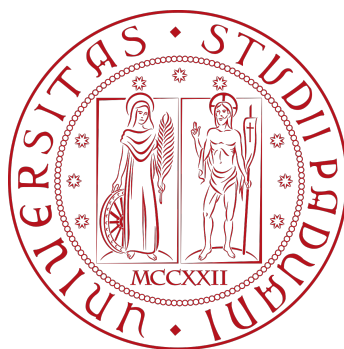


Università degli Studi di Padova
Dipartimento di Scienze Statistiche
Corso di Laurea Magistrale in
Scienze Statistiche



**Il ruolo di staleness e trade inaction nella stima
dei momenti realizzati: implicazione nel mercato
delle criptovalute**

Relatore: prof. Massimiliano Caporin
Dipartimento di Scienze Statistiche

Laureando: Filippo Garrò
Matricola 2129898

Anno Accademico 2025/2026

dedica

Indice

Introduzione	1
1 Contesto operativo ed analisi esplorative	3
1.1 Mercato delle criptovalute e descrizione del dataset	3
1.2 Analisi esplorative sui rendimenti giornalieri e ad alta frequenza	5
1.3 Definizioni di price staleness e trade inaction	23
2 Momenti realizzati	27
2.1 Definizioni dei momenti realizzati	27
2.2 Distorsioni e problemi degli stimatori dei momenti realizzati	30
2.3 Metodi di correzione degli stimatori	32
2.4 Analisi grafiche delle differenze tra stimatori classici e corretti	34
3 Studio della componente di salto	49
3.1 Inquadramento teorico e scomposizione della varianza realizzata	49
3.2 Test BNS per la rilevazione dei salti giornalieri	52
3.3 Test LM (Lee-Mykland) per salti intragiornalieri	56
3.4 Analisi delle differenze tra stimatori classici e corretti	60
4 Previsione basata su modelli HAR	77
4.1 Struttura del modello HAR	77
4.2 Stima dei modelli e confronto tra diverse specificazioni	84
4.3 Valutazione delle previsioni e scelta del modello ottimale	90
Conclusioni	99

Introduzione

L'analisi presentata in questo elaborato si propone di valutare in che misura le correzioni applicate alla stima dei momenti realizzati siano in grado di mitigare le distorsioni e le criticità che emergono quando tali stimatori vengono impiegati su dati ad alta frequenza. L'attenzione è rivolta in particolare ai dati provenienti dal mercato delle criptovalute, caratterizzati dalla presenza di fenomeni di price staleness e trade inaction, che possono compromettere la qualità delle stime e alterare l'interpretazione dei risultati empirici.

In una prima fase verranno introdotte le criptovalute considerate nel presente lavoro, delineandone le principali caratteristiche, mediante analisi esplorative e motivando la loro inclusione nel dataset analizzato. Si passa poi alla caratterizzazione della distinzione tra price staleness e trade inaction dando la definizione dei due fenomeni e valutando come impattano i dati a disposizione.

Successivamente si procede con un'analisi teorica dell'entità e della direzione delle distorsioni che affliggono i tradizionali stimatori dei momenti realizzati, in particolare varianza, asimmetria e curtosi, quando vengono calcolati su dati ad alta frequenza. Verranno quindi presentate due possibili metodi di correzione per gli stimatori dei momenti realizzati: la prima basata su una diversa definizione della griglia temporale delle osservazioni, che da regolare diventa intermittente; la seconda basata sull'introduzione di una soglia nel calcolo degli stimatori.

Per ciascun momento realizzato si analizzerà innanzitutto, attraverso analisi esplorative condotte sugli stimatori classici, in che modo i fenomeni di price staleness e trade inaction generino distorsioni nei diversi momenti, alterandone il comportamento rispetto alle proprietà teoriche attese. Parallelamente, mediante un confronto sistematico tra stimatori tradizionali e versioni corrette, si valuterà se e in quale misura le correzioni proposte siano in grado di attenuare tali distorsioni, ricondurre le stime verso i valori asintotici teoricamente previsti e ristabilire coerenza tra evidenza empirica e fondamenti teorici.

In una fase successiva si procederà, per ciascuna criptovaluta considerata, a una valutazione preliminare del comportamento dei test per l'identificazione dei salti nei prezzi, in particolare il test BNS e il test LM, quando costruiti a partire dagli stimatori tradizionali. In primo luogo si analizzerà se e in quale misura tali test risultino distorti in presenza di fenomeni di price staleness e trade inaction, verificando eventuali deviazioni dalla distribuzione asintotica normale standard teoricamente prevista.

Successivamente si esaminerà il comportamento dei medesimi test quando fondati sugli stimatori corretti, al fine di valutare se l'introduzione delle correzioni consenta di attenuare le distorsioni precedentemente riscontrate. Si verificherà pertanto se tali interventi risultino efficaci nel ricondurre le statistiche test verso le proprietà asintotiche teoriche e se contribuiscano a migliorare la capacità di jump detection, rendendola più robusta e precisa. Infine, con riferimento alle differenze osservate tra le criptovalute, si analizzerà come le correzioni operino in contesti caratterizzati da diversa intensità dei fenomeni di staleness e trade inaction, valutando se esse riescano a produrre, in ciascuna situazione, un miglioramento coerente delle proprietà inferenziali dei test.

Infine, verrà condotta un'analisi delle performance previsive ottenute mediante modelli HAR e loro estensioni, costruiti usando i momenti realizzati e arricchiti con una componente legata agli effetti dei giorni della settimana e al segno dei rendimenti. L'obiettivo sarà quello di verificare se l'utilizzo degli stimatori corretti consenta di ottenere previsioni più accurate rispetto a quelle basate sugli stimatori tradizionali, nonché individuare, per ciascuna criptovaluta, il modello previsivo più performante attraverso il confronto effettuato mediante il Model Confidence Set.

Capitolo 1

Contesto operativo ed analisi esplorative

1.1 Mercato delle criptovalute e descrizione del dataset

Negli ultimi anni il mercato delle criptovalute ha conosciuto una crescita considerevole accompagnata dall'emergere di un elevato numero di token. Tuttavia, molti di essi, presentano volumi di scambio ridotti e una quota di mercato marginale, risultando quindi poco adatti a rappresentare in modo affidabile le dinamiche di questo settore. Considerata questa eterogeneità si è scelto di focalizzare l'analisi sulle criptovalute maggiormente rilevanti e scambiate; così da garantire che i risultati ottenuti siano effettivamente rappresentativi dell'andamento complessivo del mercato.

Questa scelta è stata guidata anche dall'assenza di contributi accademici che affrontino in modo specifico le tematiche centrali di questo elaborato, in particolare gli effetti di price staleness e trade inaction sui rendimenti nei mercati delle criptovalute. La letteratura esistente analizza in modo esteso tali fenomeni nel mercato azionario; dove l'introduzione di stimatori corretti ha dimostrato di migliorare in modo significativo la qualità delle stime e delle previsioni. Pertanto, l'obiettivo di questo lavoro è verificare se analoghi benefici siano riscontrabili anche nel contesto delle criptovalute data la crescente importanza di questo mercato e la sua peculiare struttura di microstruttura.

Per la selezione degli asset da analizzare si è fatto riferimento al provider dei dati utilizzati CoinDesk, che mette a disposizione il CoinDesk 20 un indice ampiamente adottato dai principali market-maker. Tale indice copre circa l'80% dell'intero

mercato delle criptovalute rappresentandone in modo efficace la struttura e la composizione. A partire da questo indice sono state selezionate le cinque criptovalute con il peso maggiore: Bitcoin, Ethereum, Solana, XRP e Cardano. Insieme, questi asset, rappresentano circa l'88% del peso complessivo dell'indice e costituiscono quindi un campione altamente rappresentativo dell'attuale mercato delle criptovalute. L'analisi condotta su queste cinque criptovalute permette di valutare se le correzioni proposte nella letteratura sui momenti realizzati producano miglioramenti sostanziali anche in un contesto caratterizzato da dinamiche e livelli di liquidità profondamente differenti.

Definite le criptovalute di interesse i dati utilizzati sono stati ottenuti tramite la DataAPI messa a disposizione da CoinDesk. Tale servizio consente di scaricare, per ciascuna delle cinque criptovalute selezionate, un dataset di tipo OHLC_Trade, che include i prezzi in EURO di apertura, massimo, minimo e chiusura, oltre a diverse misure relative all'attività del mercato: total_trades, ovvero il numero totale di scambi che sono avvenuti in ogni intervallo, total_trades_buy, totale degli scambi per acquisti in ogni intervallo, total_trades_sell, totale degli scambi in vendita per ogni intervallo. Le informazioni sono fornite con frequenza di un minuto e coprono l'intero periodo compreso tra l'8° ottobre 2023 e il 7 ottobre 2025, garantendo così la disponibilità di due anni completi, 730 giorni, di dati ad alta frequenza, costituiti da intervalli regolari della durata di 1 minuto. Perciò il dataset finale per ciascuna delle cinque criptovalute è una matrice di 1.051.200 righe e 8 colonne.

È opportuno sottolineare che un numero di righe così elevato è dovuto ad una peculiarità del mercato delle criptovalute, ossia la possibilità di effettuare scambi ininterrottamente, sette giorni su sette e ventiquattro ore su ventiquattro. Questa caratteristica implica che ogni giornata di negoziazione sia composta da 1 440 intervalli temporali da un minuto confermando come i dati analizzati rappresentino un volume informativo estremamente elevato e quindi appartenente alla categoria dei dati ad alta frequenza.

Si assume che il processo del log-prezzo efficiente X_t^e sia una semimartingala browniana, che evolve secondo

$$X_t^e = X_0^e + \int_0^t \mu_s ds + \int_0^t \sigma_s dW_s. \quad (1.1)$$

Il processo della volatilità σ_t soddisfa invece la dinamica

$$\sigma_t = \sigma_0 + \int_0^t \mu_s^* ds + \int_0^t \sigma_s^* dW_s + \int_0^t \nu_s^* dV_s, \quad (1.2)$$

dove W_t e V_t sono moti browniani indipendenti, e $\mu, \mu^*, \sigma^*, \nu^*$ sono processi adattati e limitati. Le osservazioni vengono registrate su una griglia equispaziata $t_i = i\Delta_n$, $i = 0, \dots, n$, composta da $n + 1$ punti che partizionano un intervallo fissato $[0, T]$, con distanza $\Delta_n = T/n$.

La presenza di price staleness è introdotta come fatto dal modello di Bandi, Pirino et al. (2017), assumendo che il log-prezzo osservato soddisfi questa equazione:

$$X_{t_i} = X_{t_i}^e(1 - B_{t_i}) + B_{t_i}X_{t_{i-1}}, \quad (1.3)$$

dove $\{B_{t_i}\}$ è un array triangolare di variabili di Bernoulli, per $i = 1, \dots, n$, tale che, per $n \rightarrow \infty$,

$$\frac{1}{T} \sum_{i=1}^n \Delta_n B_{t_i} \xrightarrow{p} p_\emptyset, \quad p_\emptyset \in [0, 1]. \quad (1.4)$$

Definiamo i rendimenti del processo di prezzo osservato come

$$\Delta_i X = X_{iT/n} - X_{(i-1)T/n},$$

assumendo che $\Delta_i X \sim \mathcal{N}(\mu, \sigma^2)$ con μ e σ^2 parametri non noti.

Grazie alla peculiarità del mercato delle criptovalute, solo il primo rendimento sarà calcolato come differenza tra il prezzo di apertura e il prezzo di chiusura del primo intervallo, per tutti i successivi sarà calcolato come differenza tra i prezzi di chiusura di intervalli continui.

1.2 Analisi esplorative sui rendimenti giornalieri e ad alta frequenza

Si parte dall'analisi dei rendimenti giornalieri relativi agli ultimi due anni. Per ottenere i dati è stato necessario modificare il provider: anziché utilizzare Coindesk le serie storiche sono state reperite da CoinMarketCap, mantenendo invariata la fonte informativa, ovvero l'exchange Binance.

Si mostra innanzitutto gli andamenti dei rendimenti percentuali, calcolati come illustrato nel paragrafo precedente, per ciascuna delle cinque criptovalute considerate.

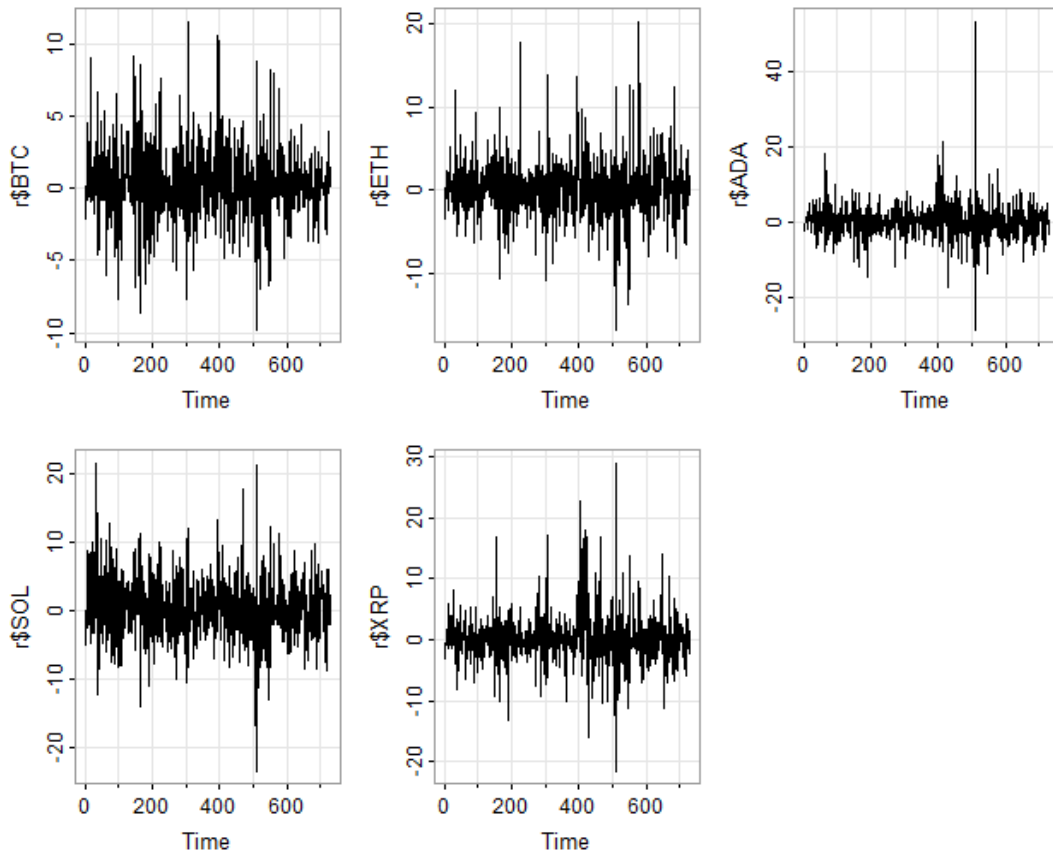


Figura 1.1: Rendimenti percentuali giornalieri delle cinque criptovalute nel periodo considerato.

Dalla Figura 1.1 si osserva come i rendimenti percentuali di tutte e cinque le criptovalute oscillino attorno allo zero, senza evidenza di trend. È inoltre ben visibile una marcata componente di volatilità con chiari fenomeni di *volatility clustering*. Per le criptovalute a minore capitalizzazione (SOL, ADA, XRP) si notano alcuni giorni caratterizzati da rendimenti estremamente elevati che assumono la forma di *outlier*. Tali evidenze suggeriscono che le distribuzioni dei rendimenti si discostano significativamente dalla distribuzione gaussiana, presentando code pesanti e maggiore frequenza di eventi estremi.

Si passa alla valutazione della volatilità giornaliera dei cinque strumenti. Per ottenere una rappresentazione efficace dell'andamento complessivo della volatilità nel periodo di riferimento è stata adottata una stima rolling con finestra di 30 giorni. Tale scelta consente di cogliere in modo equilibrato le dinamiche di breve periodo, attenuando l'influenza di variazioni isolate, senza però perdere la capacità di individuare eventuali fenomeni di *volatility clustering*.

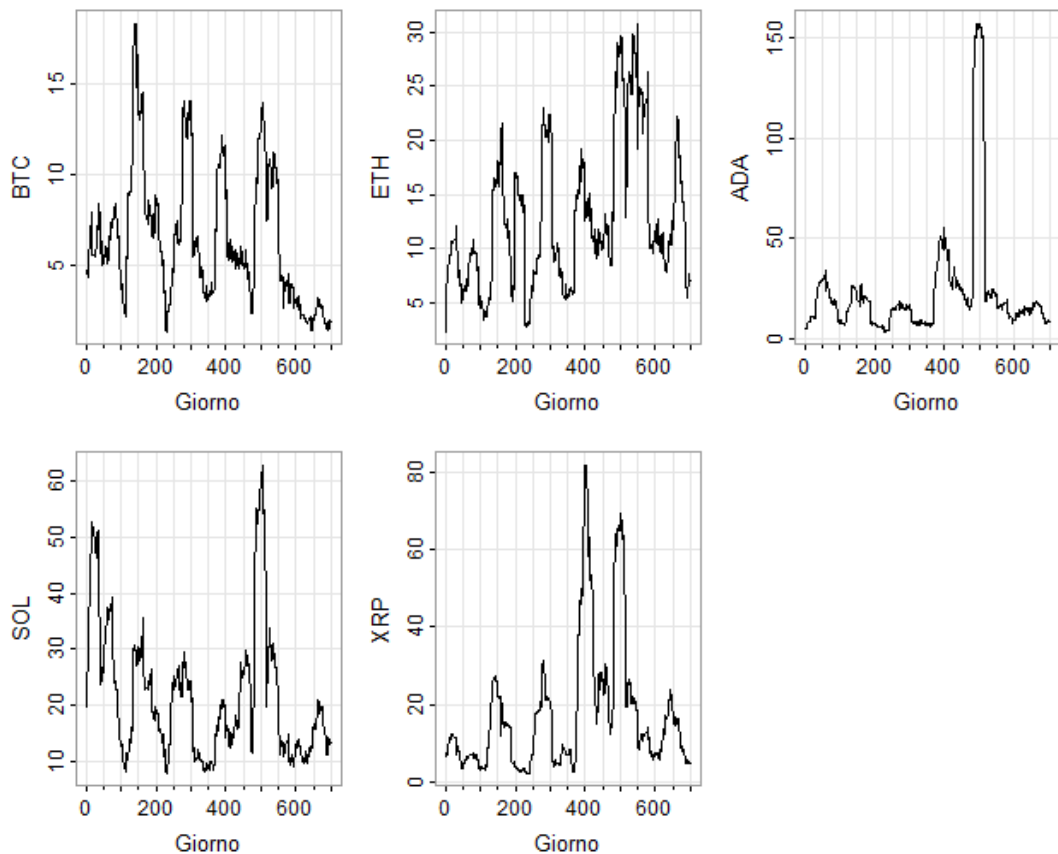


Figura 1.2: Stima rolling della volatilità con finestra di 30 giorni per le cinque criptovalute nel periodo considerato.

Dalla Figura 1.2 emerge chiaramente come tutte le criptovalute presentino episodi di volatilità persistentemente elevata, alternati a fasi più stabili, confermando la presenza di marcati cluster di volatilità in diversi periodi del campione. Si nota chiaramente la presenza di eteroschedasticità in tutti e 5 gli strumenti analizzati. Inoltre, per le criptovalute a maggiore variabilità (SOL, ADA e XRP), intorno al 500° giorno si osserva un evento estremo che determina un picco improvviso e particolarmente rilevante della volatilità; evidenza coerente con quanto visto in precedenza con l'andamento dei rendimenti.

Per confermare in modo formale la presenza di eteroschedasticità nelle serie dei rendimenti, oltre all'analisi preliminare dei correlogrammi delle ACF dei rendimenti e dei rendimenti al quadrato, è stato applicato il test di Ljung–Box alle serie dei rendimenti al quadrato. Il test verifica l'ipotesi nulla di assenza di autocorrelazione e valori elevati della statistica accompagnati da p-value molto ridotti implicano il rifiuto dell'ipotesi nulla.

Tabella 1.1: Risultati del test di Ljung–Box applicato ai rendimenti al quadrato delle cinque criptovalute.

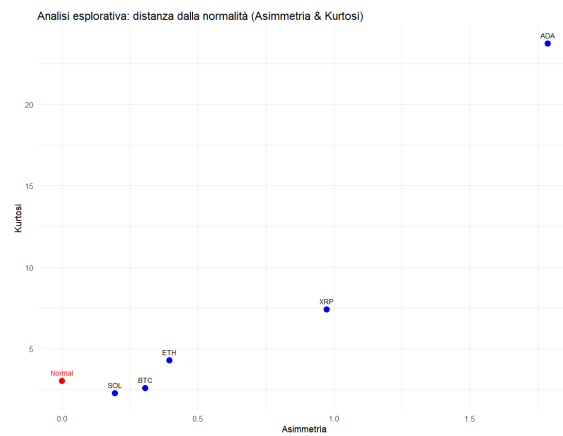
Criptovaluta	Lag	χ^2	p-value
BTC	7	40.000	1.26×10^{-6}
BTC	14	44.217	5.46×10^{-5}
ETH	7	15.835	2.67×10^{-2}
ETH	14	21.702	8.50×10^{-2}
ADA	7	49.740	1.63×10^{-8}
ADA	14	50.026	6.05×10^{-6}
SOL	7	74.774	1.59×10^{-13}
SOL	14	77.690	7.57×10^{-11}
XRP	7	116.910	$< 2.2 \times 10^{-16}$
XRP	14	130.490	$< 2.2 \times 10^{-16}$

I risultati riportati nella Tabella 1.1 mostrano che, per tutte le criptovalute considerate, la statistica di test assume valori molto elevati e i p-value risultano estremamente piccoli confermando quanto già suggerito dai correlogrammi: le serie presentano una marcata dipendenza seriale nella varianza; compatibile con la presenza di eteroschedasticità e di volatility clustering.

Dopo aver confermato la presenza di eteroschedasticità nelle serie storiche dei rendimenti, si procede ora a valutare se la presenza di code pesanti e di rendimenti giornalieri particolarmente elevati conduca a valori di asimmetria e kurtosi significativamente distanti da quelli previsti dalla distribuzione gaussiana.

Momento	BTC	ETH	XRP	SOL	ADA
Asimmetria	0.306	0.395	0.974	0.196	1.787
Kurtosi	2.567	4.269	7.410	2.257	23.740

(a) Asimmetria e kurtosi



(b) Confronto con la distribuzione normale

Figura 1.3: Valori di asimmetria e kurtosi e confronto con la distribuzione gaussiana.

L'analisi congiunta della tabella e della Figura 1.3b evidenzia come tutte le serie storiche dei rendimenti delle criptovalute presentino valori di asimmetria e kurtosi marcatamente differenti da quelli della distribuzione normale. In particolare ADA e XRP, come avevamo notato dagli andamenti dei rendimenti, mostrano livelli di kurtosi estremamente elevati; indicando una presenza molto più frequente e rilevante di eventi estremi che generano code più pesanti rispetto quelle della distribuzione gaussiana. Inoltre i valori positivi di asimmetria suggeriscono che movimenti estremi positivi siano più probabili rispetto a quelli negativi; confermando ulteriormente la natura non simmetrica e non gaussiana dei rendimenti.

Dopo aver concluso la prima parte dell'analisi sui dati giornalieri, si procede con l'analisi esplorativa dei dati a frequenza di 1 minuto, che costituiscono la base informativa per il lavoro. Per ciascuna criptovaluta il dataset presenta dimensioni pari a $1.051.200 \times 8$; di conseguenza ogni serie verrà esaminata singolarmente in modo approfondito; per poi effettuare una comparazione finale tramite le principali statistiche misurate.

Si avvia quindi la trattazione con la serie storica di Bitcoin. In primo luogo viene analizzata la percentuale di intervalli con rendimento pari a zero rispetto al totale dei rendimenti osservati in ciascuna giornata.

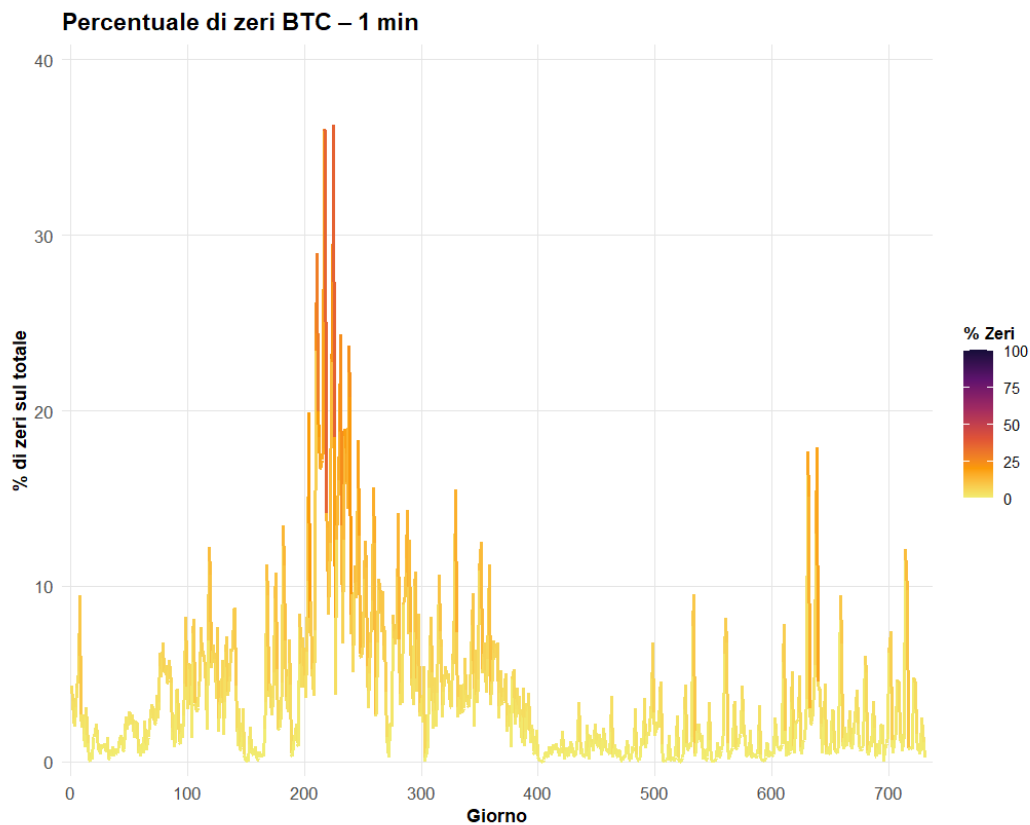


Figura 1.4: Stima della percentuale di intervalli con rendimento pari a zero rispetto al totale degli intervalli osservati in ciascun giorno.

Dalla Figura 1.4 emerge chiaramente che la maggior parte delle giornate presenta una percentuale molto bassa di intervalli con rendimento pari a zero; tipicamente compresa tra lo 0% e il 5%. Si osserva tuttavia, intorno al 230 esimo giorno del campione, un gruppo di giornate in cui tale percentuale aumenta sensibilmente raggiungendo valori dell'ordine del 25-30%. In generale, nei due anni di osservazione, si riscontrano percentuali di zeri sì rilevanti ma non tali da risultare eccessivamente elevate. Questo è coerente con le aspettative poiché Bitcoin è la criptovaluta più conosciuta dagli investitori, con la maggiore capitalizzazione di mercato e i volumi di scambio più elevati quindi ci si aspetta un numero consistente di scambi anche in intervalli brevi come quelli che sto valutando.

Ora è interessante valutare se esistono periodi all'interno della singola giornata dove la percentuale di intervalli pari a zero è più elevata. Dal grafico vediamo che sull'asse delle ordinate si trova la percentuale di intervalli con rendimenti pari a zero mentre sull'asse delle ordinate troviamo i 1440 minuti che compongono un giorno.

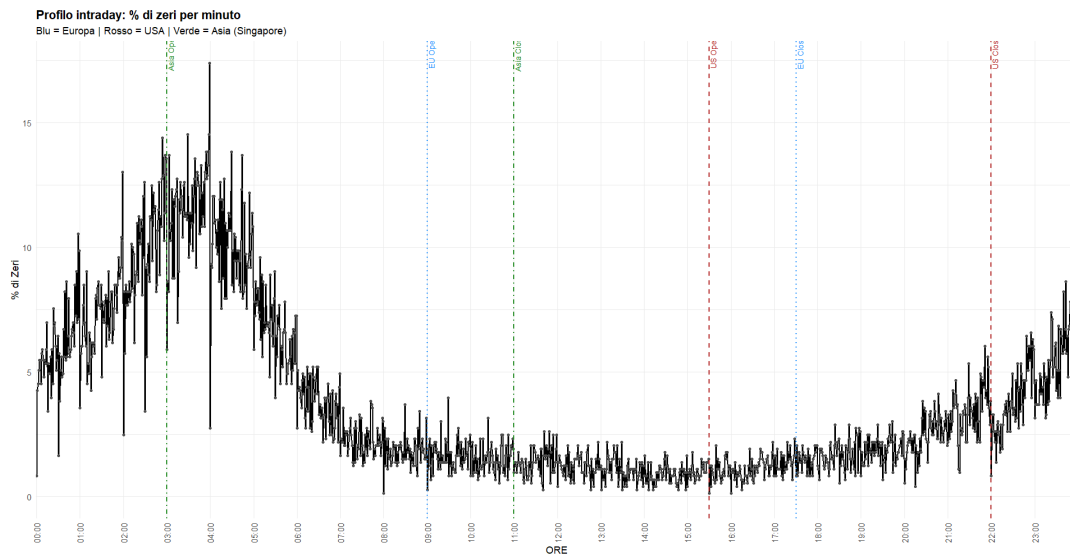


Figura 1.5: Stima della percentuale di intervalli con rendimento pari a zero osservati per ciascun minuto di una giornata.

Dalla Figura 1.5 emerge con chiarezza un marcato pattern intragiornaliero. Come prevedibile nelle ore notturne, quando le principali borse mondiali risultano chiuse contemporaneamente, la percentuale di zeri è sensibilmente più elevata rispetto alle fasce orarie in cui più mercati sono aperti e, di conseguenza, è maggiore la presenza di operatori attivi sul mercato.

Questo rappresenta una prima indicazione rilevante circa la natura dei rendimenti nulli; durante le ore notturne, molti di essi possono essere attribuiti alla scarsa o nulla attività di trading sulla criptovaluta, assumendo dunque un'interpretazione differente rispetto agli zeri osservati nel corso della giornata quando è presente una maggiore attività di trading. In quest'ultimo caso i rendimenti pari a zero possono riflettere non tanto assenza di scambi quanto piuttosto una temporanea condizione di equilibrio tra domanda e offerta nel mercato che mantiene i prezzi invariati.

Si passa dunque a un'analisi più approfondita degli intervalli caratterizzati da un rendimento pari a zero.

Dalla tabella seguente emerge chiaramente che la quota di intervalli in cui si osservano rendimenti nulli rappresenta il 3.71% del totale, confermando quanto già evidenziato nelle sezioni precedenti, la presenza di zeri nel dataset è complessivamente contenuta.

Dalla tabella si possono trarre alcune considerazioni particolarmente rilevanti; anzitutto oltre il 75% degli intervalli con rendimento zero presenta una totale assenza di scambi in quell'intervallo, mentre un ulteriore 10% circa è caratterizzato

Dataset	Totale_righe	Solo_Buy_n	Solo_Sell_n	Entrambi_np	Solo_Buy_%	Solo_Sell_%	Entrambi_%
Tutti i minuti	1051200	94014	51384	29347	8.94	4.89	2.79
Rendimenti = 0	39029	2590	1226	29347	6.64	3.14	75.19

Tabella 1.2: Andamento del numero di trade nei due diversi dataset

dall'assenza esclusiva di trade solo per l'acquisto o solo per le vendite.

Questo risultato mette in evidenza come per Bitcoin una parte sostanziale dei rendimenti nulli sia direttamente associata a una ridotta o nulla attività di mercato. Ne consegue che, in tali intervalli, i rendimenti non forniscono informazione utile sulla dinamica dei prezzi poiché la loro nullità deriva da una mancanza di scambi e non è dovuta a condizioni di equilibrio tra domanda e offerta.

Il fatto che solo una piccola frazione degli intervalli con rendimento zero presenti comunque almeno un trade, circa un 15%, suggerisce che gli zeri informativi, ossia quelli determinati da un reale equilibrio tra acquisto e vendita, siano molto meno frequenti rispetto agli zeri non informativi. Queste evidenze vengono ulteriormente confermate dall'analisi grafica delle distribuzioni del numero di transazioni. Nel grafico di confronto delle distribuzioni, Figura 1.6, si osserva come gli intervalli con rendimento pari a zero (in rosa) siano fortemente concentrati nei valori più bassi del numero di trade, con una densità elevata attorno a zero e che decresce molto rapidamente. Al contrario, la distribuzione del dataset completo (in azzurro), presenta una coda più lunga e mostra come gli intervalli caratterizzati da attività di trading più sostenuta siano associati, nella grande maggioranza dei casi, a rendimenti diversi da zero.

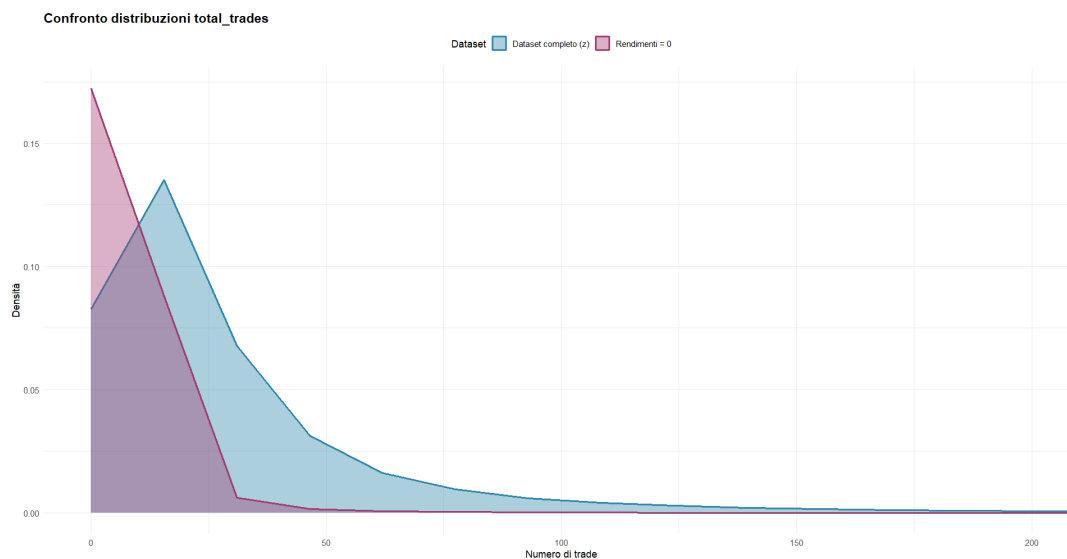


Figura 1.6: Confronto delle distribuzioni del dataset completo VS dataset con soli intervalli con rendimento pari a zero

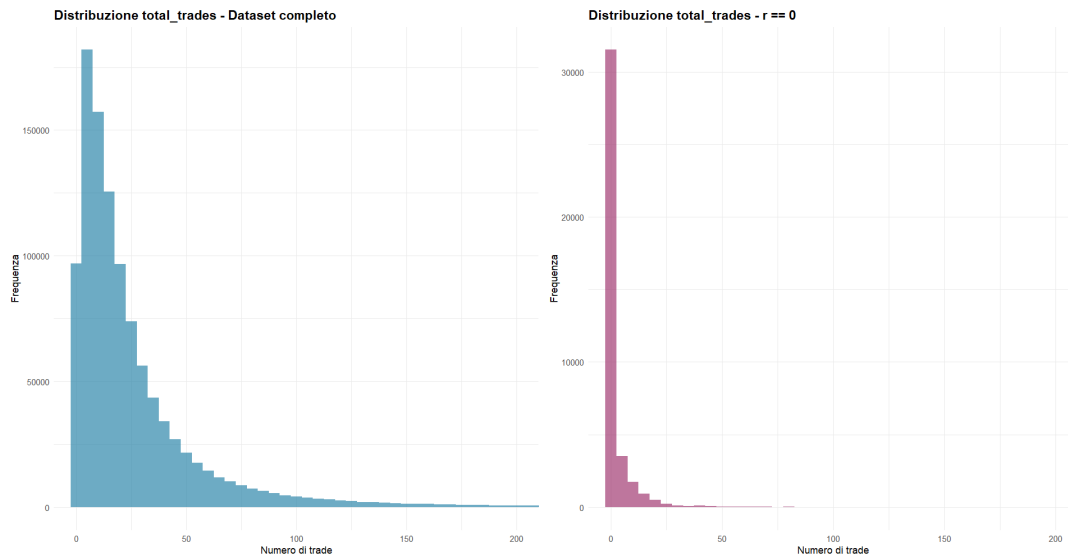


Figura 1.7: Istogramma di confronto delle frequenze di trade nel dataset completo VS dataset con soli intervalli con rendimento pari a zero

Gli istogrammi separati, Figura 1.7, confermano ulteriormente questa dinamica: la massa della distribuzione dei trade condizionata a $r=0$ è fortemente concentrata nei primissimi valori mentre la distribuzione dell'intero dataset evidenzia una variabilità molto più elevata nel numero di scambi.

Complessivamente l'analisi sottolinea con forza che gli intervalli in cui non vi è attività di trading rappresentano la causa principale della presenza di rendimenti nulli nel dataset. Tale constatazione sarà cruciale nelle sezioni successive, poiché implica che questi intervalli non apportino informazioni aggiuntive sul prezzo, quindi richiederanno un trattamento specifico nell'analisi statistica e nella modellizzazione per mitigarne gli effetti.

Per evitare di mostrare le medesime analisi per ogni criptovaluta, andrò solamente a sottolineare le differenze che le singole presentano rispetto alle analisi appena svolte su Bitcoin.

Si inizia dall'analisi di Ethereum (ETH), si vede come la percentuale di zeri vari sensibilmente, i valori massimi ora si trovano poco sotto il 50%, vediamo anche che nella parte centrale del dataset vi è un lungo periodo nel quale le percentuali risultano essere molto più elevate rispetto alla seconda parte, dove i valori percentuali risultano molto più contenuti e nella maggioranza dei giorni si discostano poco o non si discostano dallo 0% sintomo di una maggior attività di scambio sulla criptovaluta.

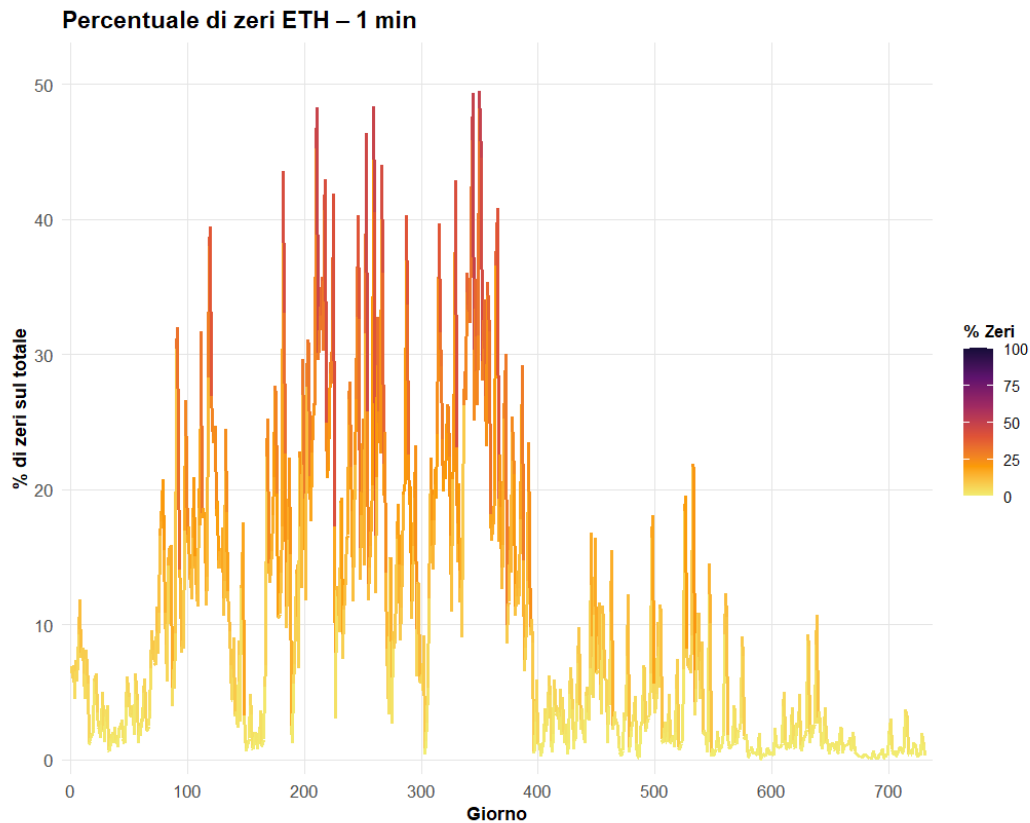


Figura 1.8: Stima della percentuale di intervalli con rendimento pari a zero rispetto al totale degli intervalli osservati in ciascun giorno.

La distribuzione intragiornaliera degli zeri conferma il pattern individuato con la precedente criptovaluta, anche se si trovano contestualmente valori percentuali di zeri leggermente più elevati.

Una seconda differenza la troviamo nella tabella nella quale andiamo a valutare la natura degli zeri individuati.

Dataset	Totale_righe	Solo_Buy_n	Solo_Sell_n	Entrambi_np	Solo_Buy_%	Solo_Sell_%	Entrambi_%
Tutti i minuti	1051200	144293	91986	95740	13.73	8.75	9.11
Rendimenti = 0	105247	2403	2032	95740	2.28	1.93	90.97

Tabella 1.3: Andamento del numero di trade nei due diversi dataset

I dati evidenziano come la percentuale di periodi con rendimenti nulli sia superiore rispetto all'analisi precedente, attestandosi poco al di sotto del 10%. Si osserva che per Ethereum oltre il 90% degli intervalli con rendimento nullo è attribuibile all'assenza di scambi, mentre la mancata variazione dei prezzi in presenza di attività di trading rappresenta la causa in meno del 5% dei casi totali. Si nota anche che rispetto a Bitcoin è aumentato il numero di periodi in cui si verificano o solo acquisti

o solo vendite.

Per quanto concerne le distribuzioni di frequenze dei due dataset e l'istogramma delle frequenze di trade, il confronto non rileva differenze sostanziali rispetto alle analisi precedenti. Si conferma il pattern già evidenziato: negli intervalli caratterizzati da rendimenti nulli, il numero di trade risulta significativamente inferiore e prossimo allo zero nella maggior parte delle osservazioni per il dataset contenente solo gli intervalli con rendimento nullo, mentre il dataset completo presenta una distribuzione delle frequenze più dispersa e meno concentrata verso lo zero.

Si procede con l'analisi della criptovaluta Solana (SOL), mantenendo Bitcoin come riferimento per il confronto.

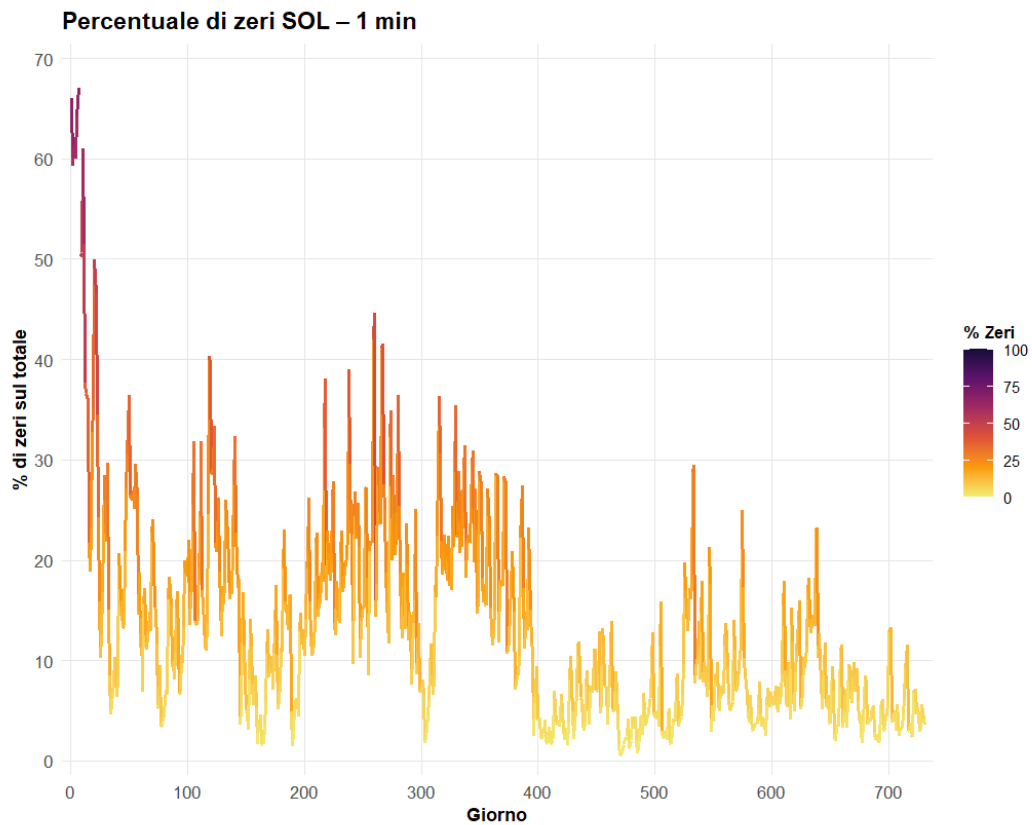


Figura 1.9: Stima della percentuale di intervalli con rendimento pari a zero rispetto al totale degli intervalli osservati in ciascun giorno.

L'andamento della percentuale di rendimenti nulli presenta caratteristiche distintive rispetto alle criptovalute precedentemente analizzate. Il valore massimo si registra all'inizio della serie storica, attestandosi attorno al 65% dei minuti giornalieri, con valori che si mantengono elevati circa 60% nei primi giorni di osservazione. Successivamente, la percentuale decresce progressivamente fino a rientrare nei valori già

visti in precedenza tra lo 0 e il 20% nella seconda parte della serie.

La distribuzione intragiornaliera degli zeri conferma il pattern individuato con le precedenti criptovalute, anche se le percentuali di fondo non risultano mai essere inferiori al 5% ed il massimo è tra il 25 e il 30%.

Il passo successivo è analizzare la natura degli zeri che sono stati individuati.

Dataset	Totale_righe	Solo_Buy_n	Solo_Sell_n	Entrambi_np	Solo_Buy_%	Solo_Sell_%	Entrambi_%
Tutti i minuti	1051200	174963	112794	100078	16.64	10.73	9.52
Rendimenti = 0	140808	11033	7464	100078	7.84	5.30	71.07

Tabella 1.4: Andamento del numero di trade nei due diversi dataset

I dati evidenziano chiaramente come la percentuale di periodi con rendimenti nulli sia superiore rispetto alle analisi precedenti, attestandosi al 13,39% e confermando l'incremento significativo di zeri nella serie temporale. Analizzando il numero di periodi caratterizzati da assenza di scambi, sia unidirezionale che bilaterale, emerge una differenza sostanziale rispetto a Bitcoin, con valori superiori di diverse decine di migliaia di osservazioni. È rilevante sottolineare come, in questo caso, l'impatto dell'assenza di trade sulla presenza di rendimenti nulli sia comparabile a quello osservato per Bitcoin e risulti quindi più contenuto rispetto a quanto rilevato per Ethereum.

Infine, il confronto tra la distribuzione delle frequenze del numero di trade nel dataset completo e in quello contenente esclusivamente i periodi con rendimenti nulli conferma sostanzialmente il pattern già evidenziati nell'analisi di Bitcoin.

Ora si procede con l'analisi esplorativa della criptovaluta Cardano (ADA), mantenendo Bitcoin come riferimento per il confronto.

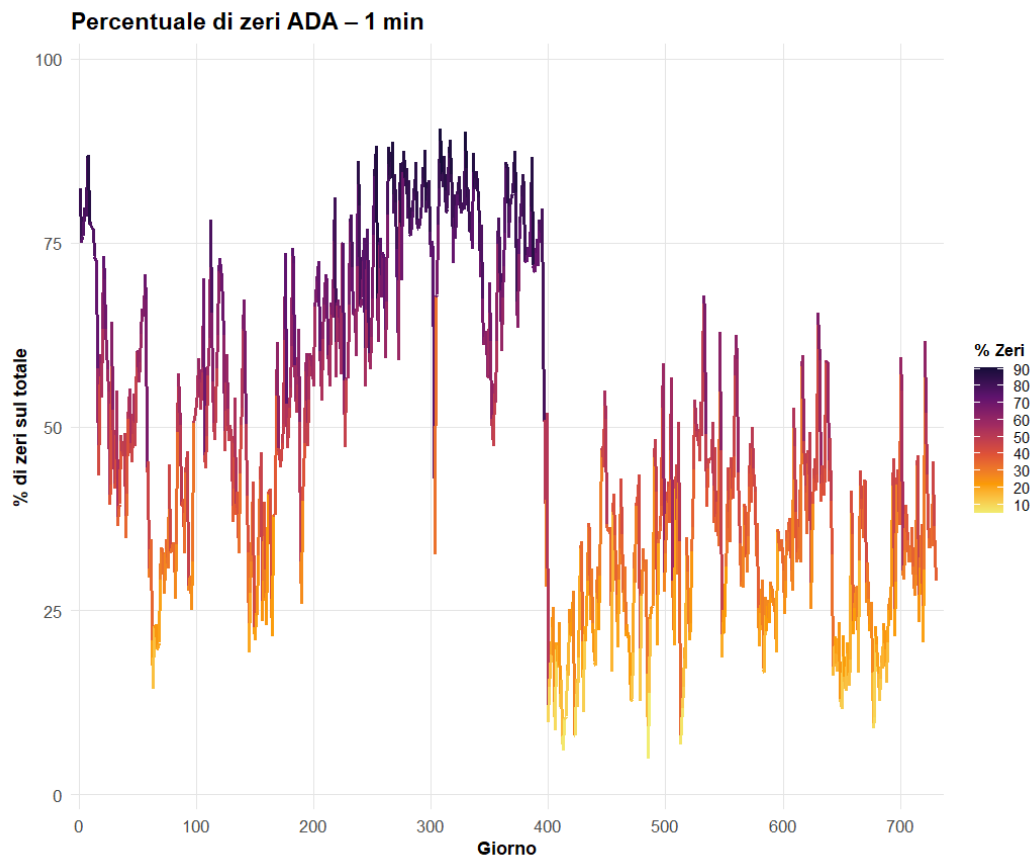


Figura 1.10: Stima della percentuale di intervalli con rendimento pari a zero rispetto al totale degli intervalli osservati in ciascun giorno.

Il grafico che illustra l'andamento della percentuale di rendimenti nulli evidenzia un cambiamento sostanziale rispetto alle criptovalute precedentemente analizzate. Le percentuali risultano notevolmente più elevate, con picchi giornalieri superiori all'80% e valori sistematicamente oltre il 20% nella prima parte della serie storica. Anche in questo caso, come avevamo riscontrato per Ethereum, si osserva una discontinuità marcata attorno al 400^o giorno, in corrispondenza del quale le percentuali subiscono una riduzione significativa, stabilizzandosi su valori compresi tra il 10% e il 60%.

La distribuzione intragiornaliera degli zeri conferma lo schema di fondo individuato con le precedenti criptovalute, anche se le percentuali sono chiaramente molto più elevate e si attestano tra il 35 e il 70%. Il passo successivo è analizzare la natura degli zeri che sono stati individuati.

I dati evidenziano chiaramente come la percentuale di minuti con rendimento nullo sia particolarmente elevata, attestandosi al 47,93% e confermando l'incremento significativo di zeri nella serie temporale. Coerentemente con le analisi precedenti,

Dataset	Totale_righe	Solo_Buy_n	Solo_Sell_n	Entrambi_np	Solo_Buy_%	Solo_Sell_%	Entrambi_%
Tutti i minuti	1051200	190653	185655	369279	18.14	17.76	35.13
Rendimenti = 0	503936	43814	45283	369279	8.69	8.99	73.28

Tabella 1.5: Andamento del numero di trade nei due diversi dataset

si osserva un aumento sostanziale del numero di minuti caratterizzati da assenza di scambi rispetto a Bitcoin. Analizzando l'origine di questi rendimenti nulli, emerge che circa il 90% è attribuibile all'assenza di trade, in linea con quanto già rilevato per le altre criptovalute. Ciò conferma che la maggior parte dei rendimenti nulli deriva da fenomeni di trade inaction piuttosto che da price staleness, risultando quindi poco informativi per l'analisi dei prezzi. La differenza sostanziale rispetto alle criptovalute precedentemente analizzate risiede nell'elevato numero di minuti privi di attività di trading, che determina la percentuale particolarmente alta di zeri osservata. Questo fenomeno può essere ricondotto alla fatto che Cardano detiene una quota di mercato significativamente inferiore alle altre criptovalute e ciò può comportare una frequenza di trading più contenuta.

Queste evidenze vengono ulteriormente confermate dall'analisi grafica delle distribuzioni del numero di scambi. Nel grafico di confronto delle distribuzioni, Figura 1.11, si osserva come gli intervalli con rendimento nullo (in rosa) siano fortemente concentrati attorno allo zero, presentando una densità molto elevata che decresce rapidamente. Diversamente da quanto rilevato per le criptovalute precedenti, anche il dataset completo mostra un picco di densità in prossimità dello zero, con la maggior parte della massa di probabilità concentrata su valori modesti.

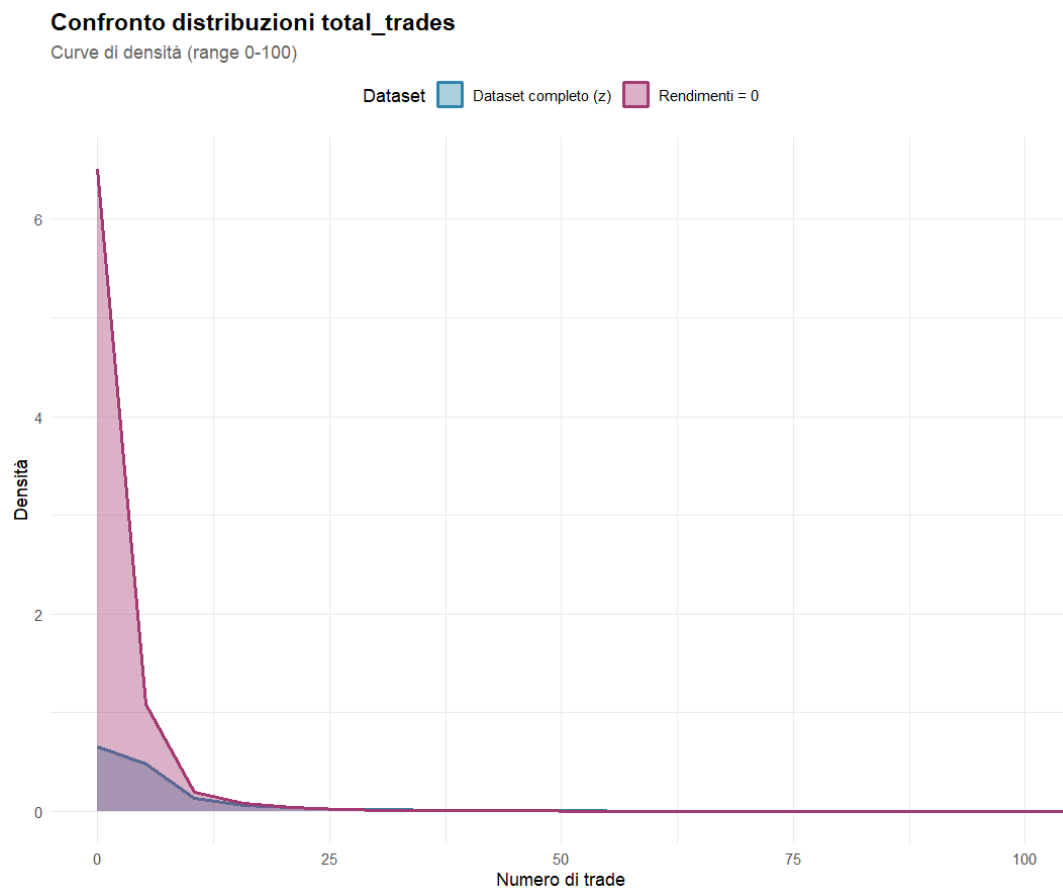


Figura 1.11: Confronto delle distribuzioni del dataset completo VS dataset con soli intervalli con rendimento pari a zero

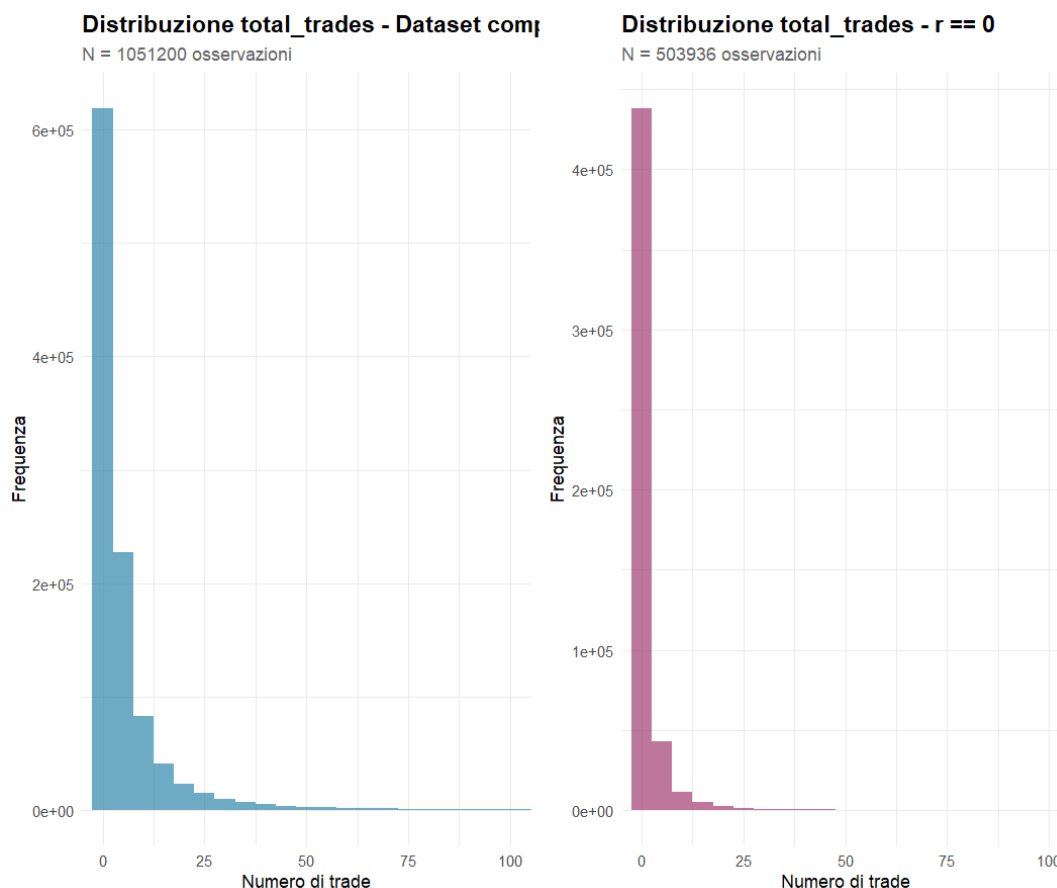


Figura 1.12: Istogramma di confronto delle frequenze di trade nel dataset completo VS dataset con soli intervalli con rendimento pari a zero

L'analisi degli istogrammi delle frequenze di trade conferma ulteriormente questa interpretazione. La differenza tra il dataset completo e quello composto esclusivamente dai minuti con rendimenti nulli risulta modesta: in entrambi i casi le frequenze sono concentrate su valori bassi, con una percentuale ridotta di intervalli che registrano più di venti trade al minuto; ciò costituisce un indicatore inequivocabile dei volumi di scambio limitati di Cardano, particolarmente contenuti rispetto alle criptovalute precedentemente analizzate. Come evidenziato dalla tabella, tale caratteristica rappresenta una delle cause principali dell'elevata presenza di rendimenti nulli nei dati.

Ora passo ad analizzare le analisi esplorative dell'ultima criptovaluta conosciuta come XRP.

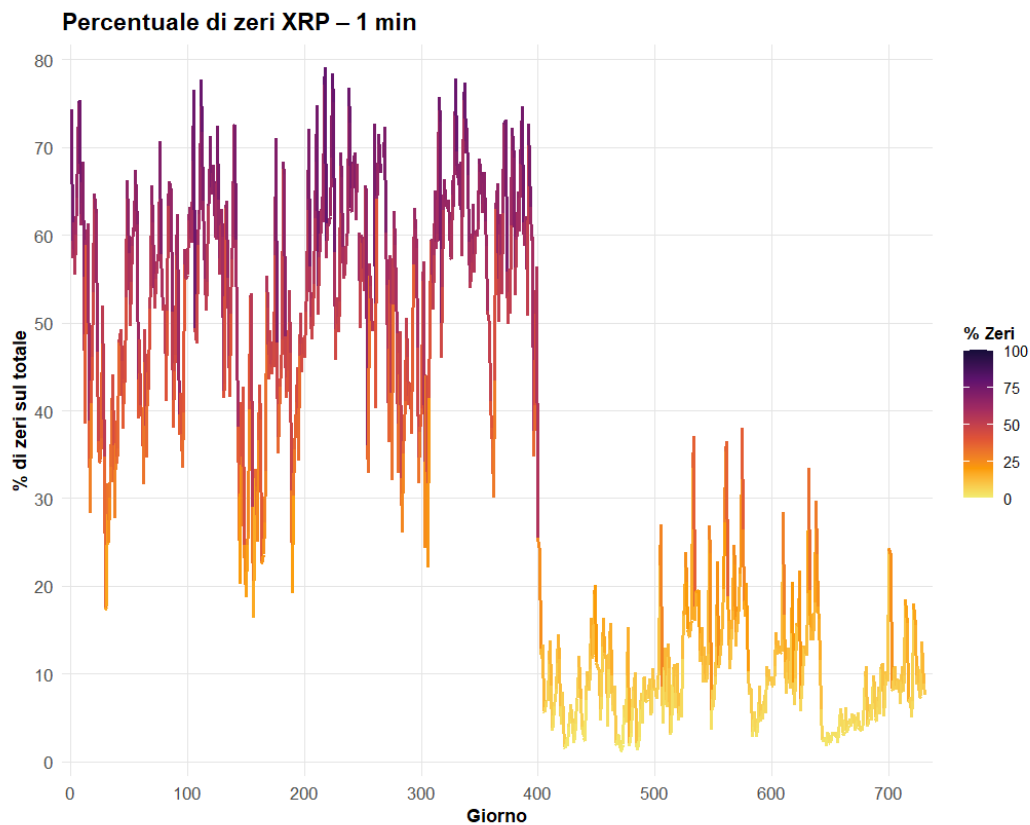


Figura 1.13: Stima della percentuale di intervalli con rendimento pari a zero rispetto al totale degli intervalli osservati in ciascun giorno.

Il confronto con Bitcoin evidenzia una differenza sostanziale nell'andamento della percentuale giornaliera di minuti con rendimento nullo. Nella prima parte della serie, le percentuali risultano particolarmente elevate, oscillando con forte variabilità tra il 20% e poco oltre l'80%. Coerentemente con quanto osservato per le altre criptovalute, si rileva una discontinuità marcata attorno al 400^o giorno, oltre il quale i valori oscillano tra lo 0% e il 40%. È tuttavia importante sottolineare che, nonostante questa riduzione, non sono stati registrati giorni con percentuale nulla di rendimenti pari a zero.

La distribuzione intragiornaliera degli zeri conferma il pattern già identificato nelle criptovalute precedenti: andamento crescente durante le ore notturne e decrescente nelle ore diurne di apertura dei mercati regolamentati. Le percentuali si attestano tuttavia su livelli più elevati, compresi tra il 20% e il 50%.

Il passo successivo è analizzare la natura degli zeri individuati:

I dati evidenziano chiaramente come la percentuale di minuti con rendimento nullo sia superiore a quella di Bitcoin, attestandosi al 33,88% e confermando l'in-

Dataset	Totale_righe	Solo_Buy_n	Solo_Sell_n	Entrambi_np	Solo_Buy_%	Solo_Sell_%	Entrambi_%
Tutti i minuti	1051200	200407	142402	207607	19.06	13.55	19.75
Rendimenti = 0	356189	56411	37447	207607	15.84	10.51	58.29

Tabella 1.6: Andamento del numero di trade nei due diversi dataset

cremento significativo di zeri nella serie temporale. Coerentemente con le analisi precedenti, la maggior parte dei minuti con rendimenti nulli è caratterizzata dall'assenza totale o parziale di scambi, sottolineando il ruolo determinante del volume di trading. Emerge tuttavia un aspetto rilevante dall'analisi del dataset completo; nonostante le elevate percentuali di assenza parziale di scambi, questo fenomeno non si traduce sistematicamente in rendimenti nulli. Tale evidenza suggerisce che nella seconda parte della serie storica, in corrispondenza della crescita significativa del prezzo della criptovaluta (passata da poche decine di centesimi a valori compresi tra 2 e 3 euro), si siano verificati minuti caratterizzati da marcati squilibri tra domanda e offerta. Nello specifico, si ipotizzano periodi con acquisti consistenti in assenza di vendite e, viceversa, fasi di vendite massicce senza acquisti corrispondenti, generando variazioni di prezzo anche in presenza di volumi ridotti.

Passando ora alla valutazione del numero di trade confrontando il dataset completo con il dataset contenente solamente i minuti con rendimenti pari a zero si evince che non ci siano sostanziali differenze con quanto spiegato in precedenza per la criptovaluta Cardano (ADA).

In conclusione, si può affermare che le criptovalute meno note presentano volumi di scambio significativamente inferiori rispetto a Bitcoin ed Ethereum, determinando un incremento sostanziale del numero di rendimenti nulli osservati. Emerge inoltre un pattern intragiornaliero comune a tutte le criptovalute analizzate, durante le ore notturne quando i mercati regolamentati sono chiusi e l'attività è limitata ai singoli investitori, si registra una generale diminuzione degli scambi che si traduce in un aumento sensibile della percentuale di rendimenti nulli. Con l'apertura progressiva dei mercati asiatici, europei e americani, si osserva invece una riduzione graduale della percentuale di zeri nelle ore centrali delle giornate di contrattazione.

I dati evidenziano, in particolare per le criptovalute meno capitalizzate, un cambiamento marcato negli andamenti delle percentuali giornaliere di rendimenti nulli attorno al 400° giorno della serie temporale. Considerando che l'inizio della serie risale a ottobre 2023, tale punto di discontinuità coincide temporalmente con le elezioni presidenziali americane del novembre 2024. Ciò suggerisce che l'evento elettorale abbia potuto esercitare un impatto significativo sul mercato delle criptovalute, determinando sia un incremento del valore delle criptovalute sia un aumen-

to della frequenza degli scambi, con una conseguente riduzione considerevole della percentuale di rendimenti nulli nella seconda parte delle serie storiche.

1.3 Definizioni di price staleness e trade inaction

Le analisi esplorative condotte evidenziano l'importanza di considerare congiuntamente l'evoluzione dei prezzi e il volume degli scambi. Questo permette di distinguere due fenomeni che possono generare rendimenti nulli in un dato intervallo temporale.

Si è in presenza di *price staleness* ogni qualvolta il rendimento tra due intervalli consecutivi risulta nullo, $r_{t_i} = 0$, determinando una assenza di variazione di prezzo nel periodo di riferimento.

Valutando la presenza di price staleness, congiuntamente ai volumi di scambio in quell'intervallo, emergono due situazioni distinte con implicazioni informative differenti.

Quando i rendimenti nulli si accompagnano a volumi positivi ($N_{trade} > 0$) siamo in presenza di price staleness e l'eliminazione di questi intervalli dall'analisi potrebbe comporterebbe una perdita di informazione rilevante; infatti la stazionarietà del prezzo in questo caso ci comunica che l'equilibrio tra domanda e offerta non è mutato nel periodo.

Al contrario, se nel medesimo periodo di interesse si osserva un rendimento nullo congiuntamente all'assenza di scambi ($N_{trade} = 0$), si configura il fenomeno della *trade inaction*. In tale circostanza, la mancata variazione del prezzo non è riconducibile a un equilibrio informativo tra domanda e offerta, bensì all'inattività del mercato nell'intervallo considerato.

Poiché nell'intervallo in esame non risulta eseguita alcuna transazione, l'eventuale esclusione dello stesso non comporterebbe perdita di informazione economicamente rilevante.

Tabella 1.7: Origine dei rendimenti nulli

Criptovaluta	Zeri sul totale (%)	Trade inaction (% su zeri)	Price staleness (% su zeri)
BTC	3.71	75.19	24.81
ETH	10.01	90.97	9.03
SOL	13.39	71.07	28.93
ADA	47.93	73.28	26.72
XRP	33.88	58.29	41.71

La Tabella 1.7 presenta l'analisi della natura dei rendimenti nulli per le cinque criptovalute considerate, evidenziando marcate eterogeneità sia nella frequenza complessiva che nell'origine del fenomeno.

Per la percentuale di zeri sul totale nei dati, si nota una forte variabilità tra gli asset: BTC registra la percentuale più bassa (3,71%), seguito da ETH (10,01%) e SOL (13,39%), mentre XRP e ADA presentano valori significativamente più elevati, rispettivamente 33,88% e 47,93%. Emerge con grande evidenza che le criptovalute con valore più contenuto, sia xrp che cardano valgono meno di un euro durante la maggior parte del periodo di osservazione, presentano una percentuale di zeri nei dati più elevata rispetto alle altre criptovalute.

L'analisi della composizione dei rendimenti nulli rivela pattern distinti tra le diverse criptovalute.

BTC, SOL e ADA mostrano una distribuzione simile, circa tre quarti degli zeri sono attribuibili alla presenza di trade inaction, mentre solo circa un quarto è attribuibile alla presenza di price staleness. Al contrario, ETH presenta una composizione nettamente diversa, con oltre il 90% di rendimenti nulli attribuibili a trade inaction: ciò suggerisce che la quasi totalità degli intervalli senza variazioni di prezzo sia dovuta all'assenza di scambi piuttosto che a una conferma dell'equilibrio di mercato. Invece, XRP costituisce un caso particolare, essa presenta la percentuale più elevata di price staleness (41,71%); questo implica che un'eventuale esclusione sistematica degli intervalli con rendimenti nulli comporterebbe una significativa perdita di informazione per questo asset, data l'elevata quota di zeri che riflettono condizioni di mercato effettive.

Riprendendo teoricamente quanto scritto nel primo paragrafo, la presenza di price staleness nei dati è modellata seguendo l'approccio di Bandi, Pirino et al. (2017), assumendo che il log-prezzo osservato soddisfi la seguente equazione:

$$X_{t_i} = X_{t_i}^e(1 - B_{t_i}) + B_{t_i}X_{t_{i-1}}, \quad (1.5)$$

dove (B_{t_i}) è un array triangolare di variabili casuali di Bernoulli con $E[B_{t_i}|X_{t_i}] = p_{t_i}$, dove p_t è un processo stocastico che assume valori in $[0, 1)$.

L'interpretazione dell'equazione è la seguente: quando $B_{t_i} = 0$, il prezzo osservato si aggiorna al prezzo efficiente $X_{t_i}^e$; invece quando $B_{t_i} = 1$, si è in presenza di price staleness, ossia il prezzo osservato rimane invariato rispetto al valore precedente $X_{t_{i-1}}$, determinando rendimenti nulli ($r_{t_i} = 0$).

Nella formulazione originale, la variabile di Bernoulli identifica genericamente la

presenza di prezzi ripetuti e quindi tratta il fenomeno della price staleness:

$$B_{t_i} = \mathbb{I}_{\{r_{t_i}=0\}}. \quad (1.6)$$

Tuttavia, come già evidenziato, i rendimenti nulli possono derivare da meccanismi di mercato distinti.

Quindi con l'obiettivo di isolare gli effetti specifici dovuti solo alla trade inaction, e consentirci successivamente di effettuare un confronto tra i due diversi approcci, si introduce una definizione più restrittiva della variabile bernoulliana che incorpora l'informazione relativa al volume degli scambi:

$$B_{t_i}^{\text{inaction}} = \mathbb{I}_{\{r_{t_i}=0 \cap V_{t_i}=0\}}, \quad (1.7)$$

dove V_{t_i} rappresenta il volume totale degli scambi al tempo t_i .

Questa formulazione identifica esclusivamente i casi in cui l'assenza di variazione del prezzo è accompagnata dall'assenza di scambi nel mercato. Tale distinzione ci permette di valutare nei prossimi capitoli se vi siano differenze significative tra le due ipotesi.

Capitolo 2

Momenti realizzati

2.1 Definizioni dei momenti realizzati

Con riferimento a quanto esposto nel capitolo 1.1, le ipotesi sul processo generatore dei dati rimangono invariate. Il processo del prezzo efficiente può essere rappresentato come:

$$X_t = X_0 + \int_0^t \mu_s ds + \int_0^t \sigma_s dW_s, \quad (2.1)$$

dove μ_s rappresenta il drift e σ_s il processo della volatilità stocastica. Considerando i rendimenti su un intervallo unitario, si ottiene:

$$r_t = X_t - X_{t-1} = \int_{t-1}^t \mu_s ds + \int_{t-1}^t \sigma_s dW_s. \quad (2.2)$$

L'obiettivo principale è ottenere la stima della varianza integrata, definita come:

$$IV(0, t) = \int_0^t \sigma_s^2 ds. \quad (2.3)$$

L'approccio classico per stimare $IV(0, t)$ consiste nell'utilizzare la variazione quadratica del processo X_t . Suddividendo l'intervallo $(0, t)$ in n sotto-intervalli equidistanziati di ampiezza $\Delta = \frac{t}{n}$; perciò la varianza quadratica è definita come:

$$QV(0, t) = \sum_{i=1}^n (p_{i\Delta} - p_{(i-1)\Delta})^2. \quad (2.4)$$

Nel contesto di un processo continuo senza salti, vale la seguente relazione di

convergenza in probabilità:

$$QV(0, t) \xrightarrow{p} IV(0, t) = \int_0^t \sigma_s ds, \quad \text{per } n \rightarrow \infty. \quad (2.5)$$

Nell'ambito applicativo, considerando t come unità di tempo giornaliera e n come numero di osservazioni intra-giornaliere, è possibile definire la varianza realizzata giornaliera come stimatore della varianza integrata:

$$RV_t = QV(t-1, t) = \sum_{i=1}^n (p_{t-1+i\Delta} - p_{t-1+(i-1)\Delta})^2, \quad \Delta = \frac{1}{n}. \quad (2.6)$$

Nel presente studio, disponendo di dati con frequenza al minuto, si hanno $n = 1440$ osservazioni per ogni giorno; tale campionamento ad alta frequenza consente di ottenere una stima accurata e consistente della varianza integrata giornaliera attraverso la varianza realizzata, bilanciando al contempo la necessità di mitigare l'errore di microstruttura che affligge i campionamenti ad alta frequenza, come nel caso di studio.

Riprendendo quanto definito in precedenza, si formalizza il quadro teorico ripartendo dal processo latente efficiente del prezzo X , definito su uno spazio di probabilità filtrato $(\Omega, \mathcal{F}, \mathbb{P})$. Il processo osservato del prezzo $\tilde{X}$ si discosta dal processo latente secondo la seguente relazione:

$$\tilde{X}_{j\Delta_n} = X_{j\Delta_n}(1 - B_{j,n}) + \tilde{X}_{(j-1)\Delta_n}B_{j,n}, \quad (2.7)$$

con condizione iniziale $\tilde{X}_{0\Delta_n} = X_{0\Delta_n}$, dove $\Delta_n = \frac{1}{n}$ rappresenta l'ampiezza dell'intervallo di campionamento, $\{t_{j,n} = j\Delta_n \mid j = 1, \dots, n\}$ costituisce una partizione deterministica dell'intervallo $[0, t]$, e $\{B_{j,n} \mid j = 1, \dots, n\}$ è un array triangolare di variabili casuali di Bernoulli che identificano la presenza di prezzi ripetuti. Quando $B_{j,n} = 1$, il prezzo osservato rimane invariato rispetto all'istante precedente; quando $B_{j,n} = 0$, si osserva il prezzo efficiente.

In questo contesto, è possibile derivare una formulazione generale che permetta di ottenere la stima degli stimatori dei momenti realizzati, basandosi solamente su dei particolari stimatori detti di power variation (PV):

$$PV_r(f; \tilde{X}) \doteq n^{\frac{r}{2}-1} \sum_{j=1}^n f(\Delta_j \tilde{X}), \quad (2.8)$$

dove $\Delta_j \tilde{X} = \tilde{X}_{j\Delta_n} - \tilde{X}_{(j-1)\Delta_n}$ rappresenta il j -esimo incremento logaritmico del

prezzo tra un intervallo e il successivo, e $f(x) = |x|^r$ con $r > 1$ per garantire la differenziabilità dello stimatore.

Per $r = 2$, lo stimatore di power variation del momento secondo coincide esattamente con la varianza realizzata definita in precedenza:

$$PV_2(\tilde{X}) = n^{2/2-1} \sum_{j=1}^n (\Delta_j \tilde{X})^2 = \sum_{j=1}^n (\Delta_j \tilde{X})^2 = RV(\tilde{X}). \quad (2.9)$$

Questo risultato sottolinea come la varianza realizzata sia un caso particolare della classe più generale degli stimatori di power variation.

Per riuscire a valutare correttamente anche l'asimmetria e la curtosi realizzata, il lavoro estende la trattazione anche agli stimatori di power variation di ordine superiore. In particolare, l'asimmetria (SK) e la curtosi (KU) realizzate sono definite come momenti standardizzati del terzo e quarto ordine:

$$SK \doteq \frac{PV_3(\tilde{X})}{\left(RV(\tilde{X})\right)^{3/2}} = \frac{n^{1/2} \sum_{j=1}^n |\Delta_j \tilde{X}|^3}{\left(\sum_{j=1}^n (\Delta_j \tilde{X})^2\right)^{3/2}}, \quad (2.10)$$

$$KU \doteq \frac{PV_4(\tilde{X})}{\left(RV(\tilde{X})\right)^2} = \frac{n \sum_{j=1}^n (\Delta_j \tilde{X})^4}{\left(\sum_{j=1}^n (\Delta_j \tilde{X})^2\right)^2}. \quad (2.11)$$

L'asimmetria realizzata SK normalizza il momento terzo dividendolo per la deviazione standard realizzata elevata al cubo, fornendo una misura della asimmetria della distribuzione dei rendimenti intra-giornalieri. La curtosi realizzata KU normalizza il momento quarto dividendolo per la varianza realizzata al quadrato, quantificando la pesantezza delle code della distribuzione rispetto a una distribuzione normale.

Tramite gli stimatori di power variation è quindi possibile caratterizzare in modo completo e robusto i principali momenti della distribuzione realizzata dei rendimenti ad alta frequenza: varianza (momento secondo), asimmetria (momento terzo standardizzato) e curtosi (momento quarto standardizzato). Questi stimatori risultano consistenti sotto opportune condizioni di regolarità del processo sottostante e forniscono informazioni rilevanti sulla dinamica intra-giornaliera dei prezzi.

2.2 Distorsioni e problemi degli stimatori dei momenti realizzati

Gli stimatori di momenti realizzati sono soggetti a diverse fonti di distorsione, da un lato si hanno problemi intrinseci alla natura dei dati ad alta frequenza, come l'errore di microstruttura e i salti nei prezzi; dall'altro, fenomeni legati alle dinamiche di mercato, quali la price staleness e la trade inaction, che caratterizzano specificamente il periodo osservato.

Iniziamo analizzando l'impatto dell'errore di microstruttura, che affligge tanto la varianza realizzata quanto gli stimatori dei momenti superiori. Quando si impiegano dati ad alta frequenza, l'errore introduce distorsioni sistematiche originate da imperfezioni intrinseche al processo di formazione dei prezzi; il bid-ask bounce causa oscillazioni artificiali e spurie dei prezzi tra i valori di acquisto e vendita anche in assenza di movimenti reali, mentre la discretizzazione dei prezzi costringe le quotazioni a muoversi per multipli del tick size, creando artificialmente una struttura granulare che non riflette la vera dinamica continua del valore dell'asset.

Per ottenere stime non distorte dei momenti realizzati, è necessario selezionare una frequenza di campionamento che bilanci la necessità di catturare la variabilità intragiornaliera con l'esigenza di limitare l'impatto dell'errore di microstruttura. Nel presente studio si è adottata una frequenza di campionamento al minuto, che costituisce un compromesso molto utilizzato anche in letteratura, tale scelta consente di mitigare efficacemente gli effetti dell'errore di microstruttura con il contrappasso di una perdita di informazione rispetto ad altri campionamenti con frequenza ancora più elevate.

Prendendo come riferimento l'analisi presentata da Bandi, Kolokolov et al. (2023), si esamineranno le principali fonti di distorsione che affliggono gli stimatori di momenti realizzati. Tali distorsioni si possono ricondurre a due categorie: da un lato, problemi intrinseci alla natura dei dati ad alta frequenza, come i salti nei prezzi; dall'altro fenomeni specifici del mercato, quali la price staleness e la trade inaction. Per facilitarne lo studio e la caratterizzazione si procede a dividere l'andamento del processo dei prezzi in due componenti, una componente continua e una componente discontinua, di salto, quindi si considereranno due sottoinsiemi complementari di Ω definiti come:

$$\begin{aligned}\Omega_{[0,t_s]}^c &:= \{\omega \in \Omega : X_s(\omega) \text{ è continua su } [0, t_s]\}, \\ \Omega_{[0,t_s]}^j &:= \{\omega \in \Omega : X_s(\omega) \text{ è discontinua su } [0, t_s]\}\end{aligned}$$

Si assuma che $\{B_{j,n}\}$ sia un array triangolare di variabili casuali i.i.d. di Bernoulli, indipendenti da X , con $\mathbb{E}[B_{j,n}] = p_\theta \in [0, 1]$. Dove p_θ indica la probabilità di price staleness nel periodo.

Fatte queste premesse iniziamo ad analizzare gli effetti che la price staleness ha sugli stimatori nella componente continua. Come mostrato nel paper di Bandi, Kolokolov et al. (2023) lo stimatore di potenza della varianza realizzata, con $r = 2$, non sembra essere influenzato dalla price staleness rimanendo asintoticamente non distorto.

Valutando gli effetti della price staleness sulle funzioni dispari come l'asimmetria, che ha $r = 3$, si vede come anche questi stimatori siano asintoticamente non distorti ma mostrano un sensibile aumento della variabilità delle stime all'aumentare della percentuale di price staleness.

Al contrario di quanto visto in precedenza invece le funzioni pari e quindi anche il momento quarto, $r = 4$, presentano stimatori fortemente dipendenti dalla percentuale di zeri nei dati, quindi essi risulteranno stimatori distorti dalla price staleness. Si mostra teoricamente anche che all'aumentare della percentuale di zeri aumenta sensibilmente la distorsione degli stimatori.

Passando alla valutazione e all'analisi delle distorsioni che affliggono la componente discontinua e di salto dei prezzi delle criptovalute, siamo a conoscenza dalla teoria che gli stimatori saranno influenzati principalmente dalla presenza di salti nei dati e poi in tono minore anche dalla percentuale di zeri.

Lo stimatore della varianza realizzata risulta essere ancora una volta robusto rispetto alla presenza di salti e alla presenza di price staleness e trade inaction; viene sostanzialmente confermato quanto detto per la componente continua, vista l'assenza di distorsione riconducibili alla presenza di salto.

Al contrario gli stimatori dei momenti di ordine superiore non sono robusti rispetto alla presenza di salti e risultano esserne fortemente influenzati. Sempre dall'articolo è stato dimostrato teoricamente come per il momento terzo, asimmetria $r = 3$, l'asimmetria realizzata può essere interpretata solo come una misura con segno dei salti nell'intervallo di riferimento; quindi valori elevati positivi (o negativi) di SK supporterebbero la presenza di un numero sufficientemente elevato e/o di salti positivi (o negativi) sufficientemente ampi nell'intervallo. Al contrario, valori ridotti di SK sarebbero sintomatici dell'assenza di salti di grande entità nello stesso intervallo temporale.

Per la curtosi $r = 4$, il suo stimatore realizzato si comporta diversamente, visto che

risulta essere fortemente influenzata dalla presenza sia dei salti che della percentuale di price staleness nei dati. La curtosi realizzata quindi mostra un comportamento per il quale all'aumentare del numero di osservazioni n lo stimatore tende a divergere verso infinito portando come risultato lo stimatore ad assumere valori molto elevati e distorti.

2.3 Metodi di correzione degli stimatori

Come valutato nel paragrafo precedente, gli stimatori di power variation nella loro formulazione standard soffrono di molteplici problematiche che determinano distorsioni sistematiche in tutti i momenti realizzati di ordine superiore al secondo. Tra le cause principali di tali distorsioni figurano la price staleness e la trade inaction.

Lavorando con dati sui prezzi delle criptovalute campionati a frequenza di 1 minuto, si ottiene giornalmente una griglia di osservazioni equispaziate $\{t_1, t_2, \dots, t_n\}$, che partiziona l'orizzonte delle 24 ore in intervalli unitari. La price staleness e la trade inaction determinano il riempimento della griglia con numerosi intervalli caratterizzati da prezzi stazionari, i quali producono rendimenti nulli che, come discusso nel capitolo precedente, rappresentano una fonte critica di distorsione negli stimatori dei momenti realizzati.

Per rimuovere queste distorsioni e isolare gli stimatori dall'impatto di price staleness e trade inaction, un primo approccio metodologico prevede la modifica della struttura temporale della griglia di osservazione.

La nuova griglia non sarà più equispaziata ma sarà una griglia di N_n punti $\{\tau_0, \dots, \tau_{N_n}\}$ tale che i rendimenti siano diversi da zero in ogni intervallo: $\tau_0 = t_k$, $k = \min\{j : B_{t_j} \neq 0\}$, e $\tau_l = t_k$, $k = \min\{j : B_{t_j} \neq 0, t_j > \tau_{l-1}\}$. Sia $\Delta_{\tau_i} X = X_{\tau_i} - X_{\tau_{i-1}}$ e $\delta(n, i) = \tau_i - \tau_{i-1}$ a denotare, rispettivamente, i rendimenti non nulli non equidistanti e le loro durate.

In questo modo con la nuova griglia non avremo più la presenza di rendimenti nulli, riuscendo così ad eliminare le fonti di distorsione e di aumento della volatilità per gli stimatori dei momenti realizzati, sperando così di ottenere stimatori più corretti e precisi.

Di seguito si definiscono con una formulazione generica gli stimatori di power variation corretti per i momenti realizzati; i quali saranno stimati sulla nuova griglia

di osservazioni appena introdotta:

$$PV_r^c[f, \tilde{X}] = \sum_{j=1}^{N_n} \Delta_{\tau_{j,n}} f \left((\Delta_{\tau_{j,n}})^{-1/2} \Delta_{\tau_j} \tilde{X} \right) \quad (2.12)$$

Il termine $(\Delta_{\tau_{j,n}})^{-1/2}$ nella funzione f tiene conto della nuova griglia e del nuovo numero effettivo di osservazioni, sostituendo la standardizzazione originale (ovvero $n^{1/2}$). Analogamente, la precedente standardizzazione della somma mediante il numero di osservazioni $\Delta_n = 1/n$ è ora sostituita da $\Delta_{\tau_{j,n}}$. In questo senso, lo stimatore corretto per la presenza di price staleness non richiede altro che il campionamento in corrispondenza degli aggiornamenti di prezzo e l'utilizzo della nuova griglia di campionamento.

Un secondo metodo per la correzione degli stimatori si basa sul troncamento, ad esempio per la stima della varianza integrata vengono considerati esclusivamente i rendimenti che, in valore assoluto, non superano una soglia critica opportunamente scelta. Tale soglia permette di filtrare sia i rendimenti nulli o estremamente piccoli, prodotti da price staleness e trade inaction, che i rendimenti anomali dovuti a discontinuità nei prezzi.

L'approccio basato sul troncamento rimane robusto anche con griglie di campionamento irregolari, purché la calibrazione della soglia tenga conto della presenza di trade inaction e price staleness.

Lo stimatore di potenza troncata realizzata (TPV) è definito come

$$TPV_p[f; \tilde{X}] = n^{r/2-1} \sum_{j=1}^n f(\Delta_j \tilde{X}) \cdot \mathbb{I}_{\{|\Delta_j \tilde{X}| < v_n\}} \quad (2.13)$$

dove $\mathbb{I}_{\{A\}}$ denota la funzione indicatrice dell'insieme A e v_n è la soglia di riferimento che può essere definita con una moltitudine di approcci; tra le varie soluzioni ne adottiamo una relativamente semplice:

$$v_n = \gamma \sigma_{\text{MAD}}, \quad \sigma_{\text{MAD}} = \text{median}(|r_{t-1+i\Delta} - \text{median}(r_{t-1+i\Delta})|). \quad (2.14)$$

Lo stimatore σ_{MAD} della volatilità in alta frequenza risulta essere poco sensibile ai valori estremi e il fattore di scala γ consente di calibrare la soglia; inoltre con questo approccio la soglia cambierà ogni giorno così da essere più precisa e meno penalizzante.

Gli stimatori con troncamento, pur rappresentando un miglioramento rispetto alle formulazioni classiche degli stimatori di power variation, necessitano di ulteriori

correzioni per risultare effettivamente robusti in presenza di trade inaction e price staleness.

La correzione si rende necessaria poiché il semplice troncamento non elimina completamente le distorsioni indotte dalla natura intermittente della griglia di osservazione: i rendimenti nulli continuano a influenzare la stima attraverso la loro presenza nella sequenza temporale, anche quando vengono esclusi dal calcolo tramite la soglia. Per affrontare questo problema, si introduce una versione modificata degli stimatori TPV che incorpora un meccanismo di campionamento casuale esplicito. Tale approccio consente di riequilibrare il peso delle osservazioni informative rispetto a quelle ridondanti generate da prezzi stazionari. La formulazione corretta dell'estimatore TPV per i momenti realizzati è definita come segue::

$$TPV_r^c[f, \tilde{X}] = \sum_{j=1}^{N_n} \Delta_{\tau_{j,n}} f \left((\Delta_{\tau_{j,n}})^{-1/2} \Delta_{\tau_j} \tilde{X} \right) \cdot \mathbb{I}_{\{|\Delta_{\tau_j} \tilde{X}| < \nu_n(\Delta_{\tau_{j,n}})\}} \quad (2.15)$$

La definizione della soglia per gli stimatori corretti segue lo stesso approccio metodologico descritto precedentemente, con una modifica sostanziale: essendo ora la calibrazione basata sulle durate effettive degli intervalli di campionamento ($\Delta_{\tau_{j,n}}$) piuttosto che su intervalli uniformi, quindi per la determinazione della soglia si utilizzano i rendimenti calcolati rispetto alla nuova griglia irregolare di osservazioni, i quali incorporano già l'informazione sulla variabilità temporale degli intervalli.

Si può dimostrare che gli stimatori di potenza troncata realizzata corretti $TPV_p^c[f, \tilde{X}]$ convergono in probabilità allo stesso limite di $PV_p^c[f, \tilde{X}]$ e $PV_p[f, \tilde{X}]$.

Pertanto, gli stimatori condividono la medesima distribuzione asintotica, risultando asintoticamente equivalenti senza perdita di efficienza.

2.4 Analisi grafiche delle differenze tra stimatori classici e corretti

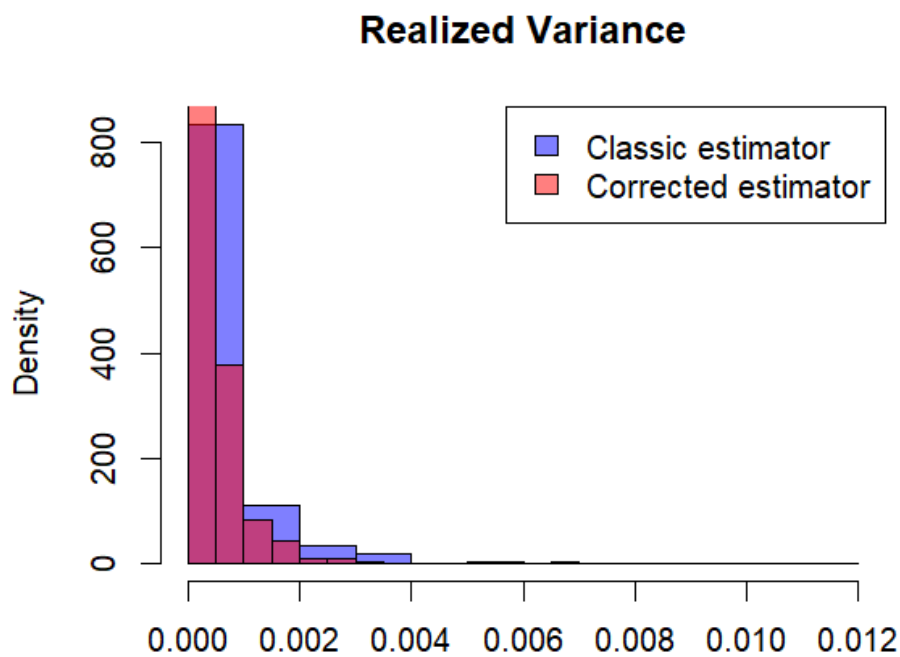
Il presente capitolo rappresenta la sezione di valutazione empirica, con l'obiettivo di testare sui dati reali a mia disposizione l'efficacia delle correzioni proposte nei capitoli precedenti. Utilizzando dati ad alta frequenza delle cinque criptovalute, si intende mostrare che gli stimatori classici di power variation sono soggetti a distorsioni sistematiche quando applicati a periodi caratterizzati da price staleness e trade inaction, e che tali distorsioni vengono efficacemente corrette attraverso l'adozione di griglie di campionamento irregolari o tecniche di troncamento calibrate.

L'analisi si articola nel confronto sistematico tra stimatori classici e corretti per i momenti realizzati di ordine secondo, terzo e quarto, corrispondenti rispettivamente a varianza realizzata, asimmetria e curtosi. Per ciascun momento, verranno presentate evidenze grafiche e quantitative che illustrano l'entità delle distorsioni negli stimatori standard e i miglioramenti ottenuti attraverso le correzioni proposte.

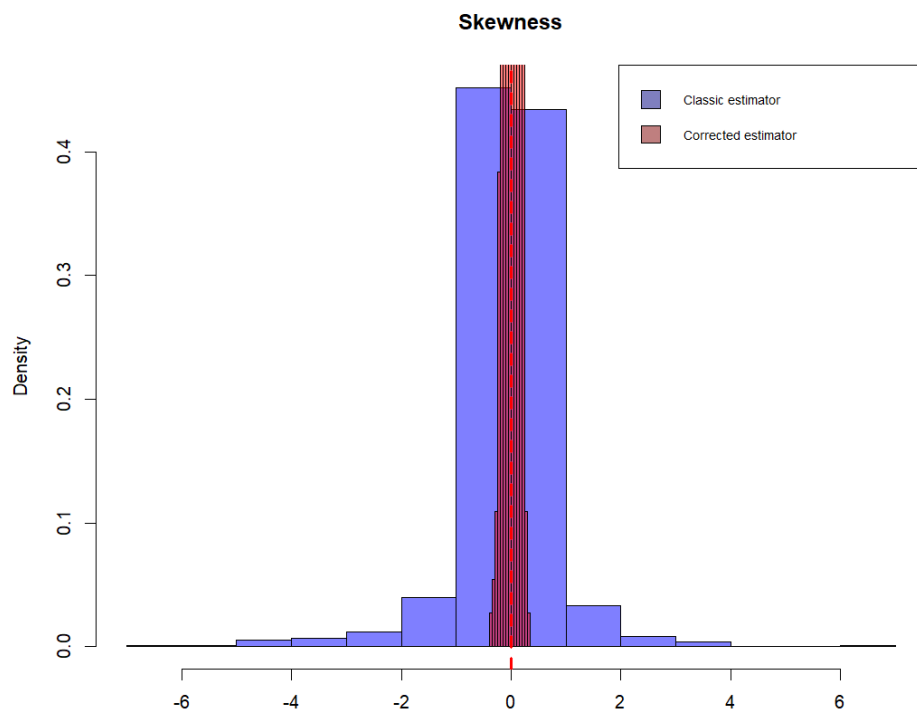
L'indagine sarà eseguita sull'intero dataset delle cinque criptovalute analizzate nel primo capitolo, Bitcoin, Ethereum, XRP, Cardano e Solana, permettendo di condurre un'analisi comparativa che evidenzi sia le regolarità comuni nel comportamento degli stimatori, riconducibili alle caratteristiche strutturali del mercato, sia le specificità legate alle differenze in termini di percentuale di rendimenti nulli sul totale e alle diverse percentuali riconducibili ai due diversi fenomeni che causano la presenza di zeri nei dati.

In tutte le analisi che seguono, il confronto si concentrerà sugli stimatori classici di power variation e sugli stimatori corretti basati sul troncamento, permettendo di valutare empiricamente l'efficacia delle correzioni nell'eliminare le distorsioni indotte da trade inaction e price staleness.

Si procede partendo dall'analisi di Bitcoin, per il quale vengono inizialmente confrontate le stime della varianza realizzata ottenute con i due diversi approcci metodologici.



(a) Confronto tra stimatore classico e corretto per la varianza realizzata



(b) Confronto tra stimatore classico e corretto per l'asimmetria realizzata

Figura 2.1: Confronto tra stimatori classici e corretti per varianza e asimmetria realizzate di Bitcoin

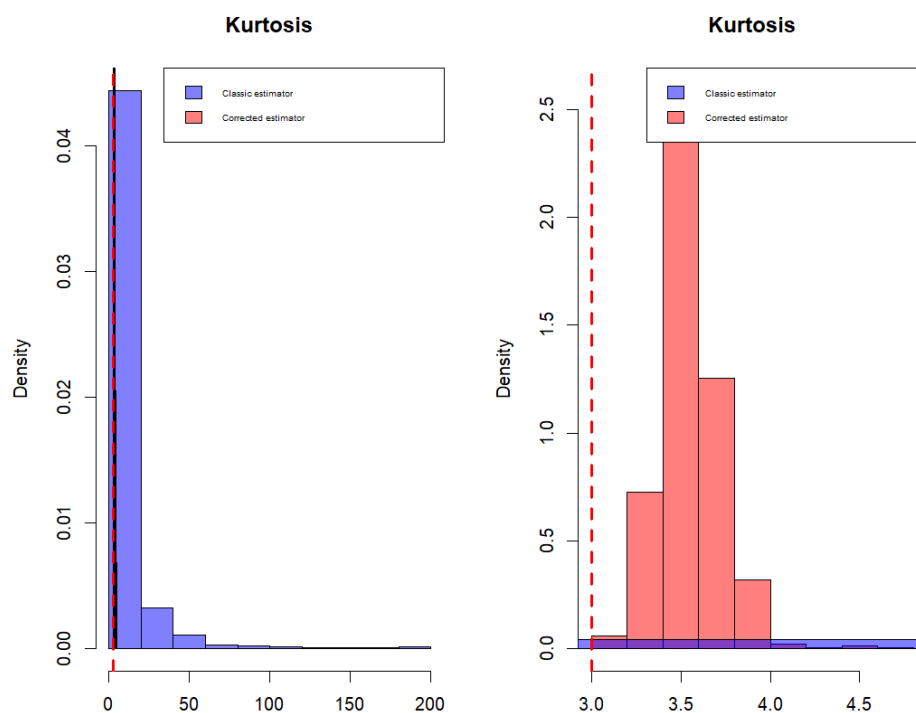


Figura 2.2: Confronto tra stimatore classico e corretto per la curtosi realizzata di Bitcoin

L'analisi del primo istogramma, che confronta lo stimatore classico e quello corretto della varianza realizzata, conferma empiricamente quanto illustrato dal punto di vista teorico nei precedenti paragrafi. Lo stimatore classico non presenta distorsioni sistematiche nella stima del livello della varianza; tuttavia, rispetto allo stimatore corretto, si osserva un leggero incremento nella volatilità delle stime giornaliere, che si manifesta attraverso una maggiore dispersione dei valori attorno alla media. Questo comportamento è perfettamente coerente con la teoria perchè la presenza di rendimenti nulli indotti da price staleness e trade inaction non distorce il valore atteso dello stimatore classico del momento secondo, ma ne aumenta la varianza.

L'analisi delle distribuzioni empiriche dalla figura 2.1b dell'asimmetria stimata con i due approcci rivela un andamento diverso. Lo stimatore classico produce stime sostanzialmente non distorte, la distribuzione risulta infatti ben centrata attorno allo zero con la maggior parte della massa di probabilità concentrata nell'intervallo $[-2, 2]$, suggerendo l'assenza di bias sistematici. Tuttavia, emerge chiaramente una problematica in termini di code della distribuzione: lo stimatore classico genera occasionalmente valori estremi compresi tra -8 e 6 , indicando una maggiore instabilità delle stime e la presenza di outlier che riflettono l'amplificazione del rumore dovuto

ai rendimenti nulli. Al contrario, lo stimatore corretto presenta una distribuzione molto più concentrata attorno allo zero, con code sostanzialmente più leggere. Questa evidenza suggerisce che, sebbene la distorsione in media sia limitata, la correzione risulta fondamentale per ridurre la volatilità delle stime e per avvicinare la distribuzione empirica dello stimatore a quella attesa teoricamente sotto l'ipotesi di normalità dei rendimenti. La maggiore stabilità dello stimatore corretto lo rende più affidabile per applicazioni che richiedono precisione nella caratterizzazione dell'asimmetria.

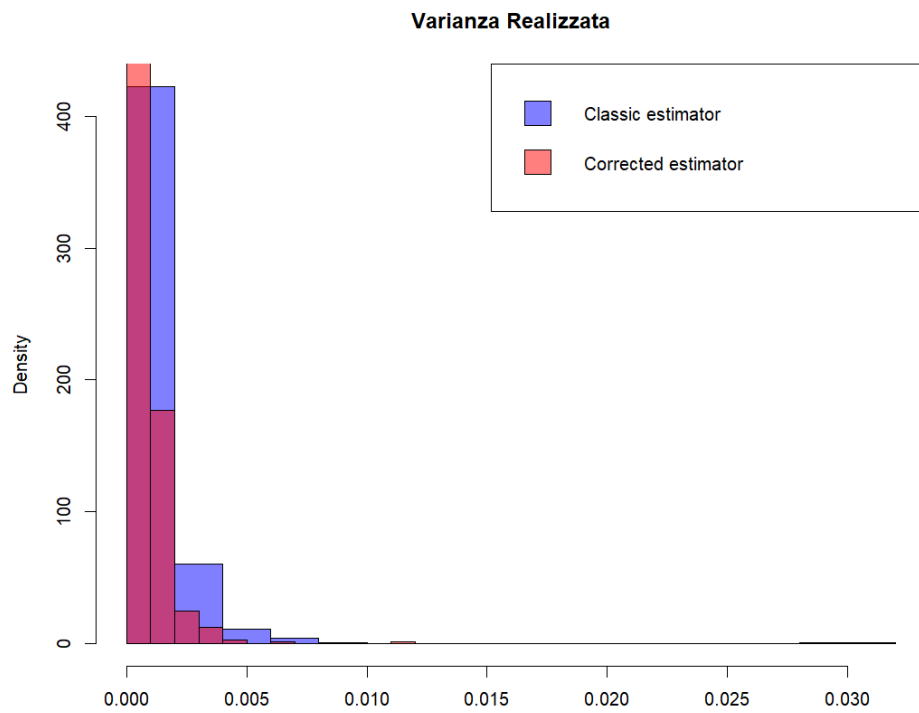
Per la stima della curtosi nella figura 2.2 sono stati prodotti due grafici complementari: il primo mostra l'intera distribuzione empirica, mentre il secondo presenta uno zoom sull'intervallo attorno al valore 3, che rappresenta il valore di riferimento teorico per la distribuzione normale. L'analisi rivela che lo stimatore classico della curtosi è pesantemente distorto, producendo stime sistematicamente sovrastimate che raggiungono anche valori superiori a 100, del tutto incompatibili con l'assunzione di normalità dei rendimenti. Questa distorsione estrema è direttamente riconducibile alla presenza di rendimenti nulli, quando questi vengono inclusi nel calcolo della power variation di ordine quattro, contribuiscono in modo sproporzionato al denominatore degli stimatori normalizzati, generando valori artificialmente elevati. L'applicazione della correzione risolve drasticamente il problema, l'istogramma dello stimatore corretto mostra una distribuzione concentrata nell'intervallo $[3,4]$, con valori coerenti con quelli attesi per processi finanziari ad alta frequenza.

È significativo notare che questi risultati emergono nonostante Bitcoin presenti una percentuale di rendimenti nulli pari solamente al 3,71% del totale degli intervalli. Quindi anche una percentuale di zeri relativamente contenuta genera distorsioni sostanziali nello stimatore del momento quarto.

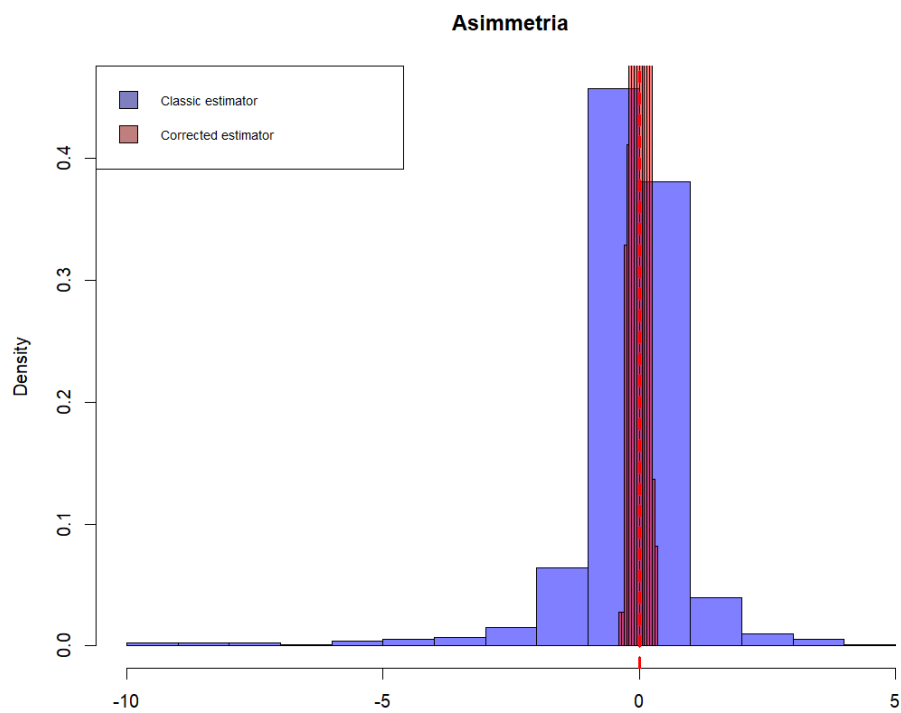
Invece lo stimatore corretto elimina efficacemente la distorsione per il momento quarto e riduce significativamente la volatilità per i momenti secondo e terzo, validando empiricamente quanto sottolineato teoricamente, affermando con forza la necessità di adottare tali correzioni nelle successive analisi basate sui momenti realizzati.

Nell'analisi delle criptovalute che seguono, i grafici saranno accompagnati da commenti più concisi. Ci si aspetta che tutte le criptovalute presentino risultati simili, salvo differenze attribuibili alla percentuale di zeri presenti nei dati, che mi aspetto possa introdurre distorsioni di diversa entità.

L'analisi inizia da Ethereum.



(a) Confronto tra stimatore classico e corretto per la varianza realizzata



(b) Confronto tra stimatore classico e corretto per l'asimmetria realizzata

Figura 2.3: Confronto tra stimatori classici e corretti per varianza e asimmetria realizzate di Ethereum

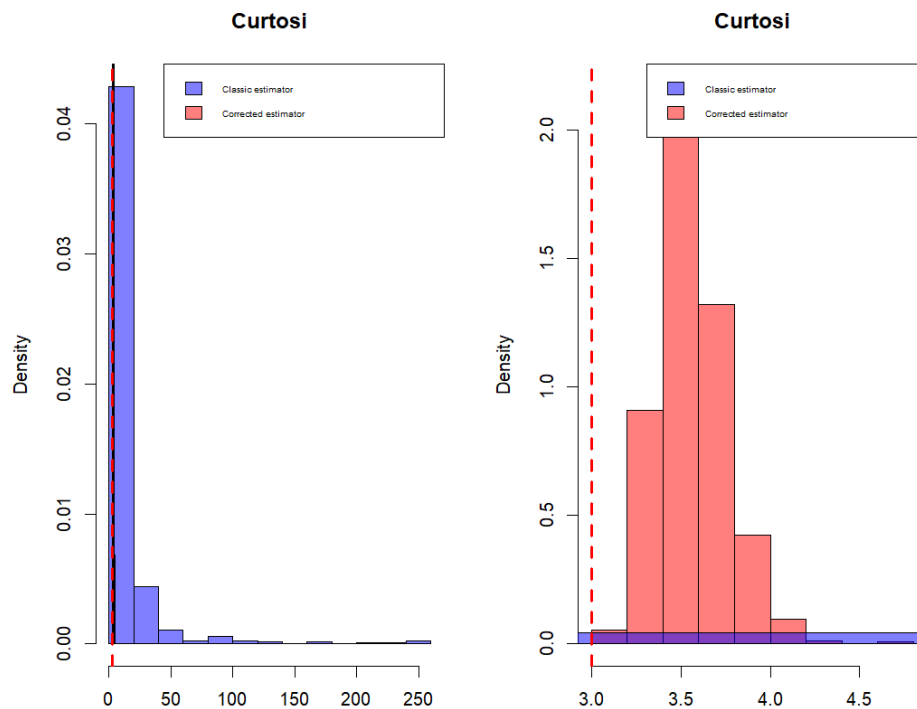


Figura 2.4: Confronto tra stimatore classico e corretto per la curtosi realizzata di Ethereum

Dal grafico delle differenze tra i due stimatori della varianza realizzata, Figura 2.3a, emergono risultati analoghi a quelli osservati per Bitcoin; lo stimatore classico presenta una volatilità delle stime più elevata rispetto a quello corretto, pur confermandosi non distorto.

Per quanto riguarda l'asimmetria e gli stimatori del momento terzo realizzato, Figura 2.3b, lo stimatore classico mostra una maggiore volatilità, in particolare nella coda sinistra, che risulta più pesante anche rispetto a Bitcoin e assume valori più distanti da zero. Anche in questo caso, tuttavia, non si rileva distorsione nello stimatore classico di power variation; lo stimatore corretto riduce efficacemente la volatilità e centra maggiormente le stime attorno a zero che è il valore di riferimento.

L'analisi della curtosi tramite gli stimatori del momento quarto realizzato evidenzia invece una marcata distorsione dello stimatore classico. Sebbene la percentuale di zeri sul totale sia pari al 10,01% per Ethereum, come visto nel paragrafo 1.3 principalmente dovuti a trade inaction, lo stimatore classico restituisce valori molto elevati in linea con quanto osservato per Bitcoin. Lo stimatore corretto risulta essere molto più coerente con i valori tipici della distribuzione normale mostrandoci come anche in questo caso la correzione abbia l'effetto desiderato. Si rileva un leggero

eccesso di curtosi, più accentuato a causa della maggiore percentuale di zeri nei dati, ma la correzione si dimostra comunque efficace.

Ora si passa all'analisi delle stime ottenute basandoci sui dati di Solana.

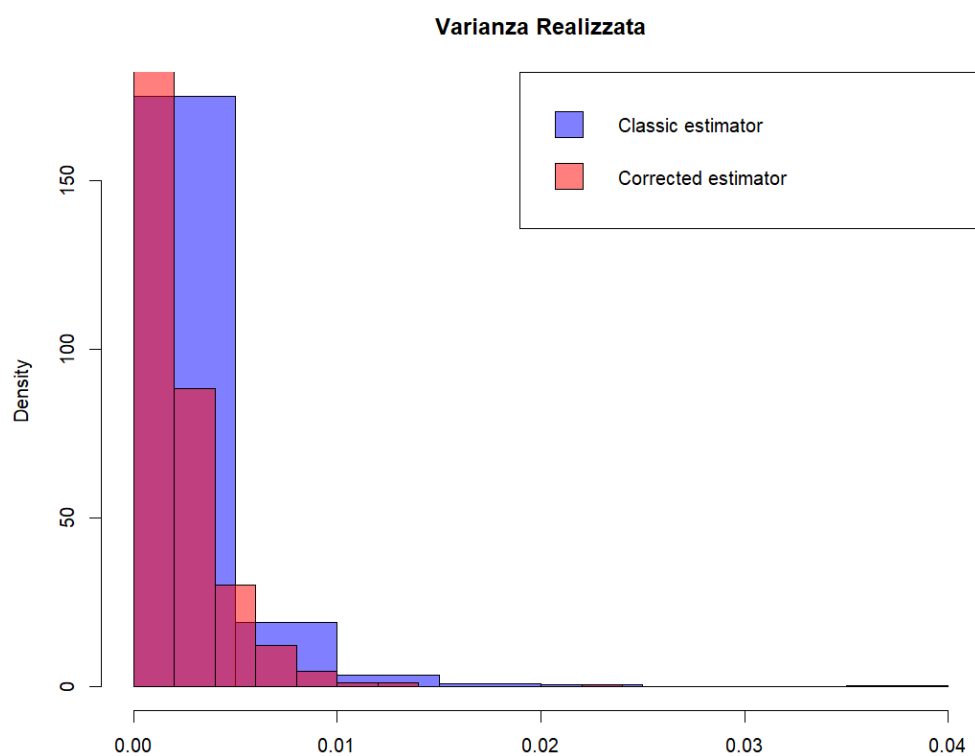
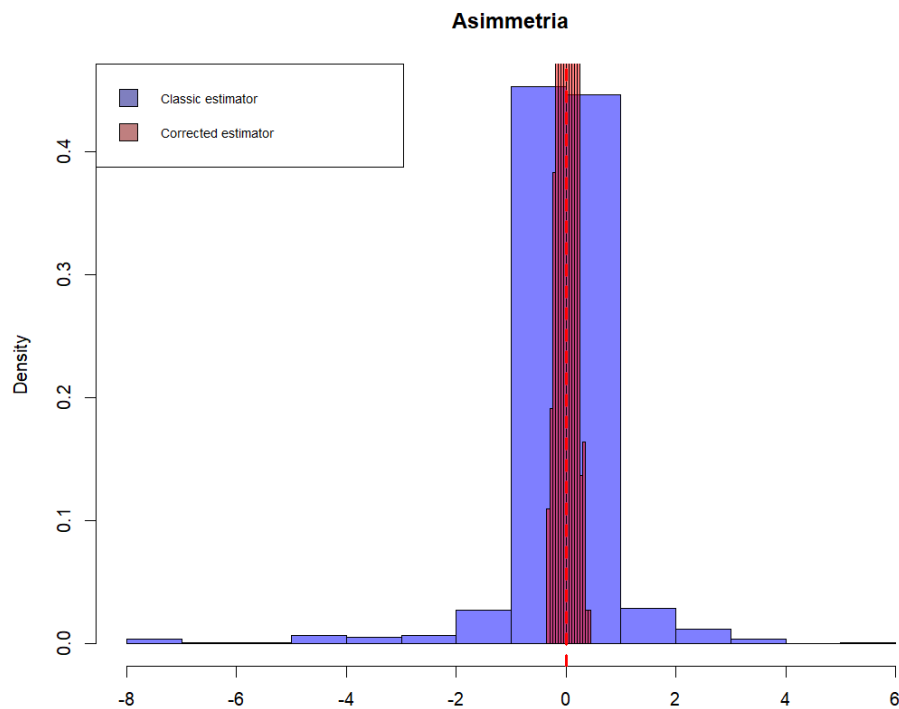
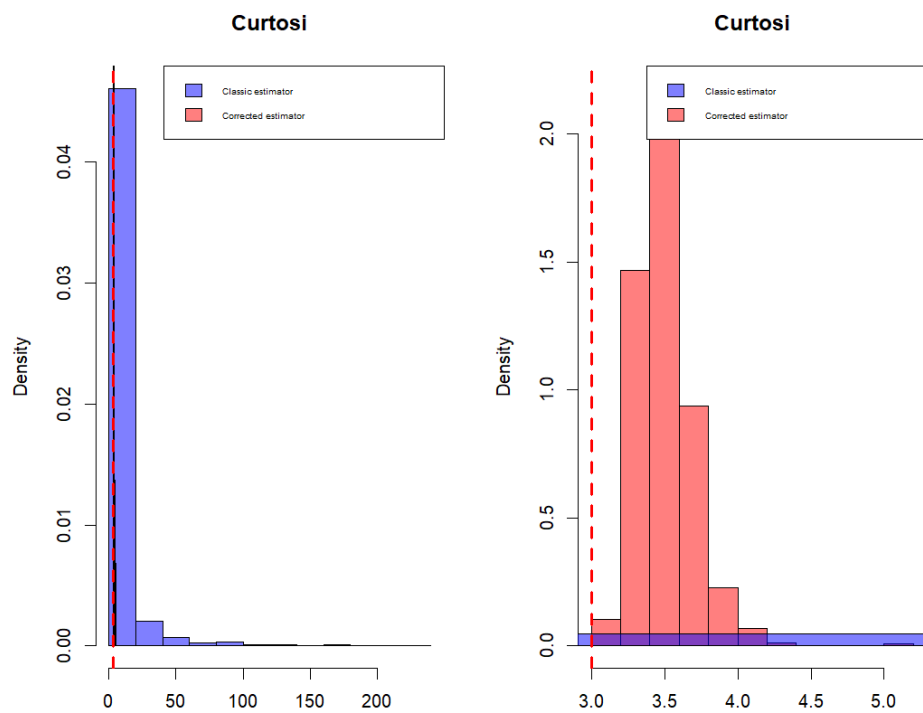


Figura 2.5: Confronto tra stimatore classico e corretto per la varianza realizzata di Solana



(a) Confronto tra stimatore classico e corretto per l'asimmetria realizzata



(b) Confronto tra stimatore classico e corretto per la curtosi realizzata

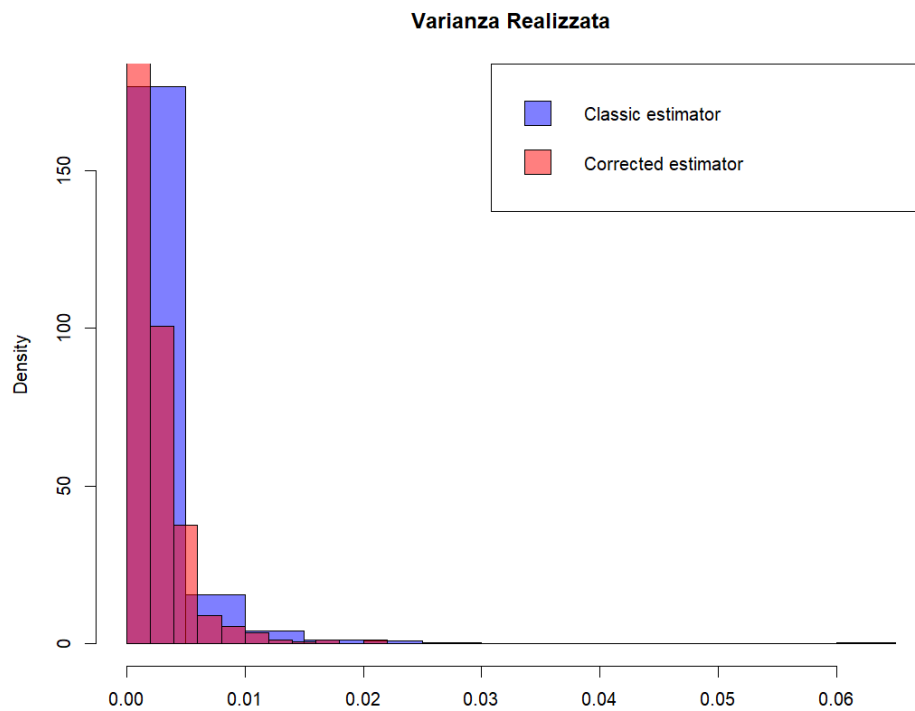
Figura 2.6: Confronto tra stimatori classici e corretti per asimmetria e curtosi realizzate di Solana

Per le differenze tra i due stimatori della varianza realizzata valgono le considerazioni già espresse per le precedenti criptovalute.

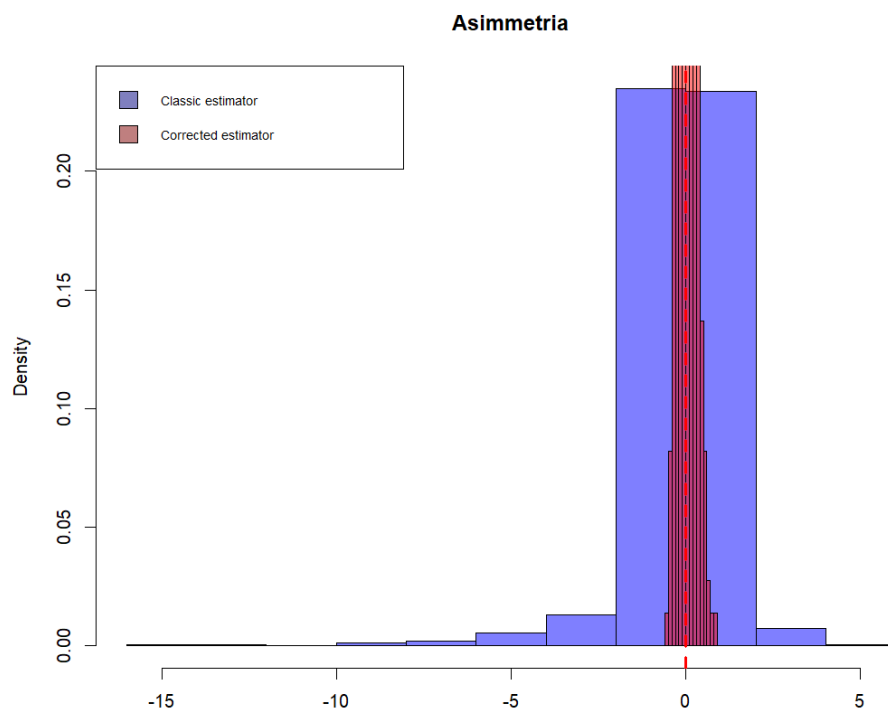
Per gli stimatori del momento terzo realizzato, si conferma la maggiore volatilità dello stimatore classico, che tuttavia non risulta distorto. La distribuzione delle frequenze è più simile a bitcoin che a ethereum, senza valori particolarmente estremi. Lo stimatore corretto riduce efficacemente la volatilità e centra i valori attorno a zero, coerentemente con la distribuzione normale teorica dei rendimenti.

Per la curtosi, anche solana conferma la forte distorsione dello stimatore classico del momento quarto. Lo stimatore corretto si dimostra efficace, concentrando l'intera massa di probabilità nell'intervallo $[3; 4,5]$. Le stime ottenute con lo stimatore classico risultano leggermente meno distorte rispetto alle altre criptovalute, mentre quelle corrette si avvicinano maggiormente al valore di riferimento 3 rispetto a quanto visto con ethereum e bitcoin. Questi leggeri miglioramenti nei risultati probabilmente sono dovuti alla diversa composizione degli zeri nei dati, perchè pur rappresentando il 13,39% del totale, solo il 70% circa di essi deriva da trade inaction (la percentuale più bassa tra tutte le criptovalute analizzate), mentre la restante quota è attribuibile a price staleness, ciò sembra comportare una distorsione minore e porta ad una correzione più incisiva.

Ora si passa all'analisi dei risultati basati sui dati di cardano.



(a) Confronto tra stimatore classico e corretto per la varianza realizzata



(b) Confronto tra stimatore classico e corretto per l'asimmetria realizzata

Figura 2.7: Confronto tra stimatori classici e corretti per varianza e asimmetria realizzate di Cardano

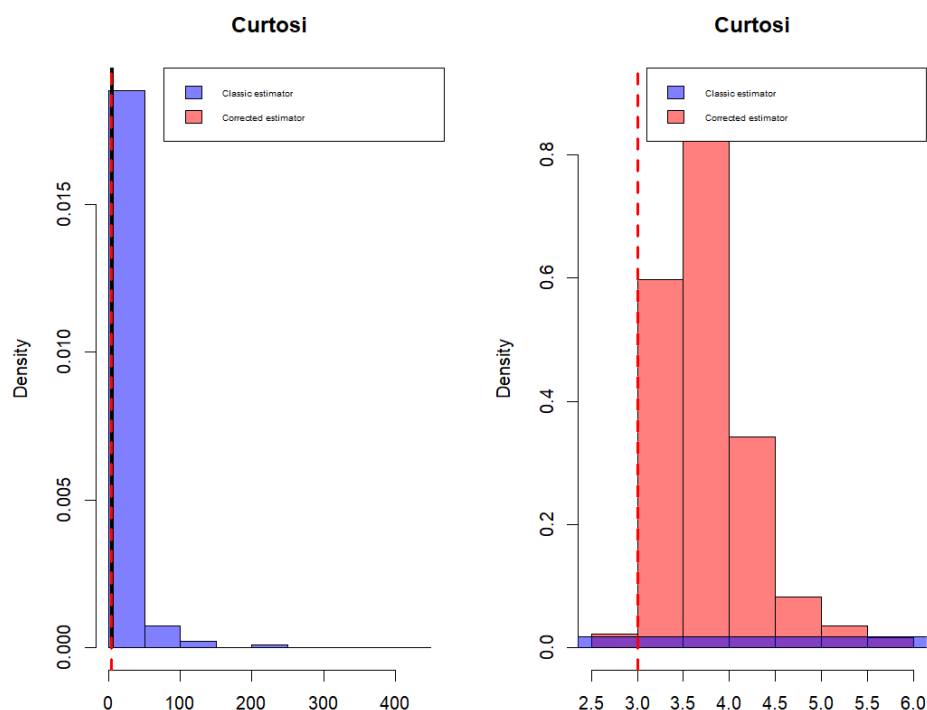


Figura 2.8: Confronto tra stimatore classico e corretto per la curtosi realizzata di Cardano

Per le differenze tra i due stimatori della varianza realizzata valgono le considerazioni già espresse per le precedenti criptovalute.

Per le stime del momento terzo, i grafici evidenziano immediatamente un'estesa coda sinistra nella distribuzione dello stimatore classico, evidenziando una grande volatilità delle stime. Lo stimatore classico rimane tuttavia non distorto, poiché la massa principale di probabilità si concentra attorno allo zero. La correzione applicata si rivela molto efficace, eliminando completamente questa volatilità e ottenendo stime dell'asimmetria realizzata corrette che risultano nettamente più stabili e contenute attorno a zero.

Per le stime della curtosi, si conferma la marcata distorsione dello stimatore classico, che in alcune giornate raggiunge valori estremamente elevati. Ciò è dovuto anche all'elevata percentuale di zeri sul totale, che per Cardano si attesta al 47,39% (il valore più alto tra tutte le criptovalute analizzate), comportando una notevole inefficienza dello stimatore. Lo stimatore corretto, grazie alla correzione applicata, riporta l'intera massa di probabilità attorno al valore di curtosi pari a tre, risolvendo efficacemente i problemi di distorsione del momento quarto legati alle alte percentuali di rendimenti nulli.

Infine si eseguono le medesime analisi anche per la criptovaluta XRP.

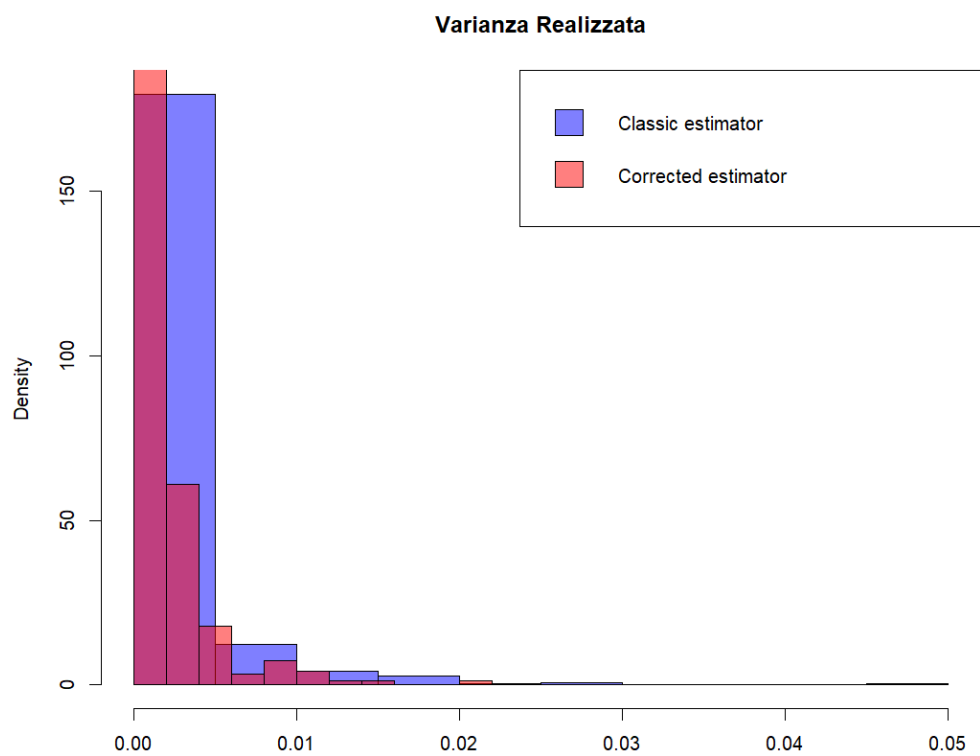
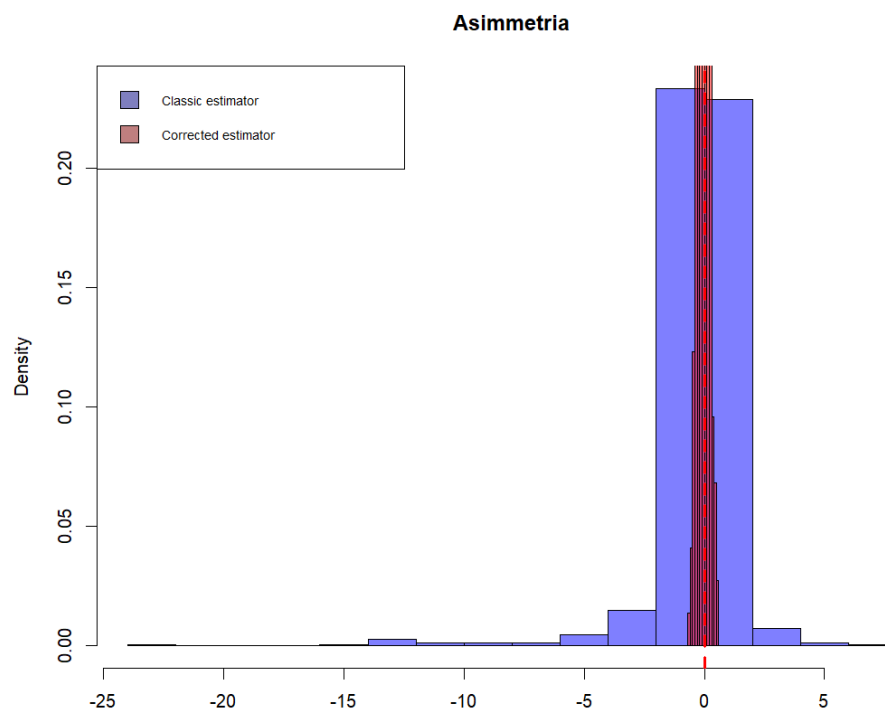
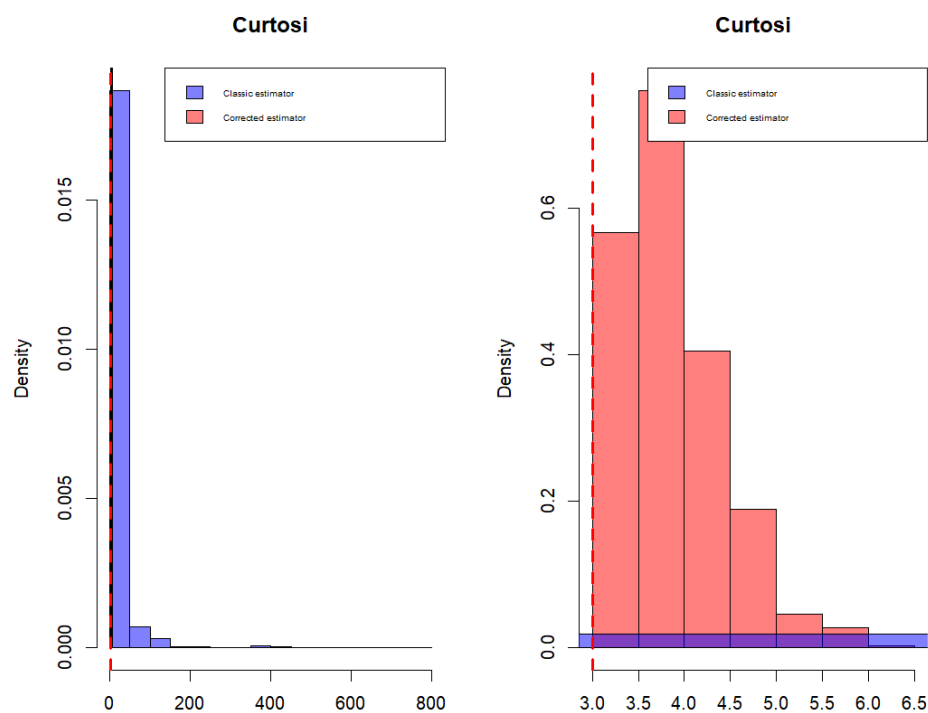


Figura 2.9: Confronto tra stimatore classico e corretto per la varianza realizzata di XRP



(a) Confronto tra stimatore classico e corretto per l'asimmetria realizzata



(b) Confronto tra stimatore classico e corretto per la curtosi realizzata

Figura 2.10: Confronto tra stimatori classici e corretti per asimmetria e curtosi realizzate di XRP

Per le differenze tra i due stimatori della varianza realizzata valgono le considerazioni già espresse per le precedenti criptovalute.

L'istogramma delle distribuzioni del momento terzo evidenzia inequivocabilmente come XRP presenti un'elevatissima volatilità nelle stime ottenute con lo stimatore classico, che tuttavia rimane sostanzialmente non distorto. Lo stimatore corretto si conferma efficace nel risolvere il problema dell'eccessiva volatilità, in linea con quanto osservato per le altre criptovalute.

Per la curtosi, lo stimatore classico del momento quarto risulta estremamente distorto, con valori che in alcune giornate superano 600, ben lontani dal valore di riferimento di 3 della distribuzione normale. Lo stimatore corretto migliora nettamente la situazione, riportando i valori nell'intervallo $[3; 6]$, sebbene questi rimangano relativamente elevati rispetto alle altre criptovalute. Due fattori possono spiegare questo fenomeno, in primo luogo, XRP ha registrato nel giro di poche settimane un'impennata di prezzo da pochi centesimi a qualche euro, producendo rendimenti eccezionalmente elevati e distanti dalla normalità; in secondo luogo, la percentuale di zeri nei dati è molto elevata (33,88%), di cui quasi la metà è attribuibile a price staleness, la percentuale più alta tra tutte le criptovalute analizzate e ciò contribuisce ad aumentare la volatilità anche delle stime corrette.

Complessivamente, per l'insieme delle criptovalute analizzate, si è evidenziato empiricamente come le correzioni applicate agli stimatori di power variation consentano di mitigare in modo significativo sia le distorsioni sia l'aumento della variabilità delle stime indotti dalla presenza di rendimenti nulli nei dati riconducibili a fenomeni di price staleness e trade inaction.

I risultati si mantengono robusti nonostante l'eterogeneità marcata delle percentuali di rendimenti nulli sul totale delle osservazioni considerate di ciascuna criptovaluta.

Capitolo 3

Studio della componente di salto

3.1 Inquadramento teorico e scomposizione della varianza realizzata

Riprendendo quanto presentato nei precedenti capitoli, i prezzi possono essere suddivisi in due componenti: una continua e una discontinua (o di salto). Si considerano quindi due sottoinsiemi complementari di Ω definiti come:

$$\begin{aligned}\Omega_{[0,t_s]}^c &:= \{\omega \in \Omega : X_s(\omega) \text{ è continua su } [0, t_s]\}, \\ \Omega_{[0,t_s]}^j &:= \{\omega \in \Omega : X_s(\omega) \text{ è discontinua su } [0, t_s]\}\end{aligned}$$

Il processo osservato del prezzo $\tilde{X}$ è ancora il seguente:

$$\tilde{X}_{j\Delta_n} = \tilde{X}_{j\Delta_n}(1 - B_{j,n}) + \tilde{X}_{(j-1)\Delta_n}B_{j,n}, \quad (3.1)$$

con condizione iniziale $\tilde{X}_{0\Delta_n} = X_{0\Delta_n}$, dove $\Delta_n = \frac{1}{n}$ rappresenta l'ampiezza dell'intervallo di campionamento, $\{t_{j,n} = j\Delta_n \mid j = 1, \dots, n\}$ costituisce una partizione deterministica dell'intervallo $[0, t]$, e $\{B_{j,n} \mid j = 1, \dots, n\}$ è un array triangolare di variabili casuali di Bernoulli che identificano la presenza di prezzi ripetuti. Quando $B_{j,n} = 1$, il prezzo osservato rimane invariato rispetto all'istante precedente; quando $B_{j,n} = 0$, si osserva il prezzo efficiente.

L'evoluzione dei prezzi presenta, in alcuni casi, delle discontinuità la cui presenza non è coerente con il processo a tempo continuo considerato finora. Si rende quindi necessaria una generalizzazione del modello che consenta di ammettere anche salti nei prezzi:

$$r_t = \tilde{X}_t - \tilde{X}_{t-1} = \int_{t-1}^t \mu_\tau d\tau + \int_{t-1}^t \sigma_\tau dW_\tau + \sum_{i=1}^{N_t} J_i$$

L'obiettivo rimane la stima della varianza integrata, che mantiene la sua forma:

$$IV(t-1, t) = \int_{t-1}^t \sigma_\tau^2 d\tau$$

Tuttavia, la variazione quadratica diventa:

$$QV(t-1, t) = \int_{t-1}^t \sigma_\tau^2 d\tau + \sum_{i=1}^{N_t} J_i^2$$

La conseguenza più rilevante dell'ingresso della sommatoria dei salti nella variazione quadratica riguarda la varianza realizzata (RV_t), che non risulta più uno stimatore consistente della varianza integrata. Si rende pertanto necessario utilizzare e implementare un nuovo stimatore consistente.

Tale stimatore è stato proposto da Barndorff-Nielsen e Shephard (2004), i quali suggeriscono di stimare la varianza integrata con la Bipower Variation (BPV) uno stimatore di tipo multipower.

Tenendo sempre come riferimento per il prezzo il modello appena descritto, lo stimatore multipower è caratterizzato in questo modo, senza perdita di generalità, si pone $T = 1$. Per un vettore di m numeri reali positivi $\mathbf{r} = [r_1, \dots, r_m]$ e un processo stocastico $\tilde{X}$, si definisce la multipower variation realizzata come:

$$MV(\tilde{X}; \mathbf{r}) = \frac{1}{n} \sum_{i=1}^{n-m+1} \left| \sqrt{n} \cdot \Delta_i \tilde{X} \right|^{r_1} \cdots \left| \sqrt{n} \cdot \Delta_{i+m-1} \tilde{X} \right|^{r_m} \quad (3.2)$$

In presenza di rendimenti nulli, gli stimatori multipower risultano distorti, con il bias moltiplicativo che dipende dai valori r_i , dalla probabilità di zeri p^ϕ e dal numero di potenze m utilizzate nel prodotto.

Ponendo $m = 1$, si ottiene che gli stimatori multipower risultano equivalenti agli stimatori di power variation specificati nel secondo capitolo. Di conseguenza, essi soffrono delle medesime distorsioni e problematiche già analizzate per gli stimatori di potenza. Ad esempio ora si mostra come lo stimatore di tipo multipower con $m=1$ e la sola presenza di $r_1 = 2$ equivalga alla varianza realizzata stimata tramite stimatori di power variation:

$$MV_t(\tilde{X}; [r_1 = 2]) = \frac{1}{n} \sum_{i=1}^{n-m+1} \left| \sqrt{n} \cdot \Delta_i \tilde{X} \right|^2 = \sum_{i=1}^{n-m+1} \left| \Delta_i \tilde{X} \right|^2 = RV_t = PV_2(\tilde{X}) \quad (3.3)$$

L'utilizzo degli stimatori multipower è basato sulla seguente intuizione avuta da Barndorff-Nielsen e Shephard (2004) nel loro articolo: assumendo che il numero di

salti sia finito in un periodo di tempo finito, la probabilità di osservare due salti consecutivi risulta molto piccola.

Questa assunzione è particolarmente rilevante per i test che valutano la presenza di salti a livello giornaliero e intragiornaliero.

Lo stimatore della varianza integrata proposto è:

$$BPV_t = MV_t(\tilde{X}; [1; 1]) = \mu_1^{-2} \frac{n}{n-1} \sum_{i=2}^n |r_{t-1+i\Delta}| |r_{t-1+(i-1)\Delta}|$$

dove $m = 2$ e $\mu_1 = E[|Z|]$ con Z una v.c. normale standardizzata e $\mu_1 = \sqrt{\frac{2}{\pi}}$

È importante sottolineare che Kolokolov e Renò (2024) riportano nel loro paper che nel caso classico con $r_1 = r_2 = 1$, la BPV_t risulta distorta verso il basso in presenza di rendimenti nulli.

Per gli stimatori di power variation, si è dimostrato che la varianza realizzata ($r = 2$) non presenta distorsione, mentre i momenti di ordine diverso da due risultano distorti in presenza di rendimenti nulli.

Per gli stimatori multipower, si è invece dimostrato che con somma delle potenze $\sum_{j=1}^m r_j < 3$ si osserva un bias verso il basso (sottostima), mentre con somma delle potenze $\sum_{j=1}^m r_j > 3$ si osserva un bias verso l'alto (sovrastima), con il caso $\sum_{j=1}^m r_j = 3$ che rappresenta una soglia critica di transizione.

Nel caso della BPV_t con $r_1 = r_2 = 1$, si ha $\sum r_j = 2 < 3$, da cui deriva la distorsione verso il basso. Tale distorsione ha implicazioni rilevanti per i test successivi, in particolare per il test BNS, e questa distorsione può spiegare le differenze sistematiche osservabili tra RV_t e BPV_t anche in assenza di salti.

Per lo stimatore di tipo multipower del momento secondo, BPV_t è stato valutato teoricamente che frequenze di campionamento tra 1 e 5 minuti, consentono di ottenere una stima consistente della varianza integrata anche in presenza di errore di microstruttura. Per questo studio si hanno a disposizione dati con frequenza di 1 minuto perciò si tiene conto correttamente dell'errore di microstruttura.

Risulta quindi possibile valutare senza problemi derivanti dall'errore di micro-struttura, il differenziale tra BPV e RV che corrisponde a:

$$\begin{aligned}
 RV(t-1, t) &\longrightarrow \int_{t-1}^t \sigma_\tau^2 d\tau + \sum_{i=1}^{N_t} J_i^2 \\
 BPV(t-1, t) &\longrightarrow \int_{t-1}^t \sigma_\tau^2 d\tau \\
 RV(t-1, t) - BPV(t-1, t) &\approx \sum_{i=1}^{N_t} J_i^2
 \end{aligned}$$

Tale differenza può essere utilizzata come misura per stimare l'importanza e la rilevanza della componente di salto sul totale della varianza realizzata.

Si noti che valori elevati delle differenze non indicano necessariamente la presenza di salti, poiché dipendono dalla volatilità legata al prezzo. La differenza converge al quadrato dei salti se presenti, altrimenti tende a zero.

In assenza di salti la RV risulta più efficiente della BPV; si rende quindi necessario discriminare tra presenza e assenza di salti così da utilizzare lo stimatore più efficiente in base alla situazione che ci si presenta.

In letteratura esistono diversi test per determinare la presenza di salti in un dato giorno. Nei prossimi paragrafi verranno illustrati i due test principali utilizzati in questa trattazione per valutare la presenza di salti sia a livello giornaliero che intragiornaliero.

3.2 Test BNS per la rilevazione dei salti giornalieri

Per analizzare la presenza di salti a livello giornaliero, si applica il test BNS nella versione proposta da Huang e Tauchen (2005).

La statistica test si basa principalmente sulla bipower variation (BPV) e sulla varianza realizzata (RV), sfruttando le loro proprietà di consistenza in presenza e in assenza di salti. Più precisamente:

- **In assenza di salti:** sia RV_t che BPV_t sono stimatori consistenti della varianza integrata, ma RV risulta più efficiente in termini di varianza asintotica.
- **In presenza di salti:** BPV_t rimane uno stimatore consistente della sola componente continua della varianza integrata, mentre RV_t risulta distorto verso l'alto a causa del contributo dei salti.

La statistica test si costruisce quindi sulla base della differenza standardizzata tra queste due quantità:

$$BNS_t = \frac{\sqrt{n} \frac{RV_t - BPV_t}{RV_t}}{\sqrt{\theta \max \left\{ 1, \frac{QPQ_t}{BPV_t^2} \right\}}} \xrightarrow{d} N(0, 1) \quad (3.4)$$

dove $\theta = \left(\frac{\pi}{2}\right)^2 + \pi - 5$ è una costante di standardizzazione e QPQ_t rappresenta la quad-power quarticity, necessaria per stimare la quarticity integrata del processo.

Per un dato giorno t , si calcolano RV_t , BPV_t e QPQ_t al fine di costruire la statistica test e determinare la presenza di salti. L'integrated quarticity, legata al momento quarto, viene stimata mediante uno stimatore multipower consistente e robusto ai salti che è la quad-power quarticity:

$$QPQ_t^n = \mu_1^{-4} n \sum_{i=4}^n |r_{t-1+i\Delta}| |r_{t-1+(i-1)\Delta}| |r_{t-1+(i-2)\Delta}| |r_{t-1+(i-3)\Delta}| \quad (3.5)$$

dove $\mu_1 = \sqrt{2/\pi}$ è il momento primo assoluto di una variabile casuale normale standard come per la stima della BPV_t .

La QPQ_t è uno stimatore multipower che come valutato in precedenza nel precedente paragrafo, sarà affetto da distorsioni essendo lo stimatore del momento quarto realizzato.

Si osserva che, sotto l'ipotesi nulla di assenza di salti, la statistica test converge in distribuzione a una normale standard. Tuttavia, dato che si assume che i salti siano eventi rari, si adotta un livello di significatività molto stringente, pari a $\alpha = 0.001$, per tutti i test BNS condotti successivamente per tutte le analisi.

Questa scelta è motivata dall'aspettativa che i salti si verifichino solo in una percentuale molto limitata di giorni; se così non fosse, i salti non potrebbero essere considerati eventi rari, ma dovrebbero essere interpretati come parte integrante della dinamica dei prezzi delle criptovalute.

In presenza di salti, la statistica test tende ad assumere valori elevati e positivi, poiché il numeratore cattura la somma quadratica dei salti, portando al rifiuto dell'ipotesi nulla. Il sistema d'ipotesi è il seguente:

H_0 : assenza di salti nel giorno t

H_1 : presenza di almeno un salto nel giorno t

Si conduce un test unilaterale destro, confrontando il valore osservato della statistica test con il quantile $\Phi^{-1}(1 - \alpha)$ della distribuzione normale standard. L'ipotesi nulla

viene rifiutata quando:

$$BNS_t > \Phi^{-1}(1 - \alpha) = \Phi^{-1}(0.999) \approx 3.09 \quad (3.6)$$

indicando la presenza statisticamente significativa di salti nel giorno considerato.

Se si individua la presenza di salti nella giornata si può passare a decomporre la varianza totale, stimata da RV_t , nelle sue componenti, continua e discontinua.

In presenza di salti la componente discontinua viene stimata sulla base della differenza tra la volatilità realizzata (RV_t) e la bipower variation (BPV_t). La stima è data da:

$$J_t^2 = \max(0, RV_t - BPV_t) \cdot \mathbb{I}_{\{BNS_t > \Phi^{-1}(1-\alpha)\}} \quad (3.7)$$

dove l'indicatore $\mathbb{I}$ attiva la stima solo quando il test BNS indica un rifiuto della ipotesi nulla. La componente continua viene stimata per differenza, garantendo che la somma delle due componenti corrisponda alla stima della varianza totale:

$$CV_t = RV_t - J_t^2 \quad (3.8)$$

Con questa suddivisione è possibile valutare e caratterizzare l'importanza relativa della componente di salto per ciascuna variabile, analizzando e confrontando sistematicamente le differenze tra le diverse criptovalute.

Però nello studio del test BNS non deve essere trascurato il ruolo che hanno le distorsioni sugli stimatori che entrano in gioco per la stima della statistica test.

Come evidenziato nel secondo capitolo e nel precedente paragrafo, la presenza di rendimenti nulli introduce distorsioni sistematiche negli stimatori multipower basati su dati ad alta frequenza, soprattutto per quegli stimatori di ordine elevato come la QPQ_t e per lo stimatore del momento secondo al BPV_t .

Tale distorsione nel test BNS si manifesta principalmente attraverso una sottostima effettiva degli stimatori della varianza realizzata del processo, si ricordi quanto detto in precedenza riguardo alla distorsione verso il basso della BPV e una distorsione che porta alla sovrastima dello stimatore del momento quarto. Queste distorsioni possono portare la statistica test BNS_t ad assumere valori molto elevati che portano ad un rifiuto dell'ipotesi nulla anche in assenza di salti.

Si rende quindi necessaria l'uso delle correzioni sugli stimatori multipower, al fine di tener conto correttamente della presenza di rendimenti nulli dovuti a price staleness e trade inaction nei dati.

La correzione applicata agli stimatori usati nel test BNS è quella che prevede la modifica della struttura temporale della griglia di osservazione.

La nuova griglia non sarà più equispaziata ma sarà una griglia di N_n punti

$\{\tau_0, \dots, \tau_{N_n}\}$ tale che i rendimenti siano diversi da zero in ogni intervallo: $\tau_0 = t_k$, $k = \min\{j : B_{t_j} \neq 0\}$, e $\tau_l = t_k$, $k = \min\{j : B_{t_j} \neq 0, t_j > \tau_{l-1}\}$. Si indichino con $\Delta_{\tau_i} X = X_{\tau_i} - X_{\tau_{i-1}}$ e $\Delta(n, i) = \tau_i - \tau_{i-1}$, rispettivamente, i rendimenti non nulli non equidistanziati e le loro durate temporali. Le variabili $\Delta(n, i)$ possono essere interpretate anche come le lunghezze delle run lengths delle variabili Bernoulliane, ossia il numero di zeri consecutivi che seguono un rendimento non nullo, moltiplicato per Δ_n .

Di seguito si definiscono gli stimatori multipower corretti per i momenti realizzati basati sulla nuova griglia di osservazioni appena introdotta:

$$MV^c(X; r) = \overline{\Delta}_n \sum_{i=1}^{N_n-m+1} \left| \Delta(n, i)^{-1/2} \Delta_{\tau_i} X \right|^{r_1} \cdots \left| \Delta(n, i+m-1)^{-1/2} \Delta_{\tau_{i+m-1}} X \right|^{r_m} \quad (3.9)$$

Si può stimare $\overline{\Delta}_n$ con la media campionaria di $\Delta(n, i)$

In questo senso, lo stimatore corretto per la presenza di price staleness non richiede altro che il campionamento in corrispondenza degli aggiornamenti di prezzo e l'utilizzo della nuova griglia di campionamento.

L'utilizzo delle griglie intermittenti mira quindi a ripristinare la consistenza degli stimatori, garantendo che le statistiche calcolate si basino esclusivamente su variazioni di prezzo informative.

Nelle analisi successive si confronteranno i risultati del test BNS ottenuti mediante tre diverse specificazioni degli stimatori:

1. **Stimatori classici:** si utilizzano tutti i rendimenti disponibili senza alcuna correzione, includendo quindi sia i rendimenti nulli dovuti a price staleness che quelli causati da trade inaction.
2. **Stimatori corretti:** si applica la metodologia basata su griglie intermittenti presentata nel secondo capitolo, escludendo tutti i rendimenti nulli ($r_i = 0$), indipendentemente dalla causa che li ha generati.
3. **Stimatori con correzione parziale:** si utilizza la correzione basata sulle griglie intermittenti ma si escludono solamente i rendimenti nulli associati a trade inaction, identificati dalla condizione congiunta $r_i = 0$ & $trade_i = 0$. Questa specificazione permette di isolare l'effetto della trade inaction, mantenendo nel campione i rendimenti nulli attribuibili alla price staleness, che ricordando quanto detto nel primo capitolo, possono essere informativi portando informazioni aggiuntive sul mercato.

Questo approccio comparativo consente di valutare in modo differenziato gli effetti delle correzioni sugli stimatori dei momenti. In particolare, si intende quantificare l'impatto che price staleness e trade inaction hanno su:

- La stima della varianza realizzata (RV_t), della bipower variation (BPV_t) e della quad-power quarticity (QPQ_t);
- La potenza del test BNS nel rilevare la presenza di salti;
- La classificazione dei giorni come caratterizzati o meno da discontinuità nei prezzi;
- La decomposizione della varianza totale nelle componenti continua e discontinua.

La distinzione tra correzione completa e parziale si rivela utile per valutare se i rendimenti nulli causati da price staleness contengano informazioni rilevanti per la detection dei salti, osservando se vi siano differenze significative nei test e nei risultati a che ci comunicano.

Nell'ultimo paragrafo di questo capitolo saranno analizzati i risultati empirici per ciascuna criptovaluta nelle diverse specificazioni, caratterizzandoli attraverso commenti e valutazioni dei risultati dei test BNS.

3.3 Test LM (Lee-Mykland) per salti intragiornalieri

Al fine di analizzare la distribuzione e la presenza di salti con una precisione maggiore, si è deciso di implementare anche il test LM che consente di valutare la presenza di salti a livello intragiornaliero.

Il test LM proposto da Lee e Mykland (2008) si pone l'obiettivo di introdurre una nuova tecnica di identificazione dei salti, basata su un approccio non parametrico, al fine di garantire risultati robusti sia rispetto alle specificazioni del modello sia rispetto a possibili forme di non stazionarietà dei processi di prezzo.

L'intuizione che sta alla base del test LM è la seguente. Si immagini che i prezzi di un asset evolvano in modo continuo nel tempo. Se in un certo istante t_i si verifica un salto, ci si aspetta che il rendimento realizzato in quel momento sia molto più grande rispetto alle normali innovazioni continue. Tuttavia, un rendimento elevato può verificarsi anche in assenza di salti, semplicemente perché la volatilità istantanea in quel momento è molto alta. Poiché i prezzi si sono osservati solo in tempi discreti, un grande movimento può apparire simile a un salto anche se deriva solo dalla componente continua del modello dei prezzi.

Per distinguere questi due casi è naturale andare a standardizzare il rendimento dividendolo per una misura della variazione locale dovuta esclusivamente alla parte continua del processo. Questa misura viene definita come volatilità istantanea e viene indicata con $\sigma(t_i)$.

Per stimare la volatilità istantanea si può utilizzare uno stimatore non parametrico che è già stato utilizzato in precedenza, ovvero lo stimatore di power variation della varianza realizzata definito come somma dei rendimenti al quadrato:

$$RV(t-1, t) = \sum_{j=1}^n r_{j\Delta_n}^2.$$

Riprendendo il modello per i prezzi, $\tilde{X}$, specificato nel primo paragrafo di questo capitolo, si ricorda che i rendimenti osservati sono definiti come

$$r_{j\Delta_n} = \tilde{X}_{j\Delta_n} - \tilde{X}_{(j-1)\Delta_n}.$$

Tuttavia, ci si trova in presenza di salti nel processo

$$r_t = \int_{t-1}^t \mu_\tau d\tau + \int_{t-1}^t \sigma_\tau dW_\tau + \sum_{i=1}^{N_t} J_i,$$

e quindi, come visto in precedenza $RV(t-1, t)$ non è più consistente per stimare la varianza integrata.

Per questo motivo nel test LM si utilizzerà uno stimatore robusto, di tipo multipower, una bipower variation (BPV_t) con qualche piccola variazione, definita come:

$$BPV(t-1, t) = \sum_{j=2}^n |r_{j\Delta_n}| |r_{(j-1)\Delta_n}|.$$

Questo stimatore rimane consistente per la volatilità integrata anche in presenza di salti e quindi sarà utilizzato per stimare la volatilità istantanea, visto che nonostante la presenza di salti in un processo possa influenzare la stima della volatilità, questo stimatore rimane consistente indipendentemente dalla dimensione che essi assumono.

L'utilizzo di tale stimatore rende la procedura di individuazione dei salti indipendente dalla presenza degli stessi nel tempo, in particolare da quelli eventualmente inclusi nel periodo utilizzato per la stima della volatilità.

Il parametro K indica l'ampiezza della finestra mobile di osservazioni utilizzata per la stima della statistica test: per ogni statistica test L_i , si impiegano i K valori immediatamente precedenti. Analogamente ai test precedenti, anche il test LM si

basa su una griglia di osservazioni equispaziata che suddivide l'intervallo temporale $[0, T]$ in n sottointervalli, dove n rappresenta il numero totale di osservazioni disponibili. Per la natura del test, operando a livello intragiornaliero, si ha la necessità di definire con precisione l'ampiezza della finestra K con cui si valutano i rendimenti e si stima la volatilità istantanea.

La peculiare natura del mercato delle criptovalute, che come illustrato nel primo capitolo consente di ottenere dati per tutti i 1440 minuti che compongono una giornata, permette di minimizzare la perdita di informazione; perchè solo per i primi K minuti di osservazione si potranno ottenere le statistiche test $L(i)$, mentre da quel momento in poi si potrà calcolare la statistica test in modo continuo per ogni minuto di qualsiasi giornata, massimizzando così la capacità di rilevazione dei salti nel processo di prezzo e avendo solo una minima perdita di informazioni, visto che il dataset ha più di 2 milioni di osservazioni.

Si consideri un movimento locale del processo all'interno di una finestra di ampiezza K . Utilizzando i rendimenti realizzati nella finestra, costituita dalle precedenti $K - 1$ osservazioni immediatamente prima dell'istante di test t_i , la volatilità istantanea viene stimata tramite la bipower variation realizzata (*BPV*).

La statistica $L(i)$, verifica se al tempo t_i si è verificato un salto nell'intervallo $(t_{i-1}, t_i]$, è definita come:

$$L(i) = \frac{r_{t_i}}{\hat{\sigma}(t_i)},$$

dove la volatilità istantanea stimata è data da:

$$\hat{\sigma}(t_i)^2 \equiv \frac{1}{K-2} \sum_{j=i-K+2}^{i-1} |r_{j\Delta_n}| |r_{(j-1)\Delta_n}|.$$

Si noti che l'uso della realized bipower variation al denominatore rende la procedura robusta alla presenza di salti nei periodi precedenti. La dimensione della finestra K deve essere scelta in modo tale che l'effetto dei salti sulla stima della volatilità diventi trascurabile e si mantengano i benefici della BPV.

In generale, gli autori suggeriscono di individuare K tramite questo procedimento: K deve essere minore del numero totale di osservazioni n , ma con n_{obs} osservazioni giornaliere si ha che l'ampiezza degli intervalli sarà data da:

$$\Delta t = \frac{1}{252 n_{\text{obs}}}.$$

Di conseguenza i valori interi compresi tra

$$(\sqrt{252 n_{\text{obs}}} \quad ; \quad 252 n_{\text{obs}})$$

rappresentano possibili candidati per la scelta di K . Al fine di limitare la complessità computazionale legata al calcolo di ogni statistica L_i , gli autori suggeriscono di porre K pari al minimo valore.

Per questa ragione, avendo a disposizione $n_{\text{obs}} = 1440$ osservazioni giornaliere, la finestra di valori tra cui può essere scelto K è:

$$\hat{K} \in \left(\sqrt{252 \cdot 1440}, 252 \cdot 1440 \right).$$

In particolare, il valore minimo che sarà scelto come $\hat{K}$ per tutte le seguenti analisi è:

$$\hat{K} = \sqrt{252 \cdot 1440} \approx 603.$$

Gli autori dimostrano anche che la regione di rifiuto proposta consente di distinguere i salti con maggiore precisione a frequenze di osservazione più elevate, come in questo caso di studio dove si hanno a disposizione dati con frequenza 1 minuto.

Se non vi è alcun salto al tempo di test, la statistica segue approssimativamente una distribuzione normale. Se invece è presente un salto, la statistica può assumere valori molto grandi.

Ricordando quanto descritto nel capitolo precedente, essendo i salti un evento raro si vuole ottenere una regione di rifiuto con $\alpha = 0.01\%$, per questo motivo basandoci su quanto dimostrato dagli autori si decide di utilizzare come soglia $S = \sqrt{2 \cdot \ln(\hat{K})}$ che ci consente di individuare un $\alpha \approx 0.017\%$.

Anche in questo caso, come per il precedente test BNS, è importante sottolineare che in presenza di numerosi zero, dovuti a price staleness e trade inaction, il test LM è affetto da importanti distorsioni legate alla $BPV(t-1, t)$.

Per questa ragione si è ritenuto necessario andare a correggere ancora una volta lo stimatore e quindi di riflesso la statistica test del test LM, con l'obiettivo di valutare e quantificare l'impatto che price staleness e trade inaction hanno sul test, consentendoci anche di comprendere se le correzioni anche per il test LM risultano utili nel migliorare il comportamento del test portandolo verso la distribuzione asintotica.

Anche in questo caso come metodo di correzione dello stimatore multipower della volatilità istantanea si è deciso di utilizzare ciò che si basa su una modifica della griglia di osservazioni, la quale non più equispaziata.

Questa correzione non va a cambiare la statistica test ma avrà effetti solo nel calcolo della volatilità istantanea; in questo modo saranno utilizzati solo i 603 rendimenti non nulli più vicini per stimare se vi è o meno un salto in quel minuto.

Dato che la forma di BPV utilizzata dagli autori del test LM differisce da quella suggerita per la correzione del test BNS, si è scelto di implementare una variante del

test LM che impiegasse la specificazione alternativa di BPV usata in precedenza:

$$BPV_t = MV(\tilde{X}; [1, 1]) = \mu_1^{-2} \frac{n}{n-1} \sum_{i=2}^n |r_{t-1+i\Delta}| |r_{t-1+(i-1)\Delta}|$$

Si osserva che la struttura rimane quella della sommatoria del prodotto di valori assoluti di rendimenti consecutivi, che tuttavia viene premoltiplicata per due costanti correttive: il fattore $n/(n-1)$ elimina la distorsione in campioni finiti, mentre il termine μ_1^{-2} corregge la distorsione introdotta dall'uso del valore assoluto anziché del quadrato dei rendimenti.

Quindi si procede a stimare il test con entrambe le specificazioni della BPV, con l'obiettivo di valutare se il cambiamento del metodo di stima porti a una miglior stima della volatilità istantanea. In particolare, si intende verificare se l'adozione della diversa specificazione della BPV aumenti la robustezza dello stimatore e, conseguentemente, migliori l'efficienza nell'identificazione dei salti, incrementando così la precisione complessiva del test.

Nel successivo paragrafo saranno analizzati e commentati tutti i risultati empirici ottenuti con i dati a disposizione.

3.4 Analisi delle differenze tra stimatori classici e corretti

In questo paragrafo si analizzano e si discutono le evidenze empiriche ottenute dal dataset a disposizione, che ricordo essere composto da dati a frequenza un minuto relativi a cinque diverse criptovalute, con l'obiettivo di verificare se i risultati osservati risultino coerenti con le implicazioni teoriche illustrate in precedenza.

L'intero percorso di analisi viene condotto nell'ottica di valutare se le correzioni introdotte negli stimatori, volte a ridurre le distorsioni, producano un effettivo miglioramento delle performance del test.

In particolare per il test BNS, si verifica se tali aggiustamenti consentano di ottenere un numero di salti individuati coerente con le attese teoriche e una distribuzione della statistica test quanto più prossima alla normalità.

L'analisi prende avvio dall'esame dei risultati del test BNS; in particolare, si considerano le differenze nel numero di salti individuati dalle diverse specificazioni del test.

Alla luce di quanto emerso nelle analisi empiriche del capitolo precedente, ci si attende che all'aumentare della percentuale di rendimenti nulli sul totale delle osservazioni cresca, di pari passo, anche il numero di giorni in cui viene accettata l'ipotesi alternativa di presenza di almeno un salto.

Tale risultato è quello che ci si attende, visto che i numerosi rendimenti pari a zero generano distorsioni, soprattutto sulla QPQ e sulla BPV e di conseguenza anche sulla statistica test, aumentando la frequenza di rifiuto dell'ipotesi nulla.

Ci si aspetta che le due procedure di correzione adottate conducano a una significativa riduzione del numero di giorni classificati come contenenti salti. Visto che come è stato mostrato nell'analisi empirica del capitolo precedente tali interventi riescono ad attenuare le distorsioni presenti negli stimatori, ristabilendo conseguentemente statistiche test più coerenti con le ipotesi asintotiche del test.

Tabella 3.1: Numero di giorni con almeno un salto individuati dal test BNS

Strumento	Classico	Corretto $r = 0$	Corretto $r = 0$, trade= 0
BTC	215	9	12
ETH	375	1	3
SOL	428	1	2
ADA	658	1	33
XRP	484	2	58

Si ricorda che per il test BNS si è fissato un livello di significatività $\alpha = 0.001$, il quale porta ad assumere come soglia critica per la decisione il quantile della distribuzione normale standard di livello $1 - \alpha$, ovvero $z_{1-\alpha} = \Phi^{-1}(1 - \alpha) \approx 3.09$.

I risultati riportati in tabella confermano quanto era stato ipotizzato: per tutte e cinque le criptovalute presenti nel dataset, il test BNS basato su stimatori classici individua un numero di giorni con almeno un salto estremamente elevato, non coerente con la teoria, evidenziando in modo netto la distorsione che affligge tale versione del test. Disponendo di 730 osservazioni giornaliere per ciascuno strumento, ci si aspetterebbe di individuare $N = 730 \cdot 0.001 = 0.73 \approx 1$ giorno con salto; il confronto con i valori osservati nella prima colonna rende pertanto evidente l'entità della distorsione introdotta dagli stimatori non corretti.

Dall'analisi delle colonne relative alle versioni corrette del test si evince che le correzioni applicate agli stimatori producono i risultati attesi: i conteggi si avvicinano sensibilmente al valore teorico atteso pari a 1.

Si osserva inoltre che la correzione parziale legata alla trade inaction tende a risultare meno precisa ed efficace per quelle criptovalute, quali XRP e ADA, che presentano un'elevata percentuale di rendimenti nulli sul totale e di conseguenza correggendo solo per la trade inaction rimangono un elevato numero di rendimenti nulli nei dati che non consentono di eliminare completamente le distorsioni.

Tale evidenza può essere ricondotta a due differenti motivazioni. Nel caso di Cardano, si registra una percentuale di rendimenti nulli particolarmente elevata,

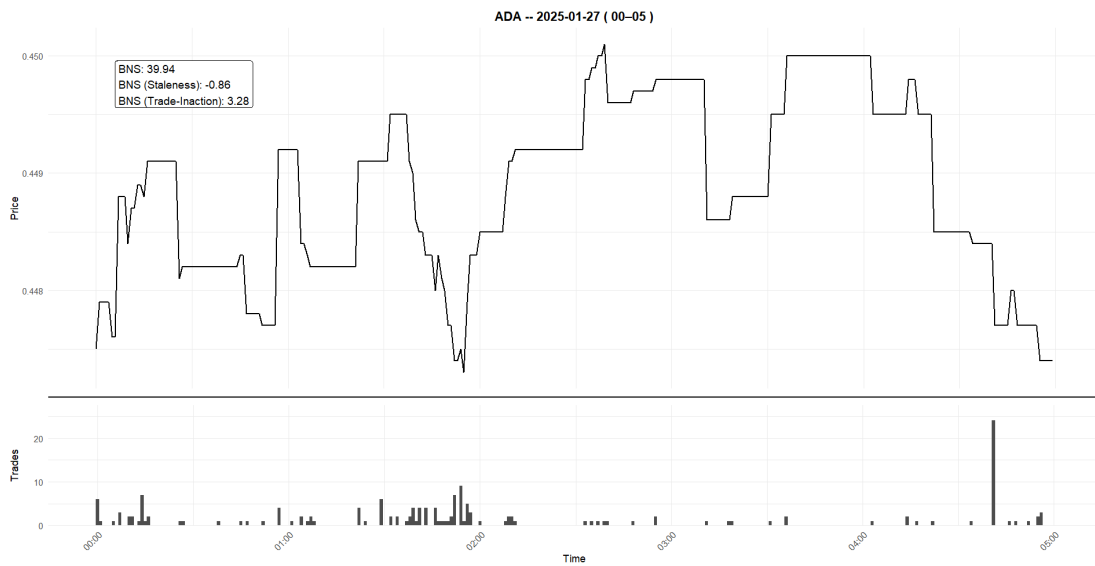
prossima al 50%, e la mancata rimozione di una parte consistente di tali osservazioni continua a generare una distorsione non trascurabile negli stimatori. Per XRP, invece, il fenomeno appare legato al diverso impatto della price staleness sul totale dei rendimenti nulli: in questo caso la price staleness è responsabile di circa il 50% degli zeri osservati, a fronte di una media prossima al 20% per le altre criptovalute. Ciò comporta una maggiore persistenza di rendimenti nulli nei dati e, conseguentemente, il permanere di effetti distorsivi sugli stimatori.



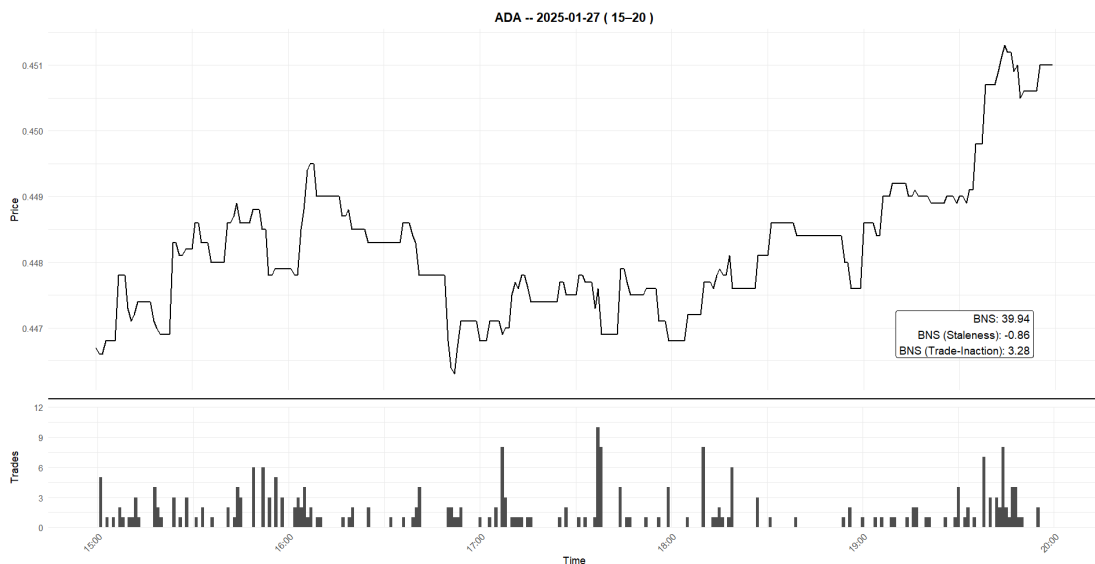
Figura 3.1: Andamento dei prezzi di chiusura e del numero di trade della criptovaluta Cardano per il 112esimo giorno del campione.

Si riporta il grafico contenente l'andamento intragiornaliero dei prezzi di chiusura e del numero totale di trade relative al 112esimo giorno del campione, con l'obiettivo di evidenziare l'origine delle differenze tra le tre versioni della statistica BNS, le quali come si vede nel riquadro in figura forniscono indicazioni differenti circa la presenza di salti in quel giorno.

Si vuole anche sottolineare come le diverse correzioni apportate sulla griglia delle osservazioni influenzino il calcolo degli stimatori e, di conseguenza, conducano a risultati differenti del test; in particolare, solo la versione che incorpora la correzione per la price staleness non segnala evidenza di salti in quella giornata.



(a) Finestra temporale 00–05



(b) Finestra temporale 15–20

Figura 3.2: Dettaglio dell'andamento dei prezzi e del numero di trade della criptovaluta Cardano per due finestre temporali del 112esimo giorno del campione.

Per una migliore analisi si mostrano due periodi di cinque ore rispettivamente, la finestra temporale a che va dalle 00 alle 05 e quindi comprende i valori verificatesi in piena notte, quando come mostrato nel primo capitolo si ha una minor attività sul mercato ed un secondo periodo, che va dalle 15 alle 20 in pieno orario di apertura delle borse, che quindi dovrebbe essere caratterizzato da una maggiore attività di trading.

Si ricorda che nel caso della statistica test BNS calcolata con gli stimatori classici,

vengono utilizzati tutti i 1440 intervalli intraday, includendo anche quelli con prezzo costante, che generano rendimenti nulli. In questo modo la distanza temporale tra due variazioni effettive di prezzo è sempre pari a uno, con il rischio di introdurre distorsioni dovute alla presenza di numerosi rendimenti nulli.

La correzione per trade inaction esclude invece soltanto gli intervalli caratterizzati da prezzo costante e assenza di trade, rimuovendo quindi i periodi di totale inattività del mercato. Il numero di osservazioni utilizzate si riduce e le distanze temporali tra i prezzi diventano irregolari, riflettendo meglio l'effettiva attività di mercato.

La correzione per price staleness è più restrittiva, poiché elimina tutti gli intervalli con prezzo invariato indipendentemente dal numero di trade. Di conseguenza, il numero di osservazioni si riduce ulteriormente e la distanza tra due prezzi consecutivi utilizzati per il calcolo dei rendimenti aumenta rispetto alla correzione per trade inaction.

Dai due pannelli emerge come le differenze tra le diverse specificazioni della statistica BNS dipendano principalmente dalla presenza di intervalli con prezzo costante e dal grado di attività di trading. Nella finestra 00–05 si osservano diversi periodi in cui il prezzo rimane invariato per più intervalli consecutivi e l'attività di trading è relativamente ridotta. In questo contesto, le correzioni per trade inaction e soprattutto per price staleness eliminano un numero maggiore di osservazioni rispetto alla specificazione classica, aumentando la distanza temporale tra i prezzi effettivamente utilizzati per il calcolo dei rendimenti e producendo quindi differenze più marcate tra gli stimatori.

Le differenze tra le due correzioni emergono soprattutto nella finestra temporale 00–05, dove si osservano diversi intervalli consecutivi con prezzo costante e una bassa attività di trading. In questo contesto, la correzione per trade inaction elimina soltanto gli intervalli privi di scambi, mantenendo invece quelli in cui sono presenti trade ma il prezzo non varia. La correzione per price staleness, essendo più restrittiva, rimuove invece tutti gli intervalli con prezzo invariato, riducendo ulteriormente il numero di osservazioni utilizzate nel calcolo della statistica.

Al contrario, nella finestra 15–20 il mercato appare più attivo e le variazioni di prezzo sono più frequenti, come evidenziato dal numero più elevato di trade. In questo caso gli intervalli con prezzo costante sono meno numerosi e le tre specificazioni utilizzano insiemi di osservazioni più simili, riducendo le differenze tra le distanze temporali e, di conseguenza, tra i valori della statistica test.

Ora si passa alla valutazione della bontà delle correzioni, ci si basa sulla valutazione delle distribuzioni di frequenze delle statistiche test legate diversi test BNS svolti per ogni criptovaluta. L'obiettivo è quello di valutare se attraverso le correzioni si

risce a riportare il test BNS verso la distribuzione asintotica del test, la normale standard $N(0, 1)$.

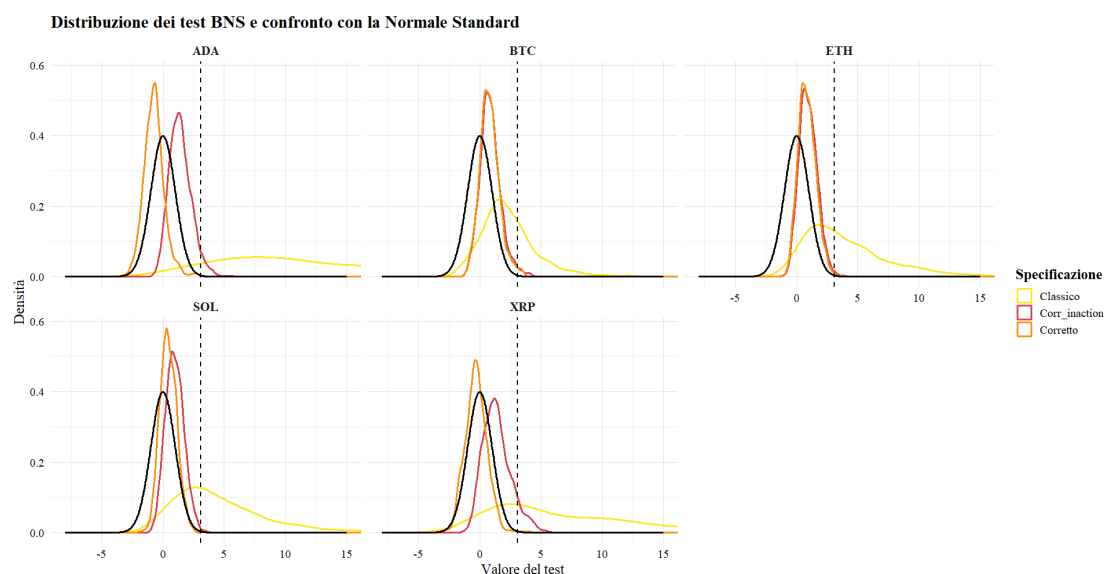


Figura 3.3: Distribuzioni dei test BNS suddivisi per strumento

Dalla figura emerge chiaramente che all'aumentare della percentuale di rendimenti nulli nei dati si osserva un incremento significativo della distorsione del test BNS classico. Tale evidenza è pienamente coerente con quanto è stato discusso precedentemente a livello teorico riguardo al ruolo che price staleness e trade inaction hanno nell'introdurre distorsioni sugli stimatori e di conseguenza nella distribuzione asintotica del test.

Per Cardano e XRP, il test BNS classico appare fortemente distorto, con distribuzioni sensibilmente spostate rispetto alla normale standard. Per Ethereum, Solana e Bitcoin, invece la deviazione risulta essere comunque presente anche se meno marcata, in linea con la minor presenza di rendimenti nulli e con il minor numero di giorni in cui si osserva almeno un salto, evidenziando però come sia presente anche per questi test una distorsione non trascurabile sugli stimatori.

Per quanto riguarda le correzioni, entrambe risultano efficaci nel ridurre in modo sostanziale la distorsione del test, producendo distribuzioni significativamente più centrate e maggiormente coerenti con la distribuzione normale standard, confermando la bontà e l'utilità delle correzioni nel rendere effettivamente corretti il test per la rilevazione di salti a livello giornaliero.

Tuttavia, per le criptovalute caratterizzate da un'elevata presenza di rendimenti nulli (ADA e XRP), si osservano differenze apprezzabili tra le due specificazioni corrette, coerentemente con quanto riportato nella Tabella 3.1, nella quale la correzione applicata esclusivamente alla trade inaction conduce all'individuazione di un

numero particolarmente elevato di salti.

In entrambi i casi si rileva come le distribuzioni risultino spostate nettamente verso valori positivi dell'asse X , che rappresenta il valore assunto dalla statistica test, e come una quota significativa della densità si collochi oltre la linea tratteggiata che identifica la soglia per il rifiuto dell'ipotesi nulla. Ciò conferma che, per queste due criptovalute, la correzione applicata solo alla trade inaction non risulta sufficiente ad eliminare completamente la distorsione degli stimatori.

Ora si passa all'analisi della decomposizione della varianza realizzata nelle sue due componenti, continua e di salto, commentando le differenze presenti e ponendo l'attenzione soprattutto sulla quota relativa alla componente discontinua.

Tabella 3.2: Contributo percentuale della componente di salto (BNS)

Strumento	Classico	Corretto $r = 0$	Corretto $r = 0$, trade= 0
BTC	7.1394%	3.4295%	4.3135%
ETH	12.2794%	2.4289%	3.0431%
SOL	13.1191%	0.6320%	2.7142%
ADA	38.4356%	0.0026%	2.0705%
XRP	25.3697%	0.2712%	5.0255%

La Tabella 3.2 è costruita a partire dalla decomposizione proposta in precedenza, secondo cui la componente di salto, in presenza di salti, può essere stimata come differenza tra Realized Variance (RV_t) e Bipower Variation (BPV_t), ossia:

$$JV_t = RV_t - BPV_t.$$

Per ciascun giorno si calcola quindi il contributo relativo della componente discontinua alla variazione totale:

$$\text{Jump Contrib}_t = \frac{JV_t}{RV_t}.$$

I valori riportati in tabella sono ottenuti calcolando la media campionaria di tale rapporto sull'intero periodo di osservazione e moltiplicando il risultato per 100, così da esprimerlo in termini percentuali:

$$\text{Jump Contrib} = \left(\frac{1}{T} \sum_{t=1}^T \frac{JV_t}{RV_t} \right) \times 100.$$

Le percentuali riportate rappresentano pertanto la quota media campionaria della variazione totale attribuibile alla componente di salto per ciascuna criptovaluta e

per ciascuna specificazione del test.

La Tabella 3.2 riporta il contributo percentuale medio della componente di salto alla variazione totale stimata tramite il test BNS nelle tre diverse specificazioni considerate.

Dall'analisi emerge come la versione classica del test attribuisca sistematicamente una percentuale più elevata della variazione alla componente di salto per tutte le criptovalute esaminate. Tale evidenza risulta coerente con la presenza di un'elevata presenza di rendimenti nulli nei dati, che tendono ad amplificare artificialmente la differenza tra Realized Variance e Bipower Variation, generando una sovrastima della componente discontinua.

Importante notare come per Bitcoin, la cui percentuali di zero sul totale dei rendimenti è del 3.71% non vi siano grandissime differenze tra i risultati ottenuti con gli stimatori classici e quelli ottenuti con gli stimatori corretti, mentre per Cardano che ha rendimenti nulli nel 47.93% degli intervalli, si trovano notevoli differenze tra le diverse specificazioni, questo conferma il ruolo rilevante della percentuale di zeri nella dimensione della distorsione sugli stimatori classici.

Si evince definitivamente dai risultati che vi sia una correlazione tra la percentuale di rendimenti nulli e la dimensione delle distorsioni sugli stimatori classici, all'aumentare degli zeri aumentano le distorsioni degli stimatori.

L'introduzione delle correzioni comporta una riduzione marcata del contributo attribuito ai salti, suggerendo che una parte significativa della componente identificata nella versione classica sia riconducibile a distorsioni legate alla presenza di zeri piuttosto che a effettivi movimenti discontinui del processo dei prezzi. Tale effetto risulta particolarmente evidente per ADA e XRP, per le quali la specificazione classica attribuisce ai salti una quota molto elevata della variazione totale (38,47% e 25,37% rispettivamente), mentre le versioni corrette ridimensionano in modo significativo tale stima.

Particolare attenzione meritano i valori osservati per ADA e XRP nella seconda colonna, ossia nel caso di stima corretta con $r = 0$. Per entrambe le criptovalute si registra una drastica riduzione del contributo percentuale della componente di salto, che assume valori estremamente contenuti e prossimi allo zero (0.0026% per ADA e 0.2712% per XRP).

Tale evidenza è coerente con la formula (3.2) utilizzata per la stima della componente di salto nel test BNS; la misura $RV(t-1, t) - BPV(t-1, t)$ approssima la somma dei quadrati dei salti solo qualora questi siano effettivamente individuati. Nel caso di ADA e di XRP, la procedura corretta con $r = 0$ identifica un numero estremamente ridotto di giorni caratterizzati da salti. Di conseguenza, la compo-

nente di salto stimata risulta quasi nulla e il contributo percentuale dei salti alla varianza realizzata diviene marginale rispetto alla componente continua.

Passando alla valutazione della correzione solo dei rendimenti nulli dovuti a trade inaction, si vede come vi sia un leggero aumento delle percentuali medie della componente di salto, ciò è coerente con quanto ci si potesse aspettare, perchè non eliminiamo tutti gli zeri ma solo una parte seppur consistente.

Importante notare anche come le percentuali siano coerenti con la natura degli zeri definita nel primo capitolo, ad esempio essendo gli zeri di ethereum caratterizzati da una grandissima presenza di trade inaction ci si aspetta che le percentuali varino di poco tra le due correzioni e così avviene, mentre per XRP che è caratterizzato da una grande presenza di price staleness ci si aspetta un grande aumento così come si è riscontrato.

Inoltre potendo valutare anche delle statistiche descrittive per la componente di salto, come vediamo in questa tabella:

Tabella 3.3: Statistiche descrittive della componente discontinua – confronto tra i diversi stimatori

		Classici	Corretti (r=0)	Corretti (r=0, trade=0)
BTC	Mediana	5.9864	2.6776	3.4836
	Minimo	0.0036	0.0108	0.0473
	Massimo	35.0355	18.8785	22.4896
ETH	Mediana	9.55505	0.6920	1.7829
	Minimo	0.0858	0.0225	0.0393
	Massimo	60.1684	18.6550	19.4737
SOL	Mediana	10.4056	0.7459	1.6516
	Minimo	0.0601	0.0351	0.0096
	Massimo	71.1647	19.5071	22.2326
ADA	Mediana	33.2952	0	0.9754
	Minimo	0.4778	1.9073	0.0137
	Massimo	95.2779	1.9073	39.4940
XRP	Mediana	19.6695	0.0945	2.4244
	Minimo	0.0353	0.3267	0.0199
	Massimo	83.6065	21.249	43.887

Dalla Tabella 3.3, contenente le statistiche descrittive della componente di salto, emerge chiaramente come ci siano ampie differenze in termini di variabilità dei risultati tra le diverse criptovalute considerate.

In particolare guardando ai risultati ottenuti calcolando il test BNS con gli sti-

matori classici, le criptovalute con minor numero di trade e con prezzo unitario più contenuto, ADA ed XRP, presentano valori massimi sensibilmente più elevati rispetto alle criptovalute maggiormente consolidate, come Bitcoin ed Ethereum.

Tale evidenza suggerisce una maggiore incidenza e intensità della componente di salto per gli asset meno conosciuti e scambiati, coerentemente con quanto osservato in precedenza ciò probabilmente è causato dalla grande presenza di rendimenti nulli che portano il test a valutare come salti anche cambiamenti di prezzo contenuti verificatisi però dopo molti intervalli con rendimenti nulli come visto in precedenza con il grafico 3.1.

Dal confronto tra stimatori si osserva inoltre come le versioni corrette producano, nella maggior parte dei casi, valori mediani e massimi significativamente inferiori rispetto allo stimatore classico. Questo risultato è coerente con il fatto che le correzioni applicate (in particolare per $r = 0$ e per $r = 0$, $\text{trade}=0$) tendono a ridurre le distorsioni legate agli stimatori fornendo statistiche BNS più robuste, le quali portano ad individuare un numero di salti molto più contenuto e di conseguenza anche i valori che descrivono la componente di salto risultano generalmente più contenuti.

Test LM

Si passa ora all'analisi empirica dei risultati del test LM.

Poiché l'analisi viene condotta su dati ad alta frequenza ed è direttamente collegata ai rendimenti osservati in ciascun intervallo temporale, non ci si limiterà alla sola quantificazione del numero di salti; sarà infatti possibile esaminarne anche la dimensione e il segno, così da ottenere una caratterizzazione più completa dei risultati dei test e quindi della dinamica legata dei rendimenti delle cinque criptovalute.

Inoltre, si ricorda che oltre alle due tipologie di correzione applicate agli stimatori, verrà effettuato un confronto tra differenti specificazioni della bipower variation utilizzate per la stima della volatilità istantanea. In particolare, saranno confrontati i risultati ottenuti adottando la BPV proposta dagli autori del test nel loro paper Lee e Mykland (2008) con quelli derivanti dall'utilizzo della specificazione multipower proposta da Bandi, Pirino et al. (2017). Tale confronto consentirà di valutare la robustezza dei risultati rispetto alla specificazione impiegata per la stima della volatilità e di verificare eventuali differenze nell'identificazione dei salti.

Criptovaluta	Specificazione	Salto Totali	% sul totale	N° Max	N° Min
BTC	LM classico	25079	2.385%	85	7
	LM $r = 0$	22423	2.13%	68	4
	LM $r = 0$ & $trade = 0$	22986	2.185%	78	4
	LM Renò $r = 0$	10943	1.04%	44	1
	LM Renò $r = 0$ & $trade = 0$	11173	1.06%	55	1
ETH	LM classico	28274	2.69%	150	8
	LM $r = 0$	19314	1.835%	62	6
	LM $r = 0$ & $trade = 0$	19957	1.895%	64	6
	LM Renò $r = 0$	10236	0.97%	38	1
	LM Renò $r = 0$ & $trade = 0$	10506	0.995%	38	1
SOL	LM classico	27651	2.63%	153	7
	LM $r = 0$	15729	1.495%	65	2
	LM $r = 0$ & $trade = 0$	18367	1.745%	69	4
	LM Renò $r = 0$	7385	0.745%	37	0
	LM Renò $r = 0$ & $trade = 0$	8902	0.845%	38	0
ADA	LM classico	61378	5.84%	212	5
	LM $r = 0$	6430	0.61%	46	0
	LM $r = 0$ & $trade = 0$	14714	1.40%	56	2
	LM Renò $r = 0$	5901	0.56%	35	0
	LM Renò $r = 0$ & $trade = 0$	11708	1.11%	83	0
XRP	LM classico	45448	4.325%	242	3
	LM $r = 0$	11044	1.05%	60	0
	LM $r = 0$ & $trade = 0$	19991	1.90%	66	2
	LM Renò $r = 0$	7294	0.69%	38	0
	LM Renò $r = 0$ & $trade = 0$	12756	1.235%	48	0

Tabella 3.4: Statistiche descrittive dei salti individuati per ciascuna criptovaluta e per ciascuna specificazione del test LM: numero totale di salti, percentuale sul totale degli intervalli osservati e valori massimo e minimo di salti registrati in un singolo giorno. In ciascuna criptovaluta per i primi tre test LM è stata utilizzata la specificazione proposta dagli autori del test, mentre per gli ultimi due è stata adottata la specificazione di Renò, che impiega stimatori multipower per la stima della volatilità istantanea.

Dalla Tabella 3.4 si evince chiaramente come il test LM basato sugli stimatori classici sia fortemente distorto e di conseguenza individui un numero di salti elevatissimo, ricordando che la soglia è stata selezionata con l'obiettivo di individuare il minor numero di salti possibile indicando come tali solo lo circa 0.01% più elevato delle statistiche test L_i .

Si conferma anche il ruolo della percentuale di zeri presenti nei dati, perchè si nota come le criptovalute affette dalle percentuali più alte mostrino anche il mag-

gior numero di salti totali individuati, confermando quanto si è affermato in tutti i capitoli precedenti.

Passando anche al confronto del test basato su stimatori classici con i risultati dei test basati sugli stimatori corretti risulta evidente e chiaro il ruolo delle correzioni per tutte le criptovalute, perchè all'aumentare delle percentuali di zero nei dati, si ottengono risultati sensibilmente migliori, si riducono sia il numero di salti totali individuati che il numero massimo, minimo di salti individuati in una sola giornata; le diverse correzioni all'aumentare della presenza di zeri nei dati risultano essere sempre più impattanti portando a grandi miglioramenti con il test che risulta più coerente con quando definito teoricamente.

Dall'analisi emerge chiaramente come l'utilizzo della specificazione della bipower variation proposta da Renò consenta di ottenere risultati più accurati. In termini quantitativi, il numero di salti individuati risulta mediamente pari a circa la metà di quelli rilevati mediante la specificazione classica ed è evidente soprattutto nelle criptovalute con una bassa percentuale di intervalli con rendimento nulli sul totale o in quelle in cui la causa degli zeri è attribuibile alla price staleness, tale evidenza appare coerente con le attese teoriche.

La differenza tra i due approcci risiede nella struttura dello stimatore della volatilità integrata. La versione classica della bipower variation è definita come:

$$BPV_{(t-1,t)} = \sum_{j=2}^n |r_{j\Delta_n}| |r_{(j-1)\Delta_n}|.$$

Tale formulazione, pur essendo consistente in presenza di salti, può risultare sensibile a distorsioni legate al campione finito di osservazioni e ad effetti legati alla discretizzazione.

La specificazione proposta da Renò introduce invece due fattori di correzione che premoltiplicano la sommatoria del prodotto tra rendimenti adiacenti:

$$BPV_t = MV(\tilde{X}; [1, 1]) = \mu_1^{-2} \frac{n}{n-1} \sum_{i=2}^n |r_{t-1+i\Delta}| |r_{t-1+(i-1)\Delta}|.$$

In particolare, il termine μ_1^{-2} rappresenta una costante di normalizzazione legata al primo momento della distribuzione normale standard, mentre il fattore $\frac{n}{n-1}$ costituisce una correzione per le distorsioni legate al campione. L'introduzione di tali coefficienti consente di correggere sistematicamente le distorsioni e di migliorare la precisione della misura della volatilità continua.

Questo porta ad ottenere una stima della volatilità istantanea più precisa ed affidabile e, pertanto, si trova una riduzione dei falsi positivi rispetto alla specificazione

classica.

La minore numerosità dei salti rilevati con la metodologia di Renò non deve quindi essere interpretata come una perdita di informazione, bensì come un miglioramento nella capacità del test di distinguere tra vera discontinuità del processo e fluttuazioni attribuibili alla volatilità continua stimata in modo impreciso.

Con il test LM si vuole anche studiare i segni e le dimensioni dei salti che affliggono le diverse criptovalute sempre mantenendo le cinque diverse specificazioni, così da valutare se vi siano differenze strutturali che non si sono ancora considerate tra le diverse criptovalute.

Con questo obiettivo si parte dallo studio dei segni, essendo la statistica test del test LM pari a:

$$L(i) = \frac{r_{t_i}}{\widehat{\sigma}(t_i)},$$

Attraverso l'analisi dei rendimenti è possibile determinarne il segno e, di conseguenza, caratterizzare ciascun salto in base alla sua direzione. In questo modo si può distinguere tra salti associati a rendimenti positivi, e quindi a incrementi di prezzo tra due intervalli consecutivi, e salti associati a rendimenti negativi, riconducibili a diminuzioni di prezzo tra due intervalli. Potendo così studiare se vi siano differenze significative.

Crypto	Specificazione	Totale	% Pos	% Neg
ADA	Originale	61378	49.49	50.51
ADA	$r = 0$	6430	48.41	51.59
ADA	$r = 0 \ \& \ \text{trade} = 0$	14714	48.95	51.05
ADA	Renò $r = 0$	5901	48.50	51.50
ADA	Renò $r = 0 \ \& \ \text{trade} = 0$	11708	49.34	50.66
XRP	Originale	45448	49.25	50.75
XRP	$r = 0$	11044	48.37	51.63
XRP	$r = 0 \ \& \ \text{trade} = 0$	19991	48.15	51.85
XRP	Renò $r = 0$	7294	48.63	51.37
XRP	Renò $r = 0 \ \& \ \text{trade} = 0$	12756	48.26	51.74
SOL	Originale	27651	50.01	49.99
SOL	$r = 0$	15729	49.56	50.44
SOL	$r = 0 \ \& \ \text{trade} = 0$	18367	49.55	50.45
SOL	Renò $r = 0$	7835	48.77	51.23
SOL	Renò $r = 0 \ \& \ \text{trade} = 0$	8902	48.98	51.02
ETH	Originale	28274	49.69	50.31
ETH	$r = 0$	19314	49.38	50.62
ETH	$r = 0 \ \& \ \text{trade} = 0$	19957	49.47	50.53
ETH	Renò $r = 0$	10236	49.28	50.72
ETH	Renò $r = 0 \ \& \ \text{trade} = 0$	10506	49.27	50.73
BTC	Originale	25079	50.05	49.95
BTC	$r = 0$	22423	49.95	50.05
BTC	$r = 0 \ \& \ \text{trade} = 0$	22986	49.89	50.11
BTC	Renò $r = 0$	10943	49.55	50.45
BTC	Renò $r = 0 \ \& \ \text{trade} = 0$	11173	49.71	50.29

Tabella 3.5: Percentuale di salti positivi e negativi per ogni criptovaluta sotto le diverse specificazioni del test LM. In ciascuna criptovaluta per i primi tre test LM è stata utilizzata la specificazione proposta dagli autori del test, mentre per gli ultimi due è stata adottata la specificazione di Renò, che impiega stimatori multipower per la stima della volatilità istantanea.

Dalla tabella si evince che, contrariamente alle mie aspettative, per tutte le criptovalute vi siano percentuali simili, in nessuna specificazione e in nessuna criptovaluta ci sono situazioni per cui si ha una netta maggioranza di salti positivi o negativi, tutti i valori sono molto vicini al 50%.

Si può però notare come in tutti i casi, escluso il test LM per solana con specificazione originale degli stimatori, vi sia sempre una leggera maggioranza di salti negativi, come io personalmente mi sarei aspettato in questo caso.

A questo punto è possibile approfondire l'analisi valutando non solo il segno, ma anche l'impatto dei salti, esaminandone la dimensione. In particolare, l'attenzione si concentra sui valori assunti dalla statistica test.

Coerentemente con l'analisi precedente, si mantiene la distinzione tra salti associati a rendimenti negativi e salti associati a rendimenti positivi, al fine di verificare eventuali differenze sistematiche sia in termini di ampiezza sia di comportamento tra le due componenti. I risultati vengono presentati in forma grafica, così da consentire un confronto immediato tra le diverse specificazioni del test e mettere in evidenza eventuali differenze nella distribuzione e nell'intensità dei salti rilevati.

Si sono analizzate le distribuzioni delle statistiche test associate all'individuazione di un salto, quindi superiori alla soglia pari a , per ciascuna criptovaluta saranno però riportati ed analizzati i risultati solo relativi alle criptovalute Ethereum e XRP, così da mostrare le differenze presenti tra le diverse criptovalute, i grafici sono costruiti limitando i valori della statistica test a 20, eliminando dalla valutazione alcuni outlier che rendevano difficilmente interpretabili i grafici.

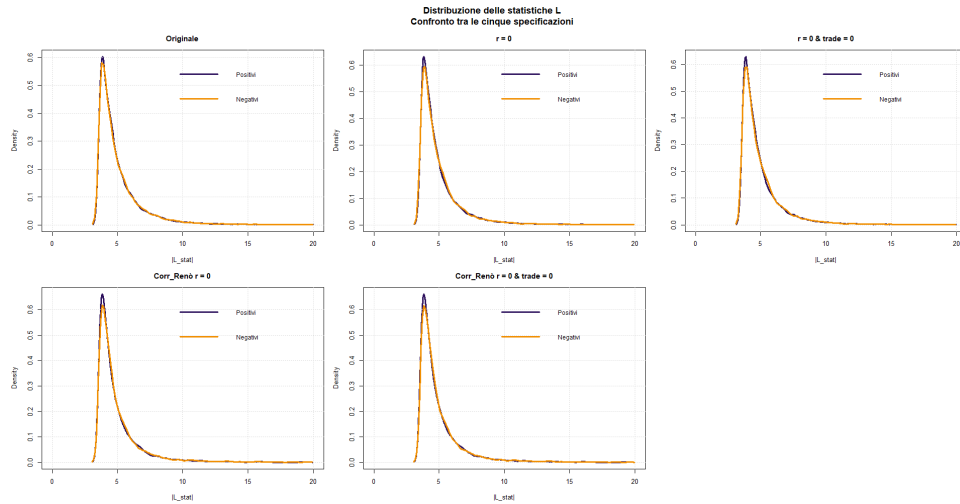
Dall'analisi grafica si osserva come, per tutte le specificazioni considerate e per ciascuna criptovaluta, la maggior parte delle statistiche del test si concentri nell'intervallo $[3.57; 10]$, evidenziando una sostanziale omogeneità nella dimensione dei salti rilevati. Tale concentrazione suggerisce che, nella generalità dei casi, l'intensità degli eventi identificati dal test di Lee e Mykland si mantenga su livelli moderati rispetto alla soglia critica.

Si rileva tuttavia, in particolare per XRP e ADA, la presenza di osservazioni estreme per le quali la statistica assume valori molto elevati, fino a circa 80. Ciò segnala l'esistenza di episodi isolati ma di notevole intensità, riconducibili a una distribuzione caratterizzata da code pesanti, ossia da una probabilità non trascurabile di osservare valori significativamente distanti dalla soglia di significatività.

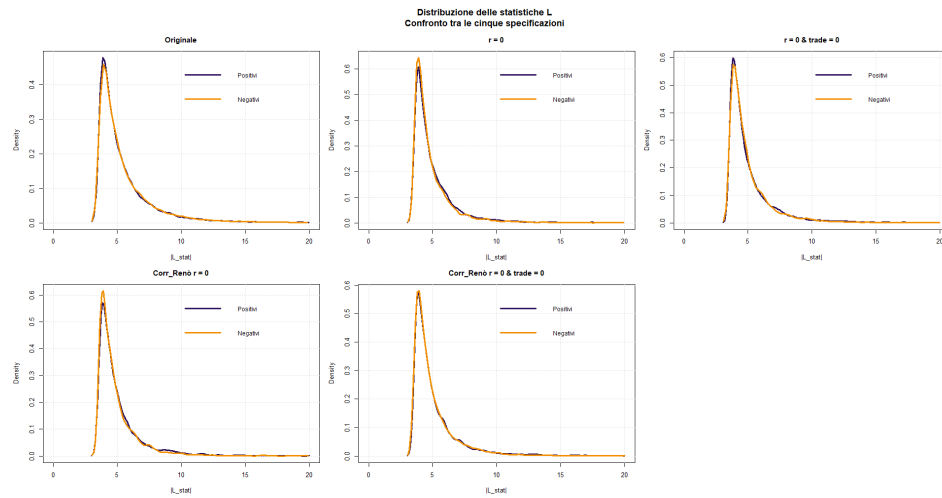
Con riferimento al segno del rendimento associato al salto, non si riscontrano differenze sostanziali tra salti positivi e negativi in termini di distribuzione complessiva. Si osserva tuttavia una lieve prevalenza dei salti legati a rendimenti negativi tra i valori più elevati della statistica, con i massimi generalmente riconducibili a movimenti ribassisti. Tale evidenza suggerisce una moderata asimmetria nelle code, più pronunciata sul lato dei salti negativi.

Le differenze più rilevanti emergono non tanto tra criptovalute, quanto tra specificazioni del test, e risultano strettamente connesse alla diversa incidenza di rendimenti nulli nei dati. Per Ethereum, Bitcoin e Solana, caratterizzate da una quota relativamente contenuta di zeri nei dati, le distribuzioni delle statistiche appaiono ampiamente comparabili tra le diverse versioni del test, mostrando forme simili e livelli di concentrazione analoghi.

Al contrario, per XRP e ADA, che presentano una percentuale più elevata di rendimenti nulli, nella specificazione classica si osserva una densità massima inferiore



(a) Distribuzioni delle statistiche test di ETH del test LM che segnalano la presenza di salti, suddivise per segno e per le diverse specificazioni



(b) Distribuzioni delle statistiche test di XRP del test LM che segnalano la presenza di salti, suddivise per segno e per le diverse specificazioni

Figura 3.4: Confronto tra le distribuzioni delle statistiche test L delle criptovalute ETH e XRP

(inferiore a 0.5 rispetto al valore prossimo a 0.6 riscontrato per le altre criptovalute) e una coda destra più pronunciata. Tale configurazione è indicativa di maggiore dispersione e di code più pesanti, ossia di una più elevata frequenza relativa di statistiche distanti dalla soglia critica. Nelle versioni corrette del test tali differenze tendono a ridursi, con distribuzioni maggiormente allineate a quelle osservate per le altre criptovalute.

In conclusione, non si evidenziano differenze sostanziali nella dimensione tipica dei salti né in funzione del segno del rendimento né tra le specificazioni corrette. Le principali divergenze riguardano invece il comportamento nelle code della distribuzione, che risulta influenzato dal diverso grado di distorsione associato alla presenza di rendimenti nulli nelle serie considerate.

Capitolo 4

Previsione basata su modelli HAR

4.1 Struttura del modello HAR

L'obiettivo del presente capitolo è ottenere la migliore previsione possibile della varianza realizzata giornaliera per ciascuna criptovaluta. L'impostazione adottata è esclusivamente previsiva e si basa sul confronto sistematico tra modelli HAR caratterizzati da differenti specificazioni degli stimatori di varianza, includendo sia le versioni standard sia quelle corrette per la presenza di zeri ed errori di microstruttura.

Le diverse specificazioni vengono valutate in termini di capacità predittiva out-of-sample, confrontando le performance secondo una funzione di perdita coerente con l'obiettivo di previsione della varianza. La selezione del modello avverrà mediante la procedura del Model Confidence Set (MCS), che consente di identificare l'insieme dei modelli statisticamente indistinguibili dal migliore per un livello prefissato di confidenza. Per ciascuna criptovaluta viene pertanto individuata la specificazione appartenente al Model Confidence Set che garantisce le migliori previsioni.

Al fine di perseguire l'obiettivo previsivo delineato in precedenza, si procede alla stima di una classe di modelli lineari aventi come variabile dipendente la varianza realizzata (RV). Tale scelta è motivata dal fatto che, come discusso nei capitoli precedenti, la varianza realizzata costituisce una misura consistente e una buona approssimazione empirica della varianza integrata in presenza di campionamento ad alta frequenza.

Sfruttando gli strumenti metodologici introdotti in precedenza, si hanno a disposizione differenti stimatori di RV , quindi è possibile valutarne la bontà previsiva delle diverse specificazioni tramite ad esempio modelli lineari per la previsione di serie storiche, come i modelli autoregressivi.

Dal punto di vista empirico, la serie della varianza realizzata presenta caratteri-

stiche stilizzate ben documentate in letteratura: presenza di valori estremi, distribuzione fortemente asimmetrica e non normalità, nonché la presenza di significatività dell'autocorrelazione anche per ritardi elevati. Tale evidenza è coerente con un comportamento assimilabile ad un processo a memoria lunga, che rende inadeguate specificazioni di modelli autoregressivi standard di ordine finito.

Il modello di riferimento che sarà adottato per tutto lo studio è l'Heterogeneous Autoregressive Model (HAR) proposto da Fulvio (2009). La sua formulazione si fonda su considerazioni di natura economica; nei mercati finanziari operano agenti eterogenei caratterizzati da differenti orizzonti temporali di investimento: giornaliero, settimanale e mensile. L'interazione tra tali categorie di operatori si riflette nella dinamica della varianza realizzata osservata a diverse risoluzioni temporali.

Il modello HAR sfrutta questa struttura eterogenea approssimando il comportamento a memoria lunga della volatilità mediante una combinazione lineare di componenti aggregate su orizzonti temporali differenti, evitando così la necessità di specificare esplicitamente moltissimi regressori.

Il modello HAR di base è definito come:

$$RV_t = \alpha + \beta_D RV_{t-1} + \beta_W RV_{t-1:t-7} + \beta_M RV_{t-1:t-30} + \varepsilon_t, \quad (4.1)$$

dove le componenti settimanale e mensile sono medie mobili della varianza realizzata passata:

$$RV_{t-1:t-7} = \frac{1}{7} \sum_{j=1}^7 RV_{t-j}, \quad (4.2)$$

$$RV_{t-1:t-30} = \frac{1}{30} \sum_{j=1}^{30} RV_{t-j}. \quad (4.3)$$

Il modello riesce ad approssimare la presenza di memoria lunga usando solo tre parametri associati ad una specifica interpretazione economica, risulta quindi molto semplice da stimare e da interpretare.

E' importante ricordare la particolarità dei mercati delle criptovalute, che sono operativi 24 ore su 24 e 7 giorni su 7, i regressori quindi riflettono queste peculiarità, con la componente settimanale che sarà calcolata su 7 giorni e la componente mensile su 30 giorni.

I parametri del modello HAR sono stimati tramite OLS avendo così una stima molto semplificata ed efficiente, essendo il modello un particolare modello AR, sia la possibilità di fare inferenza sui parametri stimati. Inoltre l'approccio è moderno perchè usa standard error robusti, affinché i residui non siano affetti dalla presenza

di eteroschedasticità e per provare a catturare tutta la dinamica nella varianza della varianza realizzata.

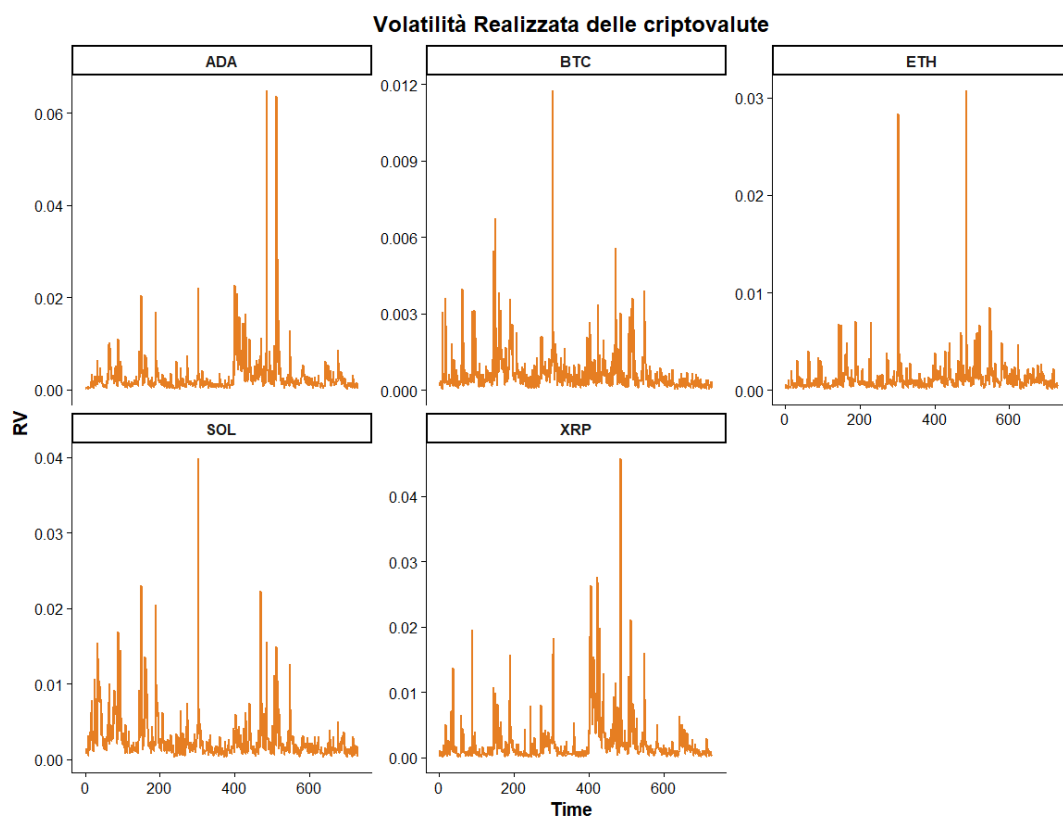


Figura 4.1: Confronto degli andamenti delle stime della volatilità realizzata per tutte le criptovalute

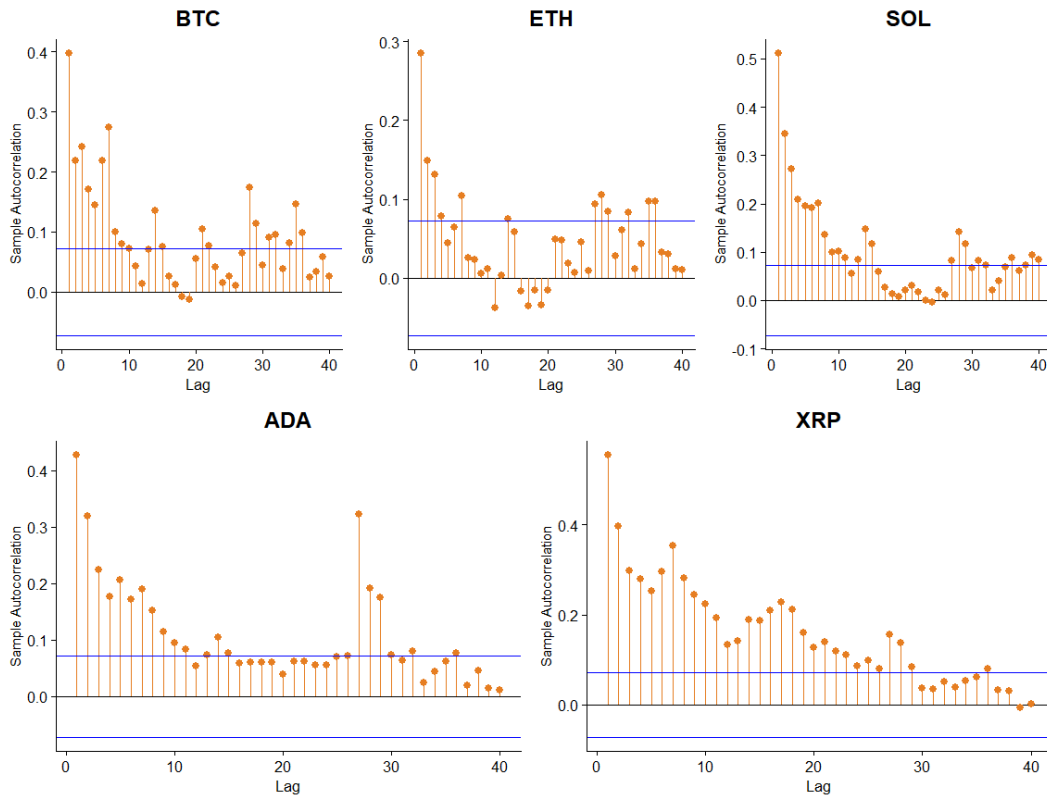


Figura 4.2: Funzioni di autocorrelazione globale stimate su RV per tutte le criptovalute

Dalla Figura 4.1 emergono marcate differenze tra le criptovalute sia di livello che di dinamica della varianza realizzata stimata. Ciascun asset presenta un proprio profilo di volatilità, caratterizzato da episodi di clustering e da picchi di diversa intensità e frequenza. In particolare, criptovalute come Cardano e XRP, le quali sono contraddistinte in diversi periodi da una minore intensità degli scambi e da una maggiore incidenza di rendimenti nulli, mostrano sporadici ma pronunciati picchi di volatilità, che determinano livelli di RV relativamente elevati rispetto ad asset con un maggior numero di scambi.

Quest'ultimo, pur presentando una dinamica persistente, evidenzia una volatilità mediamente più contenuta e distribuita in modo più regolare nel tempo.

Dalla Figura 4.2 si osserva che tutte le serie di varianza realizzata presentano autocorrelazioni positive e statisticamente significative per numerosi ritardi, evidenziando una marcata persistenza dinamica e un chiaro fenomeno di volatility clustering. Tale evidenza è coerente con la presenza di eteroschedasticità condizionata. Tuttavia, emergono differenze nella struttura della dipendenza seriale: Ethereum (ETH) mostra un decadimento relativamente più rapido della funzione di autocorrelazione, con significatività concentrata prevalentemente nei primi ritardi, mentre

le altre criptovalute come Bitcoin (BTC), Cardano (ADA) e XRP evidenziano una persistenza più pronunciata e prolungata, compatibile con un comportamento assimilabile alla memoria lunga. Queste differenze giustificano l'adozione di modelli particolarmente dinamici e flessibili, quali il modello HAR, in grado di catturare eterogeneità e persistenza su differenti orizzonti temporali.

Le evidenze empiriche appena commentate sul dataset a disposizione confermano le principali caratteristiche stilizzate della varianza realizzata (RV), in particolare la presenza di clustering della volatilità e la significativa dipendenza seriale anche a ritardi relativamente elevati. Tali proprietà rendono necessario specificare modelli dinamici in grado di catturare in modo parsimonioso la struttura di dipendenza temporale della serie, così da massimizzarne la capacità predittiva.

Il modello HAR nella sua formulazione originaria può tuttavia essere generalizzato ed esteso. Una prima estensione naturale consiste nella decomposizione della varianza realizzata nel contributo della componente continua e della componente discontinua, eventualmente distinguendo anche il segno dei contributi.

La procedura adottata segue l'approccio iterativo proposto da Andersen, Dobrev et al. (2009), basato sull'identificazione dei salti tramite il test BNS. Sia n_j il numero di salti individuati e I l'insieme degli indici temporali corrispondenti.

Data l'individuazione dei salti, i cui indici temporali sono raccolti nel set I , la varianza realizzata può essere scomposta come segue:

$$RV_t = CV_t + J_t^2 \quad (4.4)$$

La componente di salto è definita come:

$$J_t^2 = \sum_{i \in I} r_{i,t}^2 \quad (4.5)$$

$$(4.6)$$

mentre la componente continua è data da:

$$CV_t = \sum_{i \in I^c} r_{i,t}^2 \quad (4.7)$$

$$(4.8)$$

Una volta ottenuta la decomposizione, è possibile considerare il modello HAR-CJ, che estende la specificazione standard includendo separatamente le componenti continua e di salto.

Le medie mobili settimanali (7 giorni) e mensili (30 giorni) delle componenti

continua e discontinua sono definite come:

$$CV_{t-1:t-7} = \frac{1}{7} \sum_{j=1}^7 CV_{t-j}, \quad (4.9)$$

$$CV_{t-1:t-30} = \frac{1}{30} \sum_{j=1}^{30} CV_{t-j}, \quad (4.10)$$

$$J_{t-1:t-7}^2 = \frac{1}{7} \sum_{j=1}^7 J_{t-j}^2, \quad (4.11)$$

$$J_{t-1:t-30}^2 = \frac{1}{30} \sum_{j=1}^{30} J_{t-j}^2. \quad (4.12)$$

Il modello HAR standard, con aggregazioni settimanali e mensili coerenti con un orizzonte di 7 e 30 giorni, è dato da:

$$RV_t = \alpha + \beta_D RV_{t-1} + \beta_W RV_{t-1:t-7} + \beta_M RV_{t-1:t-30} + \varepsilon_t. \quad (4.13)$$

Sostituendo la decomposizione tra componente continua e di salto, si ottiene la nuova specificazione HAR-CJ:

$$RV_t = \alpha + \beta_D CV_{t-1} + \beta_W CV_{t-1:t-7} + \beta_M CV_{t-1:t-30} + \gamma_D J_{t-1}^2 + \gamma_W J_{t-1:t-7}^2 + \gamma_M J_{t-1:t-30}^2 + \varepsilon_t. \quad (4.14)$$

Le due componenti, continua e discontinua, possono contribuire in modo differenziato alla dinamica e all'evoluzione della volatilità realizzata. In particolare, la decomposizione consente di valutare se la persistenza della volatilità sia principalmente riconducibile alla componente continua del processo oppure a shock discreti appartenenti alla componente discontinua.

Dal punto di vista empirico, numerosi studi evidenziano come i coefficienti associati alla componente di salto risultino frequentemente non statisticamente significativi, mentre quelli relativi alla componente continua tendano a mantenere elevata significatività e stabilità. Tale evidenza è coerente con l'interpretazione secondo cui la dinamica della volatilità è prevalentemente guidata dalla parte continua del processo.

Tuttavia, sul piano teorico, questa conclusione è valida soltanto qualora l'identificazione dei salti sia corretta. In presenza di errori nella procedura di individuazione, la componente di salto può incorporare porzioni di variabilità continua o viceversa,

alterando l'interpretazione economica dei coefficienti stimati. In tali circostanze, è possibile osservare significatività statistica diffusa sia per le componenti continue sia per quelle di salto, riflettendo la presenza di un probabile errore precedente nella divisione delle componenti.

Il modello HAR e la sua estensione HAR-CJ costituiscono le due specificazioni di riferimento dell'analisi empirica e rappresentano la base di confronto per tutte le successive estensioni.

A partire da tali strutture fondamentali, verranno considerate molteplici estensioni, ottenute sia attraverso l'impiego di differenti stimatori della varianza realizzata, sia standard che corretti, sia mediante l'inclusione di variabili esplicative aggiuntive volte a catturare effetti economici specifici.

In particolare, verranno introdotte variabili in grado di modellare l'eventuale presenza di asimmetrie nella dinamica della volatilità, quali l'effetto leverage, nonché variabili dummy temporali destinate a intercettare possibili pattern sistematici legati ad effetti come quelli sul giorno della settimana o differenze tra i giorni del weekend e giornate lavorative.

L'obiettivo è verificare se tali estensioni consentano di migliorare la capacità predittiva dei modelli di base, contribuendo ad una più accurata caratterizzazione della dinamica della volatilità realizzata.

Partendo da questi modelli base noi andremo ad eseguire confronti tra diversi modelli per ciascuna criptovaluta alla ricerca del miglior modello, per questo ho deciso di valutare quale sia il migliore tramite l'uso del Model Confidence Set, che permette di valutare contemporaneamente M diversi modelli.

L'ipotesi nulla del MCS è che i modelli inclusi in un set forniscano tutti la stessa perdita attesa:

$$H_0 : \mathbb{E}[l_{m,t}] = \mathbb{E}[l_{i,t}] \quad \forall m \neq i, m, i \in M$$

dove M è il set dei modelli che vengono confrontati.

L'ipotesi alternativa è che uno dei modelli sia inferiore agli altri perché caratterizzato da una funzione di perdita più elevata:

$$H_1 : \exists m, i \in M \text{ tali che } \mathbb{E}[l_{m,t}] > \mathbb{E}[l_{i,t}]$$

Per valutare l'ipotesi nulla si possono utilizzare due statistiche test definite in Hansen et al. (2003):

$$t_R = \max_{i, m \in M} \left| \left(\hat{L}_i - \hat{L}_m \right) \left(\text{Var} \left[\sqrt{T} \left(\hat{L}_i - \hat{L}_m \right) \right] \right)^{-\frac{1}{2}} \right|$$

$$t_{SQ} = \sum_{\substack{i, m \in M \\ m > i}} \left[\left(\hat{L}_i - \hat{L}_m \right) \left(\text{Var} \left[\sqrt{T} \left(\hat{L}_i - \hat{L}_m \right) \right] \right)^{-\frac{1}{2}} \right]^2$$

dove la varianza viene valutata ricorrendo ad un campionamento di tipo bootstrap e anche la distribuzione della statistica test verrà costruita tramite bootstrap.

Si rifiuterà l'ipotesi nulla se i p-value, perchè noi usando un campionamento bootstrap vedremo solo i p-value finali e non le statistiche test, apparterranno alla coda superiore, allora si rifiuta per valori grandi delle statistiche.

L'MCS si basa su una procedura ricorsiva:

1. Si valuta l'ipotesi nulla usando una delle due statistiche R o SQ .
2. Se l'ipotesi nulla non viene rifiutata la procedura si ferma, altrimenti si individua il modello peggiore usando LF_i .
3. Si rimuove dal set di modelli il modello peggiore e si torna allo step [1].

Il p-value associato all' i -esimo modello escluso viene determinato come:

$$\hat{p}_i = \max_{j \leq i} p_j$$

dove p_j è il p-value associato alla statistica test calcolata alla j -esima iterazione dello step.

Con questa procedura, attraverso il Model Confidence Set (MCS), si valuta quale sia il modello migliore a fini previsivi. È tuttavia importante ricordare che l'MCS ordina i modelli in base alla loro esclusione progressiva dal set. Infatti, il set finale può essere composto da più di un modello, ossia da un insieme di modelli statisticamente indistinguibili in termini di perdita attesa, a quel punto per la scelta del modello migliore si andranno a valutare la parsimonia dei modelli, preferendo quelli più parsimoniosi a parità di perdita attesa.

4.2 Stima dei modelli e confronto tra diverse specificazioni

In questo capitolo si introducono le estensioni dei modelli HAR.

Un'estensione, ampiamente diffusa in letteratura è l'introduzione dell'effetto leverage all'interno della specificazione di un modello HAR.

L'obiettivo è verificare se la dinamica della volatilità realizzata risponda in modo asimmetrico ai rendimenti positivi e negativi; e se l'inclusione di tale regressore contribuisca a migliorare la capacità predittiva del modello.

L'effetto leverage si riferisce alla relazione negativa tra rendimento e volatilità, perchè solitamente shock negativi sui prezzi tendono ad essere associati a incrementi futuri della volatilità più pronunciati rispetto a shock positivi di pari entità. Dal punto di vista economico, questo fenomeno è spesso interpretato come espressione di una risposta asimmetrica dell'incertezza alle cattive notizie rispetto alle buone notizie.

Nel contesto dei modelli HAR, l'effetto leverage può essere incorporato introducendo una componente aggiuntiva che cattura l'impatto del segno dei rendimenti giornalieri ritardati sulla volatilità futura. In particolare, si considera esclusivamente la parte negativa dei rendimenti, così da testare esplicitamente l'eventuale presenza di un effetto asimmetrico.

Ai fini della costruzione dei rendimenti giornalieri, si procede come segue: per il primo giorno del campione, il rendimento è calcolato come differenza logaritmica tra il primo prezzo di apertura e l'ultimo prezzo di chiusura disponibili; per tutti i giorni successivi, il rendimento giornaliero è definito come differenza logaritmica tra i prezzi di chiusura osservati alle ore 00:00 di due giorni consecutivi. Indicando con P_t il prezzo di chiusura giornaliero, il rendimento è dunque:

$$r_t = \log P_t - \log P_{t-1}.$$

La componente leverage viene quindi definita come:

$$r_{t-1}^- = \min(r_{t-1}, 0),$$

dove r_{t-1} rappresenta il rendimento giornaliero osservato al tempo $t-1$. Tale trasformazione consente di isolare esclusivamente gli shock negativi, mentre i rendimenti positivi assumono valore nullo nella componente leverage.

La specificazione del modello HAR con effetto leverage, indicato come LHAR, risulta pertanto:

$$RV_t = \alpha + \beta_D RV_{t-1} + \beta_W RV_{t-1:t-7} + \beta_M RV_{t-1:t-30} + \delta r_{t-1}^- + \varepsilon_t.$$

In questa formulazione, il coefficiente δ misura l'impatto marginale dei rendimenti negativi ritardati sulla volatilità realizzata futura. Un valore statisticamente significativo di tale parametro fornirebbe evidenza a favore della presenza di un effetto leverage nella dinamica della volatilità del mercato delle criptovalute.

In questo studio però si vuole anche indagare la capacità dei momenti di ordine superiore di migliorare la bontà di adattamento e quindi la performance preditti-

va dei modelli per la volatilità realizzata. In particolare, si intende verificare se l'inclusione del terzo momento (asimmetria) e del quarto momento (curtosi) come regressori nel modello fornisca informazioni aggiuntive rilevanti e quindi ci sia un miglioramento rispetto al modello base.

A tal fine, sia il modello HAR sia il modello HAR-CJ vengono estesi includendo come regressori le misure di asimmetria e curtosi realizzata.

Tuttavia, per garantire coerenza strutturale con l'impianto originario del modello HAR e consentire confronti omogenei in termini di capacità predittiva, è necessario mantenere la medesima logica di aggregazione temporale.

Come nel modello HAR standard, anche per i momenti di ordine superiore si costruiscono combinazioni lineari di componenti aggregate su differenti orizzonti temporali (giornaliero, settimanale e mensile). Questa scelta permette di catturare la dinamica eterogenea del processo evitando, al contempo, la proliferazione di un numero eccessivo di regressori.

Le componenti settimanale e mensile dell'asimmetria realizzata sono quindi definite come medie mobili dei valori passati:

$$SK_{t-1:t-7} = \frac{1}{7} \sum_{j=1}^7 SK_{t-j}, \quad (4.15)$$

$$SK_{t-1:t-30} = \frac{1}{30} \sum_{j=1}^{30} SK_{t-j}. \quad (4.16)$$

In modo del tutto analogo, le componenti aggregate della curtosi realizzata risultano:

$$KU_{t-1:t-7} = \frac{1}{7} \sum_{j=1}^7 KU_{t-j}, \quad (4.17)$$

$$KU_{t-1:t-30} = \frac{1}{30} \sum_{j=1}^{30} KU_{t-j}. \quad (4.18)$$

In questo modo, i modelli HAR e HAR-CJ vengono estesi preservando la struttura tipica dell'approccio HAR, ma arricchendola con informazioni provenienti dai momenti terzo e quarto della distribuzione.

A questo punto è possibile presentare formalmente le specificazioni dei modelli HAR e HAR-CJ estesi, che includono le nuove componenti legate ad asimmetria e

curtosi. *HAR-CJ*

$$\begin{aligned}
 RV_t = & \alpha + \beta_D CV_{t-1} + \beta_W CV_{t-1:t-7} + \beta_M CV_{t-1:t-30} \\
 & + \gamma_D J_{t-1}^2 + \gamma_W J_{t-1:t-7}^2 + \gamma_M J_{t-1:t-30}^2 \\
 & + \delta_D SK_{t-1} + \delta_W SK_{t-1:t-7} + \delta_M SK_{t-1:t-30} \\
 & + \phi_D KU_{t-1} + \phi_W KU_{t-1:t-7} + \phi_M KU_{t-1:t-30} + \varepsilon_t
 \end{aligned} \tag{4.19}$$

HAR

$$\begin{aligned}
 RV_t = & \alpha + \beta_D RV_{t-1} + \beta_W RV_{t-1:t-7} + \beta_M RV_{t-1:t-30} \\
 & + \delta_D SK_{t-1} + \delta_W SK_{t-1:t-7} + \delta_M SK_{t-1:t-30} \\
 & + \phi_D KU_{t-1} + \phi_W KU_{t-1:t-7} + \phi_M KU_{t-1:t-30} + \varepsilon_t
 \end{aligned} \tag{4.20}$$

Infine una ulteriore estensione dei modelli proposta consiste nell'adottare le correzioni proposte precedentemente nel secondo capitolo per la stima dei momenti realizzati. Tale scelta risponde all'esigenza di valutare se le distorsioni, che sappiamo essere presenti negli stimatori classici, una volta eliminate usando nel modello regressori basati su stimatori più robusti, come quelli corretti, portino ad un miglioramento nelle previsioni.

In particolare, l'asimmetria realizzata e la curtosi realizzata che saranno usate come regressori nel modello saranno ora costruite mediante stimatori corretti, quelli proposti nel capitolo 2.

Per il secondo momento si adotta lo stimatore proposto da Renò della Bipower Variation, in quanto, come discusso in precedenza, presenta proprietà asintotiche più robuste rispetto allo stimatore classico di varianza realizzata, soprattutto in presenza di salti e rumore di microstruttura.

Per quanto concerne il terzo e il quarto momento, si utilizzano invece stimatori corretti di tipo threshold. La scelta è motivata da due ragioni principali: da un lato, tali stimatori consentono di attenuare l'influenza delle osservazioni estreme riconducibili ai salti; dall'altro, risultano relativamente più semplici da implementare operativamente rispetto ad alternative multipower di ordine superiore, garantendo al contempo buone proprietà di robustezza e come si è visto nel secondo capitolo garantiscono una ottima correzione delle distorsioni.

Per la decomposizione della varianza realizzata su cui si basa il modello HAR-CJ, si fa riferimento agli stimatori corretti impiegati nel test BNS. In tale contesto, la varianza realizzata può essere scomposta come visto precedentemente:

$$RV_t = BPV_t^c + JV_t^c,$$

dove BPV_t^c rappresenta la componente continua del processo, stimata attraverso la

Bipower Variation (BPV), mentre JV_t^c identifica la componente di salto.

In presenza di salti, vale infatti la relazione asintotica

$$RV(t-1, t) - BPV(t-1, t) \approx \sum_{i=1}^{N_t} J_i^2,$$

per cui la differenza tra Realized Variance e Bipower Variation converge alla somma dei quadrati dei salti qualora questi siano presenti, mentre tende a zero in assenza di discontinuità. Tale proprietà consente di ottenere una stima separata delle due componenti della volatilità, rendendo possibile con distinzione tra componente continua e componente di salto l'implementazione del modello HAR-CJ corretto.

Coerentemente con la struttura originaria del modello HAR, anche nella versione corretta vengono mantenute le tre componenti temporali (giornaliera, settimanale e mensile) per ciascun momento considerato. Le quantità aggregate sono costruite come medie mobili sui consueti orizzonti di 7 e 30 giorni, preservando così la struttura gerarchica multilivello del modello.

Indicando con RV^c la varianza realizzata corretta ottenuta usando gli stimatori multipower, con SK^c l'asimmetria realizzata corretta e con KU^c la curtosi realizzata corretta, le specificazioni estese dei modelli risultano le seguenti.

Modello HAR corretto

$$\begin{aligned} RV_t = & \beta_0 + \beta_1 RV_{t-1}^c + \beta_2 RV_{t-1:t-7}^c + \beta_3 RV_{t-1:t-30}^c \\ & + \gamma_1 SK_{t-1}^c + \gamma_2 SK_{t-1:t-7}^c + \gamma_3 SK_{t-1:t-30}^c \\ & + \delta_1 KU_{t-1}^c + \delta_2 KU_{t-1:t-7}^c + \delta_3 KU_{t-1:t-30}^c + \varepsilon_t. \end{aligned} \quad (4.21)$$

Modello HAR-CJ corretto

$$\begin{aligned} RV_t^c = & \beta_0 + \beta_1 BPV_{t-1}^c + \beta_2 BPV_{t-1:t-7}^c + \beta_3 BPV_{t-1:t-30}^c \\ & + \theta_1 JV_{t-1}^c + \theta_2 JV_{t-1:t-7}^c + \theta_3 JV_{t-1:t-30}^c \\ & + \gamma_1 SK_{t-1}^c + \gamma_2 SK_{t-1:t-7}^c + \gamma_3 SK_{t-1:t-30}^c \\ & + \delta_1 KU_{t-1}^c + \delta_2 KU_{t-1:t-7}^c + \delta_3 KU_{t-1:t-30}^c + \varepsilon_t. \end{aligned} \quad (4.22)$$

In entrambe le specificazioni, l'aggiunta del pedice c indica l'utilizzo di stimatori corretti.

Infine l'ultima estensione dei modelli originari riguarda l'introduzione nel modello di variabili indicatrici relative ai giorni della settimana. Tale scelta è motivata dalla peculiare struttura del mercato delle criptovalute, che opera ininterrottamente sette giorni su sette, a differenza dei mercati azionari tradizionali, caratterizzati da

negoiazione limitata ai giorni lavorativi; quindi per le criptovalute ci si possono aspettare delle differenze tra i livelli di volatilità infrasettimanali, quando tutti gli operatori sono attivi nel mercato, e i livelli di volatilità che si trovano nel weekend, quando si ha un numero di operatori minori nel mercato.

L'obiettivo è verificare se esistano differenze sistematiche nei livelli di volatilità realizzata tra i diversi giorni della settimana e se l'inclusione di tali effetti possa contribuire a migliorare la capacità predittiva del modello.

Dal punto di vista del modello, si adottano variabili dummy giornaliere, eliminando l'intercetta e scegliendo il mercoledì come categoria di riferimento. In questo modo, ciascun coefficiente associato alle altre dummy misura la differenza media nel livello di volatilità realizzata rispetto al mercoledì. La scelta di rimuovere l'intercetta evita problemi di multicollinearità e consente un'interpretazione diretta dei coefficienti.

Le dummy sono definite come le seguenti variabili indicatrici:

$$D_{Mon,t}, D_{Tue,t}, D_{Thu,t}, D_{Fri,t}, D_{Sat,t}, D_{Sun,t},$$

dove ciascuna assume valore 1 se l'osservazione al tempo t ricade nel giorno indicato e 0 altrimenti. Il mercoledì è omissso perchè rappresenta pertanto il livello di riferimento.

In aggiunta, si introduce anche una dummy aggregata che distingue tra giorni lavorativi e weekend:

$$D_{WE,t} = \begin{cases} 1 & \text{se } t \text{ è sabato o domenica,} \\ 0 & \text{se } t \text{ è un giorno lavorativo (lun-ven).} \end{cases}$$

Questa variabile consente di valutare in modo più parsimonioso l'eventuale differenza strutturale tra attività di trading nei giorni lavorativi e nel fine settimana. Inoltre, può essere utilizzata per testare la presenza di eventuali effetti di interazione con i regressori legati alla varianza realizzata, senza introdurre un numero eccessivo di parametri aggiuntivi.

La specificazione del modello HAR esteso con momenti di ordine superiore e dummy giornaliere (senza intercetta e con mercoledì come categoria di riferimento)

risulta quindi:

$$\begin{aligned}
RV_t = & \beta_1 RV_{t-1} + \beta_2 RV_{t-1:t-7} + \beta_3 RV_{t-1:t-30} \\
& + \gamma_1 SK_{t-1} + \gamma_2 SK_{t-1:t-7} + \gamma_3 SK_{t-1:t-30} \\
& + \delta_1 KU_{t-1} + \delta_2 KU_{t-1:t-7} + \delta_3 KU_{t-1:t-30} \\
& + \phi_{Mon} D_{Mon,t} + \phi_{Tue} D_{Tue,t} + \phi_{Thu} D_{Thu,t} + \phi_{Fri} D_{Fri,t} + \phi_{Sat} D_{Sat,t} + \phi_{Sun} D_{Sun,t} + \varepsilon_t.
\end{aligned} \tag{4.23}$$

In tale formulazione, ciascun coefficiente ϕ_j misura la differenza nel livello atteso di volatilità realizzata rispetto al mercoledì, mantenendo costanti le altre componenti dinamiche del modello. L'estensione consente quindi di integrare nella struttura HAR eventuali effetti calendariali specifici del mercato delle criptovalute.

In modo del tutto analogo a quanto effettuato per le variabili indicatrici sui singoli giorni della settimana, è possibile estendere la specificazione del modello includendo una dummy settimanale che distingua tra giorni lavorativi e weekend.

In questo caso, si pone come categoria di riferimento l'insieme dei giorni lavorativi, mentre la variabile indicatrice assume valore pari a 1 nei giorni del weekend e 0 altrimenti. In tal modo, il coefficiente associato alla dummy del weekend misura la differenza nel livello atteso di varianza realizzata rispetto ai giorni feriali, a parità delle altre componenti dinamiche del modello.

Ora si ha tutto pronto per confrontare sistematicamente le performance delle diverse specificazioni, al fine di individuare le strutture modellistiche più efficaci nella previsione della volatilità realizzata e verificare se le estensioni proposte producano effettivi miglioramenti in termini di accuratezza predittiva.

4.3 Valutazione delle previsioni e scelta del modello ottimale

In questo paragrafo si procede alla valutazione sistematica delle capacità previsive dei modelli HAR e delle sue estensioni per ciascuna criptovaluta analizzata. Il confronto tra le diverse specificazioni viene effettuato mediante l'applicazione della procedura del Model Confidence Set, che consente di individuare l'insieme dei modelli statisticamente indistinguibili dal migliore in termini di performance predittiva.

Tutte le specificazioni lineari proposte vengono stimate tramite il metodo dei minimi quadrati ordinari (OLS), coerentemente con l'impostazione standard dei modelli HAR. La valutazione delle performance si articola su più livelli. Si analizzerà la significatività statistica dei coefficienti associati alle estensioni introdotte, al fine

di verificare la rilevanza econometrica delle nuove componenti, ma si considererà anche la bontà di adattamento attraverso l'indice R^2 , quale misura sintetica della capacità esplicativa del modello.

Saranno riportate tabularmente soltanto i valori ottenuti con il Model confidence set, per le altre variabili saranno riportate in modo discorsivo eventuali differenze o risultati inaspettati.

Il MCS permette un confronto robusto tra modelli concorrenti sulla base di una funzione di perdita prescelta, in questo studio si usa la funzione di perdita quadratica; inoltre si adotta la statistica t_R come statistica di riferimento per l'eliminazione sequenziale dei modelli meno performanti, implementando ogni volta 5000 ricampionamenti bootstrap per approssimare la distribuzione campionaria della statistica test. Il livello di significatività sarà fissato a $\alpha = 0,25$, scelta che consente di garantire un confronto informativo tra le diverse specificazioni considerate.

Si inizia l'analisi empirica dai risultati del confronto tra i modelli HAR e i modelli HAR-CJ di base e gli stessi modelli estesi introducendo i momenti realizzati con gli stimatori classici e con l'introduzione della componente di leverage.

Tabella 4.1: MCS p-value basati su $T_{\max}$ ($\alpha = 0.25$)

	Bitcoin	Ethereum	Solana	Cardano	XRP
HAR	0.000	0.00	0.00	0.3270	0.3322
LHAR	0.6666	0.00	0.9660	0.3528	0.4964
HAR-CJ	0.00	0.00	0.4068	0.9616	0.6866
LHAR-CJ	0.8890	0.4448	1.0000	1.0000	1.0000
HAR+SK,KU	0.6294	0.00	0.9216	1.0000	1.0000
LHAR+SK,KU	1.0000	0.7618	1.0000	1.0000	1.0000
HAR-CJ+SK,KU	0.8316	0.00	0.9998	1.0000	1.0000
LHAR-CJ+SK,KU	1.0000	1.0000	1.0000	1.0000	1.0000

Dai risultati emerge chiaramente come l'introduzione della componente di leverage produca un aumento significativo dei p -value e una più frequente inclusione nel confidence set. Ciò conferma l'utilità nell'inserimento della componente di leverage tra i regressori perchè i coefficienti ad esso associati sono significativi e negativi, indicando che le criptovalute hanno una differente dinamica della volatilità realizzata rispetto al segno del rendimento dell'intervallo precedente, se il rendimento è negativo rispetto a quando è positivo ci si aspetta una volatilità più contenuta.

Considerando le singole criptovalute, per Bitcoin i modelli HAR e HARCJ di base risultano esclusi dal confidence set, mentre l'introduzione della componente leverage in quegli stessi modelli determina un netto miglioramento, con p -value elevati e

inclusione nel set finale. L'aggiunta dei momenti di asimmetria e curtosi rafforza ulteriormente la performance, suggerendo che per Bitcoin sia l'effetto leverage sia l'informazione contenuta nei momenti superiori portino apprezzabili miglioramenti al modello e alla sua capacità previsiva.

Per Ethereum, i risultati evidenziano con particolare chiarezza l'importanza dell'introduzione dell'effetto leverage nel modello. Le specificazioni HAR di base, così come quelle estese con i momenti di ordine superiore (asimmetria e curtosi), sono state escluse dal model confidence set finale.

Per questa criptovaluta, dunque, la componente di leverage appare un elemento essenziale per ottenere una performance competitiva. L'estensione ai momenti terzo e quarto genera ulteriori miglioramenti, ma tali progressi non risultano determinanti, perchè la presenza nel set finale del modello LHAR-CJ indica che già la combinazione tra leverage e scomposizione della varianza nelle componenti continua e di salto è sufficiente a garantire una buona capacità previsiva nel confronto considerato.

Nel caso di Solana si osservano differenze sostanziali rispetto alle precedenti criptovalute, viene escluso solo il modello HAR dal set finale. L'introduzione del leverage nel modello è associata sempre a coefficienti stimati fortemente significativi, ma nonostante vi sia un aumento del p -value ciò non porta all'esclusione del modello di base HAR-CJ, ma anche dei modelli HAR con asimmetria e curtosi. Questo ci suggerisce come nonostante la significatività sia del leverage che di alcuni regressori legati ai momenti di ordine superiore, essi non portino a miglioramenti tali da escludere un modello base come l'HAR-CJ.

Per Cardano nessuna delle specificazioni considerate viene esclusa dal confidence set finale. Già i modelli di base, HAR e HARCJ, risultano inclusi, con valori particolarmente elevati per la versione che distingue tra componente continua e di salto. L'introduzione dell'effetto leverage, pur accompagnata da coefficienti significativi, non determina un cambiamento sostanziale e porta solo ad un lieve miglioramento; tutti rimangono nel set finale e il miglioramento in termini di funzioni di perdita appare contenuto. Analogamente, l'aggiunta dei momenti di terzo e quarto ordine porta i p -value a valori prossimi o pari a uno, ma senza modificare la selezione finale.

Una dinamica del tutto simile caratterizza XRP, anche in questo caso nessun modello viene escluso dal confidence set e le specificazioni HAR e HARCJ di base risultano già competitive. L'introduzione del leverage produce un incremento dei p -value limitato a parità di modello, l'impatto sulle funzioni di perdita è limitato e non altera le conclusioni del confronto. Lo stesso vale per l'inclusione dei momenti superiori, che pur migliorando marginalmente le performance, non determinano un vantaggio decisivo rispetto ai modelli standard, che rimangono pienamente adeguati

nel descrivere la dinamica della volatilità.

Nel complesso, per tutte le criptovalute ed in particolare per Bitcoin ed Ethereum, l'effetto leverage risulta fortemente rilevante, con miglioramenti sostanziali nelle performance e un aumento dell' R^2 adjusted. L'aggiunta dei momenti di terzo e quarto ordine mostra invece un impatto più contenuto e meno sistematico; nella maggior parte dei casi emerge la significatività della curtosi al primo ritardo e solo occasionalmente dell'asimmetria, con coefficienti di entità ridotta e raramente significativi ai ritardi settimanali o mensili.

Infine, contrariamente alle aspettative iniziali, per le criptovalute caratterizzate da una maggiore presenza di rendimenti nulli, come Cardano e XRP, l'inclusione del leverage e dei momenti stimati non determina un cambiamento sostanziale nella selezione del confidence set, poiché già i modelli di base risultano adeguati a descrivere la dinamica della volatilità.

Alla luce dell'evidenza emersa nelle analisi precedenti, e in particolare della forte significatività dei coefficienti legati alla componente di leverage nei modelli iniziali, si è scelto di includere tale effetto in tutte le successive specificazioni considerate.

Ora si passa al confronto tra i modelli LHAR e LHAR-CJ di base senza estensioni con stimatori classici e stimatori corretti, con l'obiettivo di valutare se ci siano differenze significative nell'uso dei due diversi stimatori:

	LHAR	LHAR-CJ	LHAR-CORR.	LHAR-CJ-CORR
Bitcoin	0	1.0000	0.3018	1.0000
Ethereum	0	1.0000	0	0
Solana	0.2622	1.0000	0.9724	1.0000
Cardano	0	1.0000	0	0
XRP	0	1.0000	0	0.3908

Tabella 4.2: Risultati del confronto tra stimatori classici e stimatori corretti nei modelli di base.

Nei modelli confrontati in tabella si mantiene costante la presenza dell'effetto leverage tra i regressori dei modelli, al fine di valutare esclusivamente l'eventuale contributo derivante dall'utilizzo di stimatori corretti rispetto agli stimatori classici nei due modelli di base.

I risultati evidenziano marcate differenze tra le criptovalute considerate. Un primo elemento rilevante è che il modello LHAR-CJ risulta l'unico sempre incluso nel set finale per tutte le criptovalute analizzate. Tale evidenza conferma l'utilità della scomposizione della varianza realizzata nelle sue componenti continua e jump ai fini previsivi.

Si osserva inoltre che il modello LHAR viene escluso per tutte le criptovalute ad eccezione di Solana; in quest'ultimo caso, pur risultando al limite della significatività, la sua inclusione è coerente con il livello di significatività adottato ($\alpha = 0.25$).

Infine, l'introduzione di correzioni sugli stimatori non sembra generare miglioramenti sistematici nelle performance previsive dei modelli di base. In diversi casi, i modelli corretti producono risultati comparabili o addirittura inferiori rispetto alle specificazioni basate su stimatori classici. Tale evidenza suggerisce che, nel contesto analizzato, il beneficio derivante dalla correzione degli stimatori non risulta sufficientemente robusto da determinare un vantaggio competitivo stabile all'interno del Model Confidence Set.

Si procede ora al confronto dei modelli di base LHAR e LHAR-CJ, estesi includendo, tra i regressori asimmetria e curtosi calcolate sia attraverso stimatori classici sia mediante stimatori corretti. L'obiettivo è valutare se l'informazione contenuta nei momenti di ordine superiore contribuisca a migliorare le performance previsive e se tale contributo risulti sensibile alla metodologia di stima adottata.

	LHAR+SK, KU	LHAR-CJ+SK, KU	LHAR-CORR+SK, KU	LHAR-CJ-CORR+SK, KU
Bitcoin	1.0000	1.0000	0.7130	0.9836
Ethereum	0.7920	1.0000	0.8916	1.0000
Solana	0	0.5980	1.0000	1.0000
Cardano	1.0000	1.0000	0.3716	0.9832
XRP	0.8264	1.0000	0.6652	1.0000

Tabella 4.3: Risultati del confronto tra stimatori classici e stimatori corretti con inclusione di asimmetria (SK) e curtosi (KU).

Anche in questa specificazione non emergono differenze sistematiche tra l'utilizzo di stimatori classici e stimatori corretti della varianza realizzata. I p-value associati risultano generalmente elevati per entrambe le versioni dei modelli, senza che si evidenzino un miglioramento netto delle specificazioni corrette rispetto a quelle classiche; perciò a parità di struttura del modello e di insieme informativo, la correzione degli stimatori non sembra portare miglioramenti importanti nelle previsioni. Tale evidenza è coerente con quanto osservato nella tabella precedente e suggerisce che i benefici derivanti dalle correzioni non siano sufficientemente marcati da determinare un miglioramento sistematico nelle previsioni.

Invece, l'introduzione dei momenti tra i regressori produce un effetto più evidente. Rispetto alla precedente specificazione, il modello HAR di base che precedentemente era quasi sempre escluso dal set finale, ora risulta escluso soltanto in un caso. Ciò suggerisce che l'inclusione dei momenti apporti un contributo informativo rilevante alla dinamica della volatilità e rende competitivo anche il modello HAR di base,

migliorandone la sua precisione complessiva.

Successivamente verrà effettuato un confronto finale tra i modelli migliori selezionati tramite la procedura MCS nelle diverse tabelle e specificazioni considerate, al fine di individuare le configurazioni che mostrano le performance più solide e stabili nel complesso dell'analisi; per i modelli base sarà selezionato il modello LHAR-CJ essendo anche il più parsimonioso a parità di bontà previsiva e per i modelli con l'aggiunta dei momenti di ordine superiore, nonostante la permanenza del modello HAR, si sceglie il modello LHAR-CJ sia con stimatori corretti che con stimatori classici, perchè ci si vuole focalizzare sulle componenti aggiuntive introdotte nel modello e quindi a parità di bontà d'adattamento ho deciso di scegliere il modello HAR-CJ come base.

La seguente tabella riporterà i risultati della procedura di Model Confidence Set applicata alle estensioni dei modelli LHAR che includono variabili dummy per effetti giornalieri (DAY) e settimanali (WEEK); vengono confrontate specificazioni basate su stimatori classici della varianza realizzata con le corrispondenti versioni corrette.

Coerentemente con le analisi precedenti, tutte le specificazioni incorporano la componente di leverage, risultata sistematicamente significativa. L'attenzione si concentra quindi sull'eventuale contributo informativo degli effetti calendario e sulle differenze tra stimatori classici e corretti.

Per la specificazione basata sui giorni della settimana (DAY) la categoria di riferimento è il mercoledì; i coefficienti degli altri giorni misurano gli scostamenti rispetto a tale baseline. La specificazione WEEK e le relative interazioni consentono invece di valutare la presenza di effetti sistematici nei giorni del weekend, sabato e domenica, rispetto ai giorni lavorativi, da lunedì a venerdì.

Tabella 4.4: MCS p-value ($\alpha = 0.25$)

	Bitcoin	Ethereum	Solana	Cardano	XRP
LHAR_CJ	0	0	0	1.0000	0.8870
LHAR_CJ_CORR	0	0	0	0.3076	0.4996
LHAR_CJ_DAY	0.8934	1.0000	0.6506	1.0000	1.0000
LHAR-CJ-CORR-DAY	0.7570	1.0000	1.0000	0.9588	1.0000
LHAR_CJ_WEEK	0	0.6948	0	1.0000	1.0000
LHAR_CJ_CORR_WEEK	0	0.3046	0	0.4978	0.9254
LHAR-CJ-WEEK-INT	1.0000	0.9236	1.0000	1.0000	1.0000

Dall'analisi della tabella emerge che, per Bitcoin, Ethereum e Solana, le specificazioni base LHAR_CJ e LHAR_CJ_CORR risultano escluse dal Model Confidence Set, mentre l'introduzione delle dummy giornaliere consente l'ingresso delle ver-

sioni LHAR_CJ_DAY e LHAR-CJ-CORR-DAY nel set dei modelli superiori. Ciò suggerisce che la componente legata ai giorni della settimana apporti un contributo informativo rilevante alla capacità previsiva indipendentemente dagli stimatori adottati.

Per Cardano e XRP, invece, le specificazioni di base risultano già competitive; tuttavia, l'inclusione delle dummy giornaliere, nonostante l'aumento della complessità, non ne compromette la performance e, in diversi casi, ne rafforza ulteriormente la posizione all'interno del confidence set.

Dal punto di vista economico, l'analisi dei coefficienti stimati evidenzia una struttura piuttosto regolare tra le diverse criptovalute, il sabato presenta sistematicamente un coefficiente negativo e significativo rispetto al mercoledì (categoria di riferimento), indicando un pattern di sistematica riduzione della varianza realizzata nel weekend, mentre il lunedì mostra un coefficiente positivo e significativo, segnalando un aumento relativo della volatilità.

Gli altri giorni non evidenziano differenze statisticamente rilevanti rispetto alla baseline. Tale evidenza è coerente con la natura continua del mercato delle criptovalute, che rimane aperto anche nei periodi in cui i mercati finanziari tradizionali sono chiusi, con possibili variazioni nella frequenza e nel numero di scambi delle criptovalute, soprattutto nel weekend.

Per quanto riguarda le specificazioni con effetti settimanali (WEEK), in cui la baseline è rappresentata dai giorni lavorativi, emerge che il fine settimana è associato a coefficienti negativi e significativi, indicando una volatilità mediamente inferiore rispetto ai giorni feriali.

Anche in questo caso si osservano differenze tra criptovalute, per Bitcoin e Solana le versioni senza interazioni risultano escluse, mentre l'introduzione della specificazione con interazioni consente l'ingresso nel Model Confidence Set; per Ethereum, Cardano e XRP, invece, più configurazioni risultano già competitive.

Tuttavia, sebbene la specificazione che ammette interazioni risulti inclusa nel set finale non porta all'esclusione degli altri modelli, sottolineando come non porti ad un netto miglioramento previsivo. Ciò è coerente con quanto si osserva per i coefficienti associati ai termini di interazione i quali nella maggior parte dei casi non risultano significativi, segnalandoci con forza la scarsa presenza di interazioni tra le dummy e le stimatori della varianza realizzata.

Nel complesso, l'evidenza suggerisce che la distinzione tra lunedì e sabato nel modello DAY e tra weekend e giorni feriali nel modello WEEK rappresenti un elemento informativo non trascurabile nella dinamica della volatilità di Bitcoin, Ethereum e Solana, per le quali l'introduzione delle variabili dummy migliora la selezione dei

modelli previsivi. Per Cardano e XRP, invece, l'aggiunta degli effetti calendario appare meno determinante, poiché anche le specificazioni di base permangono nel Model Confidence Set. L'inclusione di termini di interazione, infine, non risulta empiricamente giustificata alla luce dei risultati ottenuti.

Si procede ora al confronto finale tra i modelli che, nelle diverse estensioni analizzate, sono risultati maggiormente rilevanti e competitivi in termini di capacità previsionale. In particolare, vengono messi a confronto: il modello LHAR-CJ di base; le versioni LHAR-CJ arricchite con i momenti di terzo e quarto ordine (nelle specificazioni standard e corrette), il modello LHAR-CJ con l'aggiunta delle dummy giornaliere ed infine il modello più completo che combina leverage, momenti classici e dummy giornaliere.

L'obiettivo di questa sintesi finale è valutare quale specificazione, tra quelle progressivamente arricchite, riesca a imporsi nel Model Confidence Set come modello previsivo dominante per ciascuna criptovaluta, alla luce delle evidenze già emerse in precedenza circa il ruolo centrale della componente di leverage e il contributo incrementale dei momenti superiori e della stagionalità settimanale.

Tabella 4.5: MCS p-value ($T_{\max}$, $\alpha = 0.25$) – Confronto generale tra i migliori modelli

	LHAR-CJ	LHAR-CJ+MOM.CL	LHAR-CJ+MOM.CORR	LHAR-CJ+DAY	LHAR-CJ+MOM+DAY
BTC	0	0	0	0	1.0000
ETH	0	0	0	0	1.0000
SOL	0	0	0.5618	1.0000	1.0000
ADA	0.9998	1.0000	0.9514	0.2774	1.0000
XRP	0	0.9070	1.0000	0.5014	1.0000

I risultati confermano in larga misura quanto già osservato nei confronti precedenti, ma rendono più netta la gerarchia tra le specificazioni.

Per Bitcoin ed Ethereum è chiaro che il modello più completo, il quale include leverage, momenti di terzo e quarto ordine e dummy giornaliere, è l'unico a rimanere nel confidence set risultando quindi il migliore per la previsione. Tutte le altre specificazioni, inclusi il modello LHAR-CJ di base e le versioni LHAR-CJ estese, vengono escluse. Questo risultato sottolinea con forza come, per queste due criptovalute, la modellizzazione della stagionalità giornaliera rappresenti un elemento decisivo per ottenere la migliore performance previsionale, oltre alla già nota importanza della componente di leverage.

Per Solana la situazione è più complessa; sebbene il modello con dummy giornaliere risulti quello con il p -value più elevato e pienamente incluso nel set, anche la versione LHAR-CJ con momenti corretti rimane nel confidence set. Ciò suggerisce che, in questo caso, l'aggiunta delle dummy non sia strettamente indispensabile pur

rappresentando comunque la specificazione più performante in termini relativi, e per questa criptovaluta l'introduzione dei momenti corretti riesca a portare comunque a buone previsioni.

Per XRP emerge una dinamica differente. Il modello LHAR-CJ di base viene escluso, mentre risultano inclusi nel confidence set sia i modelli LHAR-CJ con momenti sia, nuovamente, la versione con dummy giornaliera. Tuttavia, a differenza di Bitcoin ed Ethereum, l'aggiunta delle dummy non appare determinante: i modelli che combinano leverage e momenti di ordine superiore risultano già sufficienti a garantire una buona caratterizzazione della dinamica della varianza realizzata e una performance previsionale competitiva.

Per Cardano emerge che anche il modello di base LHAR-CJ risulta essere molto competitivo, sottolineando come l'aggiunta dei momenti di ordine superiore e delle dummy giornaliera non porti ad un netto miglioramento del modello, quindi contrariamente a quanto visto in precedenza per Cardano è sufficiente il modello base HAR-CJ con l'aggiunta della componente leverage.

L'analisi complessiva di tutti i risultati ottenuti tramite la procedura di Model Confidence Set evidenzia un pattern piuttosto chiaro. Per le criptovalute caratterizzate da una minore incidenza di osservazioni nulle (BTC e ETH), il modello più completo tende a risultare sistematicamente migliore.

Per Solana e XRP emerge che l'inclusione dei momenti (asimmetria e curtosi) apporta un miglioramento evidente delle performance previsive rispetto al modello base con componente leverage. L'aggiunta della componente legata ai giorni della settimana risulta anch'essa informativa, ma il suo impatto appare meno marcato rispetto a quanto osservato nelle analisi precedenti, non determina un cambiamento nella selezione finale dei modelli, si conclude che può essere sufficiente l'introduzione dei momenti di ordine superiore per ottenere una buona performance previsiva.

Diverso è il caso di Cardano, per la quale anche il modello base LHAR-CJ risulta già incluso nel confidence set finale. In questo contesto, le estensioni mediante momenti e dummy calendario producono un contributo più contenuto, il quale pur non peggiorando le performance, non determinano un miglioramento sostanziale rispetto alla specificazione più parsimoniosa che per questa ragione sarà selezionata come modello di riferimento per le previsioni per questa criptovaluta.

Nel complesso per tutte le criptovalute non si riscontrano differenze marcate tra i modelli basati su stimatori corretti ed i modelli basati sugli stimatori classici, suggerendo quindi che a fini previsivi non sembra essere strettamente necessaria la correzione degli stimatori.

Conclusioni

Alla luce delle analisi svolte nei capitoli precedenti, si vuole riassumere i principali risultati emersi nel corso del lavoro .

Inizialmente si è evidenziato come la presenza di rendimenti nulli non sia uniforme tra le diverse criptovalute considerate. In particolare, gli asset caratterizzati da un'intensità di scambi più elevata, quali Bitcoin, Ethereum e, in parte, Solana, presentano una percentuale di rendimenti nulli inferiore rispetto a criptovalute meno conosciute e con meno scambi come Cardano e XRP. L'analisi ha inoltre messo in luce un chiaro pattern intragiornaliero degli zeri, che presentano una maggiore frequenza di rendimenti nulli nelle ore notturne, confermando il legame tra attività di trading e presenza di rendimenti nulli. In questo contesto, la distinzione tra fenomeni di price staleness e trade inaction ha fornito il quadro concettuale di riferimento per le correzioni introdotte nei capitoli successivi.

Poi si è evidenziato come gli stimatori classici dei momenti realizzati siano fortemente distorti dalla presenza di zeri, soprattutto il terzo e il quarto momento. Però si mostra anche che le correzioni basate sulla modifica della griglia o sull'approccio threshold, sono molto efficaci e precise nel ridurre tali distorsioni, confermandone la validità anche nel contesto delle criptovalute che presentano diverse percentuali di rendimenti nulli.

Per lo studio dei salti, è emerso che la presenza di rendimenti nulli altera significativamente i risultati, in particolare per il test BNS. Le correzioni migliorano sensibilmente le performance del test riducendo sia il numero di giorni con salti individuati che avvicinando la distribuzione della statistica test alla distribuzione asintotica ad essa associata. Per il test LM, l'utilizzo congiunto delle correzioni e della BPV di Renò consente di ottenere un numero di salti più coerente con la soglia teorica. I salti risultano per lo più concentrati appena oltre la soglia, distribuiti in modo quasi simmetrico tra positivi e negativi, non mostrando differenze sistematiche legate al segno e con pochi outlier.

Infine, per le previsioni si conclude che l'estensione dei modelli HAR ha mostrato che l'effetto leverage è generalmente significativo e negativo, intercettando corretta-

mente una riduzione strutturale della varianza nel weekend e un aumento il lunedì. Tuttavia, ai fini previsivi, l'utilizzo dei momenti corretti non apporta miglioramenti sostanziali rispetto a quelli classici, suggerendo che le correzioni siano cruciali per l'inferenza ma non strettamente necessarie per la previsione della varianza realizzata. Per le diverse criptovalute si arriva ad ottenere modelli previsivi differenti, coerenti con le diverse caratteristiche delle criptovalute, però generalmente l'introduzione dei momenti di ordine superiore e delle dummy per valutare l'effetto sui giorni risultano significativi portando a miglioramenti sostanziali.

In ambito previsivo, quindi, le correzioni non sembrano produrre benefici marcati. Risulta piuttosto maggiormente informativo considerare eventuali differenze strutturali legate a fattori temporali, come il giorno della settimana, nonché la presenza di effetti asimmetrici connessi al segno dei rendimenti, che incidono in modo significativo sulla dinamica della varianza realizzata.

Alcuni limiti dello studio sono innanzitutto riconducibili alla dimensione temporale del dataset, che copre un arco di soli due anni, seppur con dati ad alta frequenza e dal numero di criptovalute analizzate. Un'estensione dell'orizzonte temporale consentirebbe di includere differenti fasi di mercato, offrendo indicazioni più robuste soprattutto in relazione alla stabilità dei test per l'individuazione dei salti e alla loro sensibilità a contesti di volatilità diversa.

Infine, l'analisi previsiva è stata condotta nell'ambito dei modelli HAR, che, pur ampiamente utilizzati, rappresentano una specificazione relativamente parsimoniosa. L'estensione a modelli alternativi o l'uso di tecniche di machine learning per la selezione dei regressori da inserire nel modello potrebbe fornire ulteriori elementi di confronto, consentendo di valutare se le evidenze riscontrate rimangano valide in contesti previsivi più flessibili e non lineari.

In conclusione, l'insieme delle evidenze empiriche raccolte nei quattro capitoli mi consente di affermare che price staleness e trade inaction esercitano un impatto rilevante sugli stimatori dei momenti realizzati e dei test, con effetti tanto più marcati quanto maggiore è la presenza di rendimenti nulli. Tuttavia, l'introduzione di opportune correzioni risulta fondamentale per permettere di ricondurre sia gli stimatori sia i test per la presenza di salti a risultati coerenti con il quadro teorico di riferimento, migliorando in modo sostanziale l'affidabilità della jump detection e della scomposizione della varianza realizzata nelle sue due componenti.

Bibliografia

- Andersen, Torben G., Tim Bollerslev e Francis X. Diebold (2007). «Roughing It Up: Including Jump Components in the Measurement, Modeling, and Forecasting of Return Volatility». In: *Review of Financial Studies* 20.3, pp. 701–720. DOI: 10.1093/rfs/hhl024.
- Andersen, Torben G., Dobrislav P. Dobrev e Ernst Schaumburg (2009). *Duration-Based Volatility Estimation*. Rapp. tecn. gd08-034. Manuscript. Global COE Hi-Stat Discussion Paper Series, Institute of Economic Research, Hitotsubashi University. URL: <https://ideas.repec.org/p/hst/ghsdps/gd08-034.html>.
- Bandi, Federico M., Aleksey Kolokolov, Davide Pirino e Roberto Renò (2020). «Zeros». In: *Management Science* 66.8, pp. 3466–3479. DOI: 10.1287/mnsc.2019.3527.
- (2023). *Discontinuous Trading in Continuous-Time Econometrics*. Rapp. tecn. Last revised December 5, 2024. SSRN Electronic Journal.
- Bandi, Federico M., Davide Pirino e Roberto Renò (2017). «EXcess Idle Time». In: *Econometrica* 85.6, pp. 1793–1846. DOI: 10.3982/ECTA13595.
- Barndorff-Nielsen, Ole E. e Neil Shephard (2004). «Power and Bipower Variation with Stochastic Volatility and Jumps». In: *Journal of Financial Econometrics* 2.1, pp. 1–37. DOI: 10.1093/jjfinec/nbh001.
- (2006). «Econometrics of Testing for Jumps in Financial Economics Using Bipower Variation». In: *Journal of Financial Econometrics* 4.1, pp. 1–30. DOI: 10.1093/jjfinec/nbi022.
- Fulvio, Corsi. (2009). «A Simple Approximate Long-Memory Model of Realized Volatility». In: *Journal of Financial Econometrics* 7.2, pp. 174–196. DOI: 10.1093/jjfinec/nbp001.
- Hansen, Peter R., Asger Lunde e James M. Nason (2011). «The Model Confidence Set». In: *Econometrica* 79.2, pp. 453–497. DOI: 10.3982/ECTA5771.
- Huang, Xin e George Tauchen (2005). «The Relative Contribution of Jumps to Total Price Variance». In: *Journal of Financial Econometrics* 3.4, pp. 456–499. DOI: 10.1093/jjfinec/nbi025.

- Kolokolov, Aleksey e Roberto Renò (2024). «Jumps or Staleness?» In: *Journal of Business & Economic Statistics* 42.2, pp. 516–532. DOI: 10.1080/07350015.2023.2203207.
- Lee, Suzanne S. e Per A. Mykland (2008). «Jumps in Financial Markets: A New Nonparametric Test and Jump Dynamics». In: *Review of Financial Studies* 21.6, pp. 2535–2563. DOI: 10.1093/rfs/hhm056.