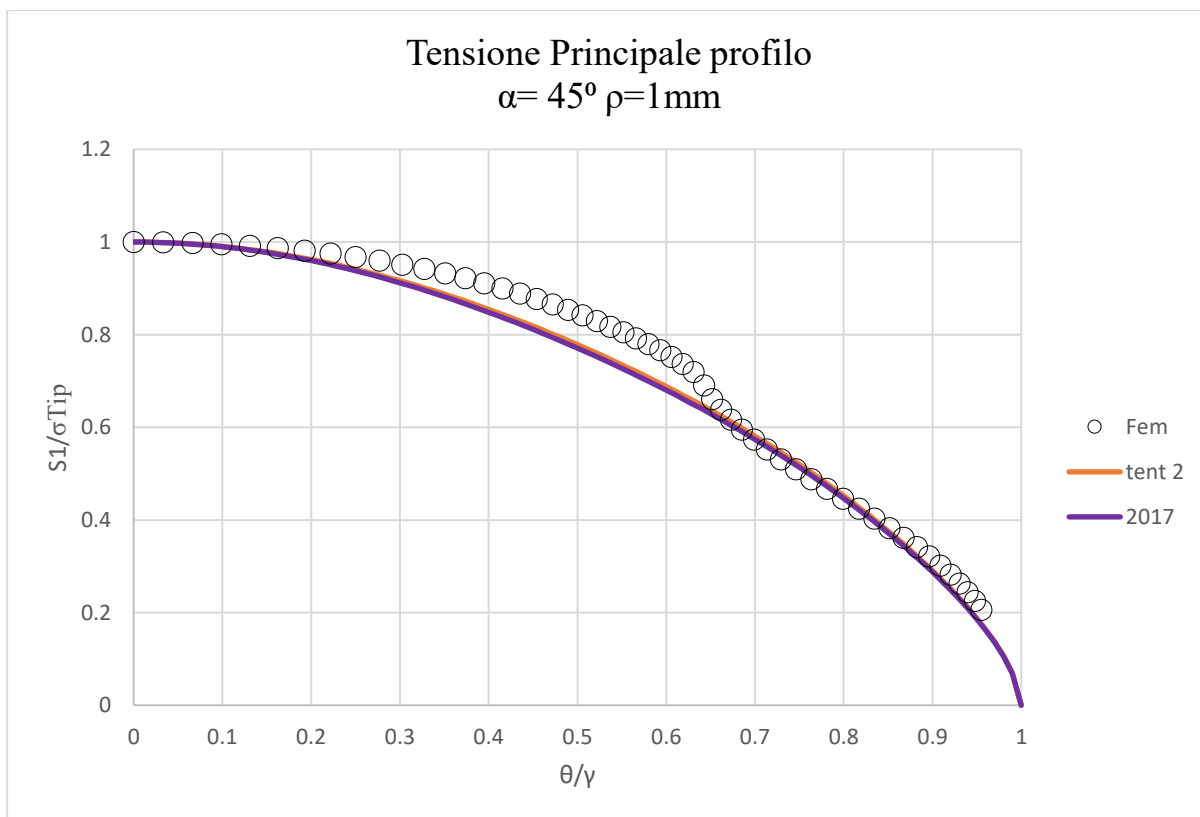


Fig.3.15: Andamenti tensione principale lungo profilo dell'intaglio per Modo I-Materiale 2 con $\alpha=45^\circ \rho=1\text{ mm}$; confronto Fem, Tentativo 2 (Eq. 63) e soluzione 2017 (Eq. 36)

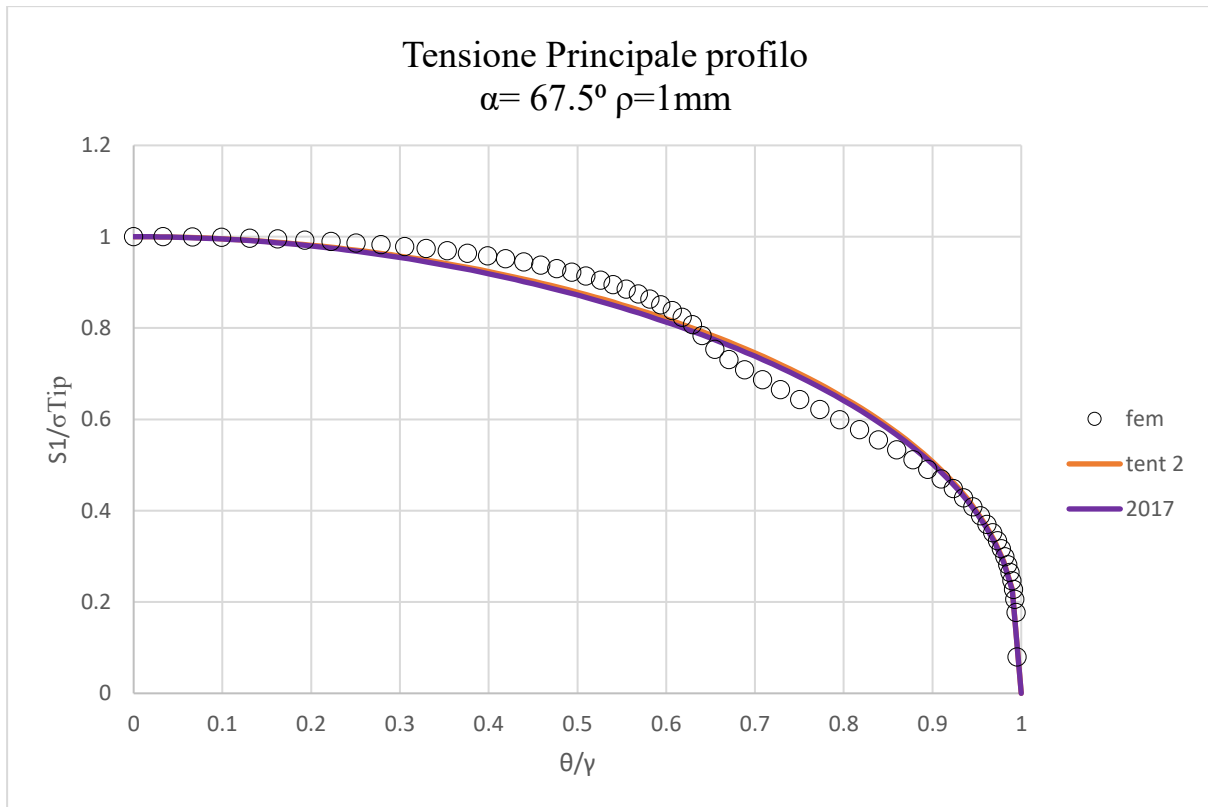


Fig.3.16: Andamenti tensione principale lungo profilo dell'intaglio per Modo I-Materiale 2 con $\alpha=67.5^\circ \rho=1\text{ mm}$; confronto Fem, Tentativo 2 (Eq. 63) e soluzione 2017 (Eq. 36)

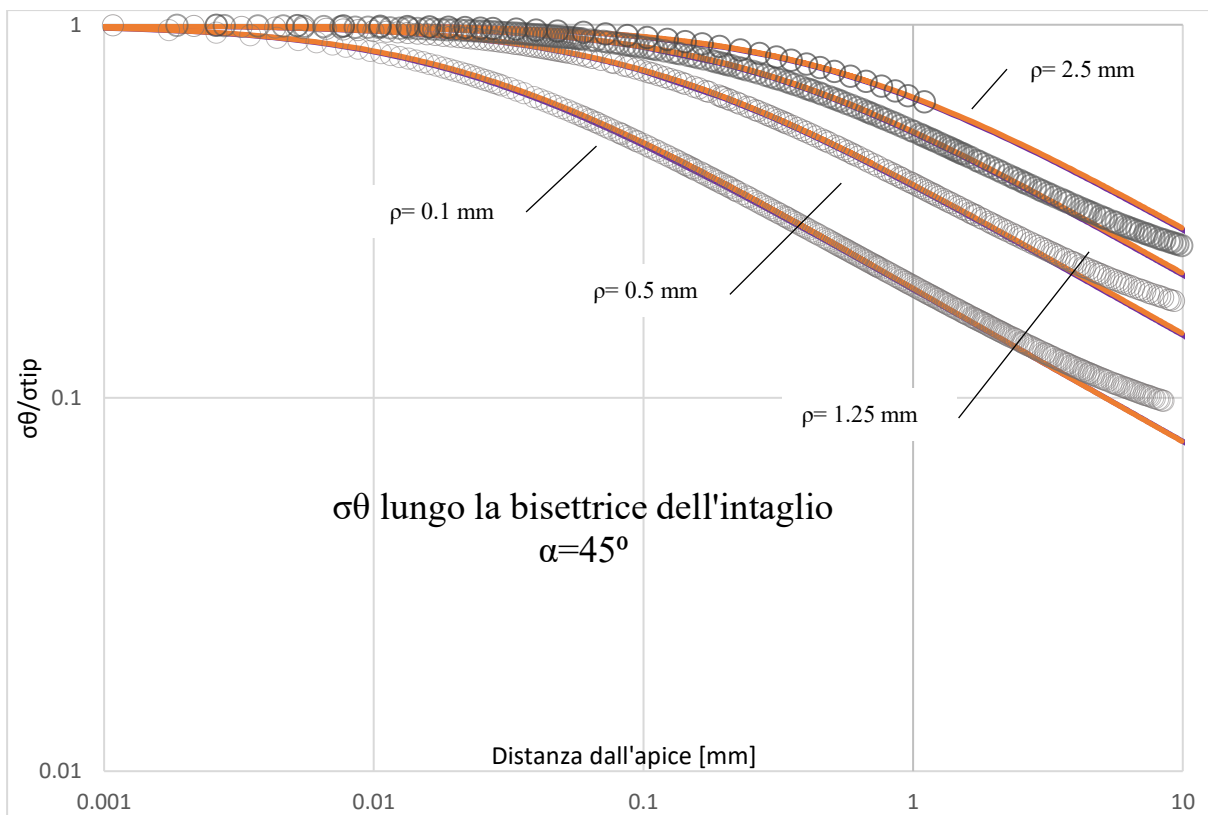


Fig.3.17: Andamenti σ_θ lungo la bisettrice dell'intaglio per Modo I-Materiale 2 con $\alpha=45^\circ$ e ρ variabile; confronto Fem, Tentativo 2 (Eq. 63) e soluzione 2017 (Eq. 36)

I risultati con queste condizioni al contorno rimangono stabili anche con un materiale rigido lungo l'asse x , preservando l'accuratezza della soluzione del 2017.

Si introduce ora un metodo d'approccio al problema alternativo in cui le condizioni al contorno non sono imposte all'infinito; sfruttando le risoluzioni numeriche a sistemi di equazioni complessi si cerca di calcolare le variabili di Eq. 49.

3.6 Soluzione con potenziali a 2 termini, condizioni al contorno di gruppo 2 (Tentativo 3)

Le seguenti funzioni potenziali sono usate:

$$\begin{aligned}\phi'_1(z_1) &= Az_1^{\lambda-1} \\ \phi'_2(z_2) &= Bz_2^{\lambda-1} + Cz_2^{\mu-1}\end{aligned}\tag{Eq. 74}$$

Sostituendo in Eq. 14 e raccogliendo A si ottengono:

$$\begin{aligned}\sigma_r &= 2A\{r_1^{\lambda-1}[k_{11} \cos(\lambda - 1) \theta_1 - k_{12} \sin(\lambda - 1) \theta_1] \\ &\quad + \chi_{21}r_2^{\lambda-1}[k_{21} \cos(\lambda - 1) \theta_2 - k_{22} \sin(\lambda - 1) \theta_2] \\ &\quad + \chi_{22}r_2^{\mu-1}[k_{21} \cos(\mu - 1) \theta_2 - k_{22} \sin(\mu - 1) \theta_2]\} \\ \sigma_\theta &= 2A\{r_1^{\lambda-1}[m_{11} \cos(\lambda - 1) \theta_1 - m_{12} \sin(\lambda - 1) \theta_1] \\ &\quad + \chi_{21}r_2^{\lambda-1}[m_{21} \cos(\lambda - 1) \theta_2 - m_{22} \sin(\lambda - 1) \theta_2] \\ &\quad + \chi_{22}r_2^{\mu-1}[m_{21} \cos(\mu - 1) \theta_2 - m_{22} \sin(\mu - 1) \theta_2]\} \\ \tau_{r\theta} &= 2A\{r_1^{\lambda-1}[n_{11} \cos(\lambda - 1) \theta_1 - n_{12} \sin(\lambda - 1) \theta_1] \\ &\quad + \chi_{21}r_2^{\lambda-1}[n_{21} \cos(\lambda - 1) \theta_2 - n_{22} \sin(\lambda - 1) \theta_2] \\ &\quad + \chi_{22}r_2^{\mu-1}[n_{21} \cos(\mu - 1) \theta_2 - n_{22} \sin(\mu - 1) \theta_2]\}\end{aligned}\tag{Eq. 75}$$

Il numero delle costanti da calcolare risulta essere 5: t , λ , μ , χ_{21} , χ_{22} ; imponendo l'utilizzo di 5 condizioni al contorno.

Le condizioni al contorno imposte appartengono tutte al Gruppo 2 e sono le seguenti:

$$\begin{aligned}\sigma_u(\theta = 0^0)|_{u=u_0} &= 0 \\ \tau_{uv}(\theta = 20^0)|_{u=u_0} &= 0 \\ \sigma_u(\theta = 40^0)|_{u=u_0} &= 0 \\ \tau_{uv}(\theta = 60^0)|_{u=u_0} &= 0 \\ \sigma_u(\theta = 80^0)|_{u=u_0} &= 0\end{aligned}\tag{Eq. 76}$$

Si impongono queste condizioni ad una spaziatura angolare regolare, partendo da $\theta = 0$, nella speranza di creare una funzione molto precisa nelle prossimità dell'apice dell'intaglio, zona in cui le concentrazioni di tensione sono importanti per il calcolo di parametri energetici e tensionali rilevanti.

Risolvendo questo sistema numericamente si ottengono i seguenti risultati:

Gli stessi materiali precedentemente mostrati sono stati analizzati per permettere il confronto con le soluzioni ottenute fino ad ora.

3.6.1 Materiale 1

$$E_x = 10Gpa, \quad E_y = 160Gpa, \quad G_{xy} = 5Gpa, \quad \nu_{xy} = 0.01875$$

$$\beta_1 = 0.1799, \quad \beta_2 = 1.3893$$

α	λ	μ	χ_{21}	χ_{22}	t	\tilde{A}
30°	0.503053	-0.04327	-0.11373	0.000699	1.87810	15.36842
45°	0.508601	0.382155	-0.12027	0.0018768	1.78193	15.14872
67.5°	0.539984	0.539984	-10.9915	10.914617	1.178097	13.7863

Tab.3.5: Valori parametri tensionali Tentativo 3 (Eq. 75) Modo I-Materiale 1

Si noti come nel caso $\alpha = 67.5^\circ$ il programma di calcolo utilizzato non ha proposto soluzioni non banali che che rispettassero le Eq. 61.

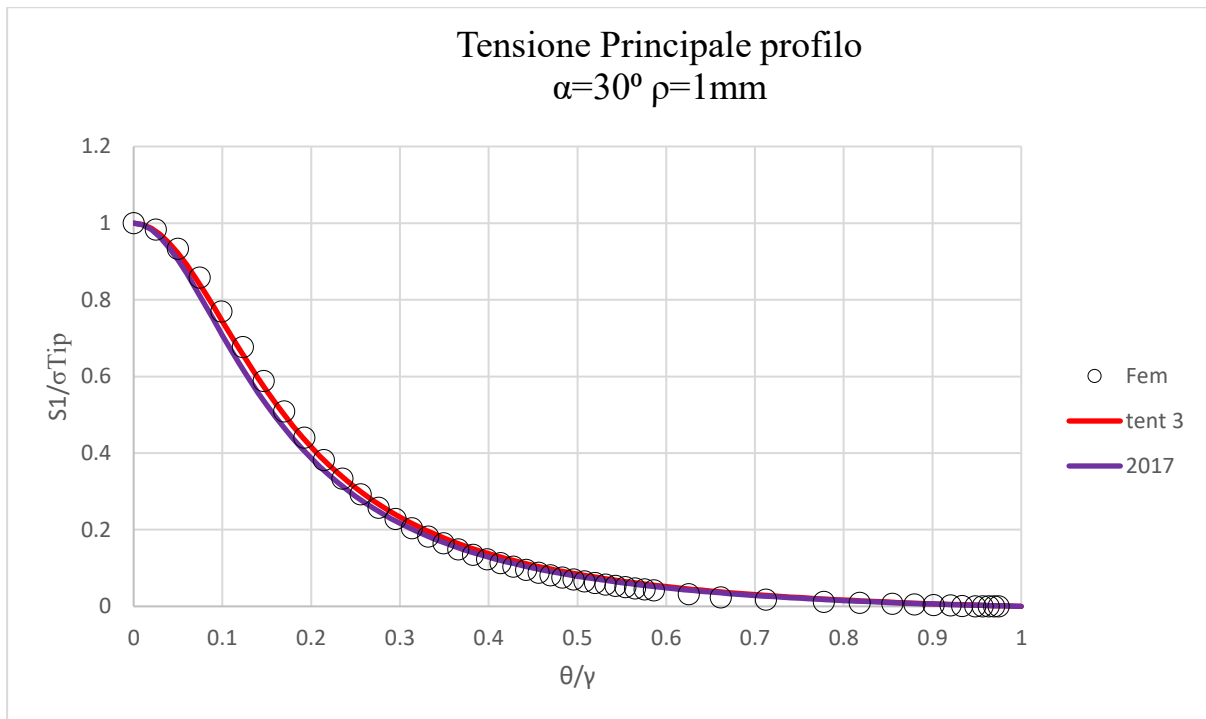


Fig.3.18: Andamenti tensione principale lungo profilo dell'intaglio per Modo I-Materiale 1 con $\alpha=30^\circ$ $\rho=1$ mm; confronto Fem, Tentativo 3 (Eq. 75) e soluzione 2017 (Eq. 36)

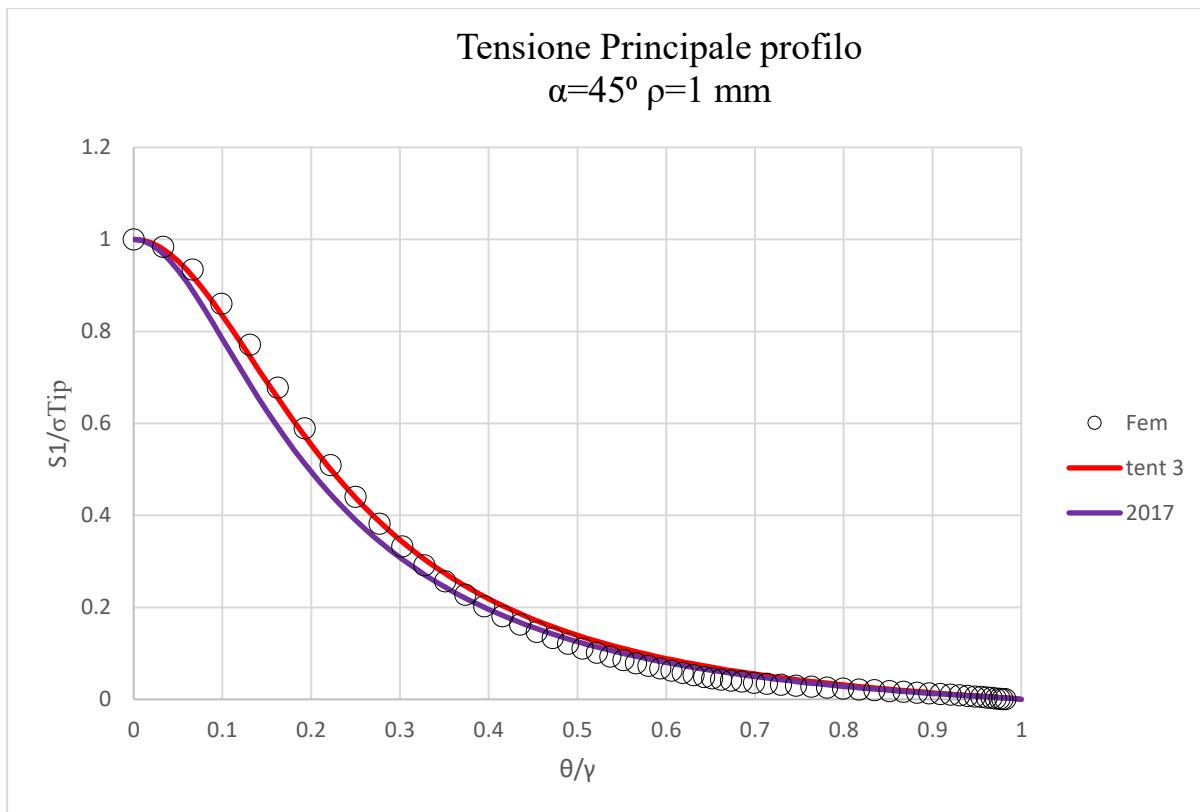


Fig.3.19: Andamenti tensione principale lungo profilo dell'intaglio per Modo I-Materiale 1 con $\alpha=45^\circ \rho=1 \text{ mm}$; confronto Fem, Tentativo 3 (Eq. 75) e soluzione 2017 (Eq. 36)

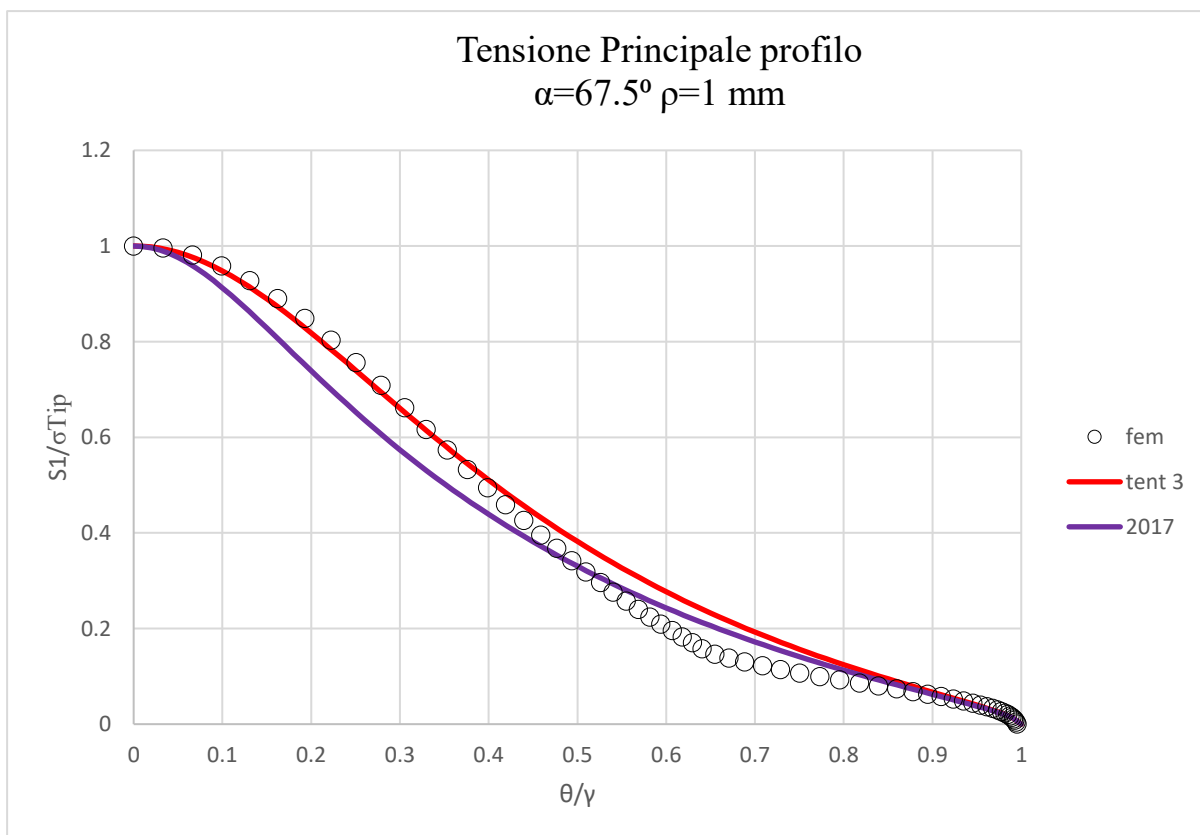


Fig.3.20: Andamenti tensione principale lungo profilo dell'intaglio per Modo I-Materiale 1 con $\alpha=67.5^\circ \rho=1 \text{ mm}$; confronto Fem, Tentativo 3 (Eq. 75) e soluzione 2017 (Eq. 36)

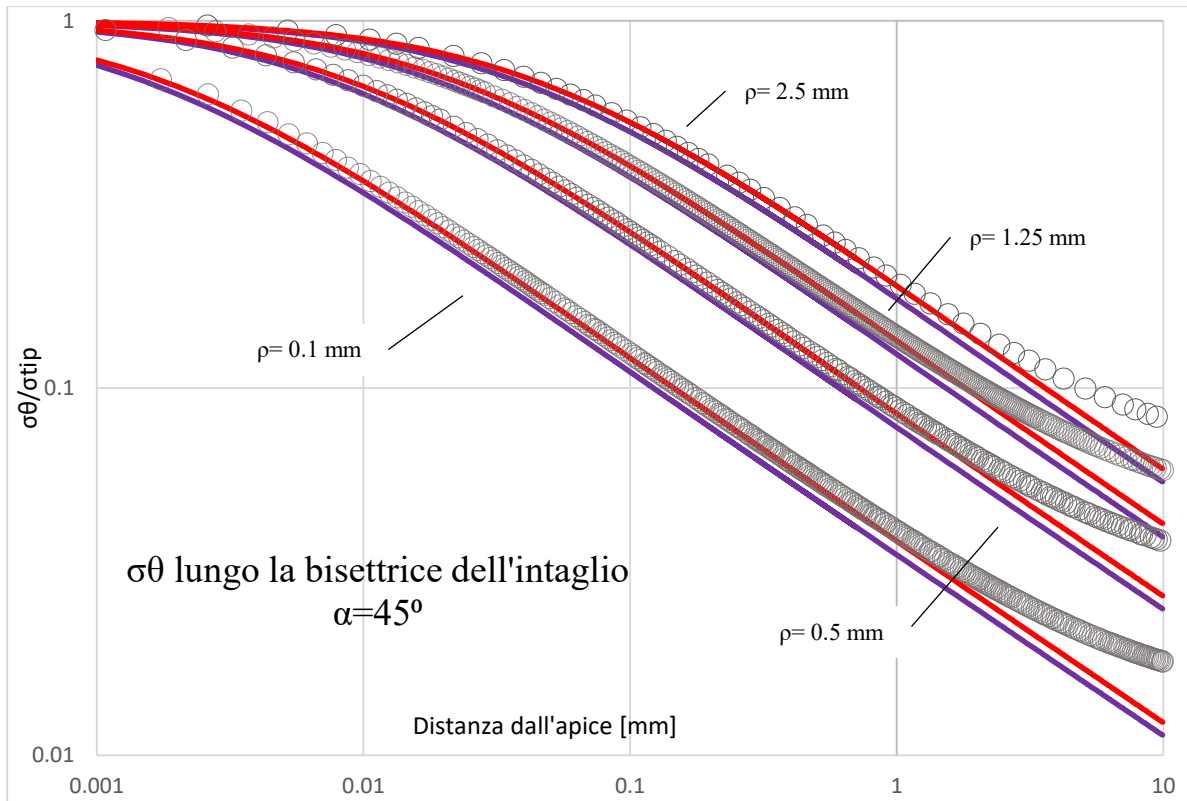


Fig. 3.21: Andamenti σ_θ lungo la bisettrice dell'intaglio per Modo I-Materiale 1 con $\alpha=45^\circ$ e ρ variabile; confronto Fem, Tentativo 3 (Eq. 75) e soluzione 2017 (Eq. 36)

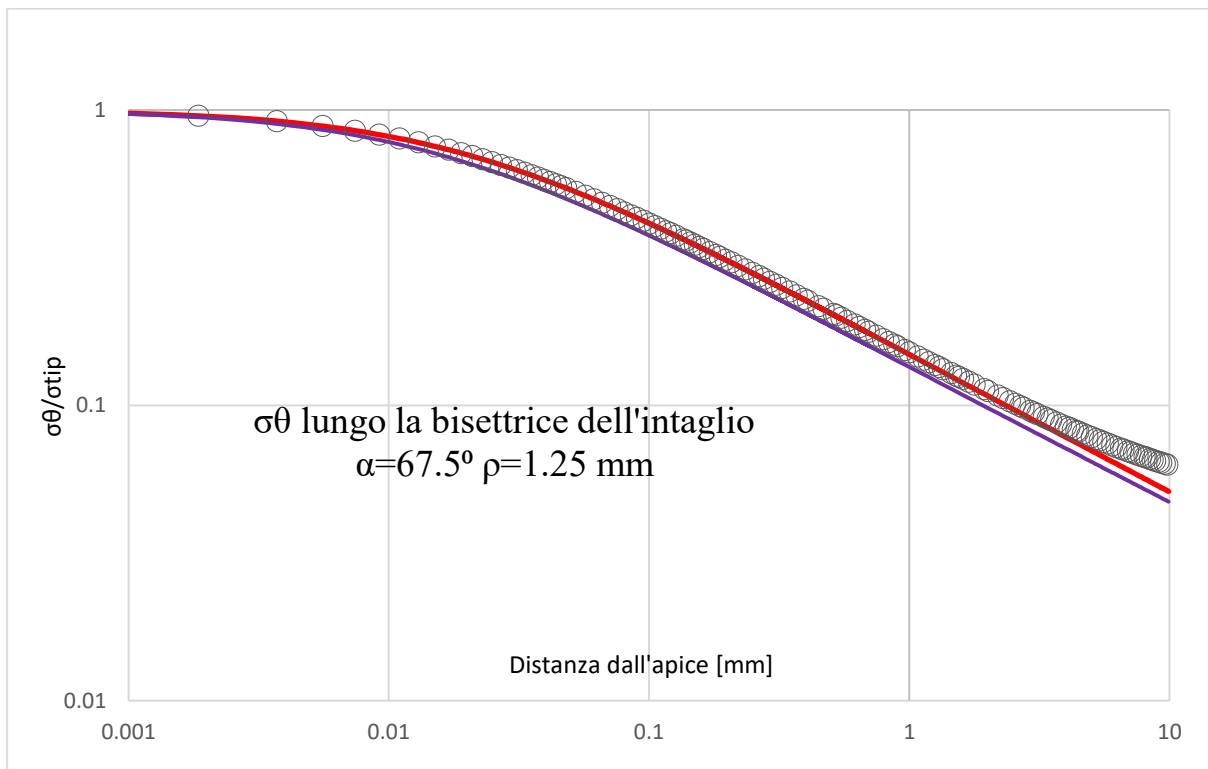


Fig. 3.22: Andamenti σ_θ lungo la bisettrice dell'intaglio per Modo I-Materiale 1 con $\alpha=67.5^\circ$ e $\rho=1.25$ mm; confronto Fem, Tentativo 3 (Eq. 75) e soluzione 2017 (Eq. 36)

3.6.2 Materiale 2

$$E_x = 160Gpa, \quad E_y = 10Gpa, \quad G_{xy} = 5Gpa, \quad \nu_{xy} = 0.3$$

$$\beta_1 = 0.7198, \quad \beta_2 = 5.5572$$

α	λ	μ	χ_{21}	χ_{22}	t	\tilde{A}
30°	0.509874	-8.56087	-0.088606	-1.6228	1.89899	4.199465
45°	0.595315	-1.86171	-0.05679	-0.1277	1.535205	3.762499
67.5°	0.725969	-2.36048	-0.03364	-0.001426	1.256054	3.422704

Tab. 3.2: Valori parametri tensionali Tentativo 3 (Eq. 75) Modo I-Materiale 2

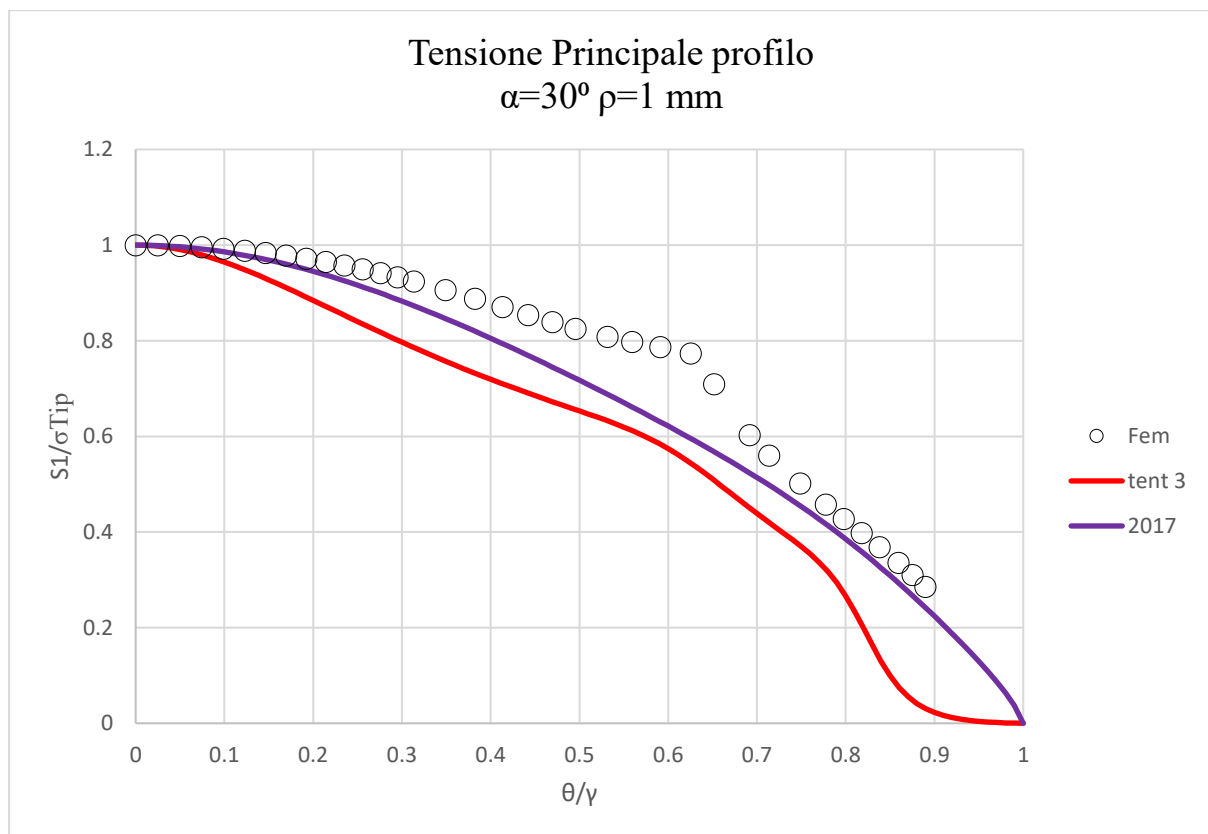


Fig. 3.23: Andamenti tensione principale lungo profilo dell'intaglio per Modo I-Materiale 2 con $\alpha=30^\circ$ $\rho=1$ mm; confronto Fem, Tentativo 3 (Eq. 75) e soluzione 2017 (Eq. 36)

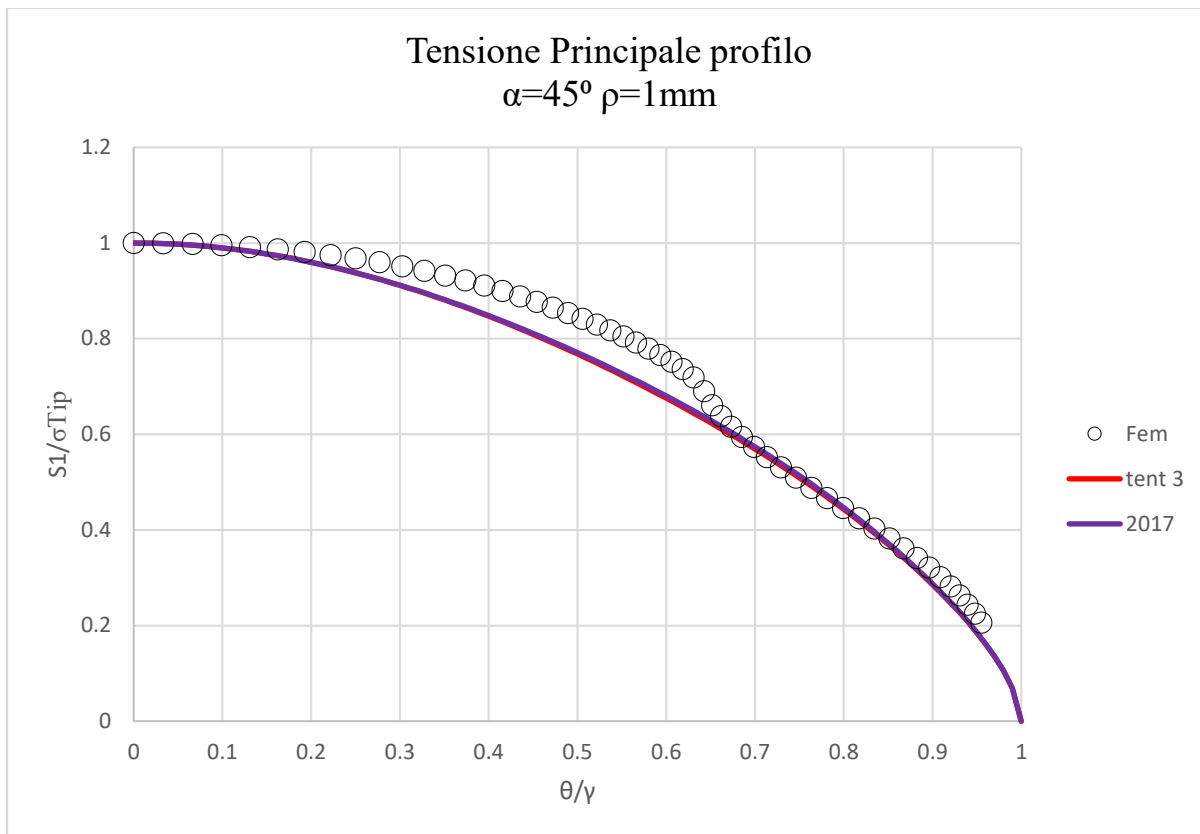


Fig. 3.24: Andamenti tensione principale lungo profilo dell'intaglio per Modo I-Materiale 2 con $\alpha=45^\circ \rho=1\text{ mm}$; confronto Fem, Tentativo 3 (Eq. 75) e soluzione 2017 (Eq. 36)

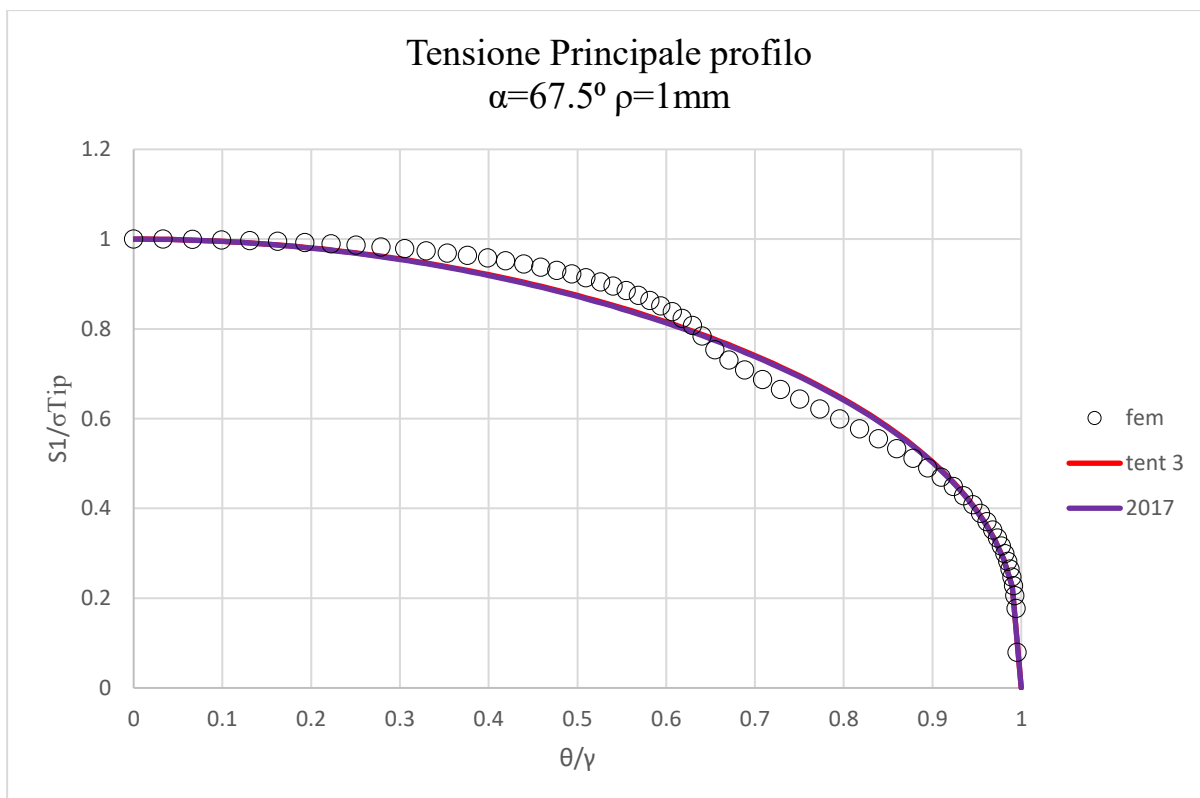


Fig. 3.25: Andamenti tensione principale lungo profilo dell'intaglio per Modo I-Materiale 2 con $\alpha=45^\circ \rho=1\text{ mm}$; confronto Fem, Tentativo 3 (Eq. 75) e soluzione 2017 (Eq. 36)

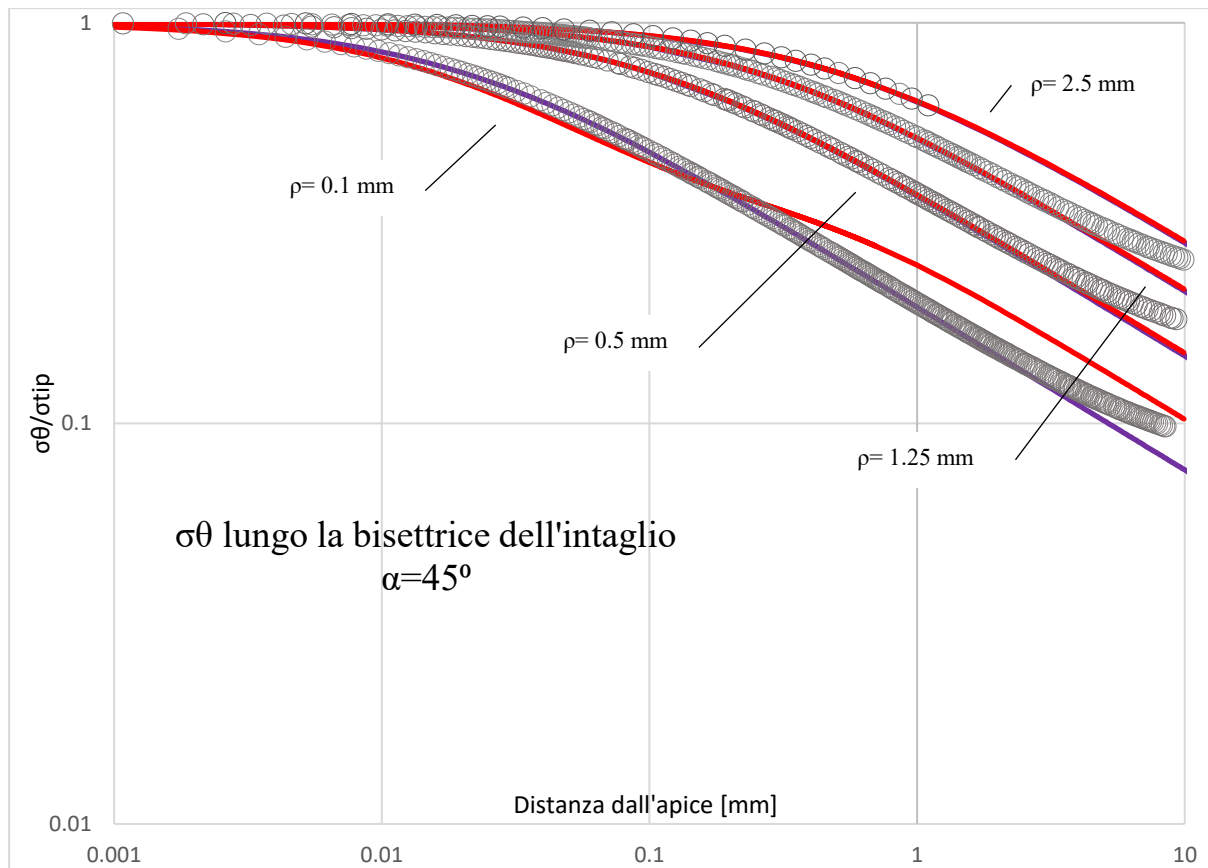


Fig. 3.26: Andamenti σ_θ lungo la bisettrice dell'intaglio per Modo I-Materiale 2 con $\alpha=45^\circ$ e ρ variabile; confronto Fem, Tentativo 3 (Eq. 75) e soluzione 2017 (Eq. 36)

Come si nota da Fig. 3.26 e Fig. 3.23 questo metodo di calcolo rende instabili le soluzioni per α e ρ decrescenti nel caso di materiali rigidi lungo l'asse delle x. questo comportamento potrebbe essere spiegato dall'insufficienza dell'approssimazione nelle funzioni potenziali.

Per indagare questi risultati si è testata una quarta soluzione che utilizza più termini nelle Eq. 74.

3.7 Soluzione con potenziali a 3 termini, condizioni al contorno di gruppo 2 (Tentativo 4)

Le seguenti funzioni potenziali sono usate:

$$\begin{aligned}\phi'_1(z_1) &= Az_1^{\lambda-1} + Dz_2^{\mu-1} \\ \phi'_2(z_2) &= Bz_2^{\lambda-1} + Cz_2^{\mu-1} + Cz_2^{\zeta-1}\end{aligned}\tag{Eq. 77}$$

Sostituendo in Eq. 14 e raccogliendo A si ottengono:

$$\begin{aligned}\sigma_r &= 2A\{r_1^{\lambda-1}[k_{11} \cos(\lambda - 1) \theta_1 - k_{12} \sin(\lambda - 1) \theta_1] \\ &\quad + \chi_{12}r_1^{\mu-1}[k_{11} \cos(\mu - 1) \theta_1 - k_{12} \sin(\mu - 1) \theta_1] \\ &\quad + \chi_{21}r_2^{\lambda-1}[k_{21} \cos(\lambda - 1) \theta_2 - k_{22} \sin(\lambda - 1) \theta_2] \\ &\quad + \chi_{22}r_2^{\mu-1}[k_{21} \cos(\mu - 1) \theta_2 - k_{22} \sin(\mu - 1) \theta_2] \\ &\quad + \chi_{23}r_2^{\zeta-1}[k_{21} \cos(\zeta - 1) \theta_2 - k_{22} \sin(\zeta - 1) \theta_2]\} \\ \sigma_\theta &= 2A\{r_1^{\lambda-1}[m_{11} \cos(\lambda - 1) \theta_1 - m_{12} \sin(\lambda - 1) \theta_1] \\ &\quad + \chi_{12}r_1^{\mu-1}[m_{11} \cos(\mu - 1) \theta_1 - m_{12} \sin(\mu - 1) \theta_1] \\ &\quad + \chi_{21}r_2^{\lambda-1}[m_{21} \cos(\lambda - 1) \theta_2 - m_{22} \sin(\lambda - 1) \theta_2] \\ &\quad + \chi_{22}r_2^{\mu-1}[m_{21} \cos(\mu - 1) \theta_2 - m_{22} \sin(\mu - 1) \theta_2] \\ &\quad + \chi_{23}r_2^{\zeta-1}[m_{21} \cos(\zeta - 1) \theta_2 - m_{22} \sin(\zeta - 1) \theta_2]\} \\ \tau_{r\theta} &= 2A\{r_1^{\lambda-1}[n_{11} \cos(\lambda - 1) \theta_1 - n_{12} \sin(\lambda - 1) \theta_1] \\ &\quad + \chi_{12}r_1^{\mu-1}[n_{11} \cos(\mu - 1) \theta_1 - n_{12} \sin(\mu - 1) \theta_1] \\ &\quad + \chi_{21}r_2^{\lambda-1}[n_{21} \cos(\lambda - 1) \theta_2 - n_{22} \sin(\lambda - 1) \theta_2] \\ &\quad + \chi_{22}r_2^{\mu-1}[n_{21} \cos(\mu - 1) \theta_2 - n_{22} \sin(\mu - 1) \theta_2] \\ &\quad + \chi_{23}r_2^{\zeta-1}[n_{21} \cos(\zeta - 1) \theta_2 - n_{22} \sin(\zeta - 1) \theta_2]\}\end{aligned}\tag{Eq. 78}$$

Il numero delle costanti da calcolare risulta essere 8: $t, \lambda, \mu, \zeta, \chi_{12}, \chi_{21}, \chi_{22}, \chi_{23}$; imponendo l'utilizzo di 8 condizioni al contorno.

Le condizioni al contorno imposte appartengono tutte al Gruppo 2 e sono le seguenti:

$$\begin{aligned}\sigma_u(\theta = 0^0)|_{u=u_0} &= 0 \\ \tau_{uv}(\theta = 20^0)|_{u=u_0} &= 0 \\ \sigma_u(\theta = 30^0)|_{u=u_0} &= 0 \\ \tau_{uv}(\theta = 50^0)|_{u=u_0} &= 0 \\ \sigma_u(\theta = 70^0)|_{u=u_0} &= 0\end{aligned}\tag{Eq. 79}$$

$$\begin{aligned}\tau_{uv}(\theta = 80^\circ)|_{u=u_0} &= 0 \\ \sigma_u(\theta = 90^\circ)|_{u=u_0} &= 0 \\ \tau_{uv}(\theta = 100^\circ)|_{u=u_0} &= 0\end{aligned}$$

Come nell'esempio precedente si è cercato di imporre le condizioni al contorno con una spaziatura angolare regolare partendo da $\theta = 0$, nella speranza di creare una funzione molto precisa nelle prossimità dell'apice dell'intaglio

Risulta infine utile riscrivere il parametron A in funzione della tensione all-apice dell'intaglio

σ_{tip}

$$A = \frac{\sigma_{tip}}{2\{(r_0\beta_1^t)^{\lambda-1} + \chi_{12}(r_0\beta_1^t)^{\mu-1} + \chi_{21}(r_0\beta_2^t)^{\lambda-1} + \chi_{22}(r_0\beta_2^t)^{\mu-1} + \chi_{23}(r_0\beta_2^t)^{\zeta-1}\}} = \frac{\sigma_{tip}}{\tilde{A}} \quad Eq. 80$$

Risolvendo questo sistema numericamente si ottengono i seguenti risultati:

3.7.1 Materiale 1

$$\begin{aligned}E_x &= 10Gpa, & E_y &= 160Gpa, & G_{xy} &= 5Gpa, & \nu_{xy} &= 0.01875 \\ & & \beta_1 &= 0.1799, & \beta_2 &= 1.3893\end{aligned}$$

α	λ	μ	ζ	χ_{12}	χ_{21}	χ_{22}	χ_{23}	t	\tilde{A}
30°	0.5211	0.4529	-0.77	0.3108	-0.1864	0.0407	-0.0023	1.8739	20.064
45°	0.5166	0.2961	-0.59	0.0262	-0.1219	0.0205	-0.0023	1.772	15.482
67.5°	0.5486	0.0954	-0.309	0.009	-0.0826	0.0106	-0.0025	1.5068	13.839

Tab. 3 3: Valori parametri tensionali Tentativo 4 (Eq. 78) Modo I-Materiale 1

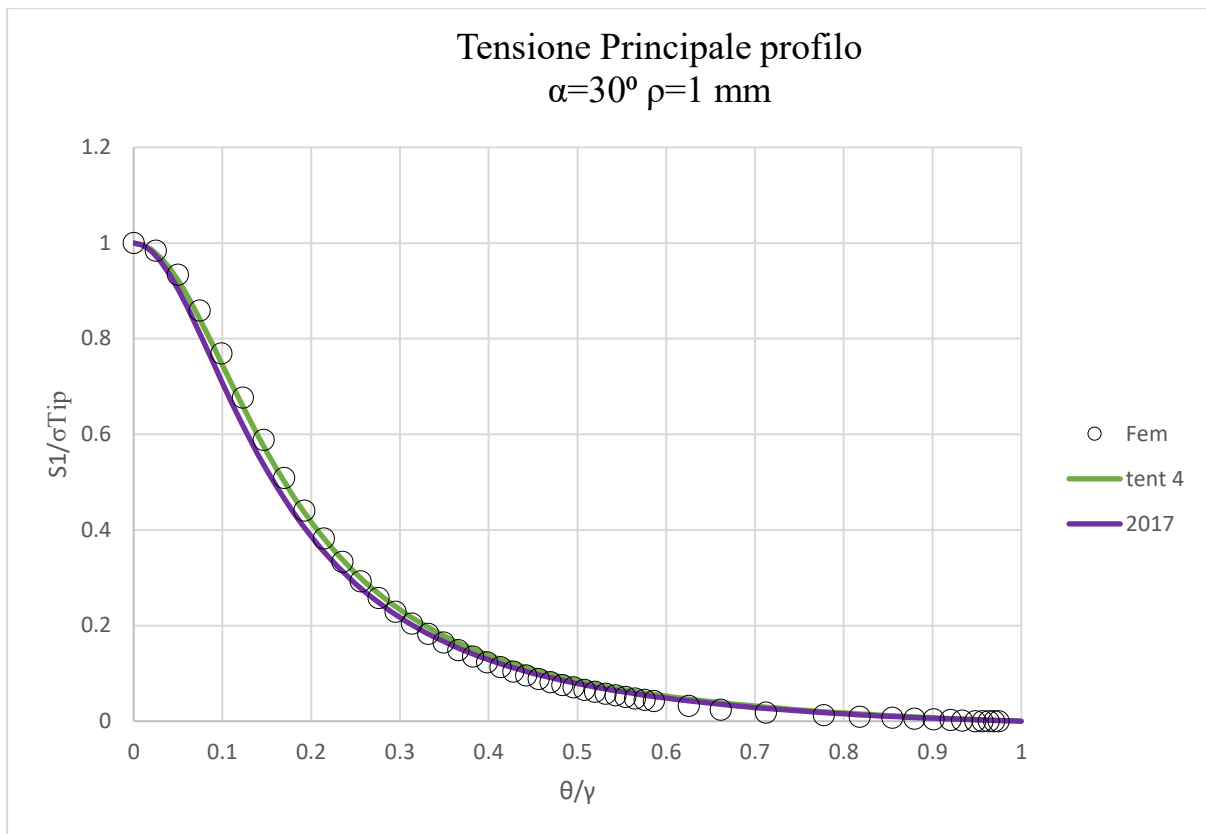


Fig. 3.27: Andamenti tensione principale lungo profilo dell'intaglio per Modo I-Materiale 1 con $\alpha=30^\circ \rho=1 \text{ mm}$; confronto Fem, Tentativo 4 (Eq. 78) e soluzione 2017 (Eq. 36)

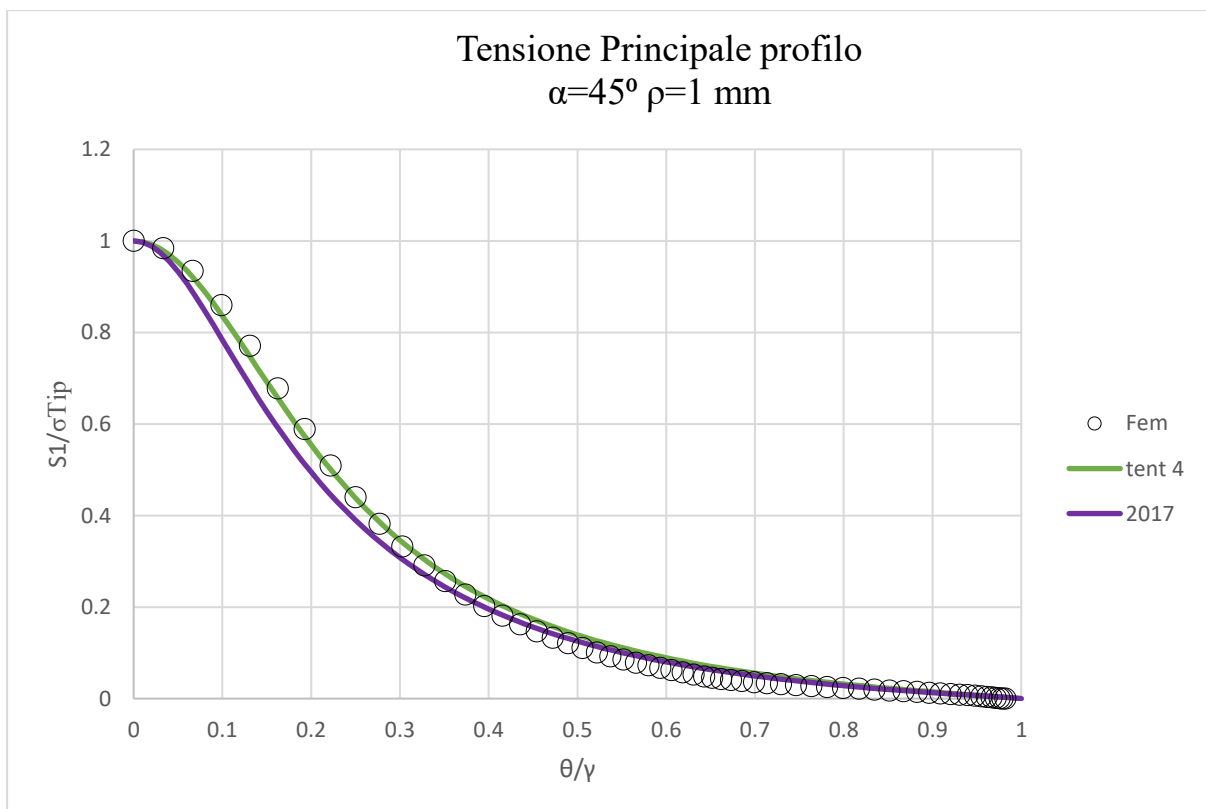


Fig. 3.28 Andamenti tensione principale lungo profilo dell'intaglio per Modo I-Materiale 1 con $\alpha=45^\circ \rho=1 \text{ mm}$; confronto Fem, Tentativo 4 (Eq. 78) e soluzione 2017 (Eq. 36)

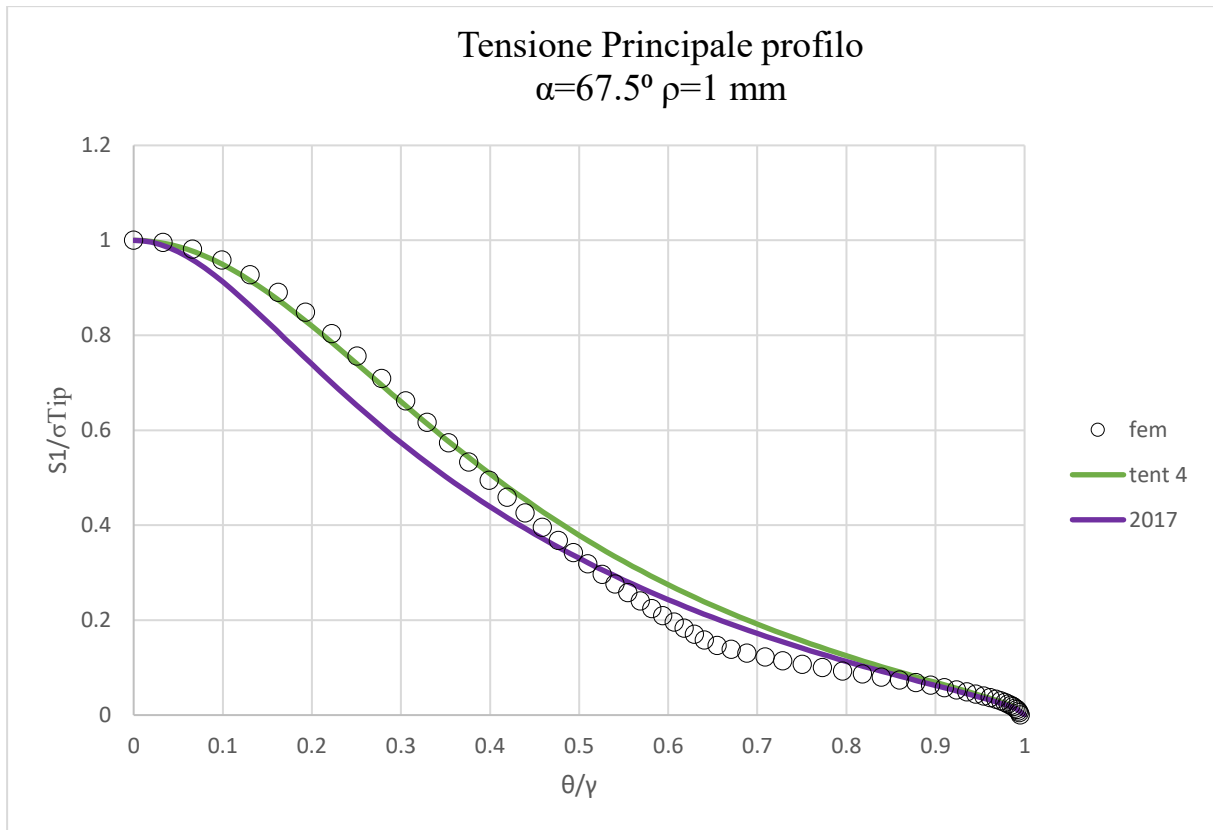


Fig. 3.29: Andamenti tensione principale lungo profilo dell'intaglio per Modo I-Materiale 1 con $\alpha=67.5^\circ$ $\rho=1$ mm; confronto Fem, Tentativo 4 (Eq. 78) e soluzione 2017 (Eq. 36)

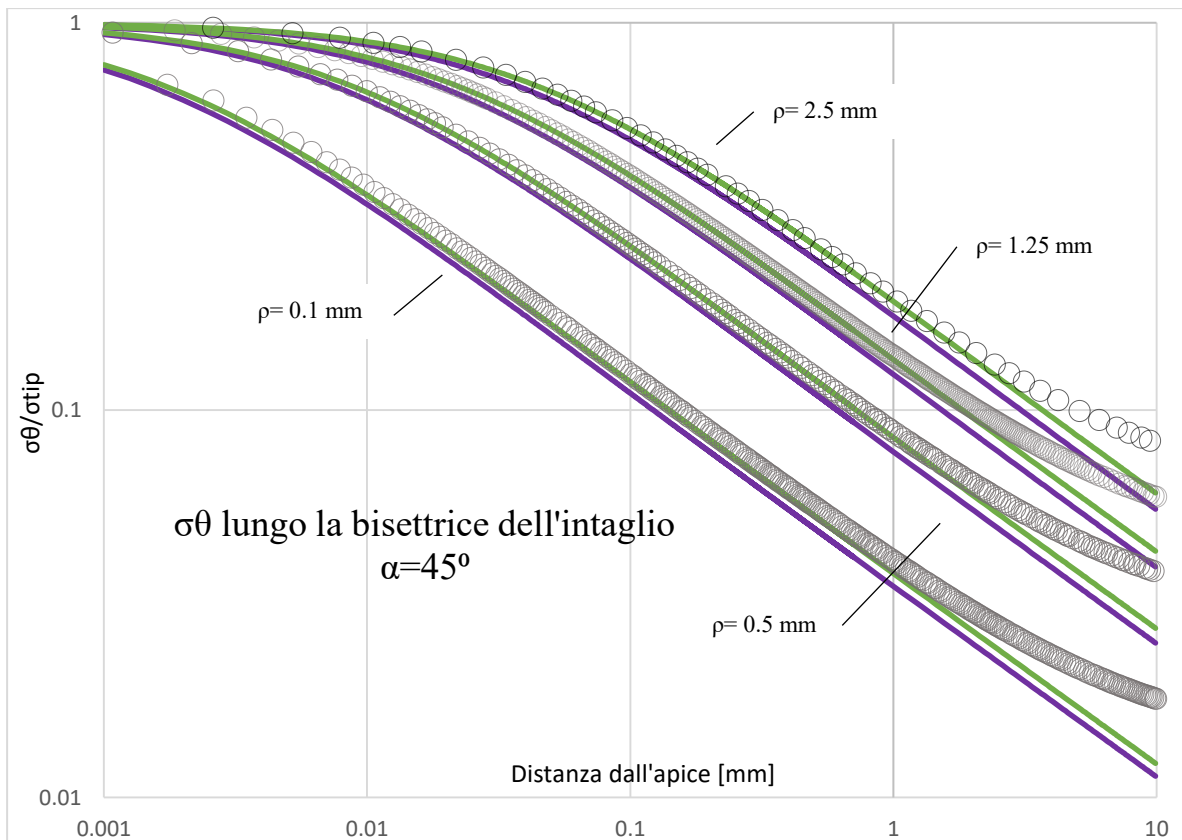


Fig. 3.30: Andamenti σ_θ lungo la bisettrice dell'intaglio per Modo I-Materiale 1 con $\alpha=45^\circ$ e ρ variabile; confronto Fem, Tentativo 4 (Eq. 78) e soluzione 2017 (Eq. 36)

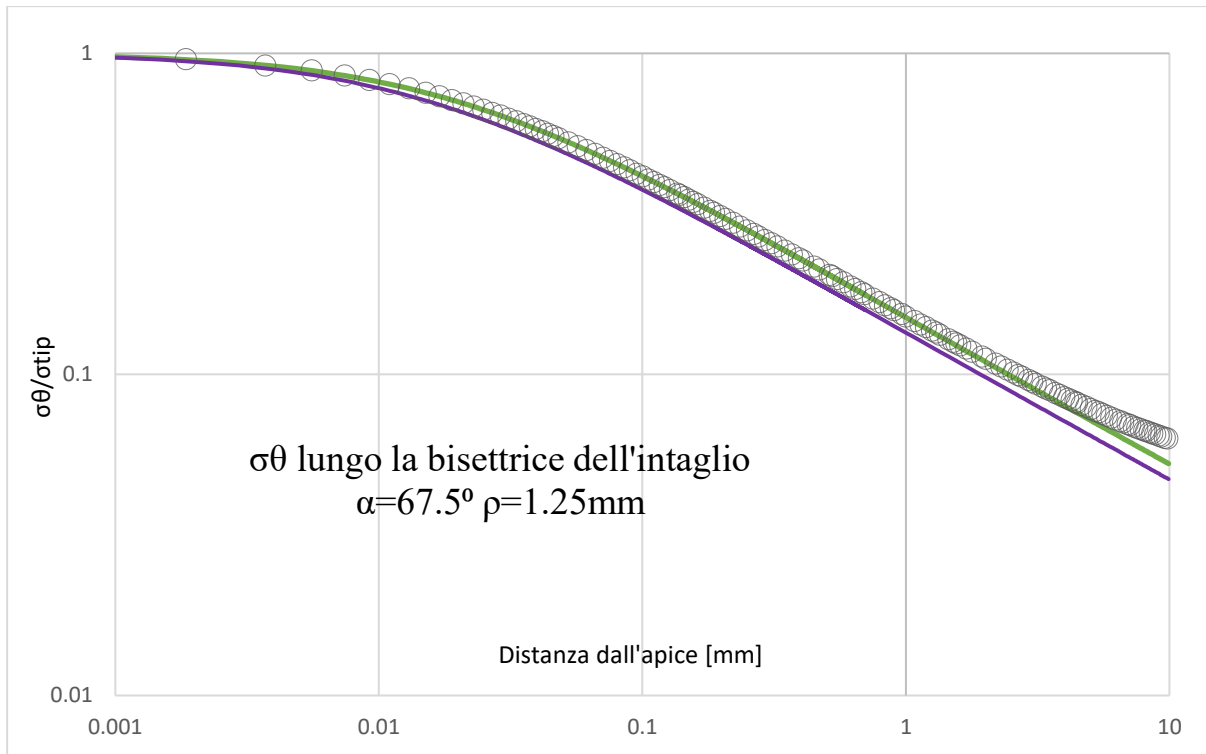


Fig. 3.31: Andamenti σ_θ lungo la bisettrice dell'intaglio per Modo I-Materiale 1 con $\alpha=45^\circ$ e $\rho=1.25$ mm; confronto Fem, Tentativo 4 (Eq. 78) e soluzione 2017 (Eq. 36)

3.7.2 Materiale 2

$$E_x = 160Gpa, \quad E_y = 10Gpa, \quad G_{xy} = 5Gpa, \quad \nu_{xy} = 0.3$$

$$\beta_1 = 0.7198, \quad \beta_2 = 5.5572$$

α	λ	μ	ζ	χ_{12}	χ_{21}	χ_{22}	χ_{23}	t	\tilde{A}
30°	0.5378	-0.207	-0.189	0.0964	-0.0884	-0.4597	0.2879	1.8184	37.322
45°	0.5887	0.2050	-0.214	0.097	-0.0962	-2.8625	3.0469	1.6175	5.2351
67.5°	0.7238	0.538	-0.873	0.0131	-0.0371	0.0007	0.0015	1.1780	3.5022

Tab. 3.4: Valori parametri tensionali Tentativo 4 (Eq. 78) Modo I-Materiale 2

Si noti come nel caso $\alpha = 30^\circ, \alpha = 45^\circ$ il programma di calcolo non è riuscito a trovare combinazioni di soluzioni non banali. Questo risulterà evidente dai campi tensionali che non saranno coerenti con i risultati al Fem.

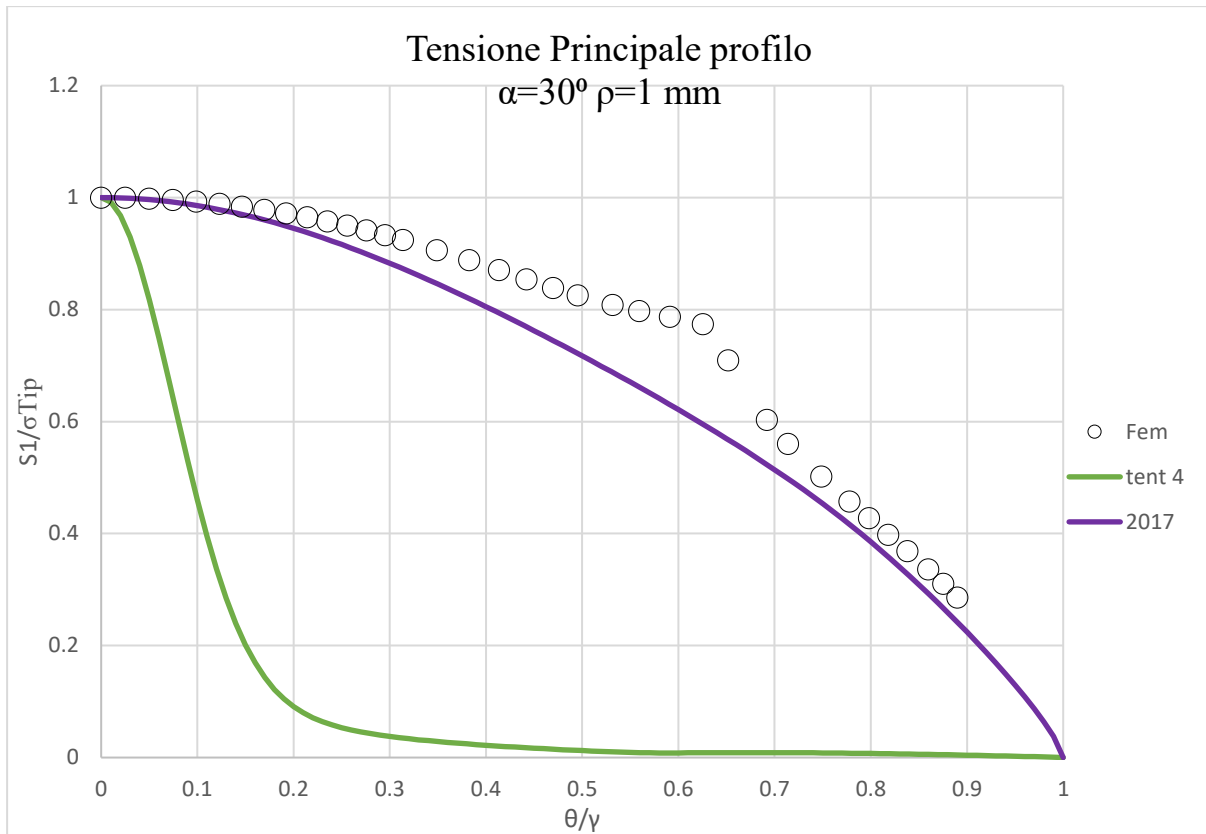


Fig. 3.32: Andamenti tensione principale lungo profilo dell'intaglio per Modo I-Materiale 2 con $\alpha=30^\circ \rho=1 \text{ mm}$; confronto Fem, Tentativo 4 (Eq. 78) e soluzione 2017 (Eq. 36)

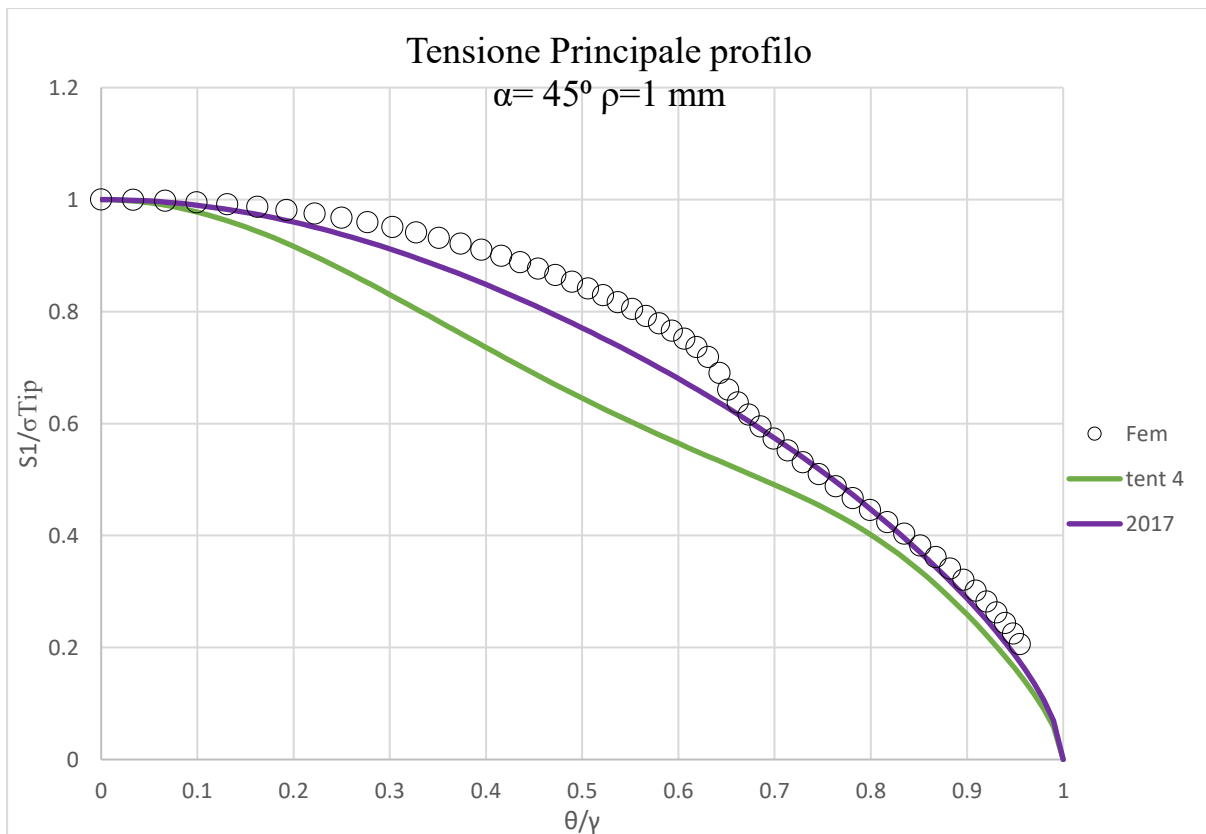


Fig. 3.33: Andamenti tensione principale lungo profilo dell'intaglio per Modo I-Materiale 2 con $\alpha=45^\circ \rho=1 \text{ mm}$; confronto Fem, Tentativo 4 (Eq. 78) e soluzione 2017 (Eq. 36)

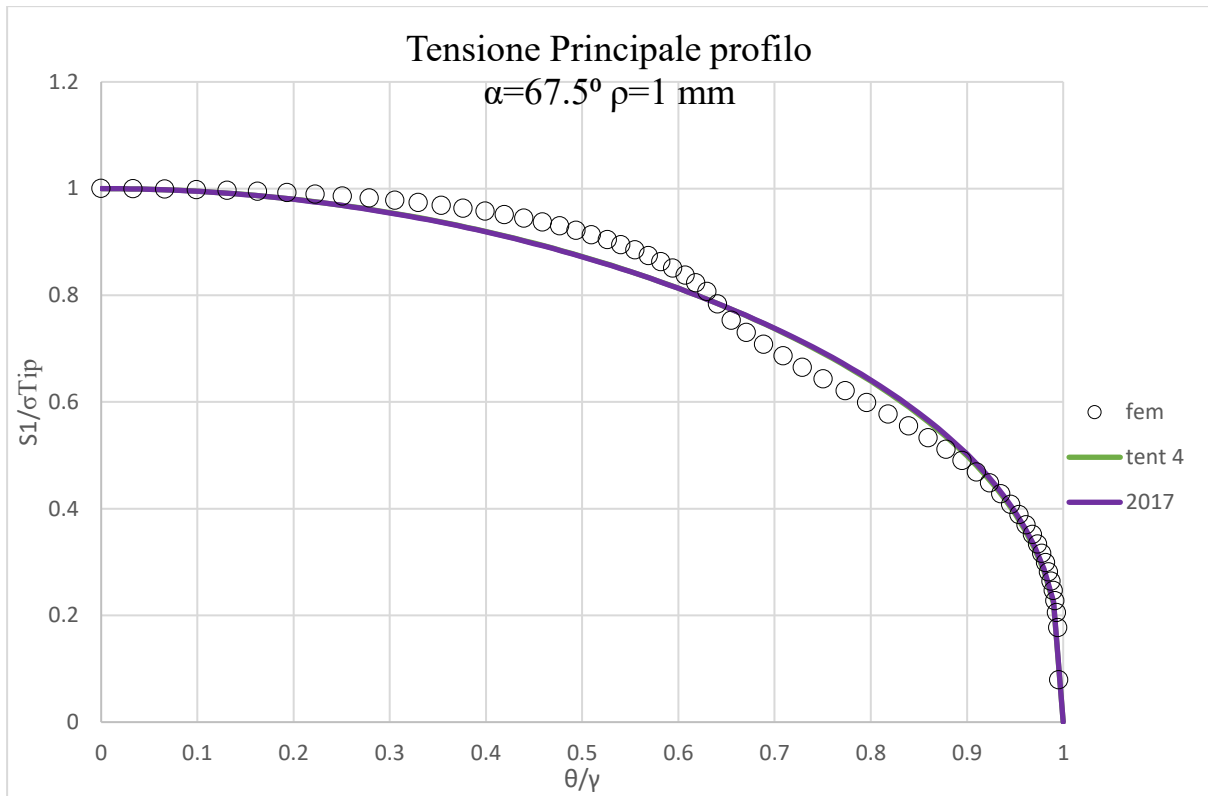


Fig. 3.34: Andamenti tensione principale lungo profilo dell'intaglio per Modo I-Materiale 2 con $\alpha=67.5^\circ \rho=1 \text{ mm}$; confronto Fem, Tentativo 4 (Eq. 78) e soluzione 2017 (Eq. 36)

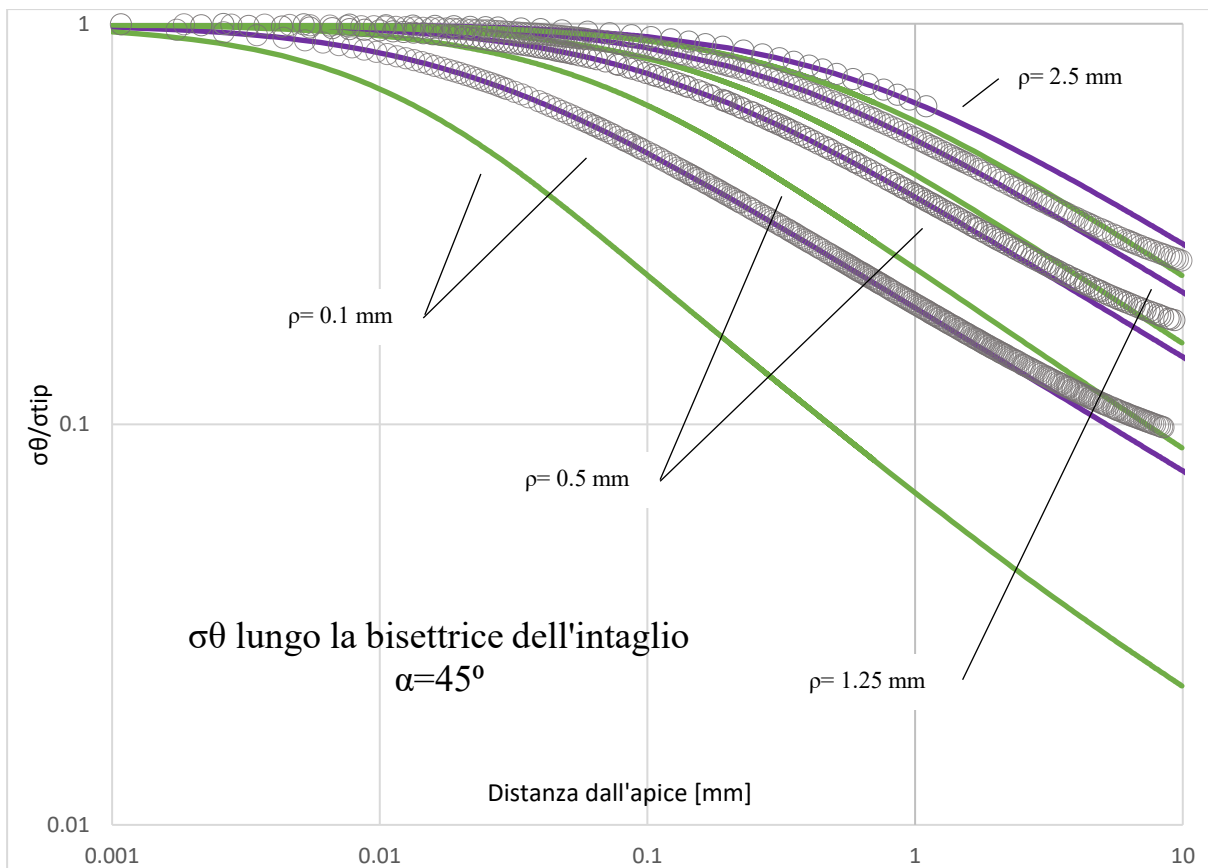


Fig. 3.35: Andamenti σ_θ lungo la bisettrice dell'intaglio per Modo I-Materiale 2 con $\alpha=45^\circ$ e ρ variabile; confronto Fem, Tentativo 4 (Eq. 78) e soluzione 2017 (Eq. 36)

Come si nota anche i risultati sulla bisettrice sono compromessi dalle soluzioni banali trovate mostrando un andamento non coerente con le soluzioni numeriche.

3.8 Comparazione modelli e scelta della miglior soluzione.

Dai risultati trovati si può notare come le nuove soluzioni con funzioni potenziali più sviluppate, quando stabili e aventi soluzioni coerenti con le ipotesi, mostrano un miglioramento dei risultati a Modo I rispetto alla soluzione del 2017, in particolare lungo la bisettrice dell'intaglio. Le soluzioni più accurate mostrano miglioramenti evidenti per materiali rigidi in direzione ortogonale alla direzione dell'intaglio, mantenendo l'accuratezza della soluzione del 2017 per materiali rigidi lungo la bisettrice dell'intaglio.

Confrontando la stabilità delle soluzioni nei vari casi analizzati si nota come il secondo tentativo sia il più stabile ed il migliore a descrivere il campo tensionale nelle varie condizioni a Modo I, avendo un ottimo trade-off tra semplicità, precisione e facilità di calcolo dei parametri.

4 Soluzioni analitiche del problema a Modo II

Consideriamo ora ipotesi di carico antisimmetriche con questa geometria. Condizioni di carico di questo tipo impongono l'antisimmetria dei campi tensionali lungo la bisettrice dell'intaglio, imponendo di conseguenza una forma leggermente diversa delle funzioni potenziali.

Le stesse ipotesi di punto singolare per $x = 0$ sono mantenute, da cui segue lo stesso sviluppo in serie di Laurent per le funzioni potenziali:

$$\begin{aligned}\phi'_1(z_1) &= \sum_{n=-\infty}^{\infty} A_n z_1^n \\ \phi'_2(z_2) &= \sum_{n=-\infty}^{\infty} B_n z_2^n\end{aligned}\tag{Eq. 81}$$

Con A_n e $B_n \in \mathbb{C}$, da cui la parte principale dell'espansione Eq. 81 diventa:

$$\sum_{n=-\infty}^{-1} A_n z_1^n\tag{Eq. 82}$$

Per singolarità essenziali, e:

$$\sum_{n=-k}^{-1} A_n z_1^n\tag{Eq. 83}$$

Per poli.

Imponendo ora le condizioni di antisimmetria sulle tensioni si ottengono le seguenti funzioni potenziali:

$$\begin{aligned}\phi'_1(z_1) &= iA_{11}z_1^{a_1} + iA_{12}z_1^{a_2} + \dots \\ \phi'_2(z_2) &= iA_{21}z_2^{a_1} + iA_{22}z_2^{a_2} + \dots\end{aligned}\tag{Eq. 84}$$

In cui i parametri $a_n \in \mathbb{R}$; $a_n < 0$; $a_1 > a_2 > a_3 > \dots$; $A_{nm} \in \mathbb{R}$.

Sostituendo ora in Eq. 14 si ottiene la forma delle tensioni seguente:

$$\begin{aligned}\sigma_r &= -2A_{11} \sum_n \left\{ \chi_{1n} r_1^{a_n} [k_{12} \cos(a_n \theta_1) + k_{11} \sin(a_n \theta_1)] \right. \\ &\quad \left. + \chi_{2n} r_2^{a_n} [k_{22} \cos(a_n \theta_2) + k_{21} \sin(a_n \theta_2)] \right\} \\ \sigma_\theta &= -2A_{11} \sum_n \left\{ \chi_{1n} r_1^{a_n} [m_{12} \cos(a_n \theta_1) + m_{11} \sin(a_n \theta_1)] \right. \\ &\quad \left. + \chi_{2n} r_2^{a_n} [m_{22} \cos(a_n \theta_2) + m_{21} \sin(a_n \theta_2)] \right\}\end{aligned}\tag{Eq. 85}$$

$$\tau_{r\theta} = -2A_{11} \sum_n \{ \chi_{1n} r_1^{a_n} [n_{12} \cos(a_n \theta_1) + n_{11} \sin(a_n \theta_1)] \\ + \chi_{2n} r_2^{a_n} [n_{22} \cos(a_n \theta_2) + n_{21} \sin(a_n \theta_2)] \}$$

In cui $\chi_{1n} = \frac{A_{1n}}{A_{11}}$; $\chi_{2n} = \frac{A_{2n}}{A_{11}}$

Si esplorano ora 3 metodi differenti per la soluzione del problema a Modo II, confrontandone i risultati.

4.1 Soluzione con potenziali a 1 termine, condizioni al contorno di gruppo 1 (Tentativo 1)

Questo metodo riprende le stesse condizioni e funzioni potenziali della soluzione del 2017 per il Modo I. Si considerano le seguenti funzioni potenziali:

$$\begin{aligned} \phi'_1(z_1) &= iAz_1^{\lambda-1} \\ \phi'_2(z_2) &= iBz_2^{\lambda-1} \end{aligned} \tag{Eq. 86}$$

E sostituendo Eq. 86 in Eq. 14 si ottengono le seguenti:

$$\begin{aligned} \sigma_r &= -2Ar_1^{\lambda-1} [k_{12} \cos(1-\lambda) \theta_1 - k_{11} \sin(1-\lambda) \theta_1] \\ &\quad + Br_2^{\lambda-1} [k_{22} \cos(1-\lambda) \theta_2 - k_{21} \sin(1-\lambda) \theta_2] \\ \sigma_\theta &= -2Ar_1^{\lambda-1} [m_{12} \cos(1-\lambda) \theta_1 - m_{11} \sin(1-\lambda) \theta_1] \\ &\quad + Br_2^{\lambda-1} [m_{22} \cos(1-\lambda) \theta_2 - m_{21} \sin(1-\lambda) \theta_2] \\ \tau_{r\theta} &= -2Ar_1^{\lambda-1} [n_{12} \cos(1-\lambda) \theta_1 - n_{11} \sin(1-\lambda) \theta_1] \\ &\quad + Br_2^{\lambda-1} [n_{22} \cos(1-\lambda) \theta_2 - n_{21} \sin(1-\lambda) \theta_2] \end{aligned} \tag{Eq. 87}$$

Si applicano ora le condizioni al contorno all'infinito:

$$\begin{aligned} \sigma_u|_{u=u_0} &= 0 \\ \tau_{uv}|_{u=u_0} &= 0 \end{aligned} \tag{Eq. 88}$$

$$\begin{bmatrix} b_{11} & b_{12} \\ b_{21} & b_{22} \end{bmatrix} \begin{Bmatrix} A \\ B \end{Bmatrix} = 0 \tag{Eq. 89}$$

Per $\theta \rightarrow \pm\gamma$ Con:

$$\begin{aligned} b_{11} &= \rho_1^{\lambda-1} [m_{12} \cos(1-\lambda) \theta_1(\gamma) - m_{11} \sin(1-\lambda) \theta_1(\gamma)] \\ b_{12} &= \rho_2^{\lambda-1} [m_{22} \cos(1-\lambda) \theta_2(\gamma) - m_{21} \sin(1-\lambda) \theta_2(\gamma)] \\ b_{21} &= \rho_1^{\lambda-1} [n_{12} \cos(1-\lambda) \theta_1(\gamma) - n_{11} \sin(1-\lambda) \theta_1(\gamma)] \end{aligned} \tag{Eq. 90}$$

$$b_{22} = \rho_2^{\lambda-1} [n_{22} \cos(1 - \lambda) \theta_2(\gamma) - n_{21} \sin(1 - \lambda) \theta_2(\gamma)]$$

Imponendo il determinante della matrice $[b_{ij}] = 0$ si possono trovare gli autovalori λ del problema e la relazione tra il parametron A e B

$$B = -A \frac{\rho_1^{\lambda-1} [m_{12} \cos(1 - \lambda) \theta_1(\gamma) - m_{11} \sin(1 - \lambda) \theta_1(\gamma)]}{\rho_2^{\lambda-1} [m_{22} \cos(1 - \lambda) \theta_2(\gamma) - m_{21} \sin(1 - \lambda) \theta_2(\gamma)]} = A \chi_{21} \quad \text{Eq. 91}$$

Imponendo $\tau_{uv}|_{u=u_0} = 0$ per $\theta = 0$ si ottiene invece il parametro t:

$$t = \frac{1 - \frac{\ln -\chi}{\ln \frac{\beta_1}{\beta_2}}}{1 - \lambda} \quad \text{Eq. 92}$$

A questo punto risulta utile riscrivere il parametro A in funzione di una tensione significativa, facilmente calcolabile con un analisi Fem. Per queste analisi la tensione utilizzata sarà la tensione $\tau_{r\theta}$ massima lungo la bisettrice dell'intaglio.

Imponiamo quindi $\tau_{r\theta}(r = r_{max}, \theta = 0) = \tau_{r\theta_{max}}$ ottenendo:

$$A = - \frac{\tau_{r\theta_{max}}}{2\{\beta_1(x'(\tau_{r\theta_{max}}) + r_0\beta_1^t)^{\lambda-1} + \chi_{21}\beta_2(x'(\tau_{r\theta_{max}}) + r_0\beta_2^t)^{\lambda-1}\}} = \frac{\tau_{r\theta_{max}}}{\tilde{A}} \quad \text{Eq. 93}$$

Questa soluzione servirà da confronto per le più complesse soluzioni sviluppate con i metodi usati a Modo I. Questa soluzione infatti ha il vantaggio di essere estremamente semplice, come la sua controparte a Modo I, ma si noterà come perda l'efficacia predittiva a Modo II, suggerendo la necessità di utilizzo di più termini nelle funzioni esponenziali.

Materiale 1

$$E_x = 10Gpa, \quad E_y = 160Gpa, \quad G_{xy} = 5Gpa, \quad \nu_{xy} = 0.01875$$

$$\beta_1 = 0.1799, \quad \beta_2 = 1.3893$$

α	λ	χ_{21}	t	\tilde{A}
22.5°	0.61597	-0.8719	2.42931	-1.519459
45°	0.764825	-0.51806	2.88391	-0.870532
67.5°	0.982314	-0.14542	3.20248	-0.042014

Tab. 4.1: Valori parametri tensionali Tentativo 1 (Eq. 87) Modo II-Materiale 1

4.2 Soluzione con potenziali a 2 termini, condizioni al contorno per $\theta = \frac{3\gamma}{4}$ (Tentativo 2)

Questo metodo è la controparte a Modo II del tentativo 2 per il Modo I.

Le funzioni potenziali sono:

$$\begin{aligned}\phi'_1(z_1) &= iAz_1^{\lambda-1} \\ \phi'_2(z_2) &= iBz_2^{\lambda-1} + iCz_2^{\mu-1}\end{aligned}\tag{Eq. 94}$$

Che sostituite in Eq. 14 e raccogliendo A risultano nei seguenti campi tensionali:

$$\begin{aligned}\sigma_r &= -2A\{r_1^{\lambda-1}[k_{12} \cos(\lambda - 1) \theta_1 + k_{11} \sin(\lambda - 1) \theta_1] \\ &\quad + \chi_{21}r_2^{\lambda-1}[k_{22} \cos(\lambda - 1) \theta_2 + k_{21} \sin(\lambda - 1) \theta_2] \\ &\quad + \chi_{22}r_2^{\mu-1}[k_{22} \cos(\mu - 1) \theta_2 + k_{21} \sin(\mu - 1) \theta_2]\} \\ \sigma_\theta &= -2A\{r_1^{\lambda-1}[m_{12} \cos(\lambda - 1) \theta_1 + m_{11} \sin(\lambda - 1) \theta_1] \\ &\quad + \chi_{21}r_2^{\lambda-1}[m_{22} \cos(\lambda - 1) \theta_2 + m_{21} \sin(\lambda - 1) \theta_2] \\ &\quad + \chi_{22}r_2^{\mu-1}[m_{22} \cos(\mu - 1) \theta_2 + m_{21} \sin(\mu - 1) \theta_2]\} \\ \tau_{r\theta} &= -2A\{r_1^{\lambda-1}[n_{12} \cos(\lambda - 1) \theta_1 + n_{11} \sin(\lambda - 1) \theta_1] \\ &\quad + \chi_{21}r_2^{\lambda-1}[n_{22} \cos(\lambda - 1) \theta_2 + n_{21} \sin(\lambda - 1) \theta_2] \\ &\quad + \chi_{22}r_2^{\mu-1}[n_{22} \cos(\mu - 1) \theta_2 + n_{21} \sin(\mu - 1) \theta_2]\}\end{aligned}\tag{Eq. 95}$$

Applichiamo ora le condizioni di esistenza:

$$\begin{aligned}\sigma_u|_{u=u_0} &= 0 \\ \tau_{uv}|_{u=u_0} &= 0\end{aligned}\tag{Eq. 96}$$

$$\begin{bmatrix} b_{11} & b_{12} \\ b_{21} & b_{22} \end{bmatrix} \begin{Bmatrix} A \\ B \end{Bmatrix} = 0\tag{Eq. 97}$$

$$\begin{aligned}b_{11} &= \rho_1^{\lambda-1}[m_{12} \cos(1 - \lambda) \theta_1(\gamma) - m_{11} \sin(1 - \lambda) \theta_1(\gamma)] \\ b_{12} &= \rho_2^{\lambda-1}[m_{22} \cos(1 - \lambda) \theta_2(\gamma) - m_{21} \sin(1 - \lambda) \theta_2(\gamma)] \\ b_{21} &= \rho_1^{\lambda-1}[n_{12} \cos(1 - \lambda) \theta_1(\gamma) - n_{11} \sin(1 - \lambda) \theta_1(\gamma)] \\ b_{22} &= \rho_2^{\lambda-1}[n_{22} \cos(1 - \lambda) \theta_2(\gamma) - n_{21} \sin(1 - \lambda) \theta_2(\gamma)]\end{aligned}\tag{Eq. 98}$$

Risultanti nelle stesse costanti del metodo precedente;

$$B = -A \frac{\rho_1^{\lambda-1}[m_{12} \cos(1 - \lambda) \theta_1(\gamma) - m_{11} \sin(1 - \lambda) \theta_1(\gamma)]}{\rho_2^{\lambda-1}[m_{22} \cos(1 - \lambda) \theta_2(\gamma) - m_{21} \sin(1 - \lambda) \theta_2(\gamma)]} = A\chi_{21}\tag{Eq. 99}$$

Con λ ricavato imponendo $Det[[b_{ij}]] = 0$.

Le altre condizioni imposte sono

$$\left. \begin{aligned} \tau_{uv}(\theta = 0)|_{u=u_0} &= 0 \\ \frac{\partial \sigma_u}{\partial v} \Big|_{u=u_0, v=0} &= \frac{\partial \sigma_r}{\partial \theta} \Big|_{u=u_0, \theta=0} - \frac{2\tau_{r\theta}}{q} \Big|_{u=u_0, \theta=0} = 0 \end{aligned} \right\} \rightarrow \begin{bmatrix} c_{11} & c_{12} \\ c_{21} & c_{22} \end{bmatrix} \begin{Bmatrix} A \\ C \end{Bmatrix} = 0 \quad \text{Eq. 100}$$

$$\left. \begin{aligned} \sigma_u(\theta = \frac{3\gamma}{4}) \Big|_{u=u_0} &= 0 \\ \tau_{uv}(\theta = \frac{3\gamma}{4}) \Big|_{u=u_0} &= 0 \end{aligned} \right\} \rightarrow \begin{bmatrix} d_{11} & d_{12} \\ d_{21} & d_{22} \end{bmatrix} \begin{Bmatrix} A \\ C \end{Bmatrix} = 0 \quad \text{Eq. 101}$$

Seguendo lo stesso procedimento precedentemente illustrato si ottengono le variabili t , μ e χ_{22} . Riscrivendo il parametron A in funzione della $\tau_{r\theta_{max}}$ in maniera analoga al Tentativo 1 si ottiene:

$$A = \frac{\tau_{r\theta_{max}}}{\tilde{A}} \quad \text{Eq. 102}$$

$$\tilde{A} = 2\{\beta_1(x'(\tau_{r\theta_{max}}) + r_0\beta_1^t)^{\lambda-1} + \chi_{21}\beta_2(x'(\tau_{r\theta_{max}}) + r_0\beta_2^t)^{\lambda-1} + \chi_{22}\beta_2(x'(\tau_{r\theta_{max}}) + r_0\beta_2^t)^{\mu-1}\}$$

Si riportano ora queste due metodologie confrontate con i risultati al Fem.

Per modellare condizioni al contorno di Modo II sul software ANSYS 18.2 il seguente modello di carico è stato utilizzato:

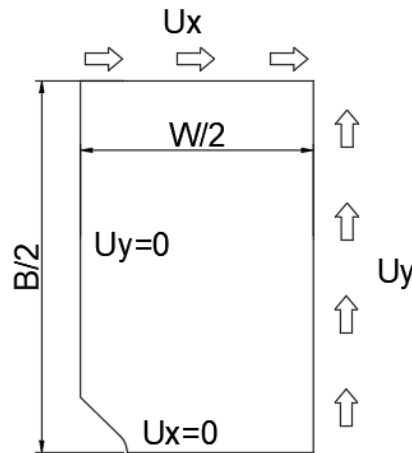


Fig.4.1: Schema di carico utilizzato per le analisi agli elementi finiti di Modo II

In cui $U_x = U_y = \frac{\tau_{xy\infty}BW}{G_{xy}(B+W)}$, con $\tau_{xy\infty}$ tensione di taglio applicate all'infinito.

I confronti verranno riportati prima per il materiale 1 e in seguito per il materiale 2 in quanto a Modo II i campi tensionali perdono la proprietà di singolarità per α inferiori; tanto inferiori tanto quanto il materiale è rigido in direzione dell'intaglio. Secondo il modello proposto infatti

si ottiene che la perdita di singolarità per il materiale 1 avviene a $2\alpha \cong 137^\circ$, per il materiale 2 a $2\alpha \cong 65^\circ$ mentre per un materiale quasi isotropo avviene a $2\alpha \cong 102^\circ$, in accordo con la teoria classica per materiali tradizionali.

Materiale 1

$$E_x = 10Gpa, \quad E_y = 160Gpa, \quad G_{xy} = 5Gpa, \quad \nu_{xy} = 0.01875$$

$$\beta_1 = 0.1799, \quad \beta_2 = 1.3893$$

α	λ	μ	χ_{21}	χ_{22}	t	\tilde{A}
22.5°	0.61597	0.172094	-0.8719	0.28508	1.92748	-1.05592
45°	0.764825	0.4931178	-0.51806	0.21406	1.628	-0.475433
67.5°	0.982314	0.869185	-0.14542	-0.00641	4.3879	-0.056068

Tab. 4.2: Valori parametri tensionali Tentativo 2 (Eq. 95) Modo II-Materiale 1

Il parametro χ_{22} è stato calcolato dal Sistema Eq. 100.

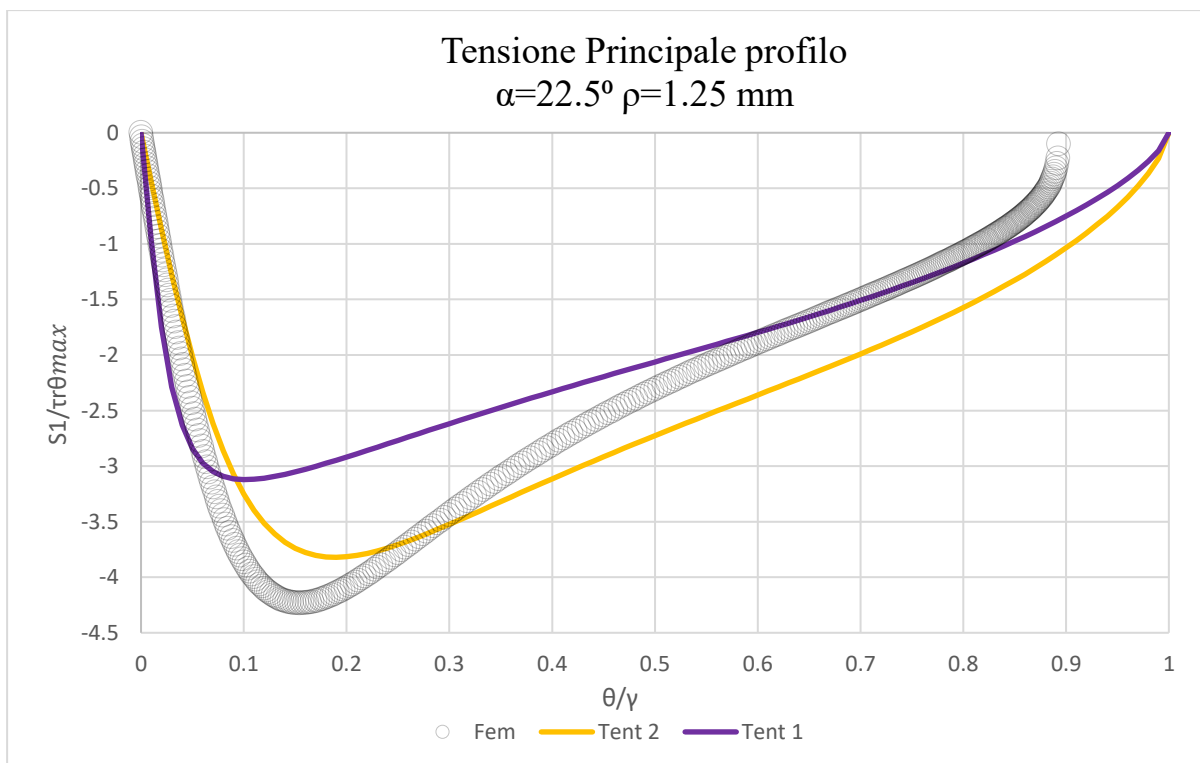


Fig. 4.2: Andamenti tensione principale lungo profilo dell'intaglio per Modo II-Materiale 1 con $\alpha=22.5^\circ \rho=1.25 \text{ mm}$; confronto Fem, Tentativo 2 (Eq. 95) e Tentativo 1 (Eq. 87)

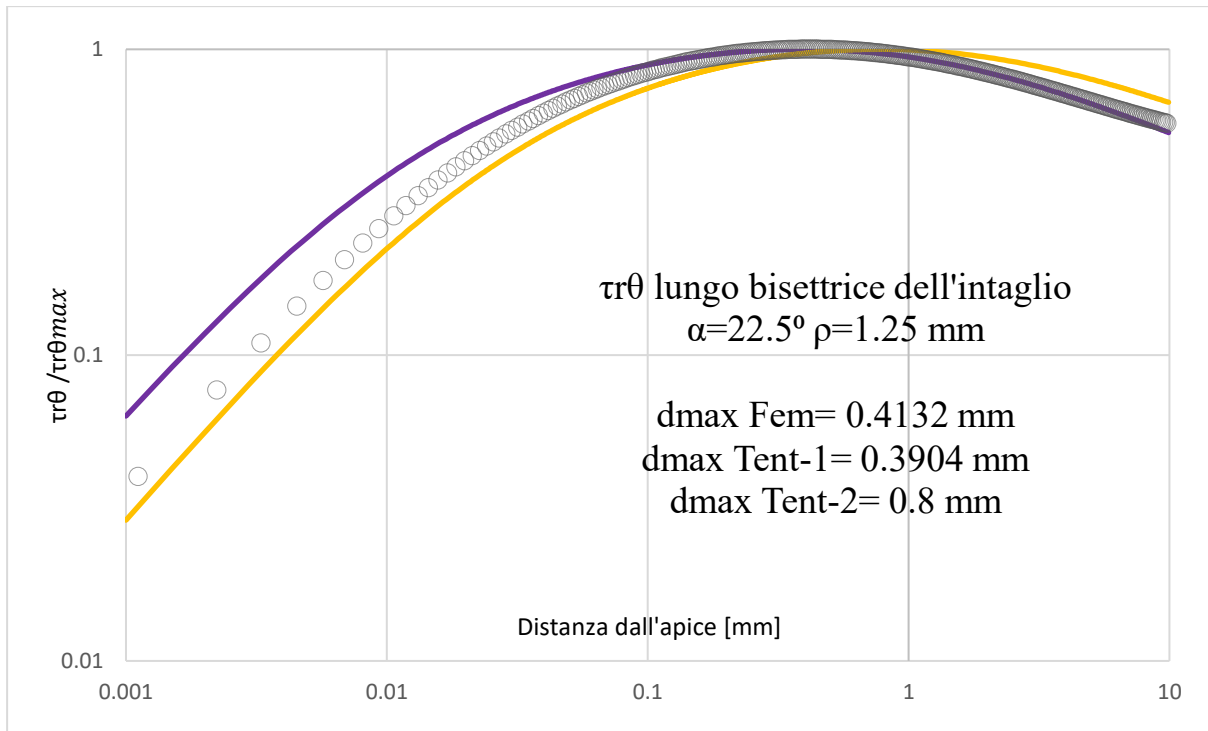


Fig. 4.3: Andamenti $\tau_{r\theta}$ lungo la bisettrice dell'intaglio per Modo II-Materiale 1 con $\alpha=22.5^\circ$ e $\rho=1.25$ mm; confronto Fem, Tentativo 2 (Eq. 95) e Tentativo 1 (Eq. 87)

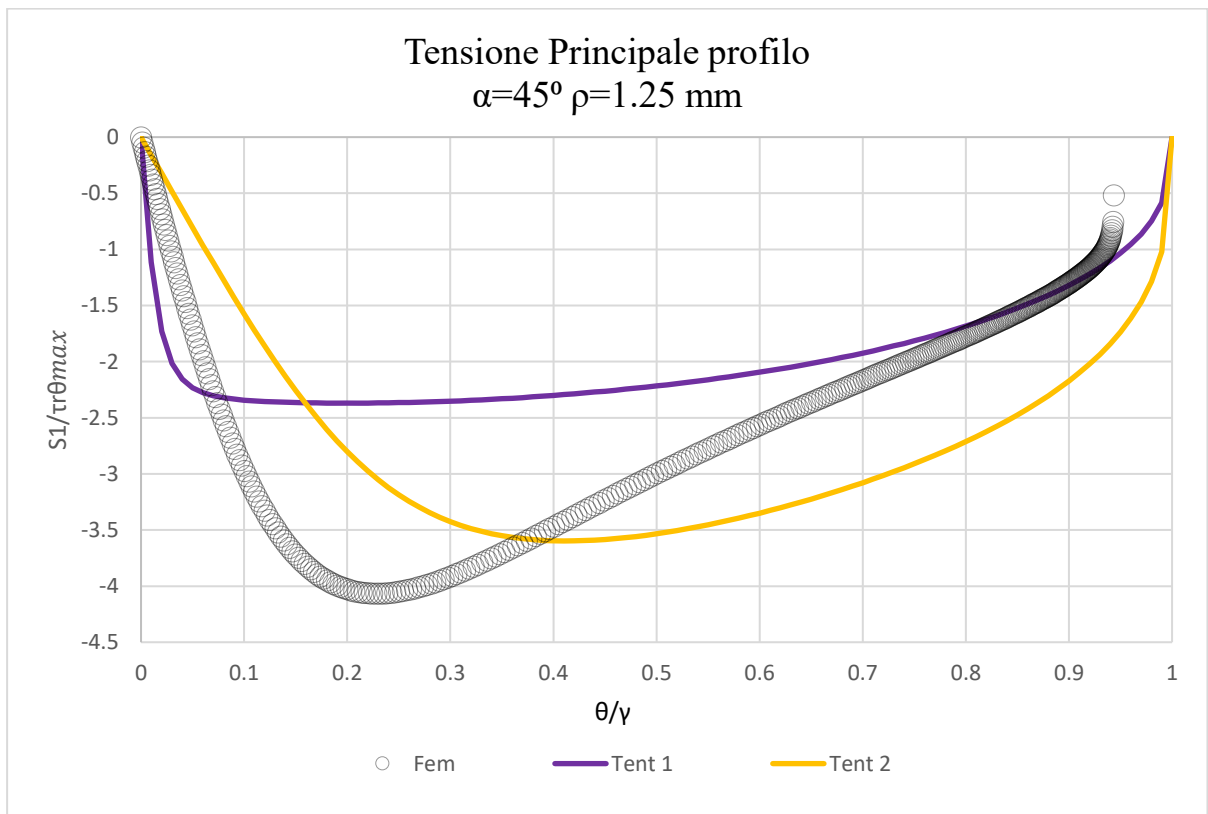


Fig. 4.4: Andamenti tensione principale lungo profilo dell'intaglio per Modo II-Materiale 1 con $\alpha=45^\circ$ $\rho=1.25$ mm; confronto Fem, Tentativo 2 (Eq. 95) e Tentativo 1 (Eq. 87)

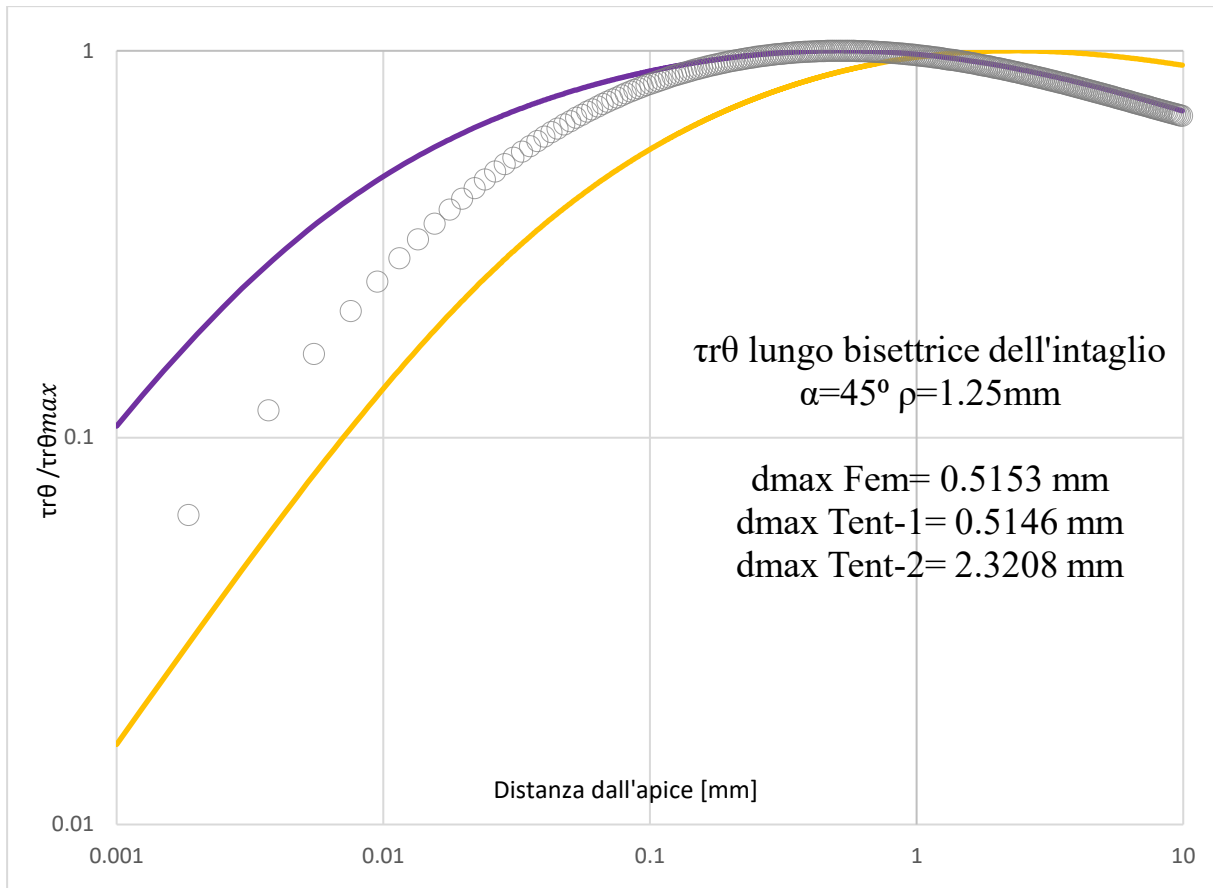


Fig.4.5: Andamenti $\tau_{r\theta}$ lungo la bisettrice dell'intaglio per Modo II-Materiale 1 con $\alpha=45^{\circ}$ e $\rho=1.25$ mm; confronto Fem, Tentativo 2 (Eq. 95) e Tentativo 1 (Eq. 87)

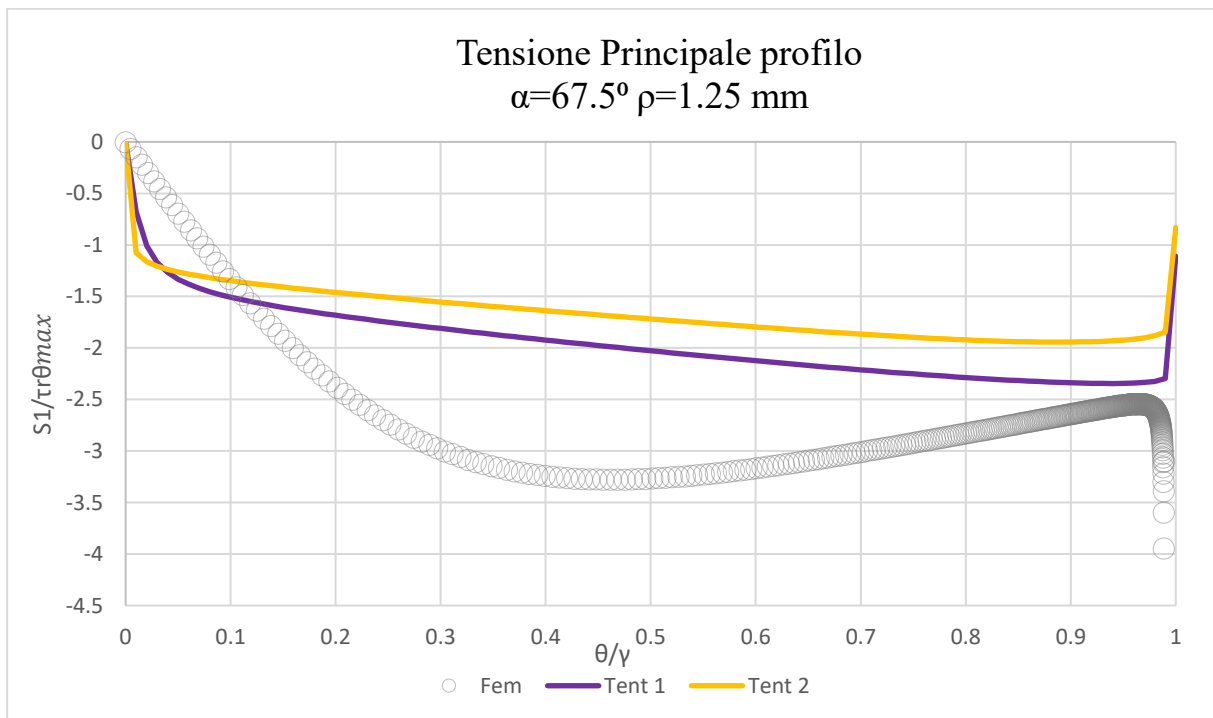


Fig.4.6: Andamenti tensione principale lungo profilo dell'intaglio per Modo II-Materiale 1 con $\alpha=67.5^{\circ}$ $\rho=1.25$ mm; confronto Fem, Tentativo 2 (Eq. 95) e Tentativo 1 (Eq. 87)

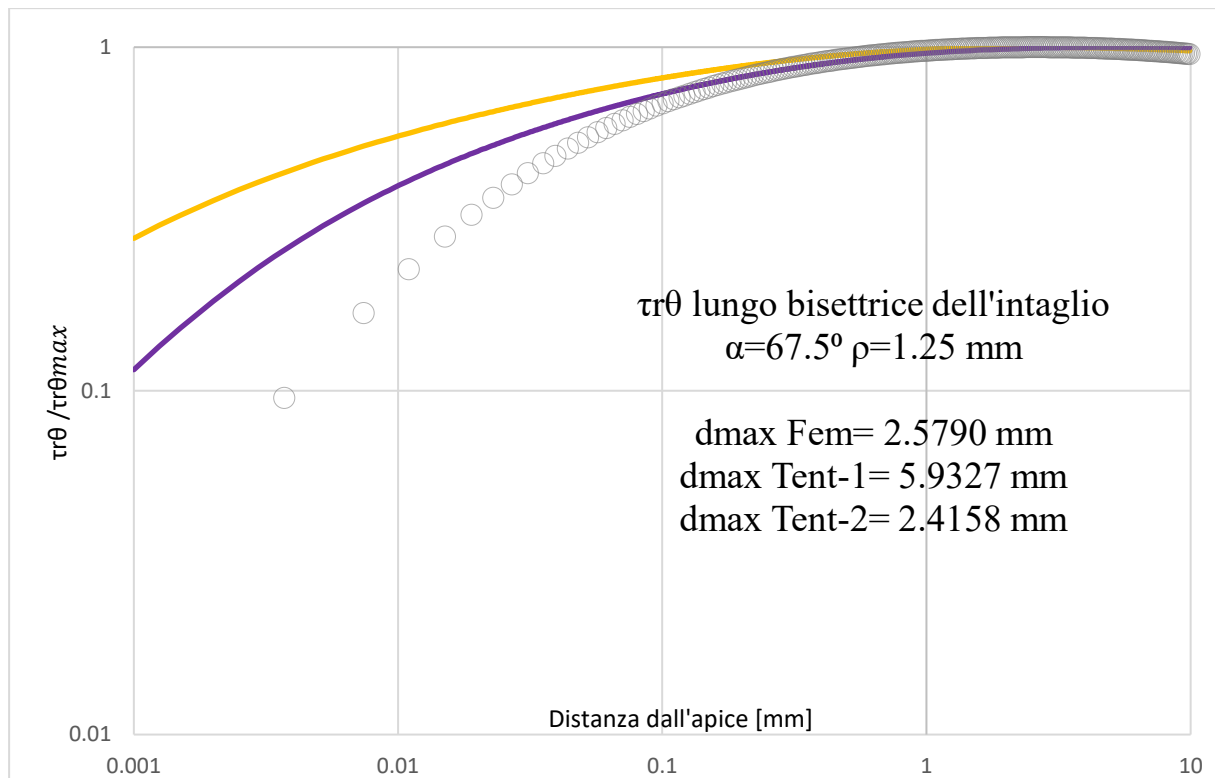


Fig.4.7: Andamenti $\tau_{r\theta}$ lungo la bisettrice dell'intaglio per Modo II-Materiale 1 con $\alpha=67.5^\circ$ e $\rho=1.25\text{ mm}$; confronto Fem, Tentativo 2 (Eq. 95) e Tentativo 1 (Eq. 87)

Dai risultati si evince come il tentativo ripreso dal modello del 2017 si in grado di predire la posizione di picco e l'andamento della tensione lungo la bisettrice per $\alpha \leq 45^\circ$, sovrastimandole per $\alpha > 45^\circ$, mentre fatica a riprodurre l'andamento delle tensioni lungo il profilo dell'intaglio.

Il secondo modello invece approssima più accuratamente le tensioni lungo il profilo, al prezzo di una precisione inferiore lungo la bisettrice.

I due modelli quindi eccellono in due aspetti diversi ma nessuno riesce a predire precisamente lo stato tensionale generale del Modo II. Per questo motivo si è volute indagare un modello più complesso con più termini nelle funzioni potenziali per testare l'ipotesi che sia l'approssimazione eccessiva della serie di Laurent a causare disturbi ai campi tensionali.

4.3 Soluzione con potenziali a 3 termini, condizioni al contorno appartenenti solo al gruppo 2 (Tentativo 3)

Questo modello riprende il Tentativo 4 usato per il Modo I.

Si utilizzano le seguenti funzioni potenziali:

$$\begin{aligned}\phi'_1(z_1) &= iAz_1^{\lambda-1} + iDz_2^{\mu-1} \\ \phi'_2(z_2) &= iBz_2^{\lambda-1} + iCz_2^{\mu-1} + iCz_2^{\zeta-1}\end{aligned}\tag{Eq. 103}$$

Sostituendo in Eq. 14 e raccogliendo A si ottiene:

$$\begin{aligned}\sigma_r &= -2A\{r_1^{\lambda-1}[k_{12} \cos(\lambda - 1) \theta_1 + k_{11} \sin(\lambda - 1) \theta_1] \\ &\quad + \chi_{12}r_1^{\mu-1}[k_{12} \cos(\mu - 1) \theta_1 + k_{11} \sin(\mu - 1) \theta_1] \\ &\quad + \chi_{21}r_2^{\lambda-1}[k_{22} \cos(\lambda - 1) \theta_2 + k_{21} \sin(\lambda - 1) \theta_2] \\ &\quad + \chi_{22}r_2^{\mu-1}[k_{22} \cos(\mu - 1) \theta_2 + k_{21} \sin(\mu - 1) \theta_2] \\ &\quad + \chi_{23}r_2^{\zeta-1}[k_{22} \cos(\zeta - 1) \theta_2 + k_{21} \sin(\zeta - 1) \theta_2]\} \\ \sigma_\theta &= -2A\{r_1^{\lambda-1}[m_{12} \cos(\lambda - 1) \theta_1 + m_{11} \sin(\lambda - 1) \theta_1] \\ &\quad + \chi_{12}r_1^{\mu-1}[m_{12} \cos(\mu - 1) \theta_1 + m_{11} \sin(\mu - 1) \theta_1] \\ &\quad + \chi_{21}r_2^{\lambda-1}[m_{22} \cos(\lambda - 1) \theta_2 + m_{21} \sin(\lambda - 1) \theta_2] \\ &\quad + \chi_{22}r_2^{\mu-1}[m_{22} \cos(\mu - 1) \theta_2 + m_{21} \sin(\mu - 1) \theta_2] \\ &\quad + \chi_{23}r_2^{\zeta-1}[m_{22} \cos(\zeta - 1) \theta_2 + m_{21} \sin(\zeta - 1) \theta_2]\} \\ \tau_{r\theta} &= -2A\{r_1^{\lambda-1}[n_{12} \cos(\lambda - 1) \theta_1 + n_{11} \sin(\lambda - 1) \theta_1] \\ &\quad + \chi_{12}r_1^{\mu-1}[n_{12} \cos(\mu - 1) \theta_1 + n_{11} \sin(\mu - 1) \theta_1] \\ &\quad + \chi_{21}r_2^{\lambda-1}[n_{22} \cos(\lambda - 1) \theta_2 + n_{21} \sin(\lambda - 1) \theta_2] \\ &\quad + \chi_{22}r_2^{\mu-1}[n_{22} \cos(\mu - 1) \theta_2 + n_{21} \sin(\mu - 1) \theta_2] \\ &\quad + \chi_{23}r_2^{\zeta-1}[n_{22} \cos(\zeta - 1) \theta_2 + n_{21} \sin(\zeta - 1) \theta_2]\}\end{aligned}\tag{Eq. 104}$$

Si impongono quindi le seguenti condizioni al contorno:

$$\begin{aligned}\tau_{uv}(\theta = 0^0)|_{u=u_0} &= 0 \\ \sigma_u(\theta = 20^0)|_{u=u_0} &= 0 \\ \tau_{uv}(\theta = 30^0)|_{u=u_0} &= 0 \\ \sigma_u(\theta = 50^0)|_{u=u_0} &= 0 \\ \tau_{uv}(\theta = 70^0)|_{u=u_0} &= 0 \\ \sigma_u(\theta = 80^0)|_{u=u_0} &= 0\end{aligned}\tag{Eq. 105}$$

$$\begin{aligned}\tau_{uv}(\theta = 90^\circ)|_{u=u_0} &= 0 \\ \sigma_u(\theta = 100^\circ)|_{u=u_0} &= 0\end{aligned}$$

Sistema risolto con metodi numerici.

Risulta anche in questo caso utile riscrivere la costante A in funzione della tensione massima lungo la bisettrice:

$$\begin{aligned}A &= \frac{\tau_{r\theta_{max}}}{\tilde{A}} \\ \tilde{A} &= 2\{\beta_1(x'(\tau_{r\theta_{max}}) + r_0\beta_1^t)^{\lambda-1} + \chi_{12}\beta_1(x'(\tau_{r\theta_{max}}) + r_0\beta_1^t)^{\mu-1} \\ &\quad + \chi_{21}\beta_2(x'(\tau_{r\theta_{max}}) + r_0\beta_2^t)^{\lambda-1} \\ &\quad + \chi_{22}\beta_2(x'(\tau_{r\theta_{max}}) + r_0\beta_2^t)^{\mu-1} \\ &\quad + \chi_{23}\beta_2(x'(\tau_{r\theta_{max}}) + r_0\beta_2^t)^{\zeta-1}\}\end{aligned} \quad \text{Eq. 106}$$

Si confrontano ora i risultati ottenuti con questo modello e con il modello derivato dal paper del 2017 per il materiale 1.

Materiale 1

$$\begin{aligned}E_x &= 10Gpa, & E_y &= 160Gpa, & G_{xy} &= 5Gpa, & \nu_{xy} &= 0.01875 \\ & & \beta_1 &= 0.1799, & \beta_2 &= 1.3893\end{aligned}$$

α	λ	μ	ζ	χ_{12}	χ_{21}	χ_{22}	χ_{23}	t	\tilde{A}
22.5°	0.5905	0.3194	-0.606	0.01545	-0.9089	0.0401	0.1144	2.0548	-1.389
45°	0.7504	0.3615	0.2828	0.20867	-0.6479	0.2609	-0.2235	1.73037	-1.071
67.5°	0.981	0.3938	-0.535	0.0077	-0.1474	-0.0003	-2.5E-5	1.17809	-0.047

Tab. 4.3: Valori parametri tensionali Tentativo 3 (Eq. 104) Modo II-Materiale 1

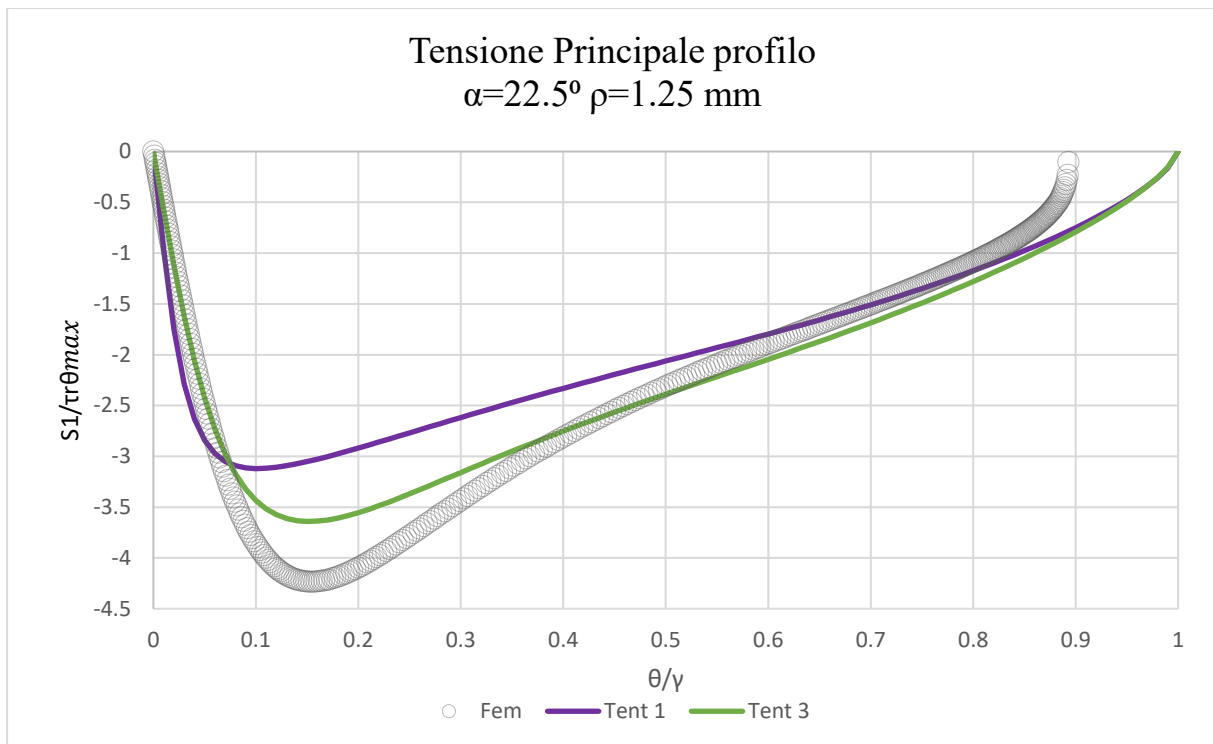


Fig. 4.8: Andamenti tensione principale lungo profilo dell'intaglio per Modo II-Materiale 1 con $\alpha=22.5^\circ \rho=1.25 \text{ mm}$; confronto Fem, Tentativo 3 (Eq. 104) e Tentativo 1 (Eq. 87)

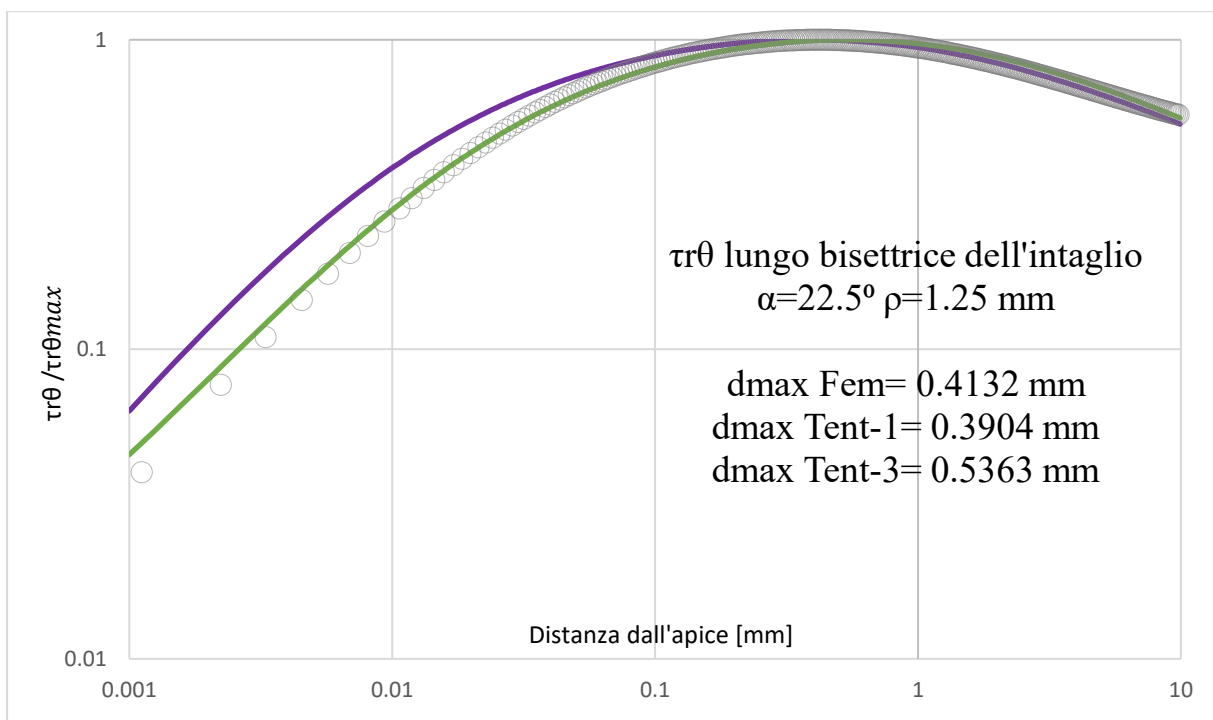


Fig. 4.9: Andamenti $\tau_{r\theta}$ lungo la bisettrice dell'intaglio per Modo II-Materiale 1 con $\alpha=22.5^\circ$ e $\rho=1.25 \text{ mm}$; confronto Fem, Tentativo 3 (Eq. 104) e Tentativo 1 (Eq. 87)

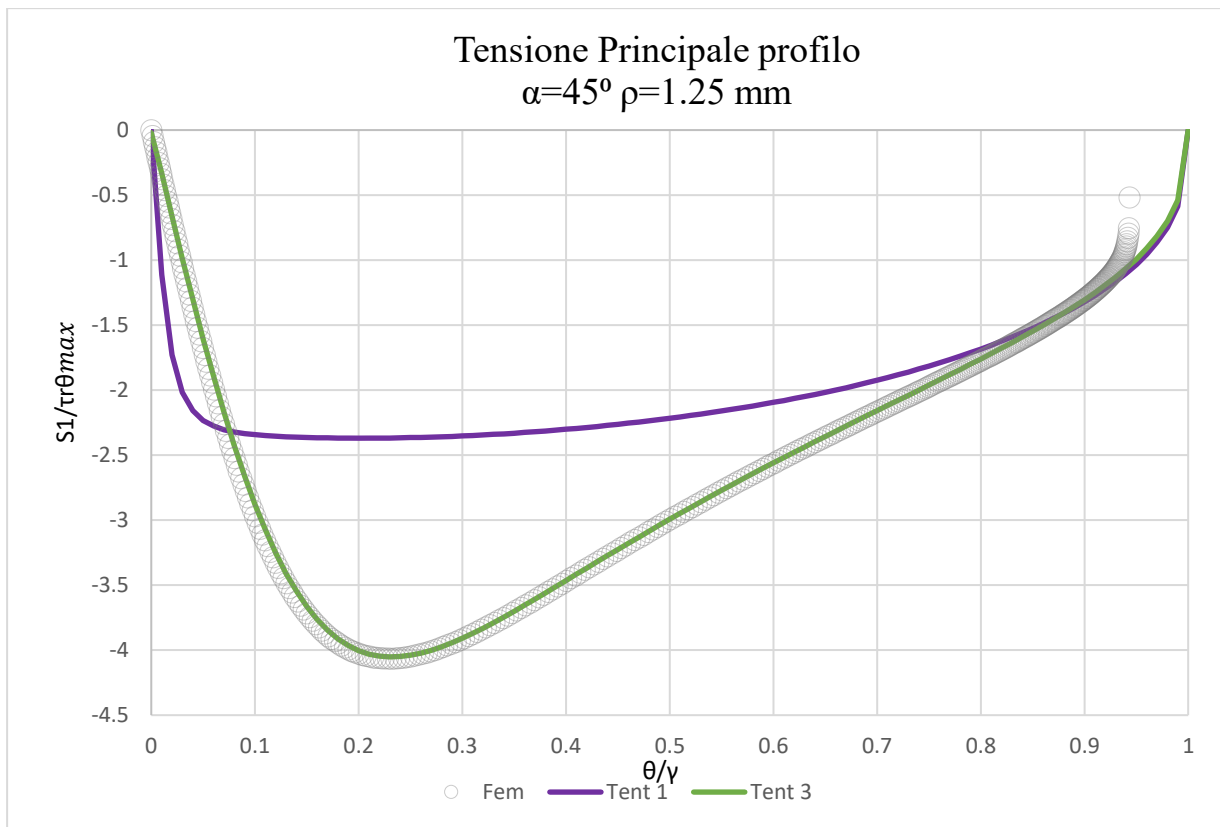


Fig. 4.10: Andamenti tensione principale lungo profilo dell'intaglio per Modo II-Materiale 1 con $\alpha=45^\circ \rho=1.25 \text{ mm}$; confronto Fem, Tentativo 3 (Eq. 104) e Tentativo 1 (Eq. 87)

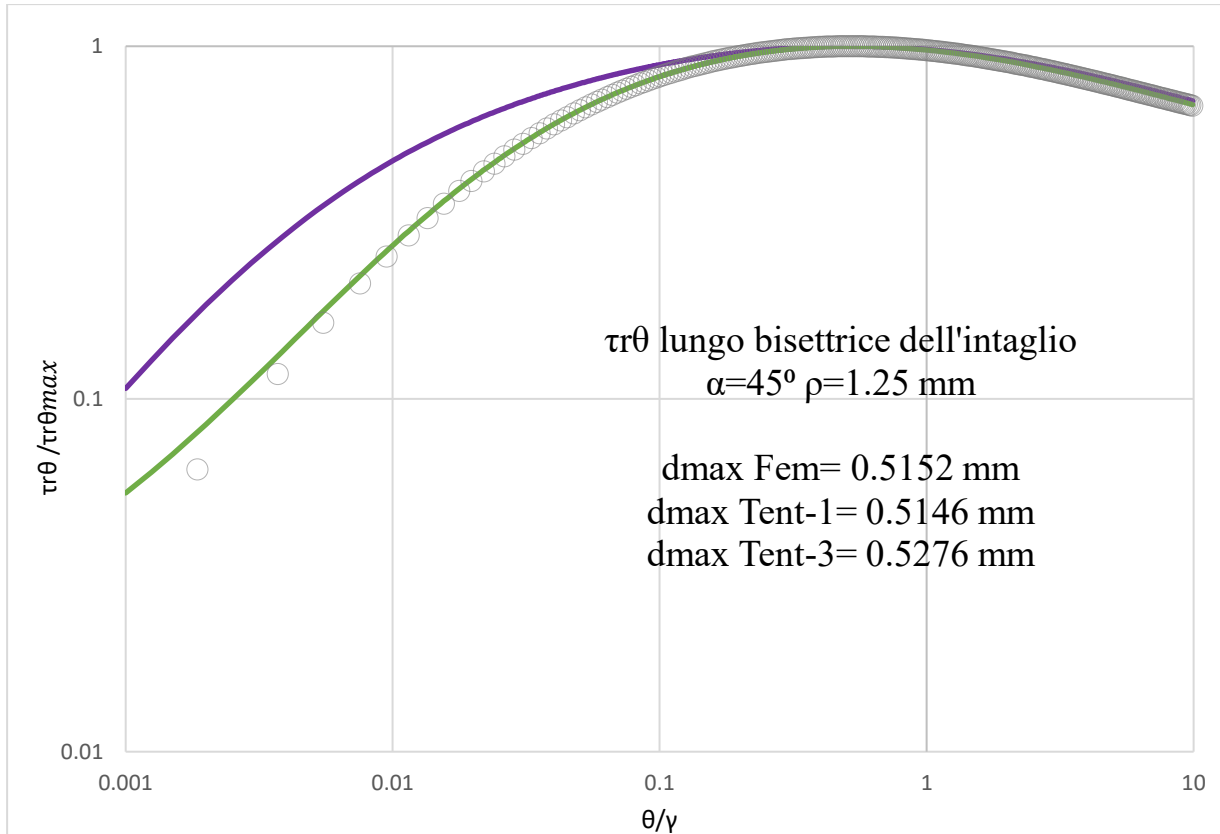


Fig. 4.11: Andamenti $\tau_{r\theta}$ lungo la bisettrice dell'intaglio per Modo II-Materiale 1 con $\alpha=45^\circ$ e $\rho=1.25 \text{ mm}$; confronto Fem, Tentativo 3 (Eq. 104) e Tentativo 1 (Eq. 87)

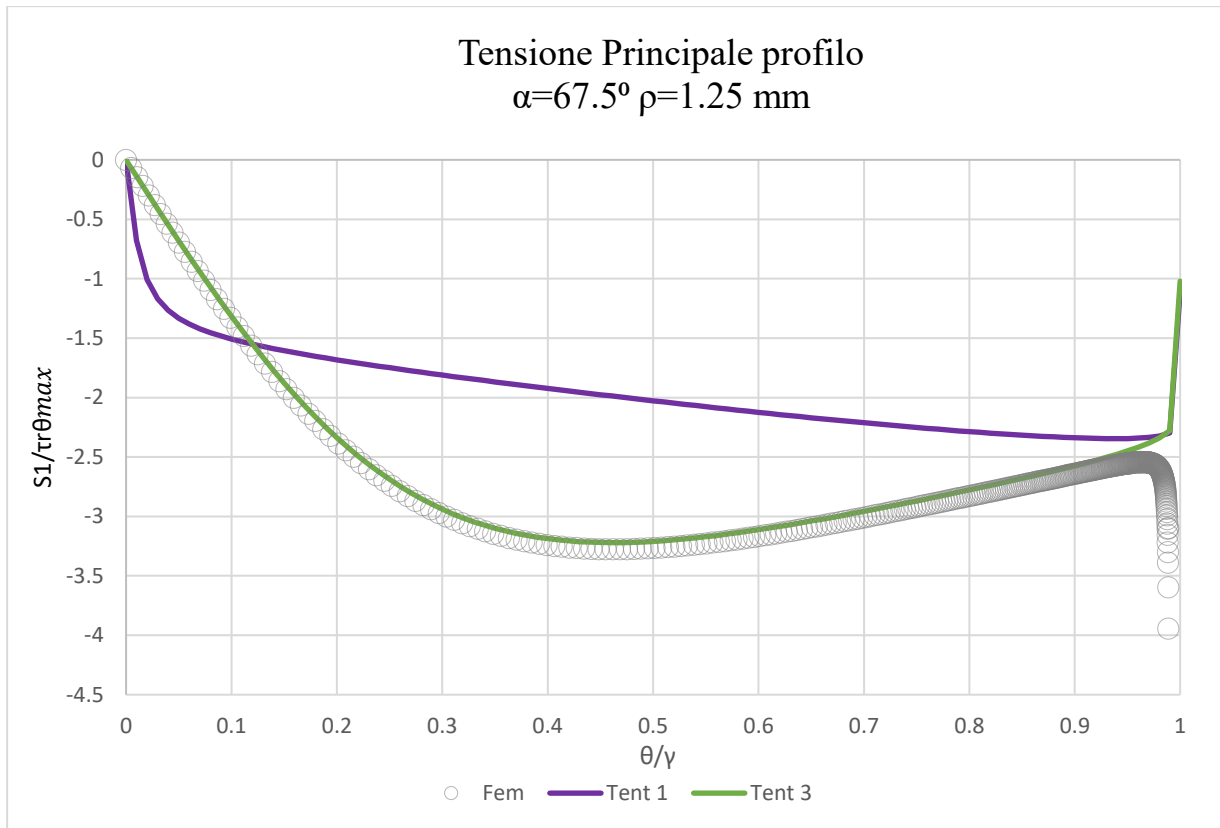


Fig. 4.12: Andamenti tensione principale lungo profilo dell'intaglio per Modo II-Materiale 1 con $\alpha=67.5^\circ$ $\rho=1.25$ mm; confronto Fem, Tentativo 3 (Eq. 104) e Tentativo 1 (Eq. 87)

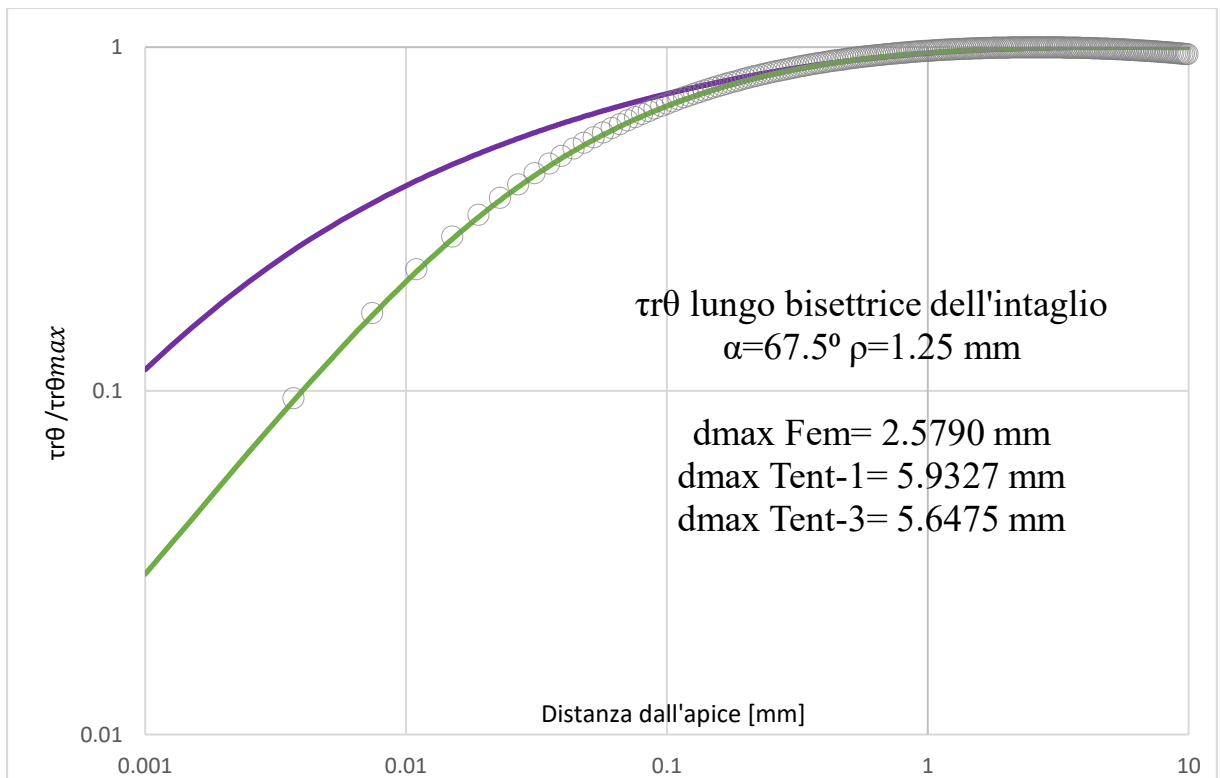


Fig. 4.13: Andamenti $\tau_{r\theta}$ lungo la bisettrice dell'intaglio per Modo II-Materiale 1 con $\alpha=67.5^\circ$ e $\rho=1.25$ mm; confronto Fem, Tentativo 3 (Eq. 104) e Tentativo 1 (Eq. 87)

Si nota immediatamente come la nuova soluzione sia più precisa nello seguire i campi tensionali riscontrati al Fem in tutte le condizioni, apportando significativi miglioramenti alla capacità predittiva dei picchi di tensione lungo il profile dell'intaglio. Questo conferma l'ipotesi che per il Modo II siano necessari più termini nelle funzioni potenziali per catturare con accuratezza i campi tensionali reali.

4.4 Soluzione al materiale 2

Il Modo II per un materiale rigido lungo la bisettrice dell'intaglio è molto diverso dalle altre ipotesi mostrate in questo lavoro. In particolare si nota come la proprietà di singolarità del campo di tensioni si perde per aperture dell'intaglio molto minori, tanto minori tanto più il materiale è rigido in questa direzione rispetto alla direzione ortogonale. Inoltre si riscontra come le soluzioni generate da questi metodi perdono in fretta la stabilità all'aumentare del numero di termini nelle funzioni potenziali. L'unico caso in cui è stata possibile la generazione di una soluzione con queste ipotesi di materiale è stato tramite il primo tentativo, che riprende il metodo usato nel paper del 2017 per il Modo I. Si riportano i risultati ottenuti con questo metodo per un angolo di apertura pari a $\alpha = 22.5^\circ$.

$$E_x = 160Gpa, \quad E_y = 10Gpa, \quad G_{xy} = 5Gpa, \quad \nu_{xy} = 0.3$$

$$\beta_1 = 0.7198, \quad \beta_2 = 5.5572$$

α	λ	χ_{21}	t	\tilde{A}
22.5°	0.883125	-0.27316	3.12372	-0.684974

Tab. 4.4: Valori parametri tensionali Tentativo 1 (Eq. 87) Modo II-Materiale 2

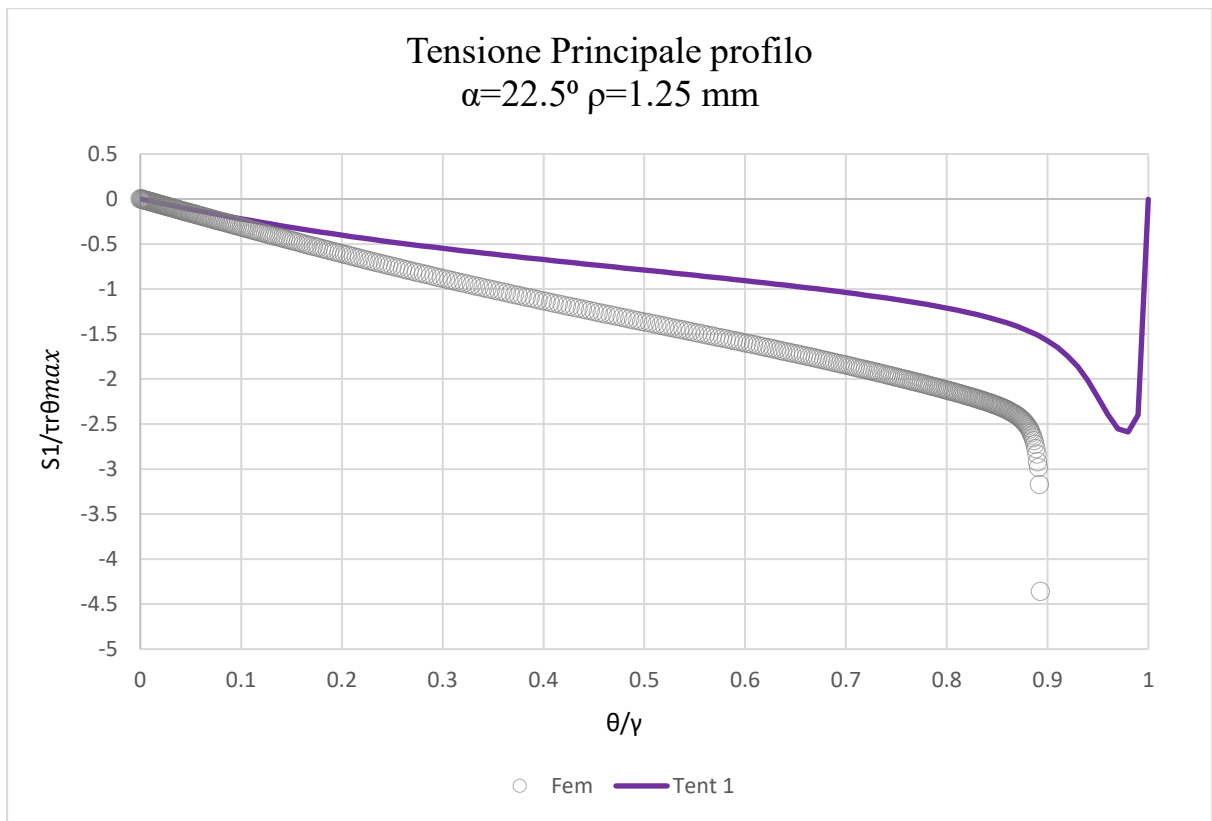


Fig. 4.14: Andamenti tensione principale lungo profilo dell'intaglio per Modo II-Materiale 2 con $\alpha=22.5^\circ \rho=1.25 \text{ mm}$; confronto Fem e Tentativo 1 (Eq. 87)

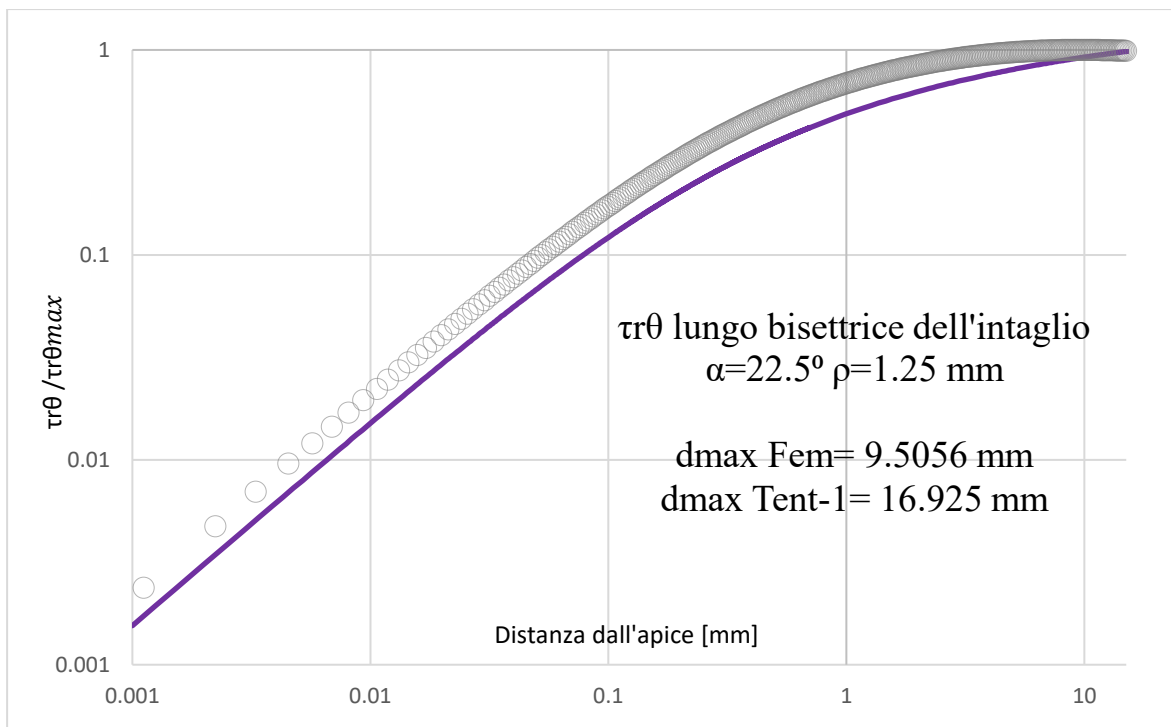


Fig. 4.15: Andamenti $\tau_{r\theta}$ lungo la bisettrice dell'intaglio per Modo II-Materiale 2 con $\alpha=22.5^\circ$ e $\rho=1.25 \text{ mm}$; confronto Fem e Tentativo 1 (Eq. 87)

I risultati trovati non sono estremamente precisi ma riescono a catturare l'andamento dei campi tensionali. Ricordando che queste soluzioni sono imposte da condizioni estremamente stringenti di materiale e Modo si possono accettare questi gradi di imprecisione.

4.5 Comparazione modelli e scelta della miglior soluzione.

Il Modo II, rispetto al Modo I, presenta delle notevoli variazioni dei campi tensionali al cambiare delle variabili geometriche, fortemente dipendenti anche dal materiale analizzato. Questo porta il Modo II ad essere difficilmente racchiuso in un singolo modello matematico, forzando lo sviluppo di più equazioni per diverse ipotesi. In particolare sembra che le proprietà del materiale in analisi siano le variabili critiche che determinano il comportamento dei campi tensionali.

Per materiali rigidi lungo l'asse delle y quindi il modello più accurato sembra essere il Tentativo 4, il quale utilizza funzioni potenziali più sviluppate; per materiali rigidi lungo l'asse delle x invece i campi tensionali risultano più rilassati, e il modello sviluppato dalla teoria del 2017⁽¹⁷⁾ risulta più accurato.

5 Analisi dei risultati

Avendo scelto ora i modelli più adeguati per ogni combinazione di Modo/materiale si ricercano pattern stabili tra le varie soluzioni, al fine di definire delle linee guida per la ricerca di soluzioni in problemi simili con metodi analoghi.

Le prime considerazioni riguardano la proprietà di singolarità delle soluzioni al variare del materiale e del Modo.

Considerando il Modo I si osserva come tutti i campi tensionali trovati con il modello scelto siano singolari, a dispetto dell'angolo di apertura dell'intaglio 2α . Si osserva come l'autovalore principale λ cresca più rapidamente, all'aumentare dell'angolo α , nel caso di un materiale rigido lungo la bisettrice dell'intaglio, suggerendo che il dominio di singolarità della soluzione sia più ampio per materiali rigidi lungo y . I campi tensionali tuttavia sono rappresentati con molta precisione da potenziali del tipo Eq. 62 a dispetto del materiale; suggerendo come il Modo I sia estremamente stabile a dispetto delle condizioni imposte.

Considerando ora il Modo II si osserva come la proprietà di singolarità dei campi tensionali sia fortemente influenzata dalle proprietà del materiale. I campi d'esistenza delle soluzioni singolari per i materiali analizzati sono:

- Materiale 1

$$E_x = 10Gpa, \quad E_y = 160Gpa, \quad G_{xy} = 5Gpa, \quad \nu_{xy} = 0.01875$$

Singolare per: $0^\circ \leq 2\alpha \lesssim 137^\circ$

- Materiale 2

$$E_x = 160Gpa, \quad E_y = 10Gpa, \quad G_{xy} = 5Gpa, \quad \nu_{xy} = 0.3$$

Singolare per: $0^\circ \leq 2\alpha \lesssim 65^\circ$

Mentre per un materiale quasi-isotropo si ritrova il dominio di singolarità suggerito dalla teoria classica: $0^\circ \leq 2\alpha \lesssim 102^\circ$.

Questo indica una notevole variabilità dei campi tensionali al variare delle proprietà del materiale, variabilità che viene riflessa dalle funzioni potenziali. Il numero di termini delle funzioni potenziali che meglio approssima l'andamento delle tensioni infatti cresce al crescere del rapporto $\frac{E_y}{E_x}$. Le seguenti tabelle riassumono le precedenti considerazioni:

n		Modo	
		I	II
$\frac{E_y}{E_x}$	16	2	3
$\frac{E_x}{E_y}$	0.0625	2	1

Tab. 5.1: Numero termini n nei casi analizzati

n		Modo		Legenda
		I	II	
$\frac{E_y}{E_x}$	$\gg 1$	–	↑↑	– : Il parametro n resta invariato rispetto all'isotropo ↑↑ : Il parametro n ottimale cresce rispetto all'isotropo ↓↓ : Il parametro n ottimale decresce rispetto all'isotropo
$\frac{E_x}{E_y}$	$\ll 1$	–	↓↓	

Tab. 5.2: Andamento parametro n rispetto al caso isotropo

6 Intaglio a V raccordato

Si vuole ora fare un confronto tra i risultati migliori ottenuti con i nuovi modelli e un intaglio più comune nell'ambito industriale: l'intaglio a V raccordato. Questo intaglio è simile a quello di Neuber discusso nel Capitolo 4, ma nel punto di tangenza tra il profilo teorico e il fascio di rette $y = \tan(\pi - \alpha)x + c$, il profilo reale inizia a seguire quest'ultima, distaccandosi dalla curva mostrata in Fig. 1.1. Il profilo assume una geometria mostrata in Fig. 6.1⁽²³⁾:

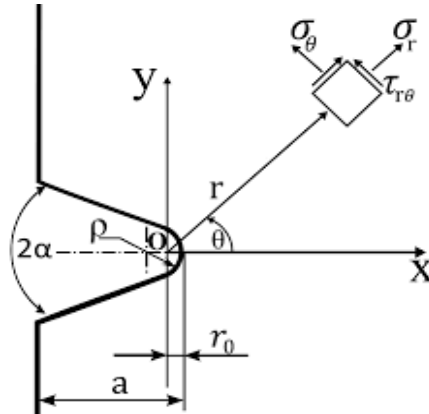


Fig. 6.1: Geometria di un intaglio a V raccordato

Questi confronti verranno effettuati per tutte le combinazioni di materiali e Modi viste in precedenza.

6.1 Modo I-Materiale 1

Per queste ipotesi le funzioni potenziali utilizzate saranno le Eq. 62 a cui vengono applicate le condizioni al contorno Eq. 73 risolte con il metodo illustrato nel Tentativo 2 a Modo I.

Le soluzioni saranno testate sia lungo il profilo dell'intaglio che lungo la bisettrice dello stesso come fatto per l'intaglio teorico.

$$E_x = 10Gpa, \quad E_y = 160Gpa, \quad G_{xy} = 5Gpa, \quad \nu_{xy} = 0.01875$$

$$\beta_1 = 0.1799, \quad \beta_2 = 1.3893$$

α	λ	μ	χ_{21}	χ_{22}	t	\tilde{A}
30°	0.502337	-0.80823	-0.12115	0.00566	1.87304	15.34728
45°	0.508722	-0.72284	-0.11033	0.005608	1.77546	15.05827
67.5°	0.5456639	-0.59495	-0.08042	0.003149	1.178097	13.43169

Tab. 6.1: Valori parametri tensionali Tentativo 2 (Eq. 63) Modo I-Materiale 1

Il parametro χ_{22} è stato calcolato dal primo sistema (Eq. 70).

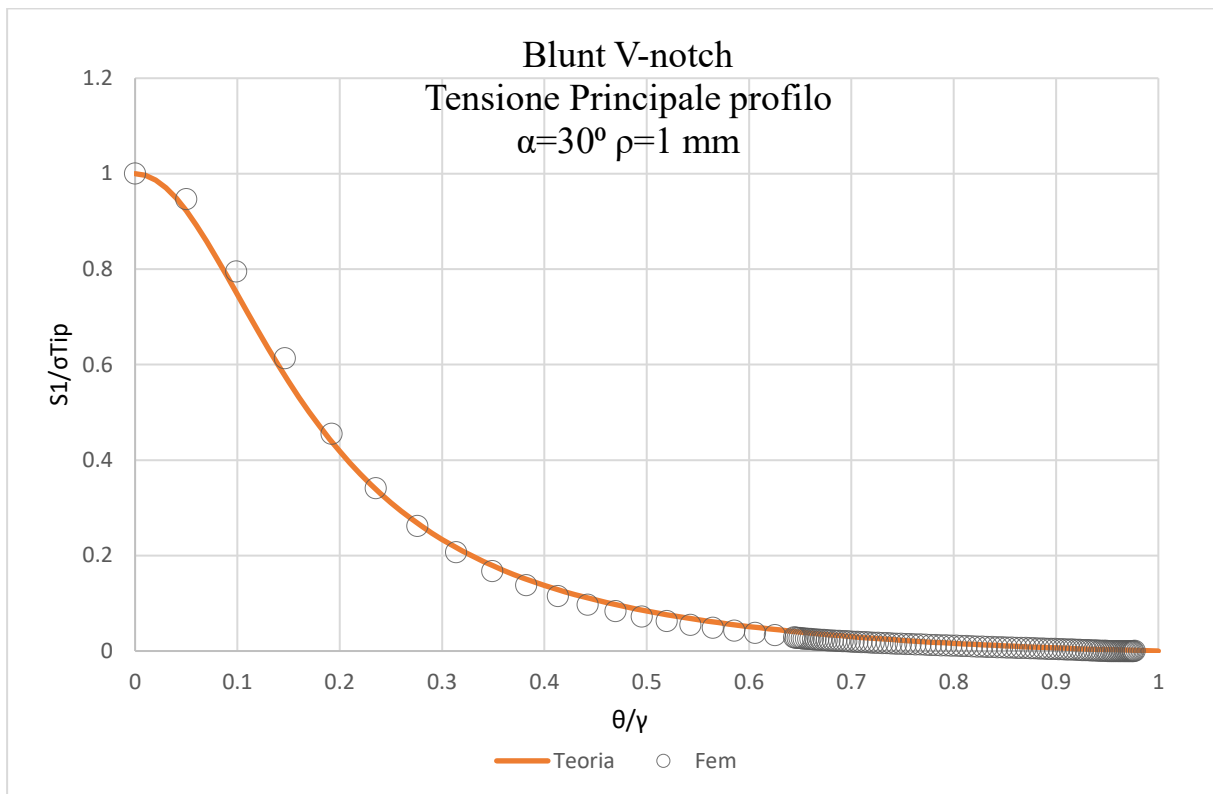


Fig. 6.2: Andamenti tensione principale lungo profilo dell'intaglio per Modo I-Materiale 1 con $\alpha=30^\circ \rho=1 \text{ mm}$; confronto Fem Blunt V-notch e Tentativo 2 (Eq. 63)

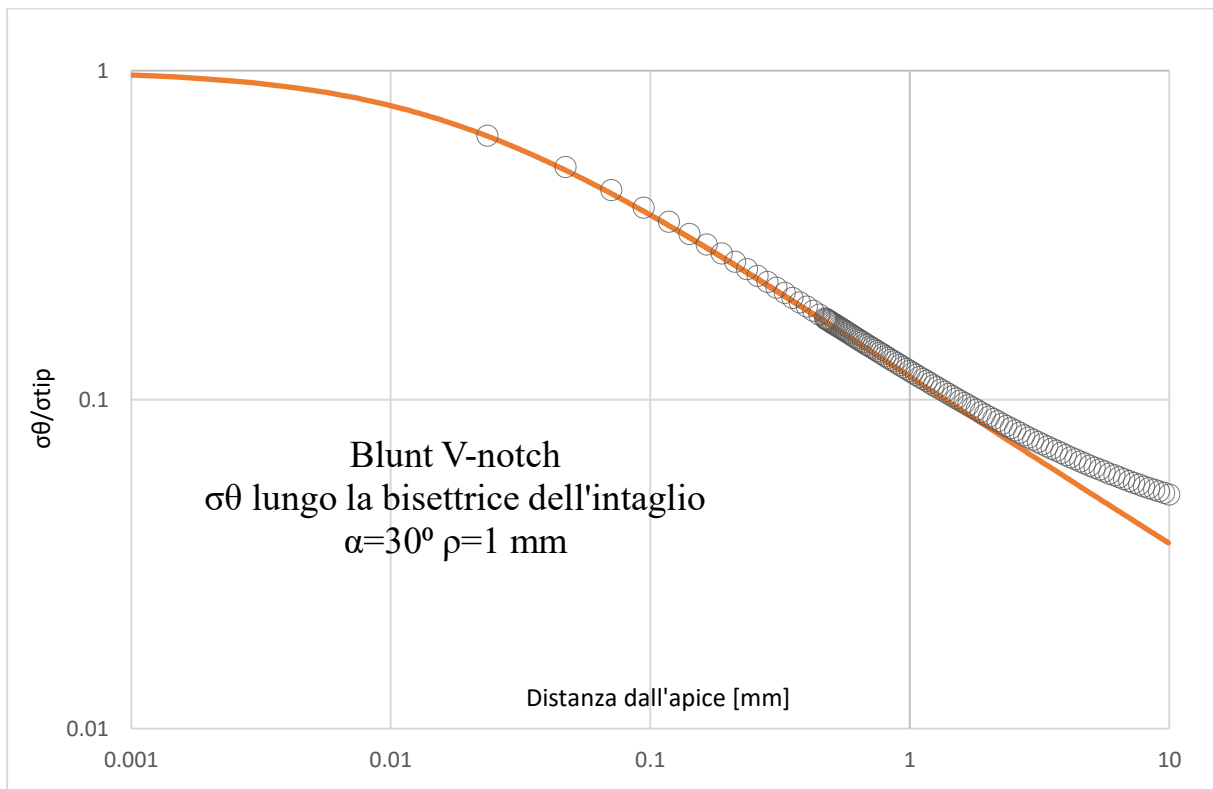


Fig. 6.3: Andamenti σ_θ lungo la bisettrice dell'intaglio per Modo I-Materiale 1 con $\alpha=30^\circ$ e $\rho=1 \text{ mm}$; confronto Fem Blunt V-notch e Tentativo 2 (Eq. 63)

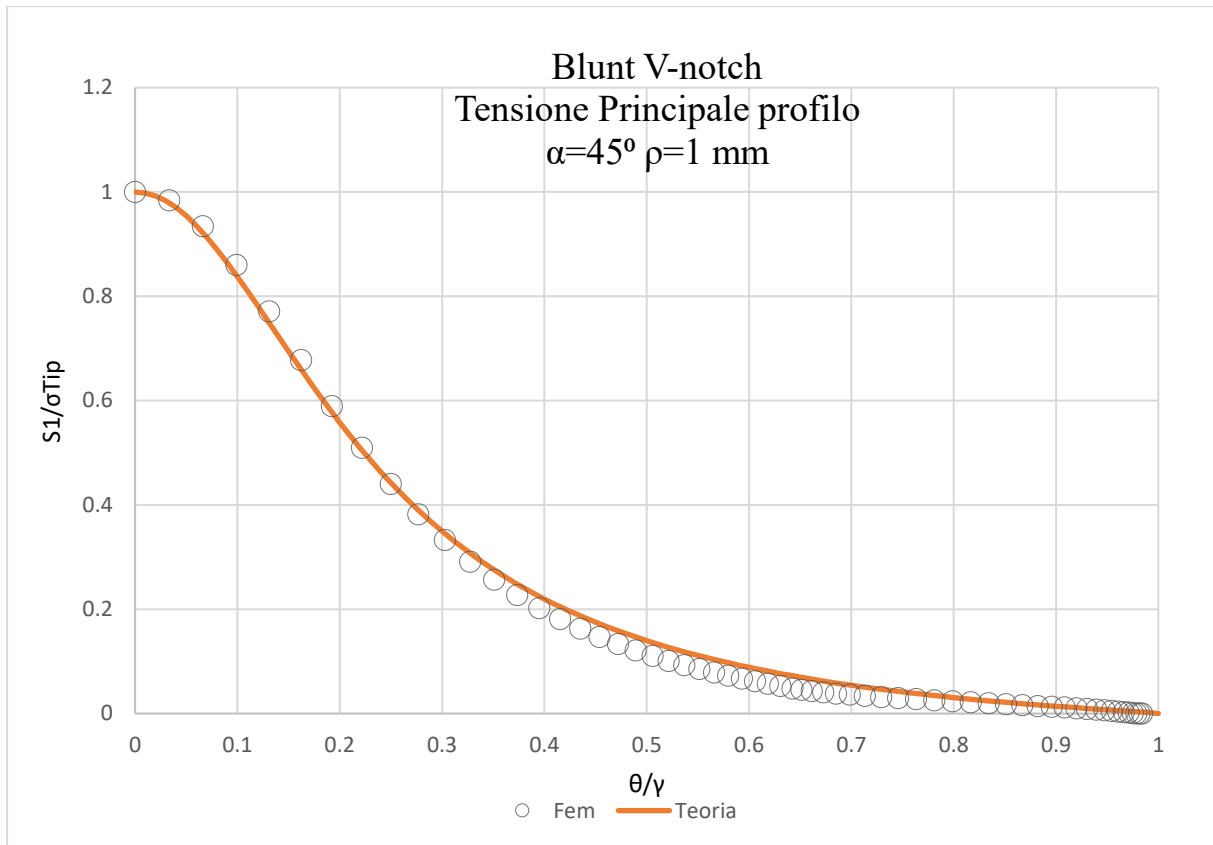


Fig. 6.4: Andamenti tensione principale lungo profilo dell'intaglio per Modo I-Materiale 1 con $\alpha=45^\circ \rho=1 \text{ mm}$; confronto Fem Blunt V-notch e Tentativo 2 (Eq. 63)

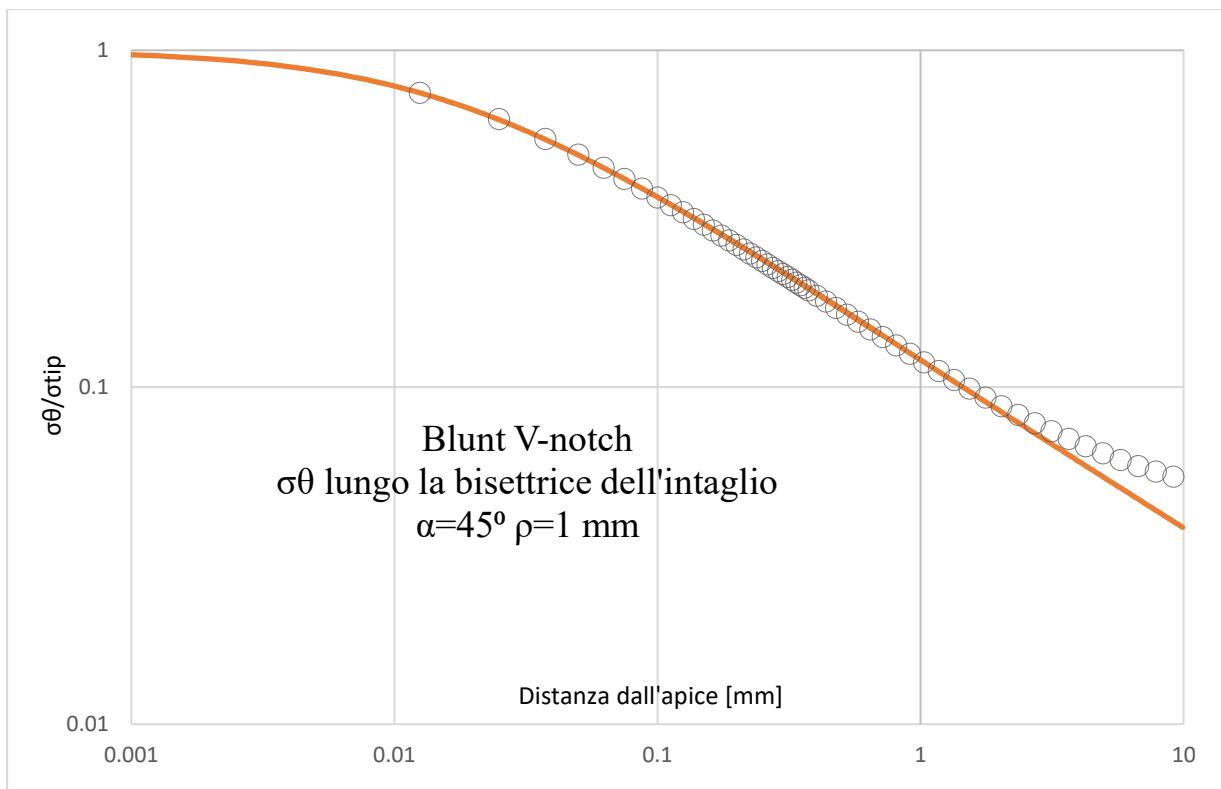


Fig. 6.5: Andamenti σ_θ lungo la bisettrice dell'intaglio per Modo I-Materiale 1 con $\alpha=45^\circ$ e $\rho=1 \text{ mm}$; confronto Fem Blunt V-notch e Tentativo 2 (Eq. 63)

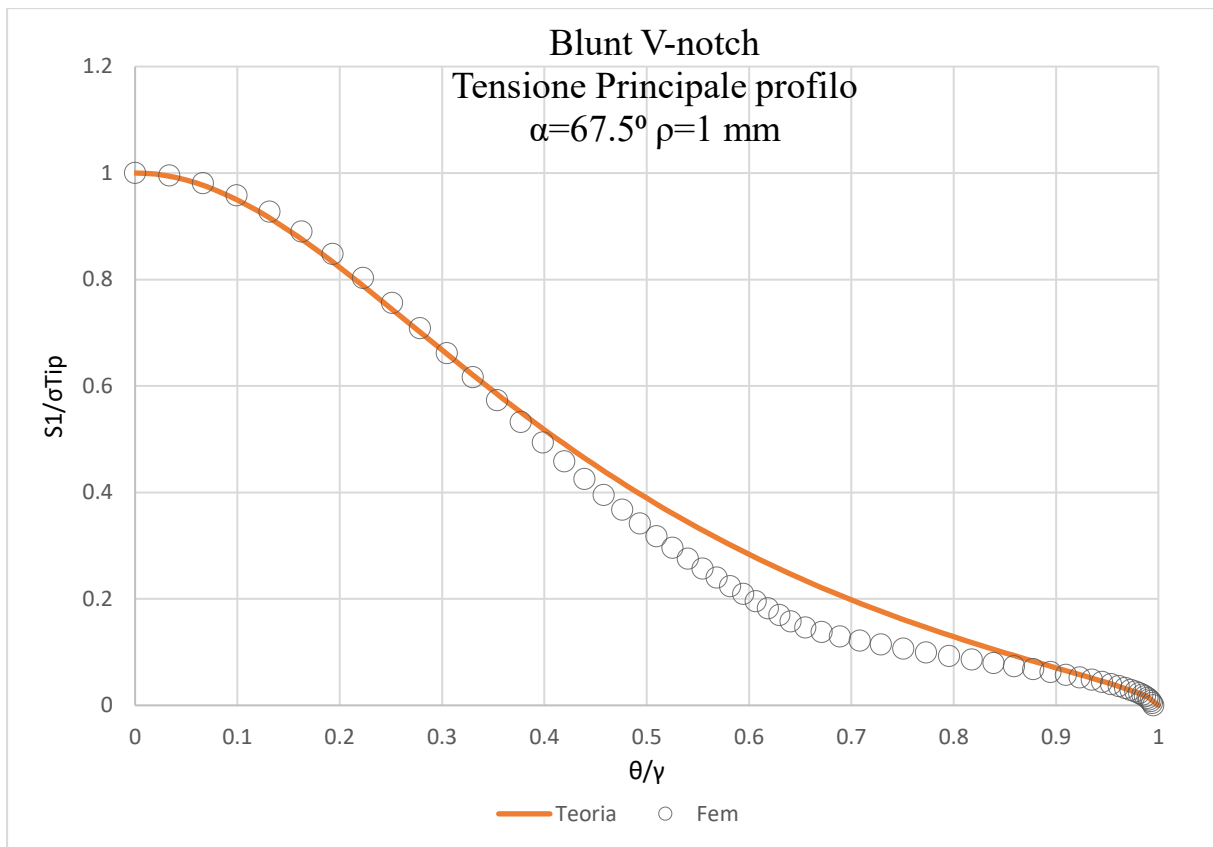


Fig. 6.6: Andamenti tensione principale lungo profilo dell'intaglio per Modo I-Materiale 1 con $\alpha=67.5^\circ$ $\rho=1$ mm; confronto Fem Blunt V-notch e Tentativo 2 (Eq. 63)

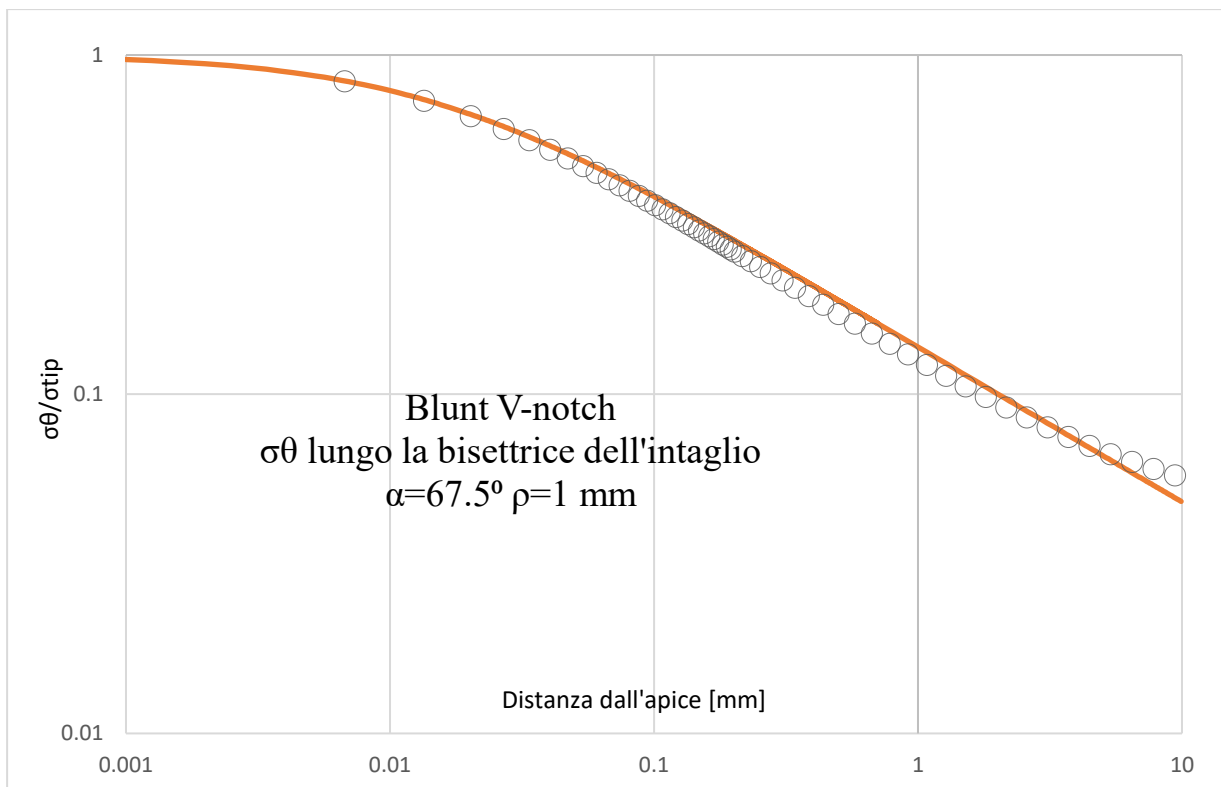


Fig. 6.7: Andamenti σ_θ lungo la bisettrice dell'intaglio per Modo I-Materiale 1 con $\alpha=45^\circ$ e $\rho=1$ mm; confronto Fem Blunt V-notch e Tentativo 2 (Eq. 63)

6.2 Modo I-Materiale 2

Le stesse ipotesi del materiale rigido lungo l'asse y vengono utilizzate anche per questo materiale.

$$E_x = 160Gpa, \quad E_y = 10Gpa, \quad G_{xy} = 5Gpa, \quad \nu_{xy} = 0.3$$

$$\beta_1 = 0.7198, \quad \beta_2 = 5.5572$$

α	λ	μ	χ_{21}	χ_{22}	t	\tilde{A}
30°	0.54257	-1.02633	-0.0821628	0.104682	1.62391	3.817732
45°	0.593635	-0.532609	-0.0607273	0.0188754	1.47114	3.740494
67.5°	0.726081	-0.300676	-0.0349145	0.00331376	1.19851	3.404238

Tab. 6.2: Valori parametri tensionali Tentativo 2 (Eq. 63) Modo I-Materiale 2

Il parametro χ_{22} è stato calcolato dal primo sistema (Eq. 70).

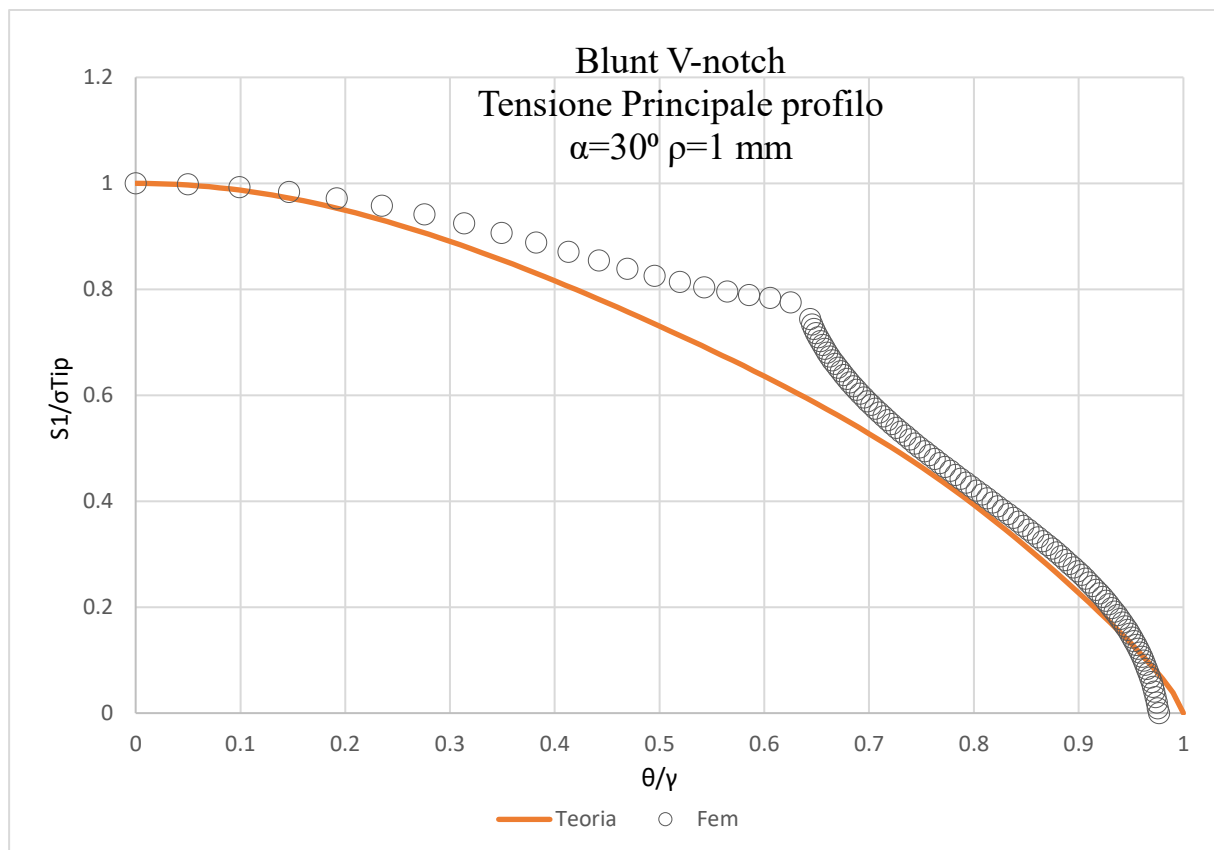


Fig. 6.8: Andamenti tensione principale lungo profilo dell'intaglio per Modo I-Materiale 2 con $\alpha=30^\circ \rho=1 \text{ mm}$; confronto Fem Blunt V-notch e Tentativo 2 (Eq. 63)

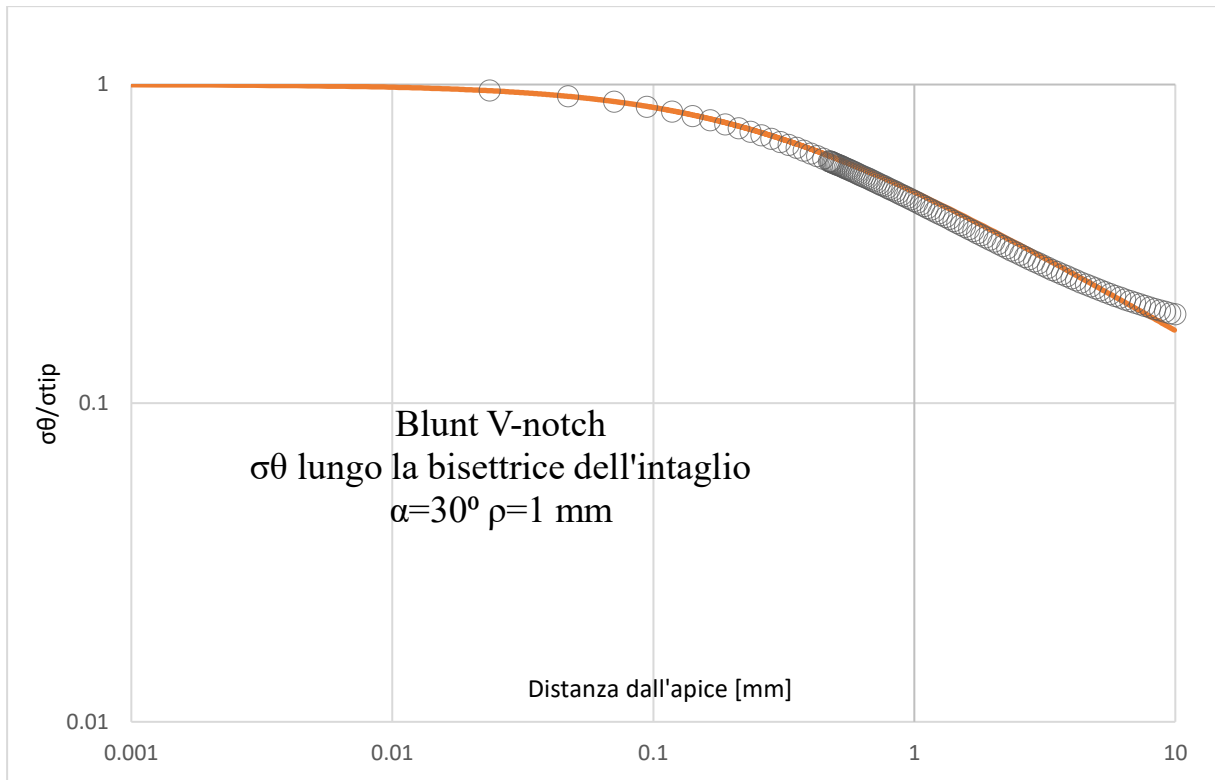


Fig. 6.9: Andamenti σ_θ lungo la bisettrice dell'intaglio per Modo I-Materiale 2 con $\alpha=30^\circ$ e $\rho=1$ mm; confronto Fem Blunt V-notch e Tentativo 2 (Eq. 63)

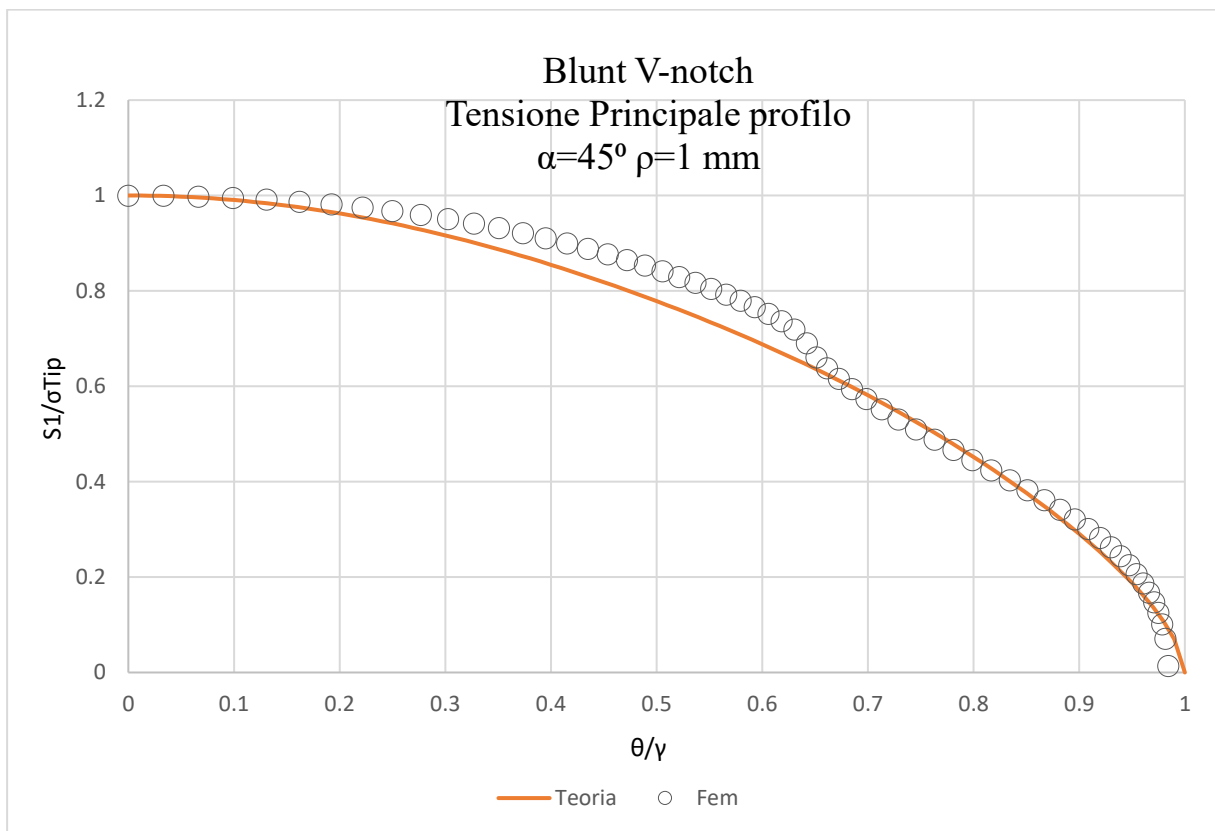


Fig. 6.10: Andamenti tensione principale lungo profilo dell'intaglio per Modo I-Materiale 2 con $\alpha=45^\circ$ $\rho=1$ mm; confronto Fem Blunt V-notch e Tentativo 2 (Eq. 63)

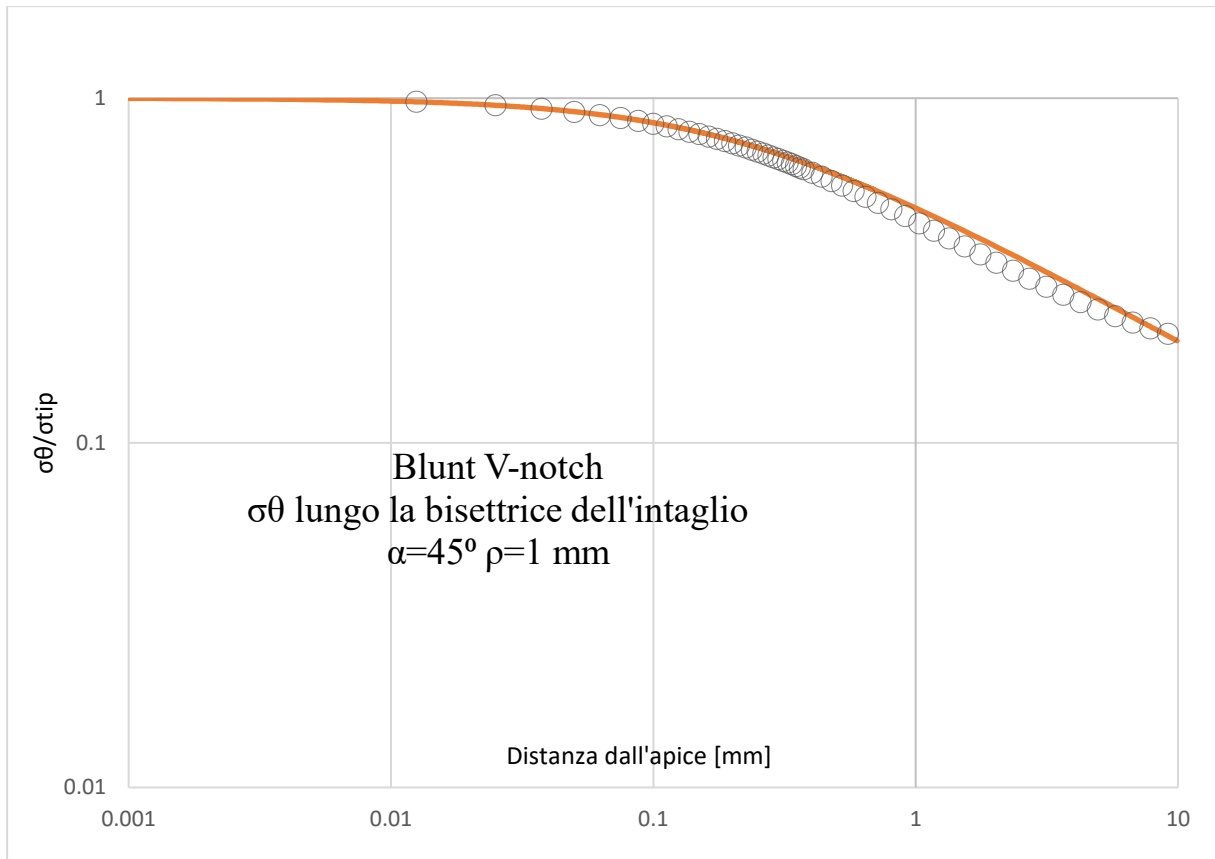


Fig. 6.11: Andamenti σ_θ lungo la bisettrice dell'intaglio per Modo I-Materiale 2 con $\alpha=45^\circ$ e $\rho=1$ mm; confronto Fem Blunt V-notch e Tentativo 2 (Eq. 63)

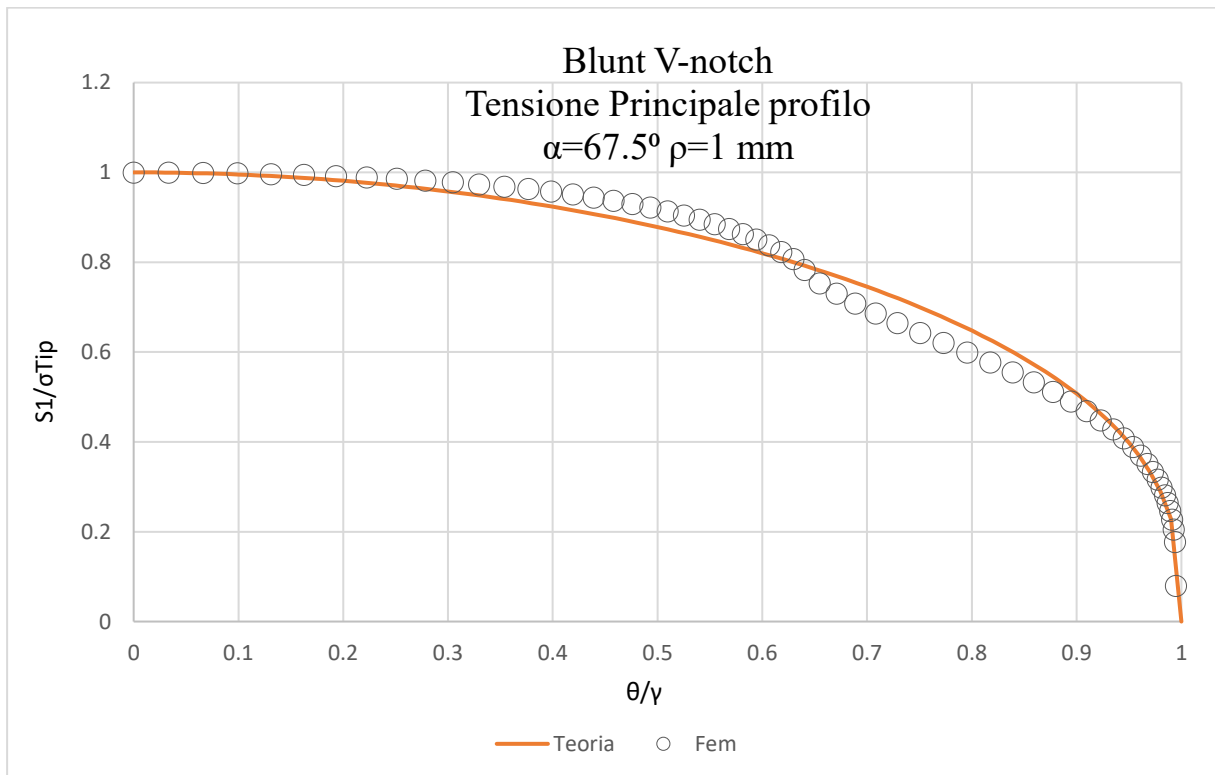


Fig. 6.12: Andamenti tensione principale lungo profilo dell'intaglio per Modo I-Materiale 2 con $\alpha=67.5^\circ$ $\rho=1$ mm; confronto Fem Blunt V-notch e Tentativo 2 (Eq. 63)

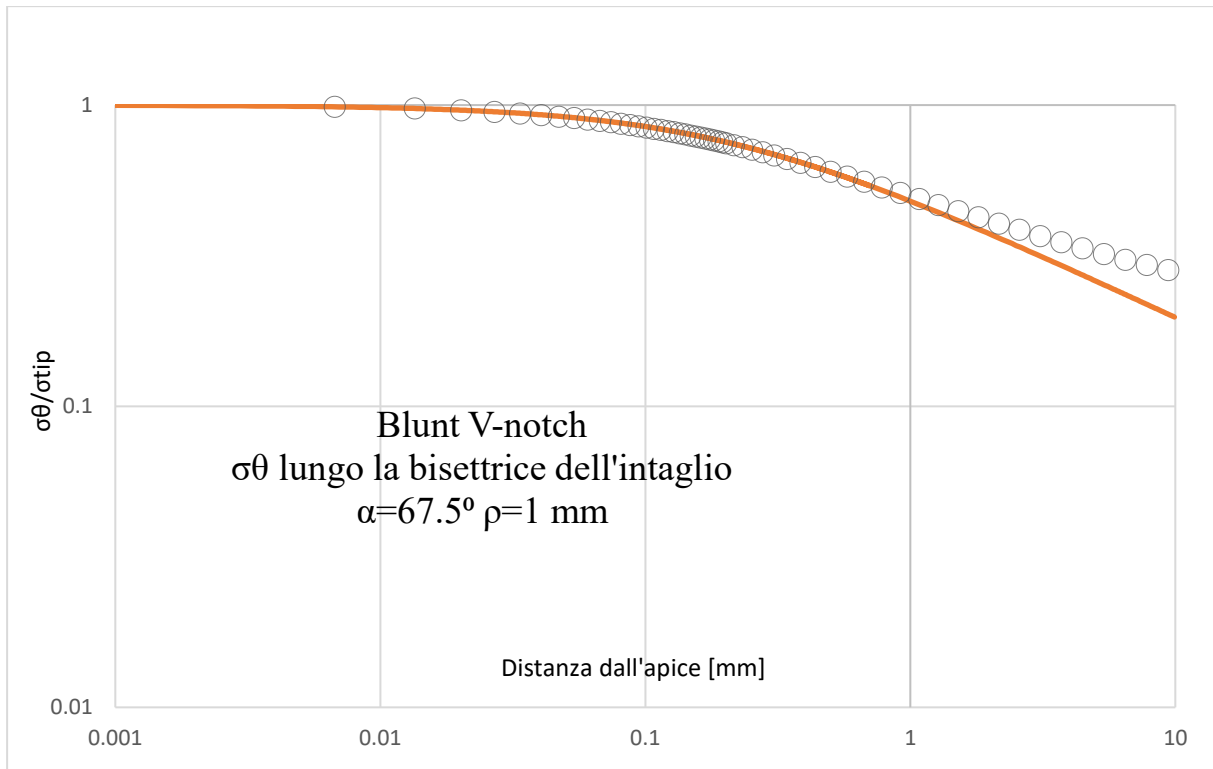


Fig. 6.13: Andamenti σ_θ lungo la bisettrice dell'intaglio per Modo I-Materiale 2 con $\alpha=67.5^\circ$ e $\rho=1$ mm; confronto Fem Blunt V-notch e Tentativo 2 (Eq. 63)

6.4 Modo II-Materiale 1

Con queste ipotesi il modello utilizzato usa le funzioni potenziali Eq. 104 con le condizioni al contorno espresse da Eq. 105.

$$E_x = 10Gpa, \quad E_y = 160Gpa, \quad G_{xy} = 5Gpa, \quad \nu_{xy} = 0.01875$$

$$\beta_1 = 0.1799, \quad \beta_2 = 1.3893$$

α	λ	μ	ζ	χ_{12}	χ_{21}	χ_{22}	χ_{23}	t	\tilde{A}
22.5°	0.5905	0.3194	-0.606	0.01545	-0.9089	0.0401	0.1144	2.0548	-1.389
45°	0.7504	0.3615	0.2828	0.20867	-0.6479	0.2609	-0.2235	1.73037	-1.071
67.5°	0.981	0.3938	-0.535	0.0077	-0.1474	-0.0003	-2.5E-5	1.17809	-0.047

Tab. 6.3: Valori parametri tensionali Tentativo 3 (Eq. 104) Modo II-Materiale 1

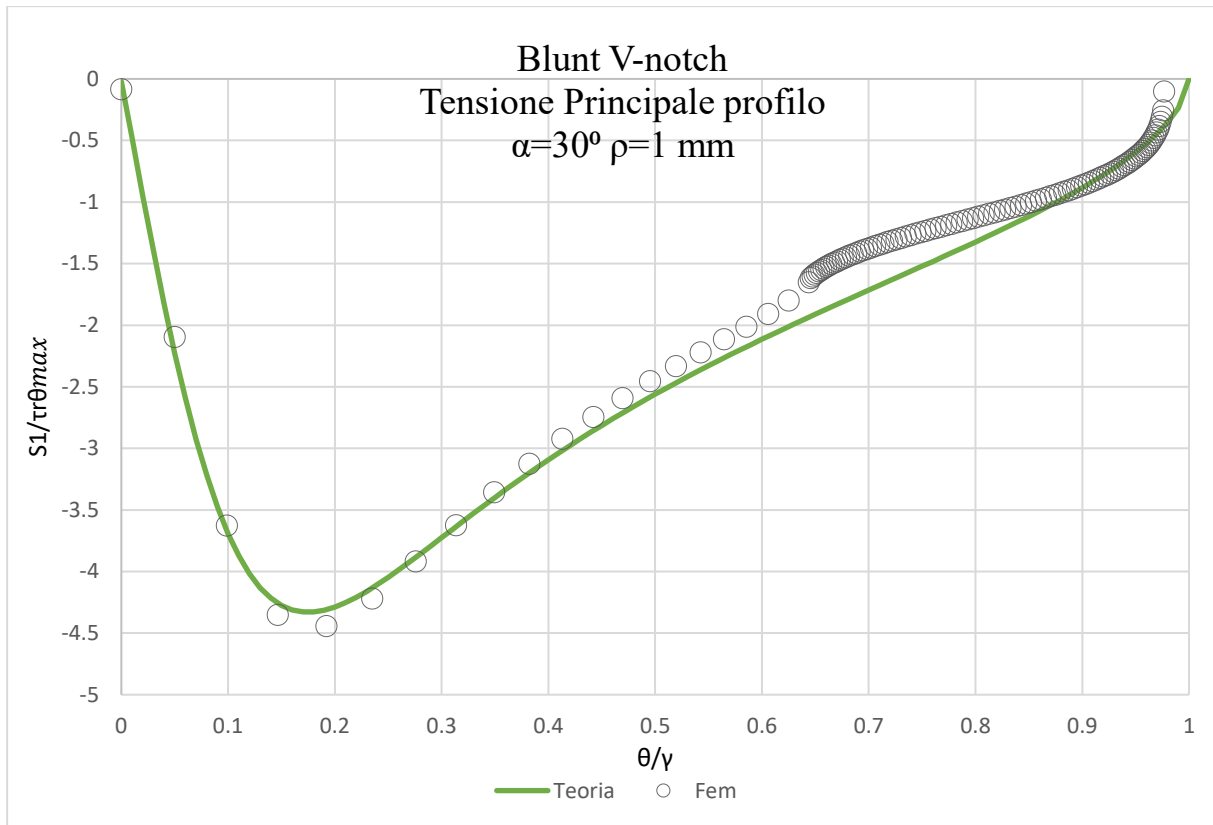


Fig. 6.14: Andamenti tensione principale lungo profilo dell'intaglio per Modo II-Materiale 1 con $\alpha=30^\circ \rho=1 \text{ mm}$; confronto Fem Blunt V-notch e Tentativo 3 (Eq. 104)

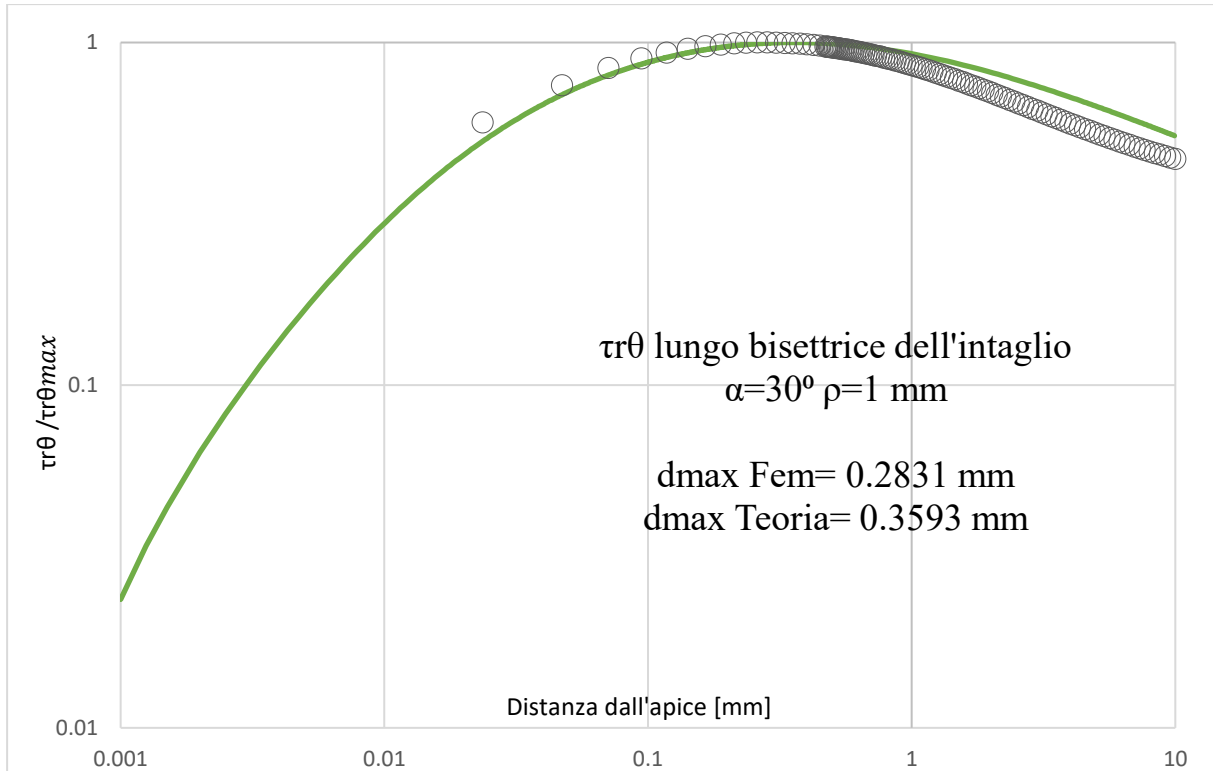


Fig. 6.15: Andamenti $\tau_{r\theta}$ lungo la bisettrice dell'intaglio per Modo II-Materiale 1 con $\alpha=30^\circ$ e $\rho=1 \text{ mm}$; ; confronto Fem Blunt V-notch e Tentativo 3 (Eq. 104)

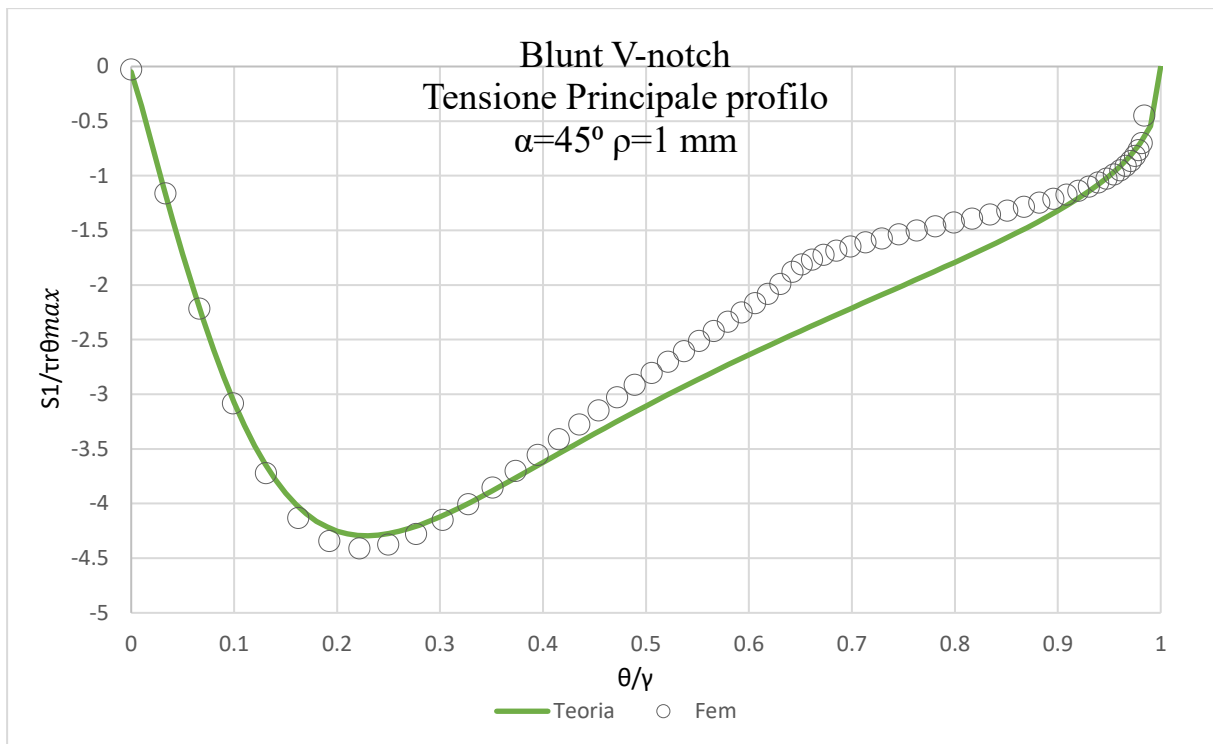


Fig. 6.16: Andamenti tensione principale lungo profilo dell'intaglio per Modo II-Materiale 1 con $\alpha=45^\circ \rho=1 \text{ mm}$; confronto Fem Blunt V-notch e Tentativo 3 (Eq. 104)

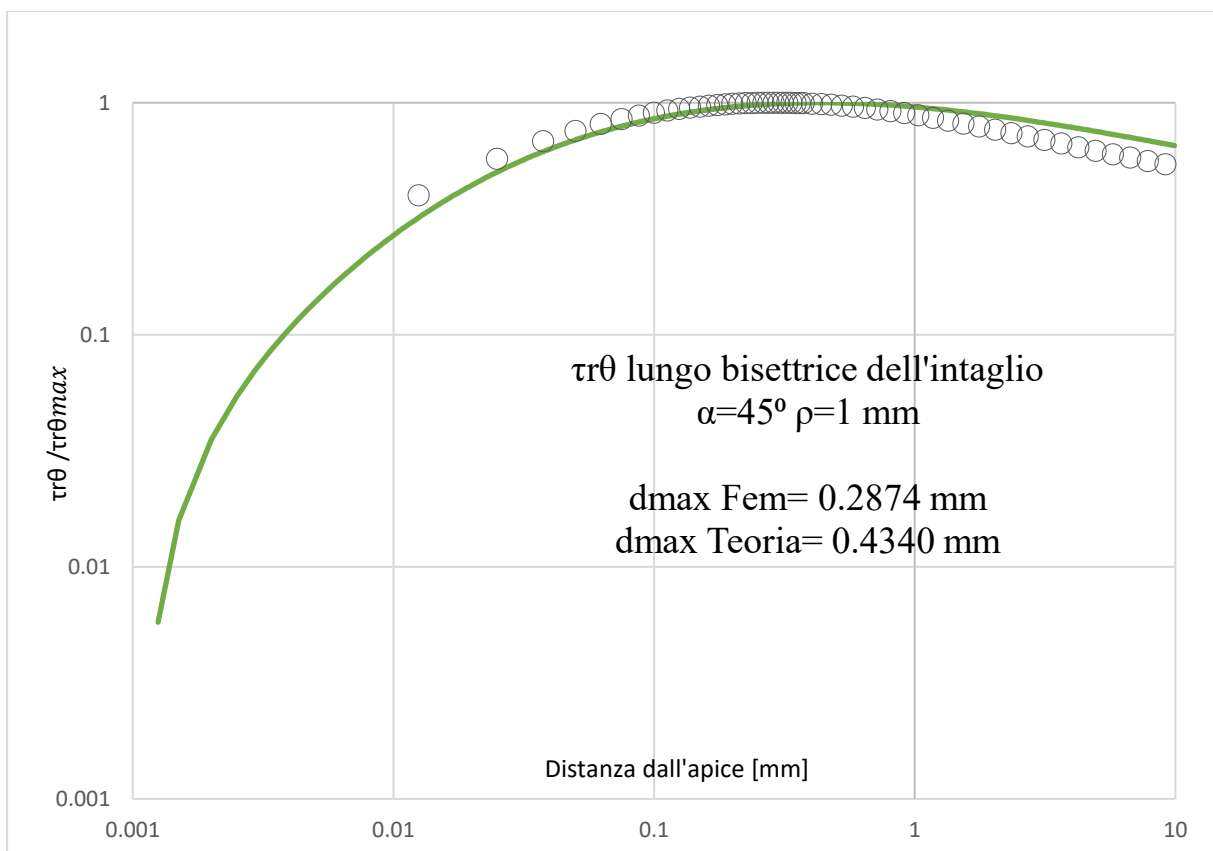


Fig. 6.17: Andamenti $\tau_{r\theta}$ lungo la bisettrice dell'intaglio per Modo II-Materiale 1 con $\alpha=45^\circ$ e $\rho=1 \text{ mm}$; ; confronto Fem Blunt V-notch e Tentativo 3 (Eq. 104)

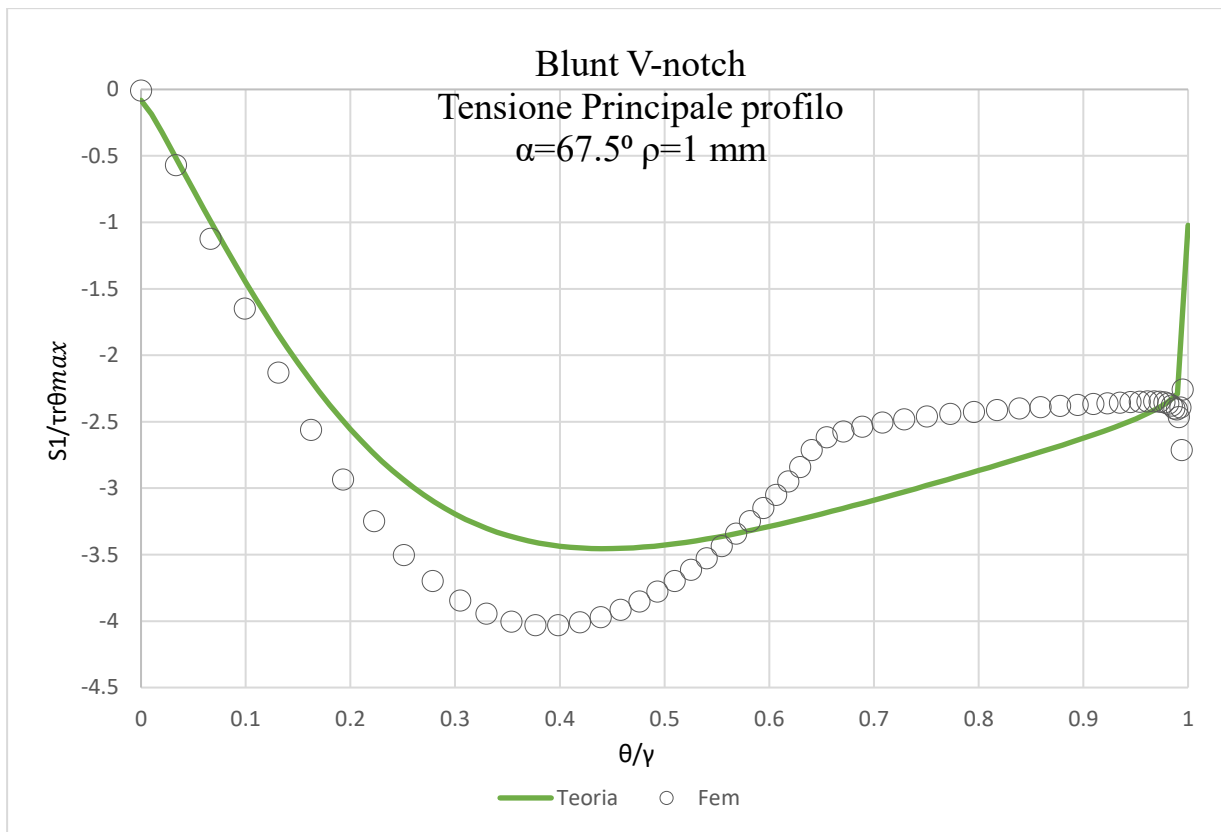


Fig. 6.18: Andamenti tensione principale lungo profilo dell'intaglio per Modo II-Materiale 1 con $\alpha=67.5^\circ$ $\rho=1$ mm; confronto Fem Blunt V-notch e Tentativo 3 (Eq. 104)

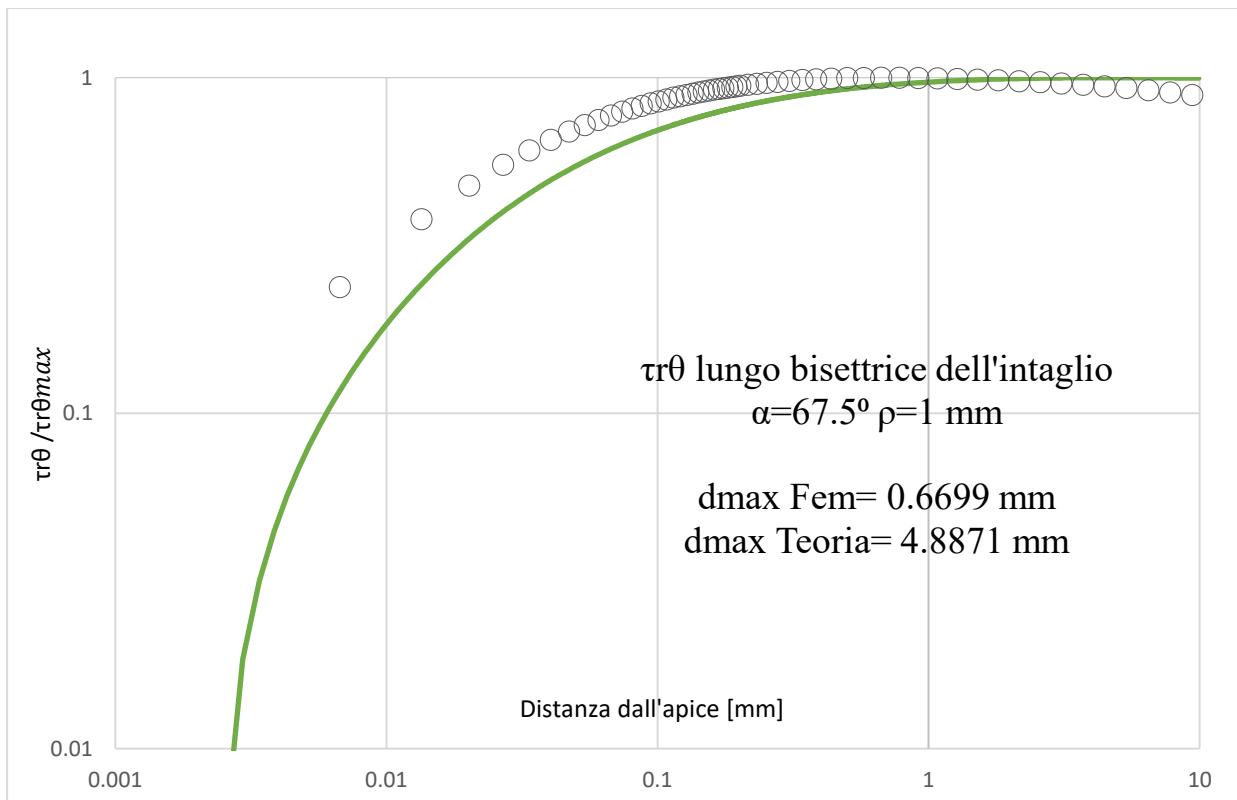


Fig. 6.19: Andamenti $\tau_{r\theta}$ lungo la bisettrice dell'intaglio per Modo II-Materiale 1 con $\alpha=67.5^\circ$ e $\rho=1$ mm; ; confronto Fem Blunt V-notch e Tentativo 3 (Eq. 104)

6.5 Modo II-Materiale 2

Con queste ipotesi il modello utilizzato è il corrispettivo a Modo II della teoria del 2017⁽¹⁷⁾ con i potenziali espressi da Eq. 86 con condizioni al contorno Eq. 88.

$$E_x = 160Gpa, \quad E_y = 10Gpa, \quad G_{xy} = 5Gpa, \quad \nu_{xy} = 0.3$$

$$\beta_1 = 0.7198, \quad \beta_2 = 5.5572$$

α	λ	χ_{21}	t	\tilde{A}
30°	0.970114	-0.15748	3.19918	-0.196899

Tab. 6.4: Valori parametri tensionali Tentativo 1 (Eq. 87) Modo II-Materiale 2

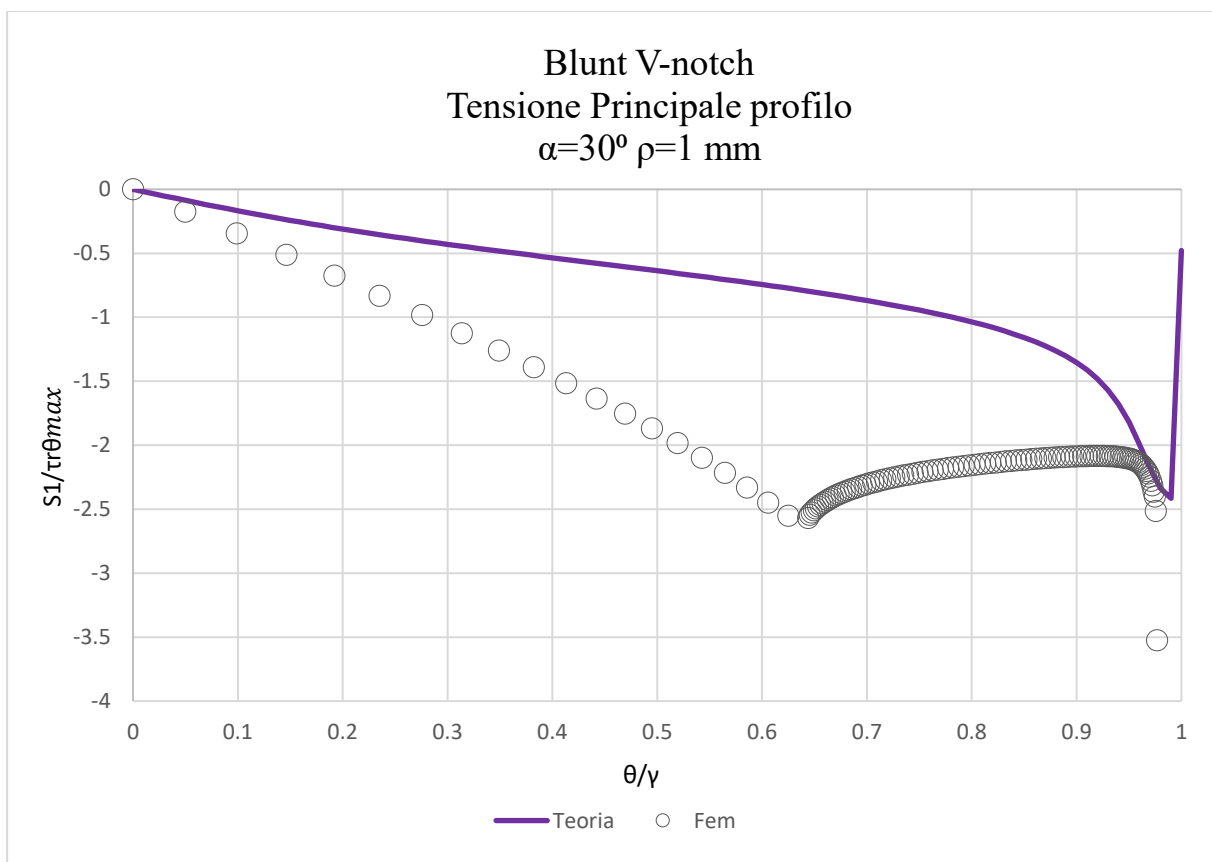


Fig. 6.20: Andamenti tensione principale lungo profilo dell'intaglio per Modo II-Materiale 2 con $\alpha=30^\circ \rho=1 \text{ mm}$; confronto Fem Blunt V-notch e Tentativo 1 (Eq. 87)

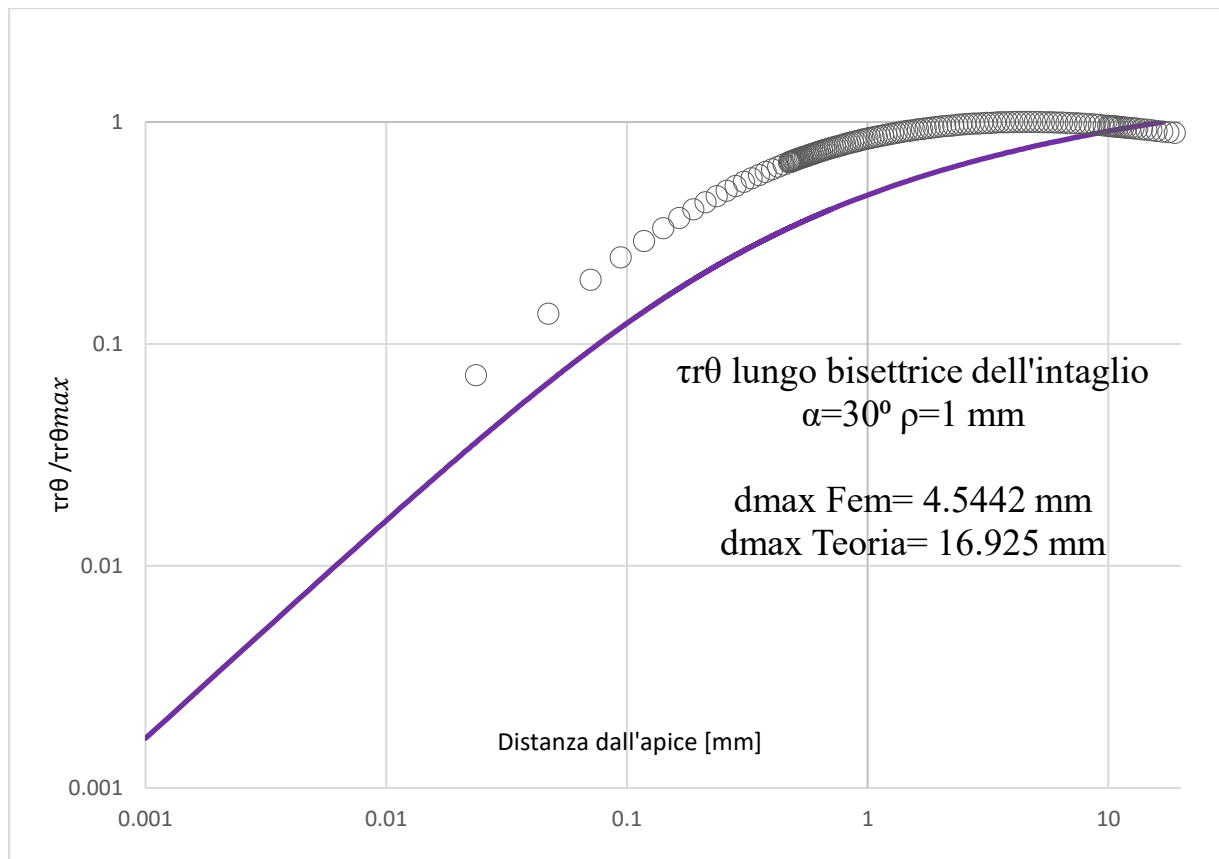


Fig. 6.21: Andamenti $\tau_{r\theta}$ lungo la bisettrice dell'intaglio per Modo II-Materiale 2 con $\alpha=30^\circ$ e $\rho=1$ mm; confronto Fem Blunt V-notch e Tentativo 1 (Eq. 87)

6.6 Analisi dei risultati

I modelli scelti messi a confronto con l'intaglio a V raccordato riescono a predire l'andamento delle tensioni con un ottimo grado di accuratezza. A dispetto della variazione geometrica rispetto all'intaglio iperbolico generato da Eq.17, le soluzioni scelte catturano i campi tensionali reali mostrando picchi di tensione lungo profilo e bisettrice dell'intaglio in accordo con le analisi agli elementi finiti. La precisione delle previsioni si abbassa tuttavia quando ci si avvicina ai limiti del dominio di singolarità. Per $\lambda \rightarrow 1$ infatti si nota un discostamento maggiore tra teorie proposte e Fem, in particolare per le soluzioni a Modo II per materiali rigidi lungo la bisettrice dell'intaglio come mostrato in Fig. 6.20 Fig. 6.21, soluzione nella quale si utilizzano potenziali poco sviluppati e il dominio di singolarità è ristretto.

7 Intagli bi-materiale

Si vuole ora analizzare un altro problema rilevante, il problema degli intagli raccordati bi-materiale, allo scopo di preparare le basi per la ricerca della sua soluzione. Il problema si presenta come un intaglio a V raccordato in cui la bisettrice dell'intaglio rappresenta la linea di giunzione tra due materiali (Fig. 7.1).

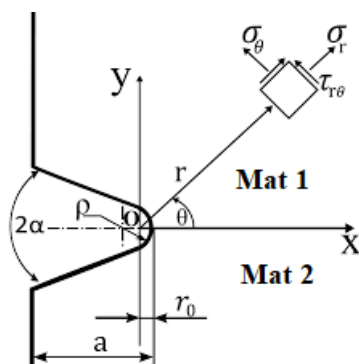


Fig. 7.1: Geometria di un intaglio a V raccordato bi-materiale

Questo problema risulta particolarmente complicato da affrontare in quanto le tensioni risultano singolari sull'apice dell'intaglio, nonostante sia raccordato, a causa della singolarità di materiale. Questo comportamento preclude l'utilizzo di condizioni al contorno sull'apice dell'intaglio che si sono rivelate utili nei problemi affrontati precedentemente.

Al fine di ottenere una miglior comprensione del problema si sono cercate in letteratura soluzioni a problemi simili, che analizzassero contemporaneamente variazioni geometriche e variazioni di materiale in una piastra. Tra i lavori trovati più rilevanti si vuole presentare un breve riassunto dell'articolo pubblicato da M. Zappalorto, P.A. Carraro e M. Quaresimin nel 2015⁽²⁴⁾. Questo riporta una soluzione al problema bi-materiale per uno spigolo vivo 3D, in cui si disaccoppiano il problema piano e antiplanare in una piastra spessa. Benchè lo spigolo vivo non sia mai presente nella realtà e ci sia sempre un certo grado di raccordo all'intaglio, questo lavoro rappresenta un importante passo per la modellazione del problema reale, mostrando una strategia brillante per la ricerca della soluzione. Si riporterà di seguito solamente la parte piana del problema disaccoppiato.

7.1 Soluzione all'intaglio a spigolo vivo bi-materiale (2015)

Considerando 2 materiali con un piano di simmetria che rispettano la seguente legge di legame:

$$\begin{pmatrix} \varepsilon_{xx} \\ \varepsilon_{yy} \\ \varepsilon_{zz} \\ 2\varepsilon_{xz} \\ 2\varepsilon_{yz} \\ 2\varepsilon_{xy} \end{pmatrix} = \begin{bmatrix} S_{11} & S_{12} & S_{13} & 0 & 0 & S_{16} \\ S_{12} & S_{22} & S_{23} & 0 & 0 & S_{26} \\ S_{13} & S_{23} & S_{33} & 0 & 0 & S_{36} \\ 0 & 0 & 0 & S_{44} & S_{45} & 0 \\ 0 & 0 & 0 & S_{45} & S_{55} & 0 \\ S_{16} & S_{26} & S_{36} & 0 & 0 & S_{66} \end{bmatrix} \begin{pmatrix} \sigma_x \\ \sigma_y \\ \sigma_z \\ \tau_{xz} \\ \tau_{yz} \\ \tau_{xy} \end{pmatrix} \quad \text{Eq. 107}$$

La quale conduce alla seguente equazione differenziale per ogni materiale per il problema piano:

$$B_{22} \frac{\partial^4 \phi}{\partial x^4} - 2B_{26} \frac{\partial^4 \phi}{\partial x^3 \partial y} + (2B_{12} + B_{66}) \frac{\partial^4 \phi}{\partial x^2 \partial y^2} - 2B_{16} \frac{\partial^4 \phi}{\partial x \partial y^3} + B_{11} \frac{\partial^4 \phi}{\partial y^4} = 0 \quad \text{Eq. 108}$$

Con:

$$\begin{aligned} B_{11} &= \frac{S_{11}S_{33} - S_{13}^2}{S_{33}} & B_{12} &= \frac{S_{12}S_{33} - S_{13}S_{23}}{S_{33}} \\ B_{22} &= \frac{S_{22}S_{33} - S_{23}^2}{S_{33}} & B_{16} &= \frac{S_{16}S_{33} - S_{13}S_{36}}{S_{33}} \\ B_{66} &= \frac{S_{66}S_{33} - S_{36}^2}{S_{33}} & B_{26} &= \frac{S_{26}S_{33} - S_{23}S_{36}}{S_{33}} \end{aligned} \quad \text{Eq. 109}$$

Introducendo l'indice k a identificare i due diversi materiali, si possono introdurre le variabili complesse:

$$z_1^k = x + \mu_1^k y = r\rho_1^k e^{i\theta_1^k} \quad z_2^k = x + \mu_2^k y = r\rho_2^k e^{i\theta_2^k} \quad \text{Eq. 110}$$

Con:

$$\begin{aligned} \rho_j^k &= \sqrt{(\cos \theta + \alpha_j^k \sin \theta)^2 + (\beta_j^k \sin \theta)^2} \\ \theta_j^k &= \text{Arg}(\cos \theta + \alpha_j^k \sin \theta + i\beta_j^k \sin \theta) \end{aligned} \quad \text{Eq. 111}$$

E

$$\begin{aligned} \mu_1^k &= \alpha_1^k + i\beta_1^k & \mu_2^k &= \alpha_2^k + i\beta_2^k \\ \beta_1^k &e \beta_2^k &> 0 \end{aligned} \quad \text{Eq. 112}$$

soluzioni all'equazione caratteristica di Eq. 108.

Le tensioni in coordinate polari dunque prendono la seguente forma:

$$\begin{aligned}\sigma_r^k &= 2Re[(k_{11}^k + ik_{12}^k)\phi_1^{k'}(z_1) + (k_{21}^k + ik_{22}^k)\phi_2^{k'}(z_2)] \\ \sigma_\theta^k &= 2Re[(m_{11}^k + im_{12}^k)\phi_1^{k'}(z_1) + (m_{21}^k + im_{22}^k)\phi_2^{k'}(z_2)] \\ \tau_{r\theta}^k &= 2Re[(n_{11}^k + in_{12}^k)\phi_1^{k'}(z_1) + (n_{21}^k + in_{22}^k)\phi_2^{k'}(z_2)]\end{aligned}\quad \text{Eq. 113}$$

Gli spostamenti in coordinate polari invece:

$$\begin{aligned}u_r^k &= 2Re[(p_{11}^k + ip_{12}^k)\phi_1^k(z_1) + (p_{21}^k + ip_{22}^k)\phi_2^k(z_2)] \\ u_\theta^k &= 2Re[(q_{11}^k + iq_{12}^k)\phi_1^k(z_1) + (q_{21}^k + iq_{22}^k)\phi_2^k(z_2)]\end{aligned}\quad \text{Eq. 114}$$

Con:

$$\begin{aligned}k_{j1}^k &= (\sin \theta - \alpha_j^k \cos \theta)^2 - (\beta_j^k \cos \theta)^2 & k_{j2}^k &= 2\beta_j^k \cos \theta (\alpha_j^k \cos \theta - \sin \theta) \\ m_{j1}^k &= (\cos \theta - \alpha_j^k \sin \theta)^2 - (\beta_j^k \sin \theta)^2 & m_{j2}^k &= 2\beta_j^k \sin \theta (\alpha_j^k \sin \theta + \cos \theta) \\ n_{j1}^k &= \frac{1}{2} \sin 2\theta (1 - \alpha_j^{k2} + \beta_j^{k2}) - \alpha_j^k \cos 2\theta & n_{j2}^k &= -\beta_j^k \cos 2\theta - \alpha_j^k \beta_j^k \sin 2\theta\end{aligned}\quad \text{Eq. 115}$$

$$\begin{aligned}p_{j1}^k &= \{B_{11}^k [\alpha_j^{k2} - \beta_j^{k2}] - B_{16}^k \alpha_j^k + B_{12}^k\} \cos \theta + \left[B_{12}^k \alpha_j^k - B_{26}^k + \frac{B_{22}^k \alpha_j^k}{\alpha_j^{k2} + \beta_j^{k2}} \right] \sin \theta \\ p_{j2}^k &= [2\alpha_j^k \beta_j^k B_{11}^k - B_{16}^k \beta_j^k] \cos \theta + \left[B_{12}^k \beta_j^k - \frac{B_{22}^k \beta_j^k}{\alpha_j^{k2} + \beta_j^{k2}} \right] \sin \theta \\ q_{j1}^k &= \{B_{11}^k [\alpha_j^{k2} - \beta_j^{k2}] - B_{16}^k \alpha_j^k + B_{12}^k\} \sin \theta + \left[B_{12}^k \alpha_j^k - B_{26}^k + \frac{B_{22}^k \alpha_j^k}{\alpha_j^{k2} + \beta_j^{k2}} \right] \cos \theta \\ q_{j2}^k &= [2\alpha_j^k \beta_j^k B_{11}^k - B_{16}^k \beta_j^k] \sin \theta + \left[B_{12}^k \beta_j^k - \frac{B_{22}^k \beta_j^k}{\alpha_j^{k2} + \beta_j^{k2}} \right] \cos \theta\end{aligned}\quad \text{Eq. 116}$$

Si propongono poi due potenziali nella seguente forma:

$$\begin{aligned}\Phi_1^k(z_1) &= \sum_{w=1}^2 A_w^k (z_1^k)^{\lambda_w} \\ \Phi_2^k(z_2) &= \sum_{w=1}^2 B_w^k (z_2^k)^{\lambda_w}\end{aligned}\quad \text{Eq. 117}$$

Con:

$$A_w^k = A_{Rw}^k + iA_{Iw}^k, \quad B_w^k = B_{Rw}^k + iB_{Iw}^k, \quad \lambda_w = \lambda_{Rw} + i\lambda_{Iw}$$

$$A_{Rw}^k; iA_{Iw}^k; B_{Rw}^k; B_{Iw}^k; \lambda_{Rw}; \lambda_{Iw} \in \mathbb{R}$$

Sostituendo Eq. 117 in Eq. 113 e Eq. 114 si ottengono le forme delle tensioni a cui sono applicate le seguenti condizioni al contorno:

$$\begin{aligned}
\sigma_{\theta}^1|_{\theta=\gamma} &= \sigma_{\theta}^2|_{\theta=-\gamma} = \tau_{r\theta}^1|_{\theta=\gamma} = \tau_{r\theta}^2|_{\theta=-\gamma} = 0 \\
\sigma_{\theta}^1|_{\theta=0} &= \sigma_{\theta}^2|_{\theta=0} \\
\tau_{r\theta}^1|_{\theta=0} &= \tau_{r\theta}^2|_{\theta=0} \\
u_{\theta}^1|_{\theta=0} &= u_{\theta}^2|_{\theta=0} \\
u_r^1|_{\theta=0} &= u_r^2|_{\theta=0}
\end{aligned} \tag{Eq. 118}$$

Scrivendole in forma matriciale e riarrangiandole si ottiene il seguente sistema $\forall w$:

$$[b_{ij}^w] \begin{Bmatrix} A_{Rw}^1 \\ A_{Iw}^1 \\ B_{Rw}^1 \\ B_{Iw}^1 \\ A_{Rw}^2 \\ A_{Iw}^2 \\ B_{Rw}^2 \\ B_{Iw}^2 \end{Bmatrix} = \begin{bmatrix} b_{11} & b_{12} & b_{13} & b_{14} & 0 & 0 & 0 & 0 \\ b_{21} & b_{22} & b_{23} & b_{24} & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & b_{35} & b_{36} & b_{37} & b_{38} \\ 0 & 0 & 0 & 0 & b_{45} & b_{46} & b_{47} & b_{48} \\ b_{51} & b_{52} & b_{53} & b_{54} & b_{55} & b_{56} & b_{57} & b_{58} \\ b_{61} & b_{62} & b_{63} & b_{64} & b_{65} & b_{66} & b_{67} & b_{68} \\ b_{71} & b_{72} & b_{73} & b_{74} & b_{75} & b_{76} & b_{77} & b_{78} \\ b_{81} & b_{82} & b_{83} & b_{84} & b_{85} & b_{86} & b_{87} & b_{88} \end{bmatrix}_w \begin{Bmatrix} A_{Rw}^1 \\ A_{Iw}^1 \\ B_{Rw}^1 \\ B_{Iw}^1 \\ A_{Rw}^2 \\ A_{Iw}^2 \\ B_{Rw}^2 \\ B_{Iw}^2 \end{Bmatrix} = 0 \tag{Eq. 119}$$

In cui i coefficienti b_{ij}^w sono espressi esplicitamente in Appendice B.

Imponendo quindi: $Det[[b_{ij}^w]] = 0 \forall w$ si ottengono i due autovalori λ_w .

Risolvendo dunque il sistema Eq. 119 e imponendo $\chi_{11}^{kw} + \chi_{31}^{kw} = 1$ e $\tilde{\chi}_{i1}^{kw} = \chi_{i1}^{kw} \lambda_{Rw} + \chi_{i2}^{kw} \lambda_{Iw}$; $\tilde{\chi}_{i2}^{kw} = \chi_{i2}^{kw} \lambda_{Rw} - \chi_{i1}^{kw} \lambda_{Iw}$ si ottengono tutti i coefficienti χ_{ij}^{kw} presenti nelle seguenti soluzioni:

$$\sigma_{ts}^k = \sum_{w=1}^2 \sigma_{ts}^{kw} \quad u_t^k = \sum_{w=1}^2 u_t^{kw} \tag{Eq. 120}$$

$$\begin{aligned}
\sigma_{ts}^{kw} = & \frac{K^{kw}}{\sqrt{2\pi}} (r\rho_1^k)^{\lambda_{Rw}-1} \{ \cosh \lambda_{Iw} \theta_1^k [\psi_{11ts}^k \cos(1 - \lambda_{Rw})\theta_1^k \\
& + \psi_{12ts}^k \sin(1 - \lambda_{Rw})\theta_1^k] [\chi_{11}^{kw} \cos(\lambda_{Iw} \ln \tilde{r} \rho_1^k) \\
& - \chi_{12}^{kw} \sin(\lambda_{Iw} \ln \tilde{r} \rho_1^k)] \\
& + \sinh \lambda_{Iw} \theta_1^k [\psi_{12ts}^k \cos(1 - \lambda_{Rw})\theta_1^k \\
& - \psi_{11ts}^k \sin(1 - \lambda_{Rw})\theta_1^k] [\chi_{12}^{kw} \cos(\lambda_{Iw} \ln \tilde{r} \rho_1^k) \\
& + \chi_{11}^{kw} \sin(\lambda_{Iw} \ln \tilde{r} \rho_1^k)] \\
& + \cosh \lambda_{Iw} \theta_1^k [\psi_{12ts}^k \cos(1 - \lambda_{Rw})\theta_1^k \\
& - \psi_{11ts}^k \sin(1 - \lambda_{Rw})\theta_1^k] [\chi_{21}^{kw} \cos(\lambda_{Iw} \ln \tilde{r} \rho_1^k) \\
& - \chi_{22}^{kw} \sin(\lambda_{Iw} \ln \tilde{r} \rho_1^k)] \\
& - \sinh \lambda_{Iw} \theta_1^k [\psi_{11ts}^k \cos(1 - \lambda_{Rw})\theta_1^k \\
& + \psi_{12ts}^k \sin(1 - \lambda_{Rw})\theta_1^k] [\chi_{22}^{kw} \cos(\lambda_{Iw} \ln \tilde{r} \rho_1^k) \\
& + \chi_{21}^{kw} \sin(\lambda_{Iw} \ln \tilde{r} \rho_1^k)] \} \\
& + \frac{K^{kw}}{\sqrt{2\pi}} (r\rho_2^k)^{\lambda_{Rw}-1} \{ \cosh \lambda_{Iw} \theta_2^k [\psi_{21ts}^k \cos(1 - \lambda_{Rw})\theta_2^k \\
& + \psi_{22ts}^k \sin(1 - \lambda_{Rw})\theta_2^k] [\chi_{31}^{kw} \cos(\lambda_{Iw} \ln \tilde{r} \rho_2^k) \\
& - \chi_{32}^{kw} \sin(\lambda_{Iw} \ln \tilde{r} \rho_2^k)] \\
& + \sinh \lambda_{Iw} \theta_2^k [\psi_{22ts}^k \cos(1 - \lambda_{Rw})\theta_2^k \\
& - \psi_{21ts}^k \sin(1 - \lambda_{Rw})\theta_2^k] [\chi_{32}^{kw} \cos(\lambda_{Iw} \ln \tilde{r} \rho_2^k) \\
& + \chi_{31}^{kw} \sin(\lambda_{Iw} \ln \tilde{r} \rho_2^k)] \\
& + \cosh \lambda_{Iw} \theta_2^k [\psi_{22ts}^k \cos(1 - \lambda_{Rw})\theta_2^k \\
& - \psi_{21ts}^k \sin(1 - \lambda_{Rw})\theta_2^k] [\chi_{41}^{kw} \cos(\lambda_{Iw} \ln \tilde{r} \rho_2^k) \\
& - \chi_{42}^{kw} \sin(\lambda_{Iw} \ln \tilde{r} \rho_2^k)] \\
& - \sinh \lambda_{Iw} \theta_2^k [\psi_{21ts}^k \cos(1 - \lambda_{Rw})\theta_2^k \\
& + \psi_{22ts}^k \sin(1 - \lambda_{Rw})\theta_2^k] [\chi_{42}^{kw} \cos(\lambda_{Iw} \ln \tilde{r} \rho_2^k) \\
& + \chi_{41}^{kw} \sin(\lambda_{Iw} \ln \tilde{r} \rho_2^k)] \}
\end{aligned}$$

Eq. 121

$$\begin{aligned}
u_t^{kw} = & \frac{K^{kw}}{\sqrt{2\pi}(\lambda_{Rw}^2 + \lambda_{Iw}^2)} (r\rho_1^k)^{\lambda_{Rw}} \{ \cosh \lambda_{Iw} \theta_1^k [\Psi_{11t}^k \cos \lambda_{Rw} \theta_1^k \\
& - \Psi_{12t}^k \sin \lambda_{Rw} \theta_1^k] [\tilde{\chi}_{11}^{kw} \cos(\lambda_{Iw} \ln \tilde{r} \rho_1^k) \\
& - \tilde{\chi}_{12}^{kw} \sin(\lambda_{Iw} \ln \tilde{r} \rho_1^k)] \\
& + \sinh \lambda_{Iw} \theta_1^k [\Psi_{12t}^k \cos \lambda_{Rw} \theta_1^k \\
& + \Psi_{11t}^k \sin \lambda_{Rw} \theta_1^k] [-\tilde{\chi}_{12}^{kw} \cos(\lambda_{Iw} \ln \tilde{r} \rho_1^k) \\
& + \tilde{\chi}_{11}^{kw} \sin(\lambda_{Iw} \ln \tilde{r} \rho_1^k)] \\
& + \cosh \lambda_{Iw} \theta_1^k [\Psi_{12t}^k \cos \lambda_{Rw} \theta_1^k \\
& + \Psi_{11t}^k \sin \lambda_{Rw} \theta_1^k] [\tilde{\chi}_{21}^{kw} \cos(\lambda_{Iw} \ln \tilde{r} \rho_1^k) \\
& - \tilde{\chi}_{22}^{kw} \sin(\lambda_{Iw} \ln \tilde{r} \rho_1^k)] \\
& - \sinh \lambda_{Iw} \theta_1^k [\Psi_{11t}^k \cos \lambda_{Rw} \theta_1^k \\
& - \Psi_{12t}^k \sin \lambda_{Rw} \theta_1^k] [\tilde{\chi}_{22}^{kw} \cos(\lambda_{Iw} \ln \tilde{r} \rho_1^k) \\
& + \tilde{\chi}_{21}^{kw} \sin(\lambda_{Iw} \ln \tilde{r} \rho_1^k)] \} \\
& + \frac{K^{kw}}{\sqrt{2\pi}(\lambda_{Rw}^2 + \lambda_{Iw}^2)} (r\rho_2^k)^{\lambda_{Rw}} \{ \cosh \lambda_{Iw} \theta_2^k [\Psi_{21t}^k \cos \lambda_{Rw} \theta_2^k \\
& - \Psi_{22t}^k \sin \lambda_{Rw} \theta_2^k] [\tilde{\chi}_{31}^{kw} \cos(\lambda_{Iw} \ln \tilde{r} \rho_2^k) \\
& - \tilde{\chi}_{32}^{kw} \sin(\lambda_{Iw} \ln \tilde{r} \rho_2^k)] \\
& + \sinh \lambda_{Iw} \theta_2^k [\Psi_{22t}^k \cos \lambda_{Rw} \theta_2^k \\
& + \Psi_{21t}^k \sin \lambda_{Rw} \theta_2^k] [\tilde{\chi}_{32}^{kw} \cos(\lambda_{Iw} \ln \tilde{r} \rho_2^k) \\
& + \tilde{\chi}_{31}^{kw} \sin(\lambda_{Iw} \ln \tilde{r} \rho_2^k)] \\
& + \cosh \lambda_{Iw} \theta_2^k [\Psi_{22t}^k \cos \lambda_{Rw} \theta_2^k \\
& + \Psi_{21t}^k \sin \lambda_{Rw} \theta_2^k] [\tilde{\chi}_{41}^{kw} \cos(\lambda_{Iw} \ln \tilde{r} \rho_2^k) \\
& - \tilde{\chi}_{42}^{kw} \sin(\lambda_{Iw} \ln \tilde{r} \rho_2^k)] \\
& - \sinh \lambda_{Iw} \theta_2^k [\Psi_{21t}^k \cos \lambda_{Rw} \theta_2^k \\
& - \Psi_{22t}^k \sin \lambda_{Rw} \theta_2^k] [\tilde{\chi}_{42}^{kw} \cos(\lambda_{Iw} \ln \tilde{r} \rho_2^k) \\
& + \tilde{\chi}_{41}^{kw} \sin(\lambda_{Iw} \ln \tilde{r} \rho_2^k)] \}
\end{aligned} \tag{Eq. 122}$$

In cui:

$t; s \in \{r; \theta\}$;

\tilde{r} è un numero puro e $\tilde{r} = r$;

$\psi_{ijrr}^k = k_{ij}^k$; $\psi_{ij\theta\theta}^k = m_{ij}^k$; $\psi_{ijr\theta}^k = n_{ij}^k$; $\Psi_{ijr}^k = p_{ij}^k$; $\Psi_{ij\theta}^k = q_{ij}^k$.

7.2 Commenti e analisi del modello

La soluzione riportata mostra come due differenti termini alle funzioni potenziali risolti indipendentemente riescano a catturare le due principali fonti di singolarità dei campi tensionali, la singolarità di materiale e la singolarità geometrica. Nel caso di un intaglio a spigolo vivo entrambe le cause hanno punto di singolarità sull'apice dell'intaglio e questo facilita la trattazione e la gestione delle equazioni nella risoluzione del sistema di equazioni al contorno. Si nota come nel caso generico di materiale con solo un piano di simmetria gli autovalori λ_w siano complessi ma che nel caso di materiali ortotropi questi siano reali, semplificando estremamente le soluzioni.

7.3 Analisi preliminari dell'intaglio a V raccordato bi-materiale

Come analisi preliminari al problema si è condotta una batteria di analisi agli elementi finiti tramite il software ANSYS 18.1. Queste analisi sono state fatte per diverse geometrie in cui si è variato l'angolo di apertura 2α e il raggio di raccordo all'apice dell'intaglio ρ . Tutte le piastre modellate hanno larghezza di 100mm, altezza di 150mm, una profondità dell'intaglio pari a 10mm e la frontiera di materiale è coincidente con la bisettrice dell'intaglio come mostrato in Fig. 7.2.

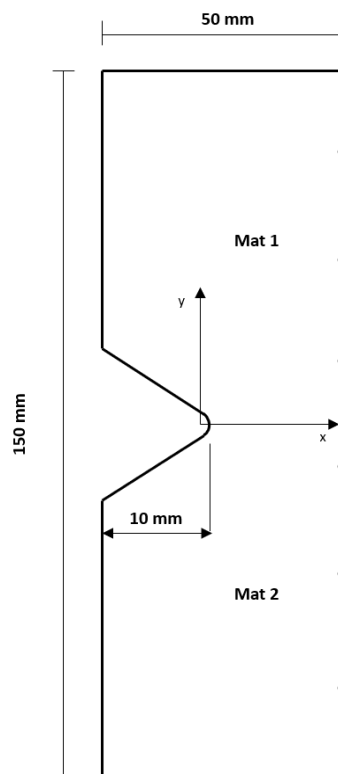


Fig. 7.2: Geometria della piastra modellata tramite software ANSYS 18.1

Queste simulazioni preliminari sono tutte state fatte sottoponendo la piastra ad una trazione di 100Mpa con materiali isotropi per facilitare l'individuazione di pattern nelle soluzioni. In tutte le simulazioni, Mat 1 sarà un acciaio con costanti elastiche $E = 206 \text{ GPa}$ e $\nu = 0.3$; Mat 2 sarà una resina epossidica con costanti elastiche $E = 3 \text{ GPa}$ e $\nu = 0.4$. Le simulazioni sono state fatte per $2\alpha = 0^\circ; 90^\circ; 135^\circ$ e per $\rho = 0.1\text{mm}; 1\text{mm}; 5\text{mm}; 10\text{mm}$.

Di seguito vengono rappresentati i grafici di confronto per la tensione σ_y lungo la bisettrice dell'intaglio:

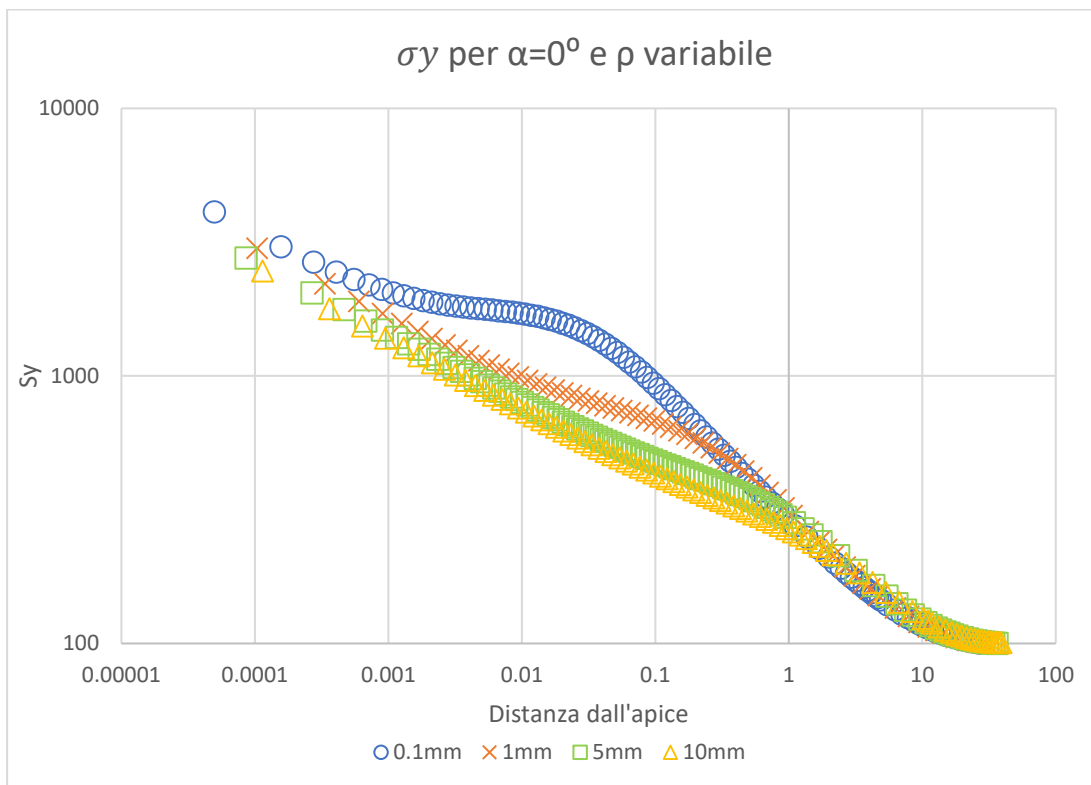


Fig. 7.3: Confronto σ_y lungo la bisettrice dell'intaglio con $\alpha=0^\circ$ per diversi raggi di raccordo nel problema dell'intaglio bi-materiale raccordato, acciaio-epox

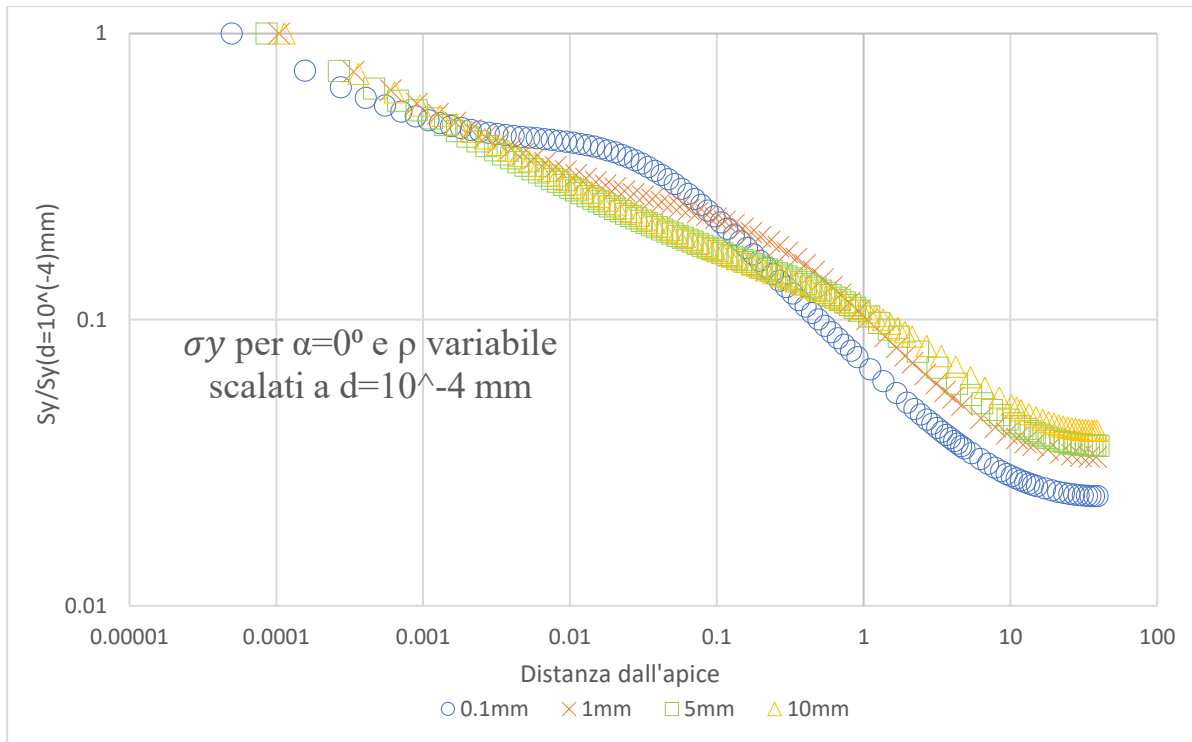


Fig. 7.4: Confronto σ_y scalati a $d=10^{-4}$ mm lungo la bisettrice dell'intaglio con $\alpha=0^\circ$ per diversi raggi di raccordo nel problema dell'intaglio bi-materiale raccordato, acciaio-epox

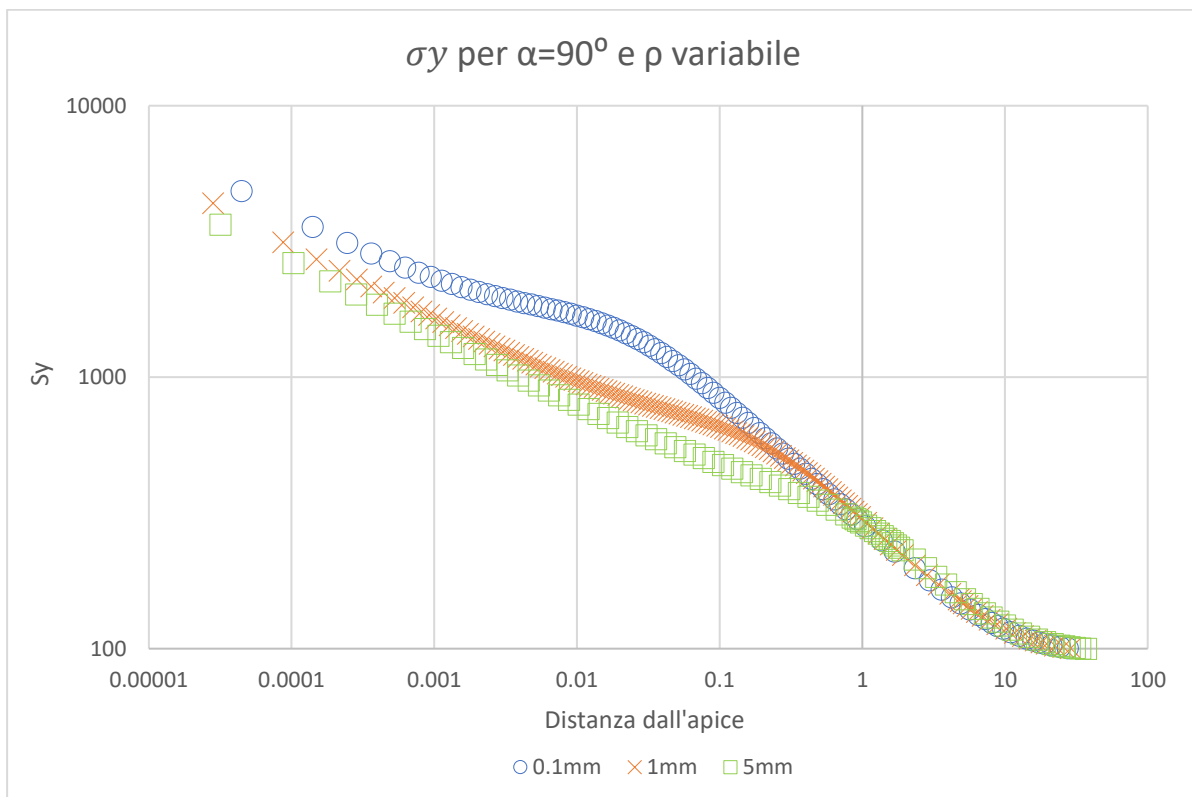


Fig. 7.5: Confronto σ_y lungo la bisettrice dell'intaglio con $\alpha=90^\circ$ per diversi raggi di raccordo nel problema dell'intaglio bi-materiale raccordato, acciaio-epox

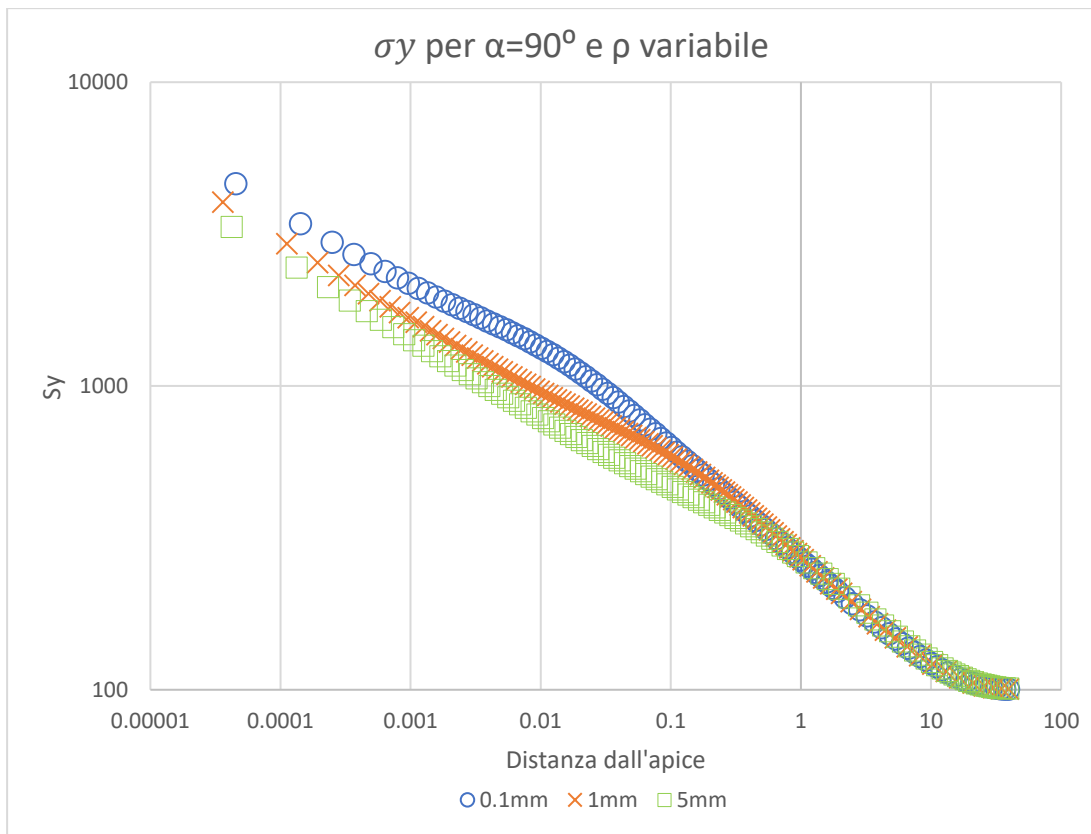


Fig. 7.6: Confronto σ_y lungo la bisettrice dell'intaglio con $\alpha=135^\circ$ per diversi raggi di raccordo nel problema dell'intaglio bi-materiale raccordato, acciaio-epox

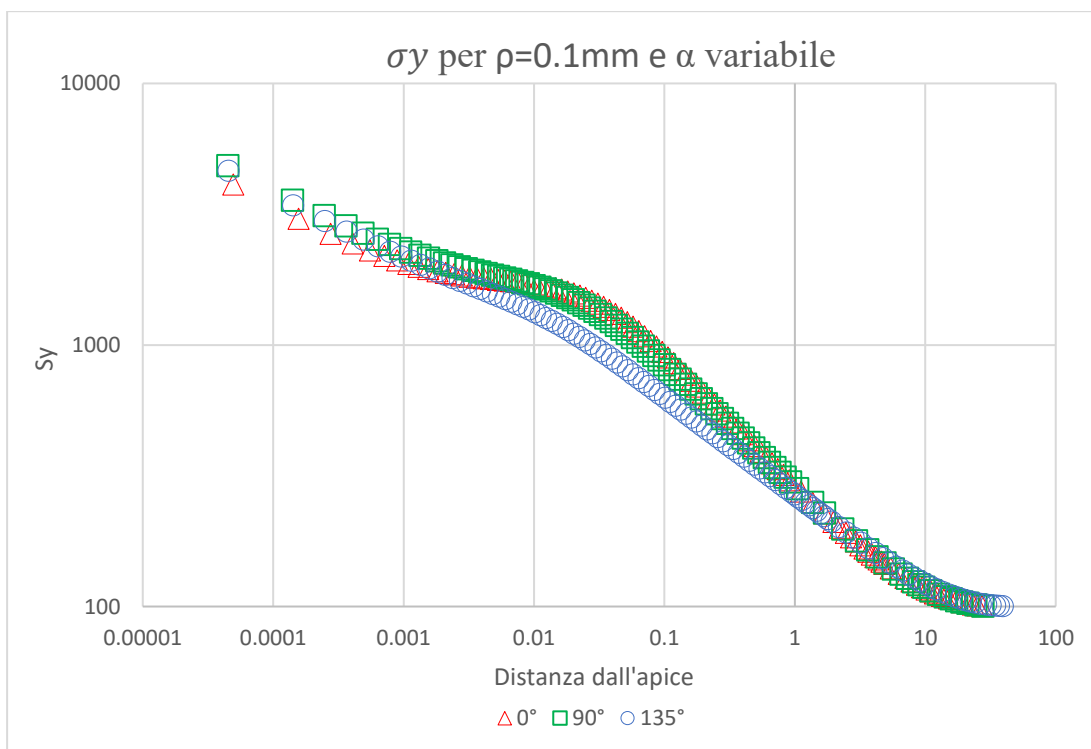


Fig. 7.7: Confronto σ_y lungo la bisettrice dell'intaglio con $\rho=0.1\text{mm}$ per diversi angoli di apertura nel problema dell'intaglio bi-materiale raccordato, acciaio-epox

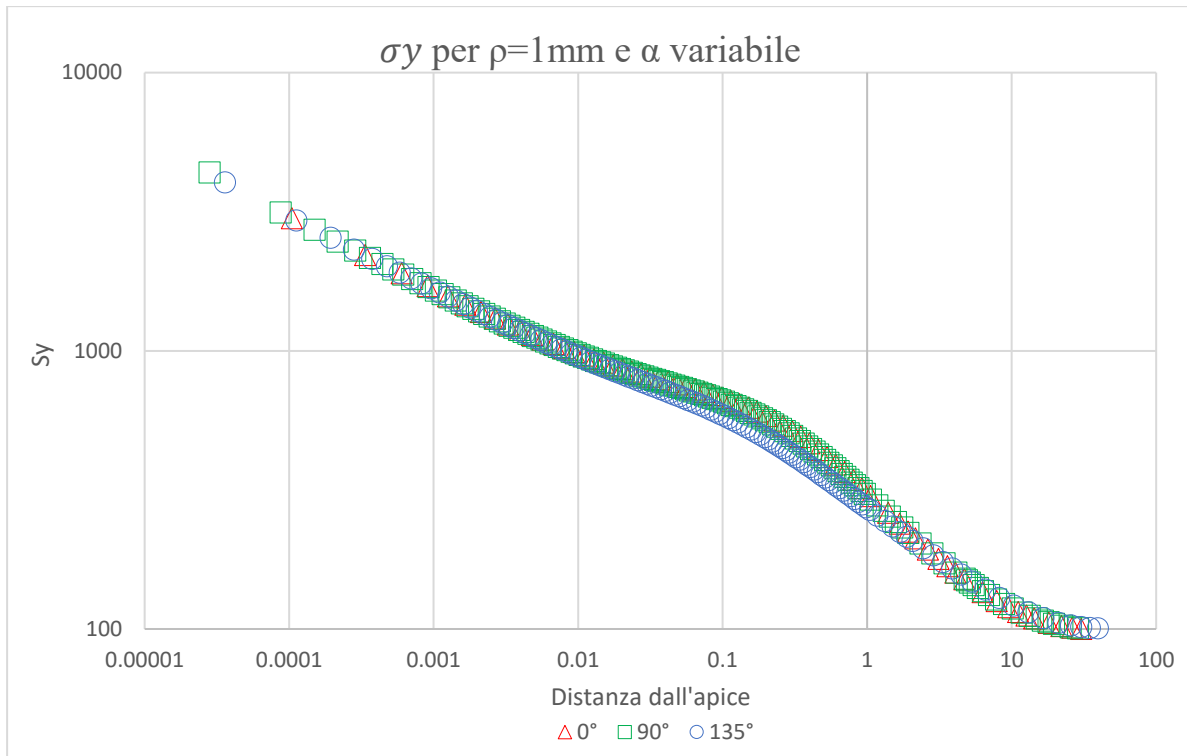


Fig. 7.8: Confronto σ_y lungo la bisettrice dell'intaglio con $\rho=1\text{mm}$ per diversi angoli di apertura nel problema dell'intaglio bi-materiale raccordato, acciaio-epox

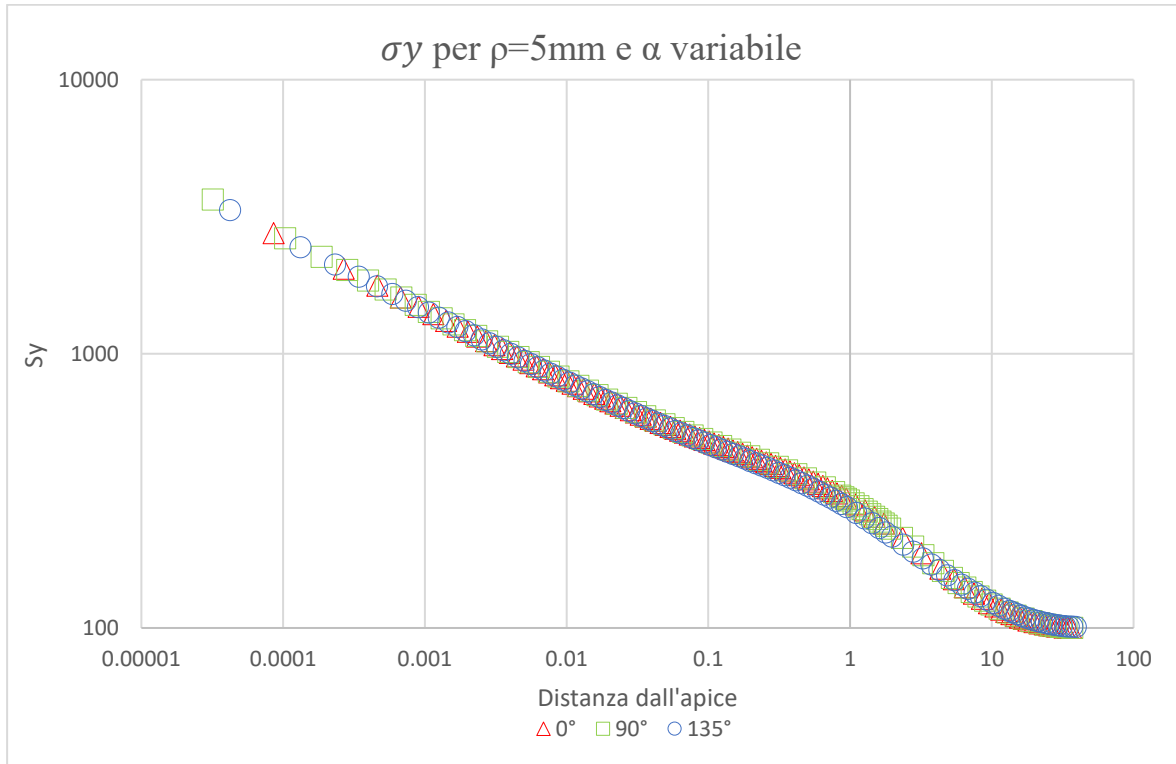


Fig. 7.9: Confronto σ_y lungo la bisettrice dell'intaglio con $\rho=5\text{mm}$ per diversi angoli di apertura nel problema dell'intaglio bi-materiale raccordato, acciaio-epox

7.4 Analisi dei risultati e proposta per approcci al problema

Tutte le curve presentano due tratti principali che compongono l'andamento generale; un tratto a pendenza λ_m lontano dall'apice dell'intaglio che tende all'andamento dello spigolo vivo bimateriale mostrato nella soluzione del 2015⁽²⁴⁾; e un tratto a pendenza λ_n vicino all'apice dell'intaglio che riprende l'andamento delle tensioni in una piastra bimateriale non intagliata. Il punto di cambio di pendenza dipende solamente dal raggio di raccordo, ed è tanto più distante dall'apice dell'intaglio tanto più ρ aumenta.

Questo può essere spiegato notando come nel secondo tratto la pendenza λ_m cambi a seconda dell'angolo di apertura, ricordando gli andamenti di un intaglio a spigolo vivo in cui λ_m diminuisce più α aumenta; mentre nel primo tratto la pendenza λ_n sia costante per tutti gli angoli di apertura e raggi di raccordo, suggerendo come la soluzione sia dominata dalla singolarità di materiale, variando solamente per il fattore di intensificazione di tensione che aumenta al diminuire di ρ .

Caratteristica interessante inoltre è il comportamento peculiare delle curve sul punto di cambio di pendenza, in cui sembra che l'andamento delle tensioni sovrasti i due asintoti che caratterizzano i comportamenti vicino e lontano dall'apice dell'intaglio. Questo comportamento deve essere preso in considerazione da un eventuale approccio di asymptotic matching che volesse approssimare i campi tensionali. Un approccio di questo tipo potrebbe essere un metodo veloce ed efficace per arrivare ad una forma analitica del campo di tensioni approssimato. Un altro metodo potrebbe invece essere quello di riprendere la metodologia proposta nel 2015, dividendo le funzioni potenziali in due termini; uno che tenga conto dell'effetto dell'intaglio, uno che rispecchi la singolarità di materiale, ricordando che i due potenziali non avranno punti singolari coincidenti e sfruttando la mappa conforme discussa nel Capitolo 2, potrebbe essere possibile generare una soluzione molto accurata applicando le corrette condizioni al contorno. Questo metodo inoltre potrebbe essere sottoposto allo stesso procedimento illustrato nel Capitolo 3 nel caso la precisione delle soluzioni ottenute con soli due termini non sia soddisfacente.

8 Conclusioni

Questo lavoro si proponeva di trovare soluzioni innovative ai problemi dell'intaglio su piastre in materiale ortotropo. I profili considerati sono stati quello iperbolico di Neuber, intaglio raramente eseguito nelle realtà industriali ma che è il punto di partenza per l'analisi analitica di geometrie simili; e l'intaglio raccordato a V, profilo molto più comune nel mondo della tecnica. Queste nuove soluzioni hanno lo scopo di prevedere i campi tensionali con una maggior precisione dove i modelli attuali risultano più imprecisi, mantenendone l'accuratezza nelle ipotesi in cui questi ultimi eccellevano. Questi obiettivi devono essere raggiunti mantenendo semplicità e l'eleganza delle equazioni, tratto di spicco delle soluzioni attuali.

Le soluzioni proposte e analizzate si differenziano in base al numero di termini delle funzioni potenziali (Eq. 49) e il metodo di risoluzione del sistema di equazioni al contorno. I migliori modelli inoltre sono diversi a seconda delle ipotesi del problema; essendo che la forma dei campi tensionali cambia drasticamente variando proprietà elastiche del materiale e Modo, diverse combinazioni di numero di termini e metodi di risoluzioni risultano più adeguate alla descrizione del fenomeno. Si sono divisi i casi analizzati in quattro principali categorie, mostrate in Tab. 5.2, e per ognuna identificate le migliori soluzioni.

A Modo I il miglior modello tra quelli proposti è espresso da Eq. 63, nelle quali le costanti sono mostrate in Tab. 1 per il materiale rigido lungo la direzione ortogonale alla bisettrice dell'intaglio, e in Tab. per il materiale rigido lungo la bisettrice dell'intaglio. Queste equazioni mostrano un comportamento più preciso lungo la bisettrice dell'intaglio per il primo materiale, mantenendo le prestazioni della soluzioni attuali per il secondo materiale e lungo il profilo dell'intaglio. Questo piccolo miglioramento permette di riportare le previsioni delle tensioni lungo la bisettrice in vantaggio di sicurezza a dispetto del materiale analizzato, al costo dell'introduzione di 2 nuove variabili da identificare risolvendo numericamente un sistema di 2 equazioni. Questo sistema è facilmente risolvibile e le soluzioni univocamente determinate una volta calcolati i parametri χ_{21} e λ , rendendo il modello semplice e facilmente implementabile.

È a Modo II tuttavia che si possono notare i maggiori vantaggi delle metodologie proposte. In queste ipotesi infatti la variabilità dei campi tensionali diventa estrema al variare del materiale in analisi; in particolare la proprietà che più manifesta comportamenti diversi è la singolarità. Confrontati con un materiale isotropo, materiali rigidi lungo l'asse y presentano comportamenti

singolari anche per α maggiori di 102° , tanto più grandi tanto più il rapporto $\frac{E_y}{E_x}$ è elevato; al contrario invece materiali rigidi lungo l'asse x perdono la proprietà di singolarità per α minori di 102° , tanto minori tanto più il rapporto $\frac{E_y}{E_x}$ è basso. Queste differenze hanno imposto l'utilizzo di 2 modelli diversi per i due materiali analizzati. Per il primo materiale le Eq. 104 generate da funzioni potenziali di 3 termini rappresentano un significativo miglioramento rispetto al modello creato dalla soluzione del 2017 per il Modo I. Queste equazioni, i cui parametri sono espressi in Tab. 4.3 per i casi analizzati, catturano i campi tensionali lungo la bisettrice dell'intaglio e lungo il profilo dello stesso, riuscendo a prevedere con ottime precisioni sia la distanza dall'apice in cui si presenta il picco di tensioni, sia a quale angolo θ lungo il profilo dell'intaglio è presente la concentrazione dei campi tensionali. Per il secondo materiale invece anche un minimo aumento del numero di termini nelle funzioni potenziali rispetto alla soluzione del 2017 riadattata comporta una perdita di stabilità nella soluzione, lasciando Eq. 87 con singoli termini e costanti espresse in Tab. 4.4 la soluzione migliore tra quelle testate. Questa combinazione di Modo e materiale tuttavia crea un dominio di singolarità estremamente ristretto ($0^\circ < 2\alpha < 65^\circ$) e come si nota per tutte le soluzioni proposte, la precisione dei campi teorici diminuisce più l'angolo di apertura si avvicina ai limiti del dominio di singolarità. Questo, combinato all'effetto di rilassamento dei campi tensionali con materiali a basso $\frac{E_y}{E_x}$, porta la soluzione a singolo termine ad essere l'unica tra quelle testate a rimanere stabile sia lungo il profilo che lungo la bisettrice.

I risultati migliori per ogni set di ipotesi sono stati testati anche per intagli a V raccordati, mostrando un ottimo grado di precisione nonostante le differenze geometriche tra modello analitico e numerico. Le stesse considerazioni fatte precedentemente si applicano a questi intagli; in particolare più l'angolo di apertura si avvicina ai limiti del dominio di singolarità più imprecise le soluzioni analitiche diventano, come mostrato dai risultati a Modo II per materiale 2 che anche in questo caso mostra il grado di precisione inferiore.

Ultima nota importante riguardante questo problema è notare come, con l'aiuto di software e algoritmi ottimizzati per la ricerca di soluzioni a sistemi di equazioni non lineari, potrebbe essere possibile trovare soluzioni non banali imponendo un numero molto più alto di termini alle funzioni potenziali. Questo potrebbe portare a gradi di approssimazione dei campi tensionali migliori, in particolare nei casi più critici a Modo II con materiali a $\frac{E_y}{E_x}$ bassi, sacrificando l'eleganza e la semplicità della soluzione.

Come ultimo argomento è stato affrontato il problema dell'intaglio raccordato bimateriale, testando tramite analisi numeriche, per diversi raggi di raccordo e angoli di apertura, i campi tensionali in una piastra formata da due materiali, acciaio e resina epossidica.

Sono state modellate diverse piastre con $\rho \in \{0.1mm; 1mm; 5mm; 10mm\}$ e $2\alpha \in \{0^\circ; 90^\circ; 135^\circ\}$ con linea di confine tra i due materiali coincidente con la bisettrice dell'intaglio. Le piastre messe a trazione hanno esibito comportamenti che possono essere riprodotti con un approccio di asymptotic matching tra la teoria bi-bimateriale per una piastra non intagliata e quella per un intaglio a spigolo vivo bi-materiale. Alternativamente un approccio analitico proposto riprende le strategie utilizzate per la modellazione dell'intaglio a spigolo vivo, utilizzando potenziali diversi per le due cause di singolarità e applicando condizioni al contorno appropriate ad ognuna delle due parti.

Appendice A

Codice Mathematica per calcolo coefficienti di Tab. 3 e Tab. 3.2

```

z1[_] := r1[_] * (Cos[θ1[_]] + i * Sin[θ1[_]])
z2[_] := r2[_] * (Cos[θ2[_]] + i * Sin[θ2[_]])
φ1[_] := A1r * z1[_]^(λ-1)
φ2[_] := A2r * z2[_]^(λ-1) + B2r * z2[_]^(μ-1)
σr[_] := 2 * Re[(k11[_] + i * k12[_]) * φ1[_] + (k21[_] + i * k22[_]) * φ2[_]]
σθ[_] := 2 * Re[(m11[_] + i * m12[_]) * φ1[_] + (m21[_] + i * m22[_]) * φ2[_]]
τrθ[_] := 2 * Re[(n11[_] + i * n12[_]) * φ1[_] + (n21[_] + i * n22[_]) * φ2[_]]
σu[_] := (σr[_] + σθ[_]) / 2 + (σr[_] - σθ[_]) / 2 * Cos[2 * θ / q] - τrθ[_] * Sin[2 * θ / q]
σv[_] := (σr[_] + σθ[_]) / 2 - (σr[_] - σθ[_]) / 2 * Cos[2 * θ / q] + τrθ[_] * Sin[2 * θ / q]
τuv[_] := (σr[_] - σθ[_]) / 2 * Sin[2 * θ / q] + τrθ[_] * Cos[2 * θ / q]

In[ ]:= x[_] := r[_] * Cos[θ]
y[_] := r[_] * Sin[θ]
r[_] := r0 * Cos[θ / q]^q

x0[_] := x[θ] - r0
ξ1[_] := x0[θ] + r0 * β1^2
ξ2[_] := x0[θ] + r0 * β2^2
η1[_] := β1 * y[θ]
η2[_] := β2 * y[θ]
r1[_] := Abs[ξ1[θ] + i * η1[θ]]
r2[_] := Abs[ξ2[θ] + i * η2[θ]]
k11[_] := Sin[θ]^2 - (β1 * Cos[θ])^2
k12[_] := -2 * β1 * Sin[θ] * Cos[θ]
k21[_] := Sin[θ]^2 - (β2 * Cos[θ])^2
k22[_] := -2 * β2 * Sin[θ] * Cos[θ]
m11[_] := Cos[θ]^2 - (β1 * Sin[θ])^2
m12[_] := 2 * β1 * Sin[θ] * Cos[θ]
m21[_] := Cos[θ]^2 - (β2 * Sin[θ])^2
m22[_] := 2 * β2 * Sin[θ] * Cos[θ]
n11[_] := 1 / 2 * Sin[2 * θ] * (1 + β1^2)
n12[_] := -β1 * Cos[2 * θ]
n21[_] := 1 / 2 * Sin[2 * θ] * (1 + β2^2)
n22[_] := -β2 * Cos[2 * θ]
θ1[_] := Arg[ξ1[θ] + i * η1[θ]]
θ2[_] := Arg[ξ2[θ] + i * η2[θ]]

In[ ]:= B2r := φ * A1r
A2r := χ * A1r

```

$$\begin{aligned}
B(\cdot, \cdot) &:= \text{Re} \left[(r1[\theta])^{(-1+\lambda)} (2 \text{Cos} [(-1+\lambda) \vartheta 1[\theta]] k11[\theta] - 2 k12[\theta] \text{Sin} [(-1+\lambda) \vartheta 1[\theta]]) + \right. \\
&\quad \left. \chi * (r2[\theta])^{(-1+\lambda)} (2 \text{Cos} [(-1+\lambda) \vartheta 2[\theta]] k21[\theta] - 2 k22[\theta] \text{Sin} [(-1+\lambda) \vartheta 2[\theta]]) \right] \\
A12 &:= \text{Re} \left[(r2[\theta])^{(-1+\mu)} (2 \text{Cos} [(-1+\mu) \vartheta 2[\theta]] k21[\theta] - 2 k22[\theta] \text{Sin} [(-1+\mu) \vartheta 2[\theta]]) \right] \\
A21 &:= \\
&\quad - \frac{1}{q r \theta^2} 2 \beta 1^{-t} (\beta 1^2)^{-t} \beta 2^{-t} (\beta 2^2)^{-t} \\
&\quad \left(q \beta 1^2 \sqrt{r \theta^2 \beta 1^{2t}} (r \theta^2 (\beta 1^2)^t)^{\lambda/2} \beta 2^t (\beta 2^2)^t + \beta 1^t (r \theta^2 (\beta 1^2)^t)^{\frac{1+\lambda}{2}} \beta 2^t (\beta 2^2)^t - \right. \\
&\quad \left. q \beta 1^t (r \theta^2 (\beta 1^2)^t)^{\frac{1+\lambda}{2}} \beta 2^t (\beta 2^2)^t + \beta 1^{2t} (r \theta^2 (\beta 1^2)^t)^{\frac{1+\lambda}{2}} \beta 2^t (\beta 2^2)^t - q \beta 1^{2t} (r \theta^2 (\beta 1^2)^t)^{\frac{1+\lambda}{2}} \beta 2^t (\beta 2^2)^t - \right. \\
&\quad \left. q \beta 1^2 \sqrt{r \theta^2 \beta 1^{2t}} (r \theta^2 (\beta 1^2)^t)^{\lambda/2} \beta 2^t (\beta 2^2)^t \lambda \right) - \\
&\quad \frac{1}{q r \theta^2} 2 \chi * \beta 1^{-t} (\beta 1^2)^{-t} \beta 2^{-t} (\beta 2^2)^{-t} \\
&\quad \left(q \beta 1^t (\beta 1^2)^t \beta 2^2 \sqrt{r \theta^2 \beta 2^{2t}} (r \theta^2 (\beta 2^2)^t)^{\lambda/2} + \beta 1^t (\beta 1^2)^t \beta 2^t (r \theta^2 (\beta 2^2)^t)^{\frac{1+\lambda}{2}} - \right. \\
&\quad \left. q \beta 1^t (\beta 1^2)^t \beta 2^t (r \theta^2 (\beta 2^2)^t)^{\frac{1+\lambda}{2}} + \beta 1^t (\beta 1^2)^t \beta 2^{2t} (r \theta^2 (\beta 2^2)^t)^{\frac{1+\lambda}{2}} - q \beta 1^t (\beta 1^2)^t \beta 2^{2t} (r \theta^2 (\beta 2^2)^t)^{\frac{1+\lambda}{2}} - \right. \\
&\quad \left. q \beta 1^t (\beta 1^2)^t \beta 2^2 \sqrt{r \theta^2 \beta 2^{2t}} (r \theta^2 (\beta 2^2)^t)^{\lambda/2} \lambda \right) \\
A22 &:= - \frac{1}{q r \theta^2} 2 \beta 1^{-t} (\beta 1^2)^{-t} \beta 2^{-t} (\beta 2^2)^{-t} \\
&\quad \left(q \beta 1^t (\beta 1^2)^t \beta 2^2 \sqrt{r \theta^2 \beta 2^{2t}} (r \theta^2 (\beta 2^2)^t)^{\mu/2} + \beta 1^t (\beta 1^2)^t \beta 2^t (r \theta^2 (\beta 2^2)^t)^{\frac{1+\mu}{2}} - \right. \\
&\quad \left. q \beta 1^t (\beta 1^2)^t \beta 2^t (r \theta^2 (\beta 2^2)^t)^{\frac{1+\mu}{2}} + \beta 1^t (\beta 1^2)^t \beta 2^{2t} (r \theta^2 (\beta 2^2)^t)^{\frac{1+\mu}{2}} - q \beta 1^t (\beta 1^2)^t \beta 2^{2t} (r \theta^2 (\beta 2^2)^t)^{\frac{1+\mu}{2}} - \right. \\
&\quad \left. q \beta 1^t (\beta 1^2)^t \beta 2^2 \sqrt{r \theta^2 \beta 2^{2t}} (r \theta^2 (\beta 2^2)^t)^{\mu/2} \mu \right)
\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
B11 &:= \\
&\text{Re} \left[\right. \\
&\quad \left(r1 \left[\frac{\pi q}{4} \right] \right)^{(-1+\lambda)} \left(\text{Cos} \left[(-1+\lambda) \vartheta 1 \left[\frac{\pi q}{4} \right] \right] k11 \left[\frac{\pi q}{4} \right] + \text{Cos} \left[(-1+\lambda) \vartheta 1 \left[\frac{\pi q}{4} \right] \right] m11 \left[\frac{\pi q}{4} \right] - \right. \\
&\quad \left. 2 \text{Cos} \left[(-1+\lambda) \vartheta 1 \left[\frac{\pi q}{4} \right] \right] n11 \left[\frac{\pi q}{4} \right] - k12 \left[\frac{\pi q}{4} \right] \text{Sin} \left[(-1+\lambda) \vartheta 1 \left[\frac{\pi q}{4} \right] \right] - \right. \\
&\quad \left. m12 \left[\frac{\pi q}{4} \right] \text{Sin} \left[(-1+\lambda) \vartheta 1 \left[\frac{\pi q}{4} \right] \right] + 2 n12 \left[\frac{\pi q}{4} \right] \text{Sin} \left[(-1+\lambda) \vartheta 1 \left[\frac{\pi q}{4} \right] \right] \right) + \\
&\quad \chi * \\
&\quad \left(\left(r2 \left[\frac{\pi q}{4} \right] \right)^{(-1+\lambda)} \left(\text{Cos} \left[(-1+\lambda) \vartheta 2 \left[\frac{\pi q}{4} \right] \right] k21 \left[\frac{\pi q}{4} \right] + \text{Cos} \left[(-1+\lambda) \vartheta 2 \left[\frac{\pi q}{4} \right] \right] m21 \left[\frac{\pi q}{4} \right] - \right. \right. \\
&\quad \left. \left. 2 \text{Cos} \left[(-1+\lambda) \vartheta 2 \left[\frac{\pi q}{4} \right] \right] n21 \left[\frac{\pi q}{4} \right] - k22 \left[\frac{\pi q}{4} \right] \text{Sin} \left[(-1+\lambda) \vartheta 2 \left[\frac{\pi q}{4} \right] \right] - \right. \right. \\
&\quad \left. \left. m22 \left[\frac{\pi q}{4} \right] \text{Sin} \left[(-1+\lambda) \vartheta 2 \left[\frac{\pi q}{4} \right] \right] + 2 n22 \left[\frac{\pi q}{4} \right] \text{Sin} \left[(-1+\lambda) \vartheta 2 \left[\frac{\pi q}{4} \right] \right] \right) \right) \left. \right]
\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
B12 &:= \\
&\text{Re} \left[\right. \\
&\quad \left(r2 \left[\frac{\pi q}{4} \right] \right)^{(-1+\mu)} \\
&\quad \left(\text{Cos} \left[(-1+\mu) \vartheta 2 \left[\frac{\pi q}{4} \right] \right] k21 \left[\frac{\pi q}{4} \right] + \text{Cos} \left[(-1+\mu) \vartheta 2 \left[\frac{\pi q}{4} \right] \right] m21 \left[\frac{\pi q}{4} \right] - \right. \\
&\quad \left. 2 \text{Cos} \left[(-1+\mu) \vartheta 2 \left[\frac{\pi q}{4} \right] \right] n21 \left[\frac{\pi q}{4} \right] - k22 \left[\frac{\pi q}{4} \right] \text{Sin} \left[(-1+\mu) \vartheta 2 \left[\frac{\pi q}{4} \right] \right] - \right. \\
&\quad \left. m22 \left[\frac{\pi q}{4} \right] \text{Sin} \left[(-1+\mu) \vartheta 2 \left[\frac{\pi q}{4} \right] \right] + 2 n22 \left[\frac{\pi q}{4} \right] \text{Sin} \left[(-1+\mu) \vartheta 2 \left[\frac{\pi q}{4} \right] \right] \right) \left. \right]
\end{aligned}$$

B21 :=

$$\text{Re} \left[\left(r1 \left[\frac{\pi q}{4} \right] \right)^{(-1+\lambda)} \left(\text{Cos} \left[(-1+\lambda) \vartheta 1 \left[\frac{\pi q}{4} \right] \right] k11 \left[\frac{\pi q}{4} \right] - \text{Cos} \left[(-1+\lambda) \vartheta 1 \left[\frac{\pi q}{4} \right] \right] m11 \left[\frac{\pi q}{4} \right] - k12 \left[\frac{\pi q}{4} \right] \text{Sin} \left[(-1+\lambda) \vartheta 1 \left[\frac{\pi q}{4} \right] \right] + m12 \left[\frac{\pi q}{4} \right] \text{Sin} \left[(-1+\lambda) \vartheta 1 \left[\frac{\pi q}{4} \right] \right] \right) + \chi \left(r2 \left[\frac{\pi q}{4} \right] \right)^{(-1+\lambda)} \left(\text{Cos} \left[(-1+\lambda) \vartheta 2 \left[\frac{\pi q}{4} \right] \right] k21 \left[\frac{\pi q}{4} \right] - \text{Cos} \left[(-1+\lambda) \vartheta 2 \left[\frac{\pi q}{4} \right] \right] m21 \left[\frac{\pi q}{4} \right] - k22 \left[\frac{\pi q}{4} \right] \text{Sin} \left[(-1+\lambda) \vartheta 2 \left[\frac{\pi q}{4} \right] \right] + m22 \left[\frac{\pi q}{4} \right] \text{Sin} \left[(-1+\lambda) \vartheta 2 \left[\frac{\pi q}{4} \right] \right] \right) \right]$$

B22 :=

$$\text{Re} \left[\left(r2 \left[\frac{\pi q}{4} \right] \right)^{(-1+\mu)} \left(\text{Cos} \left[(-1+\mu) \vartheta 2 \left[\frac{\pi q}{4} \right] \right] k21 \left[\frac{\pi q}{4} \right] - \text{Cos} \left[(-1+\mu) \vartheta 2 \left[\frac{\pi q}{4} \right] \right] m21 \left[\frac{\pi q}{4} \right] - k22 \left[\frac{\pi q}{4} \right] \text{Sin} \left[(-1+\mu) \vartheta 2 \left[\frac{\pi q}{4} \right] \right] + m22 \left[\frac{\pi q}{4} \right] \text{Sin} \left[(-1+\mu) \vartheta 2 \left[\frac{\pi q}{4} \right] \right] \right) \right]$$

$$A := \begin{pmatrix} A11 & A12 \\ A21 & A22 \end{pmatrix}$$

$$B := \begin{pmatrix} B11 & B12 \\ B21 & B22 \end{pmatrix}$$

n[γ] := β1 := 0.179948

β2 := 1.38929

ρ := 1

α0 := 1

$$\alpha := \frac{\alpha 0 * \pi}{180}$$

γ := π - α

$$q := \frac{2 * \gamma}{\pi}$$

$$r0 := \frac{q - 1}{q} * \rho$$

n[λ] := λ :=

λ0 / .

FindRoot[

$$\text{Cos}[(1-\lambda 0) * \vartheta 2i] * (\text{Cos}[(1-\lambda 0) \vartheta 1i] * (m11[\gamma] * n21[\gamma] - m21[\gamma] * n11[\gamma]) - \text{Sin}[(1-\lambda 0) \vartheta 1i] * (m21[\gamma] * n12[\gamma] - m12[\gamma] * n21[\gamma])) - \text{Sin}[(1-\lambda 0) * \vartheta 2i] * (\text{Cos}[(1-\lambda 0) * \vartheta 1i] * (m22[\gamma] * n11[\gamma] - m11[\gamma] * n22[\gamma]) - \text{Sin}[(1-\lambda 0) * \vartheta 1i] * (m12[\gamma] * n22[\gamma] - m22[\gamma] * n12[\gamma])) = 0, \{\lambda 0, 0.7\}]$$

$$\chi := - \frac{\rho 1^{\lambda-1} (m11[\gamma] \text{Cos}[(1-\lambda) \vartheta 1i] + m12[\gamma] \text{Sin}[(1-\lambda) \vartheta 1i])}{\rho 2^{\lambda-1} (m21[\gamma] \text{Cos}[(1-\lambda) \vartheta 2i] + m22[\gamma] \text{Sin}[(1-\lambda) \vartheta 2i])}$$

$$\rho 1 := \sqrt{\text{Cos}[\gamma]^2 + (\beta 1 * \text{Sin}[\gamma])^2}$$

$$\rho 2 := \sqrt{\text{Cos}[\gamma]^2 + (\beta 2 * \text{Sin}[\gamma])^2}$$

$$\vartheta 1i := \text{Arg}[\text{Cos}[\gamma] + i * \beta 1 * \text{Sin}[\gamma]]$$

$$\vartheta 2i := \text{Arg}[\text{Cos}[\gamma] + i * \beta 2 * \text{Sin}[\gamma]]$$

$$A2r := \chi * A1r$$

```

Clear[t, μ, α0]
α0 := 30
{s, g} = {t, μ} /. Refine[FindRoot[{Det[A] == 0, Det[B] == 0}, {{t, 1.5}, {μ, -0.35}}],
  Element[t | μ, Reals]]
λ
χ
{t, μ} = {s, g}

$$t0 = \frac{2 - \frac{\log[-x]}{\log\left[\frac{\beta_1}{\beta_2}\right]}}{1 - \lambda}$$

Solve[A1r * A11 + B1r * A12 == 0, B1r]
Solve[A1r * B21 + B1r * B22 == 0, B1r]
Det[A]

In[ ]:= Clear[t, μ, α0]
α0 := 45
{s, g} = {t, μ} /. Refine[FindRoot[{Det[A] == 0, Det[B] == 0}, {{t, 1.7}, {μ, -0.4}}],
  Element[t | μ, Reals]]
λ
χ
{t, μ} = {s, g}

$$t0 = \frac{2 - \frac{\log[-x]}{\log\left[\frac{\beta_1}{\beta_2}\right]}}{1 - \lambda}$$

Solve[A1r * A11 + B1r * A12 == 0, B1r]
Solve[A1r * B21 + B1r * B22 == 0, B1r]
Det[A]

In[ ]:= Clear[t, μ, α0]
α0 := 67.5
{s, g} = {t, μ} /. Refine[FindRoot[{Det[A] == 0, Det[B] == 0}, {{t, 1.5}, {μ, -0.3}}],
  Element[t | μ, Reals]]
λ
χ
{t, μ} = {s, g}

$$t0 = \frac{2 - \frac{\log[-x]}{\log\left[\frac{\beta_1}{\beta_2}\right]}}{1 - \lambda}$$


```

Codice Mathematica per calcolo coefficienti di Tab. 1, Tab., Tab. 4.2, Tab. 6.1 e Tab. 6.2

```

z1[θ_] := r1[θ] * (Cos[θ1[θ]] + i * Sin[θ1[θ]])
z2[θ_] := r2[θ] * (Cos[θ2[θ]] + i * Sin[θ2[θ]])
φ1[θ_] := A1r * z1[θ]^λ-1
φ2[θ_] := A2r * z2[θ]^λ-1 + B2r * z2[θ]^μ-1
σr[θ_] := 2 * Re[(k11[θ] + i * k12[θ]) * φ1[θ] + (k21[θ] + i * k22[θ]) * φ2[θ]]
σθ[θ_] := 2 * Re[(m11[θ] + i * m12[θ]) * φ1[θ] + (m21[θ] + i * m22[θ]) * φ2[θ]]
τrθ[θ_] := 2 * Re[(n11[θ] + i * n12[θ]) * φ1[θ] + (n21[θ] + i * n22[θ]) * φ2[θ]]
ou[θ_] := (σr[θ] + σθ[θ]) / 2 + (σr[θ] - σθ[θ]) / 2 * Cos[2 * θ / q] - τrθ[θ] * Sin[2 * θ / q]
ov[θ_] := (σr[θ] + σθ[θ]) / 2 - (σr[θ] - σθ[θ]) / 2 * Cos[2 * θ / q] + τrθ[θ] * Sin[2 * θ / q]
tuv[θ_] := (σr[θ] - σθ[θ]) / 2 * Sin[2 * θ / q] + τrθ[θ] * Cos[2 * θ / q]

In[ ]:= x[θ_] := r[θ] * Cos[θ]
y[θ_] := r[θ] * Sin[θ]
r[θ_] := r0 * Cos[θ / q]^q

x0[θ_] := x[θ] - r0
ξ1[θ_] := x0[θ] + r0 * β1^λ
ξ2[θ_] := x0[θ] + r0 * β2^λ
η1[θ_] := β1 * y[θ]
η2[θ_] := β2 * y[θ]
r1[θ_] := Abs[ξ1[θ] + i * η1[θ]]
r2[θ_] := Abs[ξ2[θ] + i * η2[θ]]
k11[θ_] := Sin[θ]^2 - (β1 + Cos[θ])^2
k12[θ_] := -2 * β1 * Sin[θ] + Cos[θ]
k21[θ_] := Sin[θ]^2 - (β2 + Cos[θ])^2
k22[θ_] := -2 * β2 * Sin[θ] + Cos[θ]
m11[θ_] := Cos[θ]^2 - (β1 + Sin[θ])^2
m12[θ_] := 2 * β1 * Sin[θ] + Cos[θ]
m21[θ_] := Cos[θ]^2 - (β2 + Sin[θ])^2
m22[θ_] := 2 * β2 * Sin[θ] + Cos[θ]
n11[θ_] := 1/2 * Sin[2 * θ] + (1 + β1^2)
n12[θ_] := -β1 * Cos[2 * θ]
n21[θ_] := 1/2 * Sin[2 * θ] + (1 + β2^2)
n22[θ_] := -β2 * Cos[2 * θ]
θ1[θ_] := Arg[ξ1[θ] + i * η1[θ]]
θ2[θ_] := Arg[ξ2[θ] + i * η2[θ]]

In[ ]:= B2r := φ * A1r
A2r := χ * A1r

```

$$\begin{aligned}
A11 &:= \operatorname{Re} \left[(r1[\theta])^{(-1+\lambda)} (2 \operatorname{Cos} [(-1+\lambda) \theta 1[\theta]] k11[\theta] - 2 k12[\theta] \operatorname{Sin} [(-1+\lambda) \theta 1[\theta]]) + \right. \\
&\quad \left. \chi * (r2[\theta])^{(-1+\lambda)} (2 \operatorname{Cos} [(-1+\lambda) \theta 2[\theta]] k21[\theta] - 2 k22[\theta] \operatorname{Sin} [(-1+\lambda) \theta 2[\theta]]) \right] \\
A12 &:= \operatorname{Re} \left[(r2[\theta])^{(-1+\mu)} (2 \operatorname{Cos} [(-1+\mu) \theta 2[\theta]] k21[\theta] - 2 k22[\theta] \operatorname{Sin} [(-1+\mu) \theta 2[\theta]]) \right] \\
A21 &:= \\
&\quad - \frac{1}{q r \theta^2} 2 \beta 1^{-t} (\beta 1^2)^{-t} \beta 2^{-t} (\beta 2^2)^{-t} \\
&\quad \left(q \beta 1^t \sqrt{r \theta^2 \beta 1^{2t}} (r \theta^2 (\beta 1^2)^t)^{\lambda/2} \beta 2^t (\beta 2^2)^t + \beta 1^t (r \theta^2 (\beta 1^2)^t)^{\frac{1+\lambda}{2}} \beta 2^t (\beta 2^2)^t - q \beta 1^t (r \theta^2 (\beta 1^2)^t)^{\frac{1+\lambda}{2}} \beta 2^t (\beta 2^2)^t + \right. \\
&\quad \left. \beta 1^{2+t} (r \theta^2 (\beta 1^2)^t)^{\frac{1+\lambda}{2}} \beta 2^t (\beta 2^2)^t - q \beta 1^{2+t} (r \theta^2 (\beta 1^2)^t)^{\frac{1+\lambda}{2}} \beta 2^t (\beta 2^2)^t - q \beta 1^t \sqrt{r \theta^2 \beta 1^{2t}} (r \theta^2 (\beta 1^2)^t)^{\lambda/2} \beta 2^t (\beta 2^2)^t \lambda \right) - \\
&\quad \frac{1}{q r \theta^2} 2 \chi * \beta 1^{-t} (\beta 1^2)^{-t} \beta 2^{-t} (\beta 2^2)^{-t} \\
&\quad \left(q \beta 1^t (\beta 1^2)^t \beta 2^t \sqrt{r \theta^2 \beta 2^{2t}} (r \theta^2 (\beta 2^2)^t)^{\lambda/2} + \beta 1^t (\beta 1^2)^t \beta 2^t (r \theta^2 (\beta 2^2)^t)^{\frac{1+\lambda}{2}} - q \beta 1^t (\beta 1^2)^t \beta 2^t (r \theta^2 (\beta 2^2)^t)^{\frac{1+\lambda}{2}} + \right. \\
&\quad \left. \beta 1^t (\beta 1^2)^t \beta 2^{2+t} (r \theta^2 (\beta 2^2)^t)^{\frac{1+\lambda}{2}} - q \beta 1^t (\beta 1^2)^t \beta 2^{2+t} (r \theta^2 (\beta 2^2)^t)^{\frac{1+\lambda}{2}} - q \beta 1^t (\beta 1^2)^t \beta 2^t \sqrt{r \theta^2 \beta 2^{2t}} (r \theta^2 (\beta 2^2)^t)^{\lambda/2} \lambda \right) \\
A22 &:= - \frac{1}{q r \theta^2} 2 \beta 1^{-t} (\beta 1^2)^{-t} \beta 2^{-t} (\beta 2^2)^{-t} \\
&\quad \left(q \beta 1^t (\beta 1^2)^t \beta 2^t \sqrt{r \theta^2 \beta 2^{2t}} (r \theta^2 (\beta 2^2)^t)^{\mu/2} + \beta 1^t (\beta 1^2)^t \beta 2^t (r \theta^2 (\beta 2^2)^t)^{\frac{1+\mu}{2}} - q \beta 1^t (\beta 1^2)^t \beta 2^t (r \theta^2 (\beta 2^2)^t)^{\frac{1+\mu}{2}} + \right. \\
&\quad \left. \beta 1^t (\beta 1^2)^t \beta 2^{2+t} (r \theta^2 (\beta 2^2)^t)^{\frac{1+\mu}{2}} - q \beta 1^t (\beta 1^2)^t \beta 2^{2+t} (r \theta^2 (\beta 2^2)^t)^{\frac{1+\mu}{2}} - q \beta 1^t (\beta 1^2)^t \beta 2^t \sqrt{r \theta^2 \beta 2^{2t}} (r \theta^2 (\beta 2^2)^t)^{\mu/2} \mu \right) \\
B11 &:= \\
&\quad \operatorname{Re} \left[\right. \\
&\quad \left(r1 \left[\frac{3Y}{4} \right] \right)^{(-1+\lambda)} \left(\operatorname{Cos} [(-1+\lambda) \theta 1 \left[\frac{3Y}{4} \right]] k11 \left[\frac{3Y}{4} \right] + \operatorname{Cos} [(-1+\lambda) \theta 1 \left[\frac{3Y}{4} \right]] m11 \left[\frac{3Y}{4} \right] - 2 \operatorname{Cos} [(-1+\lambda) \theta 1 \left[\frac{3Y}{4} \right]] n11 \left[\frac{3Y}{4} \right] - \right. \\
&\quad \left. k12 \left[\frac{3Y}{4} \right] \operatorname{Sin} [(-1+\lambda) \theta 1 \left[\frac{3Y}{4} \right]] - m12 \left[\frac{3Y}{4} \right] \operatorname{Sin} [(-1+\lambda) \theta 1 \left[\frac{3Y}{4} \right]] + 2 n12 \left[\frac{3Y}{4} \right] \operatorname{Sin} [(-1+\lambda) \theta 1 \left[\frac{3Y}{4} \right]] \right) + \\
&\quad \chi * \\
&\quad \left(\left(r2 \left[\frac{3Y}{4} \right] \right)^{(-1+\lambda)} \left(\operatorname{Cos} [(-1+\lambda) \theta 2 \left[\frac{3Y}{4} \right]] k21 \left[\frac{3Y}{4} \right] + \operatorname{Cos} [(-1+\lambda) \theta 2 \left[\frac{3Y}{4} \right]] m21 \left[\frac{3Y}{4} \right] - 2 \operatorname{Cos} [(-1+\lambda) \theta 2 \left[\frac{3Y}{4} \right]] n21 \left[\frac{3Y}{4} \right] - \right. \\
&\quad \left. k22 \left[\frac{3Y}{4} \right] \operatorname{Sin} [(-1+\lambda) \theta 2 \left[\frac{3Y}{4} \right]] - m22 \left[\frac{3Y}{4} \right] \operatorname{Sin} [(-1+\lambda) \theta 2 \left[\frac{3Y}{4} \right]] + 2 n22 \left[\frac{3Y}{4} \right] \operatorname{Sin} [(-1+\lambda) \theta 2 \left[\frac{3Y}{4} \right]] \right) \left. \right) \\
B12 &:= \\
&\quad \operatorname{Re} \left[\right. \\
&\quad \left(r2 \left[\frac{3Y}{4} \right] \right)^{(-1+\mu)} \left(\operatorname{Cos} [(-1+\mu) \theta 2 \left[\frac{3Y}{4} \right]] k21 \left[\frac{3Y}{4} \right] + \operatorname{Cos} [(-1+\mu) \theta 2 \left[\frac{3Y}{4} \right]] m21 \left[\frac{3Y}{4} \right] - 2 \operatorname{Cos} [(-1+\mu) \theta 2 \left[\frac{3Y}{4} \right]] n21 \left[\frac{3Y}{4} \right] - \right. \\
&\quad \left. k22 \left[\frac{3Y}{4} \right] \operatorname{Sin} [(-1+\mu) \theta 2 \left[\frac{3Y}{4} \right]] - m22 \left[\frac{3Y}{4} \right] \operatorname{Sin} [(-1+\mu) \theta 2 \left[\frac{3Y}{4} \right]] + 2 n22 \left[\frac{3Y}{4} \right] \operatorname{Sin} [(-1+\mu) \theta 2 \left[\frac{3Y}{4} \right]] \right) \left. \right) \\
B21 &:= \\
&\quad \operatorname{Re} \left[\right. \\
&\quad \left(r1 \left[\frac{3Y}{4} \right] \right)^{(-1+\lambda)} \left(\operatorname{Cos} [(-1+\lambda) \theta 1 \left[\frac{3Y}{4} \right]] k11 \left[\frac{3Y}{4} \right] - \operatorname{Cos} [(-1+\lambda) \theta 1 \left[\frac{3Y}{4} \right]] m11 \left[\frac{3Y}{4} \right] - k12 \left[\frac{3Y}{4} \right] \operatorname{Sin} [(-1+\lambda) \theta 1 \left[\frac{3Y}{4} \right]] + \right. \\
&\quad \left. m12 \left[\frac{3Y}{4} \right] \operatorname{Sin} [(-1+\lambda) \theta 1 \left[\frac{3Y}{4} \right]] \right) + \\
&\quad \chi \left(r2 \left[\frac{3Y}{4} \right] \right)^{(-1+\lambda)} \left(\operatorname{Cos} [(-1+\lambda) \theta 2 \left[\frac{3Y}{4} \right]] k21 \left[\frac{3Y}{4} \right] - \operatorname{Cos} [(-1+\lambda) \theta 2 \left[\frac{3Y}{4} \right]] m21 \left[\frac{3Y}{4} \right] - k22 \left[\frac{3Y}{4} \right] \operatorname{Sin} [(-1+\lambda) \theta 2 \left[\frac{3Y}{4} \right]] + \right. \\
&\quad \left. m22 \left[\frac{3Y}{4} \right] \operatorname{Sin} [(-1+\lambda) \theta 2 \left[\frac{3Y}{4} \right]] \right) \left. \right) \\
B22 &:= \\
&\quad \operatorname{Re} \left[\right. \\
&\quad \left(r2 \left[\frac{3Y}{4} \right] \right)^{(-1+\mu)} \left(\operatorname{Cos} [(-1+\mu) \theta 2 \left[\frac{3Y}{4} \right]] k21 \left[\frac{3Y}{4} \right] - \operatorname{Cos} [(-1+\mu) \theta 2 \left[\frac{3Y}{4} \right]] m21 \left[\frac{3Y}{4} \right] - k22 \left[\frac{3Y}{4} \right] \operatorname{Sin} [(-1+\mu) \theta 2 \left[\frac{3Y}{4} \right]] + \right. \\
&\quad \left. m22 \left[\frac{3Y}{4} \right] \operatorname{Sin} [(-1+\mu) \theta 2 \left[\frac{3Y}{4} \right]] \right) \left. \right) \\
A &:= \begin{pmatrix} A11 & A12 \\ A21 & A22 \end{pmatrix} \\
B &:= \begin{pmatrix} B11 & B12 \\ B21 & B22 \end{pmatrix}
\end{aligned}$$


```

m[1,1]=  $\beta_1 := 0.179948$ 
 $\beta_2 := 1.38929$ 
 $\rho := 1$ 
 $\alpha_0 := 1$ 
 $\alpha := \frac{\alpha_0 + \pi}{180}$ 
 $\gamma := \pi - \alpha$ 
 $q := \frac{2 + \gamma}{\pi}$ 
 $r_0 := \frac{q - 1}{q} * \rho$ 

m[1,2]=  $\lambda :=$ 
 $\lambda_0 /.$ 
FindRoot[
Cos[(1 -  $\lambda_0$ ) *  $\theta_{2i}$ ] * (Cos[(1 -  $\lambda_0$ )  $\theta_{1i}$ ] + (m11[ $\gamma$ ] * n21[ $\gamma$ ] - m21[ $\gamma$ ] + n11[ $\gamma$ ]) -
Sin[(1 -  $\lambda_0$ )  $\theta_{1i}$ ] * (m21[ $\gamma$ ] * n12[ $\gamma$ ] - m12[ $\gamma$ ] + n21[ $\gamma$ ])) -
Sin[(1 -  $\lambda_0$ ) *  $\theta_{2i}$ ] + (Cos[(1 -  $\lambda_0$ ) *  $\theta_{1i}$ ] + (m22[ $\gamma$ ] * n11[ $\gamma$ ] - m11[ $\gamma$ ] + n22[ $\gamma$ ]) -
Sin[(1 -  $\lambda_0$ ) *  $\theta_{1i}$ ] + (m12[ $\gamma$ ] * n22[ $\gamma$ ] - m22[ $\gamma$ ] + n12[ $\gamma$ ])) = 0, { $\lambda_0$ , 0.7}]

 $X := -\frac{\rho_1^{\lambda-1} (m11[\gamma] \cos[(1-\lambda) \theta_{1i}] + m12[\gamma] \sin[(1-\lambda) \theta_{1i}])}{\rho_2^{\lambda-1} (m21[\gamma] \cos[(1-\lambda) \theta_{2i}] + m22[\gamma] \sin[(1-\lambda) \theta_{2i}])}$ 
 $\rho_1 := \sqrt{\cos[\gamma]^2 + (\beta_1 + \sin[\gamma])^2}$ 
 $\rho_2 := \sqrt{\cos[\gamma]^2 + (\beta_2 + \sin[\gamma])^2}$ 
 $\theta_{1i} := \text{Arg}[\cos[\gamma] + i * \beta_1 + \sin[\gamma]]$ 
 $\theta_{2i} := \text{Arg}[\cos[\gamma] + i * \beta_2 + \sin[\gamma]]$ 
A2r :=  $X + A1r$ 

```

```

Clear[t,  $\mu$ ,  $\alpha_0$ ]
 $\alpha_0 := 30$ 
{s, g} = {t,  $\mu$ } /. Refine[FindRoot[{Det[A] = 0, Det[B] = 0}, {{t, 1.5}, { $\mu$ , -0.3}}, Element[t |  $\mu$ , Reals]]
 $\lambda$ 
 $X$ 
{t,  $\mu$ } = {s, g}
 $t_0 = \frac{2 - \frac{\log[-X]}{\log\left|\frac{\beta_1}{\beta_2}\right|}}{1 - \lambda}$ 
Solve[A11 +  $\phi_0$  + A12 = 0,  $\phi_0$ ]
Solve[B11 +  $\phi_0$  + B12 = 0,  $\phi_0$ ]
Det[A]

Clear[t,  $\mu$ ,  $\alpha_0$ ]
 $\alpha_0 := 45$ 
{s, g} = {t,  $\mu$ } /. Refine[FindRoot[{Det[A] = 0, Det[B] = 0}, {{t, 1.7}, { $\mu$ , 0.4}}, Element[t |  $\mu$ , Reals]]
 $\lambda$ 
 $X$ 
{t,  $\mu$ } = {s, g}
 $t_0 = \frac{2 - \frac{\log[-X]}{\log\left|\frac{\beta_1}{\beta_2}\right|}}{1 - \lambda}$ 
Solve[A11 +  $\phi_0$  + A12 = 0,  $\phi_0$ ]
Solve[B11 +  $\phi_0$  + B12 = 0,  $\phi_0$ ]
Det[A]

```

Codice Mathematica per calcolo coefficienti di Tab. e Tab. 3.2

```

z1[ϑ_] := r1[ϑ] * (Cos[ϑ1[ϑ]] + i * Sin[ϑ1[ϑ]])
z2[ϑ_] := r2[ϑ] * (Cos[ϑ2[ϑ]] + i * Sin[ϑ2[ϑ]])

ϕ1[ϑ_] := z1[ϑ]^(λ-1)
ϕ2[ϑ_] := A2r * z2[ϑ]^(λ-1) + B2r * z2[ϑ]^(μ-1)
σr[ϑ_] := 2 * Re[(k11[ϑ] + i * k12[ϑ]) * ϕ1[ϑ] + (k21[ϑ] + i * k22[ϑ]) * ϕ2[ϑ]]
σθ[ϑ_] := 2 * Re[(m11[ϑ] + i * m12[ϑ]) * ϕ1[ϑ] + (m21[ϑ] + i * m22[ϑ]) * ϕ2[ϑ]]
τrθ[ϑ_] := 2 * Re[(n11[ϑ] + i * n12[ϑ]) * ϕ1[ϑ] + (n21[ϑ] + i * n22[ϑ]) * ϕ2[ϑ]]
σu[ϑ_] := (σr[ϑ] + σθ[ϑ]) / 2 + (σr[ϑ] - σθ[ϑ]) / 2 * Cos[2 * ϑ / q] - τrθ[ϑ] * Sin[2 * ϑ / q]
σv[ϑ_] := (σr[ϑ] + σθ[ϑ]) / 2 - (σr[ϑ] - σθ[ϑ]) / 2 * Cos[2 * ϑ / q] + τrθ[ϑ] * Sin[2 * ϑ / q]
τuv[ϑ_] := (σr[ϑ] - σθ[ϑ]) / 2 * Sin[2 * ϑ / q] + τrθ[ϑ] * Cos[2 * ϑ / q]

in[ϑ] := x[ϑ_] := r[ϑ] * Cos[ϑ]
y[ϑ_] := r[ϑ] * Sin[ϑ]
r[ϑ_] := r0 * Cos[ϑ / q]^(-q)

x0[ϑ_] := x[ϑ] - r0
ξ1[ϑ_] := x0[ϑ] + r0 * β1^t
ξ2[ϑ_] := x0[ϑ] + r0 * β2^t
η1[ϑ_] := β1 * y[ϑ]
η2[ϑ_] := β2 * y[ϑ]
r1[ϑ_] := Abs[ξ1[ϑ] + i * η1[ϑ]]
r2[ϑ_] := Abs[ξ2[ϑ] + i * η2[ϑ]]
k11[ϑ_] := Sin[ϑ]^2 - (β1 * Cos[ϑ])^2
k12[ϑ_] := -2 * β1 * Sin[ϑ] * Cos[ϑ]
k21[ϑ_] := Sin[ϑ]^2 - (β2 * Cos[ϑ])^2
k22[ϑ_] := -2 * β2 * Sin[ϑ] * Cos[ϑ]
m11[ϑ_] := Cos[ϑ]^2 - (β1 * Sin[ϑ])^2
m12[ϑ_] := 2 * β1 * Sin[ϑ] * Cos[ϑ]
m21[ϑ_] := Cos[ϑ]^2 - (β2 * Sin[ϑ])^2
m22[ϑ_] := 2 * β2 * Sin[ϑ] * Cos[ϑ]
n11[ϑ_] := 1/2 * Sin[2 * ϑ] * (1 + β1^2)
n12[ϑ_] := -β1 * Cos[2 * ϑ]
n21[ϑ_] := 1/2 * Sin[2 * ϑ] * (1 + β2^2)
n22[ϑ_] := -β2 * Cos[2 * ϑ]
ϑ1[ϑ_] := Arg[ξ1[ϑ] + i * η1[ϑ]]
ϑ2[ϑ_] := Arg[ξ2[ϑ] + i * η2[ϑ]]

in[ϑ] := β1 := 0.179948
β2 := 1.38929
ρ := 1
α0 := 30
α := (α0 + π) / 180
γ := π - α
q := (2 + γ) / π
r0 := (q - 1) / q * ρ

```

```

in[ ]:= Clear[α0]
α0 := 30
Refine[FindRoot[{σu[θ] = 0, τuv[ $\frac{20 * \pi}{180}$ ] = 0, σu[ $\frac{40 * \pi}{180}$ ] = 0, τuv[ $\frac{60 * \pi}{180}$ ] = 0, σu[ $\frac{80 * \pi}{180}$ ] = 0},
  {{t, 1.6}, {λ, 0.5}, {μ, -0.2}, {A2r, -0.3}, {B2r, 0.4}}, MaxIterations → 10000, WorkingPrecision → 10],
  t > 0.1 && λ > 0.1 && λ > (μ + 0.1)]

```

```

in[ ]:= Clear[α0]
α0 := 45
Refine[FindRoot[{σu[θ] = 0, τuv[ $\frac{20 * \pi}{180}$ ] = 0, σu[ $\frac{40 * \pi}{180}$ ] = 0, τuv[ $\frac{60 * \pi}{180}$ ] = 0, σu[ $\frac{80 * \pi}{180}$ ] = 0},
  {{t, 1.6}, {λ, 0.5}, {μ, -0.1}, {A2r, 1}, {B2r, 0.1}}, MaxIterations → 10000, WorkingPrecision → 10],
  t > 0.1 && λ > 0.1 && λ > (μ + 0.1)]

```

```

in[ ]:= Clear[α0]
α0 := 67.5
Refine[FindRoot[{σu[θ] = 0, τuv[ $\frac{20 * \pi}{180}$ ] = 0, σu[ $\frac{40 * \pi}{180}$ ] = 0, τuv[ $\frac{60 * \pi}{180}$ ] = 0, σu[ $\frac{80 * \pi}{180}$ ] = 0},
  {{t, 1.3}, {λ, 0.5}, {μ, -3}, {A2r, -0.1}, {B2r, 1}}, MaxIterations → 10000, WorkingPrecision → 10],
  t > 0.1 && λ > 0.1 && λ > (μ + 0.1)]

```

Codice Mathematica per calcolo coefficienti di Tab. 3.3, Tab. 3.4, Tab. 4.3 e Tab. 6.3

```

z1[ϑ_] := r1[ϑ] * (Cos[ϑ1[ϑ]] + i * Sin[ϑ1[ϑ]])
z2[ϑ_] := r2[ϑ] * (Cos[ϑ2[ϑ]] + i * Sin[ϑ2[ϑ]])

ϕ1[ϑ_] := z1[ϑ]^λ-1 + B1r * z1[ϑ]^μ-1
ϕ2[ϑ_] := A2r * z2[ϑ]^λ-1 + B2r * z2[ϑ]^μ-1 + C2r * z2[ϑ]^ν-1
σr[ϑ_] := 2 * Re[(k11[ϑ] + i * k12[ϑ]) * ϕ1[ϑ] + (k21[ϑ] + i * k22[ϑ]) * ϕ2[ϑ]]
σθ[ϑ_] := 2 * Re[(m11[ϑ] + i * m12[ϑ]) * ϕ1[ϑ] + (m21[ϑ] + i * m22[ϑ]) * ϕ2[ϑ]]
τrθ[ϑ_] := 2 * Re[(n11[ϑ] + i * n12[ϑ]) * ϕ1[ϑ] + (n21[ϑ] + i * n22[ϑ]) * ϕ2[ϑ]]
σu[ϑ_] := (σr[ϑ] + σθ[ϑ]) / 2 + (σr[ϑ] - σθ[ϑ]) / 2 * Cos[2 * ϑ / q] - τrθ[ϑ] * Sin[2 * ϑ / q]
σv[ϑ_] := (σr[ϑ] + σθ[ϑ]) / 2 - (σr[ϑ] - σθ[ϑ]) / 2 * Cos[2 * ϑ / q] + τrθ[ϑ] * Sin[2 * ϑ / q]
τuv[ϑ_] := (σr[ϑ] - σθ[ϑ]) / 2 * Sin[2 * ϑ / q] + τrθ[ϑ] * Cos[2 * ϑ / q]

In[ ]:= x[ϑ_] := r[ϑ] * Cos[ϑ]
y[ϑ_] := r[ϑ] * Sin[ϑ]
r[ϑ_] := r0 * Cos[ϑ / q]^q
x0[ϑ_] := x[ϑ] - r0
ξ1[ϑ_] := x0[ϑ] + r0 * β1^t
ξ2[ϑ_] := x0[ϑ] + r0 * β2^t
η1[ϑ_] := β1 * y[ϑ]
η2[ϑ_] := β2 * y[ϑ]
r1[ϑ_] := Abs[ξ1[ϑ] + i * η1[ϑ]]
r2[ϑ_] := Abs[ξ2[ϑ] + i * η2[ϑ]]
k11[ϑ_] := Sin[ϑ]^2 - (β1 * Cos[ϑ])^2
k12[ϑ_] := -2 * β1 * Sin[ϑ] * Cos[ϑ]
k21[ϑ_] := Sin[ϑ]^2 - (β2 * Cos[ϑ])^2
k22[ϑ_] := -2 * β2 * Sin[ϑ] * Cos[ϑ]
m11[ϑ_] := Cos[ϑ]^2 - (β1 * Sin[ϑ])^2
m12[ϑ_] := 2 * β1 * Sin[ϑ] * Cos[ϑ]
m21[ϑ_] := Cos[ϑ]^2 - (β2 * Sin[ϑ])^2
m22[ϑ_] := 2 * β2 * Sin[ϑ] * Cos[ϑ]
n11[ϑ_] := 1/2 * Sin[2 * ϑ] * (1 + β1^2)
n12[ϑ_] := -β1 * Cos[2 * ϑ]
n21[ϑ_] := 1/2 * Sin[2 * ϑ] * (1 + β2^2)
n22[ϑ_] := -β2 * Cos[2 * ϑ]
ϑ1[ϑ_] := Arg[ξ1[ϑ] + i * η1[ϑ]]
ϑ2[ϑ_] := Arg[ξ2[ϑ] + i * η2[ϑ]]

In[ ]:= β1 := 0.179948
β2 := 1.38929
ρ := 1
α0 := 30
α := (α0 + π) / 100
γ := π - α
q := π / (2 + γ)
r0 := (q - 1) / q * ρ

```

```

Refine[FindRoot[{ $\sigma u[\theta] = 0$ ,  $\tau uv\left[\frac{20 * \pi}{180}\right] = 0$ ,  $\sigma u\left[\frac{30 * \pi}{180}\right] = 0$ ,  $\tau uv\left[\frac{50 * \pi}{180}\right] = 0$ ,  $\sigma u\left[\frac{70 * \pi}{180}\right] = 0$ ,  $\tau uv\left[\frac{80 * \pi}{180}\right] = 0$ ,
 $\sigma u\left[\frac{90 * \pi}{180}\right] = 0$ ,  $\tau uv\left[\frac{100 * \pi}{180}\right] = 0$ }, {{t, 1.6}, {λ, 0.5}, {μ, -0.2}, {A2r, -1}, {B2r, -0.1}, {B1r, -0.1}, {ε, -0.1}, {C2r, -0.1}},
MaxIterations → 10000, WorkingPrecision → 100], t > 0.1 && λ > 0.1 && λ > μ]

```

```
Clear[α0]
```

```
α0 := 45
```

```

Refine[FindRoot[{ $\sigma u[\theta] = 0$ ,  $\tau uv\left[\frac{20 * \pi}{180}\right] = 0$ ,  $\sigma u\left[\frac{30 * \pi}{180}\right] = 0$ ,  $\tau uv\left[\frac{50 * \pi}{180}\right] = 0$ ,  $\sigma u\left[\frac{70 * \pi}{180}\right] = 0$ ,  $\tau uv\left[\frac{80 * \pi}{180}\right] = 0$ ,
 $\sigma u\left[\frac{90 * \pi}{180}\right] = 0$ ,  $\tau uv\left[\frac{100 * \pi}{180}\right] = 0$ }, {{t, 1.6}, {λ, 0.5}, {μ, 0.2}, {A2r, 1}, {B2r, 0.1}, {B1r, 0.1}, {ε, 0.1}, {C2r, 0.1}},
MaxIterations → 10000, WorkingPrecision → 10], t > 0.1 && λ > 0.1 && λ > μ]

```

```
Clear[α0]
```

```
α0 := 67.5
```

```

Refine[FindRoot[{ $\sigma u[\theta] = 0$ ,  $\tau uv\left[\frac{20 * \pi}{180}\right] = 0$ ,  $\sigma u\left[\frac{30 * \pi}{180}\right] = 0$ ,  $\tau uv\left[\frac{50 * \pi}{180}\right] = 0$ ,  $\sigma u\left[\frac{70 * \pi}{180}\right] = 0$ ,  $\tau uv\left[\frac{80 * \pi}{180}\right] = 0$ ,
 $\sigma u\left[\frac{90 * \pi}{180}\right] = 0$ ,  $\tau uv\left[\frac{100 * \pi}{180}\right] = 0$ }, {{t, 1.6}, {λ, 0.5}, {μ, 0.2}, {A2r, 1}, {B2r, 0.1}, {B1r, 0.1}, {ε, 0.1}, {C2r, 0.1}},
MaxIterations → 10000, WorkingPrecision → 10], t > 0.1 && λ > 0.1 && λ > μ]

```

Appendice B

Coefficienti della matrice $[b_{ij}^w]$ in Eq. 119

$$\begin{aligned}
b_{11}^w &= [\rho_1^1(\gamma)]^{\lambda_w-1} [m_{11}^1(\gamma) \cos(1 - \lambda_w)\theta_1^1(\gamma) + m_{12}^1(\gamma) \sin(1 - \lambda_w)\theta_1^1(\gamma)] \\
b_{12}^w &= [\rho_1^1(\gamma)]^{\lambda_w-1} [m_{12}^1(\gamma) \cos(1 - \lambda_w)\theta_1^1(\gamma) - m_{11}^1(\gamma) \sin(1 - \lambda_w)\theta_1^1(\gamma)] \\
b_{13}^w &= [\rho_1^1(\gamma)]^{\lambda_w-1} [m_{21}^1(\gamma) \cos(1 - \lambda_w)\theta_2^1(\gamma) + m_{22}^1(\gamma) \sin(1 - \lambda_w)\theta_2^1(\gamma)] \\
b_{14}^w &= [\rho_2^1(\gamma)]^{\lambda_w-1} [m_{22}^1(\gamma) \cos(1 - \lambda_w)\theta_2^1(\gamma) - m_{21}^1(\gamma) \sin(1 - \lambda_w)\theta_2^1(\gamma)] \\
b_{21}^w &= [\rho_1^1(\gamma)]^{\lambda_w-1} [n_{11}^1(\gamma) \cos(1 - \lambda_w)\theta_1^1(\gamma) + n_{12}^1(\gamma) \sin(1 - \lambda_w)\theta_1^1(\gamma)] \\
b_{22}^w &= [\rho_1^1(\gamma)]^{\lambda_w-1} [n_{12}^1(\gamma) \cos(1 - \lambda_w)\theta_1^1(\gamma) - n_{11}^1(\gamma) \sin(1 - \lambda_w)\theta_1^1(\gamma)] \\
b_{23}^w &= [\rho_2^1(\gamma)]^{\lambda_w-1} [n_{21}^1(\gamma) \cos(1 - \lambda_w)\theta_2^1(\gamma) + n_{22}^1(\gamma) \sin(1 - \lambda_w)\theta_2^1(\gamma)] \\
b_{24}^w &= [\rho_2^1(\gamma)]^{\lambda_w-1} [n_{22}^1(\gamma) \cos(1 - \lambda_w)\theta_2^1(\gamma) - n_{21}^1(\gamma) \sin(1 - \lambda_w)\theta_2^1(\gamma)] \\
b_{35}^w &= [\rho_1^2(-\gamma)]^{\lambda_w-1} [m_{11}^2(-\gamma) \cos(1 - \lambda_w)\theta_1^2(-\gamma) + m_{12}^2(-\gamma) \sin(1 - \lambda_w)\theta_1^2(-\gamma)] \\
b_{36}^w &= [\rho_1^2(-\gamma)]^{\lambda_w-1} [m_{12}^2(-\gamma) \cos(1 - \lambda_w)\theta_1^2(-\gamma) - m_{11}^2(-\gamma) \sin(1 - \lambda_w)\theta_1^2(-\gamma)] \\
b_{37}^w &= [\rho_2^2(-\gamma)]^{\lambda_w-1} [m_{21}^2(-\gamma) \cos(1 - \lambda_w)\theta_2^2(-\gamma) + m_{22}^2(-\gamma) \sin(1 - \lambda_w)\theta_2^2(-\gamma)] \\
b_{38}^w &= [\rho_2^2(-\gamma)]^{\lambda_w-1} [m_{22}^2(-\gamma) \cos(1 - \lambda_w)\theta_2^2(-\gamma) - m_{21}^2(-\gamma) \sin(1 - \lambda_w)\theta_2^2(-\gamma)] \\
b_{45}^w &= [\rho_1^2(-\gamma)]^{\lambda_w-1} [n_{11}^2(-\gamma) \cos(1 - \lambda_w)\theta_1^2(-\gamma) + n_{12}^2(-\gamma) \sin(1 - \lambda_w)\theta_1^2(-\gamma)] \\
b_{46}^w &= [\rho_1^2(-\gamma)]^{\lambda_w-1} [n_{12}^2(-\gamma) \cos(1 - \lambda_w)\theta_1^2(-\gamma) - n_{11}^2(-\gamma) \sin(1 - \lambda_w)\theta_1^2(-\gamma)] \\
b_{47}^w &= [\rho_2^2(-\gamma)]^{\lambda_w-1} [n_{21}^2(-\gamma) \cos(1 - \lambda_w)\theta_2^2(-\gamma) + n_{22}^2(-\gamma) \sin(1 - \lambda_w)\theta_2^2(-\gamma)] \\
b_{48}^w &= [\rho_2^2(-\gamma)]^{\lambda_w-1} [n_{22}^2(-\gamma) \cos(1 - \lambda_w)\theta_2^2(-\gamma) - n_{21}^2(-\gamma) \sin(1 - \lambda_w)\theta_2^2(-\gamma)] \\
b_{51}^w &= 1 \quad b_{52}^w = 0 \quad b_{53}^w = 1 \quad b_{54}^w = 0 \\
b_{55}^w &= -1 \quad b_{56}^w = 0 \quad b_{57}^w = -1 \quad b_{58}^w = 0 \\
b_{61}^w &= \alpha_1^1 \quad b_{62}^w = -\beta_1^1 \quad b_{63}^w = \alpha_2^1 \quad b_{64}^w = -\beta_2^1 \\
b_{65}^w &= -\alpha_1^2 \quad b_{66}^w = \beta_1^2 \quad b_{67}^w = -\alpha_2^2 \quad b_{68}^w = \beta_2^2 \\
b_{71}^w &= B_{11}^1 [\alpha_1^{1^2} - \beta_1^{1^2}] - B_{16}^1 \alpha_1^1 + B_{12}^1 \\
b_{72}^w &= 2\alpha_1^1 \beta_1^1 B_{11}^1 - B_{16}^1 \beta_1^1 \\
b_{73}^w &= B_{11}^1 [\alpha_2^{1^2} - \beta_2^{1^2}] - B_{16}^1 \alpha_2^1 + B_{12}^1 \\
b_{74}^w &= 2\alpha_2^1 \beta_2^1 B_{11}^1 - B_{16}^1 \beta_2^1 \\
b_{75}^w &= -B_{11}^2 [\alpha_1^{2^2} - \beta_1^{2^2}] + B_{16}^2 \alpha_1^2 - B_{12}^2 \\
b_{76}^w &= -2\alpha_1^2 \beta_1^2 B_{11}^2 + B_{16}^2 \beta_1^2 \\
b_{77}^w &= -B_{11}^2 [\alpha_2^{2^2} - \beta_2^{2^2}] + B_{16}^2 \alpha_2^2 - B_{12}^2 \\
b_{78}^w &= -2\alpha_2^2 \beta_2^2 B_{11}^2 + B_{16}^2 \beta_2^2 \\
b_{81}^w &= B_{12}^1 \alpha_1^1 - B_{26}^1 + \frac{B_{22}^1 \alpha_1^1}{\alpha_1^{1^2} + \beta_1^{1^2}}
\end{aligned}$$

$$b_{82}^w = B_{12}^1 \beta_1^1 - \frac{B_{22}^1 \beta_1^1}{\alpha_1^{1^2} + \beta_1^{1^2}}$$

$$b_{83}^w = B_{12}^1 \alpha_2^1 - B_{26}^1 + \frac{B_{22}^1 \alpha_2^1}{\alpha_2^{1^2} + \beta_2^{1^2}}$$

$$b_{84}^w = B_{12}^1 \beta_2^1 - \frac{B_{22}^1 \beta_2^1}{\alpha_2^{1^2} + \beta_2^{1^2}}$$

$$b_{85}^w = -B_{12}^2 \alpha_1^2 + B_{26}^2 - \frac{B_{22}^2 \alpha_1^2}{\alpha_1^{2^2} + \beta_1^{2^2}}$$

$$b_{86}^w = -B_{12}^2 \beta_1^2 + \frac{B_{22}^2 \beta_1^2}{\alpha_1^{2^2} + \beta_1^{2^2}}$$

$$b_{87}^w = -B_{12}^2 \alpha_2^2 + B_{26}^2 - \frac{B_{22}^2 \alpha_2^2}{\alpha_2^{2^2} + \beta_2^{2^2}}$$

$$b_{88}^w = -B_{12}^2 \beta_2^2 + \frac{B_{22}^2 \beta_2^2}{\alpha_2^{2^2} + \beta_2^{2^2}}$$

Bibliografia

1. Berto, F. and Lazzarin, P. (2009) A review of the volume-based strain energy density approach applied to V-notches and welded structures. *Theor. Appl. Fract. Mech.*, 52, 183–194.
2. Carraro, P. A., Meneghetti, G., Quaresimin, M. and Ricotta, M. (2013) Crack propagation analysis in composite bonded joints under mixed-mode (I + II) static and fatigue loading: a damage based model. *J. Adhes. Sci. Technol.*, 27, 1393–1406.
3. Radaj, D. (2015) State-of-the-art review on the local strain energy density concept and its relation to the J-integral and peak stress method. *Fatigue Fract. Eng. Mater. Struct.*, 38, 2–28.
4. M.H.Sadd (2009) *Elasticity Theory, Applications, and Numerics*, Burlington USA
5. Neuber, H. (1958) *Theory of Notch Stresses*, Springer-Verlag: Berlin, Germany.
6. Ayatollahi, M. R., Torabi, A. R. and Rahimi, A. S. (2016) Brittle fracture assessment of engineering components in the presence of notches: a review. *Fatigue Fract. Eng. Mater. Struct.*, 39, 267–291
7. P.Lazzarin and R.Tovo (1996) A Unified approach to the evaluation of linear elastic stress fields in the neighbourhood of cracks and notches, *International Journal of Fracture* 78, 7
8. Zappalorto, M., Lazzarin, P. and Filippi, S. (2010) Stress field equations for U and blunt V-shaped notches in axisymmetric shafts under torsion. *Int. J. Fract.*, 164, 253–269
9. Bonora, N., Costanzi, M. and Marchetti, M. (1993) On closed form solution for the elastic stress field around holes in orthotropic composite plates under in-plane stress conditions. *Compos. Struct.*, 25, 139–156.
10. Lekhnitskii, S. G. (1984) *Theory of Elasticity of an Anisotropic Body*, Mir Publishers: Moskow
11. Ukadgaonker, V. G. and Kakhandki, V. (2005) Stress analysis for an orthotropic plate with an irregular shaped hole for different in-plane loading conditions—Part I. *Compos. Struct.*, 70, 255–274.
12. Chern, S. M. and Tuttle, M. E. (2000) On displacement fields in orthotropic laminates containing an elliptical hole. *J. Appl. Mech.*, 67, 527–539.
13. Sih, G. C., Paris, P. C. and Irwin, G. R. (1965) On cracks in rectilinearly anisotropic bodies. *Int. J. Fract. Mech.*, 1, 189–203

14. Lazzarin, P., Zappalorto, M. and Berto, F. (2015) Three-dimensional stress fields due to notches in plates under linear elastic and elastic–plastic conditions. *Fatigue Fract. Eng. Mater. Struct.*, 38, 140–153
15. Zappalorto, M. On the stress state in rectilinear anisotropic thick plates with blunt cracks. *Fatigue Fract. Eng. Mater. Struct.* DOI:10.1111/ffe.12479.
16. Zappalorto, M. and Carraro, P. A. (2015) Stress distributions for blunt cracks and radiused slits in anisotropic plates under inplane loadings. *Int. J. Solids Struct.*, 56–57, 136–141
17. M. Zappalorto and P. A. Carraro (2017) Two-dimensional stress distributions in tensioned orthotropic plates weakened by blunt V-shaped notches, *Fatigue & Fracture of Engineering Materials & Structures* 40; 806, 809-810
18. Zappalorto M., Salviato M. (2019) Antiplane shear stresses in orthotropic plates with lateral blunt notches, *European Journal of Mechanics / A Solids*, Volume 77.
19. Sih, G. C., Paris, P. C. and Irwin, G. R. (1965) On cracks in rectilinearly anisotropic bodies. *Int. J. Fract. Mech.*, 1, 189–203.
20. Timoshenko, S. P. and Goodier, J. N. (1970) *Theory of Elasticity*, 3rd ed, McGraw-Hill: New York.
21. Atzori, B., Lazzarin, P. and Meneghetti, G. (2003) Fracture mechanics and notch sensitivity. *Fatigue Fract. Eng. Mater. Struct.*, 26, 257–267.
22. Salviato M., Zappalorto M (2016) A unified solution approach for a large variety of antiplane shear and torsion notch problems; Theory and examples, *International Journal of Solids and Structures*, Volumes 102-103, 10-20.
23. Gallo P., Berto F. Glinka G. (2016) V-notched Components under non-localized creeping condition: numerical evaluation of stresses and strain, “1st European Conference on Fracture, ECF21, 20-24 June 2016, Catania Italy
24. Zappalorto M, Carraro P.A., Quaresimin M. (2015) Analytical solution for the three-dimensional stress fields in anisotropic composite biomaterial corners, *Composite Structures* 122 127–138
25. C.-H. Chue, S.-M. Weng (2002) Stress singularities in anisotropic three-material wedges and junctions with applications, *Composite Structures* 58 443–456

Ringraziamenti

Vorrei infine ringraziare tutte le persone che hanno reso questo percorso possibile.

Innanzitutto ringrazio il mio relatore prof. Michele Zappalorto, per la fiducia accordatami ma soprattutto per la sua guida e disponibilità durante questo progetto. Il suo contributo è stato fondamentale per portare a termine questa ricerca e la sua passione è stata per me grande fonte di ispirazione.

Ringrazio la mia famiglia che mi ha sostenuto lungo tutto il mio percorso accademico, aiutandomi e supportandomi in ogni decisione presa, a dispetto di quanto azzardata possa essere stata. Il loro sostegno mi ha permesso di intraprendere strade difficili che mi hanno fatto crescere e trovare fiducia in me stesso.

Ringrazio la mia fidanzata Elisa che è stata al mio fianco in questi anni con infinita pazienza, aiutandomi a superare periodi difficili. Senza la sua presenza non sarei mai diventato la persona che sono ora.