



---

UNIVERSITÀ DEGLI STUDI DI PADOVA  
DIPARTIMENTO DI MATEMATICA “TULLIO LEVI-CIVITA”  
CORSO DI LAUREA MAGISTRALE IN MATEMATICA

---

**Studio di modelli di programmazione  
matematica per la gestione del traffico  
aereo con capacità adattiva dello spazio  
aereo**

---

*Relatore:*  
Luigi De Giovanni

*Candidato:*  
Maria Mosca  
Matricola 2028617

Anno accademico 2022/2023 - 30.06.2023

# Indice

<b>Introduzione</b>	<b>4</b>
<b>1 Il problema della gestione del flusso del traffico aereo</b>	<b>8</b>
1.1 La struttura dello spazio aereo . . . . .	8
1.2 Gestione delle operazioni nel controllo del traffico aereo . . .	10
1.3 Il problema ATFM e alcune strategie di gestione del traffico .	12
<b>2 Strumenti teorici e computazionali</b>	<b>14</b>
2.1 Programmazione Lineare Intera . . . . .	15
2.1.1 Tecnica del Branch-and-Bound . . . . .	17
2.1.2 Metodo dei piani di taglio . . . . .	18
2.1.3 Branch-and-Cut . . . . .	19
2.2 Framework computazionale . . . . .	19
2.2.1 IBM ILOG CPLEX Optimization Studio . . . . .	20
2.2.2 AMPL . . . . .	20
2.2.3 Python . . . . .	22
<b>3 Stato dell'arte</b>	<b>23</b>
3.1 Evoluzione dei modelli per ATFM . . . . .	23
3.2 Il modello di riferimento . . . . .	25
3.2.1 Potenziali conflitti e situazioni critiche . . . . .	26
3.2.2 Dati del problema e notazione . . . . .	29
3.2.3 Variabili decisionali . . . . .	31
3.2.4 La formulazione del modello . . . . .	33

<b>4</b>	<b>Proprietà aggiuntive del modello di riferimento</b>	<b>41</b>
4.1	Relazione tra le variabili . . . . .	41
4.2	Vincoli di traffico e riformulazione delle condizioni di sicurezza	45
4.3	Rafforzamento dei parametri Big-M . . . . .	48
4.4	Disuguaglianze valide di tipo cover . . . . .	53
<b>5</b>	<b>Formulazione equivalente dei vincoli di traffico</b>	<b>55</b>
5.1	Posizioni e situazioni critiche . . . . .	56
5.2	Monitoraggio del traffico e condizioni di sicurezza: controlli equivalenti . . . . .	61
5.2.1	Accesso ai settori e posizioni critiche . . . . .	61
5.2.2	Specificità dei controlli nel primo settore . . . . .	95
5.3	Formulazione alternativa dei vincoli sul traffico e le condizioni di sicurezza . . . . .	99
5.4	Confronto teorico delle formulazioni . . . . .	106
5.5	Dimensione del modello . . . . .	132
<b>6</b>	<b>Implementazione del modello</b>	<b>135</b>
6.1	Cover Inequalities . . . . .	135
6.2	Generazione delle istanze . . . . .	137
6.2.1	Istanze base . . . . .	137
6.2.2	Istanze di dimensione maggiore . . . . .	139
6.3	Implementazione in AMPL . . . . .	140
6.3.1	File .dat . . . . .	140
6.3.2	File .mod . . . . .	141
6.3.3	File .run . . . . .	142
<b>7</b>	<b>Risultati Computazionali</b>	<b>143</b>
7.1	Test su istanze base . . . . .	144
7.1.1	Qualità del rilassamento continuo della formulazione .	145
7.1.2	Tempi di calcolo . . . . .	151
7.1.3	Separazione delle cover inequalities . . . . .	155
7.2	Risultati su istanze di dimensione più elevata . . . . .	158
7.2.1	Qualità della formulazione . . . . .	158

7.2.2	Tempi di calcolo . . . . .	161
<b>8</b>	<b>Considerazioni finali</b>	<b>163</b>
	<b>Appendice A - Codice sorgente AMPL</b>	<b>166</b>
	<b>Bibliografia</b>	<b>182</b>

# Introduzione

L'industria del trasporto aereo fornisce l'unica rete mondiale di trasporto rapido, il che la rende essenziale non solo per la crescita dell'economia globale, ma anche per altri importanti benefici sociali.

L'aviazione crea infatti posti di lavoro, ed è decisiva per il commercio internazionale e il turismo. Secondo recenti stime dell'International Energy Agency (IEA) [17], la domanda di passeggeri ha ricominciato a crescere gradualmente dal 2021, con il traffico nazionale al 68% dei livelli del 2019 pre-pandemia, e il traffico internazionale al 28%. Ciò rappresenta un aumento complessivo del 28% rispetto al 2020, con il traffico che non dovrebbe riprendersi completamente fino alla fine del 2023. Il trasporto aereo di merci, tuttavia, ha mostrato una crescita più forte nel 2021, aumentando di quasi il 7% rispetto al picco pre-pandemia. L'International Civil Aviation Organisation (ICAO) [18] prevede che la domanda di passeggeri aerei nel 2023 tornerà rapidamente ai livelli pre-pandemia sulla maggior parte delle rotte, e che una crescita di circa il 3% rispetto ai dati del 2019 sarà raggiunta entro la fine dell'anno.

È importante osservare tuttavia che una naturale conseguenza dell'aumento del flusso del traffico aereo è data da frequenti fenomeni di congestione degli elementi del sistema; fatto che si traduce in ritardi rispetto agli orari di partenza e di arrivo previsti. Una mancata corretta organizzazione del traffico aereo comporta dunque alti costi per le compagnie aeree: costi legati al consumo di carburante, all'incremento delle ore di lavoro del personale di volo, senza considerare gli eventuali rimborsi e compensazioni spettanti ai

passaggeri. Anche a livello ambientale risulta necessario rendere la gestione del traffico aereo il più efficiente possibile: secondo la IEA [17], nel 2021 il trasporto aereo ha costituito oltre il 2% delle emissioni globali di CO<sub>2</sub> legate all'energia, essendo cresciuto più rapidamente negli ultimi decenni rispetto a quello stradale, ferroviario o marittimo; prevede inoltre che queste cifre continueranno a crescere rapidamente, superando il livello del 2019 nei prossimi anni. Una migliore performance della gestione del traffico aereo può ridurre notevolmente i valori di queste emissioni: si stima che per ogni tonnellata di carburante risparmiato, si evita l'emissione di 3.15 tonnellate di CO<sub>2</sub> [12].

## Contenuti e contributi della tesi

Esponiamo di seguito i principali contenuti della tesi, sottolineando i contributi originali più importanti.

Nel **Capitolo 1** viene presentato il problema di *Air Traffic Flow Management* (ATFM) considerando tutti gli aspetti rilevanti della sua formulazione, sottolineando gli obiettivi che i modelli di gestione del traffico aereo si propongono e le operazioni coinvolte nella gestione del traffico. In particolare, ci si sofferma sui problemi di congestione che possono verificarsi e sulle possibili strategie da adottare per ovviare al problema.

Nel **Capitolo 2** vengono introdotti alcuni strumenti teorici di Ricerca Operativa utili per risolvere il problema ATFM. Vengono inoltre presentati i linguaggi di programmazione e il solver utilizzato per l'implementazione del modello al calcolatore.

Nel **Capitolo 3** vengono illustrate, nella prima parte, alcune formulazioni esistenti dei modelli per l'ATFM, partendo da approcci risalenti al 1992 fino ad anni più recenti. Nella seconda parte, descriveremo in dettaglio il modello, presentato da Cocco in [6], che sta alla base del nostro lavoro, e che rappresenta un primo tentativo di introdurre nei modelli matematici il

concetto di capacità adattiva, ossia la possibilità di adattare la capacità dei settori alle condizioni del traffico che si realizzano.

Nel **Capitolo 4** presenteremo nel dettaglio alcune importanti proprietà ottenute dall'attenta analisi del modello alla base del nostro lavoro, volte a rafforzare la sua formulazione. Tali proprietà riguardano la relazione tra le variabili, i vincoli di traffico e le condizioni di sicurezza per l'aumento adattivo della capacità dei settori.

Nel **Capitolo 5** è presente uno dei principali contributi della tesi. Viene derivata una formulazione equivalente ma rafforzata del modello in esame, attraverso nuovi vincoli relativi al monitoraggio del traffico e delle condizioni di sicurezza. Nella prima parte del capitolo viene descritto il legame tra eventuali situazioni critiche e l'accesso dei voli ai singoli settori, idea alla base della formulazione alternativa. Nella seconda parte vengono presentati e poi confrontati, sul piano teorico, i nuovi vincoli con quelli del modello di riferimento presentato in [6].

Nel **Capitolo 6**, che rappresenta un contributo dal punto di vista implementativo, viene illustrata la procedura che abbiamo utilizzato per generare le istanze da testare, e viene successivamente presentata l'implementazione del nuovo modello nel linguaggio di modellazione algebrica AMPL.

Nel **Capitolo 7** vengono descritti i modelli testati, i quali si distinguono per le modifiche apportate alle loro formulazioni, e vengono poi presentati i risultati ottenuti. Nella discussione, i risultati ottenuti con il modello base vengono confrontati con quelli ottenuti attraverso gli altri modelli, evidenziando eventuali miglioramenti in termini di qualità della formulazione e di costo computazionale.

Nel **Capitolo 8** vengono tratte le conclusioni dello studio teorico e computazionale svolto nella tesi. Sono discussi, inoltre, alcuni possibili miglioramenti e potenziali sviluppi futuri.

Nell'**Appendice A** è riportato il codice AMPL che implementa i modelli studiati.



# Capitolo 1

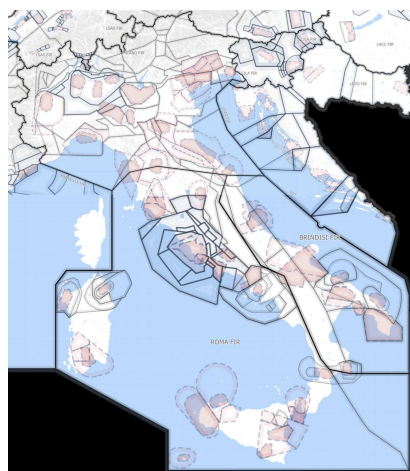
## Il problema della gestione del flusso del traffico aereo

Il problema di gestione del flusso del traffico aereo, in inglese *Air Traffic Flow Management* (ATFM), ha un'importanza fondamentale nel settore della logistica e dei trasporti. Il suo scopo è quello di ottimizzare il flusso del traffico aereo garantendo una gestione dei volumi del traffico sempre ottimale, limitando eventuali ritardi, e migliorando la puntualità e l'efficienza dei vettori aerei. Più nel dettaglio, nel problema ATFM si gestisce un insieme di vettori aerei, conoscendo l'origine e la destinazione di ogni volo, all'interno di una determinata area e di una fissata finestra temporale. A partire dagli orari previsti per il decollo e l'arrivo, vengono così determinate le rotte, le velocità e i tempi di percorrenza di ogni volo, rispettando le capacità di controllo del flusso del traffico aereo, consentendo alle compagnie aeree di operare voli sicuri ed efficienti, e limitando i costi relativi a eventuali ritardi.

### 1.1 La struttura dello spazio aereo

Tutto lo spazio aereo del mondo è suddiviso virtualmente in regioni di informazioni di volo, in inglese FIR (*Flight Information Regions*) [21]. Ogni FIR è gestita da un'autorità di controllo, ovvero il centro di informazioni di volo (FIC - *Flight Information Center*), che ha la responsabilità di garantire che

i servizi di traffico aereo siano forniti agli aeromobili in volo. I FIR variano di dimensioni: i paesi più piccoli possono avere un'unica FIR nello spazio aereo sopra di loro, mentre i paesi più grandi possono averne diverse. Lo spazio aereo sopra l'oceano è tipicamente diviso in due o più FIR e delegato alle autorità di controllo all'interno dei paesi che confinano con esso. Lo spazio aereo italiano ad esempio è suddiviso in tre FIR: Milano, Roma e Brindisi. Essi comprendono, oltre allo spazio aereo nazionale, parti di acque internazionali, per esempio tra la Sardegna e l'Italia o la Sicilia [10].



**Figura 1.1** : Lo spazio aereo italiano [22]

Per gestire lo spazio aereo in una FIR, la società che fornisce servizi di controllo del traffico aereo (ANSP - *Air Navigation Traffic Provider*) lo suddivide in settori. Questi settori sono porzioni tridimensionali dello spazio aereo, con diverse altezze e dimensioni, che si incastrano per coprire il cielo. Ogni aeroporto è collocato all'interno di un settore. I controllori del traffico aereo e gli ufficiali dei servizi di informazione di volo sono assegnati ai settori per consigliare e guidare gli aeromobili che vi volano. Il numero, il tipo e le competenze di coloro che sono assegnati a un settore varieranno a seconda della natura dello spazio aereo che copre [21]. Le scelte che guidano la creazione dei vari settori sono dettate dalla necessità di garantire il controllo e

la sicurezza del traffico aereo, in quanto i controllori di volo possono gestire solo un certo numero di aeromobili alla volta. Per questo motivo, a ogni settore è associata una capacità, detta *capacità nominale*, definita come il massimo numero di voli che possono attraversare il settore in un dato intervallo di tempo. Anche agli aeroporti è associata una capacità massima, suddivisa di norma in due quantità, una per gli arrivi e una per le partenze. Questo poiché anche gli aeroporti possono gestire un limitato numero di aeromobili in un certo intervallo temporale, un dato legato alle dimensioni delle strutture, al numero delle piste presenti e alla loro assegnazione.

Rispettando le varie condizioni di sicurezza, tali settori possono essere inoltre creati e ridotti dinamicamente per far fronte alla domanda corrente. Ad esempio, in periodi in cui vi sono elevati livelli di traffico aereo, possono essere aperti più settori con più controllori assegnati alla gestione del traffico, mentre in periodi meno affollati, come durante la notte, i settori possono essere raggruppati con un minor numero di controllori che gestiscono un'area più ampia. Questo significa che la capacità dei vari settori (e anche degli aeroporti) può variare dinamicamente nel tempo, e i fattori che influenzano tale variazione sono molteplici: la quantità del traffico aereo, le condizioni meteorologiche, eventuali riduzioni di personale, scioperi, opere di manutenzione per citarne alcuni.

## 1.2 Gestione delle operazioni nel controllo del traffico aereo

L'*Air Traffic Flow and Capacity Management* - ATFCM, ovvero la gestione del flusso del traffico aereo e delle capacità, è al centro delle operazioni di gestione del traffico aereo. L'obiettivo del ATFCM è quello di ottimizzare il traffico dei flussi in base alla capacità dei controllori del traffico aereo, permettendo alle compagnie aeree di operare voli sicuri ed efficienti. Le attività del ATFCM sono suddivise in quattro fasi [11]:

- **Strategic flow management:** questa fase comprende attività di ricerca, pianificazione e coordinamento attraverso un processo decisio-

nale collaborativo. Inizia circa un anno prima e termina almeno sette giorni prima della giornata operativa. Include anche una continua raccolta dati, con revisioni delle procedure e delle misure finalizzate all'individuazione dei maggiori squilibri tra domanda e capacità. L'output di questa fase è il *Network Operations Plan* - NOP, ovvero il piano operativo della rete;

- **Pre-tactical flow management:** questa fase consiste in attività di pianificazione e coordinamento. Nel dettaglio, studia la domanda per il giorno dell'operazione, la confronta con la prevista capacità disponibile in quel giorno, e apporta le modifiche necessarie al piano sviluppato durante la fase strategica. Ha luogo durante i sei giorni precedenti alla giornata operativa. L'output è il piano giornaliero ATFCM, *ATFCM Daily Plan* - ADP;
- **Tactical flow management:** si verifica nella giornata operativa e comprende il considerare, in tempo reale, quegli eventi che interessano l'ADP, apportando le necessarie modifiche a esso. Questa fase ha lo scopo di garantire che le misure adottate durante le fasi precedenti siano il minimo richiesto per risolvere gli squilibri tra domanda e capacità. La necessità di adeguare il piano originale può derivare da vari fattori, come ad esempio problemi di personale, fenomeni meteorologici significativi, crisi ed eventi speciali. Questa fase consente di effettuare previsioni a breve termine (compreso l'impatto di qualsiasi evento), e massimizza l'esistente capacità senza compromettere la sicurezza;
- **Post operational analysis:** rappresenta la fase finale della pianificazione e del processo di gestione dell'ATFCM, e si svolge al termine delle fasi precedenti. In questa fase viene svolto un processo analitico che misura e indaga sui processi operativi e sulle attività rilevanti per il servizio ATFCM. Si esegue un confronto tra il risultato previsto e il risultato effettivo misurato, tenendo conto degli obiettivi di presta-

zione. L'output finale è lo sviluppo di migliori pratiche e/o di lezioni apprese per migliorare su tali processi e attività operative.

### 1.3 Il problema ATFM e alcune strategie di gestione del traffico

Nelle sezioni precedenti si è potuto evidenziare come elemento cardine nella gestione del flusso del traffico aereo il rapporto tra domanda e capacità. È infatti necessario considerare restrizioni di capacità per garantire che il traffico aereo si svolga in condizioni di sicurezza, attraverso un adeguato monitoraggio del flusso degli aerei all'interno dell'aerospazio. Ed è proprio a causa di questi vincoli che si verificano congestioni all'interno dei vari settori e i conseguenti ritardi dei voli. Al tempo stesso però, la crescente domanda di voli porta aeroporti e settori aerei ad avere una difficoltà sempre più crescente nel coprire tutte le tratte richieste in maniera soddisfacente. Per questo motivo, i modelli di ATFM hanno come obiettivo quello di programmare il traffico aereo, rispettando le capacità degli elementi del sistema, soddisfacendo la domanda di voli e gestendo eventuali fenomeni di congestione.

Sono molteplici le politiche e strategie applicabili a un volo per risolvere momenti di congestione e per ottimizzare il traffico aereo. In particolare:

- **ground holding:** tale politica prevede la posticipazione del decollo di un aeromobile rispetto all'orario di partenza previsto, prolungando la sosta nel suo aeroporto di partenza. Questa strategia è tra le più conosciute, e la maggiormente attuata, in quanto presenta costi più contenuti rispetto ad altre;
- **airborne holding:** questa politica prevede che l'aeromobile debba trascorrere in aria alcune unità di tempo necessarie allo smaltimento della congestione. Questa strategia ha un costo maggiore rispetto alla precedente, in quanto, ad esempio, deve tener conto dell'aumento delle spese di carburante e dell'incremento delle ore di lavoro del personale di bordo;

- **speed control:** questa opzione prevede la possibilità di modificare la velocità di percorrenza della rotta di un aeromobile, rallentando ad esempio l'entrata in un settore congestionato;
- **rerouting:** questa strategia prevede la possibilità di dirottare il volo lungo rotte alternative, col fine di evitare il transito in un settore congestionato attualmente presente nella sua rotta.

L'utilizzo delle politiche sopra descritte è fondamentale nella risoluzione di eventuali momenti di congestione, ma è anche la causa dei vari ritardi rispetto agli orari previsti per i singoli voli; ritardi che rappresentano un ingente costo per le compagnie aeree.

È quindi possibile definire il problema ATFM come il problema di pianificare e gestire il traffico aereo, rispettando i vincoli sulle capacità, le relative condizioni di sicurezza, soddisfare la domanda, e con l'obiettivo di minimizzare i costi dovuti ai ritardi causati dall'applicazione delle politiche contro la congestione.

## Capitolo 2

# Strumenti teorici e computazionali

Il modello discusso in questa tesi, così come molti modelli relativi al problema ATFM, appartiene alla classe dei modelli di programmazione lineare intera (PLI), che è un'importante sottoclasse della programmazione lineare (PL). La programmazione lineare è un ramo relativamente recente dell'ottimizzazione matematica, il cui obiettivo è quello di ottenere il miglior risultato (come il massimo profitto o il minor costo) in un modello matematico soggetto a requisiti rappresentati da relazioni lineari (disuguaglianze).

Nella prima parte del capitolo forniremo le principali idee sull'argomento e metodi risolutivi per programmi lineari interi. Nella seconda sezione descriveremo gli strumenti che abbiamo utilizzato per implementare il modello e ottenere i risultati computazionali.

## 2.1 Programmazione Lineare Intera

Per lo sviluppo di questa sezione facciamo riferimento alle note [7] e [8].

Un Programma Lineare (PL) è un problema nella forma

$$\begin{aligned} \max \quad & c^\top x \\ \text{soggetto a} \quad & Ax \leq b \\ & x \geq 0 \end{aligned} \tag{2.1}$$

dove  $c, x \in \mathbb{R}^n$ ,  $A \in \mathbb{R}^{m \times n}$  e  $b \in \mathbb{R}^m$ . Ogni vettore  $x \in \mathbb{R}^n$  che soddisfi  $Ax \leq b$  e  $x \geq 0$  è detto *soluzione ammissibile*. L'insieme di tutte le soluzioni ammissibili di un programma lineare è detto *regione ammissibile*.

Il problema consiste nel trovare un vettore  $\bar{x} \in \mathbb{R}^n$  che massimizzi  $c^\top x$ , detta *funzione obiettivo*. Ovvero, l'obiettivo è quello di trovare una *soluzione ottima*  $\bar{x}$  che sia ammissibile e tale per cui  $c^\top \bar{x} \geq c^\top x$  per ogni altra soluzione  $x$  ammissibile. Il corrispondente valore  $c^\top \bar{x}$  è detto *valore ottimo*.

Un programma lineare non ammette necessariamente una soluzione, sono possibili infatti altri due scenari. Il problema può essere *inammissibile*, e in questo caso non ammette soluzioni ammissibili, in quanto i vincoli del problema sono mutualmente contraddittori. Non vi sono dunque punti che li soddisfano tutti, e la regione ammissibile risulta vuota. Se invece il problema può essere migliorato indefinitamente senza violare i relativi vincoli, esso si dice *illimitato*. L'algoritmo del simplesso è il metodo classico per risolvere il problema di ottimizzazione della programmazione lineare. Questo algoritmo funziona molto bene per problemi della forma (2.1), in cui le variabili possono assumere qualsiasi valore reale.

La complessità del problema aumenta quando si richiede che le variabili in gioco siano intere. Questo si può verificare ad esempio quando le variabili rappresentano beni indivisibili oppure quando si lavora con variabili binarie (0-1), dove per variabile binaria si intende una variabile che ha valore 1 se viene presa una certa decisione, 0 altrimenti. In questo caso il problema è



chiamato un programma lineare intero (PLI) e assume la seguente forma:

$$\begin{aligned} \max \quad & c^\top x \\ \text{soggetto a} \quad & Ax \leq b \\ & x \in \mathbb{Z}^n \end{aligned} \tag{2.2}$$

Nel nostro lavoro considereremo dei particolari programmi lineari interi, detti programmi lineari interi *puri*, in cui tutte le variabili devono assumere valore intero. In particolare, tali variabili saranno tutte variabili binarie.

I problemi di programmazione lineare intera sono, usualmente, molto più difficili da risolvere rispetto a quelli di programmazione lineare. Il metodo del simplesso infatti non è più utilizzabile, poiché la regione ammissibile non è più un'area continua definita da disuguaglianze lineari, ma è un insieme discreto di punti. Prima di poter descrivere alcune delle tecniche risolutive più utilizzate nell'ambito della PLI tuttavia, è bene dare alcune definizioni preliminari.

Definiamo il *rilassamento lineare* (o rilassamento continuo) di un programma lineare intero come il programma lineare che si ottiene tralasciando i vincoli di interezza (nel caso in cui una variabile sia binaria, il vincolo  $x \in \{0, 1\}$  viene sostituito con la disuguaglianza  $0 \leq x \leq 1$ ).

Il rilassamento lineare non fornisce, in generale, una buona approssimazione del problema PLI. Il valore ottimo del rilassamento continuo, infatti, può essere arbitrariamente distante dal valore ottimo del programma lineare intero di partenza. Possiamo tuttavia individuare una relazione tra la soluzione ottima di un problema lineare intero e la soluzione ottima del suo rilassamento lineare: nel caso di un problema di massimizzazione, il valore ottimo del rilassamento lineare è un upper bound del valore ottimo del programma lineare intero, perché ogni soluzione ammissibile del PLI è ammissibile anche per il rilassamento continuo.

### 2.1.1 Tecnica del Branch-and-Bound

Il metodo di Branch-and-Bound è una tecnica di enumerazione implicita delle soluzioni ammissibili: per cercare una soluzione ottima del problema non si esaminano tutte le soluzioni, una parte di esse potrà infatti essere scartata. In particolare, il metodo del Branch-and-Bound si basa sulla seguente proprietà generale: se la regione ammissibile  $\Omega$  viene suddivisa in due sottoinsiemi  $\Omega = \Omega_1 \cup \Omega_2$ , allora il valore ottimo del problema iniziale è il migliore dei valori ottimi dei due sottoproblemi:

$$\max\{c^\top x : x \in \Omega\} = \max\{\max\{c^\top x : x \in \Omega_1\}, \max\{c^\top x : x \in \Omega_2\}\}$$

L'algoritmo di Branch-and-Bound è una tecnica ricorsiva che si basa quindi sulla suddivisione del problema iniziale in sottoproblemi via via più semplici da risolvere.

Inizialmente si risolve il rilassamento lineare del problema intero assegnato. Se la soluzione ottima trovata è intera oppure non ci sono soluzioni ammissibili, allora rispettivamente abbiamo trovato l'ottimo del PLI oppure il problema di partenza è inammissibile. Se invece la soluzione del rilassamento lineare è un vettore  $\bar{x}$  non intero, viene scelta una delle sue componenti frazionarie (sia  $\bar{x}_i \notin \mathbb{Z}$ ) e si considerano due sottoproblemi, detti nodi figli. Tali sottoproblemi sono ottenuti dal programma lineare intero di partenza aggiungendo rispettivamente i vincoli:

$$x_i \leq \lfloor \bar{x}_i \rfloor \quad x_i \geq \lceil \bar{x}_i \rceil$$

dove  $\lfloor \cdot \rfloor$  rappresenta l'arrotondamento per difetto e  $\lceil \cdot \rceil$  rappresenta l'arrotondamento per eccesso. Questa operazione è detta *branching*; tramite essa crea l'albero di Branch-and-Bound e vengono via via eliminate le soluzioni (frazionarie) comprese nella striscia  $(\lfloor \bar{x}_i \rfloor, \lceil \bar{x}_i \rceil)$ .

Dopo aver suddiviso il problema originario nei due nodi figli, si procede con la risoluzione dei due sottoproblemi ottenuti; come detto precedentemente, possiamo affermare che scegliendo la migliore delle due soluzioni si trova una soluzione ottima del programma lineare intero di partenza.

A questo punto, il procedimento viene iterato: per ogni sottoproblema si risolve il rilassamento continuo, e così via. Non è tuttavia necessario esaminare tutti i nodi figli che vengono creati, in quanto sono presenti tre criteri che permettono di stabilire quando un sottoproblema può essere potato (e quindi non deve essere esaminato ulteriormente). L'algoritmo di Branch-and-Bound termina quando tutti i sottoproblemi sono stati potati.

Riportiamo di seguito i tre criteri di potatura:

- (i) Se il rilassamento lineare di un sottoproblema è inammissibile, allora anche il problema stesso lo è ed è possibile potare per inammissibilità;
- (ii) Se il rilassamento lineare di un sottoproblema  $\mathcal{P}$  ha una soluzione ottima intera  $\bar{x}$ , tale soluzione è ottima anche per  $\mathcal{P}$ . Se  $\bar{x}$  è la prima soluzione ammissibile intera trovata, viene registrata come soluzione corrente o *incombente*. Se invece era già stata trovata precedentemente un'altra soluzione intera  $\tilde{x}$  in un altro sottoproblema  $\mathcal{P}'$ , si confrontano le due soluzioni: se  $\bar{x}$  è migliore di  $\tilde{x}$ , allora  $\bar{x}$  viene registrata come nuova soluzione incombente e vengono potati  $\mathcal{P}$  per ottimalità e  $\mathcal{P}'$  per bound; in caso contrario, ovvero se  $\bar{x}$  non è migliore di  $\tilde{x}$ , viene potato  $\mathcal{P}$  per bound senza aggiornare la soluzione incombente;
- (iii) Se il valore ottimo del rilassamento lineare di un sottoproblema  $\mathcal{P}$  è peggiore dell'incombente, è possibile potare  $\mathcal{P}$  per bound anche se non si conosce il suo valore ottimo.

### 2.1.2 Metodo dei piani di taglio

Una tecnica risolutiva alternativa all'algoritmo di Branch-and-Bound è il metodo dei piani di taglio, approccio che si basa sugli aspetti poliedrali della programmazione lineare intera. Per poter presentare l'algoritmo tuttavia, è necessario fornire alcune definizioni preliminari.

Dato un insieme  $\Omega \in \mathbb{R}^n$ , diciamo che una disequazione  $a^\top x \leq \beta$  è una *disuguaglianza valida* per  $\Omega$  se è soddisfatta da tutti i punti di  $\Omega$ .

Dato un programma lineare intero con regione ammissibile  $\Omega$ , una disequazione  $a^\top x \leq \beta$  è un *piano di taglio* se è valida per  $\Omega$ , ma è violata da almeno

un punto del rilassamento continuo del problema. Un piano di taglio è fondamentalmente una disequazione che contribuisce a eliminare punti ammissibili per il rilassamento continuo che giacciono al di fuori della regione ammissibile del problema lineare intero.

Il metodo dei piani di taglio prevede che inizialmente venga risolto il rilassamento lineare del PLI assegnato. Se la soluzione ottima trovata  $\bar{x}$  è intera, l'algoritmo termina. In caso contrario, si cerca un piano di taglio  $a^\top x \leq \beta$  che sia valido per  $\Omega$  ma violato da  $\bar{x}$ . A questo punto si aggiunge la disequazione  $a^\top x \leq \beta$  al rilassamento lineare del problema e si itera il procedimento. L'algoritmo dei piani di taglio cerca di raggiungere l'ottimo intero eliminando a ogni passo la soluzione ottima del rilassamento lineare appena trovata. Esistono varie procedure standard che permettono di generare i tagli; tra le più usate, ricordiamo quella dei tagli di Gomory [8].

### 2.1.3 Branch-and-Cut

I due metodi presentati precedentemente presentano un problema comune: accade spesso che le prime iterazioni portino a una rapida riduzione della distanza dalla soluzione ottima intera, ma che in seguito ogni iterazione successiva porti a un miglioramento irrisorio, se non nullo.

L'utilizzo combinato dell'algoritmo di Branch-and-Bound e del metodo dei piani di taglio può aiutare a risolvere un problema di programmazione lineare intera in modo più efficiente. La tecnica del Branchand-Cut combina il Branch-and-Bound e l'algoritmo dei piani di taglio, permettendo di rafforzare la formulazione del rilassamento continuo attraverso la generazione di piani di taglio, e di utilizzare invece la tecnica del branching quando i tagli risultano poco efficaci.

## 2.2 Framework computazionale

Per esaminare e studiare al meglio i modelli presentati in questo lavoro di tesi, abbiamo incluso una parte computazionale di implementazione e risoluzione dei modelli.

Per la descrizione dei software e dei linguaggi di programmazione utilizzati facciamo riferimento a [15], [16], [1] e [9].

### 2.2.1 IBM ILOG CPLEX Optimization Studio

IBM ILOG CPLEX Optimization Studio (spesso chiamato informalmente semplicemente CPLEX) è un pacchetto software dedicato all'ottimizzazione e risoluzione di problemi di programmazione lineare intera e mista. Il solver prende il nome dal metodo del simplesso implementato nel linguaggio di programmazione C, sebbene oggi supporti anche altri tipi di ottimizzazione matematica e offra interfacce diverse da C. Viene sviluppato originariamente da Robert E. Bixby, ed è stato commercializzato a partire dal 1988 dalla CPLEX Optimization Inc., acquisita da ILOG nel 1997. ILOG è stata a sua volta acquisita nel 2009 da IBM, in cui attualmente CPLEX viene mantenuto e sviluppato [16].

Come prima fase il problema può essere rilassato se necessario. Successivamente, ha inizio il preprocessing, un insieme di operazioni eseguite con l'obiettivo di semplificare e rafforzare la formulazione dell'istanza considerata, mantenendo invariate le soluzioni ottime del problema. Le operazioni svolte consistono in generale, se possibile, nell'eliminare i vincoli che risultano ridondanti e nel fissare alcune variabili. Tramite questa fase CPLEX può concludere se il problema sia inammissibile o comunicare che viene superato il limite di memoria. Terminato il preprocessing, per risolvere il problema il solver utilizza alcuni algoritmi, (ad esempio il simplesso o il Branch-and-Cut) uniti occasionalmente a procedimenti euristici per migliorare i bound.

### 2.2.2 AMPL

AMPL, acronimo di *A Mathematical Programming Language*, è un linguaggio di modellazione algebrica sviluppato da Robert Fourer, David Gay e Brian Kernighan, all'interno dei laboratori Bell, per descrivere e risolvere grandi e complicati problemi di programmazione matematica [1]. Un vantaggio di AMPL è che fornisce un linguaggio semplice, la cui sintassi risulta molto simile alla notazione matematica dei problemi di ottimizzazione, per

descrivere problemi complessi. Ciò consente una definizione molto concisa e leggibile dei problemi di ottimizzazione. Tale linguaggio è contemporaneamente ad alto livello, ovvero comprensibile ad un essere umano, e formalmente strutturato, ovvero accessibile a un risolutore [8].

AMPL non risolve i problemi da solo, traduce bensì modelli di programmazione matematica, scritti nel linguaggio AMPL, in un formato comprensibile ad un generico risolutore di programmazione matematica (come ad esempio CPLEX, Gurobi e MINOS). Ulteriori vantaggi di questo software comprendono quindi la possibilità di comunicare con diversi risolutori, oltre che la possibilità di tenere distinti la struttura logica del modello dal valore dei dati numerici. Tale separazione risulta molto utile per vari motivi. Innanzitutto evita che piccole variazioni nella struttura del modello o nei dati comportino di riscrivere tutto, permettendo di utilizzare uno stesso modello su dati differenti, o modelli diversi sugli stessi dati. Inoltre, è possibile affidare la gestione dei dati ad un database esterno a cui accedere quando necessario. Infine, questa separazione permette all'utente di comunicare con il risolutore attraverso file di testo anziché attraverso strutture dati, non richiedendo dunque conoscenze informatiche approfondite, e consentendo di formulare il modello con un semplice editor. Nel dettaglio, la separazione tra struttura logica del modello e dati numerici avviene attraverso tre tipologie di file.

### **File .mod**

All'interno dei file .mod è presente la formulazione matematica del problema di programmazione matematica da risolvere: vengono quindi dichiarati gli insiemi e i parametri utilizzati, le variabili, la funzione obiettivo e i vincoli del problema.

### **File .dat**

I file .dat contengono i dati in input richiesti dal modello definito nel file .mod. Si specificano quindi i valori di parametri, insiemi e altri dati su cui il modello deve operare. I dati possono essere valori numerici, insiemi di elementi o persino strutture complesse.

## **File .run**

Nei file `.run` (a volte chiamato file di script) vengono specificati i comandi e le azioni che si desidera vengano eseguiti da AMPL. Può contenere una sequenza di comandi AMPL, come la lettura di un modello o di un file di dati, la risoluzione del modello, la visualizzazione dei risultati o l'esecuzione di varie operazioni sul modello e sui dati.

### **2.2.3 Python**

Python è un linguaggio di programmazione ad alto livello sviluppato dal programmatore Guido van Rossum e rilasciato nel 1991 [9]. A differenza dei linguaggi di basso livello, che sono orientati alla macchina e direttamente eseguibili dal processore del calcolatore, i programmi scritti in un linguaggio di alto livello sono orientati al programmatore. Il loro scopo è quello di essere facilmente utilizzabili dai programmatori umani e necessitano di essere elaborati prima di essere eseguiti. Nonostante il processo di elaborazione impieghi del tempo, rappresentando quindi un piccolo svantaggio, i vantaggi di tali linguaggi sono molteplici: i programmi sono più veloci da scrivere, più corti e facilmente leggibili, e possono essere eseguiti su tipi di computer diversi con poche o addirittura nessuna modifica [9].

Di norma, i programmi di alto livello vengono poi trasformati in programmi di basso livello eseguibili dal computer tramite due tipi di elaborazione: l'interpretazione e la compilazione.

L'interprete legge il programma e lo elabora un po' alla volta, trasformando ogni riga di istruzioni in un'azione, ed alternando la lettura delle istruzioni all'esecuzione dei comandi che le istruzioni descrivono.

Un compilatore legge il programma di alto livello (detto codice sorgente) e lo traduce completamente in basso livello (detto codice oggetto), prima che il programma possa essere eseguito.

Il linguaggio Python, essendo un linguaggio interpretato, consente di avere un ottimo equilibrio tra aspetto pratico e concettuale, in quanto è possibile scrivere facilmente programmi complessi senza focalizzarsi su problemi di compilazione e link.

## Capitolo 3

# Stato dell'arte

Nel corso degli anni, il problema ATFM è stato affrontato e risolto attraverso diversi approcci. Uno di questi in particolare è la programmazione lineare intera, che consente di elaborare modelli di vario tipo per descrivere matematicamente il problema. Nella prima parte di questo capitolo daremo una rapida panoramica sull'evoluzione dei modelli di programmazione lineare intera per risolvere il problema della gestione del flusso di traffico aereo. Vedremo poi nel dettaglio uno di questi modelli, ovvero quello presentato da Cocco in [6], che è alla base del nostro lavoro.

### 3.1 Evoluzione dei modelli per ATFM

Presentiamo in seguito in ordine cronologico alcuni dei più importanti modelli di programmazione lineare intera per il problema ATFM.

**Helme (1992) [14]:** Questo rappresenta uno dei primi modelli in cui viene considerata la capacità dei settori, in cui viene proposto un programma lineare al fine di ridurre al minimo i ritardi dovuti al ground holding e al airborne holding. Le traiettorie sono predeterminate e non possono essere modificate durante il volo. Non è inoltre consentito il controllo della velocità durante il volo. Le variabili decisionali del modello stabiliscono se un volo deve essere trattenuto o meno a terra al momento



della partenza oppure mentre è in volo. A causa della sua semplicità, il modello risulta avere una formulazione debole.

**Lindsay et al. (1993) [20]:** In questo articolo viene presentato un modello deterministico di programmazione lineare intera, in cui vengono implementate politiche sia di ground holding che di airborne holding, in presenza di vincoli di capacità degli aeroporti e dei settori. Anche il rilassamento lineare di questo problema non risulta essere molto forte.

**Bertsimas and Stock Patterson (1998) [3]:** Questo modello introduce la possibilità di controllo della velocità durante il volo, e vengono presi in considerazione i voli continuativi. Anche in questo caso le traiettorie di volo sono fisse. Questo modello determina, per ogni volo, l'orario ottimale di partenza e il tempo di transito nei settori della rotta. Nell'articolo viene introdotta una nuova classe di variabili decisionali, le quali sono in grado di catturare i tre tipi di connettività: connettività tra settori, connettività tra aeroporti e connettività nel tempo. I vincoli risultano così essere descritti in modo elegante, e la formulazione risulta molto più stringente rispetto ad altre, in quanto include vincoli che costituiscono faccette del convex hull del problema.

**Bertsimas and Stock Patterson (2000) [4]:** Questo articolo introduce la possibilità di rerouting, attraverso un modello di programmazione lineare intera su rete di flusso multi-commodity, con l'obiettivo di minimizzare i costi attraverso la migliore configurazione spaziale delle traiettorie.

**Bertsimas, Lulli and Odoni (2011) [5]:** Questo modello rappresenta un'estensione del precedente. Esso copre tutte le fasi di ogni volo, implementando una combinazione ottimale di politiche di gestione del flusso, tra cui ground holding, airborne holding, speed control e rerouting. La politica di rerouting viene ottenuta attraverso l'imposizione di insiemi di condizioni locali che consentono di rappresentare opzioni di rerouting in modo compatto, introducendo solo alcuni nuovi vincoli.

**Agustín, Alonso-Ayuso, Escudero e Pizarro (2012) [2]:** Il modello tiene in considerazione l'opzione di cancellazione del volo, di voli continuativi e di rerouting. Questo modello deterministico misto minimizza una funzione obiettivo definita da diverse componenti, ovvero il numero di voli eccedenti un determinato ritardo (che può essere pari a zero), i costi di ground holding e airborne holding, la penalizzazione di rotte alternative a quella di linea per ogni volo, il costo unitario di tempo di ritardo per l'arrivo ai nodi (ovvero settori aerei e aeroporti) e penalizzazioni per l'arrivo anticipato ai nodi rispetto all'orario. Il modello è capace di gestire istanze grandi e la formulazione risulta molto stringente, spesso non richiede l'uso del Branch-and-Bound per ottenere la soluzione ottima.

**Fomeni, Lulli and Zografos (2017) [13]:** Questo articolo presenta un modello che contribuisce all'ottimizzazione e alla configurazione ottimale delle Trajectory Based Operations (TBO). Ciò significa migliorare la produttività, l'efficienza del volo e i tempi di volo attraverso una migliore previsione e coordinamento delle traiettorie degli aerei. L'obiettivo è quello di assegnare una traiettoria 4D a ciascun volo che sia ottima, ottenuta minimizzando la variazione spazio-temporale rispetto alla traiettoria preferita e prefissata dalla compagnia aerea. La novità di questo modello è che considera sia le traiettorie 4D complete per ciascun volo, sia le preferenze e le priorità degli stakeholder.

## 3.2 Il modello di riferimento

Come accennato nell'introduzione, il modello alla base del nostro lavoro è presentato all'interno della tesi di Monica Cocco [6].

La struttura di tale modello riprende quella del Bertimas e Stock Patterson del 1998 [3], a cui sono state inizialmente apportate una serie di modifiche e semplificazioni. In particolare, non è stata inclusa l'ipotesi di voli continuativi e la possibilità di rerouting, dunque la possibilità di dirottare i voli lungo traiettorie alternative nel caso di congestione dei settori aerei. Ciò signifi-

ca che le traiettorie dei voli considerati sono note a priori e non subiscono modifiche. Inoltre, non essendo ammessa la possibilità di speed control, è anche noto l'orario di ingresso dei vari aeromobili nei singoli settori, il quale viene determinato grazie al tempo di percorrenza del settore di ciascun volo, dato fornito inizialmente.

L'obiettivo del modello è quello di ottimizzare il sistema di controllo del traffico aereo attraverso l'incremento delle capacità nominali dei settori. La creazione di capacità aggiuntiva consente infatti di limitare i ritardi sia al suolo che in volo, riducendo così l'impatto ambientale del traffico aereo e i relativi costi per le compagnie aeree. Affinché questo accada, è tuttavia necessario sviluppare anche delle efficienti modalità di controllo e gestione delle situazioni di rischio, in quanto le valutazioni sulla sicurezza restano comunque una priorità assoluta.

### 3.2.1 Potenziali conflitti e situazioni critiche

Le semplificazioni apportate al modello in analisi, dunque l'esclusione dell'opzione di rerouting, speed control e la possibilità di voli continuativi, sono fondamentali per la sua formulazione. In particolare, è necessario conoscere preventivamente la rotta che ogni aeromobile percorre, quindi le traiettorie sono tutte prestabilite.

In questo modo, è possibile individuare le coppie di voli che condividono uno o più settori delle loro traiettorie; tale informazione può infatti rappresentare uno scenario critico da monitorare attentamente. Nel dettaglio, è possibile individuare, per ogni settore e intervallo di tempo, quali traiettorie e dunque quali voli potrebbero trovarsi in conflitto all'interno di quel settore in quel determinato intervallo temporale.

Con *potenziale conflitto* si intende quindi la possibilità che le traiettorie di due voli possano entrare in una stessa area critica e/o incrociarsi all'interno di un settore  $j$ , in tempi compatibili. Per tali coppie di voli  $(f, f')$  è possibile definire un insieme non vuoto di istanti di tempo in cui entrambi i voli si trovano all'interno del settore in questione.

Tuttavia, questa caratterizzazione non basta ad identificare i potenziali con-

flitti descritti all'interno del modello: è inoltre necessario che i due voli che entrano in uno stesso settore  $j$  non provengano da uno stesso elemento (settore o aeroporto) precedente.

Sulla base di queste considerazioni vengono determinate, per ogni settore dell'aerospazio, le coppie di voli in potenziale conflitto. Per ogni potenziale conflitto si suppone poi che sia possibile individuare un punto critico in cui le due rotte si intersecano e in cui può avvenire il potenziale incrocio tra gli aeromobili della coppia. Per ogni volo della coppia, è infine fissato come dato del problema il tempo di percorrenza impiegato dall'aeromobile per raggiungere il supposto punto di incrocio delle traiettorie. La definizione dei tempi di incrocio permette di descrivere diverse situazioni possibili a seconda delle posizioni degli aeromobili rispetto al punto di incrocio.

In generale, quando una coppia di voli in potenziale conflitto si trova all'interno del settore in cui le due rotte si intersecano, possono verificarsi diversi scenari. Le situazioni critiche considerate nel modello però possono essere rappresentate dalle seguenti situazioni:

- ( $\alpha$ ) all'istante di tempo considerato i voli hanno superato il punto di incrocio delle traiettorie da poco tempo;
- ( $\beta$ ) all'istante di tempo considerato un volo ha superato il punto di incrocio delle traiettorie da poco tempo mentre l'altro deve ancora raggiungere l'intersezione delle rotte ma oltrepasserà l'incrocio a breve;
- ( $\gamma$ ) all'istante di tempo considerato i voli si trovano in punto precedente all'intersezione delle rotte ma supereranno l'incrocio a breve.

Questa classificazione è legata al fatto che gli scenari a cui i controllori del traffico aereo devono prestare particolare attenzione, e in cui è necessario monitorare attentamente il progressivo avvicinamento e/o allontanamento degli aeromobili per evitare collisioni, sono solo quelli in cui entrambi i voli si trovano in prossimità dell'incrocio. Se infatti all'istante di tempo considerato almeno uno dei due voli della coppia si trova molto lontano dal punto di incrocio, tale scenario non è considerato rischioso perché lo scontro potenziale non può avvenire.

Per descrivere matematicamente queste situazioni critiche, viene definita, nell'intorno del punto di intersezione delle traiettorie, un'area di criticità (o di conflitto). Ciò avviene mediante l'assegnazione, per un settore  $j$ , di due parametri di tolleranza  $\delta_j$  e  $\Delta_j$ , che rispettivamente descrivono l'ampiezza dell'area di conflitto in avanti e all'indietro rispetto al punto di intersezione delle rotte. Questi parametri suddividono il settore  $j$  in questione in quattro aree, due che precedono il punto di incrocio e due che lo seguono. In particolare, individuano una zona che racchiude i punti delle traiettorie che distano più di  $\Delta_j$  istanti di tempo dall'intersezione delle rotte (i); una zona che comprende i punti delle traiettorie a meno di  $\Delta_j$  istanti dall'incrocio (ii); una zona che racchiude i punti delle traiettorie che distano meno di  $\delta_j$  istanti di tempo dall'intersezione delle rotte (iii); e un'area che racchiude i punti delle traiettorie che distano più di  $\delta_j$  istanti di tempo dall'incrocio (iv). Tali aree non contengono necessariamente punti di entrambe le traiettorie e non sono necessariamente vuote: è possibile, a seconda della coppia di voli e della conformazione dell'area di conflitto, che nessun punto di una o entrambe le traiettorie sia contenuto in una o più zone.

Sulla base di queste considerazioni e osservazioni, nel modello in analisi vengono distinti 4 scenari di traffico (A, B, C, D) che possono sussistere nel settore  $j$  al tempo  $t$ .

Tuttavia, ai fini della modellazione, l'unica situazione interessante è la situazione di tipo C, in cui all'istante di tempo considerato  $t$  entrambi i voli si trovano in un punto precedente al punto di intersezione delle traiettorie ma all'istante  $t + \Delta_j$  entrambi i voli lo avranno oltrepassato (situazione C1), oppure in cui un volo ha superato il punto di incrocio delle traiettorie da meno di  $\delta_j$  istanti di tempo mentre l'altro deve ancora raggiungere l'intersezione delle rotte ma la oltrepasserà al tempo  $t + \Delta_j$  (situazione C2), oppure in cui entrambi hanno superato l'incrocio da meno di  $\delta_j$  istanti di tempo (situazione C3).

Al fine di comprendere al meglio la trattazione, evidenziamo che se un volo ha superato il punto di incrocio delle traiettorie da meno di  $\delta_j$  istanti di tempo, significa che al tempo  $t - \delta_j$  si trovava prima dell'intersezione.

### 3.2.2 Dati del problema e notazione

Presentiamo ora i dati del problema e le notazioni necessarie alla formulazione del modello presentato in [6]:

$\mathcal{F} = \{1, \dots, F\}$  : insieme dei voli;

$\mathcal{K} = \{1, \dots, K\}$  : insieme degli aeroporti;

$\mathcal{J} = \{1, \dots, J\}$  : insieme dei settori;

$\mathcal{T} = \{1, \dots, T\}$  : insieme degli intervalli di tempo;

$N_f$  : numero di settori nella traiettoria del volo  $f$ ;

$P(f, i)$  : corrisponde a  $\begin{cases} \text{aeroporto di partenza} & \text{se } i = 1, \\ \text{settore } (i - 1)^{\text{esimo}} \text{ nella traiettoria di } f & \text{se } 1 < i < N_f, \\ \text{aeroporto di arrivo} & \text{se } i = N_f, \end{cases}$

$P_f = \{P(f, i) : 1 \leq i \leq N_f\}$ ;

$D_k(t)$  : capacità di partenze dell'aeroporto  $k$  al tempo  $t$ ;

$A_k(t)$  : capacità di arrivi dell'aeroporto  $k$  al tempo  $t$ ;

$S_j(t)$  : capacità del settore  $j$  al tempo  $t$ ;

$I_k^f$  : numero di unità di tempo che il volo  $f$  impiega per attraversare l'aeroporto  $k$  (parametro introdotto per uniformità, viene posto uguale a zero);

$I_j^f$  : numero di unità di tempo che il volo  $f$  impiega per attraversare il settore  $j$ ;

$d_f$  = orario di partenza previsto per il volo  $f$ ;

$r_f = d_f + \sum_{j \in P_f} I_j^f$  : orario di arrivo previsto per il volo  $f$ ;

$\underline{T}_k^f$  : primo tempo ammissibile di partenza o di arrivo nell'areoporto  $k$  per il volo  $f$ ;

$\overline{T}_k^f$  : ultimo tempo ammissibile di partenza o di arrivo nell'areoporto  $k$  per il volo  $f$ ;

$\underline{T}_j^f$  : primo tempo ammissibile di arrivo nel settore  $j$  per il volo  $f$ ;

$\overline{T}_j^f$  : ultimo tempo ammissibile di arrivo nel settore  $j$  per il volo  $f$ ;

$T_k^f = [\underline{T}_k^f, \overline{T}_k^f]$  : insieme dei tempi ammissibili per il decollo/arrivo nell'areoporto  $k$  per il volo  $f$ ;

$T_j^f = [\underline{T}_j^f, \overline{T}_j^f]$  : insieme dei tempi ammissibili per il volo  $f$  per arrivare nel settore  $j$ ;

$c_g^f$  : costo di trattenimento del volo  $f$  a terra per un'unità di tempo;

$c_a^f$  : costo di trattenimento del volo  $f$  in aria per un'unità di tempo;

$T_{j,last}^f$  : ultimo tempo ammissibile per la presenza del volo  $f$  nel settore  $j$ ;

$\tau_j^f = [\underline{T}_j^f, T_{j,last}^f]$  : insieme degli istanti di tempo ammissibili in cui il volo  $f$  può trovarsi all'interno del settore  $j$ ;

$\mathcal{C}_j$  : insieme delle coppie (non ordinate) di voli che attraversano il settore  $j$  provenendo da elementi precedenti diversi e che hanno tempi di transito compatibili;

$i_j^{f,f'}$  : numero di unità di tempo che il volo  $f$  impiega per raggiungere punto di incrocio con la rotta del volo  $f'$  all'interno del settore  $j$ ;

$\tau_j^{f,f'} = \tau_j^f \cap \tau_j^{f'}$  : insieme dei tempi ammissibili in cui i voli in potenziale conflitto  $f$  e  $f'$  possono trovarsi nello stesso settore  $j$  contemporaneamente;

$k_j^C(t)$  : numero massimo di situazioni di tipo C monitorabili da un controllore di volo all'istante  $t$  nel settore  $j$  in presenza di capacità aggiuntiva;

$M_j(t)$  : parametro di controllo (big-M) relativo al settore  $j$  e al tempo  $t$ ;

$Q_j(t)$  : aumento di capacità consentito al settore  $j$  al tempo  $t$  nel caso in cui vengano rispettate le condizioni di sicurezza relative agli scenari critici;

$\delta_j$  : parametro di tolleranza per il settore  $j$  che definisce l'area di conflitto in avanti rispetto al punto di intersezione delle rotte di due voli in potenziale conflitto in  $j$ ;

$\Delta_j$  : parametro di tolleranza per il settore  $j$  che definisce l'area di conflitto all'indietro rispetto al punto di intersezione delle rotte di due voli in potenziale conflitto in  $j$ .

### 3.2.3 Variabili decisionali

In [6] vengono presentati 4 gruppi di variabili decisionali, 3 dei quali vengono introdotti appositamente per modellare il problema ATFM a capacità adattive. Vediamoli nel dettaglio.

Il primo gruppo di variabili sono quelle introdotte da Bertismas e Stock Patterson [3], e sono le variabili che descrivono l'ingresso di un aereo all'interno di un settore. A differenza delle variabili utilizzate in modelli precedenti, fissato un volo, un tempo e un settore, esse assumono valore 1 se l'aereo arriva nel dato settore *entro* quel determinato tempo. In particolare:

$$x_j^f(t) = \begin{cases} 1 & \text{se il volo } f \text{ arriva nel settore } j \text{ entro il tempo } t \\ 0 & \text{altrimenti.} \end{cases}$$

Queste variabili  $x$  sono ideali per descrivere in modo elegante i vincoli della formulazione, in particolare quelli riguardanti la connettività tra aeroporti, settori e nel tempo. Notare inoltre come le variabili  $x$  siano definite solo per alcuni istanti di tempo. Al di fuori dell'intervallo di definizione, alle variabili  $x_j^f(t)$  viene assegnato un valore pari a 0 quando si considerano istanti di tempo inferiori al primo tempo ammissibile di arrivo di  $f$  in  $j$ , e pari a 1 quando si considerano istanti di tempo superiori all'ultimo tempo ammissibile per l'arrivo di  $f$  in  $j$ .

Il secondo gruppo di variabili è invece stato introdotto appositamente in funzione della formulazione del problema.



Per ogni volo  $f \in F$ , per ogni settore  $j \in J$  e per ogni tempo  $t \in \tau_j^f$ , consideriamo la variabile:

$$y_j^f(t) = \begin{cases} 1 & \text{se il volo } f \text{ si trova nel settore } j \text{ al tempo } t \\ 0 & \text{altrimenti.} \end{cases}$$

Anche tali variabili sono definite solo per alcuni istanti di tempo, e al di fuori del loro intervallo di definizione vengono poste uguali a 0.

Nel modello descritto in [6] la relazione tra le variabili  $x$  e  $y$  non è lineare, ma coinvolge un operatore di massimo. In particolare:

$$\begin{cases} y_j^f(t) = \max\{0, x_j^f(t) - x_{j'}^f(t)\} & \text{con } j = P(f, i), j' = P(f, i + 1) \\ & 1 < i < N_f, \\ x_f^j(t) = \max\{0, y_j^f(t) - y_j^f(t - 1)\}. \end{cases}$$

Gli ultimi due gruppi di variabili vengono introdotti per rispettivamente contare il numero di situazioni critiche e per guidare l'incremento di capacità, dunque per decidere se la capacità del settore possa essere aumentata o meno.

Per ogni settore  $j \in J$ , per ogni coppia di voli  $(f, f') \in \mathcal{C}_j$ , e per ogni tempo  $t \in \tau_j^{ff'}$  si definisce:

$$c_j^{ff'}(t) = \begin{cases} 1 & \text{se la coppia di voli } (f, f') \text{ si trova in } j \text{ al tempo } t \text{ e rappresenta} \\ & \text{una situazione critica,} \\ 0 & \text{altrimenti.} \end{cases}$$

Per tutti gli altri tempi della finestra temporale  $t \notin \tau_j^{ff'}$  si pone

$$c_j^{ff'}(t) = 0.$$

Queste variabili hanno il compito di contare il numero di situazioni critiche (situazioni di tipo C), che sussistono in un determinato settore in un certo intervallo di discretizzazione considerato.

Infine, per ogni settore  $j \in J$  e per ogni tempo  $t \in \tau_j^f$  si definisce:

$$q_j(t) = \begin{cases} 1 & \text{se la capacit\`a del settore } j \text{ al tempo } t \text{ viene aumentata,} \\ 0 & \text{altrimenti.} \end{cases}$$

Quest'ultimo gruppo di variabili guida la modificazione delle capacit\`a dei settori aerei, a patto che vengano rispettate le condizioni di sicurezza e di controllo relative agli scenari critici.

### 3.2.4 La formulazione del modello

Presentiamo ora la formulazione completa del modello come proposto in [6], a cui faremo riferimento nel seguito della trattazione.

$$\begin{aligned} \min \sum_{f \in \mathcal{F}} [ & (c_g^f - c_a^f) \sum_{t \in T_k^f, k=P(f,1)} t(x_k^f(t) - x_k^f(t-1)) \\ & + c_a^f \sum_{t \in T_k^f, k=P(f,N_f)} t(x_k^f(t) - x_k^f(t-1)) \\ & + (c_a^f - c_g^f)d_f - c_a^f r_f ] \end{aligned}$$

soggetto a

$$x_j^f(t) - x_{j'}^f(t) \leq y_j^f(t) \quad \begin{cases} \forall f \in \mathcal{F}, \\ j = P(f, i), j' = P(f, i+1), \\ 1 < i < N_f, \\ t \in \tau_j^f \end{cases} \quad (3.1)$$

$$\sum_{\substack{f \in \mathcal{F}: P(f,1)=k, \\ t \in T_k^f}} (x_k^f(t) - x_k^f(t-1)) \leq D_k(t) \quad \forall k \in \mathcal{K}, t \in \mathcal{T} \quad (3.2)$$

$$\sum_{\substack{f \in \mathcal{F}: P(f,N_f)=k, \\ t \in T_k^f}} (x_k^f(t) - x_k^f(t-1)) \leq A_k(t) \quad \forall k \in \mathcal{K}, t \in \mathcal{T} \quad (3.3)$$

$$\sum_{\substack{f \in \mathcal{F} : P(f,i)=j, P(f,i+1)=j' \\ 1 < i < N_f, t \in T_j^f}} (x_j^f(t) - x_{j'}^f(t)) \leq S_j(t) + Q_j(t)q_j(t) \quad \forall j \in \mathcal{J}, t \in \mathcal{T} \quad (3.4)$$

$$x_{j'}^f(t + I_j^f) - x_j^f(t) = 0 \quad \begin{cases} \forall f \in \mathcal{F}, \\ j = P(f, i), j' = P(f, i + 1), \\ i < N_f - 1, \\ t \in T_j^f \end{cases} \quad (3.5)$$

$$x_k^f(t + I_j^f) - x_j^f(t) \leq 0 \quad \begin{cases} \forall f \in \mathcal{F}, \\ j = P(f, N_f - 1), k = P(f, N_f), \\ t \in T_j^f \end{cases} \quad (3.6)$$

$$\begin{aligned} & y_j^f(t) + y_j^f(t + I_j^f - i_j^{ff'}) + y_j^f(t + \Delta_j - i_j^{ff'}) + \\ & y_j^{f'}(t) + y_j^{f'}(t + I_j^{f'} - i_j^{f'f}) + y_j^{f'}(t + \Delta_j - i_j^{f'f}) \leq c_j^{ff'}(t) + 5 \end{aligned} \quad (3.7a)$$

$$\forall j \in \mathcal{J}, (f, f') \in \mathcal{C}_j : \Delta_j \leq i_j^{ff'} - 1 \wedge \Delta_j \leq i_j^{f'f} - 1, t \in \tau_j^{ff'}$$

$$\begin{aligned} & y_j^f(t) + y_j^f(t + I_j^f - i_j^{ff'}) + y_j^f(t + \Delta_j - i_j^{ff'}) + \\ & y_j^{f'}(t) + y_j^{f'}(t + I_j^{f'} - i_j^{f'f}) \leq c_j^{ff'}(t) + 4 \end{aligned} \quad (3.7b)$$

$$\forall j \in \mathcal{J}, (f, f') \in \mathcal{C}_j : \Delta_j \leq i_j^{ff'} - 1 \wedge \Delta_j \geq i_j^{f'f}, t \in \tau_j^{ff'}$$

$$\begin{aligned} & y_j^f(t) + y_j^f(t + I_j^f - i_j^{ff'}) + \\ & y_j^{f'}(t) + y_j^{f'}(t + I_j^{f'} - i_j^{f'f}) + y_j^{f'}(t + \Delta_j - i_j^{f'f}) \leq c_j^{ff'}(t) + 4 \end{aligned} \quad (3.7c)$$

$$\forall j \in \mathcal{J}, (f, f') \in \mathcal{C}_j : \Delta_j \geq i_j^{ff'} \wedge \Delta_j \leq i_j^{f'f} - 1, t \in \tau_j^{ff'}$$

$$\begin{aligned} & y_j^f(t) + y_j^f(t + I_j^f - i_j^{ff'}) + \\ & y_j^{f'}(t) + y_j^{f'}(t + I_j^{f'} - i_j^{f'f}) \leq c_j^{ff'}(t) + 3 \end{aligned} \quad (3.7d)$$

$$\forall j \in \mathcal{J}, (f, f') \in \mathcal{C}_j : \Delta_j \geq i_j^{ff'} \wedge \Delta_j \geq i_j^{f'f}, t \in \tau_j^{ff'}$$

$$\begin{aligned}
& y_j^f(t) + y_j^f(t + I_j^f - i_j^{ff'}) + y_j^f(t + \Delta_j - i_j^{ff'}) + \\
& y_j^{f'}(t) + y_j^{f'}(t - i_j^{f'f}) + y_j^{f'}(t + \delta_j + I_j^{f'} - i_j^{f'f}) \leq c_j^{ff'}(t) + 5 \quad (3.8a) \\
\forall j \in \mathcal{J}, (f, f') \in \mathcal{C}_j : \Delta_j \leq i_j^{ff'} - 1 \wedge \delta_j \leq I_j^{f'} - i_j^{f'f} - 1, t \in \tau_j^{ff'}
\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
& y_j^f(t) + y_j^f(t + I_j^f - i_j^{ff'}) + y_j^f(t + \Delta_j - i_j^{ff'}) + \\
& y_j^{f'}(t) + y_j^{f'}(t - i_j^{f'f}) \leq c_j^{ff'}(t) + 4 \quad (3.8b) \\
\forall j \in \mathcal{J}, (f, f') \in \mathcal{C}_j : \Delta_j \leq i_j^{ff'} - 1 \wedge \delta_j \geq I_j^{f'} - i_j^{f'f}, t \in \tau_j^{ff'}
\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
& y_j^f(t) + y_j^f(t + I_j^f - i_j^{ff'}) + \\
& y_j^{f'}(t) + y_j^{f'}(t - i_j^{f'f}) + y_j^{f'}(t - \delta_j + I_j^{f'} - i_j^{f'f}) \leq c_j^{ff'}(t) + 4 \quad (3.8c) \\
\forall j \in \mathcal{J}, (f, f') \in \mathcal{C}_j : \Delta_j \geq i_j^{ff'} \wedge \delta_j \leq I_j^{f'} - i_j^{f'f} - 1, t \in \tau_j^{ff'}
\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
& y_j^f(t) + y_j^f(t + I_j^f - i_j^{ff'}) + \\
& y_j^{f'}(t) + y_j^{f'}(t - i_j^{f'f}) \leq c_j^{ff'}(t) + 3 \quad (3.8d) \\
\forall j \in \mathcal{J}, (f, f') \in \mathcal{C}_j : \Delta_j \geq i_j^{ff'} \wedge \delta_j \geq I_j^{f'} - i_j^{f'f}, t \in \tau_j^{ff'}
\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
& y_j^f(t) + y_j^f(t - i_j^{ff'}) + y_j^f(t - \delta_j + I_j^f - i_j^{ff'}) + \\
& y_j^{f'}(t) + y_j^{f'}(t + I_j^{f'} - i_j^{f'f}) + y_j^{f'}(t + \Delta_j - i_j^{f'f}) \leq c_j^{ff'}(t) + 5 \quad (3.9a) \\
\forall j \in \mathcal{J}, (f, f') \in \mathcal{C}_j : \delta_j \leq I_j^f - i_j^{ff'} - 1 \wedge \Delta_j \leq i_j^{f'f} - 1, t \in \tau_j^{ff'}
\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
& y_j^f(t) + y_j^f(t - i_j^{ff'}) + y_j^f(t - \delta_j + I_j^f - i_j^{ff'}) + \\
& y_j^{f'}(t) + y_j^{f'}(t + I_j^{f'} - i_j^{f'f}) \leq c_j^{ff'}(t) + 4 \quad (3.9b) \\
\forall j \in \mathcal{J}, (f, f') \in \mathcal{C}_j : \delta_j \leq I_j^f - i_j^{ff'} - 1 \wedge \Delta_j \geq i_j^{f'f}, t \in \tau_j^{ff'}
\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
& y_j^f(t) + y_j^f(t - i_j^{ff'}) + \\
& y_j^{f'}(t) + y_j^{f'}(t + I_j^{f'} - i_j^{f'f}) + y_j^{f'}(t + \Delta_j - i_j^{f'f}) \leq c_j^{ff'}(t) + 4 \quad (3.9c) \\
& \forall j \in \mathcal{J}, (f, f') \in \mathcal{C}_j : \delta_j \geq I_j^f - i_j^{ff'} \wedge \Delta_j \leq i_j^{f'f} - 1, t \in \tau_j^{ff'}
\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
& y_j^f(t) + y_j^f(t - i_j^{ff'}) + \\
& y_j^{f'}(t) + y_j^{f'}(t + I_j^{f'} - i_j^{f'f}) \leq c_j^{ff'}(t) + 3) \quad (3.9d) \\
& \forall j \in \mathcal{J}, (f, f') \in \mathcal{C}_j : \delta_j \geq I_j^f - i_j^{ff'} \wedge \Delta_j \geq i_j^{f'f}, t \in \tau_j^{ff'}
\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
& y_j^f(t) + y_j^f(t - i_j^{ff'}) + y_j^f(t - \delta_j + I_j^f - i_j^{f'f}) + \\
& y_j^{f'}(t) + y_j^{f'}(t - i_j^{f'f}) + y_j^{f'}(t - \delta_j + I_j^{f'} - i_j^{f'f}) \leq c_j^{ff'}(t) + 5 \\
& \forall j \in \mathcal{J}, (f, f') \in \mathcal{C}_j : \delta_j \leq I_j^f - i_j^{f'f} - 1 \wedge \delta_j \leq I_j^{f'} - i_j^{f'f} - 1, t \in \tau_j^{ff'} \quad (3.10a)
\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
& y_j^f(t) + y_j^f(t - i_j^{ff'}) + y_j^f(t - \delta_j + I_j^f - i_j^{f'f}) + \\
& y_j^{f'}(t) + y_j^{f'}(t - i_j^{f'f}) \leq c_j^{ff'}(t) + 4 \quad (3.10b) \\
& \forall j \in \mathcal{J}, (f, f') \in \mathcal{C}_j : \delta_j \leq I_j^f - i_j^{f'f} - 1 \wedge \delta_j \geq I_j^{f'} - i_j^{f'f}, t \in \tau_j^{ff'}
\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
& y_j^f(t) + y_j^f(t - i_j^{ff'}) + \\
& y_j^{f'}(t) + y_j^{f'}(t - i_j^{f'f}) + y_j^{f'}(t - \delta_j + I_j^{f'} - i_j^{f'f}) \leq c_j^{ff'}(t) + 4 \quad (3.10c) \\
& \forall j \in \mathcal{J}, (f, f') \in \mathcal{C}_j : \delta_j \geq I_j^f - i_j^{ff'} \wedge \delta_j \leq I_j^{f'} - i_j^{f'f} - 1, t \in \tau_j^{ff'}
\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
& y_j^f(t) + y_j^f(t - i_j^{ff'}) + \\
& y_j^{f'}(t) + y_j^{f'}(t - i_j^{f'f}) \leq c_j^{ff'}(t) + 3) \quad (3.10d) \\
& \forall j \in \mathcal{J}, (f, f') \in \mathcal{C}_j : \delta_j \geq I_j^f - i_j^{ff'} \wedge \delta_j \geq I_j^{f'} - i_j^{f'f}, t \in \tau_j^{ff'}
\end{aligned}$$

$$\sum_{(f, f') \in \mathcal{C}_j} c_j^{ff'} \leq k_j^C(t) + M_j(t)(1 - q_j(t)) \quad \forall j \in \mathcal{J}, t \in \mathcal{T} \quad (3.11)$$

$$x_j^f(t-1) - x_j^f(t) \leq 0 \quad \forall f \in \mathcal{F}, j \in P_f, t \in T_j^f \quad (3.12)$$

$$x_j^f(\bar{T}_j^f) = 1 \quad \forall f \in \mathcal{F}, j \in P_f, t \in T_j^f \quad (3.13)$$

$$x_j^f(t) \in \{0, 1\} \quad \forall f \in \mathcal{F}, j \in P_f, t \in T_j^f \quad (3.14a)$$

$$y_j^f(t) \in \{0, 1\} \quad \forall f \in \mathcal{F}, j \in P_f, t \in \tau_j^f \quad (3.14b)$$

$$c_j^{ff'}(t) \in \{0, 1\} \quad \forall (f, f') \in \mathcal{C}_j, j \in P_f, t \in \tau_j^{ff'} \quad (3.14c)$$

$$q_j(t) \in \{0, 1\} \quad \forall j \in \mathcal{J}, t \in \mathcal{T} \quad (3.14d)$$

Per un'analisi dettagliata della formulazione del modello si rimanda a [6]. Ai fini della trattazione, descriveremo nel dettaglio solo un particolare gruppo di vincoli.

### Vincoli di traffico e condizioni di sicurezza

Questi gruppi di vincoli sono molto importanti in quanto servono a descrivere la situazione del traffico aereo e ad esprimere le condizioni di sicurezza che devono essere soddisfatte nell'eventualità che venga aumentata la capacità di un determinato settore. In particolare, i vincoli (3.7a) – (3.10d) servono a conteggiare il numero di scenari critici all'interno del settore, mentre i vincoli (3.11) servono a regolare l'eventuale aumento di capacità.

Per conteggiare le situazioni critiche, in accordo con quanto osservato nel Paragrafo 3.2.1, esse vengono innanzitutto suddivise in tre tipologie: situazioni di tipo C1, C2 o C3. Ogni tipologia di scenario è descritto da un gruppo di vincoli: 4 vincoli per le situazioni C1, 8 vincoli per le situazioni di tipo C2, e 4 vincoli per le situazioni C3.

In ogni vincolo vengono utilizzate le variabili  $y_j^f(t)$  per descrivere la posizione di un volo  $f$  all'interno del settore, col fine di determinare la sua posizione all'istante  $t$  rispetto al punto di incrocio della sua traiettoria con quella di

un altro volo  $f'$ . Per fare ciò, viene descritta un'area critica nell'intorno del punto di incrocio tramite i parametri di tolleranza precedentemente descritti ( $\delta_j$  e  $\Delta_j$ ), e si eseguono una serie di controlli per capire se entrambi gli aerei si trovano nel dato istante  $t$  all'interno di tale area. Se ciò avviene, attraverso le variabili  $c_j^{ff'}(t)$  viene segnalata la presenza di una situazione critica all'istante  $t$ .

Ricordiamo che proprio attraverso i parametri  $\delta_j$  e  $\Delta_j$  vengono distinti i tre scenari critici. In particolare, lo scenario C1 descrive i casi in cui entrambi i voli si trovano prima del punto di incrocio ma all'interno dell'area descritta da  $\Delta_j$ , lo scenario C2 descrive i casi in cui un volo si trova nell'area descritta da  $\delta_j$  e l'altro si trova nell'area descritta da  $\Delta_j$ , e lo scenario C3 descrive i casi in cui entrambi i voli si trovano dopo il punto di incrocio ma all'interno dell'area descritta da  $\delta_j$ . Per ogni scenario vengono infine distinte le situazioni in cui l'area critica considerata contiene o meno tutti i punti della traiettoria dei voli in questione che fanno parte del settore in esame.

Nel dettaglio: i vincoli (3.7a) – (3.7d) descrivono le situazioni di tipo C1, i vincoli (3.8a) – (3.9d) descrivono le situazioni di tipo C2, e i vincoli (3.10a) – (3.10d) descrivono le situazioni di tipo C3.

Consideriamo ad esempio i vincoli (3.7a) – (3.7d). Il vincolo (3.7a) descrive il caso in cui l'area critica descritta da  $\Delta_j$  comprende solo un sottoinsieme dei punti della traiettoria dei voli  $f$  e  $f'$ ; il vincolo (3.7b) ((3.7c) rispettivamente) descrive il caso in cui  $\Delta_j$  comprende solo un sottoinsieme dei punti della traiettoria del volo  $f$  (risp.  $f'$ ) e tutti i punti della traiettoria di  $f'$  (risp.  $f$ ); il vincolo (3.7d) descrive il caso in cui l'area critica comprende tutti i punti della traiettoria dei voli  $f$  e  $f'$ .

In ogni vincolo viene considerata la posizione dei due voli in vari istanti di tempo, per determinare se ad un certo istante  $t$  i voli si trovino o meno nell'area descritta dal parametro di tolleranza.

Quindi ad esempio nel vincolo (3.7a), se all'istante  $t$  il volo  $f$  si trova dentro l'area critica (e quindi dentro il settore  $j$ ), allora si troverà all'interno del settore  $j$  anche negli istanti  $t + I_j^f - i_j^{ff'}$  e  $t + \Delta_j - i_j^{ff'}$ , dove vale:

$$t + \Delta_j - i_j^{ff'} \leq t \leq t + I_j^f - i_j^{ff'},$$

dove ricordiamo  $I_j^f =$  istanti di tempo necessari al volo  $f$  per attraversare il settore  $j$ ,  $i_j^{ff'}$  = istanti di tempo necessari al volo  $f$  per raggiungere punto di incrocio della traiettoria con  $f'$ .

Dunque si valuta la posizione di un volo  $f$  all'istante  $t$ , la sua posizione in un istante antecedente a  $t$ , e la sua posizione in un istante successivo. Solo se in tutti e tre i casi il volo si trova all'interno del settore allora effettivamente il volo è all'interno dell'area critica. Più semplicemente, si cerca di capire se spostandosi di una certa quantità all'avanti e all'indietro rispetto a  $t$  il volo resta all'interno del settore, e se ciò accade allora di certo nell'istante in questione il volo si trova all'interno dell'area considerata. Ad esempio, nel vincolo (3.7a), se si verifica la condizione:

$$y_j^f(t) = y_j^f(t + I_j^f - i_j^{ff'}) = y_j^f(t + \Delta_j - i_j^{ff'}) = 1,$$

allora significa che il volo  $f$  all'istante  $t$  è all'interno dell'area critica. A seconda poi del vincolo, e quindi a seconda dello scenario critico descritto e di quanti punti della traiettoria del volo in questione si trovino nell'area descritta da  $\Delta_j$ , cambiano leggermente i controlli effettuati.

Ad esempio, nel vincolo (3.7c), si suppone che  $\Delta_j$  contenga tutti i punti della traiettoria del volo  $f$ . Questo significa che non appena il volo entra nel settore  $j$ , si trova immediatamente all'interno dell'area critica. Non è dunque necessario valutare la posizione dell'aereo all'istante precedente  $t + \Delta_j - i_j^{ff'}$ , basta valutare se il volo si trovi nel settore all'istante  $t$  e all'istante successivo  $t + I_j^f - i_j^{ff'}$ . Infatti, se all'istante  $t$  avesse già superato il punto di incrocio, allora certamente all'istante  $t + I_j^f - i_j^{ff'}$  il volo non sarebbe più nel settore. In generale, solo se tutti i controlli su entrambi i voli vengono superati (ovvero entrambi i voli sono nell'area critica) viene segnalata la presenza di una situazione critica attraverso la variabile  $c_j^{ff'}(t)$ . Sempre nel vincolo (3.7a), questo significa che se i due voli  $f$  e  $f'$  si trovano in  $j$  all'interno dell'area critica (dunque si trovano prima dell'incrocio ma lo avranno superato al tempo  $t + \Delta_j$ ), il primo membro della disuguaglianza assume valore 6. Si



ha quindi:

$$\begin{aligned} y_j^f(t) + y_j^f(t + I_j^f - i_j^{ff'}) + y_j^f(t + \Delta_j - i_j^{ff'}) + \\ y_j^{f'}(t) + y_j^{f'}(t + I_j^{f'} - i_j^{f'f}) + y_j^{f'}(t + \Delta_j - i_j^{f'f}) = 6 \\ \Rightarrow c_j^{ff'}(t) = 1 \end{aligned}$$

Quando il primo membro invece assume un valore  $\leq 5$ , il vincolo è soddisfatto per qualsiasi valore di  $c_j^{ff'}(t)$ .

I vincoli 3.11 servono invece per verificare le condizioni di incremento della capacità, ovvero per comprendere se il numero di situazioni critiche presenti all'interno del settore  $j$  al tempo  $t$  sia tale da consentire un aumento della capacità del settore oppure no.

In particolare, i vincoli 3.11

$$\sum_{(f,f') \in \mathcal{C}_j} c_j^{ff'} \leq k_j^C(t) + M_j(t)(1 - q_j(t)) \quad \forall j \in \mathcal{J}, t \in \mathcal{T}$$

impongono che se la capacità del settore  $j$  viene aumentata al tempo  $t$ , ovvero se vale  $q_j(t) = 1$ , allora  $\sum_{(f,f') \in \mathcal{C}_j} c_j^{ff'}(t) \leq k_j^C(t)$ . Questo perché per aumentare la capacità di un settore al tempo  $t$  devono essere necessariamente soddisfatte alcune condizioni di traffico, ovvero è necessario che il numero totale di situazioni critiche registrate,  $\sum_{(f,f') \in \mathcal{C}_j} c_j^{ff'}(t)$ , non superi il massimo numero di situazioni critiche monitorabili in tale istante,  $k_j^C(t)$ . Qualora si abbia  $q_j(t) = 0$ , allora  $\sum_{(f,f') \in \mathcal{C}_j} c_j^{ff'}(t) \leq k_j^C(t) + M_j(t)$ , ovvero se all'istante  $t$  il numero totale di situazioni critiche registrate è superiore al massimo numero di situazioni critiche monitorabili,  $\sum_{(f,f') \in \mathcal{C}_j} c_j^{ff'}(t) > k_j^C(t)$ , la capacità del settore  $j$  non può essere aumentata perché non sono rispettate le condizioni di sicurezza. Dunque  $q_j(t) = 0$ , e nel membro a destra compare il parametro di controllo  $M_j(t)$ . Tale parametro deve essere scelto sufficientemente grande, e nel modello viene posto uguale a  $\text{card}(\mathcal{C}_j)$ , ovvero la cardinalità dell'insieme su cui si sta sommando. Tale parametro è stato così scelto in quanto ad ogni istante di tempo, il massimo numero di situazioni critiche registrabili non può superare il numero totale dei potenziali conflitti presenti nel settore.

## Capitolo 4

# Proprietà aggiuntive del modello di riferimento

Il modello in [6] presentato nella Sezione 3.2 è alla base di questo lavoro di tesi, il cui obiettivo è quello di indagare modelli per il problema ATFM con capacità adattiva dello spazio aereo.

Come primo passo nel nostro lavoro abbiamo analizzato approfonditamente la struttura del modello per cercare di capire se potesse essere in qualche modo affinata, arrivando così a formulare alcune possibili modifiche. Il modello di partenza presenta delle semplificazioni rispetto ad altri modelli per il problema ATFM, già discusse in precedenza, le quali possono essere sfruttate per evidenziare alcune proprietà della formulazione. In particolare, le proprietà che abbiamo ricavato riguardando tre gruppi di vincoli.

### 4.1 Relazione tra le variabili

Fissato un volo  $f \in \mathcal{F}$ , un settore  $j \in \mathcal{J}$ , un tempo ammissibile  $t \in T_j^f$ , e un tempo ammissibile  $t \in \tau_j^f$ , consideriamo le variabili:

$$x_j^f(t) = \begin{cases} 1 & \text{se il volo } f \text{ arriva nel settore } j \text{ entro il tempo } t \\ 0 & \text{altrimenti.} \end{cases}$$

$$y_j^f(t) = \begin{cases} 1 & \text{se il volo } f \text{ si trova nel settore } j \text{ al tempo } t \\ 0 & \text{altrimenti.} \end{cases}$$

Abbiamo già visto come nel modello presentato in [6] la relazione tra le variabili  $x$  e  $y$  non è lineare, ma coinvolge un operatore di massimo. In particolare:

$$\begin{cases} y_j^f(t) = \max\{0, x_j^f(t) - x_{j'}^f(t)\} & \text{con } j = P(f, i), j' = P(f, i + 1) \\ & 1 < i < N_f, \\ x_{j'}^f(t) = \max\{0, y_j^f(t) - y_j^f(t - 1)\}. \end{cases}$$

Tale relazione viene poi facilmente linearizzata attraverso il vincolo (3.1):

$$x_j^f(t) - x_{j'}^f(t) \leq y_j^f(t) \quad \begin{cases} \forall f \in \mathcal{F}, \\ j = P(f, i), j' = P(f, i + 1), \\ 1 < i < N_f, \\ t \in \tau_j^f \end{cases}$$

Nelle specifiche condizioni del nostro problema tuttavia, è possibile dimostrare la seguente proprietà.

**Proprietà 4.1.** *È valida la seguente relazione lineare:*

$$x_j^f(t) - x_{j'}^f(t) = y_j^f(t) \quad \begin{cases} \forall f \in \mathcal{F}, \\ j = P(f, i), j' = P(f, i + 1), \\ 1 < i < N_f, \\ t \in \tau_j^f \end{cases}$$

Dimostrazione:

L'operatore di massimo risulta necessario solo nel caso in cui il termine  $x_j^f(t) - x_{j'}^f(t)$  possa assumere il valore  $-1$ . Nelle ipotesi del nostro problema però, ciò non può verificarsi. Infatti, risulta:

$$x_j^f(t) - x_{j'}^f(t) = -1 \iff \begin{cases} x_j^f(t) = 0 \\ x_{j'}^f(t) = 1 \end{cases}$$

Tuttavia, i vincoli di connettività del problema (3.5) – (3.6) – (3.12) impongono che:

$$x_{j'}^f(t + I_j^f) - x_j^f(t) = 0 \quad \begin{cases} \forall f \in \mathcal{F}, \\ j = P(f, i), j' = P(f, i + 1), \\ i < N_f - 1, \\ t \in T_j^f \end{cases}$$

$$x_k^f(t + I_j^f) - x_j^f(t) \leq 0 \quad \begin{cases} \forall f \in \mathcal{F}, \\ j = P(f, N_f - 1), k = P(f, N_f), \\ t \in T_j^f \end{cases}$$

$$x_j^f(t - 1) - x_j^f(t) \leq 0 \quad \forall f \in \mathcal{F}, j \in P_f, t \in T_j^f$$

Supponiamo ora che si verifichi la condizione:

$$\begin{cases} x_j^f(t) = 0 \\ x_{j'}^f(t) = 1 \end{cases}.$$

Per  $i < N_f - 1$ , per il vincolo (3.5) avremmo che:

$$x_{j'}^f(t + I_j^f) = x_j^f(t) = 0,$$

dove  $t + I_j^f$  è un istante di tempo ammissibile per  $x_{j'}^f(t)$ . Tuttavia, poiché

$t < t + I_j^f$ , per il vincolo (3.12) si avrebbe:

$$1 = x_{j'}^f(t) \leq x_{j'}^f(t + I_j^f) = 0,$$

ovvero  $1 \leq 0$ , il che è assurdo.

Per  $i = N_f - 1$ , e quindi  $j = P(f, N_f - 1)$ ,  $k = P(f, N_f)$ , supponiamo valga la condizione:

$$\begin{cases} x_j^f(t) = 0 \\ x_k^f(t) = 1 \end{cases}.$$

Per il vincolo (3.6) avremmo che:

$$x_k^f(t + I_j^f) \leq x_j^f(t) = 0,$$

e dunque:

$$x_k^f(t + I_j^f) = 0$$

Come nell'altro caso però, poiché  $t < t + I_j^f$ , per il vincolo (3.12) si avrebbe:

$$1 = x_k^f(t) \leq x_k^f(t + I_j^f) = 0,$$

ovvero  $1 \leq 0$ , il che è assurdo.

Dunque nelle ipotesi del nostro problema la quantità  $x_j^f(t) - x_{j'}^f(t)$  è sempre maggiore o uguale a zero, per cui l'operatore di massimo non risulta necessario.

□

È interessante notare che, nel caso in cui si decidesse di includere l'opzione di rerouting, la relazione tra le variabili  $x_j^f(t)$  e  $y_j^f(t)$  non sarebbe più lineare e l'operatore di massimo unsato in [6] tornerebbe a essere necessario, come mostrato in in Bertsimas, Lulli e Odoni [5].

In particolare, quando si implementa l'opzione di rerouting, la traiettoria di un volo  $f$  non è più unica come nel nostro caso. Ciò significa che, ad esempio, un volo  $f$  può entrare nel settore  $j$  provenendo dal settore  $j'$  o  $j''$  a seconda della traiettoria che viene selezionata, che non risulta essere nota

a priori. Più nel dettaglio, seguendo la notazione presente in [5], indichiamo con:

- $P^f$  : l'insieme di settori che possono essere sorvolati dal volo  $f$ ;
- $L_j^f$  : l'insieme di settori successivi al settore  $j \in P^f$  per il volo  $f$ .

La relazione tra le variabili diventa:

$$y_j^f(t) = \max\{0, x_j^f(t) - \sum_{j' \in \mathcal{L}_j^f} x_{j'}^f(t)\},$$

dove la sommatoria compare in quanto non si conosce a priori la traiettoria, e quindi i settori che vengono effettivamente percorsi dall'aereo. Tuttavia, soltanto uno dei termini  $x_{j'}^f(t)$  sarà uguale ad 1 all'istante  $t$ .

Si può così notare che il termine  $x_j^f(t) - \sum_{j' \in \mathcal{L}_j^f} x_{j'}^f(t)$  vale  $-1$  ogni volta che il volo  $f$  arriva in uno dei settori successivi di  $j$  senza passare per  $j$ . Dunque l'operatore di massimo diventa necessario.

## 4.2 Vincoli di traffico e riformulazione delle condizioni di sicurezza

La seconda proprietà evidenziata riguarda i vincoli di traffico e condizioni di sicurezza, che servono a regolare l'incremento della capacità dei settori. Nella Sezione 3.2 viene descritto il funzionamento di tali vincoli all'interno del modello in esame.

Analizzando nel dettaglio i vincoli che descrivono i vari scenari, ci siamo accorti che nel caso in cui le aree critiche  $\Delta_j$  e  $\delta_j$  contengano solo un sottinsieme dei punti della traiettoria del volo considerato, allora è possibile modificare leggermente il vincolo eliminando alcune delle variabili presenti.

Ad esempio, consideriamo il vincolo (3.7b):

$$\begin{aligned} & y_j^f(t) + y_j^f(t + I_j^f - i_j^{ff'}) + y_j^f(t + \Delta_j - i_j^{ff'}) + \\ & y_j^{f'}(t) + y_j^{f'}(t + I_j^{f'} - i_j^{f'f}) \leq c_j^{ff'}(t) + 4 \\ \forall j \in \mathcal{J}, (f, f') \in \mathcal{C}_j : \Delta_j \leq i_j^{ff'} - 1 \wedge \Delta_j \geq i_j^{f'f}, t \in \tau_j^{ff'} \end{aligned}$$

Esso descrive il caso in cui l'area  $\Delta_j$  contiene tutti i punti della traiettoria del volo  $f'$ , ma solo un sottoinsieme dei punti della traiettoria di  $f$ . Ovvero:

$$\Delta_j \geq i_j^{f'f},$$

$$\Delta_j \leq i_j^{ff'} - 1.$$

Ciò che proponiamo, quando si valuta la posizione del volo  $f$ , è di considerare la sua posizione solo negli istanti  $t + I_j^f - i_j^{ff'}$  e  $t + \Delta_j - i_j^{ff'}$ , e non all'istante  $t$ .

Dunque riscrivendo il vincolo avremmo:

$$\begin{aligned} & y_j^f(t + I_j^f - i_j^{ff'}) + y_j^f(t + \Delta_j - i_j^{ff'}) + \\ & y_j^{f'}(t) + y_j^{f'}(t + I_j^{f'} - i_j^{f'f}) \leq c_j^{ff'}(t) + 3 \\ \forall j \in \mathcal{J}, (f, f') \in \mathcal{C}_j : \Delta_j \leq i_j^{ff'} - 1 \wedge \Delta_j \geq i_j^{f'f}, t \in \tau_j^{ff'} \end{aligned} \quad (3.7b')$$

Intuitivamente ha senso modificare in tale modo il vincolo, in quanto se  $y_j^f(t + I_j^f - i_j^{ff'})$  e  $y_j^f(t + \Delta_j - i_j^{ff'})$  risultano uguale a 1, ovvero se spostandoci un po' all'avanti e un po' all'indietro rispetto all'istante  $t$  continuiamo ad essere all'interno settore  $j$ , chiaramente all'istante  $t$  saremo nel settore (e nell'area critica). Dunque non risulta necessario verificare che all'istante  $t$  il volo si trovi nel settore  $j$ , poiché se le due condizioni precedenti risultano verificate, allora obbligatoriamente il volo  $f$  si trova all'interno del settore considerato.

Dimostriamo ora che è possibile eseguire questa modifica.

**Proprietà 4.2.** *Il vincolo (3.7b) può essere sostituito nella formulazione proposta in [6] dal vincolo (3.7b').*

Dimostrazione:

Per comodità, chiameremo:

$$A = y_j^f(t + I_j^f - i_j^{ff'}) + y_j^f(t + \Delta_j - i_j^{ff'}) + y_j^{f'}(t) + y_j^{f'}(t + I_j^{f'} - i_j^{f'f}),$$

ovvero i termini del vincolo che intendiamo mantenere. Riciviamo quindi la disuguaglianza del vincolo (3.7b) come:

$$A + y_j^f(t) \leq c_j^{ff'}(t) + 4 \quad (\bullet)$$

mentre il vincolo da noi proposto sarebbe:

$$A \leq c_j^{ff'}(t) + 3 \quad (\bullet\bullet).$$

Notiamo innanzitutto che la disuguaglianza  $(\bullet)$  può essere scritta come:

$$A + y_j^f(t) - 1 \leq c_j^{ff'}(t) + 3 \quad (\bullet).$$

Dunque affinché la nostra modifica sia eseguibile, bisogna mostrare che:

$$A \geq A + y_j^f(t) - 1,$$

ovvero che la disuguaglianza  $(\bullet\bullet)$  sia più forte della disuguaglianza  $(\bullet)$ .

Tuttavia, ciò segue facilmente poiché  $y_j^f(t)$  è una variabile binaria, e quindi il termine  $(y_j^f(t) - 1) \in \{0, -1\}$ . Dunque stiamo sommando ad  $A$  un termine che è sempre non positivo, per cui risulta:

$$A \geq A + y_j^f(t) - 1$$

quindi vale:

$$c_j^{ff'}(t) + 3 \geq A \geq A + y_j^f(t) - 1.$$

□

Questo tipo di procedimento può essere applicato a tutti i vincoli sopra



presentati, che possono dunque essere riscritti nel modo seguente:

$$\begin{aligned} & y_j^f(t + I_j^f - i_j^{ff'}) + y_j^f(t + \Delta_j - i_j^{ff'}) + \\ & y_j^{f'}(t + I_j^{f'} - i_j^{f'f}) + y_j^{f'}(t + \Delta_j - i_j^{f'f}) \leq c_j^{ff'}(t) + 3 \end{aligned} \quad (3.7a')$$

$$\forall j \in \mathcal{J}, (f, f') \in \mathcal{C}_j : \Delta_j \leq i_j^{ff'} - 1 \wedge \Delta_j \leq i_j^{f'f} - 1, t \in \tau_j^{ff'}$$

$$\begin{aligned} & y_j^f(t + I_j^f - i_j^{ff'}) + y_j^f(t + \Delta_j - i_j^{ff'}) + \\ & y_j^{f'}(t) + y_j^{f'}(t + I_j^{f'} - i_j^{f'f}) \leq c_j^{ff'}(t) + 3 \end{aligned} \quad (3.7b')$$

$$\forall j \in \mathcal{J}, (f, f') \in \mathcal{C}_j : \Delta_j \leq i_j^{ff'} - 1 \wedge \Delta_j \geq i_j^{f'f}, t \in \tau_j^{ff'}$$

$$\begin{aligned} & y_j^f(t) + y_j^f(t + I_j^f - i_j^{ff'}) + \\ & y_j^{f'}(t + I_j^{f'} - i_j^{f'f}) + y_j^{f'}(t + \Delta_j - i_j^{f'f}) \leq c_j^{ff'}(t) + 4 \end{aligned} \quad (3.7c')$$

$$\forall j \in \mathcal{J}, (f, f') \in \mathcal{C}_j : \Delta_j \geq i_j^{f'f} \wedge \Delta_j \leq i_j^{f'f} - 1, t \in \tau_j^{ff'}$$

$$\begin{aligned} & y_j^f(t) + y_j^f(t + I_j^f - i_j^{ff'}) + \\ & y_j^{f'}(t) + y_j^{f'}(t + I_j^{f'} - i_j^{f'f}) \leq c_j^{ff'}(t) + 3 \end{aligned} \quad (3.7d)$$

$$\forall j \in \mathcal{J}, (f, f') \in \mathcal{C}_j : \Delta_j \geq i_j^{f'f} \wedge \Delta_j \geq i_j^{f'f}, t \in \tau_j^{ff'}$$

Notare che il vincolo (3.7d) resta invariato perché descrive la situazione in cui la regione  $\Delta_j$  comprende tutti i punti della traiettoria del volo  $f$  e del volo  $f'$ . Anche nei vincoli che descrivono le situazioni critiche di tipo C2 e C3 può essere apportata lo stesso tipo di modifica.

### 4.3 Rafforzamento dei parametri Big-M

Nel modello presentato in [6], le capacità di ogni settore sono adattive: questo significa che possono essere modificate se vengono rispettate le condizioni di sicurezza. In particolare, per decidere se la capacità del settore  $S_j$  può essere aumentata all'istante  $t$ , è presente il vincolo (3.11):

$$\sum_{(f,f') \in \mathcal{C}_j} c_j^{f,f'}(t) \leq k_j^C(t) + M_j(t)(1 - q_j(t)) \quad \forall j \in \mathcal{J}, t \in \mathcal{T},$$

dove ricordiamo che  $M_j(t) = \text{card}(\mathcal{C}_j)$ .

Tale vincolo regola l'eventuale aumento della capacità del settore  $j$  in quanto:

- se  $q_j(t) = 1$ , allora  $\sum_{(f,f') \in \mathcal{C}_j} c_j^{f,f'}(t) \leq k_j^C(t)$ ,  
ovvero se all'istante  $t$  la capacità del settore  $j$  viene aumentata ( $q_j(t) = 1$ ), allora all'istante  $t$  il numero totale di situazioni critiche registrate,  $\sum_{(f,f') \in \mathcal{C}_j} c_j^{f,f'}(t)$ , non può superare il massimo numero di situazioni critiche monitorabili in tale istante,  $k_j^C(t)$ ;
- se  $q_j(t) = 0$ , allora  $\sum_{(f,f') \in \mathcal{C}_j} c_j^{f,f'}(t) \leq k_j^C(t) + M_j(t)$ ,  
ovvero se all'istante  $t$  il numero totale di situazioni critiche registrate è superiore al massimo numero di situazioni critiche monitorabili,  $\sum_{(f,f') \in \mathcal{C}_j} c_j^{f,f'}(t) > k_j^C(t)$ , la capacità del settore  $j$  non può essere aumentata perché non sono rispettate le condizioni di sicurezza. Dunque  $q_j(t) = 0$ , e nel membro a destra compare il fattore  $M_j(t)$ .

Il fattore  $M_j(t)$  è stato scelto in questo modo poiché ad ogni istante di tempo il massimo numero di situazioni critiche registrabili non può certamente superare il numero totale dei potenziali conflitti presenti nel settore. Ad esempio, se nel settore  $j$  ci sono 25 coppie in potenziale conflitto ( $M_j(t) = \text{card}(\mathcal{C}_j) = 25$ ), ad un istante di tempo  $t$  non potranno verificarsi più di 25 situazioni critiche. Questo perché nel peggiore dei casi, nell'istante  $t$  tutte le coppie in potenziale conflitto si trovano in posizione critica, e quindi  $\sum_{(f,f') \in \mathcal{C}_j} c_j^{f,f'}(t) = 25$ .

A partire da questa osservazione, abbiamo cercato di determinare una stima più fine del parametro di controllo Big-M ( $M_j(t)$ ) per ottenere così un vincolo più stringente.

Il nostro punto di partenza è dunque la seguente relazione:

$$\sum_{(f,f') \in \mathcal{C}_j} c_j^{f,f'}(t) \leq M_j(t) \quad (\star)$$

A partire da essa, abbiamo innanzitutto modificato il vincolo (3.11), ottenendo:

$$\sum_{(f,f') \in \mathcal{C}_j} c_j^{f,f'}(t) \leq k_j^C(t) \cdot q_j(t) + M_j(t)(1 - q_j(t)) \quad \forall j \in \mathcal{J}, t \in \mathcal{T}$$

ovvero:

$$\sum_{(f,f') \in \mathcal{C}_j} c_j^{f,f'}(t) \leq q_j(t) \cdot (k_j^C(t) - M_j(t)) + M_j(t) \quad \forall j \in \mathcal{J}, t \in \mathcal{T} \quad (\diamond)$$

Tale vincolo opera come il (3.11) nel monitoraggio delle situazioni critiche, ma con una condizione più stringente:

- se  $q_j(t) = 1$ , allora  $\sum_{(f,f') \in \mathcal{C}_j} c_j^{f,f'}(t) \leq k_j^C(t)$ , ovvero se all'istante  $t$  la capacità del settore  $j$  viene aumentata ( $q_j(t) = 1$ ), allora all'istante  $t$  il numero totale di situazioni critiche registrate,  $\sum_{(f,f') \in \mathcal{C}_j} c_j^{f,f'}(t)$ , non può superare il massimo numero di situazioni critiche monitorabili in tale istante,  $k_j^C(t)$ ;
- se  $q_j(t) = 0$ , allora  $\sum_{(f,f') \in \mathcal{C}_j} c_j^{f,f'}(t) \leq M_j(t)$ , ovvero se all'istante  $t$  il numero totale di situazioni critiche registrate è superiore al massimo numero di situazioni critiche monitorabili,  $\sum_{(f,f') \in \mathcal{C}_j} c_j^{f,f'}(t) > k_j^C(t)$ , la capacità del settore  $j$  non può essere aumentata perché non sono rispettate le condizioni di sicurezza. Dunque  $q_j(t) = 0$ , e nel membro a destra rimane solo il fattore  $M_j(t)$ .

La differenza tra il vincolo  $(\diamond)$  e il vincolo (3.11) si evidenzia quando le condizioni di sicurezza non vengono rispettate, e dunque non è possibile aumentare la capacità del settore  $j$ , ovvero quando  $q_j(t) = 0$ . In particolare, se  $q_j(t) = 0$  si ha:

$$\sum_{(f,f') \in \mathcal{C}_j} c_j^{f,f'}(t) \leq k_j^C(t) + M_j(t),$$

mentre per il vincolo ( $\diamond$ ), quando  $q_j(t) = 0$  si ha:

$$\sum_{(f,f') \in \mathcal{C}_j} c_j^{f,f'}(t) \leq M_j(t),$$

che è proprio la relazione ( $\star$ ). Dunque la modifica proposta fornisce una condizione più stringente quando  $q_j(t) = 0$  poiché vale:

$$\sum_{(f,f') \in \mathcal{C}_j} c_j^{f,f'}(t) \leq M_j(t) \leq M_j(t) + k_j^C(t).$$

Tale modifica non impatta le soluzioni intere, ma consente di scartare alcune soluzioni del rilassamento continuo del problema.

Per rendere il vincolo che controlla l'aumento della capacità dei settori ancora più stringente, ci siamo poi concentrati sul valore del parametro  $M_j(t)$ . In particolare, abbiamo cercato di determinare una sua stima per ogni istante di tempo  $t$ . Nel modello presentato in [6] infatti, tale parametro non dipende effettivamente dal tempo, ma viene posto pari al numero totale dei potenziali conflitti di un settore  $j$  in ogni istante di tempo  $t$ , ovvero:

$$M_j(t) = |C_j| \quad \forall t \in \mathcal{T}.$$

Tuttavia, questa relazione può essere affinata. Ricordiamo che le coppie di voli in potenziale conflitto, ovvero le coppie  $(f, f') \in C_j$ , sono determinate da due condizioni. La prima è che i due voli provengano da settori differenti, e la seconda è che abbiano tempi di transito compatibili.

Non è infatti rilevante osservare una coppia  $(f, f')$  in un settore  $j$  se il volo  $f$  transita in  $j$  ad esempio negli istanti  $\{4, 5, 6, 7\}$  e il volo  $f'$  transita negli istanti  $\{20, 21, 22, 23\}$ , poiché chiaramente non si intersecheranno.

Per questo motivo, per ogni coppia di voli  $(f, f') \in C_j$  viene determinato il parametro:

$\tau_j^{f,f'}$  = insieme dei tempi ammissibili in cui i voli in potenziale conflitto  $f$  e  $f'$  possono trovarsi nello stesso settore  $j$  contemporaneamente,

ed è proprio negli istanti di tempo indicati dal parametro  $\tau_j^{f,f'}$  che vengono controllate le posizioni dei tuoi voli all'interno del settore.

Consideriamo ora il seguente esempio.

Sia  $j$  un settore contenente due coppie di voli in potenziale conflitto, ovvero  $C_j = \{(1, 2), (3, 4)\}$ , e siano dati i seguenti valori per  $\tau_j^{f,f'}$ :

$$\begin{aligned}\tau_j^{1,2} &= \{7, 8, 9, 10\} \\ \tau_j^{3,4} &= \{20, 21, 22, 23\}\end{aligned}$$

Secondo la relazione  $M_j(t) = |C_j|$ , si avrebbe:

$$M_j(t) = 2 \quad \forall t \in \mathcal{T}.$$

Tuttavia, è evidente che negli istanti  $\{7, 8, 9, 10\}$  non ci potranno mai essere 2 coppie di voli in potenziale conflitto, poiché i voli 3 e 4 non si trovano ancora nel settore. Allo stesso modo, negli istanti  $\{20, 21, 22, 23\}$  non ci potranno mai essere 2 coppie di voli in potenziale conflitto, poiché i voli 1 e 2 non si trovano più nel settore.

In questo caso, sarebbe possibile porre:

$$\begin{aligned}M_j(t) &= 1 \quad \forall t \in \{7, 8, 9, 10\} \\ M_j(t) &= 1 \quad \forall t \in \{20, 21, 22, 23\},\end{aligned}$$

poiché in tali istanti è presente sempre una sola coppia all'interno del settore.

Questo ragionamento può essere esteso ai valori di  $M_j(t)$  per ogni istante di tempo  $t$  e per ogni settore  $j$ , in quanto conosciamo i valori di  $\tau_j^{f,f'}$  per ogni coppia di voli  $(f, f') \in C_j$  per ogni settore  $j$ .

Fissati  $j \in \mathcal{J}$  e  $t \in \mathcal{T}$ , il processo può essere schematizzato dall'algoritmo riportato nella Figura 4.1.

---

```

i = 0
for (f, f') ∈ Cj do
    if t ∈  $\tau_j^{f,f'}$  then
        i = i + 1
    end if
end for
Mj(t) = i

```

---

**Figura 4.1** : Algoritmo per il calcolo dei parametri  $M_j(t)$ .

L'algoritmo serve per contare quante volte l'istante di tempo  $t$  è presente negli intervalli  $\tau_j^{f,f'}$ , al variare delle coppie  $(f, f') \in C_j$ . In questo modo, determiniamo quante coppie di voli possono effettivamente trovarsi nel settore  $j$  all'istante  $t$ , e poniamo  $M_j(t)$  pari a tale valore.

La nuova stima del parametro  $M_j(t)$  è dunque una stima dinamica, in quanto tiene effettivamente conto di possibili variazioni nel tempo, mentre la stima originale del parametro proposta in [6] è statica poiché di fatto non varia con  $t$ .

## 4.4 Disuguaglianze valide di tipo cover

Un'ultima importante proprietà del modello di cui ci siamo accorti riguarda nuovamente il vincolo (3.11) legato al conteggio delle situazioni critiche. Esso ha infatti la forma di un vincolo relativo ad un *problema dello zaino*[19].

Riscriviamo il vincolo portando a sinistra della disequazione tutte le variabili coinvolte:

$$\sum_{(f,f') \in C_j} c_j^{f,f'}(t) + M_j(t)q_j(t) \leq k_j^C(t) + M_j(t) \quad \forall j \in \mathcal{J}, t \in \mathcal{T}$$

Notiamo che le variabili coinvolte sono tutte variabili binarie, e i coefficienti che le moltiplicano sono tutti interi positivi. Anche il termine a destra della disequazione è un intero positivo.

Allo stesso modo, anche la versione modificata di tale vincolo proposta nella

Sezione 4.3 assume la stessa forma.

Riscriviamo infatti il vincolo ( $\diamond$ ) portando a sinistra tutte le variabili coinvolte:

$$\sum_{(f,f') \in \mathcal{C}_j} c_j^{f,f'}(t) + (M_j(t) - k_j^C(t))q_j(t) \leq M_j(t) \quad \forall j \in \mathcal{J}, t \in \mathcal{T}$$

Notiamo che ogni volta che  $M_j(t) > k_j^C(t)$ , i coefficienti che moltiplicano le variabili sono positive, mentre il termine a destra lo è sempre.

Questa proprietà può risultare molto interessante nel momento in cui si cerca di rafforzare la formulazione del modello, in quanto può essere utilizzata per ricercare delle *cover inequalities* [19].

Facendo sempre riferimento a [19], scriviamo nuovamente il vincolo (3.11) nella seguente forma:

$$\sum_{i=1}^n w_i x_i \leq k_j^C(t) + M_j(t) \quad \forall j \in \mathcal{J}, t \in \mathcal{T},$$

con

$$\begin{cases} x_i = c_j^{f,f'}(t) & 1 \leq i \leq m \\ x_i = q_j(t) & m+1 \leq i \leq n \end{cases} \quad \begin{cases} w_i = 1 & 1 \leq i \leq m \\ w_i = M_j(t) & m+1 \leq i \leq n \end{cases}$$

Dato  $N = \{1, \dots, n\}$ , definiamo una *cover* un sottoinsieme  $C \subset N$  tale per cui  $\sum_{i \in C} w_i > k_j^C(t) + M_j(t)$ . Poiché è impossibile avere tutte le variabili appartenenti all'insieme  $C$  uguali a 1 allo stesso istante e mantenere l'ammissibilità, la seguente disequazione risulta essere valida per il problema:

$$\sum_{i \in C} x_i \leq |C| - 1$$

Tale disequazione prende il nome di *cover inequality*. Lo stesso vale anche per il vincolo ( $\diamond$ ). Come mostreremo nel Capitolo 6, questa osservazione ci ha portato ad implementare un algoritmo che ci consentisse di determinare, nel caso esistessero, delle *cover inequalities* con il fine di rafforzare la formulazione del problema.

## Capitolo 5

# Formulazione equivalente dei vincoli di traffico

Le proprietà evidenziate precedentemente e le semplificazioni che caratterizzano la formulazione del modello in analisi ci hanno consentito di determinare una formulazione equivalente delle variabili  $c_j^{f'}(t)$  definite nel Paragrafo 3.2.3, attraverso dei vincoli che, come vedremo, consentono di rafforzare la qualità della formulazione.

Per ricavare questa nuova formulazione, siamo partiti dallo studio dei settori dell'areospazio in cui si verifica la condizione  $M_j(t) > k_j^C(t)$ , dove ricordiamo che  $M_j(t)$  indica il massimo numero di situazioni critiche registrabili al tempo  $t$  nel settore  $j$ , mentre  $k_j^C(t)$  indica il numero massimo di situazioni critiche monitorabili da un controllore di volo all'istante  $t$  nel settore  $j$  in presenza di capacità aggiuntiva.

Ricordiamo inoltre che il parametro  $M_j(t)$  è definito per ogni istante di tempo, mentre  $k_j^C(t)$  assume valore costante per ogni istante di tempo, ma cambia da settore a settore. Tali parametri sono noti e vengono determinati sulla base dei tempi relativi all'attraversamento dei settori dei vari aeromobili.

Nel modello alla base del nostro lavoro [6], il vincolo che controlla l'eventuale



aumento di capacità di un settore  $j$  è il (3.11):

$$\sum_{(f,f') \in \mathcal{C}_j} c_j^{ff'} \leq k_j^C(t) + M_j(t)(1 - q_j(t)) \quad \forall j \in \mathcal{J}, t \in \mathcal{T}$$

Come descritto in precedenza, tale vincolo stabilisce che se la variabile  $q_j(t) = 1$ , allora all'istante  $t$  il primo membro della disequazione (ovvero il numero totale delle situazioni critiche registrate al tempo  $t$ ) deve essere minore o uguale a  $k_j^C(t)$ .

L'idea che abbiamo seguito per procedere nel nostro lavoro verte proprio su questa relazione. In particolare, se si verificasse la condizione  $M_j(t) > k_j^C(t)$ , allora si avrebbe che il numero totale delle coppie di volo che all'istante  $t$  si possono trovare in una posizione critica è superiore al massimo numero di situazioni critiche monitorabili da un controllore al tempo  $t$ , in presenza di capacità aggiuntiva. Dunque se all'istante  $t$  si avesse  $q_j(t) = 1$ , ovvero se si aumentasse la capacità del settore  $j$  all'istante  $t$ , questo implicherebbe che a tale istante non tutti i voli considerati si potrebbero trovare all'interno del settore in esame, poiché altrimenti le condizioni di sicurezza non sarebbero rispettate.

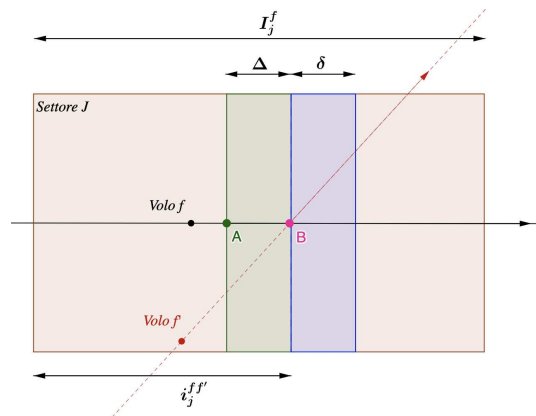
## 5.1 Posizioni e situazioni critiche

Per poter procedere nella trattazione, è importante capire cosa significa per una coppia di voli  $f$  e  $f'$  trovarsi in una posizione critica. Abbiamo visto come i vincoli (3.7a) – (3.10d) del modello in esame servano proprio a monitorare la posizione dei due voli nei possibili istanti critici, ovvero negli istanti  $t \in \tau_j^{ff'}$ , controllando se i due areomobili in considerazione si trovino in una delle seguenti configurazioni:

- ( $\alpha$ ) all'istante di tempo considerato entrambi i voli hanno superato il punto di incrocio delle traiettorie da poco tempo. Ovvero, i due voli  $f$ ,  $f'$  si trovano dopo il punto di incrocio delle traiettorie all'istante  $t$  ma non lo avevano superato al tempo  $t - \delta_j$ ;

- ( $\beta$ ) all'istante di tempo considerato un volo ha superato il punto di incrocio delle traiettorie da poco tempo mentre l'altro deve ancora raggiungere l'intersezione delle rotte ma oltrepasserà l'incrocio a breve. Ovvero, all'istante  $t$  il volo  $f$  (risp.  $f'$ ) si trova dopo il punto di incrocio delle traiettorie ma non lo aveva superato al tempo  $t - \delta_j$ , mentre il volo  $f'$  (risp.  $f$ ) si trova prima dell'incrocio ma lo avrà superato al tempo  $t + \Delta_j$ ;
- ( $\gamma$ ) all'istante di tempo considerato i voli si trovano in punto precedente all'intersezione delle rotte ma supereranno l'incrocio a breve. Ovvero, i voli  $f, f'$  si trovano prima del punto di incrocio delle traiettorie ma lo avranno superato al tempo  $t + \Delta_j$ .

I controlli servono dunque a verificare se la coppia di aereomobili  $(f, f')$  si trova all'interno dell'area critica delimitata dai parametri  $\Delta_j$  e  $\delta_j$ , evidenziata nella Figura 5.1.



**Figura 5.1** : Area Critica

Sottolineiamo come solo quando entrambi i voli si trovano in una delle tre configurazioni si registra effettivamente una situazione critica.

Vediamo meglio cosa significa per due voli trovarsi in una situazione critica. Ricordiamo che, per ogni settore  $j$  e per ogni coppia di voli  $(f, f') \in C_j$

conosciamo:

$$\left\{ \begin{array}{l} i_j^{ff'} = \text{unità di tempo impiegate dal volo } f \text{ per raggiungere punto di incrocio con il volo } f', \\ i_j^{f'f} = \text{unità di tempo impiegate dal volo } f' \text{ per raggiungere punto di incrocio con il volo } f, \\ I_j^f = \text{unità di tempo che il volo } f \text{ impiega per attraversare il settore } j, \\ I_j^{f'} = \text{unità di tempo che il volo } f' \text{ impiega per attraversare il settore } j, \\ \Delta_j + \delta_j = \text{ampiezza dell'area critica.} \end{array} \right.$$

Poniamo per comodità  $\Delta_j = \Delta = 1$  e  $\delta_j = \delta = 1$ , e consideriamo un solo volo  $f$ . Supponiamo inoltre che  $\forall j \in \mathcal{J}, \forall (f, f') \in \mathcal{C}_j$ :

$$\left\{ \begin{array}{l} \Delta \leq i_j^{ff'} - 1 \\ \Delta \leq i_j^{f'f} - 1 \\ \delta \leq I_j^f - i_j^{ff'} - 1 \\ \delta \leq I_j^{f'} - i_j^{f'f} - 1 \end{array} \right.$$

Finché non specificato diversamente, tali ipotesi rimarranno vere. Chiaramente le osservazioni che seguiranno riguarderanno anche il volo  $f'$ .

Sempre in riferimento alla Figura 5.1, poiché lavoriamo con intervalli di tempo discreti, i controlli dei vincoli (3.7a) – (3.10d) servono a verificare se un volo  $f$  si trovi in una delle due posizioni A o B all'interno dell'area critica. Nel dettaglio, dato un settore  $j$  ed un dato istante di tempo  $t$ , il volo  $f$  può trovarsi:

- **Posizione A:** il volo  $f$  all'istante  $t$  non ha ancora superato il punto di incrocio, ma lo avrà superato all'istante  $t + \Delta$ . Il che significa che all'istante  $t + 1$  si troverà sul punto di incrocio, e all'istante  $t - (i_j^{ff'} - \Delta) = t - i_j^{ff'} + 1$  si trovava all'inizio del settore  $j$ .

I controlli dei vincoli (3.7a) – (3.10d) che si occupano di questa verifica sono quelli relativi al volo  $f$  presenti nei vincoli (3.7) – (3.8):

$$\begin{array}{l} y_j^f(t) + y_j^f(t + I_j^f - i_j^{ff'}) + y_j^f(t + \Delta_j - i_j^{ff'}); \quad \Delta_j \leq i_j^{ff'} - 1 \\ y_j^f(t) + y_j^f(t + I_j^f - i_j^{ff'}); \quad \Delta_j \geq i_j^{ff'} \end{array}$$

Notiamo infatti che, se il volo  $f$  si trova in A, allora si avrà:

$$y_j^f(t) = y_j^f(t + I_j^f - i_j^{ff'}) = y_j^f(t + \Delta_j - i_j^{ff'}) = 1,$$

e dunque il controllo registrerebbe  $f$  in posizione critica. Se il volo  $f$  si trovasse in una posizione precedente, allora si avrebbe:

$$\begin{aligned} y_j^f(t) &= y_j^f(t + I_j^f - i_j^{ff'}) = 1 \\ y_j^f(t + \Delta_j - i_j^{ff'}) &= 0 \end{aligned}$$

e dunque il controllo non registrerebbe  $f$  in posizione critica. Se il volo  $f$  si trovasse in una posizione successiva, allora si avrebbe:

$$\begin{aligned} y_j^f(t) &= y_j^f(t + \Delta_j - i_j^{ff'}) = 1 \\ y_j^f(t + I_j^f - i_j^{ff'}) &= 0 \end{aligned}$$

e dunque il controllo non registrerebbe  $f$  in posizione critica.

- **Posizione B:** il volo  $f$  all'istante  $t$  si trova nel punto di incrocio. Il che significa che all'istante  $t - \Delta$  non lo aveva ancora superato, all'istante  $t + \delta$  lo avrà già superato, e all'istante  $t - i_j^{ff'}$  si trovava all'inizio del settore  $j$ . I controlli dei vincoli (3.7a) – (3.10d) che si occupano di questa verifica sono quelli relativi al volo  $f$  presenti nei vincoli (3.9) – (3.10):

$$\begin{aligned} &y_j^f(t) + y_j^f(t - i_j^{ff'}) + y_j^f(t + I_j^f - i_j^{ff'} - \delta_j); \quad \delta_j \leq I_j^f - i_j^{ff'} - 1 \\ &y_j^f(t) + y_j^f(t - i_j^{ff'}); \quad \delta_j \geq I_j^f - i_j^{ff'} \end{aligned}$$

Notiamo infatti che, se il volo  $f$  si trova in B, allora si avrà:

$$y_j^f(t) = y_j^f(t - i_j^{ff'}) = y_j^f(t + I_j^f - i_j^{ff'} - \delta_j) = 1,$$

e dunque il controllo registrerebbe  $f$  in posizione critica. Se il volo  $f$

si trovasse in una posizione precedente, allora si avrebbe:

$$\begin{aligned} y_j^f(t) &= y_j^f(t + I_j^f - i_j^{ff'} - \delta_j) = 1 \\ y_j^f(t - i_j^{ff'}) &= 0 \end{aligned}$$

e dunque il controllo non registrerebbe  $f$  in posizione critica. Se il volo  $f$  si trovasse in una posizione successiva, allora si avrebbe:

$$\begin{aligned} y_j^f(t) &= y_j^f(t - i_j^{ff'}) = 1 \\ y_j^f(t + I_j^f - i_j^{ff'} - \delta_j) &= 0 \end{aligned}$$

e dunque il controllo non registrerebbe  $f$  in posizione critica.

È facile controllare che per un singolo volo  $f$  non possono risultare verificati entrambi i controlli ad uno stesso istante  $t$ . Dunque se i controlli per la posizione A registrassero il volo  $f$  in posizione critica, quelli per la posizione B non lo farebbero, e viceversa.

Chiaramente facendo variare l'ampiezza dell'area critica possono variare le posizioni critiche assumibili dal volo  $f$ . Ad esempio, se ponessimo  $\Delta = 2$ , ci sarebbero due posizioni critiche prima del punto di incrocio.

Ricordiamo inoltre che, per come sono definiti i controlli dei vincoli 3.7a – 3.10d, le posizioni che ci interessano sono quelle che precedono il punto di incrocio e il punto di incrocio stesso, non ci interessano invece posizioni successive.

A seguito di quanto detto fino ad ora, possiamo dare una definizione formale di cosa significa per una coppia di voli  $(f, f')$  trovarsi in una situazione critica.

**Definizione 5.1. Posizione Critica**

*Dato un settore  $j$ , un volo  $f$  ed un istante di tempo  $t$ , diciamo che il volo  $f$  si trova in posizione critica all'istante  $t$  nel settore  $j$  se una delle seguenti condizioni risulta vera:*

- Posizione A:  $y_j^f(t) = y_j^f(t + I_j^f - i_j^{ff'}) = y_j^f(t + \Delta_j - i_j^{ff'}) = 1$
- Posizione B:  $y_j^f(t) = y_j^f(t - i_j^{ff'}) = y_j^f(t + I_j^f - i_j^{ff'} - \delta_j) = 1$

### Definizione 5.2. *Situazione Critica*

Dato un settore  $j$ , una coppia di voli  $(f, f') \in \mathcal{C}_j$  ed un istante di tempo  $t$ , diciamo che la coppia di voli  $(f, f')$  identifica una situazione critica all'istante  $t$  nel settore  $j$  se una delle seguenti condizioni risulta vera:

- 1) all'istante  $t$  entrambi i voli si trovano in Posizione A;
- 2) all'istante  $t$  un volo si trova in Posizione A e l'altro volo si trova in Posizione B.

## 5.2 Monitoraggio del traffico e condizioni di sicurezza: controlli equivalenti

### 5.2.1 Accesso ai settori e posizioni critiche

Sulla base delle osservazioni fatte, e sfruttando ancora la struttura semplificata della formulazione, vogliamo definire dei nuovi controlli che ci consentano di determinare se una coppia di voli identifichi una situazione critica o meno. Per questo motivo, ricaviamo l'istante di ingresso di un volo  $f$  all'interno del settore in esame. Ovvero, determiniamo a che istante un volo  $f$  si possa trovare nella Posizione I (Figura 5.2).

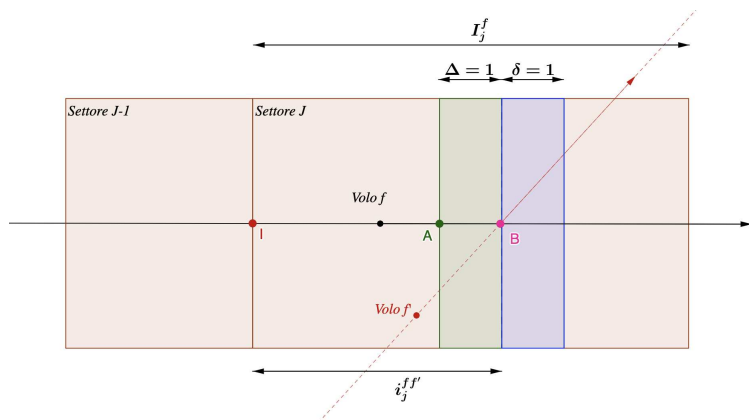


Figura 5.2 : Posizioni critiche e accesso ai settori

Ricordiamo che stiamo supponendo  $\forall j \in \mathcal{J}, \forall (f, f') \in C_j$ :

$$\begin{cases} \Delta = \delta = 1 \\ \Delta \leq i_j^{ff'} - 1 \\ \Delta \leq i_j^{f'f} - 1 \\ \delta \leq I_j^f - i_j^{ff'} - 1 \\ \delta \leq I_j^{f'} - i_j^{f'f} - 1 \end{cases}$$

Con riferimento alla Definizione 5.1 e alla Figura 5.2, si ha che:

- Se all'istante  $t$  il volo  $f$  si trova in Posizione A, all'istante  $t - i_j^{ff'} + \Delta = t - i_j^{ff'} + 1$  il volo  $f$  entrava nel settore  $j$  (Posizione I). In aggiunta, all'istante  $t - i_j^{ff'} + \Delta - 1$  era ancora nel settore precedente al settore  $j$ . Ovvero:

$$\begin{aligned} y_{j-1}^f(t - i_j^{ff'} + \Delta - 1) &= 1 \\ y_{j-1}^f(t - i_j^{ff'} + \Delta) &= 0 \\ y_j^f(t - i_j^{ff'} + \Delta - 1) &= 0 \\ y_j^f(t - i_j^{ff'} + \Delta) &= 1 \end{aligned}$$

e quindi:

$$y_{j-1}^f(t - i_j^{ff'} + \Delta - 1) - y_{j-1}^f(t - i_j^{ff'} + \Delta) = 1$$

- Se all'istante  $t$  il volo  $f$  si trova in Posizione B, all'istante  $t - i_j^{ff'}$  il volo  $f$  entrava nel settore  $j$  (Posizione I). In aggiunta, all'istante  $t - i_j^{ff'} - 1$  era ancora nel settore precedente al settore  $j$ . Ovvero:

$$\begin{aligned} y_{j-1}^f(t - i_j^{ff'} - 1) &= 1 \\ y_{j-1}^f(t - i_j^{ff'}) &= 0 \\ y_j^f(t - i_j^{ff'} - 1) &= 0 \\ y_j^f(t - i_j^{ff'}) &= 1 \end{aligned}$$

e quindi:

$$y_{j-1}^f(t - i_j^{ff'} - 1) - y_{j-1}^f(t - i_j^{ff'}) = 1$$

dove per comodità con  $j - 1$  indichiamo il settore precedente al settore  $j$  nella traiettoria del volo  $f$ .

Questo significa che se all'istante  $t$  il volo  $f$  si trova in una posizione critica allora vale:

$$\left[ y_{j-1}^f(t - i_j^{ff'} + \Delta - 1) - y_{j-1}^f(t - i_j^{ff'} + \Delta) \right] + \left[ y_{j-1}^f(t - i_j^{ff'} - 1) - y_{j-1}^f(t - i_j^{ff'}) \right] = 1$$

Dunque, se consideriamo una coppia di voli  $(f, f')$  all'istante  $t$ , se essi identificano una situazione critica allora vale:

$$\left\{ \begin{aligned} & \left[ y_{j-1}^f(t - i_j^{ff'} + \Delta - 1) - y_{j-1}^f(t - i_j^{ff'} + \Delta) \right] + \left[ y_{j-1}^f(t - i_j^{ff'} - 1) - y_{j-1}^f(t - i_j^{ff'}) \right] \\ & \left[ y_{j-1}^{f'}(t - i_j^{f'f} + \Delta - 1) - y_{j-1}^{f'}(t - i_j^{f'f} + \Delta) \right] + \left[ y_{j-1}^{f'}(t - i_j^{f'f} - 1) - y_{j-1}^{f'}(t - i_j^{f'f}) \right] \end{aligned} \right\} \\ = 2$$

A questo punto è importante capire anche cosa succede a questi controlli quando i voli non si trovano in una situazione critica. Per questo motivo, dimostriamo una serie di risultati utili, a partire da alcune proprietà che caratterizzano le variabili  $y_j^f(t)$ .

Nei risultati che seguono, escludiamo al momento che il punto di incrocio si trovi per uno dei due voli (o per entrambi) nel primo settore della sua rotta, e non consideriamo il comportamento delle variabili  $y_j^f(t)$  nel primo settore della rotta del volo  $f$ . La notazione utilizzata è quella descritta nel Paragrafo 3.2.2

**Proposizione 5.1. Proprietà P1**

*Consideriamo un volo  $f$ , un settore  $j$  e un istante di tempo  $t$  ammissibile. Vale la seguente relazione:*

$$y_j^f(t) = 1 \implies y_{j'}^f(t) = 0, \quad j = P(f, i), \quad j' = P(f, i'), \quad \forall i' \neq i, \quad 2 < i, i' < N_f$$



Dimostrazione:

Per la relazione tra le variabili  $x$  e  $y$ , si ha che:

$$y_j^f(t) = x_j^f(t) - x_{j+1}^f(t) = 1 \implies \begin{cases} x_j^f(t) = 1 \\ x_{j+1}^f(t) = 0 \end{cases}$$

Supponiamo ora  $i' = i - 1$ , e dunque  $j'$  sia il settore precedente a  $j$  nella traiettoria del volo  $f$ . Si ha:

$$y_{j'}^f(t) = x_{j'}^f(t) - x_j^f(t) = x_{j'}^f(t) - 1,$$

ma poiché  $y$  è una variabile binaria:

$$x_{j'}^f(t) = 1 \implies y_{j'}^f(t) = 0.$$

Procediamo per induzione su  $i$ . Supponiamo valga:

$$y_j^f(t) = 1 \implies y_{j'}^f(t) = 0,$$

dove  $j = P(f, i)$  e  $j' = P(f, i')$  per ogni  $i'$  t.c.  $1 < k \leq i' < i$ , e mostriamo che vale:

$$y_j^f(t) = 1 \implies y_{j'}^f(t) = 0,$$

dove  $j = P(f, i)$ ,  $j' = P(f, k - 1)$  e chiamiamo  $\bar{j} = P(f, k)$ ,  $\bar{j} + 1 = P(f, k + 1)$ . Si ha:

$$y_{j'}^f(t) = x_{j'}^f(t) - x_{\bar{j}}^f(t),$$

ma per ipotesi induttiva abbiamo:

$$y_{\bar{j}}^f(t) = x_{\bar{j}}^f(t) - x_{\bar{j}+1}^f(t) = 0 \implies \begin{cases} x_{\bar{j}}^f(t) = 1 \\ x_{\bar{j}+1}^f(t) = 1 \end{cases}$$

per cui:

$$y_{j'}^f(t) = x_{j'}^f(t) - x_{\bar{j}}^f(t) = x_{j'}^f(t) - 1,$$

ma poiché  $y$  è variabile binaria, si ha:

$$x_{j'}^f(t) = 1 \implies y_{j'}^f(t) = 0.$$

Consideriamo ora il settore successivo a  $j$  nella traiettoria del volo  $f$ , ovvero  $j + 1$ . Si ha:

$$y_{j+1}^f(t) = x_{j+1}^f(t) - x_{j+2}^f(t) = 0 - x_{j+2}^f(t),$$

ma poiché  $y$  è una variabile binaria:

$$x_{j+2}^f(t) = 0 \implies y_{j+1}^f(t) = 0.$$

A questo punto procediamo di nuovo per induzione su  $i$ . Supponiamo valga:

$$y_j^f(t) = 1 \implies y_{j'}^f(t) = 0,$$

dove  $j = P(f, i)$  e  $j' = P(f, i')$  per ogni  $i'$  t.c.  $i < i' \leq k < N_f$ , e mostriamo che vale:

$$y_j^f(t) = 1 \implies y_{j'}^f(t) = 0,$$

dove  $j = P(f, i)$ ,  $j' = P(f, k + 1)$  e chiamiamo  $\bar{j} = P(f, k)$ ,  $\bar{j} + 1 = P(f, k + 2)$ ,  $\bar{j} - 1 = P(f, k - 1)$ . Si ha:

$$y_{j'}^f(t) = x_{j'}^f(t) - x_{\bar{j}+1}^f(t),$$

ma per ipotesi induttiva abbiamo:

$$y_{\bar{j}-1}^f(t) = x_{\bar{j}-1}^f(t) - x_{\bar{j}}^f(t) = 0 \implies \begin{cases} x_{\bar{j}-1}^f(t) = 0 \\ x_{\bar{j}}^f(t) = 0 \end{cases}$$

$$y_{\bar{j}}^f(t) = x_{\bar{j}}^f(t) - x_{\bar{j}'}^f(t) = 0 \implies \begin{cases} x_{\bar{j}}^f(t) = 0 \\ x_{\bar{j}'}^f(t) = 0 \end{cases}$$

per cui:

$$y_{j'}^f(t) = x_{j'}^f(t) - x_{\bar{j}+1}^f(t) = 0 - x_{\bar{j}+1}^f(t)$$

ma poiché  $y$  è variabile binaria, si ha:

$$x_{\bar{j}+1}^f(t) = 0 \implies y_{j'}^f(t) = 0.$$

□

**Proposizione 5.2. Proprietà P2**

*Dato un volo  $f$ , un settore  $j$  e un istante di tempo  $t$  ammissibile, supponiamo valgano le seguenti condizioni:*

$$(i) \quad y_j^f(t-1) = 0$$

$$(ii) \quad y_j^f(t) = 1$$

*Allora vale anche:*

$$y_{j-1}^f(t-1) = 1,$$

*dove con  $j-1$  indichiamo il settore precedente al settore  $j$  nella rotta del volo  $f$ .*

Dimostrazione:

Per la proprietà P1:

$$y_j^f(t) = 1 \implies y_{j'}^f(t) = 0,$$

dove  $j = P(f, i)$  e  $j' = P(f, i')$ , con  $2 < i' < i$ . Quindi in particolare, per  $i' = i-1$ :

$$y_{j-1}^f(t) = 0 \quad (iii).$$

Dunque abbiamo:

$$\begin{aligned}
x_{j+1}^f(t-1) &\leq x_{j+1}^f(t) \quad (\cdot) \\
y_j^f(t-1) &= x_j^f(t-1) - x_{j+1}^f(t-1) = 0 \quad (i) \\
y_j^f(t) &= x_j^f(t) - x_{j+1}^f(t) = 1 \quad (ii) \\
y_{j-1}^f(t) &= x_{j-1}^f(t) - x_j^f(t) = 0 \quad (iii)
\end{aligned}$$

La proprietà (ii) implica:

$$\begin{cases} x_j^f(t) = 1 \\ x_{j+1}^f(t) = 0 \end{cases}$$

Per cui, per la proprietà (iii) si avrà:

$$\begin{cases} x_{j-1}^f(t) = 1 \\ x_j^f(t) = 1 \end{cases}$$

Per  $(\cdot) + (ii)$ , per la proprietà (i) si avrà:

$$\begin{cases} x_j^f(t-1) = 0 \\ x_{j+1}^f(t-1) = 0 \end{cases}$$

Si ha dunque:

$$\begin{aligned}
y_{j-1}^f(t-1) &= x_{j-1}^f(t-1) - x_j^f(t-1) \\
&= x_{j-1}^f(t-1) - 0 \\
&= x_{j-1}^f(t-1)
\end{aligned}$$

Per i vincoli di connettività, si ha inoltre:

$$y_{j-1}^f(t-1) = x_{j-1}^f(t-1) = x_j^f(t-1 + I_{j-1}^f)$$

- Se  $I_{j-1}^f = 1$ :

$$y_{j-1}^f(t-1) = x_{j-1}^f(t-1) = x_j^f(t) = 1$$

- Se  $I_{j-1}^f > 1$ :

$$x_j^f(t-1) \leq x_j^f(t) \leq x_j^f(t-1 + I_{j-1}^f)$$

e poiché  $x_j^f(t) = 1$ :

$$x_j^f(t-1 + I_{j-1}^f) = 1 \implies y_{j-1}^f(t-1) = 1$$

□

**Proposizione 5.3. Proprietà P3**

Sia dato un volo  $f$ , un settore  $j$  ed un istante di tempo  $t$  ammissibile. Supponiamo valgano le seguenti condizioni:

- (i)  $y_j^f(t-1) = 1$
- (ii)  $y_j^f(t) = 0$

Allora vale anche:

$$y_j^f(t+1) = 0$$

Dimostrazione:

Per le relazioni tra le variabili, per la condizione (i) si ha:

$$y_j^f(t-1) = x_j^f(t-1) - x_{j+1}^f(t-1) = 1 \implies \begin{cases} x_j^f(t-1) = 1 \\ x_{j+1}^f(t-1) = 0 \end{cases}$$

Inoltre, per i vincoli di connettività si ha:

$$\begin{cases} x_j^f(t-1) \leq x_j^f(t) \\ x_j^f(t-1) = 1 \end{cases} \implies x_j^f(t) = 1.$$

Sempre per i vincoli di connettività, questo implica:

$$\begin{cases} x_j^f(t) \leq x_j^f(t+1) \\ x_j^f(t) = 1 \end{cases} \implies x_j^f(t+1) = 1.$$

A questo punto, per la condizione (ii) si ha:

$$y_j^f(t) = x_j^f(t) - x_{j+1}^f(t) = 0 \implies \begin{cases} x_j^f(t) = 1 \\ x_{j+1}^f(t) = 1, \end{cases}$$

e sempre per i vincoli di connettività:

$$\begin{cases} x_{j+1}^f(t) \leq x_{j+1}^f(t+1) \\ x_{j+1}^f(t) = 1 \end{cases} \implies x_{j+1}^f(t+1) = 1.$$

Consideriamo ora  $y_j^f(t+1)$ . Per la relazione tra le variabili si ha:

$$\begin{aligned} y_j^f(t+1) &= x_j^f(t+1) - x_{j+1}^f(t+1) \\ &= 1 - 1 = 0. \end{aligned}$$

□

Sfruttando queste proprietà, dimostriamo ora il seguente risultato:

**Teorema 5.1.** *Sia dato un settore  $\bar{j}$  e una coppia di voli  $(f, f') \in C_{\bar{j}}$  in potenziale conflitto.*

*Se la coppia di voli  $(f, f')$  all'istante  $t$  identifica una situazione critica, allora*

vale:

$$1) \sum_{\substack{P(f, \bar{i})=\bar{j}, P(f, i)=j \\ 2 < i < \bar{i}, t \in \tau_j^{ff'}}} \left\{ \left[ y_j^f(t - i_j^{ff'} + \Delta - 1) - y_j^f(t - i_j^{ff'} + \Delta) \right] + \left[ y_j^f(t - i_j^{ff'} - 1) - y_j^f(t - i_j^{ff'}) \right] \right\} = 1$$

$$2) \sum_{\substack{P(f', \bar{i})=\bar{j}, P(f', i)=j \\ 2 < i < \bar{i}, t \in \tau_j^{f'f}}} \left\{ \left[ y_j^{f'}(t - i_j^{f'f} + \Delta - 1) - y_j^{f'}(t - i_j^{f'f} + \Delta) \right] + \left[ y_j^{f'}(t - i_j^{f'f} - 1) - y_j^{f'}(t - i_j^{f'f}) \right] \right\} = 1$$

Dimostrazione:

Dimostriamo che vale 1), in quanto la 2) si dimostra analogamente.

Indichiamo con  $j - 1$  il settore precedente a  $\bar{j}$  nella traiettoria del volo  $f$ .

Dimostriamo che:

- (a): se il volo  $f$  all'istante  $t$  si trova in Posizione A, allora abbiamo:

- $\left[ y_{j-1}^f(t - i_j^{ff'} + \Delta - 1) - y_{j-1}^f(t - i_j^{ff'} + \Delta) \right] = 1$

- $\left[ y_{j-1}^f(t - i_j^{ff'} - 1) - y_{j-1}^f(t - i_j^{ff'}) \right] = 0$

- Tutti gli altri termini si annullano o sono pari a zero.

- (b): se il volo  $f$  all'istante  $t$  si trova in Posizione B, allora abbiamo:

- $\left[ y_{j-1}^f(t - i_j^{ff'} + \Delta - 1) - y_{j-1}^f(t - i_j^{ff'} + \Delta) \right] = 0$

- $\left[ y_{j-1}^f(t - i_j^{ff'} - 1) - y_{j-1}^f(t - i_j^{ff'}) \right] = 1$

- Tutti gli altri termini si annullano o sono pari a zero.

- **(c)**: se il volo  $f$  all'istante  $t$  si trova in qualsiasi altra posizione, allora abbiamo:

$$\sum_{\substack{P(f,\bar{i})=\bar{j}, P(f,i)=j \\ 2 < i < \bar{i}, \\ t \in \tau_j^{ff'}}} \left\{ \left[ y_j^f(t - i_j^{ff'} + \Delta - 1) - y_j^f(t - i_j^{ff'} + \Delta) \right] + \left[ y_j^f(t - i_j^{ff'} - 1) - y_j^f(t - i_j^{ff'}) \right] \right\} = 0$$

- **(a)**: Supponiamo che all'istante  $t$  il volo  $f$  si trovi in Posizione A. Facendo riferimento alla Figura 5.2, si ha che:

$$\begin{aligned} (i) \quad & y_j^f(t - i_j^{ff'} + \Delta - 1) = 0 \\ (ii) \quad & y_j^f(t - i_j^{ff'} + \Delta) = 1 \end{aligned}$$

Mostriamo innanzitutto che valgono:

$$\begin{cases} y_{j-1}^f(t - i_j^{ff'} + \Delta) = 0 & (iii) \\ y_{j-1}^f(t - i_j^{ff'} + \Delta - 1) = 1 & (iv) \end{cases}$$

Per la proprietà P1:

$$y_j^f(t - i_j^{ff'} + \Delta) = 1 \implies y_{j'}^f(t - i_{j'}^{ff'} + \Delta) = 0,$$

dove  $j = P(f, i)$  e  $j' = P(f, i')$ , con  $2 < i' < i$ .

Quindi in particolare, per  $i' = i - 1$ :

$$y_{j-1}^f(t - i_j^{ff'} + \Delta) = 0 \quad (iii).$$

Dunque abbiamo:

$$\begin{cases} t - i_j^{ff'} + \Delta - 1 \leq t - i_j^{ff'} + \Delta & (\cdot) \\ y_j^f(t - i_j^{ff'} + \Delta - 1) = 0 & (i) \\ y_j^f(t - i_j^{ff'} + \Delta) = 1 & (ii) \end{cases} \xrightarrow{\mathbf{P2}} y_{j-1}^f(t - i_j^{ff'} + \Delta - 1) = 1 \quad (iv)$$



Le seguenti relazioni risultano quindi valide:

$$y_j^f(t - i_j^{ff'} + \Delta) = 1 \quad (ii)$$

$$y_{j-1}^f(t - i_j^{ff'} + \Delta) = 0 \quad (iii)$$

$$y_{j-1}^f(t - i_j^{ff'} + \Delta - 1) = 1 \quad (iv)$$

Da esse seguono le seguenti implicazioni:

$$(ii) \xrightarrow{\mathbf{P1}} y_{j'}^f(t - i_j^{ff'} + \Delta) = 0 \quad \forall 1 < i' < i, \text{ con } j = P(f, i), j' = P(f, i')$$

$$(iv) \xrightarrow{\mathbf{P1}} y_{j'}^f(t - i_j^{ff'} + \Delta - 1) = 0 \quad \forall 1 < i' < i, \text{ con } j - 1 = P(f, i), j' = P(f, i')$$

Poiché sotto le nostre ipotesi  $\Delta = 1 \implies t - i_j^{ff'} + \Delta - 1 = t - i_j^{ff'}$ , e dunque vale:

$$y_{j-1}^f(t - i_j^{ff'}) = 1 \quad (\star)$$

Per cui, vale inoltre:

$$(\star) \xrightarrow{\mathbf{P1}} y_{j'}^f(t - i_j^{ff'}) = 0 \quad \forall 2 < i' < i, \text{ con } j - 1 = P(f, i), j' = P(f, i')$$

A questo punto abbiamo:

$$y_{j-1}^f(t - i_j^{ff'} + \Delta) = 0 = y_{j-1}^f(t - i_j^{ff'} + 1) \quad (iii)$$

$$y_{j-1}^f(t - i_j^{ff'}) = 1 \quad (\star)$$

- Se  $I_{j-1}^f = 1 \implies$  passo un solo istante in  $j - 1$ :

$$y_{j-1}^f(t - i_j^{ff'} - 1) = 0 \quad (\star\star)$$

$$y_{j-2}^f(t - i_j^{ff'} - 1) = 1 \quad (\star\star\star)$$

Per cui si avrà:

$$\begin{aligned}
(\star) & \xrightarrow{\mathbf{P1}} y_{j-2}^f(t - i_j^{ff'}) = 0 \\
(\star\star\star) & \xrightarrow{\mathbf{P1}} y_{j'}^f(t - i_j^{ff'} - 1) = 0 \quad \forall 2 < i' < i, \text{ con } j - 2 = P(f, i), j' = P(f, i')
\end{aligned}$$

Per cui risulta:

$$\begin{aligned}
& \left[ y_{j-1}^f(t - i_j^{ff'} - 1) - y_{j-1}^f(t - i_j^{ff'}) \right] + \left[ y_{j-2}^f(t - i_j^{ff'} - 1) - y_{j-2}^f(t - i_j^{ff'}) \right] = \\
& = \left[ 0 - 1 \right] + \left[ 1 - 0 \right] = 0
\end{aligned}$$

E quindi, nella sommatoria:

$$\sum_{\substack{P(f, \bar{i}) = \bar{j}, P(f, i) = j \\ 2 < i < \bar{i}, \\ t \in \tau_j^{ff'}}} \left\{ \left[ y_j^f(t - i_j^{ff'} + \Delta - 1) - y_j^f(t - i_j^{ff'} + \Delta) \right] + \left[ y_j^f(t - i_j^{ff'} - 1) - y_j^f(t - i_j^{ff'}) \right] \right\}$$

si avrà:

$$\begin{aligned}
& \sum_{\substack{P(f, \bar{i}) = \bar{j}, P(f, i) = j \\ 2 < i < \bar{i} - 1, t \in \tau_j^{ff'}}} \left\{ \left[ y_j^f(t - i_j^{ff'} + \Delta - 1) - y_j^f(t - i_j^{ff'} + \Delta) \right] + \left[ y_j^f(t - i_j^{ff'} - 1) - y_j^f(t - i_j^{ff'}) \right] \right\} \\
& + \left[ y_{j-1}^f(t - i_j^{ff'} + \Delta - 1) - y_{j-1}^f(t - i_j^{ff'} + \Delta) \right] = \\
& 0 + \left[ 1 - 0 \right] = 1.
\end{aligned}$$

- Se  $I_{j-1}^f > 1 \implies$  passo almeno un altro istante in  $j - 1$ :

$$y_{j-1}^f(t - i_j^{ff'} - 1) = 1 \quad (\star\star)$$

Per cui si avrà:

$$(\star\star) \xrightarrow{\mathbf{P1}} y_{j'}^f(t - i_j^{ff'} - 1) = 0 \quad \forall 2 < i' < i, \text{ con } j - 1 = P(f, i), j' = P(f, i')$$

$$(\star\star) \implies [y_{j-1}^f(t - i_j^{ff'} - 1) - y_{j-1}^f(t - i_j^{ff'})] = [1 - 1] = 0$$

Per cui, nella sommatoria:

$$\sum_{\substack{P(f, \bar{i})=\bar{j}, P(f, i)=j \\ 2 < i < \bar{i}, \\ t \in \tau_j^{ff'}}} \left\{ \left[ y_j^f(t - i_j^{ff'} + \Delta - 1) - y_j^f(t - i_j^{ff'} + \Delta) \right] + \left[ y_j^f(t - i_j^{ff'} - 1) - y_j^f(t - i_j^{ff'}) \right] \right\}$$

si avrà:

$$\begin{aligned} \sum_{\substack{P(f, \bar{i})=\bar{j}, P(f, i)=j \\ 2 < i < \bar{i}-1, t \in \tau_j^{ff'}}} \left\{ \left[ y_j^f(t - i_j^{ff'} + \Delta - 1) - y_j^f(t - i_j^{ff'} + \Delta) \right] + \left[ y_j^f(t - i_j^{ff'} - 1) - y_j^f(t - i_j^{ff'}) \right] \right\} \\ + \left[ y_{j-1}^f(t - i_j^{ff'} + \Delta - 1) - y_{j-1}^f(t - i_j^{ff'} + \Delta) \right] = \\ 0 + [1 - 0] = 1 \end{aligned}$$

• **(b):** Supponiamo che all'istante  $t$  il volo  $f$  si trovi in Posizione B. Facendo riferimento alla Figura 5.2, si ha che:

$$(i) \quad y_j^f(t - i_j^{ff'} - 1) = 0$$

$$(ii) \quad y_j^f(t - i_j^{ff'}) = 1$$

$$(iii) \quad y_j^f(t - i_j^{ff'} + \Delta) = 1$$

Mostriamo innanzitutto che valgono le:

$$\begin{cases} y_{j-1}^f(t - i_j^{ff'}) = 0 & (iv) \\ y_{j-1}^f(t - i_j^{ff'} - 1) = 1 & (v) \end{cases}$$

Per la proprietà P1:

$$y_j^f(t - i_j^{ff'}) = 1 \implies y_{j'}^f(t - i_j^{ff'}) = 0,$$

dove  $j = P(f, i)$  e  $j' = P(f, i')$ , con  $2 < i' < i$ .

Quindi in particolare, per  $i' = i - 1$ :

$$y_{j-1}^f(t - i_j^{ff'}) = 0 \quad (iv).$$

Dunque abbiamo:

$$\begin{cases} t - i_j^{ff'} - 1 \leq t - i_j^{ff'} & (\cdot) \\ y_j^f(t - i_j^{ff'} - 1) = 0 & (i) \\ y_j^f(t - i_j^{ff'}) = 1 & (ii) \end{cases} \xrightarrow{\mathbf{P2}} y_{j-1}^f(t - i_j^{ff'} - 1) = 1 \quad (v)$$

Le seguenti relazioni risultano quindi valide:

$$\begin{aligned} y_j^f(t - i_j^{ff'}) &= 1 & (ii) \\ y_j^f(t - i_j^{ff'} + \Delta) &= 1 & (iii) \\ y_{j-1}^f(t - i_j^{ff'}) &= 0 & (iv) \\ y_{j-1}^f(t - i_j^{ff'} - 1) &= 1 & (v) \end{aligned}$$

Da esse seguono le seguenti implicazioni:

$$\begin{aligned} (ii) &\xrightarrow{\mathbf{P1}} y_{j'}^f(t - i_j^{ff'}) = 0 \quad \forall 2 < i' < i, \text{ con } j = P(f, i), j' = P(f, i') \\ (iii) &\xrightarrow{\mathbf{P1}} y_{j'}^f(t - i_j^{ff'} + \Delta) = 0 \quad \forall 2 < i' < i, \text{ con } j = P(f, i), j' = P(f, i') \\ (v) &\xrightarrow{\mathbf{P1}} y_{j'}^f(t - i_j^{ff'} - 1) = 0 \quad \forall 1 < i' < i, \text{ con } 2 - 1 = P(f, i), j' = P(f, i') \end{aligned}$$

Sotto le nostre ipotesi si ha:

$$\Delta = 1 \implies t - i_j^{ff'} + \Delta - 1 = t - i_j^{ff'}$$

quindi vale:

$$y_{j'}^f(t - i_j^{ff'} + \Delta - 1) = 0 \quad \forall 2 < i' < i, \text{ con } j = P(f, i), j' = P(f, i')$$

Per cui, nella sommatoria:

$$\sum_{\substack{P(f, \bar{i}) = \bar{j}, P(f, i) = j \\ 2 < i < \bar{i}, \\ t \in \tau_j^{ff'}}} \left\{ \left[ y_j^f(t - i_j^{ff'} + \Delta - 1) - y_j^f(t - i_j^{ff'} + \Delta) \right] + \left[ y_j^f(t - i_j^{ff'} - 1) - y_j^f(t - i_j^{ff'}) \right] \right\}$$

si avrà:

$$\begin{aligned} \sum_{\substack{P(f, \bar{i}) = \bar{j}, P(f, i) = j \\ 2 < i < \bar{i} - 1, t \in \tau_j^{ff'}}} \left\{ \left[ y_j^f(t - i_j^{ff'} + \Delta - 1) - y_j^f(t - i_j^{ff'} + \Delta) \right] + \left[ y_j^f(t - i_j^{ff'} - 1) - y_j^f(t - i_j^{ff'}) \right] \right\} \\ + \left[ y_{j-1}^f(t - i_j^{ff'} - 1) - y_{j-1}^f(t - i_j^{ff'}) \right] = \\ 0 + \left[ 1 - 0 \right] = 1. \end{aligned}$$

• **(c)**: Supponiamo che all'istante  $t$  il volo  $f$  si trovi in qualsiasi altra posizione, e distinguiamo i seguenti sottocasi.

◦ **(c1)**: Supponiamo che all'istante  $t$  il volo  $f$  si trovi dopo il punto di incrocio. Facendo riferimento alla Figura 5.2, si ha che:

$$\begin{aligned} (i) \quad & y_j^f(t - i_j^{ff'} + \Delta) = 1 \\ (ii) \quad & y_j^f(t - i_j^{ff'} + \Delta - 1) = 1 \\ (iii) \quad & y_j^f(t - i_j^{ff'}) = 1 \\ (iiii) \quad & y_j^f(t - i_j^{ff'} - 1) = 1 \end{aligned}$$

Per cui si ha:

- (i)  $\xrightarrow{\mathbf{P1}} y_{j'}^f(t - i_j^{ff'} + \Delta) = 0 \quad \forall 2 < i' < i, \text{ con } j = P(f, i), j' = P(f, i')$
- (ii)  $\xrightarrow{\mathbf{P1}} y_{j'}^f(t - i_j^{ff'} + \Delta - 1) = 0 \quad \forall 2 < i' < i, \text{ con } j - 1 = P(f, i), j' = P(f, i')$
- (iii)  $\xrightarrow{\mathbf{P1}} y_{j'}^f(t - i_j^{ff'}) = 0 \quad \forall 2 < i' < i, \text{ con } j = P(f, i), j' = P(f, i')$
- (iv)  $\xrightarrow{\mathbf{P1}} y_{j'}^f(t - i_j^{ff'} - 1) = 0 \quad \forall 2 < i' < i, \text{ con } j - 1 = P(f, i), j' = P(f, i')$

Quindi, nella sommatoria:

$$\sum_{\substack{P(f, \bar{i})=\bar{j}, P(f, i)=j \\ 2 < i < \bar{i}, \\ t \in \tau_j^{ff'}}} \left\{ \left[ y_j^f(t - i_j^{ff'} + \Delta - 1) - y_j^f(t - i_j^{ff'} + \Delta) \right] + \left[ y_j^f(t - i_j^{ff'} - 1) - y_j^f(t - i_j^{ff'}) \right] \right\}$$

si avranno tutti i termini pari a 0, quindi il risultato sarà 0. Questo dimostra il sottocaso **c1**.

◦ (**c2**): Supponiamo che all'istante  $t$  il volo  $f$  si trovi prima dell'inizio dell'area critica. Sempre in riferimento alla Figura 5.2, si ha che:

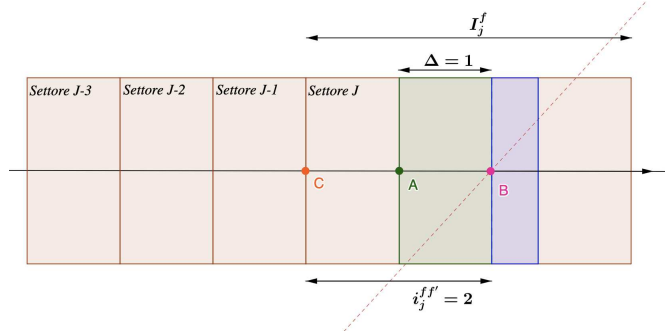
- (i)  $y_j^f(t - i_j^{ff'} + \Delta) = 0$
- (ii)  $y_j^f(t - i_j^{ff'} + \Delta - 1) = 0$
- (iii)  $y_j^f(t - i_j^{ff'}) = 0$
- (iii)  $y_j^f(t - i_j^{ff'} - 1) = 0$

Ricordiamo che, sotto le nostre ipotesi,  $\Delta = 1 \implies t - i_j^{ff'} + \Delta - 1 = t - i_j^{ff'}$ .

Procediamo ulteriormente per casi.

- Se  $i_j^{ff'} = \mathbf{1} \implies$  **Caso (a)**.
- Se  $i_j^{ff'} = \mathbf{2} \implies$  il volo  $f$  passa almeno 2 istanti di tempo all'interno del settore  $j$ .

Con riferimento alla Figura 5.3, questo significa che il volo  $f$  si trova nella



**Figura 5.3** : Caso  $i_j^{ff'} = 2$

posizione C all'istante  $t$ . Sotto le nostre ipotesi, si ha che:

$$\begin{aligned}
 t - i_j^{ff'} &= t - 2 \\
 t - i_j^{ff'} - 1 &= t - 3 \\
 t - i_j^{ff'} + \Delta &= t - 1 \\
 t - i_j^{ff'} + \Delta - 1 &= t - 2
 \end{aligned}$$

A questo punto abbiamo vari casi da analizzare. Questo perché a seconda dei valori dei termini  $I_{j-1}^f$ ,  $I_{j-2}^f$  e  $I_{j-3}^f$  si possono avere scenari differenti. In particolare, ogni per termine dobbiamo considerare le seguenti possibilità:

$$\begin{cases} I_{j-1}^f = 1 \\ I_{j-1}^f = 2 \\ I_{j-1}^f \geq 3 \end{cases} \quad \begin{cases} I_{j-2}^f = 1 \\ I_{j-2}^f = 2 \\ I_{j-2}^f \geq 3 \end{cases} \quad \begin{cases} I_{j-3}^f = 1 \\ I_{j-3}^f = 2 \\ I_{j-3}^f \geq 3 \end{cases}$$

Quindi in totale ci sono 27 possibili situazioni. Mostriamo solo 3 di questi, in quanto gli altri sono analoghi.

**Situazione 1:** Supponiamo  $I_{j-1}^f = I_{j-2}^f = I_{j-3}^f = 1$ , allora valgono le

seguenti relazioni:

$$\begin{aligned}
(1) \quad & y_{j-1}^f(t - i_j^{ff'} + \Delta) = 1 & (5) \quad & y_{j-1}^f(t - i_j^{ff'} - 1) = 0 \\
(2) \quad & y_{j-2}^f(t - i_j^{ff'} + \Delta - 1) = 1 & (6) \quad & y_{j-1}^f(t - i_j^{ff'} + \Delta - 1) = 0 \\
(3) \quad & y_{j-2}^f(t - i_j^{ff'}) = 1 & (7) \quad & y_{j-1}^f(t - i_j^{ff'}) = 0 \\
(4) \quad & y_{j-3}^f(t - i_j^{ff'} - 1) = 1 & (8) \quad & y_{j-2}^f(t - i_j^{ff'} - 1) = 0
\end{aligned}$$

da cui seguono:

$$\begin{aligned}
(1) \quad & \xrightarrow{\mathbf{P1}} y_{j'}^f(t - i_j^{ff'} + \Delta) = 0 \quad \forall 2 < i' < i, \text{ con } j - 1 = P(f, i), j' = P(f, i') \\
(2) \quad & \xrightarrow{\mathbf{P1}} y_{j'}^f(t - i_j^{ff'} + \Delta - 1) = 0 \quad \forall 2 < i' < i, \text{ con } j - 2 = P(f, i), j' = P(f, i') \\
(3) \quad & \xrightarrow{\mathbf{P1}} y_{j'}^f(t - i_j^{ff'}) = 0 \quad \forall 2 < i' < i, \text{ con } j - 2 = P(f, i), j' = P(f, i') \\
(4) \quad & \xrightarrow{\mathbf{P1}} y_{j'}^f(t - i_j^{ff'} - 1) = 0 \quad \forall 2 < i' < i, \text{ con } j - 3 = P(f, i), j' = P(f, i')
\end{aligned}$$

Quindi, nella sommatoria:

$$\sum_{\substack{P(f, \bar{i})=\bar{j}, P(f, i)=j \\ 2 < i < \bar{i}, \\ t \in \tau_j^{ff'}}} \left\{ \left[ y_j^f(t - i_j^{ff'} + \Delta - 1) - y_j^f(t - i_j^{ff'} + \Delta) \right] + \left[ y_j^f(t - i_j^{ff'} - 1) - y_j^f(t - i_j^{ff'}) \right] \right\}$$

si avrà:

$$\begin{aligned}
& \sum_{\substack{P(f, \bar{i})=\bar{j}, P(f, i)=j \\ 2 < i < \bar{i}-2, t \in \tau_j^{ff'}}} \left\{ \left[ y_j^f(t - i_j^{ff'} + \Delta - 1) - y_j^f(t - i_j^{ff'} + \Delta) \right] + \left[ y_j^f(t - i_j^{ff'} - 1) - y_j^f(t - i_j^{ff'}) \right] \right\} \\
& + \left[ y_{j-2}^f(t - i_j^{ff'} + \Delta - 1) - y_{j-1}^f(t - i_j^{ff'} + \Delta) \right] \\
& + \left[ y_{j-3}^f(t - i_j^{ff'} - 1) - y_{j-2}^f(t - i_j^{ff'}) \right] = \\
& 0 + \left[ 1 - 1 \right] + \left[ 1 - 1 \right] = 0.
\end{aligned}$$



**Situazione 2:** Facciamo variare solo  $I_{j-1}^f$ , e supponiamo  $I_{j-1}^f = 2$ . Valgono quindi le seguenti relazioni:

$$\begin{aligned}
(1) \quad & y_{j-1}^f(t - i_j^{ff'} + \Delta) = 1 \\
(2) \quad & y_{j-1}^f(t - i_j^{ff'} + \Delta - 1) = 1 \\
(3) \quad & y_{j-1}^f(t - i_j^{ff'}) = 1 \\
(4) \quad & y_{j-2}^f(t - i_j^{ff'} - 1) = 1 \\
(5) \quad & y_{j-1}^f(t - i_j^{ff'} - 1) = 1
\end{aligned}$$

da cui seguono:

$$\begin{aligned}
(1) \quad & \xrightarrow{\mathbf{P1}} y_{j'}^f(t - i_j^{ff'} + \Delta) = 0 \quad \forall 2 < i' < i, \text{ con } j-1 = P(f, i), j' = P(f, i') \\
(2) \quad & \xrightarrow{\mathbf{P1}} y_{j'}^f(t - i_j^{ff'} + \Delta - 1) = 0 \quad \forall 2 < i' < i, \text{ con } j-1 = P(f, i), j' = P(f, i') \\
(3) \quad & \xrightarrow{\mathbf{P1}} y_{j'}^f(t - i_j^{ff'}) = 0 \quad \forall 2 < i' < i, \text{ con } j-1 = P(f, i), j' = P(f, i') \\
(4) \quad & \xrightarrow{\mathbf{P1}} y_{j'}^f(t - i_j^{ff'} - 1) = 0 \quad \forall 2 < i' < i, \text{ con } j-2 = P(f, i), j' = P(f, i')
\end{aligned}$$

Quindi, nella sommatoria:

$$\sum_{\substack{P(f, \bar{i})=\bar{j}, P(f, i)=j \\ 2 < i < \bar{i}, \\ t \in \tau_j^{ff'}}} \left\{ \left[ y_j^f(t - i_j^{ff'} + \Delta - 1) - y_j^f(t - i_j^{ff'} + \Delta) \right] + \left[ y_j^f(t - i_j^{ff'} - 1) - y_j^f(t - i_j^{ff'}) \right] \right\}$$

si avrà:

$$\begin{aligned}
& \sum_{\substack{P(f,i)=j, P(f,i)=j \\ 2 < i < i-2, t \in \tau_j^{ff'}}} \left\{ \left[ y_j^f(t - i_j^{ff'} + \Delta - 1) - y_j^f(t - i_j^{ff'} + \Delta) \right] + \left[ y_j^f(t - i_j^{ff'} - 1) - y_j^f(t - i_j^{ff'}) \right] \right\} \\
& + \left[ y_{j-1}^f(t - i_j^{ff'} + \Delta - 1) - y_{j-1}^f(t - i_j^{ff'} + \Delta) \right] \\
& + \left[ y_{j-2}^f(t - i_j^{ff'} - 1) - y_{j-1}^f(t - i_j^{ff'}) \right] = \\
& 0 + \left[ 1 - 1 \right] + \left[ 1 - 1 \right] = 0.
\end{aligned}$$

**Situazione 3:** Facendo ancora variare solo  $I_{j-1}^f$ , supponiamo  $I_{j-1}^f \geq 3$ , valgono allora le seguenti relazioni:

$$\begin{aligned}
(1) \quad & y_{j-1}^f(t - i_j^{ff'} + \Delta) = 1 \\
(2) \quad & y_{j-1}^f(t - i_j^{ff'} + \Delta - 1) = 1 \\
(3) \quad & y_{j-1}^f(t - i_j^{ff'}) = 1 \\
(4) \quad & y_{j-1}^f(t - i_j^{ff'} - 1) = 1
\end{aligned}$$

da cui seguono:

$$\begin{aligned}
(1) \quad & \xrightarrow{\mathbf{P1}} y_{j'}^f(t - i_j^{ff'} + \Delta) = 0 \quad \forall 2 < i' < i, \text{ con } j - 1 = P(f, i), j' = P(f, i') \\
(2) \quad & \xrightarrow{\mathbf{P1}} y_{j'}^f(t - i_j^{ff'} + \Delta - 1) = 0 \quad \forall 2 < i' < i, \text{ con } j - 1 = P(f, i), j' = P(f, i') \\
(3) \quad & \xrightarrow{\mathbf{P1}} y_{j'}^f(t - i_j^{ff'}) = 0 \quad \forall 2 < i' < i, \text{ con } j - 1 = P(f, i), j' = P(f, i') \\
(4) \quad & \xrightarrow{\mathbf{P1}} y_{j'}^f(t - i_j^{ff'} - 1) = 0 \quad \forall 2 < i' < i, \text{ con } j - 1 = P(f, i), j' = P(f, i')
\end{aligned}$$

Quindi, nella sommatoria:

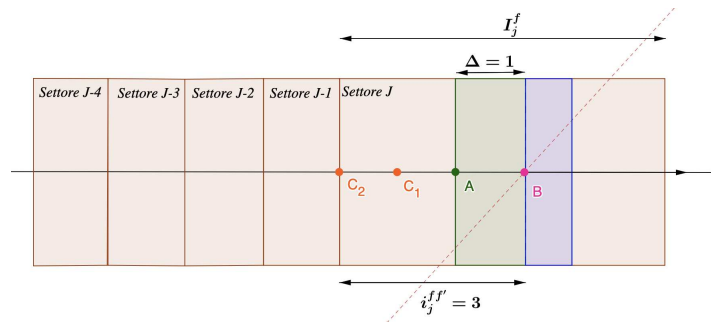
$$\sum_{\substack{P(f,\bar{i})=\bar{j}, P(f,i)=j \\ 2 < i < \bar{i}, \\ t \in \tau_j^{f f'}}} \left\{ \left[ y_j^f(t - i_j^{f f'} + \Delta - 1) - y_j^f(t - i_j^{f f'} + \Delta) \right] + \left[ y_j^f(t - i_j^{f f'} - 1) - y_j^f(t - i_j^{f f'}) \right] \right\}$$

si avrà:

$$\begin{aligned} \sum_{\substack{P(f,\bar{i})=\bar{j}, P(f,i)=j \\ 2 < i < \bar{i}-2, t \in \tau_j^{f f'}}} & \left\{ \left[ y_j^f(t - i_j^{f f'} + \Delta - 1) - y_j^f(t - i_j^{f f'} + \Delta) \right] + \left[ y_j^f(t - i_j^{f f'} - 1) - y_j^f(t - i_j^{f f'}) \right] \right\} \\ & + \left[ y_{j-1}^f(t - i_j^{f f'} + \Delta - 1) - y_{j-1}^f(t - i_j^{f f'} + \Delta) \right] \\ & + \left[ y_{j-1}^f(t - i_j^{f f'} - 1) - y_{j-1}^f(t - i_j^{f f'}) \right] = \\ & 0 + [1 - 1] + [1 - 1] = 0. \end{aligned}$$

Questo conclude il caso  $i_j^{f f'} = 2$ .

o Se  $i_j^{f f'} = 3 \implies$  il volo  $f$  passa almeno 3 istanti di tempo all'interno del settore  $j$ .



**Figura 5.4** : Caso  $i_j^{f f'} = 3$

Con riferimento alla Figura 5.4, questo significa che il volo  $f$  si può trovare nelle posizioni C1 o C2 all'istante  $t$ . In entrambi i casi, sotto le nostre ipotesi,

si ha:

$$\begin{aligned}
t - i_j^{ff'} &= t - 3 \\
t - i_j^{ff'} - 1 &= t - 4 \\
t - i_j^{ff'} + \Delta &= t - 2 \\
t - i_j^{ff'} + \Delta - 1 &= t - 3
\end{aligned}$$

Supponiamo che all'istante  $t$  il volo  $f$  sia in posizione C1.

Come prima, ci sono 27 situazioni possibili a seconda dei valori di  $I_{j-1}^f$ ,  $I_{j-2}^f$  e  $I_{j-3}^f$ . Mostriamo nuovamente solo 3 di questi.

**Situazione 1:** Supponiamo valga  $I_{j-1}^f = I_{j-2}^f = I_{j-3}^f = 1$ , si ha:

$$\begin{aligned}
(1) \quad y_{j-1}^f(t - i_j^{ff'} + \Delta) &= 1 & (5) \quad y_{j-1}^f(t - i_j^{ff'} - 1) &= 0 \\
(2) \quad y_{j-2}^f(t - i_j^{ff'} + \Delta - 1) &= 1 & (6) \quad y_{j-1}^f(t - i_j^{ff'} + \Delta - 1) &= 0 \\
(3) \quad y_{j-2}^f(t - i_j^{ff'}) &= 1 & (7) \quad y_{j-1}^f(t - i_j^{ff'}) &= 0 \\
(4) \quad y_{j-3}^f(t - i_j^{ff'} - 1) &= 1 & (8) \quad y_{j-2}^f(t - i_j^{ff'} - 1) &= 0
\end{aligned}$$

da cui seguono:

$$\begin{aligned}
(1) \quad \xrightarrow{\mathbf{P1}} \quad y_{j'}^f(t - i_j^{ff'} + \Delta) &= 0 \quad \forall 2 < i' < i, \text{ con } j - 1 = P(f, i), j' = P(f, i') \\
(2) \quad \xrightarrow{\mathbf{P1}} \quad y_{j'}^f(t - i_j^{ff'} + \Delta - 1) &= 0 \quad \forall 2 < i' < i, \text{ con } j - 2 = P(f, i), j' = P(f, i') \\
(3) \quad \xrightarrow{\mathbf{P1}} \quad y_{j'}^f(t - i_j^{ff'}) &= 0 \quad \forall 2 < i' < i, \text{ con } j - 2 = P(f, i), j' = P(f, i') \\
(4) \quad \xrightarrow{\mathbf{P1}} \quad y_{j'}^f(t - i_j^{ff'} - 1) &= 0 \quad \forall 2 < i' < i, \text{ con } j - 3 = P(f, i), j' = P(f, i')
\end{aligned}$$

Quindi, nella sommatoria:

$$\sum_{\substack{P(f, \bar{i}) = \bar{j}, P(f, i) = j \\ 2 < i < \bar{i}, \\ t \in \tau_j^{ff'}}} \left\{ \left[ y_j^f(t - i_j^{ff'} + \Delta - 1) - y_j^f(t - i_j^{ff'} + \Delta) \right] + \left[ y_j^f(t - i_j^{ff'} - 1) - y_j^f(t - i_j^{ff'}) \right] \right\}$$

si avrà:

$$\begin{aligned}
& \sum_{\substack{P(f,i)=j, P(f,i)=j \\ 2 < i < i-2, t \in \tau_j^{ff'}}} \left\{ \left[ y_j^f(t - i_j^{ff'} + \Delta - 1) - y_j^f(t - i_j^{ff'} + \Delta) \right] + \left[ y_j^f(t - i_j^{ff'} - 1) - y_j^f(t - i_j^{ff'}) \right] \right\} \\
& + \left[ y_{j-2}^f(t - i_j^{ff'} + \Delta - 1) - y_{j-1}^f(t - i_j^{ff'} + \Delta) \right] \\
& + \left[ y_{j-3}^f(t - i_j^{ff'} - 1) - y_{j-2}^f(t - i_j^{ff'}) \right] = \\
& 0 + \left[ 1 - 1 \right] + \left[ 1 - 1 \right] = 0.
\end{aligned}$$

**Situazione 2:** Facendo variare solo  $I_{j-1}^f$ , se vale  $I_{j-1}^f = 2$  allora risultano vere le seguenti relazioni:

- (1)  $y_{j-1}^f(t - i_j^{ff'} + \Delta) = 1$
- (2)  $y_{j-1}^f(t - i_j^{ff'} + \Delta - 1) = 1$
- (3)  $y_{j-1}^f(t - i_j^{ff'}) = 1$
- (4)  $y_{j-2}^f(t - i_j^{ff'} - 1) = 1$
- (5)  $y_{j-1}^f(t - i_j^{ff'} - 1) = 0$

da cui seguono:

- (1)  $\xrightarrow{\mathbf{P1}} y_{j'}^f(t - i_j^{ff'} + \Delta) = 0 \quad \forall 2 < i' < i, \text{ con } j - 1 = P(f, i), j' = P(f, i')$
- (2)  $\xrightarrow{\mathbf{P1}} y_{j'}^f(t - i_j^{ff'} + \Delta - 1) = 0 \quad \forall 2 < i' < i, \text{ con } j - 1 = P(f, i), j' = P(f, i')$
- (3)  $\xrightarrow{\mathbf{P1}} y_{j'}^f(t - i_j^{ff'}) = 0 \quad \forall 2 < i' < i, \text{ con } j - 1 = P(f, i), j' = P(f, i')$
- (4)  $\xrightarrow{\mathbf{P1}} y_{j'}^f(t - i_j^{ff'} - 1) = 0 \quad \forall 2 < i' < i, \text{ con } j - 2 = P(f, i), j' = P(f, i')$

Quindi, nella sommatoria:

$$\sum_{\substack{P(f,\bar{i})=\bar{j}, P(f,i)=j \\ 2 < i < \bar{i}, \\ t \in \tau_j^{ff'}}} \left\{ \left[ y_j^f(t - i_j^{ff'} + \Delta - 1) - y_j^f(t - i_j^{ff'} + \Delta) \right] + \left[ y_j^f(t - i_j^{ff'} - 1) - y_j^f(t - i_j^{ff'}) \right] \right\}$$

si avrà:

$$\begin{aligned} \sum_{\substack{P(f,\bar{i})=\bar{j}, P(f,i)=j \\ 2 < i < \bar{i}-2, t \in \tau_j^{ff'}}} & \left\{ \left[ y_j^f(t - i_j^{ff'} + \Delta - 1) - y_j^f(t - i_j^{ff'} + \Delta) \right] + \left[ y_j^f(t - i_j^{ff'} - 1) - y_j^f(t - i_j^{ff'}) \right] \right\} \\ & + \left[ y_{j-1}^f(t - i_j^{ff'} + \Delta - 1) - y_{j-1}^f(t - i_j^{ff'} + \Delta) \right] \\ & + \left[ y_{j-2}^f(t - i_j^{ff'} - 1) - y_{j-1}^f(t - i_j^{ff'}) \right] = \\ & 0 + \left[ 1 - 1 \right] + \left[ 1 - 1 \right] = 0. \end{aligned}$$

**Situazione 3:** Se vale invece  $I_{j-1}^f = \geq 3$  allora risultano vere le seguenti relazioni:

- (1)  $y_{j-1}^f(t - i_j^{ff'} + \Delta) = 1$
- (2)  $y_{j-1}^f(t - i_j^{ff'} + \Delta - 1) = 1$
- (3)  $y_{j-1}^f(t - i_j^{ff'}) = 1$
- (4)  $y_{j-1}^f(t - i_j^{ff'} - 1) = 1$

da cui seguono:

- (1)  $\xrightarrow{\mathbf{P1}} y_{j'}^f(t - i_j^{ff'} + \Delta) = 0 \quad \forall 2 < i' < i, \text{ con } j - 1 = P(f, i), j' = P(f, i')$
- (2)  $\xrightarrow{\mathbf{P1}} y_{j'}^f(t - i_j^{ff'} + \Delta - 1) = 0 \quad \forall 2 < i' < i, \text{ con } j - 1 = P(f, i), j' = P(f, i')$
- (3)  $\xrightarrow{\mathbf{P1}} y_{j'}^f(t - i_j^{ff'}) = 0 \quad \forall 2 < i' < i, \text{ con } j - 1 = P(f, i), j' = P(f, i')$
- (4)  $\xrightarrow{\mathbf{P1}} y_{j'}^f(t - i_j^{ff'} - 1) = 0 \quad \forall 2 < i' < i, \text{ con } j - 1 = P(f, i), j' = P(f, i')$

Quindi, nella sommatoria:

$$\sum_{\substack{P(f, \bar{i})=\bar{j}, P(f, i)=j \\ 2 < i < \bar{i}, \\ t \in \tau_j^{ff'}}} \left\{ \left[ y_j^f(t - i_j^{ff'} + \Delta - 1) - y_j^f(t - i_j^{ff'} + \Delta) \right] + \left[ y_j^f(t - i_j^{ff'} - 1) - y_j^f(t - i_j^{ff'}) \right] \right\}$$

si avrà:

$$\begin{aligned} \sum_{\substack{P(f, \bar{i})=\bar{j}, P(f, i)=j \\ 2 < i < \bar{i}-2, t \in \tau_j^{ff'}}} \left\{ \left[ y_j^f(t - i_j^{ff'} + \Delta - 1) - y_j^f(t - i_j^{ff'} + \Delta) \right] + \left[ y_j^f(t - i_j^{ff'} - 1) - y_j^f(t - i_j^{ff'}) \right] \right\} \\ + \left[ y_{j-1}^f(t - i_j^{ff'} + \Delta - 1) - y_{j-1}^f(t - i_j^{ff'} + \Delta) \right] \\ + \left[ y_{j-1}^f(t - i_j^{ff'} - 1) - y_{j-1}^f(t - i_j^{ff'}) \right] = \\ 0 + \left[ 1 - 1 \right] + \left[ 1 - 1 \right] = 0. \end{aligned}$$

Supponiamo ora che all'istante  $t$  il volo  $f$  sia in posizione C2.

Qui il numero possibili di casi aumenta, in quanto bisogna tenere in considerazione anche il settore  $I_{j-4}^f$ . L'analisi risulta sempre la stessa, per cui mostreremo un solo caso.

Se vale  $I_{j-1}^f = I_{j-2}^f = I_{j-3}^f = 1$ , allora risultano vere le seguenti relazioni:

$$\begin{array}{ll}
(1) & y_{j-2}^f(t - i_j^{ff'} + \Delta) = 1 \\
(2) & y_{j-3}^f(t - i_j^{ff'} + \Delta - 1) = 1 \\
(3) & y_{j-3}^f(t - i_j^{ff'}) = 1 \\
(4) & y_{j-4}^f(t - i_j^{ff'} - 1) = 1 \\
(5) & y_{j-1}^f(t - i_j^{ff'} + \Delta) = 0 \\
(6) & y_{j-1}^f(t - i_j^{ff'} + \Delta - 1) = 0 \\
(7) & y_{j-2}^f(t - i_j^{ff'} + \Delta - 1) = 0 \\
(8) & y_{j-1}^f(t - i_j^{ff'}) = 0 \\
(9) & y_{j-2}^f(t - i_j^{ff'}) = 0 \\
(10) & y_{j-1}^f(t - i_j^{ff'} - 1) = 0 \\
(11) & y_{j-2}^f(t - i_j^{ff'} - 1) = 0 \\
(12) & y_{j-3}^f(t - i_j^{ff'} - 1) = 0
\end{array}$$

da cui seguono:

$$\begin{array}{l}
(1) \xrightarrow{\mathbf{P1}} y_{j'}^f(t - i_j^{ff'} + \Delta) = 0 \quad \forall 2 < i' < i, \text{ con } j - 2 = P(f, i), j' = P(f, i') \\
(2) \xrightarrow{\mathbf{P1}} y_{j'}^f(t - i_j^{ff'} + \Delta - 1) = 0 \quad \forall 2 < i' < i, \text{ con } j - 3 = P(f, i), j' = P(f, i') \\
(3) \xrightarrow{\mathbf{P1}} y_{j'}^f(t - i_j^{ff'}) = 0 \quad \forall 2 < i' < i, \text{ con } j - 3 = P(f, i), j' = P(f, i') \\
(4) \xrightarrow{\mathbf{P1}} y_{j'}^f(t - i_j^{ff'} - 1) = 0 \quad \forall 2 < i' < i, \text{ con } j - 4 = P(f, i), j' = P(f, i')
\end{array}$$

Quindi, nella sommatoria:

$$\sum_{\substack{P(f, \bar{i}) = \bar{j}, P(f, i) = j \\ 2 < i < \bar{i}, \\ t \in \tau_j^{ff'}}} \left\{ \left[ y_j^f(t - i_j^{ff'} + \Delta - 1) - y_j^f(t - i_j^{ff'} + \Delta) \right] + \left[ y_j^f(t - i_j^{ff'} - 1) - y_j^f(t - i_j^{ff'}) \right] \right\}$$



si avrà:

$$\begin{aligned}
& \sum_{\substack{P(f,\bar{i})=\bar{j}, P(f,i)=j \\ 2 < i < \bar{i}-2, t \in \tau_j^{ff'}}} \left\{ \left[ y_j^f(t - i_j^{ff'} + \Delta - 1) - y_j^f(t - i_j^{ff'} + \Delta) \right] + \left[ y_j^f(t - i_j^{ff'} - 1) - y_j^f(t - i_j^{ff'}) \right] \right\} \\
& + \left[ y_{j-3}^f(t - i_j^{ff'} + \Delta - 1) - y_{j-2}^f(t - i_j^{ff'} + \Delta) \right] \\
& + \left[ y_{j-4}^f(t - i_j^{ff'} - 1) - y_{j-3}^f(t - i_j^{ff'}) \right] = \\
& 0 + \left[ 1 - 1 \right] + \left[ 1 - 1 \right] = 0.
\end{aligned}$$

□

Dal **Teorema 5.1** segue dunque che, se la coppia di voli  $(f, f')$  all'istante  $t$  si trova in situazione critica, si ha:

$$\begin{aligned}
& \sum_{\substack{P(f,\bar{i})=\bar{j}, P(f,i)=j \\ 2 < i < \bar{i}, t \in \tau_j^{ff'}}} \left\{ \left[ y_j^f(t - i_j^{ff'} + \Delta - 1) - y_j^f(t - i_j^{ff'} + \Delta) \right] + \left[ y_j^f(t - i_j^{ff'} - 1) - y_j^f(t - i_j^{ff'}) \right] \right\} + \\
& \sum_{\substack{P(f',\bar{i})=\bar{j}, P(f',i)=j \\ 2 < i < \bar{i}, t \in \tau_j^{f'f}}} \left\{ \left[ y_j^{f'}(t - i_j^{f'f} + \Delta - 1) - y_j^{f'}(t - i_j^{f'f} + \Delta) \right] + \left[ y_j^{f'}(t - i_j^{f'f} - 1) - y_j^{f'}(t - i_j^{f'f}) \right] \right\} \\
& = 2
\end{aligned}$$

Mostriamo anche che vale la relazione inversa. Ovvero:

**Teorema 5.2.** *Sia dato un settore  $\bar{j}$  e una coppia di voli  $(f, f') \in C_{\bar{j}}$  in potenziale conflitto.*

Se all'istante  $t$  valgono le seguenti condizioni:

$$1) \sum_{\substack{P(f,\bar{i})=\bar{j}, P(f,i)=j \\ 2 < i < \bar{i}, t \in \tau_j^{ff'}}} \left\{ \left[ y_j^f(t - i_j^{ff'} + \Delta - 1) - y_j^f(t - i_j^{ff'} + \Delta) \right] + \left[ y_j^f(t - i_j^{ff'} - 1) - y_j^f(t - i_j^{ff'}) \right] \right\} = 1$$

$$2) \sum_{\substack{P(f',\bar{i})=\bar{j}, P(f',i)=j \\ 2 < i < \bar{i}, t \in \tau_j^{f'f}}} \left\{ \left[ y_j^{f'}(t - i_j^{f'f} + \Delta - 1) - y_j^{f'}(t - i_j^{f'f} + \Delta) \right] + \left[ y_j^{f'}(t - i_j^{f'f} - 1) - y_j^{f'}(t - i_j^{f'f}) \right] \right\} = 1$$

allora la coppia di voli  $(f, f')$  identifica una situazione critica all'istante  $t$ .

Dimostrazione: Per ipotesi, sappiamo che:

$$\sum_{\substack{P(f,\bar{i})=\bar{j}, P(f,i)=j \\ 2 < i < \bar{i}, t \in \tau_j^{ff'}}} \left\{ \left[ y_j^f(t - i_j^{ff'} + \Delta - 1) - y_j^f(t - i_j^{ff'} + \Delta) \right] + \left[ y_j^f(t - i_j^{ff'} - 1) - y_j^f(t - i_j^{ff'}) \right] \right\} = 1$$

Ricordiamo che per la Proprietà P1 le variabili  $y_j^f(t)$  non possono valre 1 in uno stesso istante in settori differenti. Questo significa che vale una delle seguenti situazioni:

$$(a) \begin{cases} \sum_{\substack{P(f,\bar{i})=\bar{j}, P(f,i)=j \\ 2 < i < \bar{i}, t \in \tau_j^{ff'}}} y_j^f(t - i_j^{ff'} + \Delta - 1) = 1 \\ \sum_{\substack{P(f,\bar{i})=\bar{j}, P(f,i)=j \\ 2 < i < \bar{i}, t \in \tau_j^{ff'}}} y_j^f(t - i_j^{ff'} + \Delta) = 0 \\ \sum_{\substack{P(f,\bar{i})=\bar{j}, P(f,i)=j \\ 2 < i < \bar{i}, t \in \tau_j^{ff'}}} \left[ y_j^f(t - i_j^{ff'} - 1) - y_j^f(t - i_j^{ff'}) \right] = 0 \end{cases}$$

$$(b) \left\{ \begin{array}{l} \sum_{\substack{P(f,\bar{i})=\bar{j}, P(f,i)=j \\ 2 < i < \bar{i}, t \in \tau_j^{ff'} }} \left[ y_j^f(t - i_j^{ff'} + \Delta - 1) - y_j^f(t - i_j^{ff'} + \Delta) \right] = 0 \\ \sum_{\substack{P(f,\bar{i})=\bar{j}, P(f,i)=j \\ 2 < i < \bar{i}, t \in \tau_j^{ff'} }} y_j^f(t - i_j^{ff'} - 1) = 1 \\ \sum_{\substack{P(f,\bar{i})=\bar{j}, P(f,i)=j \\ 2 < i < \bar{i}, t \in \tau_j^{ff'} }} y_j^f(t - i_j^{ff'}) = 0 \end{array} \right.$$

Mostriamo solo il caso (a), in quanto il caso (b) si dimostra allo stesso modo. Consideriamo:

$$\sum_{\substack{P(f,\bar{i})=\bar{j}, P(f,i)=j \\ 2 < i < \bar{i}, t \in \tau_j^{ff'} }} y_j^f(t - i_j^{ff'} + \Delta - 1) = 1$$

Questo significa che  $\exists \tilde{i} : 2 < \tilde{i} < \bar{i}$  tale per cui:

$$\begin{array}{ll} y_{\tilde{j}}^f(t - i_{\tilde{j}}^{ff'} + \Delta - 1) = 1 & \text{con } \tilde{j} = P(f, \tilde{i}) \\ y_j^f(t - i_j^{ff'} + \Delta - 1) = 0 & \forall j = P(f, i), i \neq \tilde{i}, 2 < i < \bar{i}. \end{array}$$

Mostriamo che  $\tilde{j} = j - 1$ .

Supponiamo per assurdo  $\tilde{j} \neq j - 1$ , ovvero supponiamo sia un settore precedente. Si avrebbe allora:

$$\begin{array}{ll} y_{\tilde{j}}^f(t - i_{\tilde{j}}^{ff'} + \Delta - 1) = 1 & \text{con } \tilde{j} = P(f, \tilde{i}) \\ y_j^f(t - i_j^{ff'} + \Delta - 1) = 0 & \forall j = P(f, i), i \neq \tilde{i}, 2 < i < \bar{i} - 1 \\ y_{j-1}^f(t - i_{j-1}^{ff'} + \Delta - 1) = 0 & \\ y_j^f(t - i_j^{ff'} + \Delta) = 0 & \forall j = P(f, i), 2 < i < \bar{i} \end{array}$$

Quindi in particolare:

$$\begin{aligned}
y_j^f(t - i_j^{ff'} + \Delta - 1) &= 1 && \text{con } \tilde{j} = P(f, \tilde{i}) \\
y_j^f(t - i_j^{ff'} + \Delta) &= 0 && \text{con } \tilde{j} = P(f, \tilde{i}) \\
y_j^f(t - i_j^{ff'} + \Delta) &= 0 && \forall j = P(f, i), i \neq \tilde{i}, 2 < i < \bar{i}
\end{aligned}$$

il che è assurdo perché significa che all'istante  $t - i_j^{ff'} + \Delta - 1$  il volo  $f$  si trova nel settore  $\tilde{j}$ , che all'istante successivo non è più in quel settore, ma non è nemmeno nel settore successivo. Dunque  $\tilde{j} = j - 1$ .

A questo punto abbiamo:

$$\begin{cases} y_{j-1}^f(t - i_j^{ff'} + \Delta - 1) = 1 \\ y_{j-1}^f(t - i_j^{ff'} + \Delta) = 0 \end{cases} \implies y_j^f(t - i_j^{ff'} + \Delta) = 1,$$

ovvero all'istante  $t - i_j^{ff'} + \Delta$  il volo  $f$  entra nel settore  $j$ . Ma questo significa che all'istante  $t - i_j^{ff'} + \Delta + I_j^f$  il volo  $f$  è alla fine del settore  $j$ , e dunque poiché  $t \leq t - i_j^{ff'} + I_j^f \leq t - i_j^{ff'} + \Delta + I_j^f$ , anche agli istanti  $t$  e  $t - i_j^{ff'} + I_j^f$  il volo  $f$  si troverà nel settore  $\bar{j}$ . Per cui abbiamo anche:

$$\begin{cases} y_j^f(t) = 1 \\ y_j^f(t - i_j^{ff'} + \Delta) = 1 \\ y_j^f(t - i_j^{ff'} + I_j^f) = 1 \end{cases}$$

cioè il volo  $f$  è in Posizione A, quindi in Posizione Critica.

In modo analogo si dimostra che nel caso (b) si ottiene che il volo  $f$  si trova all'istante  $t$  in Posizione B.

Considerando poi la relazione espressa dall'ipotesi 2, si ottiene che il volo  $f'$  si trova o in Posizione A o in Posizione B. Ma questo per definizione significa che la coppia di voli  $(f, f')$  all'istante  $t$  identifica una situazione critica.  $\square$

Il Teorema 5.1 e il Teorema 5.2 dimostrano che i termini contenuti nei vincoli (3.7a) – (3.10d) del modello base volti a monitorare la posizione dei voli

sono equivalenti alla seguente relazione:

$$\begin{aligned}
& \sum_{\substack{P(f,\bar{i})=\bar{j}, P(f,i)=j \\ 2 < i < \bar{i}, t \in \tau_j^{ff'}}} \left\{ \left[ y_j^f(t - i_j^{ff'} + \Delta - 1) - y_j^f(t - i_j^{ff'} + \Delta) \right] + \left[ y_j^f(t - i_j^{ff'} - 1) - \right. \right. \\
& \left. \left. - y_j^f(t - i_j^{ff'}) \right] \right\} + \sum_{\substack{P(f',\bar{i})=\bar{j}, P(f',i)=j \\ 2 < i < \bar{i}, t \in \tau_j^{f'f}}} \left\{ \left[ y_j^{f'}(t - i_j^{f'f} + \Delta - 1) - y_j^{f'}(t - i_j^{f'f} + \Delta) \right] + \right. \\
& \left. + \left[ y_j^{f'}(t - i_j^{f'f} - 1) - y_j^{f'}(t - i_j^{f'f}) \right] \right\}
\end{aligned}$$

È importante osservare che anche cambiando il tipo di controlli rimane necessario l'utilizzo delle variabili  $c_j^{ff'}(t)$  per contare il numero di situazioni critiche. Più nel dettaglio, estendiamo la nuova relazione a tutti i voli in potenziale conflitto all'interno di un settore  $\bar{j}$ , ovvero consideriamo:

$$\begin{aligned}
& \frac{1}{2} \left( \sum_{\substack{(f,f') \in C_{\bar{j}}: \\ P(f,\bar{i})=\bar{j}, P(f,i)=j \\ 2 < i < \bar{i}, t \in \tau_j^{ff'}}} \left\{ \left[ y_j^f(t - i_j^{ff'} + \Delta - 1) - y_j^f(t - i_j^{ff'} + \Delta) \right] + \left[ y_j^f(t - i_j^{ff'} - 1) - \right. \right. \right. \\
& \left. \left. - y_j^f(t - i_j^{ff'}) \right] \right\} + \sum_{\substack{(f,f') \in C_{\bar{j}}: \\ P(f',\bar{i})=\bar{j}, P(f',i)=j \\ 2 < i < \bar{i}, t \in \tau_j^{f'f}}} \left\{ \left[ y_j^{f'}(t - i_j^{f'f} + \Delta - 1) - y_j^{f'}(t - i_j^{f'f} + \Delta) \right] + \right. \\
& \left. + \left[ y_j^{f'}(t - i_j^{f'f} - 1) - y_j^{f'}(t - i_j^{f'f}) \right] \right\} \right) \quad (\star)
\end{aligned}$$

dove il fattore  $\frac{1}{2}$  viene introdotto in quanto è la coppia di voli che identifica la situazione critica, non il singolo aeromobile in posizione critica.

Questa nuovo termine non può sostituire la funzione delle variabili  $c_j^{ff'}(t)$  in quanto oltre a dover contare un'eventuale situazione critica, è importante che sia anche in grado di non contare tutte quelle situazioni non critiche. Questo però non avviene, infatti:

- Se  $(f, f')$  si trovano in posizione critica:

$$\begin{aligned}
& \frac{1}{2} \sum_{\substack{P(f, \bar{i})=\bar{j}, P(f, i)=j \\ 2 < i < \bar{i}, t \in \tau_j^{ff'}}} \left\{ \left[ y_j^f(t - i_j^{ff'} + \Delta - 1) - y_j^f(t - i_j^{ff'} + \Delta) \right] + \left[ y_j^f(t - i_j^{ff'} - 1) \right. \right. \\
& \left. \left. - y_j^f(t - i_j^{ff'}) \right] \right\} + \frac{1}{2} \sum_{\substack{P(f, \bar{i})=\bar{j}, P(f, i)=j \\ 2 < i < \bar{i}, t \in \tau_j^{ff'}}} \left\{ \left[ y_j^{f'}(t - i_j^{ff'} + \Delta - 1) - y_j^{f'}(t - i_j^{ff'} + \Delta) \right] + \right. \\
& \left. + \left[ y_j^{f'}(t - i_j^{ff'} - 1) - y_j^{f'}(t - i_j^{ff'}) \right] \right\} = 1,
\end{aligned}$$

quindi si registra una situazione critica.

- Se solo  $f$  in posizione critica:

$$\begin{aligned}
& \frac{1}{2} \sum_{\substack{P(f, \bar{i})=\bar{j}, P(f, i)=j \\ 2 < i < \bar{i}, t \in \tau_j^{ff'}}} \left\{ \left[ y_j^f(t - i_j^{ff'} + \Delta - 1) - y_j^f(t - i_j^{ff'} + \Delta) \right] + \left[ y_j^f(t - i_j^{ff'} - 1) \right. \right. \\
& \left. \left. - y_j^f(t - i_j^{ff'}) \right] \right\} + \frac{1}{2} \sum_{\substack{P(f, \bar{i})=\bar{j}, P(f, i)=j \\ 2 < i < \bar{i}, t \in \tau_j^{ff'}}} \left\{ \left[ y_j^{f'}(t - i_j^{ff'} + \Delta - 1) - y_j^{f'}(t - i_j^{ff'} + \Delta) \right] + \right. \\
& \left. + \left[ y_j^{f'}(t - i_j^{ff'} - 1) - y_j^{f'}(t - i_j^{ff'}) \right] \right\} = \frac{1}{2} + [0] + [0] = \frac{1}{2},
\end{aligned}$$

quindi non si registra una situazione critica.

- Se solo  $f'$  in posizione critica:

$$\begin{aligned}
& \frac{1}{2} \sum_{\substack{P(f,\bar{i})=\bar{j}, P(f,i)=j \\ 2 < i < \bar{i}, t \in \tau_j^{f f'}}} \left\{ \left[ y_j^f(t - i_j^{f f'} + \Delta - 1) - y_j^f(t - i_j^{f f'} + \Delta) \right] + \left[ y_j^f(t - i_j^{f f'} - 1) \right. \right. \\
& \left. \left. - y_j^f(t - i_j^{f f'}) \right] \right\} + \frac{1}{2} \sum_{\substack{P(f,\bar{i})=\bar{j}, P(f,i)=j \\ 2 < i < \bar{i}, t \in \tau_j^{f f'}}} \left\{ \left[ y_j^{f'}(t - i_j^{f' f} + \Delta - 1) - y_j^{f'}(t - i_j^{f' f} + \Delta) \right] + \right. \\
& \left. + \left[ y_j^{f'}(t - i_j^{f' f} - 1) - y_j^{f'}(t - i_j^{f' f}) \right] \right\} = [0] + [0] + \frac{1}{2} = \frac{1}{2},
\end{aligned}$$

quindi non si registra una situazione critica.

- Se nessuno dei due voli è in posizione critica:

$$\begin{aligned}
& \frac{1}{2} \sum_{\substack{P(f,\bar{i})=\bar{j}, P(f,i)=j \\ 2 < i < \bar{i}, t \in \tau_j^{f f'}}} \left\{ \left[ y_j^f(t - i_j^{f f'} + \Delta - 1) - y_j^f(t - i_j^{f f'} + \Delta) \right] + \left[ y_j^f(t - i_j^{f f'} - 1) \right. \right. \\
& \left. \left. - y_j^f(t - i_j^{f f'}) \right] \right\} + \frac{1}{2} \sum_{\substack{P(f,\bar{i})=\bar{j}, P(f,i)=j \\ 2 < i < \bar{i}, t \in \tau_j^{f f'}}} \left\{ \left[ y_j^{f'}(t - i_j^{f' f} + \Delta - 1) - y_j^{f'}(t - i_j^{f' f} + \Delta) \right] + \right. \\
& \left. + \left[ y_j^{f'}(t - i_j^{f' f} - 1) - y_j^{f'}(t - i_j^{f' f}) \right] \right\} = 0,
\end{aligned}$$

quindi non si registra una situazione critica.

Dunque non è possibile utilizzare direttamente il termine  $(\star)$  per determinare il numero totale di situazioni critiche all'istante  $t$ , in quanto non restituisce come valore 0 ogni volta che soltanto uno dei due voli si trova in una posizione critica, per cui il conteggio finale non risulterebbe corretto.

### 5.2.2 Specificità dei controlli nel primo settore

A questo punto, rimane da affrontare un'ultima questione prima di poter descrivere i nuovi vincoli.

Fino ad ora abbiamo infatti escluso dalla discussione il primo settore della rotta dei voli considerati, ovvero il settore in cui è localizzato l'aeroporto di partenza. Questo perché per esso non valgono tutte le relazioni espresse in precedenza. Sono due in particolare le situazioni che dobbiamo analizzare:

- (1) il punto di incrocio si trova per entrambi i voli in un settore diverso dal primo settore della loro rotta, ma bisogna controllare il comportamento dei voli negli istanti ammissibili per il decollo nel primo settore;
- (2) il punto di incrocio si trova per uno dei due voli nel primo settore della sua rotta.

Nella situazione (1), se consideriamo un volo  $f$  ed un istante  $t$ , per la Proprietà P1 si ha:

$$\begin{cases} y_j^f(t) = 1, & \bar{j} = P(f, \bar{i}), \exists \bar{i} : 1 < \bar{i} < N_f \\ y_j^f(t) = 0, & j = P(f, i), \forall i : 1 < i < N_f \wedge i \neq \bar{i}. \end{cases}$$

Questo perché le variabili  $y_j^f(t)$  sono variabili che assumo valori descritti da una funzione 'a porta', e dunque valgono 1 quando il volo  $f$  si trova all'interno del settore  $j$ , e 0 in tutti gli altri istanti. Dunque se all'istante  $t$  il volo  $f$  non si trova nel settore  $j$ , si troverà certamente in un settore della traiettoria precedente o successivo ad esso.

Quando andiamo a considerare la posizione di un volo  $f$  all'interno del primo settore negli istanti ammissibili per suo il decollo, e in generale per la sua permanenza nel primo settore, bisogna prestare attenzione ad un importante fatto. Quando consideriamo un istante  $t$  in cui il volo  $f$  non può trovarsi nel primo settore, si ha la certezza che se  $y_j^f(t) = 0$  allora  $y_{j'}^f(t) = 1$  per un altro settore  $j'$  della rotta, precedente o successivo a  $j$ . Quando però  $t$  è un istante in cui  $f$  può trovarsi nel primo settore, chiamiamolo  $j_1$ , se  $y_{j_1}^f(t) = 0$  allora  $y_{j'}^f(t) = 1$  solo per i settori  $j'$  successivi a  $j_1$ , poiché non ci sono settori



precedenti ad esso. Questo fatto può generare dei problemi.

Consideriamo uno scenario in cui un volo  $f$  possa decollare dal settore  $a$  negli istanti  $\{t_1, t_2, t_3\}$ . Supponiamo inoltre che decolli effettivamente all'istante  $t_2$ , e che per esso valga  $I_a^f = 2$ . Sia  $b$  il settore successivo ad  $a$  nella rotta del volo  $f$ . Questo significa:

$$\begin{cases} y_a^f(t_1) = 0 \\ y_a^f(t_2) = 1 \\ y_a^f(t_3) = 1 \\ y_b^f(t_3) = 0 \end{cases}$$

Più nello specifico, ciò implica anche:

$$\begin{cases} y_j^f(t_1) = 0 & \forall j \text{ settore successivo ad } a \text{ nella rotta di } f \\ y_j^f(t_2) = 0 & \forall j \text{ settore successivo ad } a \text{ nella rotta di } f \\ y_j^f(t_3) = 0 & \forall j \text{ settore successivo ad } a \text{ nella rotta di } f \end{cases}$$

Pertanto, se ad esempio si avesse:

$$\begin{cases} t - i_j^{ff'} + \Delta - 1 = t_2 \\ t - i_j^{ff'} + \Delta = t_3 \\ t - i_j^{ff'} = t_2 \\ t - i_j^{ff'} - 1 = t_1 \end{cases}$$

si avrebbe anche:

$$\begin{aligned} & [y_a^f(t - i_j^{ff'} + \Delta - 1) - y_a^f(t - i_j^{ff'} + \Delta)] + [y_a^f(t - i_j^{ff'} - 1) - y_a^f(t - i_j^{ff'})] \\ &= [y_a^f(t_2) - y_a^f(t_3)] + [y_a^f(t_1) - y_a^f(t_2)] \\ &= [1 - 1] + [0 - 1] = -1. \end{aligned}$$

Quindi, a differenza dei casi precedenti in cui i valori delle parentesi quadre potevano essere solo pari a 0 o 1, quando consideriamo il primo settore della

rotta di un volo tale valore può essere anche  $-1$ .

Diventa quindi necessario introdurre delle variabili binarie che controllino questa possibilità. In particolare, indicando con:

$$\begin{aligned} [(A)] &= [y_{j_1}^f(t - i_j^{ff'} + \Delta - 1) - y_{j_1}^f(t - i_j^{ff'} + \Delta)] \\ [(B)] &= [y_{j_1}^f(t - i_j^{ff'} - 1) - y_{j_1}^f(t - i_j^{ff'})] \\ j_1 &= \text{primo settore della rotta,} \end{aligned}$$

abbiamo bisogno quindi di variabili binarie:

$$\begin{aligned} a_j^{ff'}(t) &= 1 \quad \text{se } [(A)] = 1 \\ b_j^{ff'}(t) &= 1 \quad \text{se } [(B)] = 1 \end{aligned}$$

Esprimiamo le relazioni richieste attraverso le seguenti disequazioni:

$$\begin{aligned} a_j^{ff'}(t) &\geq y_{j_1}^f(t - i_j^{ff'} + \Delta - 1) - y_{j_1}^f(t - i_j^{ff'} + \Delta) \\ \forall j \in \mathcal{J}, f \in \mathcal{F} : \exists f' \in \mathcal{F} \text{ t.c. : } (f, f') \in C_j, t \in \tau_j^{ff'} \end{aligned} \quad (\star)$$

$$\begin{aligned} b_j^{ff'}(t) &\geq y_{j_1}^f(t - i_j^{ff'} - 1) - y_{j_1}^f(t - i_j^{ff'}) \\ \forall j \in \mathcal{J}, f \in \mathcal{F} : \exists f' \in \mathcal{F} \text{ t.c. : } (f, f') \in C_j, t \in \tau_j^{ff'} \end{aligned} \quad (\star\star)$$

La disequazione  $(\star)$  dice che:

- Se  $[y_{j_1}^f(t - i_j^{ff'} + \Delta - 1) - y_{j_1}^f(t - i_j^{ff'} + \Delta)] = 0$  :

$$a_j^{ff'}(t) \geq 0$$

- Se  $[y_{j_1}^f(t - i_j^{ff'} + \Delta - 1) - y_{j_1}^f(t - i_j^{ff'} + \Delta)] = -1$  :

$$a_j^{ff'}(t) \geq 0$$

- Se  $[y_{j_1}^f(t - i_j^{ff'} + \Delta - 1) - y_{j_1}^f(t - i_j^{ff'} + \Delta)] = 1$  :

$$a_j^{ff'}(t) \geq 1 \implies a_j^{ff'}(t) = 1$$

Dunque tale disequazione obbliga la variabile  $a_j^{ff'}(t)$  ad assumere valore 1 ogni volta che  $[(A)] = 1$ , ovvero in presenza di una posizione critica. Altrimenti  $a_j^{ff'}(t)$  è libera di valere 0 o 1.

La disequazione  $(\star\star)$  funziona in modo analogo ma dipende dai valori di  $[(B)]$ .

Passiamo ora alla situazione (2). Supponiamo che per uno dei due voli, ad esempio il volo  $f$ , il punto critico si trovi nel primo settore della rotta. Naturalmente le posizioni critiche possibili non cambiano, dunque possiamo fare sempre riferimento alla Figura 5.2. Cambia il tipo di relazioni che possiamo ricavare. Nel dettaglio, supponiamo che all'istante  $t$  il volo  $f$  si trovi in:

- **Posizione A:** se all'istante  $t$  il volo  $f$  si trova nella posizione A, all'istante  $t - i_j^{ff'} + \Delta$  il volo  $f$  entrava nel settore  $j$ , ovvero decollava. Risulta inoltre vero che all'istante  $t - i_j^{ff'} + \Delta - 1$  il volo  $f$  non si trovava ancora nel settore  $j$  (non era ancora decollato).
- **Posizione B:** se all'istante  $t$  il volo  $f$  si trova nella posizione B, all'istante  $t - i_j^{ff'}$  il volo  $f$  decollava nel settore  $j$ . Risulta inoltre vero che all'istante  $t - i_j^{ff'} - 1$  il volo  $f$  non era ancora decollato.

Dunque per il volo  $f$  essere in una delle due posizioni all'istante  $t$  significa che:

- **Posizione A:** all'istante  $t - i_j^{ff'} + \Delta$  il volo  $f$  decollava dal settore  $j$ , e all'istante  $t - i_j^{ff'} + \Delta - 1$  non era ancora decollato. Ovvero:

$$\begin{aligned} y_j^f(t - i_j^{ff'} + \Delta) &= 1 \\ y_j^f(t - i_j^{ff'} + \Delta - 1) &= 0 \end{aligned}$$

e quindi:

$$y_j^f(t - i_j^{ff'} + \Delta) - y_j^f(t - i_j^{ff'} + \Delta - 1) = 1$$

- **Posizione B:** all'istante  $t - i_j^{ff'}$  il volo  $f$  decollava dal settore  $j$ , e all'istante  $t - i_j^{ff'} - 1$  non era ancora decollato. Ovvero:

$$\begin{aligned} y_j^f(t - i_j^{ff'}) &= 1 \\ y_j^f(t - i_j^{ff'} - 1) &= 0 \end{aligned}$$

e quindi:

$$y_j^f(t - i_j^{ff'}) - y_j^f(t - i_j^{ff'} - 1) = 1$$

Anche in questo caso è possibile dimostrare, come in precedenza, che:

- Se  $f$  all'istante  $t$  è in Posizione A allora non è in Posizione B;
- Se  $f$  all'istante  $t$  è in Posizione B allora non è in Posizione A;
- Se  $f$  all'istante  $t$  non è in una delle due posizioni critiche, i controlli relativi ad esse danno come esito 0.

### 5.3 Formulazione alternativa dei vincoli sul traffico e le condizioni di sicurezza

A questo punto, possiamo finalmente descrivere i nuovi vincoli relativi alla gestione del traffico e alle condizioni di sicurezza, includendo tutte le considerazioni fatte nelle sezioni precedenti.

Dato un settore  $\bar{j}$  e un istante  $t$ :

$$\begin{aligned} c_{\bar{j}}^{ff'}(t) \geq & \sum_{P(f, \bar{i})=\bar{j}, P(f, i)=j} \left\{ \left[ y_j^f(t - i_j^{ff'} + \Delta - 1) + y_j^f(t - i_j^{ff'} - 1) - y_j^f(t - i_j^{ff'} + \Delta) \right. \right. \\ & \left. \left. - y_j^f(t - i_j^{ff'}) \right] \right\} + a_j^{ff'}(t) + b_j^{ff'}(t) + \left[ y_{\bar{j}}^{f'}(t - i_{\bar{j}}^{f'f} + \Delta) - y_{\bar{j}}^{f'}(t - i_{\bar{j}}^{f'f} + \Delta - 1) \right. \\ & \left. + y_{\bar{j}}^{f'}(t - i_{\bar{j}}^{f'f}) - y_{\bar{j}}^{f'}(t - i_{\bar{j}}^{f'f} - 1) \right] - 1 \\ & \forall (f, f') \in C_{\bar{j}} : \bar{j} \neq P(f, 2), \bar{j} = P(f', 2), t \in \tau_{\bar{j}}^{ff'} \end{aligned} \tag{5.1a}$$

$$\begin{aligned}
c_{\bar{j}}^{ff'}(t) &\geq \left[ y_{\bar{j}}^f(t - i_{\bar{j}}^{ff'} + \Delta) - y_{\bar{j}}^f(t - i_{\bar{j}}^{ff'} + \Delta - 1) + y_{\bar{j}}^f(t - i_{\bar{j}}^{ff'}) - y_{\bar{j}}^f(t - i_{\bar{j}}^{ff'} - 1) \right] + \\
&\quad \sum_{\substack{P(f', \bar{i}) = \bar{j}, P(f', i) = j \\ 2 < i < \bar{i}, t \in \tau_j^{ff'}}} \left\{ \left[ y_j^{f'}(t - i_{\bar{j}}^{ff'} + \Delta - 1) + y_j^{f'}(t - i_{\bar{j}}^{ff'} - 1) \right. \right. \\
&\quad \left. \left. - y_j^{f'}(t - i_{\bar{j}}^{ff'} + \Delta) - y_j^{f'}(t - i_{\bar{j}}^{ff'}) \right] \right\} + a_j^{ff'}(t) + b_j^{ff'}(t) - 1 \\
&\quad \forall (f, f') \in C_{\bar{j}} : \bar{j} = P(f, 2), \bar{j} \neq P(f', 2), t \in \tau_j^{ff'}
\end{aligned} \tag{5.1b}$$

$$\begin{aligned}
c_{\bar{j}}^{ff'}(t) &\geq \left[ y_{\bar{j}}^f(t - i_{\bar{j}}^{ff'} + \Delta) - y_{\bar{j}}^f(t - i_{\bar{j}}^{ff'} + \Delta - 1) + y_{\bar{j}}^f(t - i_{\bar{j}}^{ff'}) - y_{\bar{j}}^f(t - i_{\bar{j}}^{ff'} - 1) \right] + \\
&\quad \left[ y_{\bar{j}}^{f'}(t - i_{\bar{j}}^{ff'} + \Delta) - y_{\bar{j}}^{f'}(t - i_{\bar{j}}^{ff'} + \Delta - 1) + y_{\bar{j}}^{f'}(t - i_{\bar{j}}^{ff'}) - y_{\bar{j}}^{f'}(t - i_{\bar{j}}^{ff'} - 1) \right] - 1 \\
&\quad \forall (f, f') \in C_{\bar{j}} : \bar{j} = P(f, 2), \bar{j} = P(f', 2), t \in \tau_j^{ff'}
\end{aligned} \tag{5.1c}$$

$$\begin{aligned}
c_{\bar{j}}^{ff'}(t) &\geq \left( \sum_{\substack{P(f, \bar{i}) = \bar{j}, P(f, i) = j \\ 2 < i < \bar{i}, t \in \tau_j^{ff'}}} \left\{ \left[ y_j^f(t - i_{\bar{j}}^{ff'} + \Delta - 1) + y_j^f(t - i_{\bar{j}}^{ff'} - 1) - y_j^f(t - i_{\bar{j}}^{ff'} + \Delta) \right. \right. \right. \\
&\quad \left. \left. - y_j^f(t - i_{\bar{j}}^{ff'}) \right] \right\} + \sum_{\substack{P(f', \bar{i}) = \bar{j}, P(f', i) = j \\ 2 < i < \bar{i}, t \in \tau_j^{ff'}}} \left\{ \left[ y_j^{f'}(t - i_{\bar{j}}^{ff'} + \Delta - 1) \right. \right. \\
&\quad \left. \left. + y_j^{f'}(t - i_{\bar{j}}^{ff'} - 1) - y_j^{f'}(t - i_{\bar{j}}^{ff'} + \Delta) - y_j^{f'}(t - i_{\bar{j}}^{ff'}) \right] \right\} + \\
&\quad \left. a_j^{ff'}(t) + a_j^{ff'}(t) + b_j^{ff'}(t) + b_j^{ff'}(t) \right) - 1 \\
&\quad \forall (f, f') \in C_{\bar{j}} : \bar{j} \neq P(f, 2), \bar{j} \neq P(f', 2), t \in \tau_j^{ff'}
\end{aligned} \tag{5.1d}$$

$$\sum_{(f,f') \in C_j} c_j^{ff'}(t) \leq (k_j^C(t) - M_j(t)) \cdot q_j(t) + M_j(t) \quad t \in \mathcal{T} \quad (5.2)$$

$$\begin{aligned} a_j^{ff'}(t) &\geq y_{j_1}^f(t - i_j^{ff'} + \Delta - 1) - y_{j_1}^f(t - i_j^{ff'} + \Delta) \\ \forall j \in \mathcal{J}, f \in \mathcal{F} : \exists f' \in \mathcal{F} \text{ t.c. : } (f, f') \in C_j : \bar{j} \neq P(f, 2), t \in \tau_j^{ff'} \end{aligned} \quad (5.3)$$

$$\begin{aligned} b_j^{ff'}(t) &\geq y_{j_1}^f(t - i_j^{ff'} - 1) - y_{j_1}^f(t - i_j^{ff'}) \\ \forall j \in \mathcal{J}, f \in \mathcal{F} : \exists f' \in \mathcal{F} \text{ t.c. : } (f, f') \in C_j : \bar{j} \neq P(f, 2), t \in \tau_j^{ff'} \end{aligned} \quad (5.4)$$

dove con  $j_1$  indichiamo il primo settore della rotta del volo  $f$ . Vediamo nel dettaglio come si comportano tali disequazioni.

Le disequazioni (5.3) – (5.4) servono per regolare il comportamento delle variabili  $a$  e  $b$ . Più precisamente, per la disequazione (5.3):

- Se  $[y_{j_1}^f(t - i_j^{ff'} + \Delta - 1) - y_{j_1}^f(t - i_j^{ff'} + \Delta)] = 0$  :

$$a_j^{ff'}(t) \geq 0$$

- Se  $[y_{j_1}^f(t - i_j^{ff'} + \Delta - 1) - y_{j_1}^f(t - i_j^{ff'} + \Delta)] = -1$  :

$$a_j^{ff'}(t) \geq 0$$

- Se  $[y_{j_1}^f(t - i_j^{ff'} + \Delta - 1) - y_{j_1}^f(t - i_j^{ff'} + \Delta)] = 1$  :

$$a_j^{ff'}(t) \geq 1 \implies a_j^{ff'}(t) = 1$$

Dunque tale disequazione obbliga la variabile  $a_j^{ff'}(t)$  ad assumere valore 1 ogni volta che il termine a destra è uguale a 1.

La disequazione (5.4) lavora in modo analogo ma regola il comportamento di  $b_j^{ff'}(t)$ .

I vincoli (5.1a) – (5.1d) – (5.2) servono a monitorare e contare le situazioni critiche. Il vincolo (5.2) è uguale al vincolo (3.11) del modello base, e pertanto serve a regolare l'aumento della capacità del settore in esame in relazione al numero totale di situazioni critiche registrate all'istante  $t$ .

I vincoli (5.1a) – (5.1d) servono ad assicurare che  $c_j^{ff'}(t)$  vala 1 all'istante  $t$  ogni volta che entrambi i voli si trovino in posizione critica. Ricordiam che valgono le seguenti relazioni:

$$\begin{aligned}
a_j^{ff'}(t) \quad \text{t.c. } [(A_f)] = 1 &\implies a_j^{ff'}(t) = 1 \\
a_j^{f'f}(t) \quad \text{t.c. } [(A_{f'})] = 1 &\implies a_j^{f'f}(t) = 1 \\
b_j^{ff'}(t) \quad \text{t.c. } [(B_f)] = 1 &\implies b_j^{ff'}(t) = 1 \\
b_j^{f'f}(t) \quad \text{t.c. } [(B_{f'})] = 1 &\implies b_j^{f'f}(t) = 1
\end{aligned}$$

dove:

$$\begin{aligned}
[(A_f)] &= [y_{j_1}^f(t - i_j^{ff'} + \Delta - 1) - y_{j_1}^f(t - i_j^{ff'} + \Delta)] \\
[(A_{f'})] &= [y_{j_1}^{f'}(t - i_j^{f'f} + \Delta - 1) - y_{j_1}^{f'}(t - i_j^{f'f} + \Delta)] \\
[(B_f)] &= [y_{j_1}^f(t - i_j^{ff'} - 1) - y_{j_1}^f(t - i_j^{ff'})] \\
[(B_{f'})] &= [y_{j_1}^{f'}(t - i_j^{f'f} - 1) - y_{j_1}^{f'}(t - i_j^{f'f})]
\end{aligned}$$

$j_1$  = primo settore della rotta.

Riscriviamo ora per comodità le sommatorie delle disequazioni nel seguente modo:

$$\sum_{\substack{P(f,\bar{i})=\bar{j}, P(f,i)=j \\ 2 < i < \bar{i}, t \in \tau_j^{ff'}}} \{[(I)]\} + \sum_{\substack{P(f',\bar{i})=\bar{j}, P(f',i)=j \\ 2 < i < \bar{i}, t \in \tau_j^{f'f}}} \{[(II)]\}$$

dove:

- $[(I)] = [y_j^f(t - i_j^{ff'} + \Delta - 1) + y_j^f(t - i_j^{ff'} - 1) - y_j^f(t - i_j^{ff'} + \Delta) - y_j^f(t - i_j^{ff'})]$   
= posizione volo  $f$ ;
- $[(II)] = [y_j^{f'}(t - i_j^{f'f} + \Delta - 1) + y_j^{f'}(t - i_j^{f'f} - 1) - y_j^{f'}(t - i_j^{f'f} + \Delta) - y_j^{f'}(t - i_j^{f'f})]$   
= posizione volo  $f'$ .

e poniamo inoltre:

- $[(III)] = [y_j^f(t - i_j^{ff'} + \Delta) + y_j^f(t - i_j^{ff'}) - y_j^f(t - i_j^{ff'} + \Delta - 1) - y_j^f(t - i_j^{ff'} - 1)]$   
= posizione volo  $f$ ;
- $[(IV)] = [y_j^{f'}(t - i_j^{f'f} + \Delta) + y_j^{f'}(t - i_j^{f'f}) - y_j^{f'}(t - i_j^{f'f} + \Delta - 1) - y_j^{f'}(t - i_j^{f'f} - 1)]$   
= posizione volo  $f'$ .

Le disequazioni (5.1a)-(5.1d) diventano:

$$c_j^{ff'}(t) \geq \sum_{\substack{P(f,\bar{i})=\bar{j}, P(f,i)=j \\ 2 < i < \bar{i}, t \in \tau_j^{ff'}}} \{[(I)]\} + a_j^{ff'}(t) + b_j^{ff'}(t) + [(IV)] - 1$$

$$\forall (f, f') \in C_{\bar{j}} : \bar{j} \neq P(f, 2), \bar{j} = P(f', 2) \quad (5.1a)$$

$$c_j^{f'f}(t) \geq [(III)] + \sum_{\substack{P(f',\bar{i})=\bar{j}, P(f',i)=j \\ 2 < i < \bar{i}, t \in \tau_j^{f'f}}} \{[(II)]\} + a_j^{f'f}(t) + b_j^{f'f}(t) - 1$$

$$\forall (f, f') \in C_{\bar{j}} : \bar{j} = P(f, 2), \bar{j} \neq P(f', 2) \quad (5.1b)$$

$$c_j^{ff'}(t) \geq [(III)] + [(IV)] - 1$$

$$\forall (f, f') \in C_{\bar{j}} : \bar{j} = P(f, 2), \bar{j} = P(f', 2) \quad (5.1c)$$



$$\begin{aligned}
c_{\bar{j}}^{ff'}(t) &\geq \sum_{\substack{P(f,\bar{i})=\bar{j}, P(f,i)=j \\ 2 < i < \bar{i}, t \in \tau_j^{ff'}}} \{[(I)]\} + \sum_{\substack{P(f',\bar{i})=\bar{j}, P(f',i)=j \\ 2 < i < \bar{i}, t \in \tau_j^{f'f}}} \{[(II)]\} + \\
&+ a_{\bar{j}}^{ff'}(t) + b_{\bar{j}}^{ff'}(t) + a_{\bar{j}}^{f'f}(t) + b_{\bar{j}}^{f'f}(t) - 1 \\
&\forall (f, f') \in C_{\bar{j}} : \bar{j} \neq P(f, 2), \bar{j} \neq P(f', 2) \quad (5.1d)
\end{aligned}$$

In particolare,  $\forall (f, f') \in C_{\bar{j}}$ , per la (5.1a) si ha:

- $\sum_{\substack{P(f,\bar{i})=\bar{j}, P(f,i)=j \\ 2 < i < \bar{i}, t \in \tau_j^{ff'}}} \{[(I)]\} + a_{\bar{j}}^{ff'}(t) + b_{\bar{j}}^{ff'}(t) + [(IV)] = 0:$   
 $c_{\bar{j}}^{ff'}(t) \geq -1;$
- $\sum_{\substack{P(f,\bar{i})=\bar{j}, P(f,i)=j \\ 2 < i < \bar{i}, t \in \tau_j^{ff'}}} \{[(I)]\} + a_{\bar{j}}^{ff'}(t) + b_{\bar{j}}^{ff'}(t) + [(IV)] = 1:$   
 $c_{\bar{j}}^{ff'}(t) \geq 0;$
- $\sum_{\substack{P(f,\bar{i})=\bar{j}, P(f,i)=j \\ 2 < i < \bar{i}, t \in \tau_j^{ff'}}} \{[(I)]\} + a_{\bar{j}}^{ff'}(t) + b_{\bar{j}}^{ff'}(t) + [(IV)] = 2:$   
 $c_{\bar{j}}^{ff'}(t) \geq 1 \implies c_{\bar{j}}^{ff'}(t) = 1.$

Per la (5.1b):

- $[(III)] + \sum_{\substack{P(f',\bar{i})=\bar{j}, P(f',i)=j \\ 2 < i < \bar{i}, t \in \tau_j^{f'f}}} \{[(II)]\} + a_{\bar{j}}^{f'f}(t) + b_{\bar{j}}^{f'f}(t) = 0:$   
 $c_{\bar{j}}^{f'f}(t) \geq -1;$
- $[(III)] + \sum_{\substack{P(f',\bar{i})=\bar{j}, P(f',i)=j \\ 2 < i < \bar{i}, t \in \tau_j^{f'f}}} \{[(II)]\} + a_{\bar{j}}^{f'f}(t) + b_{\bar{j}}^{f'f}(t) = 1:$   
 $c_{\bar{j}}^{f'f}(t) \geq 0;$
- $[(III)] + \sum_{\substack{P(f',\bar{i})=\bar{j}, P(f',i)=j \\ 2 < i < \bar{i}, t \in \tau_j^{f'f}}} \{[(II)]\} + a_{\bar{j}}^{f'f}(t) + b_{\bar{j}}^{f'f}(t) = 2:$   
 $c_{\bar{j}}^{f'f}(t) \geq 1 \implies c_{\bar{j}}^{f'f}(t) = 1.$

Per la (5.1c):

- $[(III)] + [(IV)] = 0:$

$$c_j^{ff'}(t) \geq -1;$$

- $[(III)] + [(IV)] = 1:$

$$c_j^{ff'}(t) \geq 0;$$

- $[(III)] + [(IV)] = 2:$

$$c_j^{ff'}(t) \geq 1 \implies c_j^{ff'}(t) = 1.$$

Per la (5.1d):

- $\sum_{P(f,\bar{i})=\bar{j}, P(f,i)=j} \{[(I)]\} + \sum_{P(f',\bar{i})=\bar{j}, P(f',i)=j} \{[(II)]\} + a_j^{ff'}(t) + b_j^{ff'}(t) +$   
 $\sum_{2 < i < \bar{i}, t \in \tau_j^{ff'}} a_j^{f'f}(t) + b_j^{f'f}(t) = 0:$

$$c_j^{ff'}(t) \geq -1;$$

- $\sum_{P(f,\bar{i})=\bar{j}, P(f,i)=j} \{[(I)]\} + \sum_{P(f',\bar{i})=\bar{j}, P(f',i)=j} \{[(II)]\} + a_j^{ff'}(t) + b_j^{ff'}(t) +$   
 $\sum_{2 < i < \bar{i}, t \in \tau_j^{ff'}} a_j^{f'f}(t) + b_j^{f'f}(t) = 1:$

$$c_j^{ff'}(t) \geq 0;$$

- $\sum_{P(f,\bar{i})=\bar{j}, P(f,i)=j} \{[(I)]\} + \sum_{P(f',\bar{i})=\bar{j}, P(f',i)=j} \{[(II)]\} + a_j^{ff'}(t) + b_j^{ff'}(t) +$   
 $\sum_{2 < i < \bar{i}, t \in \tau_j^{ff'}} a_j^{f'f}(t) + b_j^{f'f}(t) = 2:$

$$c_j^{ff'}(t) \geq 1 \implies c_j^{ff'}(t) = 1.$$

Dunque i vincoli (5.1a) – (5.1d) assicurano che  $c_j^{ff'}(t)$  valga 1 all'istante  $t$  ogni volta che entrambi i voli si trovano in posizione critica. Nel caso in cui nessuno dei due voli si trovi in posizione critica o soltanto uno dei due voli lo sia, allora  $c_j^{ff'}(t)$  è libera di assumere valore 0 o 1.

## 5.4 Confronto teorico delle formulazioni

Nelle sezioni precedenti abbiamo analizzato nel dettaglio un gruppo di vincoli che forniscono una formulazione alternativa delle variabili  $c_j^{ff'}(t)$ . Vogliamo ora mostrare che i nuovi vincoli risultano essere più forti rispetto a quelli che definiscono le variabili  $c_j^{ff'}(t)$  nel modello base.

Alla fine di questa sezione verrà inoltre inclusa la versione completa dei nuovi vincoli di traffico.

Fino ad ora abbiamo lavorato sotto le ipotesi enunciate nella Sezione 5.1, tra cui da ora manterremo solo  $\Delta_j = \Delta = \delta_j = \delta = 1$ .

A seconda dei valori di  $I_j^f$ ,  $I_j^{f'}$ ,  $i_j^{ff'}$  e  $i_j^{f'f}$ , vi sono vari scenari possibili da analizzare, in quanto la forma dei vincoli cambia leggermente. Sono possibili in totale 16 scenari differenti, come riportato in Tabella 5.1.

SCENARI	$\Delta_j \leq i_j^{ff'} - 1$ $\Delta_j \leq i_j^{f'f} - 1$	$\Delta_j \leq i_j^{ff'} - 1$ $\Delta_j \geq i_j^{f'f}$	$\Delta_j \geq i_j^{ff'}$ $\Delta_j \leq i_j^{f'f} - 1$	$\Delta_j \geq i_j^{ff'}$ $\Delta_j \geq i_j^{f'f}$
$\delta_j \leq I_j^f - i_j^{ff'} - 1$ $\delta_j \leq I_j^{f'} - i_j^{f'f} - 1$	(1)	(2)	(3)	(4)
$\delta_j \leq I_j^f - i_j^{ff'} - 1$ $\delta_j \geq I_j^{f'} - i_j^{f'f}$	(5)	(6)	(7)	(8)
$\delta_j \geq I_j^f - i_j^{ff'}$ $\delta_j \leq I_j^{f'} - i_j^{f'f} - 1$	(9)	(10)	(11)	(12)
$\delta_j \geq I_j^f - i_j^{ff'}$ $\delta_j \geq I_j^{f'} - i_j^{f'f}$	(13)	(14)	(15)	(16)

**Tabella 5.1** : Possibili scenari.

Mostriamo solo il caso dello Scenario (1), che è quello con cui abbiamo la-

vorato fino a questo punto, in quanto gli scenari restanti si analizzano allo stesso modo e danno gli stessi risultati, poiché cambiano solo alcuni istanti di tempo in cui vengono valutate le variabili  $y_j^f(t)$ .

Nel confronto andremo a considerare i vincoli riguardanti il conteggio delle situazioni critiche presentati nel Capitolo 5, in quanto abbiamo già mostrato che essi sono più forti rispetto a quelli presentati nel modello base. Abbiamo:

$$\begin{aligned} & y_j^f(t + I_j^f - i_j^{ff'}) + y_j^f(t + \Delta_j - i_j^{ff'}) + \\ & y_j^{f'}(t + I_j^{f'} - i_j^{f'f}) + y_j^{f'}(t + \Delta_j - i_j^{f'f}) \leq c_j^{ff'}(t) + 3 \end{aligned} \quad (3.7a')$$

$$\forall j \in \mathcal{J}, (f, f') \in \mathcal{C}_j : \Delta_j \leq i_j^{ff'} - 1 \wedge \Delta_j \leq i_j^{f'f} - 1, t \in \tau_j^{ff'}$$

$$\begin{aligned} & y_j^f(t + I_j^f - i_j^{ff'}) + y_j^f(t + \Delta_j - i_j^{ff'}) + \\ & y_j^{f'}(t - i_j^{f'f}) + y_j^{f'}(t + I_j^{f'} - i_j^{f'f} - \delta_j) \leq c_j^{ff'}(t) + 3 \end{aligned} \quad (3.8a')$$

$$\forall j \in \mathcal{J}, (f, f') \in \mathcal{C}_j : \Delta_j \leq i_j^{ff'} - 1 \wedge \Delta_j \leq i_j^{f'f} - 1, t \in \tau_j^{ff'}$$

$$\begin{aligned} & y_j^f(t - i_j^{ff'}) + y_j^f(t + I_j^f - i_j^{ff'} - \delta_j) + \\ & y_j^{f'}(t + I_j^{f'} - i_j^{f'f}) + y_j^{f'}(t + \Delta_j - i_j^{f'f}) \leq c_j^{ff'}(t) + 3 \end{aligned} \quad (3.9a')$$

$$\forall j \in \mathcal{J}, (f, f') \in \mathcal{C}_j : \Delta_j \leq i_j^{ff'} - 1 \wedge \Delta_j \leq i_j^{f'f} - 1, t \in \tau_j^{ff'}$$

$$\begin{aligned} & y_j^f(t - i_j^{ff'}) + y_j^f(t + I_j^f - i_j^{ff'} - \delta_j) + \\ & y_j^{f'}(t - i_j^{f'f}) + y_j^{f'}(t + I_j^{f'} - i_j^{f'f} - \delta_j) \leq c_j^{ff'}(t) + 3 \end{aligned} \quad (3.10a')$$

$$\forall j \in \mathcal{J}, (f, f') \in \mathcal{C}_j : \Delta_j \leq i_j^{ff'} - 1 \wedge \Delta_j \leq i_j^{f'f} - 1, t \in \tau_j^{ff'}$$

$$\sum_{(f, f') \in \mathcal{C}_j} c_j^{ff'}(t) \leq (k_j^C(t) - M_j(t))q_j(t) + M_j(t) \quad (3.11)$$

$$\forall j \in \mathcal{J}, t \in \mathcal{T}$$

I vincoli (3.7a') – (3.10a') servono per stabilire se i voli  $f$  e  $f'$  si trovano in posizione critica, in particolare:

- (3.7a') stabilisce se  $f$  e  $f'$  si trovano in Posizione A;
- (3.8a') stabilisce se  $f$  si trova in Posizione A e  $f'$  si trova in Posizione B;

- (3.9a') stabilisce se  $f$  si trova in Posizione B e  $f'$  si trova in Posizione A;
- (3.7a') stabilisce se  $f$  e  $f'$  si trovano in Posizione B.

Solo se si verifica uno dei precedenti casi la variabile  $c_j^{ff'}(t)$  viene posta uguale ad 1, altrimenti essa è libera di valere 0 o 1.

La stessa funzione viene ricoperta dai vincoli (5.1a)–(5.1d), i quali obbligano  $c_j^{ff'}(t)$  a valere 1 se si verifica uno dei precedenti casi, altrimenti è libera di valere 0 o 1.

Vogliamo ora dimostrare che i vincoli (5.1a) – (5.1d) sono più stringenti rispetto ai vincoli (3.7a') – (3.10a').

Consideriamo una coppia di voli  $(f, f') \in C_{\bar{j}} : \bar{j} \neq P(f, 2), \bar{j} \neq P(f', 2)$ .

Dunque il confrontiamo il vincolo (5.1d) con i vincoli (3.7a') – (3.10a').

Introduciamo le seguenti notazioni:

$$\begin{aligned}
[C1] &= y_j^f(t + I_j^f - i_j^{ff'}) + y_j^f(t + \Delta_j - i_j^{ff'}) + y_j^{f'}(t + I_j^{f'} - i_j^{f'f}) + y_j^{f'}(t + \Delta_j - i_j^{f'f}) \\
[C2i] &= y_j^f(t + I_j^f - i_j^{ff'}) + y_j^f(t + \Delta_j - i_j^{ff'}) + y_j^{f'}(t - i_j^{f'f}) + y_j^{f'}(t + I_j^{f'} - i_j^{f'f} - \delta_j) \\
[C2ii] &= y_j^f(t - i_j^{ff'}) + y_j^f(t + I_j^f - i_j^{ff'} - \delta_j) + y_j^{f'}(t + I_j^{f'} - i_j^{f'f}) + y_j^{f'}(t + \Delta_j - i_j^{f'f}) \\
[C3] &= y_j^f(t - i_j^{ff'}) + y_j^f(t + I_j^f - i_j^{ff'} - \delta_j) + y_j^{f'}(t - i_j^{f'f}) + y_j^{f'}(t + I_j^{f'} - i_j^{f'f} - \delta_j)
\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
[Z] &= \left( \sum_{\substack{P(f, \bar{i})=\bar{j}, P(f, i)=j \\ 2 < i < \bar{i}, t \in \tau_j^{ff'}}} \left\{ \left[ y_j^f(t - i_j^{ff'} + \Delta - 1) + y_j^f(t - i_j^{ff'} - 1) - y_j^f(t - i_j^{ff'} + \Delta) \right. \right. \right. \\
&\quad \left. \left. \left. - y_j^f(t - i_j^{ff'}) \right] \right\} + \sum_{\substack{P(f', \bar{i})=\bar{j}, P(f', i)=j \\ 2 < i < \bar{i}, t \in \tau_j^{f'f}}} \left\{ \left[ y_j^{f'}(t - i_j^{f'f} + \Delta - 1) \right. \right. \right. \\
&\quad \left. \left. \left. + y_j^{f'}(t - i_j^{f'f} - 1) - y_j^{f'}(t - i_j^{f'f} + \Delta) - y_j^{f'}(t - i_j^{f'f}) \right] \right\} + \right. \\
&\quad \left. a_j^{ff'}(t) + a_j^{f'f}(t) + b_j^{ff'}(t) + b_j^{f'f}(t) \right)
\end{aligned}$$

Riscriviamo i vincoli in esame nel seguente modo:

$$c_j^{ff'}(t) \geq ([C1] - 2) - 1 \quad (3.7a')$$

$$c_j^{ff'}(t) \geq ([C2i] - 2) - 1 \quad (3.8a')$$

$$c_j^{ff'}(t) \geq ([C12ii] - 2) - 1 \quad (3.9a')$$

$$c_j^{ff'}(t) \geq ([C3] - 2) - 1 \quad (3.10a')$$

$$c_j^{ff'}(t) \geq [Z] - 1 \quad (5.1d)$$

Prima di procedere con il confronto, bisogna eseguire una precisazione sul funzionamento dei vincoli (3.7a') – (3.10a').

È importante notare innanzitutto che in ognuno dei vincoli si ha:

$$[C1] = 4 \implies ([C1] - 2) - 1 = 1 \implies c_j^{ff'}(t) = 1 \quad (3.7a')$$

$$[C2i] = 4 \implies ([C2i] - 2) - 1 = 1 \implies c_j^{ff'}(t) = 1 \quad (3.8a')$$

$$[C2ii] = 4 \implies ([C2ii] - 2) - 1 = 1 \implies c_j^{ff'}(t) = 1 \quad (3.9a')$$

$$[C3] = 4 \implies ([C3] - 2) - 1 = 1 \implies c_j^{ff'}(t) = 1 \quad (3.10a')$$

Tuttavia, per come sono definiti, soltanto uno dei termini  $[C1]$ ,  $[C2i]$ ,  $[C2ii]$  e  $[C3]$  può valere 4 all'istante  $t$ . In particolare si ha:

$$[C1] + [C2i] + [C2ii] + [C3] < 16$$

Quindi ad esempio;

$$[C1] = 4 \implies \begin{cases} [C2i] < 4 \\ [C2ii] < 4 \\ [C3] < 4 \end{cases}$$

Per questo motivo, ha senso confrontare il vincolo (5.1d) con il "massimo" tra i vincoli (3.7a') – (3.10a'). Ovvero, per ogni istante  $t$ , consideriamo

il  $\max\{[C1], [C2i], [C2ii], [C3]\}$  e confrontiamo (5.1d) con il vincolo in cui compare il termine massimo.

Di seguito riportiamo solo il caso in cui  $\max\{[C1], [C2i], [C2ii], [C3]\} = [C1]$ , tuttavia i restanti casi sono analoghi.

Confrontiamo quindi il vincolo (3.7a') con il vincolo (5.1d).

Si ha:

$$c_j^{ff'}(t) \geq ([C1] - 2) - 1 \quad (3.7a')$$

$$c_j^{ff'}(t) \geq [Z] - 1 \quad (5.2d)$$

Consideriamo i termini a destra. Per mostrare che il vincolo (5.1d) è più forte, vogliamo che si verifichi:

$$[Z] - 1 \geq ([C1] - 2) - 1$$

Riscriviamo ora i termini  $[Z]$ ,  $[C1] - 2$  nella loro forma estesa, separando i controlli relativi al volo  $f$  da quelli relativi al volo  $f'$ . Inoltre, poiché il vincolo (3.7a') serve per verificare se i voli si trovano in Posizione A, separiamo nel termine in  $[Z]$  i controlli relativi alla Posizione B. Supponiamo che il punto di incrocio non si trovi nel primo settore della rotta dei due voli, e supponiamo infine che gli istanti di tempo considerati non siano istanti di decollo per i due voli.

Otteniamo:

$$\begin{aligned}
[Z] = & \sum_{\substack{P(f,\bar{i})=\bar{j}, P(f,i)=j \\ 2 < i < \bar{i}, t \in \tau_j^{ff'}}} \left\{ \left[ y_j^f(t - i_j^{ff'} + \Delta - 1) - y_j^f(t - i_j^{ff'} + \Delta) \right] \right\} + \\
& \sum_{\substack{P(f',\bar{i})=\bar{j}, P(f',i)=j \\ 2 < i < \bar{i}, t \in \tau_j^{f'f}}} \left\{ \left[ y_j^{f'}(t - i_j^{f'f} + \Delta - 1) - y_j^{f'}(t - i_j^{f'f} + \Delta) \right] \right\} + \\
& \left( \sum_{\substack{P(f,\bar{i})=\bar{j}, P(f,i)=j \\ 2 < i < \bar{i}, t \in \tau_j^{ff'}}} \left\{ \left[ y_j^f(t - i_j^{ff'} - 1) - y_j^f(t - i_j^{ff'}) \right] \right\} + \right. \\
& + \sum_{\substack{P(f',\bar{i})=\bar{j}, P(f',i)=j \\ 2 < i < \bar{i}, t \in \tau_j^{f'f}}} \left\{ \left[ y_j^{f'}(t - i_j^{f'f} - 1) - y_j^{f'}(t - i_j^{f'f}) \right] \right\} + a_j^{ff'}(t) + \\
& \left. + a_j^{f'f}(t) + b_j^{ff'}(t) + b_j^{f'f}(t) \right)
\end{aligned}$$

Per comodità, indichiamo con:

$$\begin{aligned}
[P] = & \left( \sum_{\substack{P(f,\bar{i})=\bar{j}, P(f,i)=j \\ 2 < i < \bar{i}, t \in \tau_j^{ff'}}} \left\{ \left[ y_j^f(t - i_j^{ff'} - 1) - y_j^f(t - i_j^{ff'}) \right] \right\} + \right. \\
& + \sum_{\substack{P(f',\bar{i})=\bar{j}, P(f',i)=j \\ 2 < i < \bar{i}, t \in \tau_j^{f'f}}} \left\{ \left[ y_j^{f'}(t - i_j^{f'f} - 1) \right. \right. \\
& \left. \left. - y_j^{f'}(t - i_j^{f'f}) \right] \right\} + a_j^{ff'}(t) + a_j^{f'f}(t) + b_j^{ff'}(t) + b_j^{f'f}(t) \left. \right)
\end{aligned}$$



Per cui abbiamo:

$$[C1] - 2 = \left[ y_j^f(t + I_j^f - i_j^{ff'}) + y_j^f(t + \Delta_j - i_j^{ff'}) + y_j^{f'}(t + I_j^{f'} - i_j^{f'f}) + y_j^{f'}(t + \Delta_j - i_j^{f'f}) \right] - 2$$

$$[Z] = \sum_{\substack{P(f, \bar{i}) = \bar{j}, P(f, i) = j \\ 2 < i < \bar{i}, t \in \tau_j^{ff'}}} \left\{ \left[ y_j^f(t - i_j^{ff'} + \Delta - 1) - y_j^f(t - i_j^{ff'} + \Delta) \right] \right\} + \sum_{\substack{P(f', \bar{i}) = \bar{j}, P(f', i) = j \\ 2 < i < \bar{i}, t \in \tau_j^{f'f}}} \left\{ \left[ y_j^{f'}(t - i_j^{f'f} + \Delta - 1) - y_j^{f'}(t - i_j^{f'f} + \Delta) \right] \right\} + [P]$$

Per alleggerire la notazione, chiamiamo:

$$\begin{aligned} [A^f] &= y_j^f(t + I_j^f - i_j^{ff'}) \\ [B^f] &= y_j^f(t + \Delta_j - i_j^{ff'}) \\ [A^{f'}] &= y_j^{f'}(t + I_j^{f'} - i_j^{f'f}) \\ [B^{f'}] &= y_j^{f'}(t + \Delta_j - i_j^{f'f}) \end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
[Z1^f] &= \sum_{\substack{P(f,\bar{i})=\bar{j}, P(f,i)=j \\ 2 < i < \bar{i}, t \in \tau_j^{ff'}}} \left\{ \left[ y_j^f(t - i_j^{ff'} + \Delta - 1) \right] \right\} \\
[Z2^f] &= \sum_{\substack{P(f,\bar{i})=\bar{j}, P(f,i)=j \\ 2 < i < \bar{i}, t \in \tau_j^{ff'}}} \left\{ \left[ y_j^f(t - i_j^{ff'} + \Delta) \right] \right\} \\
[Z1^{f'}] &= \sum_{\substack{P(f',\bar{i})=\bar{j}, P(f',i)=j \\ 2 < i < \bar{i}, t \in \tau_j^{f'f}}} \left\{ \left[ y_j^{f'}(t - i_j^{f'f} + \Delta - 1) \right] \right\} \\
[Z2^{f'}] &= \sum_{\substack{P(f',\bar{i})=\bar{j}, P(f',i)=j \\ 2 < i < \bar{i}, t \in \tau_j^{f'f}}} \left\{ \left[ y_j^{f'}(t - i_j^{f'f} + \Delta) \right] \right\}
\end{aligned}$$

ottenendo:

$$\begin{aligned}
[C1] - 2 &= [A^f] + [B^f] + [A^{f'}] + [B^{f'}] - 2 \\
[Z] &= ([Z1^f] - [Z2^f]) + ([Z1^{f'}] - [Z2^{f'}]) + [P]
\end{aligned}$$

con:

$$\left\{ \begin{array}{l} [A^f] \in \{0, 1\} \\ [B^f] \in \{0, 1\} \\ [A^{f'}] \in \{0, 1\} \\ [B^{f'}] \in \{0, 1\} \end{array} \right. \quad \left\{ \begin{array}{l} [Z1^f] \in \{0, 1\} \\ [Z2^f] \in \{0, 1\} \\ [Z1^{f'}] \in \{0, 1\} \\ [Z2^{f'}] \in \{0, 1\} \\ [P] \in \{0, 1\} \end{array} \right.$$

Come mostrato con il Teorema 5.1 e il Teorema 5.2, sappiamo che quando i voli  $f$  e  $f'$  si trovano entrambi in posizione critica, si ha:

$$\left\{ \begin{array}{l} [A^f] = 1 \\ [B^f] = 1 \\ [A^{f'}] = 1 \\ [B^{f'}] = 1 \end{array} \right. \quad \left\{ \begin{array}{l} [Z1^f] = 1 \\ [Z2^f] = 0 \\ [Z1^{f'}] = 1 \\ [Z2^{f'}] = 0 \\ [P] = 0 \end{array} \right.$$

ovvero:

$$(\bullet) \left\{ \begin{array}{l} [A^f] = [B^f] = [A^{f'}] = [B^{f'}] = [Z1^f] = [Z1^{f'}] = 1 \\ [Z2^f] = [Z2^{f'}] = [P] = 0 \end{array} \right.$$

e nei vincoli si avrebbe:

$$c_j^{ff'}(t) \geq 1 \quad (3.7a')$$

$$c_j^{ff'}(t) \geq 1 \quad (5.1d)$$

Poniamoci ora nel caso continuo, ovvero supponiamo:

$$\left\{ \begin{array}{l} [A^f] \in [0, 1] \\ [B^f] \in [0, 1] \\ [A^{f'}] \in [0, 1] \\ [B^{f'}] \in [0, 1] \end{array} \right. \quad \left\{ \begin{array}{l} [Z1^f] \in [0, 1] \\ [Z2^f] \in [0, 1] \\ [Z1^{f'}] \in [0, 1] \\ [Z2^{f'}] \in [0, 1] \\ [P] \in [0, 1] \end{array} \right.$$

Abbiamo visto i termini  $[Z]$  e  $[C1] - 2$  assumono valore massimo quando vale la relazione  $(\bullet)$ , e se essa si verifica la situazione è analoga a quella descritta nel caso discreto.

Cerchiamo ora di capire quale è il valore massimo che questi termini possono assumere quando non possono valere tutti 1.

Ricordiamo che i vincoli in esame sono i seguenti;

$$c_j^{f,f'}(t) \geq ([C1] - 2) - 1 \quad (3.7a')$$

$$c_j^{f,f'}(t) \geq [Z] - 1 \quad (5.1d)$$

I massimi valori che il termine  $([C1] - 2)$  può assumere al variare dei termini  $[A^f], [B^f], [A^{f'}], [B^{f'}]$  sono i seguenti:

**1c:** Un termine uguale a  $m \in [0, 1)$  e gli altri termini uguali ad 1, ad esempio:

$$\begin{cases} [A^f] = m < 1 \\ [B^f] = [A^{f'}] = [B^{f'}] = 1 \end{cases} \implies ([C1] - 2) = m + 1$$

**2c:** Due termini uguali a  $m \in [0, 1)$  e gli altri termini uguali ad 1, ad esempio:

$$\begin{cases} [A^f] = [B^f] = m < 1 \\ [A^{f'}] = [B^{f'}] = 1 \end{cases} \implies ([C1] - 2) = 2m$$

**3c:** Tre termini uguali a  $m \in [0, 1)$  e un termini uguale ad 1, ad esempio:

$$\begin{cases} [A^f] = [B^f] = [A^{f'}] = m < 1 \\ [B^{f'}] = 1 \end{cases} \implies ([C1] - 2) = 3m - 1$$

**4c:** Tutti i termini uguali a  $m \in [0, 1)$ :

$$\{ [A^f] = [B^f] = [A^{f'}] = [B^{f'}] = m < 1 \implies ([C1] - 2) = 4m - 2$$

I massimi valori che il termine  $[Z]$  può invece assumere sono:

**1z:** Un termine uguale a  $m \in [0, 1)$ , un termine uguale a 1 e gli altri termini

uguali ad 1, ad esempio:

$$\left\{ \begin{array}{l} [Z1^f] = m < 1 \\ [Z1^{f'}] = 1 \\ [Z2^f] = [Z2^{f'}] = 0 \end{array} \right. \implies [Z] = m + 1$$

**2z:** Due termini uguali a  $m \in [0, 1)$  e due termini uguali a zero:

$$\left\{ \begin{array}{l} [Z1^f] = [Z1^{f'}] = m < 1 \\ [Z2^f] = [Z2^{f'}] = 0 \end{array} \right. \implies [Z] = 2m$$

Notiamo che se si verifica una situazione come la (1c), in cui tre termini sono pari a 1, significa che un volo si trova in posizione critica. Ma poiché i teoremi 5.4 e 5.5 mostrano che i controlli relativi alle posizioni critiche nei due vincoli sono equivalenti, questo significa che anche il corrispondente vincolo (5.1d) deve registrare la posizione critica, per cui si dovrà verificare una situazione di tipo (1z).

Confrontiamo ora i valori dei termini  $[Z]$  e  $([C1] - 2)$ :

- Confronto tra (1c) e (1z):

$$\left\{ \begin{array}{l} ([C1] - 2) = m + 1 \\ ([Z]) = m + 1 \end{array} \right.$$

I due vincoli sono dunque equivalenti.

- Confronto tra (2c) e (1z):

$$\left\{ \begin{array}{l} ([C1] - 2) = 2m \\ ([Z]) = m + 1 \end{array} \right. \longleftrightarrow \left\{ \begin{array}{l} ([C1] - 2) = m + m \\ ([Z]) = m + 1 \end{array} \right. \xrightarrow{m \leq 1} ([C1] - 2) < [Z]$$

- Confronto tra (2c) e (2z):

$$\begin{cases} ([C1] - 2) = 2m \\ ([Z]) = 2m \end{cases}$$

I due vincoli sono quindi equivalenti.

- Confronto tra (3c) e (1z):

$$\begin{cases} ([C1] - 2) = 3m - 1 \\ ([Z]) = m + 1 \end{cases} \longleftrightarrow \begin{cases} ([C1] - 2) = m + (m + m - 1) \\ ([Z]) = m + 1 \end{cases}$$

Tuttavia, poiché si ha:

$$m < 1 \longleftrightarrow m + m < 2 \longleftrightarrow m + m - 1 < 1$$

vale dunque:

$$m + (m + m - 1) < m + 1 \implies ([C1] - 2) < [Z]$$

- Confronto tra (3c) e (2z):

$$\begin{cases} ([C1] - 2) = 3m - 1 \\ ([Z]) = 2m \end{cases} \longleftrightarrow \begin{cases} ([C1] - 2) = 2m - (1 - m) \\ ([Z]) = 2m \end{cases} \stackrel{m \leq 1}{\implies} ([C1] - 2) < [Z]$$

- Confronto tra (4c) e (1z):

$$\begin{cases} ([C1] - 2) = 4m - 2 \\ ([Z]) = m + 1 \end{cases} \longleftrightarrow \begin{cases} ([C1] - 2) = m + (m + m + m - 1) \\ ([Z]) = m + 1 \end{cases}$$

Tuttavia, poiché si ha:

$$m < 1 \longleftrightarrow m + m < 2 \longleftrightarrow m + m + m < 3 \longleftrightarrow m + m + m - 2 < 1$$

vale dunque:

$$m + (m + m + m - 2) < m + 1 \implies ([C1] - 2) < [Z]$$

- Confronto tra (4c) e (2z):

$$\begin{cases} ([C1] - 2) = 4m - 2 \\ ([Z]) = 2m \end{cases} \longleftrightarrow \begin{cases} ([C1] - 2) = 2m - 2(1 - m) \\ ([Z]) = 2m \end{cases} \xrightarrow{m \leq 1} ([C1] - 2) < [Z]$$

Da questa analisi risulta  $[Z] - 1 \geq ([C1] - 2) - 1$ , e dunque che il vincolo (5.1d) è più forte del vincolo (3.7a').

Nel caso in cui gli istanti di tempo che consideriamo siano di decollo per uno dei due voli o per entrambi, cambia leggermente l'espressione del termine  $[Z]$  ma il procedimento è analogo.

Ad esempio, supponiamo che per il volo  $f$  gli istanti di tempo considerati siano istanti di decollo (rimaniamo tuttavia nell'ipotesi che il punto di incrocio non sia nel primo settore della rotta dei voli).

Ricordiamo che in questo caso è la variabile  $a_j^{ff'}(t)$  a monitorare la posizione del volo  $f$ , attraverso il vincolo (5.3):

$$a_j^{ff'}(t) \geq y_{j_1}^f(t - i_j^{ff'} + \Delta - 1) - y_{j_1}^f(t - i_j^{ff'} + \Delta),$$

dove  $j_1$  indica il primo settore della rotta del volo  $f$ . Se il volo  $f$  all'istante  $t$  si trovasse in posizione di critica, si avrebbe:

$$\begin{cases} y_{j_1}^f(t - i_j^{ff'} + \Delta - 1) = 1 \\ y_{j_1}^f(t - i_j^{ff'} + \Delta) = 0 \end{cases} \implies a_j^{ff'}(t) = 1$$

Ricordiamo inoltre che per la Proprietà P1 si avrebbe:

$$\begin{aligned} y_j^f(t - i_j^{ff'} + \Delta) = 1 & \xrightarrow{\mathbf{P1}} y_{j'}^f(t - i_j^{ff'} + \Delta) = 0 \quad \forall j' \neq j \\ y_{j_1}^f(t - i_j^{ff'} + \Delta - 1) = 1 & \xrightarrow{\mathbf{P1}} y_{j'}^f(t - i_j^{ff'} + \Delta - 1) = 0 \quad \forall j' \neq j_1 \end{aligned}$$

Il termine  $[Z]$  diventa:

$$\begin{aligned}
[Z] = & \sum_{\substack{P(f,\bar{i})=\bar{j}, P(f,i)=j \\ 2 < i < \bar{i}, t \in \tau_j^{f'f}}} \left\{ \left[ y_j^f(t - i_j^{f'f} + \Delta - 1) - y_j^f(t - i_j^{f'f} + \Delta) \right] \right\} + a_j^{f'f}(t) + \\
& \sum_{\substack{P(f',\bar{i})=\bar{j}, P(f',i)=j \\ 2 < i < \bar{i}, t \in \tau_j^{f'f}}} \left\{ \left[ y_j^{f'}(t - i_j^{f'f} + \Delta - 1) - y_j^{f'}(t - i_j^{f'f} + \Delta) \right] \right\} + \\
& \left( \sum_{\substack{P(f,\bar{i})=\bar{j}, P(f,i)=j \\ 2 < i < \bar{i}, t \in \tau_j^{f'f}}} \left\{ \left[ y_j^f(t - i_j^{f'f} - 1) - y_j^f(t - i_j^{f'f}) \right] \right\} + \right. \\
& \left. + \sum_{\substack{P(f',\bar{i})=\bar{j}, P(f',i)=j \\ 2 < i < \bar{i}, t \in \tau_j^{f'f}}} \left\{ \left[ y_j^{f'}(t - i_j^{f'f} - 1) - y_j^{f'}(t - i_j^{f'f}) \right] \right\} + a_j^{f'f}(t) + b_j^{f'f}(t) + b_j^{f'f}(t) \right)
\end{aligned}$$

Per comodità, indichiamo con:

$$\begin{aligned}
[P] = & \left( \sum_{\substack{P(f,\bar{i})=\bar{j}, P(f,i)=j \\ 2 < i < \bar{i}, t \in \tau_j^{f'f}}} \left\{ \left[ y_j^f(t - i_j^{f'f} - 1) - y_j^f(t - i_j^{f'f}) \right] \right\} + \right. \\
& \left. + \sum_{\substack{P(f',\bar{i})=\bar{j}, P(f',i)=j \\ 2 < i < \bar{i}, t \in \tau_j^{f'f}}} \left\{ \left[ y_j^{f'}(t - i_j^{f'f} - 1) - y_j^{f'}(t - i_j^{f'f}) \right] \right\} + a_j^{f'f}(t) + b_j^{f'f}(t) + b_j^{f'f}(t) \right)
\end{aligned}$$

Per cui abbiamo:

$$\begin{aligned}
[Z] = & \sum_{\substack{P(f,\bar{i})=\bar{j}, P(f,i)=j \\ 2 < i < \bar{i}, t \in \tau_j^{f'f}}} \left\{ \left[ y_j^f(t - i_j^{f'f} + \Delta - 1) - y_j^f(t - i_j^{f'f} + \Delta) \right] \right\} + a_j^{f'f}(t) + \\
& \sum_{\substack{P(f',\bar{i})=\bar{j}, P(f',i)=j \\ 2 < i < \bar{i}, t \in \tau_j^{f'f}}} \left\{ \left[ y_j^{f'}(t - i_j^{f'f} + \Delta - 1) - y_j^{f'}(t - i_j^{f'f} + \Delta) \right] \right\} + [P]
\end{aligned}$$



mentre il termine  $([C1] - 2)$  resta invariato. Riprendendo la notazione precedente:

$$\begin{aligned}
[A^f] &= y_j^f(t + I_j^f - i_j^{ff'}) \\
[B^f] &= y_j^f(t + \Delta_j - i_j^{ff'}) \\
[A^{f'}] &= y_j^{f'}(t + I_j^{f'} - i_j^{f'f}) \\
[B^{f'}] &= y_j^{f'}(t + \Delta_j - i_j^{f'f}) \\
[Z1^f] &= \sum_{\substack{P(f,\bar{i})=\bar{j}, P(f,i)=j \\ 2 < i < \bar{i}, t \in \tau_j^{ff'}}} \left\{ \left[ y_j^f(t - i_{\bar{j}}^{ff'} + \Delta - 1) \right] \right\} \\
[Z2^f] &= \sum_{\substack{P(f,\bar{i})=\bar{j}, P(f,i)=j \\ 2 < i < \bar{i}, t \in \tau_j^{ff'}}} \left\{ \left[ y_j^f(t - i_{\bar{j}}^{ff'} + \Delta) \right] \right\} \\
[Z1^{f'}] &= \sum_{\substack{P(f',\bar{i})=\bar{j}, P(f',i)=j \\ 2 < i < \bar{i}, t \in \tau_j^{f'f}}} \left\{ \left[ y_j^{f'}(t - i_{\bar{j}}^{f'f} + \Delta - 1) \right] \right\} \\
[Z2^{f'}] &= \sum_{\substack{P(f',\bar{i})=\bar{j}, P(f',i)=j \\ 2 < i < \bar{i}, t \in \tau_j^{f'f}}} \left\{ \left[ y_j^{f'}(t - i_{\bar{j}}^{f'f} + \Delta) \right] \right\}
\end{aligned}$$

si ottiene:

$$\begin{aligned}
[C1] - 2 &= [A^f] + [B^f] + [A^{f'}] + [B^{f'}] - 2 \\
[Z] &= ([Z1^f] - [Z2^f] + a_j^{ff'}(t)) + ([Z1^{f'}] - [Z2^{f'}]) + [P]
\end{aligned}$$

con:

$$\left\{ \begin{array}{l} [A^f] \in \{0, 1\} \\ [B^f] \in \{0, 1\} \\ [A^{f'}] \in \{0, 1\} \\ [B^{f'}] \in \{0, 1\} \end{array} \right. \left\{ \begin{array}{l} [Z1^f] \in \{0, 1\} \\ [Z2^f] \in \{0, 1\} \\ [Z1^{f'}] \in \{0, 1\} \\ [Z2^{f'}] \in \{0, 1\} \\ a_j^{ff'}(t) \in \{0, 1\} \\ [P] \in \{0, 1\} \end{array} \right.$$

Come abbiamo visto nelle Sezioni 5.1, 5.2 e 5.3, quando i voli  $f$  e  $f'$  si trovano entrambi in posizione critica si ha:

$$\left\{ \begin{array}{l} [A^f] = 1 \\ [B^f] = 1 \\ [A^{f'}] = 1 \\ [B^{f'}] = 1 \end{array} \right. \left\{ \begin{array}{l} [Z1^f] = 0 \\ [Z2^f] = 0 \\ [Z1^{f'}] = 1 \\ [Z2^{f'}] = 0 \\ a_j^{ff'}(t) = 1 \\ [P] = 0 \end{array} \right.$$

ovvero:

$$(\bullet) \left\{ \begin{array}{l} [A^f] = [B^f] = [A^{f'}] = [B^{f'}] = a_j^{ff'}(t) = [Z1^{f'}] = 1 \\ [Z2^f] = [Z2^{f'}] = [P] = [Z1^f] = 0 \end{array} \right.$$

e nei vincoli si avrebbe:

$$c_j^{ff'}(t) \geq 1 \quad (3.7a')$$

$$c_j^{ff'}(t) \geq 1 \quad (5.1d)$$

Poniamoci ora nel caso continuo, ovvero supponiamo:

$$\left\{ \begin{array}{l} [A^f] \in [0, 1] \\ [B^f] \in [0, 1] \\ [A^{f'}] \in [0, 1] \\ [B^{f'}] \in [0, 1] \end{array} \right. \left\{ \begin{array}{l} [Z1^f] \in [0, 1] \\ [Z2^f] \in [0, 1] \\ [Z1^{f'}] \in [0, 1] \\ [Z2^{f'}] \in [0, 1] \\ a_j^{ff'}(t) \in [0, 1] \\ [P] \in [0, 1] \end{array} \right.$$

Come nell'altro caso, i termini  $[Z]$  e  $[C1] - 2$  assumono valore massimo quando vale la relazione  $(\bullet)$ , e se essa si verifica la situazione è analoga a quella descritta nel caso discreto. Studiamo quindi il comportamento di questi termini quando non possono assumere tutti valore 1.

I massimi valori che il termine  $([C1] - 2)$  può assumere al variare dei termini  $[A^f], [B^f], [A^{f'}], [B^{f'}]$  sono quelli elencati in precedenza.

I massimi valori che il termine  $[Z]$  può assumere sono:

**1z:**

$$\left\{ \begin{array}{l} [Z1^{f'}] = 1 \\ a_j^{ff'} + [Z1^f] = m < 1 \implies [Z] = m + 1 \\ [Z2^f] = [Z2^{f'}] = 0 \end{array} \right.$$

**2z:**

$$\left\{ \begin{array}{l} a_j^{ff'} = 1 \\ [Z1^{f'}] = m < 1 \implies [Z] = m + 1 \\ [Z1^f] = [Z2^f] = [Z2^{f'}] = 0 \end{array} \right.$$

**3z:**

$$\left\{ \begin{array}{l} [Z1^{f'}] = m < 1 \\ a_j^{ff'} + [Z1^f] = m < 1 \implies [Z] = 2m \\ [Z2^f] = [Z2^{f'}] = 0 \end{array} \right.$$

Anche in questo caso, notiamo che se si verifica una situazione come la (1c),

in cui tre termini sono pari a 1, significa che un volo si trova in posizione critica, per cui si dovrà verificare una situazione di tipo (1z) o (2z).

Il restante confronto dei termini è analogo al confronto precedente.

Per confrontare il vincolo (5.1d) con gli altri vincoli (3.8a')–(3.9a')–(3.10a') si procede allo stesso modo, ovvero si prende il  $\max\{[C1], [C2i], [C2ii], [C3]\}$  ed il corrispettivo vincolo, e si eseguono i confronti come riportato in precedenza.

Nel caso in cui il punto di incrocio si trovi nel primo settore della rotta per uno dei due voli o per entrambi, il procedimento è analogo solo che invece del vincolo (5.1d) va considerato uno degli altri vincoli (5.1a) – (5.1b) – (5.1c).

La trattazione presentata in questa sezione ci permette dunque di dimostrare il seguente risultato:

**Teorema 5.3.** *Supponiamo valgano le seguenti ipotesi:*

$$\left\{ \begin{array}{l} \Delta_j = \Delta = 1 \\ \delta_j = \delta = 1 \\ \Delta \leq i_j^{ff'} - 1 \\ \Delta \leq i_j^{f'f} - 1 \\ \delta \leq I_j^f - i_j^{ff'} - 1 \\ \delta \leq I_j^{f'} - i_j^{f'f} - 1 \end{array} \right.$$

Allora i vincoli (5.1a) – (5.4) dominano i vincoli (3.7a) – (3.11) del modello di partenza.

Questo risultato può essere esteso agli altri scenari descritti nella Tabella 5.1, ottenendo così il seguente teorema:

**Teorema 5.4.** *I vincoli (5.1a) – (5.4) dominano i vincoli (3.7a) – (3.11) del modello di partenza.*

I teoremi 5.3 e 5.4 mostrano che i vincoli (3.7a) – (3.11), che in [6] permettono di monitorare le condizioni sul traffico e di sicurezza, possono

essere sostituiti e sono dominati dai vincoli che, per completezza, riportiamo qui nella loro versione integrale.

$$\begin{aligned}
c_j^{ff'}(t) \geq & \sum_{\substack{P(f,\bar{i})=\bar{j}, P(f,i)=j \\ 2 < i < \bar{i}, t \in \tau_j^{ff'}}} \left\{ \left[ y_j^f(t - i_j^{ff'} + \Delta - 1) + y_j^f(t - i_j^{ff'} - 1) - y_j^f(t - i_j^{ff'} + \Delta) \right. \right. \\
& \left. \left. - y_j^f(t - i_j^{ff'}) \right] \right\} + a_j^{ff'}(t) + b_j^{ff'}(t) + \left[ y_j^{f'}(t - i_j^{ff'} + \Delta) - y_j^{f'}(t - i_j^{ff'} + \Delta - 1) \right. \\
& \left. + y_j^{f'}(t - i_j^{ff'}) - y_j^{f'}(t - i_j^{ff'} - 1) \right] - 1 \\
& \forall \bar{j} \in \mathcal{J}, \forall (f, f') \in C_{\bar{j}} : \bar{j} \neq P(f, 2), \bar{j} = P(f', 2), \\
& \Delta_{\bar{j}} \leq i_j^{ff'} - 1 \wedge \Delta_{\bar{j}} \leq i_j^{f'f} - 1, t \in \tau_j^{ff'}
\end{aligned} \tag{5.1a}$$

$$\begin{aligned}
c_j^{ff'}(t) \geq & \left[ y_j^f(t - i_j^{ff'} + \Delta) - y_j^f(t - i_j^{ff'} + \Delta - 1) + y_j^f(t - i_j^{ff'}) - y_j^f(t - i_j^{ff'} - 1) \right] + \\
& \sum_{\substack{P(f',\bar{i})=\bar{j}, P(f',i)=j \\ 2 < i < \bar{i}, t \in \tau_j^{f'f}}} \left\{ \left[ y_j^{f'}(t - i_j^{f'f} + \Delta - 1) + y_j^{f'}(t - i_j^{f'f} - 1) \right. \right. \\
& \left. \left. - y_j^{f'}(t - i_j^{f'f} + \Delta) - y_j^{f'}(t - i_j^{f'f}) \right] \right\} + a_j^{f'f}(t) + b_j^{f'f}(t) - 1 \\
& \forall \bar{j} \in \mathcal{J}, \forall (f, f') \in C_{\bar{j}} : \bar{j} = P(f, 2), \bar{j} \neq P(f', 2), \\
& \Delta_{\bar{j}} \leq i_j^{ff'} - 1 \wedge \Delta_{\bar{j}} \leq i_j^{f'f} - 1, t \in \tau_j^{ff'}
\end{aligned} \tag{5.1b}$$

$$\begin{aligned}
c_{\bar{j}}^{ff'}(t) &\geq \left[ y_{\bar{j}}^f(t - i_{\bar{j}}^{ff'} + \Delta) - y_{\bar{j}}^f(t - i_{\bar{j}}^{ff'} + \Delta - 1) + y_{\bar{j}}^f(t - i_{\bar{j}}^{ff'}) - y_{\bar{j}}^f(t - i_{\bar{j}}^{ff'} - 1) \right] + \\
&\quad \left[ y_{\bar{j}}^{f'}(t - i_{\bar{j}}^{f'f} + \Delta) - y_{\bar{j}}^{f'}(t - i_{\bar{j}}^{f'f} + \Delta - 1) + y_{\bar{j}}^{f'}(t - i_{\bar{j}}^{f'f}) - y_{\bar{j}}^{f'}(t - i_{\bar{j}}^{f'f} - 1) \right] - 1 \\
&\quad \forall \bar{j} \in \mathcal{J}, \forall (f, f') \in C_{\bar{j}} : \bar{j} = P(f, 2), \bar{j} = P(f', 2), \\
&\quad \Delta_{\bar{j}} \leq i_{\bar{j}}^{ff'} - 1 \wedge \Delta_{\bar{j}} \leq i_{\bar{j}}^{f'f} - 1, t \in \tau_{\bar{j}}^{ff'}
\end{aligned} \tag{5.1c}$$

$$\begin{aligned}
c_{\bar{j}}^{ff'}(t) &\geq \left( \sum_{\substack{P(f, \bar{i}) = \bar{j}, P(f, i) = j \\ 2 < i < \bar{i}, t \in \tau_{\bar{j}}^{ff'}}} \left\{ \left[ y_{\bar{j}}^f(t - i_{\bar{j}}^{ff'} + \Delta - 1) + y_{\bar{j}}^f(t - i_{\bar{j}}^{ff'} - 1) - y_{\bar{j}}^f(t - i_{\bar{j}}^{ff'} + \Delta) \right. \right. \right. \\
&\quad \left. \left. \left. - y_{\bar{j}}^f(t - i_{\bar{j}}^{ff'}) \right] \right\} + \sum_{\substack{P(f', \bar{i}) = \bar{j}, P(f', i) = j \\ 2 < i < \bar{i}, t \in \tau_{\bar{j}}^{f'f}}} \left\{ \left[ y_{\bar{j}}^{f'}(t - i_{\bar{j}}^{f'f} + \Delta - 1) \right. \right. \\
&\quad \left. \left. \left. + y_{\bar{j}}^{f'}(t - i_{\bar{j}}^{f'f} - 1) - y_{\bar{j}}^{f'}(t - i_{\bar{j}}^{f'f} + \Delta) - y_{\bar{j}}^{f'}(t - i_{\bar{j}}^{f'f}) \right] \right\} + \right. \\
&\quad \left. a_{\bar{j}}^{ff'}(t) + a_{\bar{j}}^{f'f}(t) + b_{\bar{j}}^{ff'}(t) + b_{\bar{j}}^{f'f}(t) \right) - 1 \\
&\quad \forall \bar{j} \in \mathcal{J}, \forall (f, f') \in C_{\bar{j}} : \bar{j} \neq P(f, 2), \bar{j} \neq P(f', 2), \\
&\quad \Delta_{\bar{j}} \leq i_{\bar{j}}^{ff'} - 1 \wedge \Delta_{\bar{j}} \leq i_{\bar{j}}^{f'f} - 1, t \in \tau_{\bar{j}}^{ff'}
\end{aligned} \tag{5.1d}$$

$$\begin{aligned}
c_j^{ff'}(t) &\geq \sum_{\substack{P(f, \bar{i})=\bar{j}, P(f, i)=j \\ 2 < i < \bar{i}, t \in \tau_j^{ff'}}} \left\{ \left[ y_j^f(t-1) + y_j^f(t - i_j^{ff'} - 1) - y_j^f(t) \right. \right. \\
&\quad \left. \left. - y_j^f(t - i_j^{ff'}) \right] \right\} + a_j^{ff'}(t) + b_j^{ff'}(t) + \left[ y_j^{f'}(t - i_j^{f'f} + \Delta) - y_j^{f'}(t - i_j^{f'f} + \Delta - 1) \right. \\
&\quad \left. + y_j^{f'}(t - i_j^{f'f}) - y_j^{f'}(t - i_j^{f'f} - 1) \right] - 1 \\
&\forall \bar{j} \in \mathcal{J}, \forall (f, f') \in C_{\bar{j}} : \bar{j} \neq P(f, 2), \bar{j} = P(f', 2), \\
&\Delta_{\bar{j}} \geq i_j^{ff'} \wedge \Delta_{\bar{j}} \leq i_j^{f'f} - 1, t \in \tau_j^{ff'}
\end{aligned} \tag{5.2a}$$

$$\begin{aligned}
c_j^{ff'}(t) &\geq \left[ y_j^f(t) - y_j^f(t-1) + y_j^f(t - i_j^{ff'}) - y_j^f(t - i_j^{ff'} - 1) \right] + \\
&\quad \sum_{\substack{P(f', \bar{i})=\bar{j}, P(f', i)=j \\ 2 < i < \bar{i}, t \in \tau_j^{f'f}}} \left\{ \left[ y_j^{f'}(t - i_j^{f'f} + \Delta - 1) + y_j^{f'}(t - i_j^{f'f} - 1) \right. \right. \\
&\quad \left. \left. - y_j^{f'}(t - i_j^{f'f} + \Delta) - y_j^{f'}(t - i_j^{f'f}) \right] \right\} + a_j^{f'f}(t) + b_j^{f'f}(t) - 1 \\
&\forall \bar{j} \in \mathcal{J}, \forall (f, f') \in C_{\bar{j}} : \bar{j} = P(f, 2), \bar{j} \neq P(f', 2), \\
&\Delta_{\bar{j}} \geq i_j^{f'f} \wedge \Delta_{\bar{j}} \leq i_j^{ff'} - 1, t \in \tau_j^{f'f}
\end{aligned} \tag{5.2b}$$

$$\begin{aligned}
c_j^{ff'}(t) &\geq \left[ y_j^f(t) - y_j^f(t-1) + y_j^f(t - i_j^{ff'}) - y_j^f(t - i_j^{ff'} - 1) \right] + \\
&\quad \left[ y_j^{f'}(t - i_j^{f'f} + \Delta) - y_j^{f'}(t - i_j^{f'f} + \Delta - 1) + y_j^{f'}(t - i_j^{f'f}) - y_j^{f'}(t - i_j^{f'f} - 1) \right] - 1 \\
&\forall \bar{j} \in \mathcal{J}, \forall (f, f') \in C_{\bar{j}} : \bar{j} = P(f, 2), \bar{j} = P(f', 2), \\
&\Delta_{\bar{j}} \geq i_j^{ff'} \wedge \Delta_{\bar{j}} \leq i_j^{f'f} - 1, t \in \tau_j^{ff'}
\end{aligned} \tag{5.2c}$$

$$\begin{aligned}
c_{\bar{j}}^{ff'}(t) \geq & \left( \sum_{\substack{P(f,\bar{i})=\bar{j}, P(f,i)=j \\ 2 < i < \bar{i}, t \in \tau_j^{ff'}}} \left\{ \left[ y_j^f(t-1) + y_j^f(t - i_j^{ff'} - 1) - y_j^f(t) \right. \right. \right. \\
& \left. \left. \left. - y_j^f(t - i_j^{ff'}) \right] \right\} + \sum_{\substack{P(f',\bar{i})=\bar{j}, P(f',i)=j \\ 2 < i < \bar{i}, t \in \tau_j^{f'f}}} \left\{ \left[ y_j^{f'}(t - i_j^{f'f} + \Delta - 1) \right. \right. \\
& \left. \left. \left. + y_j^{f'}(t - i_j^{f'f} - 1) - y_j^{f'}(t - i_j^{f'f} + \Delta) - y_j^{f'}(t - i_j^{f'f}) \right] \right\} + \\
& \left. a_j^{ff'}(t) + a_j^{f'f}(t) + b_j^{ff'}(t) + b_j^{f'f}(t) \right) - 1 \\
\forall \bar{j} \in \mathcal{J}, \forall (f, f') \in C_{\bar{j}} : \bar{j} \neq P(f, 2), \bar{j} \neq P(f', 2), \\
\Delta_{\bar{j}} \geq i_j^{ff'} \wedge \Delta_{\bar{j}} \leq i_j^{f'f} - 1, t \in \tau_j^{ff'}
\end{aligned} \tag{5.2d}$$

$$\begin{aligned}
c_{\bar{j}}^{ff'}(t) \geq & \sum_{\substack{P(f,\bar{i})=\bar{j}, P(f,i)=j \\ 2 < i < \bar{i}, t \in \tau_j^{ff'}}} \left\{ \left[ y_j^f(t - i_j^{ff'} + \Delta - 1) + y_j^f(t - i_j^{ff'} - 1) - y_j^f(t - i_j^{ff'} + \Delta) \right. \right. \\
& \left. \left. \left. - y_j^f(t - i_j^{ff'}) \right] \right\} + a_j^{ff'}(t) + b_j^{ff'}(t) + \left[ y_{\bar{j}}^{f'}(t) - y_{\bar{j}}^{f'}(t-1) \right. \\
& \left. \left. + y_{\bar{j}}^{f'}(t - i_{\bar{j}}^{f'f}) - y_{\bar{j}}^{f'}(t - i_{\bar{j}}^{f'f} - 1) \right] - 1 \\
\forall \bar{j} \in \mathcal{J}, \forall (f, f') \in C_{\bar{j}} : \bar{j} \neq P(f, 2), \bar{j} = P(f', 2), \\
\Delta_{\bar{j}} \leq i_{\bar{j}}^{ff'} - 1 \wedge \Delta_{\bar{j}} \geq i_{\bar{j}}^{f'f}, t \in \tau_{\bar{j}}^{ff'}
\end{aligned} \tag{5.3a}$$



$$\begin{aligned}
c_{\bar{j}}^{f'f'}(t) &\geq \left[ y_{\bar{j}}^f(t - i_{\bar{j}}^{ff'} + \Delta) - y_{\bar{j}}^f(t - i_{\bar{j}}^{ff'} + \Delta - 1) + y_{\bar{j}}^f(t - i_{\bar{j}}^{ff'}) - y_{\bar{j}}^f(t - i_{\bar{j}}^{ff'} - 1) \right] + \\
&\quad \sum_{\substack{P(f', \bar{i}) = \bar{j}, P(f', i) = j \\ 2 < i < \bar{i}, t \in \tau_j^{f'f}}} \left\{ \left[ y_j^{f'}(t - 1) + y_j^{f'}(t - i_{\bar{j}}^{f'f} - 1) \right. \right. \\
&\quad \left. \left. - y_j^{f'}(t) - y_j^{f'}(t - i_{\bar{j}}^{f'f}) \right] \right\} + a_j^{f'f}(t) + b_j^{f'f}(t) - 1 \\
&\quad \forall \bar{j} \in \mathcal{J}, \forall (f, f') \in C_{\bar{j}} : \bar{j} = P(f, 2), \bar{j} \neq P(f', 2), \\
&\quad \Delta_{\bar{j}} \leq i_{\bar{j}}^{ff'} - 1 \wedge \Delta_{\bar{j}} \geq i_{\bar{j}}^{f'f}, t \in \tau_{\bar{j}}^{ff'}
\end{aligned} \tag{5.3b}$$

$$\begin{aligned}
c_{\bar{j}}^{f'f'}(t) &\geq \left[ y_{\bar{j}}^f(t - i_{\bar{j}}^{ff'} + \Delta) - y_{\bar{j}}^f(t - i_{\bar{j}}^{ff'} + \Delta - 1) + y_{\bar{j}}^f(t - i_{\bar{j}}^{ff'}) - y_{\bar{j}}^f(t - i_{\bar{j}}^{ff'} - 1) \right] + \\
&\quad \left[ y_{\bar{j}}^{f'}(t) - y_{\bar{j}}^{f'}(t - 1) + y_{\bar{j}}^{f'}(t - i_{\bar{j}}^{f'f}) - y_{\bar{j}}^{f'}(t - i_{\bar{j}}^{f'f} - 1) \right] - 1 \\
&\quad \forall \bar{j} \in \mathcal{J}, \forall (f, f') \in C_{\bar{j}} : \bar{j} = P(f, 2), \bar{j} = P(f', 2), \\
&\quad \Delta_{\bar{j}} \leq i_{\bar{j}}^{ff'} - 1 \wedge \Delta_{\bar{j}} \geq i_{\bar{j}}^{f'f}, t \in \tau_{\bar{j}}^{ff'}
\end{aligned} \tag{5.3c}$$

$$\begin{aligned}
c_j^{ff'}(t) \geq & \left( \sum_{\substack{P(f,\bar{i})=\bar{j}, P(f,i)=j \\ 2 < i < \bar{i}, t \in \tau_j^{ff'}}} \left\{ \left[ y_j^f(t - i_j^{ff'} + \Delta - 1) + y_j^f(t - i_j^{ff'} - 1) - y_j^f(t - i_j^{ff'} + \Delta) \right. \right. \right. \\
& \left. \left. \left. - y_j^f(t - i_j^{ff'}) \right] \right\} + \sum_{\substack{P(f',\bar{i})=\bar{j}, P(f',i)=j \\ 2 < i < \bar{i}, t \in \tau_j^{f'f}}} \left\{ \left[ y_j^{f'}(t - 1) \right. \right. \\
& \left. \left. \left. + y_j^{f'}(t - i_j^{f'f} - 1) - y_j^{f'}(t) - y_j^{f'}(t - i_j^{f'f}) \right] \right\} + \\
& \left. a_j^{ff'}(t) + a_j^{f'f}(t) + b_j^{ff'}(t) + b_j^{f'f}(t) \right) - 1 \\
& \forall \bar{j} \in \mathcal{J}, \forall (f, f') \in C_{\bar{j}} : \bar{j} \neq P(f, 2), \bar{j} \neq P(f', 2), \\
& \Delta_{\bar{j}} \leq i_j^{ff'} - 1 \wedge \Delta_{\bar{j}} \geq i_j^{f'f}, t \in \tau_j^{ff'}
\end{aligned} \tag{5.3d}$$

$$\begin{aligned}
c_j^{ff'}(t) \geq & \sum_{\substack{P(f,\bar{i})=\bar{j}, P(f,i)=j \\ 2 < i < \bar{i}, t \in \tau_j^{ff'}}} \left\{ \left[ y_j^f(t - 1) + y_j^f(t - i_j^{ff'} - 1) - y_j^f(t) \right. \right. \\
& \left. \left. \left. - y_j^f(t - i_j^{ff'}) \right] \right\} + a_j^{ff'}(t) + b_j^{ff'}(t) + \left[ y_j^{f'}(t) - y_j^{f'}(t - 1) \right. \\
& \left. \left. + y_j^{f'}(t - i_j^{f'f}) - y_j^{f'}(t - i_j^{f'f} - 1) \right] - 1 \\
& \forall \bar{j} \in \mathcal{J}, \forall (f, f') \in C_{\bar{j}} : \bar{j} \neq P(f, 2), \bar{j} = P(f', 2), \\
& \Delta_{\bar{j}} \geq i_j^{ff'} \wedge \Delta_{\bar{j}} \geq i_j^{f'f}, t \in \tau_j^{ff'}
\end{aligned} \tag{5.4a}$$

$$\begin{aligned}
c_j^{ff'}(t) &\geq \left[ y_j^f(t) - y_j^f(t-1) + y_j^f(t - i_j^{ff'}) - y_j^f(t - i_j^{ff'} - 1) \right] + \\
&\quad \sum_{\substack{P(f', \bar{i}) = \bar{j}, P(f', i) = j \\ 2 < i < \bar{i}, t \in \tau_j^{ff'}}} \left\{ \left[ y_j^{f'}(t-1) + y_j^{f'}(t - i_j^{ff'} - 1) \right. \right. \\
&\quad \left. \left. - y_j^{f'}(t) - y_j^{f'}(t - i_j^{ff'}) \right] \right\} + a_j^{ff'}(t) + b_j^{ff'}(t) - 1 \\
&\quad \forall \bar{j} \in \mathcal{J}, \forall (f, f') \in C_{\bar{j}} : \bar{j} = P(f, 2), \bar{j} \neq P(f', 2), \\
&\quad \Delta_{\bar{j}} \geq i_j^{ff'} \wedge \Delta_{\bar{j}} \geq i_j^{f'f}, t \in \tau_j^{ff'}
\end{aligned} \tag{5.4b}$$

$$\begin{aligned}
c_j^{ff'}(t) &\geq \left[ y_j^f(t) - y_j^f(t-1) + y_j^f(t - i_j^{ff'}) - y_j^f(t - i_j^{ff'} - 1) \right] + \\
&\quad \left[ y_j^{f'}(t) - y_j^{f'}(t-1) + y_j^{f'}(t - i_j^{f'f}) - y_j^{f'}(t - i_j^{f'f} - 1) \right] - 1 \\
&\quad \forall \bar{j} \in \mathcal{J}, \forall (f, f') \in C_{\bar{j}} : \bar{j} = P(f, 2), \bar{j} = P(f', 2), \\
&\quad \Delta_{\bar{j}} \geq i_j^{ff'} \wedge \Delta_{\bar{j}} \geq i_j^{f'f}, t \in \tau_j^{ff'}
\end{aligned} \tag{5.4c}$$

$$\begin{aligned}
c_j^{ff'}(t) \geq & \left( \sum_{\substack{P(f,\bar{i})=\bar{j}, P(f,i)=j \\ 2 < i < \bar{i}, t \in \tau_j^{ff'}}} \left\{ \left[ y_j^f(t-1) + y_j^f(t - i_j^{ff'} - 1) - y_j^f(t) \right. \right. \right. \\
& \left. \left. \left. - y_j^f(t - i_j^{ff'}) \right] \right\} + \sum_{\substack{P(f',\bar{i})=\bar{j}, P(f',i)=j \\ 2 < i < \bar{i}, t \in \tau_j^{f'f}}} \left\{ \left[ y_j^{f'}(t-1) \right. \right. \\
& \left. \left. \left. + y_j^{f'}(t - i_j^{f'f} - 1) - y_j^{f'}(t) - y_j^{f'}(t - i_j^{f'f}) \right] \right\} + \right. \\
& \left. a_j^{ff'}(t) + a_j^{f'f}(t) + b_j^{ff'}(t) + b_j^{f'f}(t) \right) - 1 \\
& \forall \bar{j} \in \mathcal{J}, \forall (f, f') \in C_{\bar{j}} : \bar{j} \neq P(f, 2), \bar{j} \neq P(f', 2), \\
& \Delta_{\bar{j}} \geq i_j^{ff'} \wedge \Delta_{\bar{j}} \geq i_j^{f'f}, t \in \tau_j^{ff'}
\end{aligned} \tag{5.4d}$$

$$\sum_{(f, f') \in C_j} c_j^{ff'}(t) \leq (k_j^C(t) - M_j(t)) \cdot q_j(t) + M_j(t) \quad \forall j \in \mathcal{J}, \forall t \in \mathcal{T} \tag{5.5}$$

$$\begin{aligned}
a_j^{ff'}(t) & \geq y_{j_1}^f(t - i_j^{ff'} + \Delta - 1) - y_{j_1}^f(t - i_j^{ff'} + \Delta) \\
\forall j \in \mathcal{J}, f \in \mathcal{F} : \exists f' \in \mathcal{F} \text{ t.c. : } & (f, f') \in C_j : \bar{j} \neq P(f, 2), t \in \tau_j^{ff'}, \\
& \Delta_j \leq i_j^{ff'} - 1
\end{aligned} \tag{5.6a}$$

$$\begin{aligned}
a_j^{f'f}(t) & \geq y_{j_1}^f(t - 1) - y_{j_1}^f(t) \\
\forall j \in \mathcal{J}, f \in \mathcal{F} : \exists f' \in \mathcal{F} \text{ t.c. : } & (f, f') \in C_j : \bar{j} \neq P(f, 2), t \in \tau_j^{f'f}, \\
& \Delta_j \geq i_j^{f'f}
\end{aligned} \tag{5.6b}$$

$$\begin{aligned}
b_j^{ff'}(t) &\geq y_{j_1}^f(t - i_j^{ff'} - 1) - y_{j_1}^f(t - i_j^{ff'}) \\
\forall j \in \mathcal{J}, f \in \mathcal{F} : \exists f' \in \mathcal{F} \text{ t.c. : } (f, f') \in C_j : \bar{j} \neq P(f, 2), t \in \tau_j^{ff'}
\end{aligned}
\tag{5.7}$$

dove con  $j_1$  indichiamo il primo settore della rotta del volo  $f$ .

## 5.5 Dimensione del modello

Determinare la dimensione del modello significa dare una stima del numero di variabili e del numero di vincoli presenti nel modello. Rispetto al modello descritto in [6], la dimensione del modello contenente i vincoli descritti in questo capitolo risulta essere più elevata, in quanto sono presenti vincoli e variabili aggiuntive.

Le stime dei parametri non cambiano, e dunque riprendendo le notazioni di [6] si ha:

- sia  $T$  la massima cardinalità dell'insieme degli istanti di tempo ammissibili per un volo per entrare all'interno di un settore, ovvero:

$$T = \max_{f \in \mathcal{F}, j \in P_j} |T_j^f|;$$

- sia  $N$  il massimo numero di elementi (settori e aeroporti) contenuti nella traiettoria di un volo, ovvero:

$$N = \max_{f \in \mathcal{F}} |N_f|;$$

- sia  $I$  il massimo numero di istanti di tempo che un volo impiega per attraversare un settore, ovvero:

$$I = \max_{f \in \mathcal{F}, j \in P_j} |I_j^f|;$$

- sia  $C$  il massimo numero di potenziali conflitti che si verificano all'in-

terno di un settore, ovvero:

$$C = \max_{j \in \mathcal{I}} |C_j|;$$

- Numero totale dei voli:  $|\mathcal{F}|$ ;
- Numero totale degli aeroporti:  $|\mathcal{K}|$ ;
- Numero totale dei settori:  $|\mathcal{J}|$ ;
- Numero totale degli istanti di tempo:  $|\mathcal{T}|$ .

Per le variabili  $x_j^f(t)$ ,  $y_j^f(t)$ ,  $c_j^{ff'}(t)$  e  $q_j(t)$  le stime risultano le stesse descritte in [6], ovvero:

- Upperbound sul numero di variabili  $x$ :  $|\mathcal{F}|NT$ ;
- Upperbound sul numero di variabili  $y$ :  $|\mathcal{F}|N(T + I)$ ;
- Upperbound sul numero di variabili  $c$ :  $|\mathcal{J}|C(T + I)$ ;
- Upperbound sul numero di variabili  $q$ :  $|\mathcal{J}||\mathcal{T}|$ .

A queste vanno aggiunte le stime sulle variabili  $a_j^{ff'}(t)$  e  $b_j^{ff'}(t)$ , per cui vale la stessa stima delle variabili  $c$ .

Per quanto riguarda il numero di vincoli del modello, nel caso dei vincoli che descrivono la relazione tra le variabili  $x$  e  $y$ , dei vincoli di capacità, dei vincoli di connettività, dei vincoli che guidano l'aumento di capacità nei settori ed dei vincoli di non trivialità della soluzione e di consistenza temporale, la stima risulta la stessa proposta in [6]. Cambia invece la stima del numero dei vincoli che descrivono le situazioni critiche e il numero dei vincoli che impongono che le variabili del modello siano tutte binarie.

I vincoli (5.1a) – (5.4d), (5.6a) – (5.7) sono in totale:

$$4 \cdot 4 \left( \sum_{j \in \mathcal{J}} \sum_{(f,f') \in \mathcal{C}_j} |\tau_j^{ff'}| \right) + 2 \left( \sum_{j \in \mathcal{J}} \sum_{(f,f') \in \mathcal{C}_j} |\tau_j^{ff'}| \right) + \left( \sum_{j \in \mathcal{J}} \sum_{(f,f') \in \mathcal{C}_j} |\tau_j^{ff'}| \right)$$

I vincoli sul numero totale di variabili binarie del modello è pari a:

$$\sum_{f \in \mathcal{F}} \sum_{j \in P_j} (2|I_j^f| + I_j^f) + 3 \left( \sum_{j \in \mathcal{J}} \sum_{(f, f') \in \mathcal{C}_j} |\tau_j^{ff'}| \right) + |\mathcal{J}||\mathcal{T}|$$

Un upperbound sul numero di vincoli è dunque il seguente:

$$\begin{aligned} & |\mathcal{F}|N(T + I) + 2|\mathcal{K}||\mathcal{T}| + |\mathcal{J}||\mathcal{T}| + |\mathcal{F}|NT + 19|\mathcal{J}|C(T + I) + \\ & + |\mathcal{J}||\mathcal{T}| + 2|\mathcal{F}|NT + |\mathcal{F}|N(2T + I) + 3|\mathcal{J}|C(T + I) + |\mathcal{J}||\mathcal{T}| \end{aligned}$$

ovvero, riarrangiando i termini:

$$2|\mathcal{F}|N(3T + I) + 2|\mathcal{K}||\mathcal{T}| + 3|\mathcal{J}||\mathcal{T}| + 22|\mathcal{J}|C(T + I).$$

Ricordiamo che l'upperbound del modello descritto in [6] era pari a:

$$2|\mathcal{F}|N(3T + I) + 2|\mathcal{K}||\mathcal{T}| + 3|\mathcal{J}||\mathcal{T}| + 5|\mathcal{J}|C(T + I),$$

il che significa che la dimensione del modello con i vincoli alternativi descritti in questo capitolo risulta essere più grande rispetto alla dimensione del modello in [6] e la differenza è pari a  $17|\mathcal{J}|C(T + I)$ .

## Capitolo 6

# Implementazione del modello

All'interno di questo capitolo presentiamo alcuni dettagli per l'implementazione dei modelli e delle procedure utili per i test computazionali. In particolare, riportiamo la possibilità di rafforzare la formulazione con la separazione di disuguaglianze valide di tipo *cover*, e descriviamo il tipo di istanze generate per testare il nostro modello e i tipi di prove effettuate. Per generare le istanze abbiamo utilizzato il linguaggio di programmazione Python [9], mentre per i restanti aspetti computazionali abbiamo sfruttato il risolutore algebrico di modelli AMPL [1].

### 6.1 Cover Inequalities

Come riportato nella Sezione 4.4, nei nostri modelli è presente un vincolo che ha la forma di un *vincolo di zaino*: il vincolo (3.11).

Per questo motivo, abbiamo deciso di sfruttare tale vincolo per ricercare delle *cover inequalities* che ci consentissero di rafforzare la formulazione del modello. Per fare ciò, abbiamo implementato un algoritmo per la risoluzione del problema di separazione per le *cover inequalities* [19]. Data una soluzione ottima  $\bar{x}$  del rilassamento continuo, l'obiettivo di tale problema è quello di determinare se esiste una *cover inequality* violata da tale soluzione. Con riferimento alla notazione usata nella Sezione 4.4, questo significa determinare se esiste un sottoinsieme  $C \subset \{1, \dots, n\}$  tale che:



$$(i) \sum_{i \in C} w_i \geq M_j(t) + k_j^C(t) + 1;$$

$$(ii) \sum_{i \in C} \bar{x}_i \geq |C| - 1.$$

Tale problema può essere modellizzato attraverso il seguente problema di programmazione lineare:

$$\begin{aligned} \min \quad & \sum_{i=1}^n (1 - \bar{x}_i) z_i \\ \text{s.t.} \quad & \sum_{i=1}^n w_i z_i \geq M_j(t) + k_j^C(t) + 1, \\ & 0 \leq z_i \leq 1, \quad i = 1, \dots, n, \\ & z_i \in \mathbb{Z}, \quad i = 1, \dots, n, \end{aligned}$$

dove le  $z_i$  sono variabili binarie tali per cui  $z_i = 1$  se e solo se il coefficiente  $i$ -esimo è nella cover  $C$ . Questo perché la condizione (i) può essere espressa tramite il vincolo:

$$\sum_{i=1}^n w_i z_i \geq M_j(t) + k_j^C(t) + 1.$$

La condizione (ii) invece, poiché  $|C| = \sum_{i=1}^n z_i$ , può essere riscritta come segue:

$$\sum_{i=1}^n \bar{x}_i z_i > \sum_{i=1}^n z_i - 1 \quad \longleftrightarrow \quad \sum_{i=1}^n (1 - \bar{x}_i) z_i < 1.$$

Determinare una cover violata dalla soluzione  $\bar{x}$  equivale quindi a trovare una soluzione  $\bar{z}$  del problema di separazione tale per cui il valore ottimo è minore di 1. Se questo avviene, abbiamo determinato una *cover inequality* che può essere aggiunta alla formulazione del problema di partenza, consentendoci così di scartare la soluzione  $\bar{x}$ .

L'algoritmo che consente di implementare tutto ciò è il seguente:

### Generazione delle *cover inequalities*

1. Risolvere il rilassamento continuo del problema di partenza, ottenendo la soluzione ottima  $\bar{x}$ .
2. Se  $\bar{x}$  è intera  $\implies$  STOP: soluzione ottima intera.
3. Risolvere il problema di separazione associato, determinando la soluzione ottima  $\bar{z}$ .
4. Se il valore ottimo del problema di separazione è  $< 1$ , allora  $\bar{z}$  definisce una *cover inequality* violata da  $\bar{x}$ , definita da  $C = \{i : \bar{z}_i = 1\}$ .
5. Se il valore ottimo è  $\geq 1$ , allora non esiste una *cover inequality* violata da  $\bar{x} \implies$  STOP.
6. Aggiungere alla formulazione di partenza la *cover inequality* determinata, e ritornare al passo 1.

## 6.2 Generazione delle istanze

Per assicurare che il confronto con il modello base fosse accurato, abbiamo generato due gruppi di istanze.

### 6.2.1 Istanze base

Un primo gruppo di istanze è stato ottenuto utilizzando gli stessi parametri dimensionali usati in [6]. Abbiamo quindi considerato una finestra temporale di 48 intervalli di tempo, in cui ogni intervallo corrisponde a 5 minuti. L'aereospazio su cui abbiamo lavorato consiste in una griglia 4x4, in cui ogni quadrato corrisponde ad un settore, per un totale di 16 settori. In tale

griglia abbiamo distribuito 6 aeroporti, e per ogni istanza abbiamo considerato 120 voli, la cui traiettoria e tempi di percorrenza, arrivo e partenza variano, e con essi i potenziali conflitti. In ogni gruppo di istanze abbiamo generato 20 istanze, ciascuna caratterizzata da un set di voli differenti, da testare al variare dei valori dei parametri  $Q_j$  e  $k_j^C$ , i quali indicano rispettivamente la quantità di cui può venire aumentata la capacità del settore  $j$  al tempo  $t$ , ed il numero massimo di situazioni di tipo  $C$  che possono essere monitorate all'istante  $t$  nel settore  $j$  in presenza di capacità aggiuntiva.

In particolare, gli aumenti di capacità  $Q_j$  consentiti per ogni settore  $j$  considerati sono pari al 20%, 30%, 40% e 50% della capacità nominale del settore,  $S_j$ . I valori del parametro  $k_j^C$  sono stati stabiliti in base al numero massimo di coppie di voli in potenziale conflitto presenti in un settore quando la sua capacità nominale viene completamente utilizzata. Nel dettaglio, nel caso in cui siano presenti il numero massimo di voli consentito dalla capacità nominale, un'approssimazione per eccesso del numero massimo di potenziali conflitti (e quindi di situazioni critiche) è dato dal parametro  $C_j^{max} = \binom{S_j}{2}$ . Nelle varie istanze si è scelto dunque di permettere l'aumento di capacità di un settore solo se il numero di situazioni critiche rilevate in seguito all'aumento di capacità sia inferiore o uguale ad una frazione relativamente piccola del numero degli scenari critici che possono verificarsi nel peggiore dei casi. Ovvero,  $k_j^C$  può assumere valori pari a  $\frac{1}{12}$ ,  $\frac{1}{8}$ ,  $\frac{1}{6}$ ,  $\frac{1}{4}$  e  $\frac{1}{3}$  di  $C_j^{max}$ . Nel complesso, abbiamo dunque testato i vari set di voli in 20 istanze diverse, riassunte nella Tabella 6.1.

**Tabella 6.1** : Denominazione dei gruppi di istanze al variare dei parametri  $Q_j$  e  $k_j^C$

$(Q_j, k_j^C)$	20% di $S_j$	30% di $S_j$	40% di $S_j$	50% di $S_j$
$\frac{1}{3}C_j^{max}$	20-03	30-03	40-03	50-03
$\frac{1}{4}C_j^{max}$	20-04	30-04	40-04	50-04
$\frac{1}{6}C_j^{max}$	20-06	30-06	40-06	50-06
$\frac{1}{8}C_j^{max}$	20-08	30-08	40-08	50-08
$\frac{1}{12}C_j^{max}$	20-12	30-12	40-12	50-12

Per una descrizione più approfondita delle istanze testate si rimanda a [6].

### 6.2.2 Istanze di dimensione maggiore

Poiché le istanze testate risultano avere una dimensione ridotta, abbiamo deciso di testare i modelli anche in istanze più grandi, per osservare il loro comportamento. La struttura delle istanze rimane simile a quella nella Sezione 6.2.1, con delle opportune modifiche:

- dimensione aerospazio: abbiamo ampliato la griglia da una 4x4 ad una griglia 6x6, per un totale di 36 settori;
- numero aeroporti abbiamo ampliato il numero degli aeroporti, da 6 a 12;
- finestra temporale: abbiamo considerato 60 intervalli di tempo di 5 minuti, per un totale di 5 ore;
- numero voli: per ogni istanza abbiamo generato 10 set di voli anziché 20, in ogni set sono presenti 420 voli;
- capacità settori: abbiamo ampliato leggermente la capacità nominale dei settori, mantenendo la stessa struttura di [6]:
  - settori superiori e inferiori della griglia: 9 (invece che 7, come in [6])
  - settori al bordo della griglia: 7 (invece che 5, come in [6])
  - settori centrali della griglia: 12 (invece che 10, come in [6])
- capacità aeroporti: abbiamo ampliato la capacità degli aeroporti da 30 a 40.

Chiaramente di conseguenza si modificano anche i valori dei parametri  $Q_j$  e  $k_j^C$ , in quanto essi dipendono dalla capacità nominale dei settori.

Non abbiamo testato tutte le istanze, ma abbiamo scelto 10 gruppi più significativi in base ai risultati ottenuti nelle prove precedenti. I gruppi scelti sono: 20 – 03, 20 – 04, 30 – 06, 30 – 08, 30 – 12, 40 – 06, 40 – 08, 50 – 06, 50 – 08 e 50 – 12.

## 6.3 Implementazione in AMPL

Per la risoluzione del problema formulato e l'implementazione dei vari modelli abbiamo utilizzato il generatore algebrico di modelli AMPL e il solver CPLEX. Di seguito è descritta la struttura dei file .dat, .mod e .run che abbiamo utilizzato per risolvere il problema ATFM nei modelli testati. Per ogni insieme e parametro del codice, si riporta tra parentesi la corrispondente notazione usata nella formulazione descritta nel Capitolo 4 e nel Capitolo 5. Il codice sorgente AMPL completo è riportato nell'Appendice A.

### 6.3.1 File .dat

Abbiamo generato due tipologie di file .dat, una in cui si usa la stima non dinamica del parametro Big-M, ed una in cui è presente la nuova stima descritta nel Capitolo 4.

In entrambi i file, dopo la descrizione dell'insieme degli aeroporti **AIRPORTS** ( $\mathcal{K}$ ), l'insieme dei settori **SECTORS** ( $\mathcal{J}$ ), l'insieme dei voli **FLIGHTS** ( $\mathcal{F}$ ) e l'insieme degli intervalli di tempo **TIMES** ( $\mathcal{T}$ ), viene riportata la traiettoria di ogni volo  $\mathbf{f}$ , **PATH**[ $\mathbf{f}$ ] ( $P_f$ ). Vengono poi riportati i tempi di percorrenza per ogni settore  $\mathbf{ct}[\mathbf{f}, \mathbf{j}]$  ( $I_j^f$ ), l'istante di partenza previsto  $\mathbf{dt}[\mathbf{f}]$  ( $d_f$ ), l'ultimo tempo ammissibile per il decollo dall'aeroporto di partenza  $\mathbf{ka}$ ,  $\mathbf{lfdt}[\mathbf{f}]$  ( $\bar{T}_{ka}^f$ ) e l'ultimo tempo ammissibile per l'atterraggio nell'aeroporto di arrivo  $\mathbf{ka}$ ,  $\mathbf{lfat}[\mathbf{f}]$  ( $\bar{T}_{ka}^f$ ). Vengono definite poi le capacità degli elementi dell'aerospazio, che sono tutte indipendenti dal tempo. Le capacità degli aeroporti sono inoltre uniformi, ovvero hanno tutti stessa capacità di partenze **CapDep** ( $D_j$ ) e arrivo **CapArr** ( $A_j$ ), mentre le capacità dei settori **CapSect**[ $\mathbf{j}$ ] ( $S_j$ ) non sono omogenee.

Viene infine definito, per ogni settore  $\mathbf{j}$ , l'insieme delle coppie di voli in potenziale conflitto nel settore, **CONFLICTS**[ $\mathbf{j}$ ] ( $C_j$ ), e sono inoltre riportati i tempi impiegati da ciascuno dei due voli della coppia per raggiungere il punto di incrocio delle traiettorie, ovvero **Tin**[ $\mathbf{j}, \mathbf{f}, \mathbf{ff}$ ] ( $i_j^{f'f'}$ ) e **tin**[ $\mathbf{j}, \mathbf{f}, \mathbf{ff}$ ] ( $i_j^{f'f}$ ). In entrambi i file .dat si possono in ultimo leggere i parametri relativi all'aumento di capacità, al massimo numero di situazioni critiche consentite in caso di aumento di capacità e all'ampiezza dell'area di conflitto. Osser-

viamo che rispetto a [6], il parametro che definisce l'ampiezza dell'area di conflitto all'indietro  $\Delta$  viene posto uguale ad 1 anziché 2.

La differenza tra le due tipologie di file .dat utilizzate risiede unicamente nella stima del parametro Big-M. In un file esso risulta essere definito indipendente dal tempo, ma diverso da settore a settore, ovvero  $M[j]$  ( $M_j(t)$ ), mentre nell'altro viene definito anche istante per istante, dunque  $M[j, \tau]$  ( $M_j(t)$ ).

### 6.3.2 File .mod

Anche in questo caso abbiamo generato due principali tipologie di file .mod, la cui differenza risiede nel tipo di vincoli di traffico utilizzati. I vincoli alternativi descritti nel Capitolo 5 infatti presentano delle variabili aggiuntive e dei vincoli diversi.

Nel dettaglio, in ogni file .mod, a partire dai dati forniti nel file .dat, AMPL calcola autonomamente gli altri dati utili per la formulazione del modello (dati presentati nella Sezione 3.2.2). Ad esempio, considerando il tempo di partenza e i tempi di attraversamento previsti per ogni volo  $f$ , nel file .mod viene calcolato il tempo di arrivo previsto  $at[f]$  ( $r_f$ ). Vengono inoltre calcolati  $T_{\min}[f, j]$  ( $\underline{T}_j^f$ ) e  $T_{\max}[f, j]$  ( $\bar{T}_j^f$ ), rispettivamente il primo e l'ultimo istante di tempo in cui è possibile per il volo  $f$  entrare nel settore  $j$ ; viene poi calcolato l'ultimo istante di tempo in cui è possibile per il volo  $f$  trovarsi all'interno di  $j$ ,  $T_{\text{last}}[f, j]$  ( $T_{j, \text{last}}^f$ ). A partire da questi dati vengono quindi calcolati l'intervallo di tempo in cui è possibile per il volo  $f$  entrare all'interno di ogni settore  $j$  della sua traiettoria e l'intervallo di tempo in cui è possibile per ogni volo trovarsi all'interno di  $j$ . Il calcolo di quest'ultimo è serve poi per determinare  $\text{TIME}[j, f, ff]$  ( $\tau_j^{ff}$ ), ovvero l'insieme degli istanti di tempo in cui è possibile per due voli in potenziale conflitto  $f$  e  $ff$  trovarsi contemporaneamente all'interno del settore interessato.

In ogni file .mod sono poi stati inseriti dei controlli sui dati, per evitare che le istanze generate fossero insensate. In particolare, viene verificato che l'ultimo tempo ammissibile per l'atterraggio sia maggiore o uguale al tempo di atterraggio previsto nel caso il volo non subisca ritardi, e viene verificato

che i tempi di percorrenza relativi agli aeroporti siano fissati a 0.

Vengono poi dichiarate le variabili, la funzione obiettivo e i vincoli del modello.

In ogni file .mod è infine presente una sezione in cui sono dichiarati una serie di parametri necessari per l'implementazione dell'algoritmo di separazione delle *cover inequalities*, le variabili usate nel problema di separazione, la funzione obiettivo e i vincoli associati.

### 6.3.3 File .run

Nel file .run vengono innanzitutto definiti il problema intero, il problema con i vincoli di interezza rilassati ed il problema di separazione. Per il caso di istanze grandi che impiegano tempi consistenti per essere risolte viene imposto un *time limit*. Se non viene trovata la soluzione ottima entro il tempo previsto, CPLEX restituisce la migliore soluzione intera trovata fino a quel momento. Per ogni set di dati, eseguendo il file .run viene risolto per primo il problema intero e poi il rilassamento continuo del modello. Vengono stampate su un file di testo la soluzione ottima dei due problemi, il tempo necessario per la risoluzione dei due problemi e le variabili che non sono intere per valutare come esse si comportano quando risolviamo il rilassamento continuo del problema. Viene poi implementato l'algoritmo di separazione delle *cover inequalities*, stampando su un file di testo il numero di cover violate che sono state trovate, il valore della funzione obiettivo, il tempo di esecuzione dell'algoritmo, i valori delle variabili non intere e il numero di iterazioni eseguite. Poiché il numero dei gruppi di istanze testate è elevato, per ogni istanza abbiamo limitato a 20 il numero di iterazioni (*round*) dell'algoritmo di separazione delle disuguaglianze cover (vedi Paragrafo 6.1), e abbiamo inoltre inserito un controllo per valutare se, giunti alla decima iterazione, si fosse riscontrato un miglioramento della funzione obiettivo. In caso negativo, non si eseguono ulteriori iterazioni di separazione.

## Capitolo 7

# Risultati Computazionali

In questo capitolo, mostriamo i risultati delle prove computazionali effettuate sui modelli presentati in questa tesi. Gli esperimenti hanno lo scopo di confrontare la formulazione del problema ATFM derivata in questa tesi con la formulazione di base, che ne rappresenta il punto di partenza, proposta in [6]. In particolare, l'analisi presentata nel seguito vuole valutare se la nuova formulazione, oltre ad essere più forte dal punto di vista teorico, rappresenta degli effettivi vantaggi sotto il profilo della qualità del rilassamento continuo e dell'efficienza nella soluzione del modello a variabili intere.

A questo scopo abbiamo confrontato il comportamento del modello base [6] con altri 5 modelli ottenuti da diverse combinazioni delle variazioni proposte in questa tesi ai Capitoli 4 e 5:

- I primi tre modelli sfruttano le proprietà aggiuntive (PA) ottenute nel Capitolo 4, modificando dunque la relazione tra le variabili  $x$  e  $y$ , i vincoli di traffico e il parametro Big-M. Nel dettaglio, abbiamo realizzato tre versioni per capire quali modifiche incidessero maggiormente:
  - **Modello PA-SV**: abbiamo modificato solo i vincoli di traffico e quelli relativi alla relazione tra le variabili  $x$  e  $y$  (vedi Sezione 4.1-4.2);
  - **Modello PA-BigM**: abbiamo modificato solo la stima del parametro Big-M (vedi Sezione 4.3);



- **Modello PA-Gen:** considera sia le variazioni del Modello PA-SV sia quelle del Modello PA-BigM.
- Per ottenere ulteriori due modelli, abbiamo sostituito i vincoli di traffico del modello originale con i nuovi vincoli (NV) descritti nel Capitolo 5, ottenendo le versioni:
  - **Modello NV-BigM Statico:** abbiamo sostituito i vincoli di traffico mantenendo la stima originale del parametro Big-M (vedi Sezioni 3.2.4, 5.3 e 5.4);
  - **Modello NV-BigM Dinamico:** abbiamo modificato i vincoli di traffico (vedi Sezioni 5.3 e 5.4) e la stima del parametro Big-M, adottando quella descritta nella Sezione 4.3.

Un primo obiettivo è dunque quello di analizzare la qualità del rilassamento continuo della formulazione, in cui, in base alle considerazioni dei precedenti capitoli, ci aspettiamo che il Modello NV-BigM Dinamico risulti più forte degli altri.

Un secondo obiettivo è quello di analizzare i tempi di calcolo dei vari modelli, ed infine verificare se l’algoritmo di separazione delle *cover inequalities* consenta di migliorare la soluzione del rilassamento continuo dei modelli.

Tutti i test sono stati effettuati su calcolatori equipaggiati con processore Intel Core i7-8700, 32 GB di memoria RAM, sistema operativo Linux. Il solver di PLI utilizzato è CPLEX versione 12.8.0, con parametri operativi di default e *time limit* pari a 1800 secondi.

## 7.1 Test su istanze base

Presentiamo di seguito i risultati sulle istanze base, caratterizzate da dimensioni ridotte, come proposte in [6] (vedi Sezione 6.2.1).

Osserviamo innanzitutto che tutte le istanze testate sono risultate ammissibili, e sono state risolte entro il *time limit*.

### 7.1.1 Qualità del rilassamento continuo della formulazione

Per valutare la qualità della formulazione dei vari modelli, abbiamo studiato la qualità del rilassamento lineare, e la distanza tra la soluzione del rilassamento continuo dalla soluzione intera.

Per fare ciò, abbiamo determinato l'*integrality gap al nodo radice*, definito come:

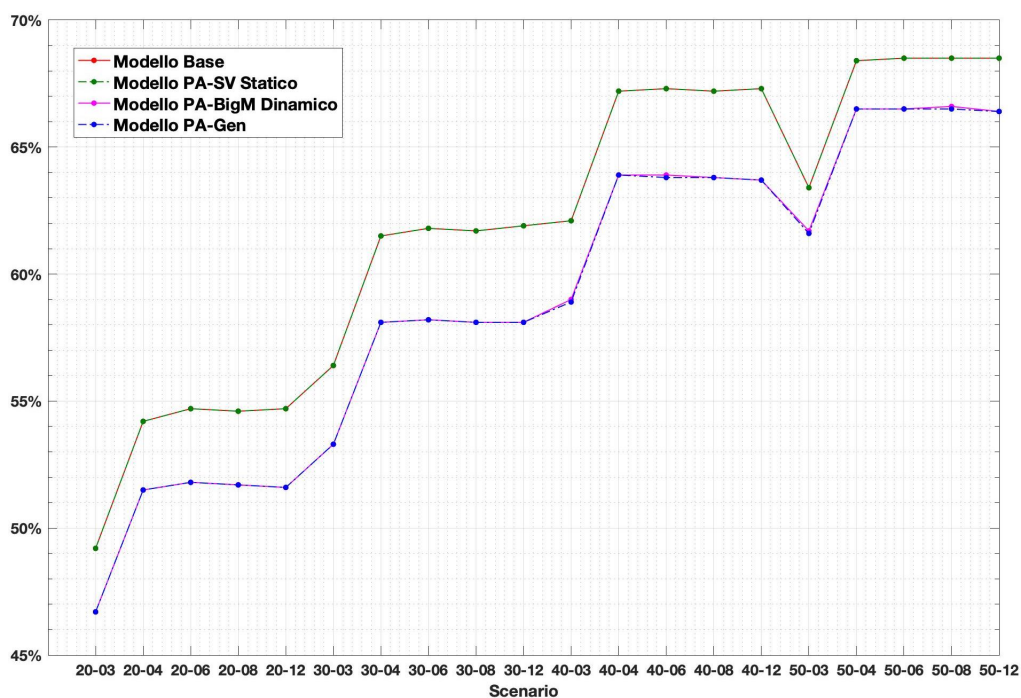
$$\text{IG} = \frac{\text{ottimo intero} - \text{ottimo rilassamento continuo}}{\text{ottimo intero}} \cdot 100$$

Tale valore percentuale è sempre positivo in quanto, trattandosi di un problema di minimo, la soluzione ottima del rilassamento continuo è sempre inferiore o uguale a quella ottenuta considerando i vincoli di interezza.

Abbiamo dunque valutato la variazione della qualità del rilassamento continuo dei vari modelli, al variare dei gruppi di istanze definiti nella Tabella 6.1. Per ogni istanza abbiamo considerato i valori dell'IG medio, e tali risultati sono riportati nella Tabella 7.1 e presentati visivamente nelle Figure 7.1,7.2,7.3 e 7.4.

**Tabella 7.1** : *Integrality gap* (al nodo radice) medio dei modelli testati.

	Modello Base	Modello PA-SV	Modello PA-BigM	Modello PA-Gen	Modello NV-BigM Statico	Modello NV-BigM Dinamico
20-03	49.2%	49.2%	46.7%	46.7%	48.7%	46.7%
20-04	54.2%	54.2%	51.5%	51.5%	54.2%	51.4%
20-06	54.7%	54.7%	51.8%	51.8%	54.7%	51.8%
20-08	54.6%	54.6%	51.7%	51.7%	54.5%	51.7%
20-12	54.7%	54.7%	51.6%	51.6%	54.7%	51.6%
30-03	56.4%	56.4%	53.3%	53.3%	56.4%	53.2%
30-04	61.5%	61.5%	58.1%	58.1%	61.5%	58.1%
30-06	61.8%	61.8%	58.2%	58.2%	61.8%	58.2%
30-08	61.7%	61.7%	58.1%	58.1%	61.7%	58.1%
30-12	61.9%	61.9%	58.1%	58.1%	61.9%	58.1%
40-03	62.1%	62.1%	59.0%	58.9%	62.1%	58.9%
40-04	67.2%	67.2%	63.9%	63.9%	67.2%	63.9%
40-06	67.3%	67.3%	63.9%	63.8%	67.3%	63.8%
40-08	67.2%	67.2%	63.8%	63.8%	67.2%	63.7%
40-12	67.3%	67.3%	63.7%	63.7%	67.3%	63.6%
50-03	63.4%	63.4%	61.7%	61.6%	63.3%	61.4%
50-04	68.4%	68.4%	66.5%	66.5%	68.3%	66.4%
50-06	68.5%	68.5%	66.5%	66.5%	68.5%	66.3%
50-08	68.5%	68.5%	66.6%	66.5%	68.4%	66.3%
50-12	68.5%	68.5%	66.4%	66.4%	68.5%	66.2%



**Figura 7.1** : Valore medio dell'*integrality gap* nel Modello Base e nei Modelli PA.

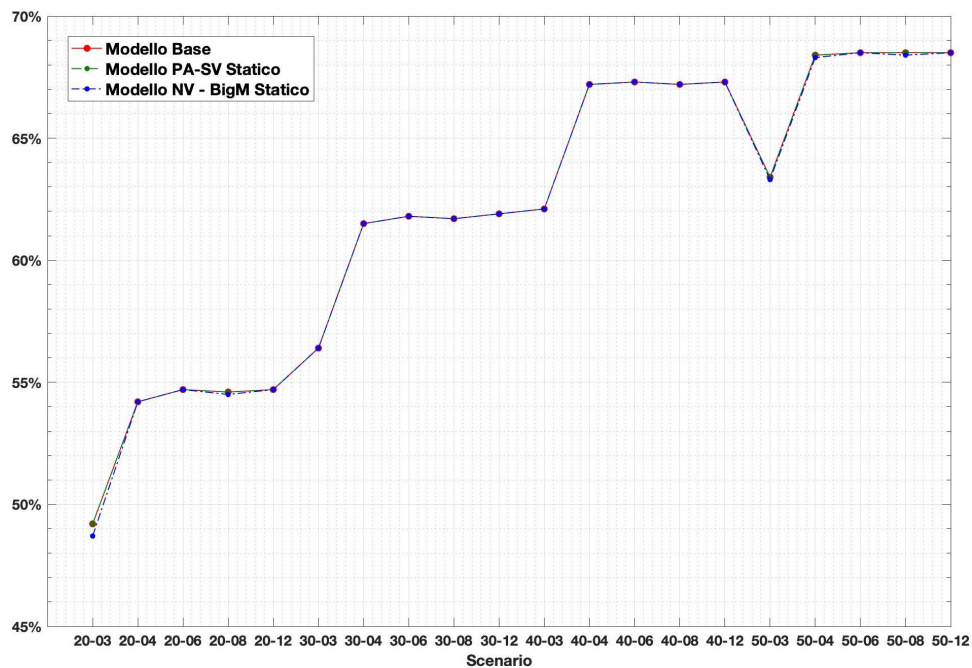


Figura 7.2 : Valore medio dell'*integrality gap* nei modelli con Big-M statico.

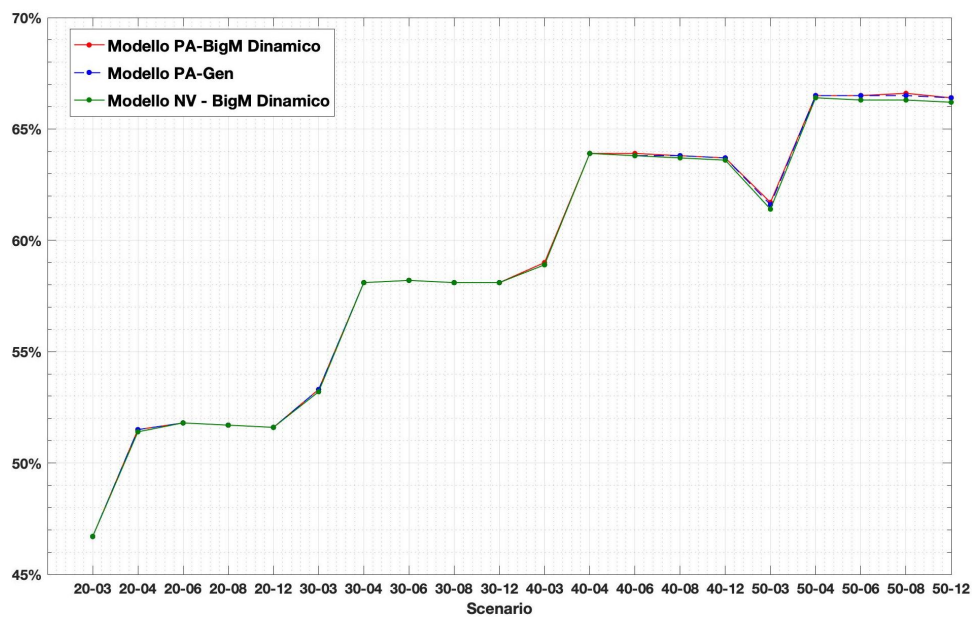
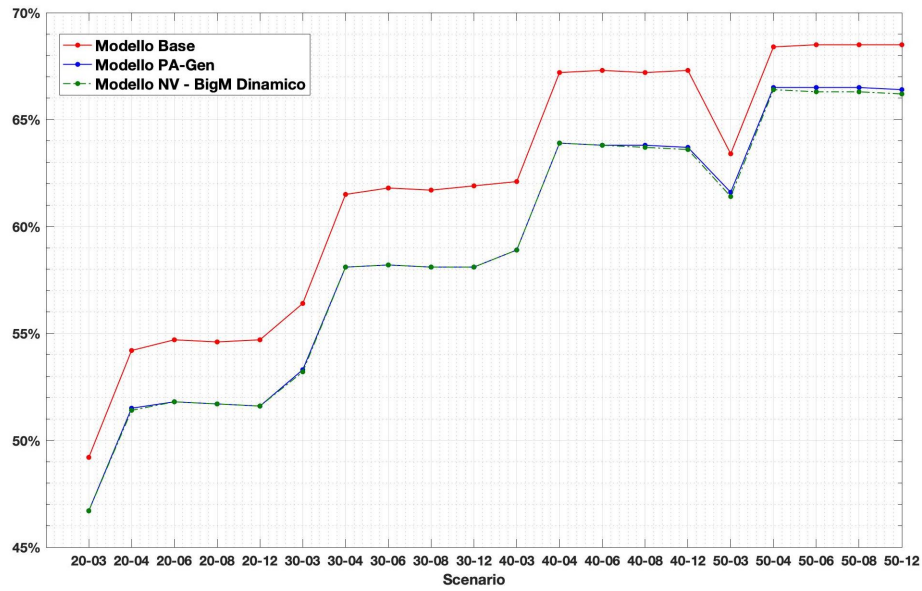
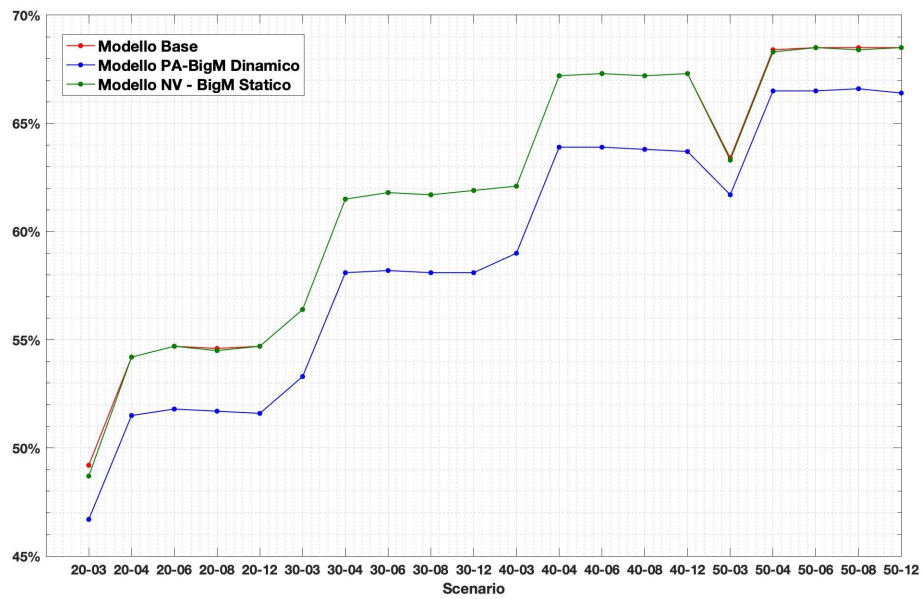


Figura 7.3 : Valore medio dell'*integrality gap* nei modelli con Big-M dinamico.



**Figura 7.4** : Valore medio dell'*integrality gap* nel Modello Base e nei modelli PA-Gen e NV - BigM Dinamico.



**Figura 7.5** : Valore medio dell'*integrality gap* nel Modello Base e nei modelli PA-BigM Dinamico e NV - BigM Statico.

Si può facilmente osservare che in ogni modello la soluzione del rilassamento lineare è quasi sempre piuttosto lontana da quella intera, a prescindere dalle modifiche apportate ai modelli. In generale, si può notare che l'*integrality gap* tende ad aumentare all'aumentare del parametro  $Q_j$ , mentre la variazione del parametro  $k_j^C$  lo lascia pressochè invariato. Tuttavia sono presenti delle differenze tra i vari modelli.

Come si evince dalle Figure 7.1 e 7.4, si può notare una riduzione dell'*integrality gap* nei modelli in cui si usa una stima dinamica del parametro Big-M, descritta nella Sezione 4.3 del Capitolo 4. In tali modelli si registra dunque un aumento del valore della soluzione del rilassamento lineare, anche se complessivamente la distanza dalla soluzione intera continua a rimanere elevata.

Confrontando i modelli con la stessa stima del parametro Big-M invece, non si notano importanti variazioni. Le Figure 7.2 e 7.3 mostrano infatti che l'andamento nei vari modelli con lo stesso Big-M è all'incirca lo stesso, anche se le formulazioni che presentano i vincoli alternativi per il conteggio delle situazioni critiche descritti nel Capitolo 5 risultano essere leggermente più forti, in accordo con quanto ci aspettavamo.

Infine, si può osservare nella Figura 7.5 come nei vari modelli l'affinamento della stima del parametro Big-M incida maggiormente rispetto alle modifiche apportate ai vari vincoli.

Mantenendo infatti i vincoli del modello base, ma adottando una stima dinamica del parametro Big-M, si ottengono soluzioni migliori del rilassamento continuo delle varie istanze rispetto a quelle ottenute adottando i vincoli alternativi ma mantenendo la stima iniziale di tale parametro. Tuttavia, il modello NV - BigM Statico continua ad avere soluzioni leggermente migliori rispetto a quelle del modello base.

Possiamo dire che, oltre alla relazione di dominanza dimostrata dal Teorema 5.4, valgono dunque, a livello *empirico*, le seguenti inclusioni:

$$\begin{aligned} \text{R.C. (M. Base)} &\subseteq \text{R.C. (M. PA-SV Statico)} \subseteq \text{R.C. (M. NV-BigM Statico)} \subseteq \\ &\text{R.C. (M. PA-BigM Dinamico)} \subseteq \text{R.C. (M. PA-Gen)} \subseteq \text{R.C. (M. NV-BigM Dinamico)}. \end{aligned}$$

Complessivamente, la formulazione alternativa che abbiamo elaborato non consente di rafforzare la formulazione del modello quanto speravamo, mentre risulta evidente che una più accurata stima dei parametri possa portare a soluzioni migliori.

Un altro importante aspetto da considerare quando si valutano le soluzioni del rilassamento continuo è il numero di variabili frazionarie in rapporto al numero di variabili intere. Per ogni scenario possibile e per ogni modello testato, nella Tabella 7.2 è riportata la percentuale (media) di variabili che assumono valore frazionario nella soluzione ottima del rilassamento continuo; percentuale calcolata rispetto al numero totale di variabili che nell'ottimo del rilassamento assumono valore non zero.

**Tabella 7.2 :** Percentuale di variabili frazionarie totali calcolata sul numero di variabili diverse da 0 nella soluzione ottima del rilassamento continuo.

	Modello Base	Modello PA-SV	Modello PA-BigM	Modello PA-Gen	Modello NV-BigM Statico	Modello NV-BigM Dinamico
20-03	0.9%	0.8%	0.9%	0.8%	0.4%	1.6%
20-04	1.0%	1.0%	0.9%	0.9%	0.5%	2.0%
20-06	1.0%	1.0%	0.9%	0.9%	0.5%	1.9%
20-08	1.0%	1.0%	1.0%	0.9%	0.5%	1.9%
20-12	1.1%	0.9%	1.0%	0.9%	0.5%	2.0%
30-03	0.7%	0.7%	0.7%	0.7%	0.3%	1.3%
30-04	0.7%	0.7%	0.7%	0.7%	0.3%	1.3%
30-06	0.7%	0.7%	0.7%	0.7%	0.3%	1.3%
30-08	0.7%	0.7%	0.7%	0.7%	0.3%	1.3%
30-12	0.7%	0.7%	0.7%	0.6%	0.3%	1.3%
40-03	0.4%	0.4%	0.4%	0.4%	0.2%	0.7%
40-04	0.4%	0.3%	0.4%	0.4%	0.2%	0.8%
40-06	0.4%	0.3%	0.4%	0.4%	0.2%	0.8%
40-08	0.4%	0.3%	0.4%	0.4%	0.2%	0.7%
40-12	0.4%	0.3%	0.4%	0.4%	0.2%	0.8%
50-03	0.3%	0.2%	0.3%	0.3%	0.1%	0.5%
50-04	0.3%	0.2%	0.3%	0.3%	0.1%	0.5%
50-06	0.3%	0.3%	0.3%	0.2%	0.1%	0.5%
50-08	0.3%	0.2%	0.3%	0.2%	0.1%	0.5%
50-12	0.3%	0.3%	0.3%	0.3%	0.1%	0.5%

Nel modello base e nei modelli PA-SV, PA-BigM, PA-Gen, nelle istanze considerate il numero delle variabili, in media, è pari a 67688. Dai dati sulle variabili frazionarie possiamo notare che in media non più del 1% delle variabili diverse da 0 sono frazionarie, un valore basso anche se *l'integrality*

*gap* rimane elevato. Nei modelli con i vincoli alternativi, nelle varie istanze, in media il numero delle variabili è pari a 164443. Notiamo che in questi modelli la percentuale di variabili frazionarie, rispetto alle variabili diverse da 0, non supera il 2%. Si può osservare inoltre che il modello NV-BigM Statico presenta percentuali molto più basse rispetto sia a quelle del modello NV-BigM Dinamico, sia a quelle degli altri modelli. Tuttavia, anche in questo caso l'*integrality gap* rimane significativo.

### 7.1.2 Tempi di calcolo

In questa sezione ci occupiamo di analizzare il tempo medio di risoluzione delle istanze nei vari modelli, per comprendere come varia l'efficienza dal punto di vista dei costi computazionali.

Nella Tabella 7.3 è riportato il tempo di risoluzione medio necessario per ottenere la soluzione ottima intera nei singoli modelli, mentre nella Tabella 7.4 è riportato il tempo di risoluzione medio del rilassamento continuo. In entrambe le tabelle viene inoltre indicata tra parentesi la percentuale media di variazione rispetto al modello base. Le Figure 7.6 e 7.7 presentano visivamente tali risultati.



**Tabella 7.3** : Tempo di risoluzione medio (in secondi) per ottenere la soluzione ottima intera e percentuale media di variazione rispetto al modello base (tra parentesi).

	Modello Base	Modello PA-SV	Modello PA-BigM	Modello PA-Gen	Modello NV-BigM Statico	Modello NV-BigM Dinamico
20-03	11.37	10.95 (-3.69%)	13.11 (+15.30%)	8.8 (-22.60%)	9.24 (-18.73%)	12.62 (+10.99%)
20-04	12.19	9.91 (-18.70%)	11.11 (-8.86%)	8.44 (-30.76%)	11.97 (-1.80%)	12.70 (+4.18%)
20-06	7.78	8.27 (+6.30%)	8.84 (+13.62%)	7.05 (-9.38%)	9.34 (+20.05%)	9.89 (+27.12%)
20-08	7.44	7.83 (+5.24%)	7.79 (+4.70%)	7.90 (+6.18%)	9.06 (+21.77%)	9.13 (+22.72%)
20-12	6.46	7.03 (+8.82%)	6.48 (+0.31%)	6.16 (-4.64%)	8.71 (+34.83%)	8.43 (+30.50%)
30-03	13.51	15.08 (+11.62%)	15.11 (+11.84%)	11.58 (-14.29%)	18.34 (+35.75%)	18.55 (+37.31%)
30-04	17.05	18.17 (+6.57%)	15.60 (-8.50%)	13.40 (-21.41%)	18.84 (+10.50%)	18.11 (+6.22%)
30-06	12.32	11.10 (-9.90%)	10.90 (-11.53%)	9.50 (-22.89%)	11.37 (-7.71%)	11.56 (-6.17%)
30-08	9.86	9.13 (-7.40%)	10.14 (+2.84%)	8.13 (-17.55%)	10.43 (+5.78%)	10.55 (+7.00%)
30-12	8.50	7.88 (-2.11%)	8.39 (+4.22%)	6.68 (-17.02%)	9.13 (+13.42%)	8.77 (+8.94%)
40-03	13.01	14.31 (+9.99%)	15.60 (+19.91%)	11.41 (-12.30%)	16.80 (+29.13%)	18.60 (+42.97%)
40-04	16.39	14.08 (-14.09%)	15.96 (-2.62%)	13.05 (-20.38%)	19.64 (+19.83%)	18.87 (+15.13%)
40-06	14.38	12.30 (-14.46%)	13.20 (-8.21%)	10.49 (-27.05%)	11.19 (-22.18%)	12.14 (-15.58%)
40-08	11.36	9.64 (-15.14%)	12.22 (+7.57%)	8.57 (-24.56%)	10.65 (-6.25%)	11.21 (-1.32%)
40-12	8.18	7.94 (-2.93%)	8.21 (+0.37%)	6.79 (-16.99%)	8.78 (+7.33%)	8.75 (+6.97%)
50-03	16.47	22.50 (+36.61%)	19.85 (+20.52%)	13.14 (-20.22%)	17.29 (+4.98%)	20.42 (+23.98%)
50-04	19.61	18.88 (-3.72%)	16.84 (-14.13%)	15.78 (-19.53%)	17.00 (-13.31%)	20.34 (+3.72%)
50-06	14.44	14.74 (+2.08%)	15.89 (+10.04%)	11.76 (-18.56%)	12.30 (-14.82%)	12.42 (-13.99%)
50-08	10.90	10.90 (+0.00%)	11.42 (+4.77%)	9.83 (-9.82%)	10.93 (+0.28%)	10.66 (-2.20%)
50-12	8.86	8.75 (-1.24%)	8.73 (-1.47%)	7.29 (-17.72%)	9.21 (+3.95%)	8.81 (-0.56%)

**Tabella 7.4** : Tempo di risoluzione medio (in secondi) per ottenere la soluzione del rilassamento continuo e percentuale media di variazione rispetto al modello base (tra parentesi).

	Modello Base	Modello PA-SV	Modello PA-BigM	Modello PA-Gen	Modello NV-BigM Statico	Modello NV-BigM Dinamico
20-03	3.02	2.95 (-2.32%)	3.01 (-0.33%)	2.91 (-3.64%)	4.15 (+37.42%)	4.06 (+34.44%)
20-04	3.06	2.93 (-4.25%)	2.99 (-2.29%)	2.93 (-4.25%)	4.10 (+33.99%)	4.07 (+33.01%)
20-06	2.98	2.95 (-1.01%)	3.08 (+3.36%)	2.94 (-1.34%)	4.23 (+41.95%)	4.11 (+37.92%)
20-08	2.99	2.95 (-1.34%)	3.08 (+3.01%)	2.94 (-1.67%)	4.27 (+42.81%)	4.08 (+36.45%)
20-12	3.01	2.91 (-3.32%)	2.99 (-0.66%)	2.95 (-1.99%)	4.17 (+38.54%)	4.09 (+35.88%)
30-03	2.97	2.92 (-1.68%)	2.98 (+0.34%)	2.90 (-2.36%)	4.07 (+37.04%)	4.00 (+34.68%)
30-04	2.98	2.91 (-2.35%)	2.95 (-1.01%)	2.91 (-2.35%)	4.02 (+34.90%)	3.99 (+33.89%)
30-06	2.98	2.92 (-2.01%)	2.98 (+0.00%)	2.92 (-2.01%)	4.05 (+35.91%)	3.93 (+31.88%)
30-08	2.98	2.93 (-1.68%)	2.97 (-0.34%)	2.90 (-2.68%)	4.02 (+34.90%)	4.00 (+34.23%)
30-12	2.96	2.92 (-1.35%)	2.96 (+0.00%)	2.91 (-1.69%)	4.05 (+36.82%)	4.02 (+35.81%)
40-03	2.97	2.91 (-2.02%)	2.93 (-1.35%)	2.87 (-3.37%)	3.90 (+31.31%)	4.00 (+34.68%)
40-04	2.95	2.89 (-2.03%)	2.95 (+0.00%)	2.87 (-2.71%)	4.02 (+36.27%)	3.97 (+34.58%)
40-06	2.97	2.93 (-1.35%)	2.94 (-1.01%)	2.87 (-3.37%)	3.98 (+34.01%)	4.19 (+41.08%)
40-08	2.97	2.92 (-1.68%)	2.96 (-0.34%)	2.89 (-2.69%)	3.99 (+34.34%)	3.99 (+34.34%)
40-12	2.96	2.89 (-2.36%)	2.94 (-0.68%)	2.88 (-2.70%)	3.89 (+31.42%)	3.96 (+33.78%)
50-03	2.94	2.95 (+0.34%)	2.91 (-1.02%)	2.85 (-3.06%)	3.98 (+35.37%)	3.97 (+35.03%)
50-04	2.92	2.89 (-1.03%)	2.91 (-0.34%)	2.84 (-2.74%)	3.89 (+33.22%)	3.96 (+35.62%)
50-06	2.91	2.90 (-0.34%)	2.95 (+1.37%)	2.86 (-1.72%)	3.92 (+34.71%)	3.93 (+35.05%)
50-08	2.94	2.93 (-0.34%)	2.95 (+0.34%)	2.89 (-1.70%)	3.95 (+34.35%)	4.00 (+36.05%)
50-12	2.93	2.90 (-1.02%)	2.94 (+0.34%)	2.87 (-2.05%)	3.88 (+32.42%)	4.03 (+37.54%)

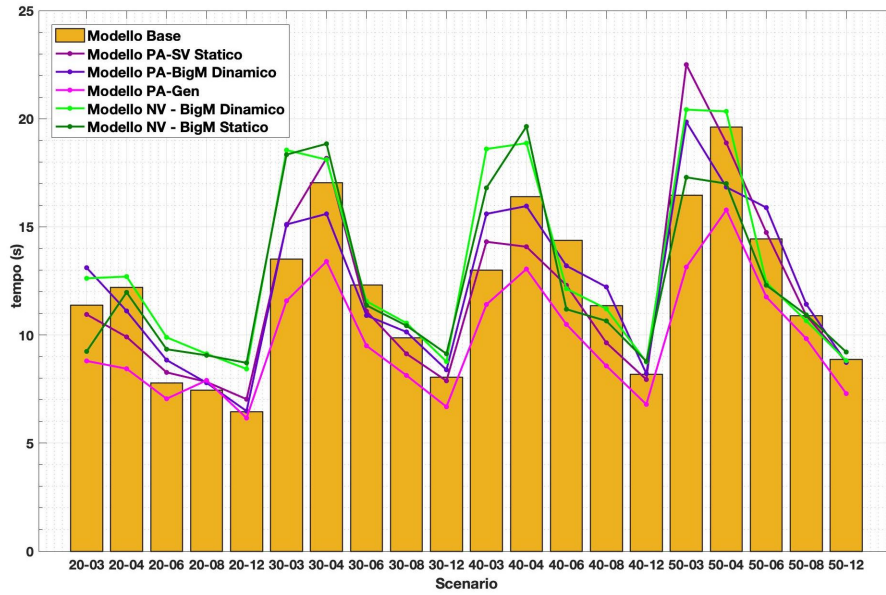


Figura 7.6 : Tempo medio (in secondi) di risoluzione del problema intero.

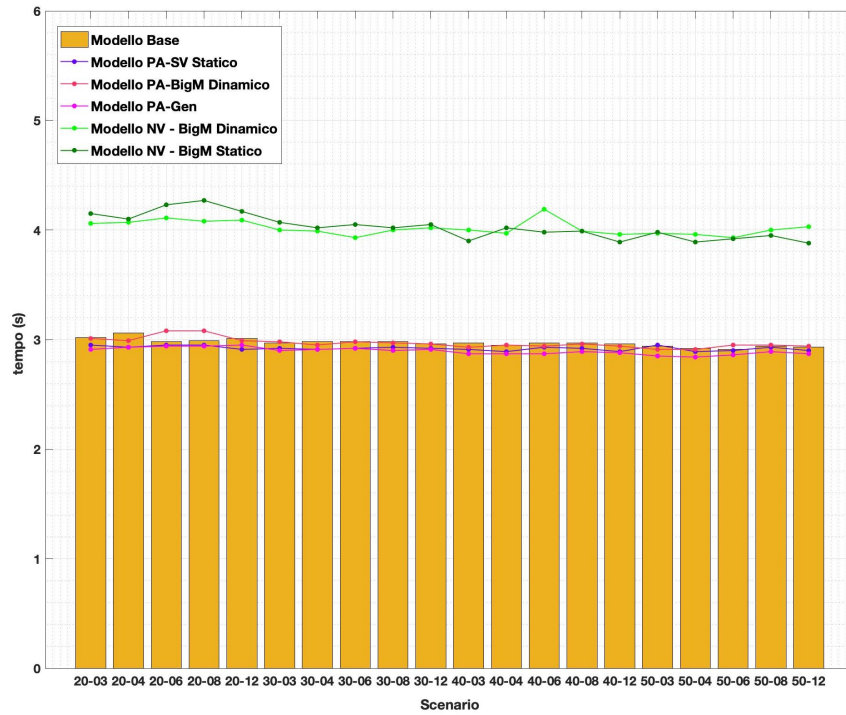


Figura 7.7 : Tempo medio (in secondi) di risoluzione del rilassamento continuo.

Osservando le tabelle e i grafici riportati, è possibile notare che in generale i modelli in cui sono stati implementati i vincoli di traffico alternativi tendono ad avere tempi di risoluzione più elevati rispetto agli altri.

Più nel dettaglio, nella risoluzione del problema intero notiamo che il modello PA-Gen, in cui ricordiamo abbiamo implementato tutte le modifiche descritte nelle sezioni 4.1, 4.2 e 4.3, è il modello più efficiente. In quasi ogni istanza, esso presenta un tempo di risoluzione inferiore rispetto a quello del modello base e degli altri modelli. La percentuale media di variazione rispetto al modello base è la più elevata in quasi ogni gruppo di istanze: in generale, il modello PA-Gen consente una riduzione del tempo di risoluzione del problema intero.

Nei modelli PA-SV Statico e PA-BigM Dinamico, le modifiche apportate non sempre consentono di avere tempi di risoluzione migliori rispetto a quelli del modello base, ma in generale i due modelli tendono ad avere comportamenti simili.

Come accennato in precedenza, i modelli NV-BigM Statico e NV-BigM Dinamico tendono ad avere tempi di risoluzione peggiori rispetto al modello base e agli altri modelli, a eccezione che in alcune istanze. La differenza massima dei tempi di risoluzione tra i modelli PA-Gen e NV-BigM Dinamico si registra nello scenario 50-03, in cui il modello NV impiega in media 7 secondi in più (una variazione pari al 55.5%) a risolvere le istanze rispetto al modello PA-Gen.

Questo è probabilmente dovuto alla formulazione più complessa che caratterizza tali modelli, in quanto coinvolge un maggior numero di variabili ed alcuni vincoli aggiuntivi rispetto al modello base.

Anche il tempo medio di risoluzione del rilassamento continuo conferma l'andamento sopra descritto, con uno stacco più omogeneo.

Mentre i modelli PA e il modello base presentano tempi di risoluzione all'incirca di 3 secondi, i modelli con i vincoli alternativi presentano un tempo di risoluzione medio che oscilla intorno ai 4 secondi. In particolare, nei modelli PA si hanno variazioni percentuali medie relativamente piccole, con tempi di risoluzione quasi sempre inferiori rispetto a quelli del modello base. Nei

modelli NV invece si registrano sempre degli aumenti dei tempi di risoluzione, con variazioni percentuali medie comprese tra il 31% e il 43%.

Possiamo dunque affermare che il modello PA-Gen in cui sono presenti le modifiche ai vincoli di traffico descritti nelle Sezioni 4.1 e 4.2, assieme alla stima dinamica del parametro Big-M (vedi Sezione 4.3), è il modello che, dal punto di vista dei costi computazionali, si comporta in modo più efficiente. I modelli che includono i vincoli di traffico alternativi presentati nel Capitolo 5 invece presentano costi computazionali in generale più elevati.

È inoltre importante tenere in considerazione che le istanze testate hanno dimensioni ridotte rispetto a situazioni reali, e che all'aumentare della dimensione del modello i costi computazionali aumentano notevolmente e, in base ai risultati mostrati nelle Figure 7.6 e 7.7, gli aumenti tendono ad essere esponenziali, come ci aspettiamo trattandosi di modelli di PLI.

### 7.1.3 Separazione delle cover inequalities

Abbiamo deciso di implementare l'algoritmo di separazione delle *cover inequalities* solo in alcuni dei modelli più significativi, in particolare nel modello base e nei modelli PA-Gen e NV-BigM Dinamico.

L'algoritmo è stato implementato per ogni istanza descritta in precedenza; tuttavia, in entrambi i modelli, nonostante vengano trovate delle disuguaglianze violate, esse non risultano molto efficaci. Infatti, le disequazioni trovate, una volta aggiunte alla formulazione del modello, consentono di modificare lievemente il valore delle variabili coinvolte e, quindi, hanno un impatto trascurabile sul valore del rilassamento continuo.

In ogni modello testato, e in ogni istanza implementata, l'algoritmo di separazione è quindi stato interrotto alla decima iterazione, come previsto dal controllo da noi inserito nel file `.run` (vedi Sezione 6.3.3). Nel dettaglio, la Tabella 7.5, per i due modelli testati, riporta la percentuale di istanze per cui è stato possibile determinare delle disuguaglianze violate.

Notiamo che in generale tale percentuale è più elevata nel modello NV-BigM Dinamico, anche se ribadiamo che in entrambi i modelli non si è riscontrato un miglioramento della funzione obiettivo.

**Tabella 7.5** : Percentuale di istanze per cui è stato possibile determinare disuguaglianze violate.

	<b>Modello PA-Gen</b>	<b>Modello NV-BigM Dinamico</b>
20-03	65%	75%
20-04	70%	80%
20-06	70%	80%
20-08	70%	80%
20-12	70%	80%
30-03	65%	75%
30-04	70%	80%
30-06	70%	80%
30-08	70%	80%
30-12	70%	80%
40-03	65%	70%
40-04	70%	75%
40-06	70%	75%
40-08	70%	75%
40-12	70%	75%
50-03	65%	65%
50-04	70%	70%
50-06	70%	70%
50-08	70%	70%
50-12	70%	70%

La Tabella 7.6 riporta invece la percentuale media di variabili frazionarie totali, calcolata sul numero di variabili diverse da 0, nella soluzione ottima del rilassamento continuo delle istanze per cui è stato possibile trovare delle disuguaglianze violate. Tra parentesi è inoltre riportata la variazione rispetto ai valori delle percentuali prima dell'implementazione dell'algoritmo di separazione.

**Tabella 7.6 :** Percentuale di variabili frazionarie totali e variazione percentuale rispetto ai valori prima dell'implementazione dell'algoritmo di separazione (tra parentesi).

	Modello PA-Gen	Modello NV-BigM Dinamico
20-03	1.2% (0.0%)	0.5% (-77.3%)
20-04	1.1% (-8.3%)	0.6% (-75.0%)
20-06	1.2% (0.0%)	0.6% (-75.0%)
20-08	1.2% (0.0%)	0.6% (-75.0%)
20-12	1.2% (0.0%)	0.6% (-76.0%)
30-03	1.2% (+9.1%)	0.4% (-76.5%)
30-04	1.1% (+10.0%)	0.4% (-75.0%)
30-06	1.2% (+20.0%)	0.4% (-75.0%)
30-08	1.2% (+20.0%)	0.4% (-75.0%)
30-12	1.2% (+33.3%)	0.4% (-75.0%)
40-03	0.5% (-16.7%)	0.3% (-70.0%)
40-04	0.5% (0.0%)	0.3% (-72.3%)
40-06	0.5% (0.0%)	0.3% (-70.0%)
40-08	0.4% (-20.0%)	0.3% (-70.0%)
40-12	0.5% (0.0%)	0.3% (-70.0%)
50-03	1.2% (+140.0%)	0.2% (-71.4%)
50-04	1.1% (+260.6%)	0.2% (-71.4%)
50-06	1.2% (+300.0%)	0.2% (-71.4%)
50-08	1.2% (+300.0%)	0.2% (-71.4%)
50-12	1.2% (+200.0%)	0.2% (-71.4%)

Possiamo osservare che nel modello NV-BigM Dinamico si registra sempre una riduzione della percentuale media di variabili frazionarie rispetto al valore prima dell'implementazione dell'algoritmo di separazione, mentre nel modello PA-Gen soltanto in tre gruppi di istanze questo si verifica. Nelle rimanenti istanze la percentuale di variabili frazionarie è maggiore o uguale al valore prima dell'implementazione dell'algoritmo, con aumenti anche molto

elevati in vari gruppi di istanze.

## 7.2 Risultati su istanze di dimensione più elevata

Sulla base dei risultati ottenuti e descritti nella precedente Sezione 7.1, abbiamo deciso di testare i due modelli più significativi, PA-Gen e NV-BigM Dinamico, su istanze di dimensioni maggiori, descritte nella Sezione 6.2.2. Anche in questo caso abbiamo analizzato la qualità della formulazione in termini di *integrality gap al nodo radice* e percentuale di variabili frazionarie, e valutato i costi computazionali.

### 7.2.1 Qualità della formulazione

A differenza di quelle più piccole, non tutte le istanze testate sono state risolte entro il *time limit* (sempre fissato a 1800 secondi) nel modello NV-BigM Dinamico.

La Tabella 7.7, per i due modelli testati, riporta la percentuale di istanze risolte all'ottimo intero entro il *time limit* nei vari scenari, e la percentuale di istanze per cui il tempo necessario per trovare una soluzione ottima è superiore al *time limit*, e dunque per esse il solver restituisce la migliore soluzione ammissibile trovata fino a quel punto.

La tabella può essere letta in questo modo: per ogni coppia di valori riportati, il primo valore rappresenta la percentuale di istanze risolte all'ottimo entro il *time limit* sul totale delle istanze testate; il secondo valore rappresenta la percentuale delle istanze ammissibili ma non risolte entro tale limite. Possiamo notare che nel modello PA-Gen tutte le istanze vengono risolte all'ottimo, mentre nel modello NV-BigM Dinamico invece in ogni scenario vi è almeno un'istanza che non viene risolta all'ottimo. Notiamo inoltre che non sempre il solver è in grado di restituire una soluzione ammissibile allo scadere del *time limit*. ciò è legato alla dimensione più elevata del modello in questione, e si tradurrà anche in costi computazionali più elevati.

**Tabella 7.7 :** Percentuale di istanze risolte all’ottimo e percentuale di istanze per le quali si riesce a trovare una soluzione ammissibile entro il *time limit*.

	Modello PA-Gen	Modello NV-BigM Dinamico
20-03	100%, 0%	90%, 10%
20-04	100%, 0%	80%, 20%
30-06	100%, 0%	80%, 0%
30-08	100%, 0%	80%, 0%
30-12	100%, 0%	80%, 10%
40-06	100%, 0%	80%, 10%
40-08	100%, 0%	80%, 10%
50-06	100%, 0%	80%, 20%
50-08	100%, 0%	80%, 10%
50-12	100%, 0%	80%, 10%

Come detto in precedenza, per valutare la qualità delle soluzioni del rilassamento continuo, abbiamo studiato sia l’*integrality gap* (al nodo radice) che il numero di variabili frazionarie in rapporto alle variabili intere. La Tabella 7.8 riporta l’*integrality gap medio* delle varie istanze nei due modelli, mentre la Tabella 7.9 riporta la percentuale (media) di variabili che assumono valore frazionario nella soluzione ottima del rilassamento continuo; percentuale calcolata sempre rispetto al numero totale di variabili che nell’ottimo del rilassamento assumono valore non zero.

Notiamo che in entrambi i modelli il valore medio dell’*integrality gap* rimane elevato, sebbene nel modello NV-BigM Dinamico si registrano in generale valori più bassi. Va ricordato però che il modello non riesce a risolvere all’ottimo tutte le istanze entro il *time limit* prefissato, a differenza del modello PA-Gen. Infatti, se calcoliamo la media solo nelle istanze risolte all’ottimo dal modello NV-BigM Dinamico, il modello PA-Gen presenta valori molto simili ad esso.

Considerando le variabili frazionarie nei due modelli però, sebbene in entrambi i valori risultino essere molto bassi, si possono notare percentuali inferiori nel modello con i vincoli alternativi. In tale modello la percentua-



**Tabella 7.8** : *Integrality gap* medio dei modelli testati, calcolato considerando solo le istanze risolte all'ottimo.

	Modello PA-Gen	Modello NV-Dinamico
20-03	34.9%	33.5%
20-04	36.5%	30.9%
30-06	45.3%	37.1%
30-08	45.3%	37.1%
30-12	45.9%	37.0%
40-06	47.8%	37.5%
40-08	47.8%	37.5%
50-06	49.9%	37.5%
50-08	49.9%	37.5%
50-12	49.9%	37.5%

**Tabella 7.9** : Percentuale di variabili frazionarie totali calcolata sul numero di variabili diverse da 0 nella soluzione ottima del rilassamento continuo delle istanze risolte all'ottimo.

	Modello PA-Gen	Modello NV-BigM Dinamico
20-03	0.6%	0.0%
20-04	0.7%	0.0%
30-06	0.6%	0.0%
30-08	0.6%	0.0%
30-12	0.6%	0.0%
40-06	0.6%	0.0%
40-08	0.6%	0.0%
50-06	0.5%	0.0%
50-08	0.5%	0.0%
50-12	0.5%	0.0%

le è mediamente pari allo 0.0% (comunque strettamente maggiore di zero); questo significa che nelle varie istanze il numero di variabili frazionarie è estremamente basso.

### 7.2.2 Tempi di calcolo

Valutiamo infine il tempo medio di risoluzione delle istanze nei vari modelli, per comprendere come varia l'efficienza dal punto di vista dei costi computazionali.

Nella Tabella 7.10 è riportato il tempo di risoluzione medio necessario per ottenere la soluzione ottima intera nei due modelli, calcolato considerando solo le istanze risolte all'ottimo entro il *time limit* nei vari scenari.

**Tabella 7.10** : Tempo medio (in secondi) necessario per ottenere la soluzione ottima intera, calcolato considerando solo le istanze risolte all'ottimo, nei due modelli.

	Modello PA-Gen	Modello NV-Dinamico
20-03	437	1087
20-04	360	1028
30-06	514	1034
30-08	517	1036
30-12	335	1110
40-06	505	1057
40-08	544	1033
50-06	441	1045
50-08	539	1034
50-12	328	1214

Risulta evidente che i costi computazionali, per effetto delle aumentate dimensioni, siano più elevati rispetto a quelli presentati in precedenza nella Sezione 7.1.2. Il modello PA-Gen risolve sempre le istanze entro il *time limit*, impiegando mediamente non più di 9 minuti. Il modello NV-BigM Dinamico, come ci aspettavamo, presenta tempi più elevati: in media impiega circa 18 minuti, il doppio del tempo dell'altro modello, non riuscendo inoltre a

risolvere all'ottimo tutte le istanze.

Complessivamente, i risultati computazionali discussi in questa sezione risultano essere comunque incoraggianti: sebbene le due formulazioni necessitino di essere rafforzate, i due modelli presentano tempi di risoluzione validi anche quando testati su istanze più grandi.

## Capitolo 8

# Considerazioni finali

A partire dal modello descritto in [6] per il problema ATFM, in questa tesi abbiamo evidenziato e proposto una serie di proprietà utilizzabili per rafforzare la sua formulazione, e presentato una formulazione equivalente per lo stesso problema. I nuovi vincoli proposti per lo studio delle condizioni di traffico risultano essere più forti rispetto agli originari presenti in [6], sebbene la dimensione del nuovo modello risulti essere più elevata.

In particolare, abbiamo evidenziato proprietà riguardanti il legame tra alcuni gruppi di variabili (vedi Sezione 4.1), i controlli nei vincoli di traffico (vedi Sezione 4.2) e la valorizzazione del parametro di controllo Big-M, proponendo una stima migliore rispetto a quella presente in [6] (vedi Sezione 4.3). Abbiamo poi presentato una formulazione alternativa del problema (teoricamente più forte), proponendo dei nuovi vincoli di controllo del traffico e delle condizioni di sicurezza (vedi Sezioni 5.3 e 5.4). Per valutare l'impatto di tali modifiche, abbiamo confrontato il comportamento del modello base [6] con altri 5 modelli ottenuti da diverse combinazioni delle variazioni proposte. I 6 modelli sono stati testati su un gruppo di istanze base (vedi Sezione 6.2.1), e per ognuno di essi abbiamo implementato un algoritmo di separazione delle *cover inequalities*. I due modelli più significativi, ovvero il modello PA-Gen (in cui abbiamo incluso tutte le proprietà aggiuntive descritte nelle Sezioni 4.1, 4.2 e 4.3) ed il modello NV-BigM Dinamico (in cui consideriamo i vincoli alternativi descritti nelle Sezioni 5.3 e 5.4, e la nuova

stima del parametro Big-M descritta nella Sezione 4.3), sono stati inoltre testati su delle istanze di dimensione più elevata (vedi Sezione 6.2.2).

I risultati computazionali ottenuti su istanze artificialmente generate e relativamente piccole hanno dimostrato che la formulazione equivalente da noi proposta nelle Sezioni 5.3 e 5.4 presenta prestazioni solo di poco superiori alla formulazione di partenza.

La nuova formulazione risulta essere più forte rispetto a quella proposta in [6], anche se l'*integrality gap* rimane elevato, e comunque non particolarmente diverso da quello della formulazione del modello PA-Gen. I costi computazionali suggeriscono inoltre che il modello PA-Gen presenti le migliori performance, e che quindi la nuova stima proposta sul parametro Big-M abbia un impatto maggiore rispetto alle modifiche proposte sui vari vincoli. Ciò viene confermato anche dall'analisi dei dati ottenuti sulle istanze di dimensioni maggiori: a causa della sua dimensione più elevata, il modello NV-BigM Dinamico ha performance peggiori rispetto al modello PA-Gen, non solo in termini di costi computazionali. Nonostante infatti il modello con i vincoli alternativi presenti mediamente un *integrality gap* minore, esso presenta anche meno istanze risolte all'ottimo.

Sulla base di queste osservazioni, uno spunto di studio per il futuro potrebbe essere quello di fornire stime più accurate per gli altri parametri del problema, in quanto sembrano influire maggiormente sia sulla qualità della formulazione, sia sui costi computazionali. Un primo sviluppo potrebbe consistere nel differenziare ulteriormente la classificazione delle situazioni di potenziale conflitto che possono verificarsi, distinguendo livelli di criticità differenti. Inoltre, si potrebbe valutare come impattano la formulazione variazioni di capacità non omogenee, in base alle diverse caratteristiche dei settori dell'aerospazio. In questo modo si potrebbe aumentare in misura maggiore la capacità in un settore in cui non si rilevano particolari criticità, e consentire aumenti moderati o nulli in settori con elevate situazioni critiche.

In aggiunta, poiché nonostante numerosi tentativi non siamo riusciti a determinare delle disuguaglianze valide che rafforzassero la formulazione, uno

studio approfondito del rilassamento continuo potrebbe consentire di determinarle, rendendo la formulazione ancora più stringente.

Potrebbe infine essere interessante indagare la possibilità di inclusione dell'opzione di speed control e di rerouting all'interno del modello, valutando come queste possibilità, che certamente arricchirebbero il modello, influenzino la qualità della sua formulazione e sulla sua efficienza.

# Appendice A

## Codice sorgente AMPL

Riportiamo in seguito i file .mod scritti nel linguaggio AMPL per l'implementazione dei più significativi modelli testati.

### Modello PA-Gen:

#Insiemi e parametri:

```
set FLIGHTS; #insieme dei voli
set AIRPORTS; #insieme degli aeroporti
set SECTORS; #insieme dei settori dell'aerospazio
set TIMES; #insieme degli istanti di tempo

set PATH{f in FLIGHTS} ordered; #insieme delle traiettorie dei voli

param N {f in FLIGHTS} := card(PATH[f]); #numero di settori nella
traiettoria del volo f
param CapDep{AIRPORTS}; #capacità di partenza dell'aeroporto k al
tempo t
param CapArr{AIRPORTS}; #capacità di arrivo dell'aeroporto k al
tempo t
param CapSect{j in SECTORS}; #capacità del settore j al tempo t
```

```

param ct {f in FLIGHTS, j in PATH[f]}; #crossing time, numero di
unità di tempo che il volo f impiega per attraversare il settore/aeroporto
j
param dt {f in FLIGHTS}; #orario di partenza previsto per il volo
f
param lfdt {f in FLIGHTS}; #ultimo orario ammissibile di partenza
per il volo f
param at {f in FLIGHTS} := dt[f] + sum{i in 1 .. N[f]} (ct[f,member(i,PATH[f])]);
#orario di arrivo previsto per il volo f
param lfat {f in FLIGHTS}; #ultimo orario ammissibile di arrivo
per il volo f

param cg {f in FLIGHTS}; #costo di mantenimento del volo f al suolo
per un'unità di tempo
param ca {f in FLIGHTS}; #costo di mantenimento del volo f in aria
per un'unità di tempo

param Tmin {f in FLIGHTS, j in PATH[f]} := (if j == first(PATH[f])
then dt[f] else dt[f] + sum{i in 1 .. card(PATH[f]): i < ord(j,PATH[f])}
ct[f,member(i,PATH[f])]); #primo istante di tempo in cui è possibile
per il volo f entrare nel settore j
param Tmax {f in FLIGHTS, j in PATH[f]} := (if j == first(PATH[f])
then lfdt[f] else if j!=last(PATH[f]) then lfdt[f] + sum{i in 1..card(PATH[f])
: i < ord(j,PATH[f])} ct[f,member(i,PATH[f])] else lfat[f]); #ultimo
istante di tempo in cui è possibile per il volo f entrare nel settore
j

set T {f in FLIGHTS, j in PATH[f]} := Tmin[f,j]..Tmax[f,j]; #intervallo
di tempo in cui è possibile per il volo f entrare nel settore j

set CONFLICTS {j in SECTORS} dimen 2; #insieme delle coppie di voli
in potenziale conflitto

```



```

param Tlast{f in FLIGHTS, j in PATH[f]} := Tmax[f,j]+ct[f,j]; #ultimo
tempo ammissibile per il volo f per essere all'interno del settore
j
set Tsect{f in FLIGHTS, j in PATH[f]} := Tmin[f,j]..Tlast[f,j];
#intervallo di tempo ammissibile per il volo f per essere nel settore
j
set TIME{j in SECTORS, f in FLIGHTS, ff in FLIGHTS: (f,ff) in CONFLICTS[j]}
= Tsect[f,j] inter Tsect[ff,j]; #intervallo di tempo ammissibile
per i voli concorrenti f e ff per essere entrambi nel settore j

param Tin{j in SECTORS, f in FLIGHTS, ff in FLIGHTS : (f,ff) in
CONFLICTS[j]}; #tempo che il volo f impiega, dopo l'entrata in j,
per raggiungere l'incrocio con la traiettoria di ff in j
param tin{j in SECTORS, ff in FLIGHTS, f in FLIGHTS : (f,ff) in
CONFLICTS[j]}; #tempo che il volo ff impiega, dopo l'entrata in
j, per raggiungere l'incrocio con la traiettoria di f in j

param Q{j in SECTORS}; #aumento di capacità consentito
param M{j in SECTORS, t in TIMES}; #parametro di sicurezza
param kk{j in SECTORS}; #massimo numero di situazioni critiche registrabili
in presenza di capacità aggiuntiva

param delta; #ampiezza area critica in avanti
param Delta; #ampiezza area critica all'indietro

#Controlli sui dati:
check {f in FLIGHTS} : lfat[f] >= lfdt[f] + sum{i in 1 .. card(PATH[f])}
ct[f,member(i,PATH[f])]; #l'ultimo tempo ammissibile di atterraggio
deve essere maggiore o uguale all'orario di atterraggio previsto
check {f in FLIGHTS} : ct[f,first(PATH[f])] = 0; #per ogni volo
il tempo di percorrenza dell'aeroporto di partenza è 0: appena
l'aereo decolla entra nel primo settore della rotta

```

```
check {f in FLIGHTS} : ct[f,last(PATH[f])] = 0; #per ogni volo
il tempo di percorrenza dell'aeroporto di arrivo è 0: appena l'aereo
lascia l'ultimo settore della rotta atterra
```

```
#Variabili decisionali:
```

```
var x {f in FLIGHTS, j in PATH[f], t in T[f,j]} binary;
```

```
var y {f in FLIGHTS, j in PATH[f], t in Tsect[f,j]} binary;
```

```
var c {j in SECTORS, f in FLIGHTS, ff in FLIGHTS, t in TIME[j,f,ff]
: (f,ff) in CONFLICTS[j]} binary;
```

```
var q {j in SECTORS, t in TIMES} binary;
```

```
#Parametri e variabili per la separazione delle cover inequalities:
```

```
param i_t default 0; #contatore del numero delle cover trovate
set CUTS default {}; #insieme delle cover inequality
param C_q {m in CUTS}; #parametro per determinare la cardinalità
cover
param C_c {m in CUTS}; #parametro per determinare la cardinalità
cover
param index_q {m in CUTS, j in SECTORS, t in TIMES} default 0; #serve
per memorizzare indici delle variabili incluse nella cover inequality
param index_c {m in CUTS, j in SECTORS, f in FLIGHTS, ff in FLIGHTS,
t in TIME[j,f,ff] : (f,ff) in CONFLICTS[j]} default 0; #serve per
memorizzare indici delle variabili incluse nella cover inequality
```

```
param v_c {j in SECTORS, f in FLIGHTS, ff in FLIGHTS, t in TIME[j,f,ff]
: (f,ff) in CONFLICTS[j]} default 0; #valore delle variabili c
```

```

nella soluzione ottima
param v_q {j in SECTORS, t in TIMES} default 0; #valore delle variabili
q nella soluzione ottima
param conta_q; #conta il numero di variabili w_q diverse da zero
param conta_c; #conta il numero di variabili w_c diverse da zero

var w_c {j in SECTORS, f in FLIGHTS, ff in FLIGHTS, t in TIME[j,f,ff]
: (f,ff) in CONFLICTS[j]} binary; #variabili del problema di separazione
var w_q {j in SECTORS, t in TIMES} binary; #variabili del problema
di separazione

#Funzione obiettivo da minimizzare:

minimize costotot : sum{f in FLIGHTS} ((cg[f]-ca[f])*(sum{t in
T[f,first(PATH[f])]} (t*(x[f,first(PATH[f]),t]-(if t-1 >= Tmin[f,first(PATH[f])]
and t-1 <= Tmax[f,first(PATH[f])] then x[f,first(PATH[f]),t-1] else
if t-1 <= Tmin[f,first(PATH[f])]-1 then 0 else 1))))+ca[f]*(sum{t
in T[f,last(PATH[f])]} (t*(x[f,last(PATH[f]),t]-(if t-1 >= Tmin[f,last(PATH[f])]
and t-1 <= Tmax[f,last(PATH[f])] then x[f,last(PATH[f]),t-1] else
if t-1 <= Tmin[f,last(PATH[f])]-1 then 0 else 1))))
+(ca[f]-cg[f])*dt[f]-ca[f]*at[f]);

#Vincoli del problema:

s.t. DefVary {f in FLIGHTS, j in PATH[f] diff{first(PATH[f]),last(PATH[f])},
t in Tsect[f,j]} : (if t in T[f,j] then x[f,j,t] else 1) - (if
t in T[f,next(j,PATH[f])] then x[f,next(j,PATH[f]),t] else if t
<= Tmin[f,next(j,PATH[f])]-1 then 0 else 1) = y[f,j,t];

s.t. CapDepAirport {k in AIRPORTS, t in TIMES} : sum {f in FLIGHTS
: k == first(PATH[f])} ((if t in T[f,k] then x[f,k,t] else if t
<= Tmin[f,k]-1 then 0 else 1)-(if t-1 in T[f,k] then x[f,k,t-1]
else if t-1 <= Tmin[f,k]-1 then 0 else 1)) <= CapDep[k];

```

s.t. CapArrAirport {k in AIRPORTS, t in TIMES} : sum {f in FLIGHTS : k == last(PATH[f])} ((if t in T[f,k] then x[f,k,t] else if t <= Tmin[f,k]-1 then 0 else 1)-(if t-1 in T[f,k] then x[f,k,t-1] else if t-1 <= Tmin[f,k]-1 then 0 else 1)) <= CapArr[k];

s.t. CondC1 {j in SECTORS, f in FLIGHTS, ff in FLIGHTS, t in TIME[j,f,ff]: (f,ff) in CONFLICTS[j]}: (if t+ct[f,j]-Tin[j,f,ff] in Tsect[f,j] then y[f,j,t+ct[f,j]-Tin[j,f,ff]] else 0) + (if Delta <= Tin[j,f,ff]-1 then (if t+Delta-Tin[j,f,ff] in Tsect[f,j] then y[f,j,t+Delta-Tin[j,f,ff]] else 0) else y[f,j,t]) + (if t+ct[ff,j]-tin[j,ff,f] in Tsect[ff,j] then y[ff,j,t+ct[ff,j]-tin[j,ff,f]] else 0) + (if Delta <= tin[j,ff,f]-1 then (if t+Delta-tin[j,ff,f] in Tsect[ff,j] then y[ff,j,t+Delta-tin[j,ff,f]] else 0) else y[ff,j,t]) <= c[j,f,ff,t] + 3;

s.t. CondC2i {j in SECTORS, f in FLIGHTS, ff in FLIGHTS, t in TIME[j,f,ff]: (f,ff) in CONFLICTS[j]}: (if t+ct[f,j]-Tin[j,f,ff] in Tsect[f,j] then y[f,j,t+ct[f,j]-Tin[j,f,ff]] else 0) + (if Delta <= Tin[j,f,ff]-1 then (if t+Delta-Tin[j,f,ff] in Tsect[f,j] then y[f,j,t+Delta-Tin[j,f,ff]] else 0) else y[f,j,t]) + (if t-tin[j,ff,f] in Tsect[ff,j] then y[ff,j,t-tin[j,ff,f]] else 0) + (if delta <= ct[ff,j]-tin[j,ff,f]-1 then (if t-delta-tin[j,ff,f]+ct[ff,j] in Tsect[ff,j] then y[ff,j,t-delta-tin[j,ff,f]+ct[ff,j]] else 0) else y[ff,j,t]) <= c[j,f,ff,t] +3;

s.t. CondC2ii {j in SECTORS, f in FLIGHTS, ff in FLIGHTS, t in TIME[j,f,ff]: (f,ff) in CONFLICTS[j]}: (if t-Tin[j,f,ff] in Tsect[f,j] then y[f,j,t-Tin[j,f,ff]] else 0) + (if delta <= ct[f,j]-Tin[j,f,ff]-1 then (if t-delta+ct[f,j]-Tin[j,f,ff] in Tsect[f,j] then y[f,j,t-delta+ct[f,j]-Tin[j,f,ff]] else 0) else y[f,j,t]) + (if t+ct[ff,j]-tin[j,ff,f] in Tsect[ff,j] then y[ff,j,t+ct[ff,j]-tin[j,ff,f]] else 0) + (if Delta <= tin[j,ff,f]-1 then (if t+Delta-tin[j,ff,f] in Tsect[ff,j] then y[ff,j,t+Delta-tin[j,ff,f]] else 0) else y[ff,j,t])

$\leq c[j,f,ff,t] + 3;$

s.t. CondC3 {j in SECTORS, f in FLIGHTS, ff in FLIGHTS, t in TIME[j,f,ff]:  
(f,ff) in CONFLICTS[j]}: (if t-Tin[j,f,ff] in Tsect[f,j] then  
y[f,j,t-Tin[j,f,ff]] else 0) + (if delta  $\leq$  ct[f,j]-Tin[j,f,ff]-1  
then (if t-delta+ct[f,j]-Tin[j,f,ff] in Tsect[f,j] then  
y[f,j,t-delta+ct[f,j]-Tin[j,f,ff]] else 0) else y[f,j,t]) + (if  
t-tin[j,ff,f] in Tsect[ff,j] then y[ff,j,t-tin[j,ff,f]] else 0)  
+ (if delta  $\leq$  ct[ff,j]-tin[j,ff,f]-1 then (if t-delta-tin[j,ff,f]+ct[ff,j]  
in Tsect[ff,j] then y[ff,j,t-delta-tin[j,ff,f]+ct[ff,j]] else 0)  
else y[ff,j,t])  $\leq$  c[j,f,ff,t] + 3;

s.t. CapImpr{j in SECTORS, t in TIMES}: sum{f in FLIGHTS, ff in  
FLIGHTS: (f,ff) in CONFLICTS[j]} (if t in TIME[j,f,ff] then c[j,f,ff,t]  
else 0)  $\leq$  q[j,t]\*(kk[j]-M[j,t])+M[j,t];

s.t. Nontrivialsol{f in FLIGHTS, j in PATH[f], t in T[f,j]: t=Tmax[f,j]}:  
x[f,j,t] = 1;

s.t. ConsTime{f in FLIGHTS, j in PATH[f], t in T[f,j]}: ((if t-1  
in T[f,j] then x[f,j,t-1] else if t-1  $\leq$  Tmin[f,j]-1 then 0 else  
1) -x[f,j,t])  $\leq$  0;

s.t. ConnSectors {f in FLIGHTS, j in PATH[f] diff {last(PATH[f]),  
member(N[f]-1,PATH[f])}, t in T[f,j]} : ((if t+ct[f,j] in T[f,next(j,PATH[f])]  
then x[f,next(j,PATH[f]),t+ct[f,j]] else if t+ct[f,j]  $\leq$   
Tmin[f,next(j,PATH[f])]-1 then 0 else 1)-x[f,j,t]) = 0;

s.t. ConnLastSector {f in FLIGHTS, j in PATH[f], t in T[f,j] :  
j = member(N[f]-1,PATH[f])} : ((if t+ct[f,j] in T[f,next(j,PATH[f])]  
then x[f,next(j,PATH[f]),t+ct[f,j]] else if t+ct[f,j]  $\leq$   
Tmin[f,next(j,PATH[f])]-1 then 0 else 1)-x[f,j,t])  $\leq$  0;

```

s.t. CapSectors {j in SECTORS, t in TIMES} : sum {f in FLIGHTS
: j in PATH[f] and ord0(j,PATH[f]) > 1 and ord0(j,PATH[f]) < card(PATH[f])}
((if t in T[f,j] then x[f,j,t] else if t <= Tmin[f,j]-1 then 0 else
1)-(if t in T[f,next(j,PATH[f])] then x[f,next(j,PATH[f]),t] else
if t <= Tmin[f,next(j,PATH[f])]-1 then 0 else 1)) <= CapSect[j]
+ Q[j]*q[j,t];

#Cover inequalities:
s.t. CutPlane{m in CUTS}: sum{j in SECTORS, t in TIMES}(if index_q[m,j,t]==1
then q[j,t] else 0) + sum{j in SECTORS, f in FLIGHTS, ff in FLIGHTS,
t in TIME[j,f,ff] : (f,ff) in CONFLICTS[j]}(if index_c[m,j,f,ff,t]==1
then c[j,f,ff,t] else 0) <= C_c[m] + C_q[m]-1;

#Problema di separazione delle cover:

minimize covers: sum{j in SECTORS, f in FLIGHTS, ff in FLIGHTS,
t in TIME[j,f,ff] : (f,ff) in CONFLICTS[j]}
((1-v_c[j,f,ff,t])*w_c[j,f,ff,t])+sum{j in SECTORS, t in TIMES}(
(1-v_q[j,t])*w_q[j,t]);

s.t. bound_weights{j in SECTORS, t in TIMES: M[j,t]>kk[j]}: sum{f
in FLIGHTS, ff in FLIGHTS: (f,ff) in CONFLICTS[j]} (if t in TIME[j,f,ff]
then w_c[j,f,ff,t] else 0)+(M[j,t]-kk[j])*w_q[j,t] >= M[j,t]+1;

Modello NV-Dinamico:

#Insiemi e parametri:

set FLIGHTS; #insieme dei voli
set AIRPORTS; #insieme degli aeroporti
set SECTORS; #insieme dei settori dell'aerospazio

```

```

set TIMES; #insieme degli istanti di tempo

set PATH{f in FLIGHTS} ordered; #insieme delle traiettorie dei voli

param N {f in FLIGHTS} := card(PATH[f]); #numero di settori nella
traiettoria del volo f
param CapDep{AIRPORTS}; #capacità di partenza dell'aeroporto k al
tempo t
param CapArr{AIRPORTS}; #capacità di arrivo dell'aeroporto k al
tempo t
param CapSect{j in SECTORS}; #capacità del settore j al tempo t

param ct {f in FLIGHTS, j in PATH[f]}; #crossing time, numero di
unità di tempo che il volo f impiega per attraversare il settore/aeroporto
j
param dt {f in FLIGHTS}; #orario di partenza previsto per il volo
f
param lfdt {f in FLIGHTS}; #ultimo orario ammissibile di partenza
per il volo f
param at {f in FLIGHTS} := dt[f] + sum{i in 1 .. N[f]} (ct[f,member(i,PATH[f])]);
#orario di arrivo previsto per il volo f
param lfat {f in FLIGHTS}; #ultimo orario ammissibile di arrivo
per il volo f

param cg {f in FLIGHTS}; #costo di mantenimento del volo f al suolo
per un'unità di tempo
param ca {f in FLIGHTS}; #costo di mantenimento del volo f in aria
per un'unità di tempo

param Tmin {f in FLIGHTS, j in PATH[f]} := (if j == first(PATH[f])
then dt[f] else dt[f] + sum{i in 1 .. card(PATH[f]): i < ord(j,PATH[f])}
ct[f,member(i,PATH[f])]); #primo istante di tempo in cui è possibile
per il volo f entrare nel settore j

```

```

param Tmax {f in FLIGHTS, j in PATH[f]} := (if j == first(PATH[f])
then lfdt[f] else if j!=last(PATH[f]) then lfdt[f] + sum{i in 1..card(PATH[f])
: i < ord(j,PATH[f])} ct[f,member(i,PATH[f])] else lfat[f]) ; #ultimo
istante di tempo in cui è possibile per il volo f entrare nel settore
j

set T {f in FLIGHTS, j in PATH[f]} := Tmin[f,j]..Tmax[f,j]; #intervallo
di tempo in cui è possibile per il volo f entrare nel settore j

set CONFLICTS {j in SECTORS} dimen 2; #insieme delle coppie di voli
in potenziale conflitto

param Tlast{f in FLIGHTS, j in PATH[f]} := Tmax[f,j]+ct[f,j]; #ultimo
tempo ammissibile per il volo f per essere all'interno del settore
j
set Tsect{f in FLIGHTS, j in PATH[f]} := Tmin[f,j]..Tlast[f,j];
#intervallo di tempo ammissibile per il volo f per essere nel settore
j
set TIME{j in SECTORS, f in FLIGHTS, ff in FLIGHTS: (f,ff) in CONFLICTS[j]}
= Tsect[f,j] inter Tsect[ff,j]; #intervallo di tempo ammissibile
per i voli concorrenti f e ff per essere entrambi nel settore j

param Tin{j in SECTORS, f in FLIGHTS, ff in FLIGHTS : (f,ff) in
CONFLICTS[j]}; #tempo che il volo f impiega, dopo l'entrata in j,
per raggiungere l'incrocio con la traiettoria di ff in j
param tin{j in SECTORS, ff in FLIGHTS, f in FLIGHTS : (f,ff) in
CONFLICTS[j]}; #tempo che il volo ff impiega, dopo l'entrata in
j, per raggiungere l'incrocio con la traiettoria di f in j

param Q{j in SECTORS}; #aumento di capacità consentito
param M{j in SECTORS, t in TIMES}; #parametro di sicurezza
param kk{j in SECTORS}; #massimo numero di situazioni critiche registrabili
in presenza di capacità aggiuntiva

```



```

param delta; #ampiezza area critica in avanti
param Delta; #ampiezza area critica all'indietro

#Controlli sui dati:
check {f in FLIGHTS} : lfat[f] >= lfdt[f] + sum{i in 1 .. card(PATH[f])}
ct[f,member(i,PATH[f])]; #l'ultimo tempo ammissibile di atterraggio
deve essere maggiore o uguale all'orario di atterraggio previsto
check {f in FLIGHTS} : ct[f,first(PATH[f])] = 0; #per ogni volo
il tempo di percorrenza dell'aeroporto di partenza è 0: appena
l'aereo decolla entra nel primo settore della rotta
check {f in FLIGHTS} : ct[f,last(PATH[f])] = 0; #per ogni volo
il tempo di percorrenza dell'aeroporto di arrivo è 0: appena l'aereo
lascia l'ultimo settore della rotta atterra

#Variabili decisionali:

var x {f in FLIGHTS, j in PATH[f], t in T[f,j]} binary;

var y {f in FLIGHTS, j in PATH[f], t in Tsect[f,j]} binary;

var c {j in SECTORS, f in FLIGHTS, ff in FLIGHTS, t in TIME[j,f,ff]
: (f,ff) in CONFLICTS[j]} binary;

var a {j in SECTORS, f in FLIGHTS, ff in FLIGHTS, t in TIME[j,f,ff]:(f,ff)
in CONFLICTS[j]} binary;

var b {j in SECTORS, f in FLIGHTS, ff in FLIGHTS, t in TIME[j,f,ff]:(f,ff)
in CONFLICTS[j]} binary;

var q {j in SECTORS, t in TIMES} binary;

```

#Parametri e variabili per la separazione delle cover inequalities:

```
param i_t default 0; #contatore del numero delle cover trovate
set CUTS default {}; #insieme delle cover inequality
param C_q {m in CUTS}; #parametro per determinare la cardinalità
cover
param C_c {m in CUTS}; #parametro per determinare la cardinalità
cover
param index_q {m in CUTS, j in SECTORS, t in TIMES} default 0; #serve
per memorizzare indici delle variabili incluse nella cover inequality
param index_c {m in CUTS, j in SECTORS, f in FLIGHTS, ff in FLIGHTS,
t in TIME[j,f,ff] : (f,ff) in CONFLICTS[j]} default 0; #serve per
memorizzare indici delle variabili incluse nella cover inequality
```

```
param v_c {j in SECTORS, f in FLIGHTS, ff in FLIGHTS, t in TIME[j,f,ff]
: (f,ff) in CONFLICTS[j]} default 0; #valore delle variabili c
nella soluzione ottima
param v_q {j in SECTORS, t in TIMES} default 0; #valore delle variabili
q nella soluzione ottima
param conta_q; #conta il numero di variabili w_q diverse da zero
param conta_c; #conta il numero di variabili w_c diverse da zero
```

```
var w_c {j in SECTORS, f in FLIGHTS, ff in FLIGHTS, t in TIME[j,f,ff]
: (f,ff) in CONFLICTS[j]} binary; #variabili del problema di separazione
var w_q {j in SECTORS, t in TIMES} binary; #variabili del problema
di separazione
```

#Funzione obiettivo da minimizzare:

```
minimize costotot : sum{f in FLIGHTS} ((cg[f]-ca[f])*(sum{t in
T[f,first(PATH[f])]} (t*(x[f,first(PATH[f]),t)-(if t-1 >= Tmin[f,first(PATH[f])]]
and t-1 <= Tmax[f,first(PATH[f])]] then x[f,first(PATH[f]),t-1] else
if t-1 <= Tmin[f,first(PATH[f])]-1 then 0 else 1))))+ca[f]*(sum{t
```

```

in T[f,last(PATH[f])] } (t*(x[f,last(PATH[f]),t]-(if t-1 >= Tmin[f,last(PATH[f])]
and t-1 <= Tmax[f,last(PATH[f])] then x[f,last(PATH[f]),t-1] else
if t-1 <= Tmin[f,last(PATH[f])]-1 then 0 else 1))))
+(ca[f]-cg[f])*dt[f]-ca[f]*at[f]);

```

#Vincoli del problema:

```

s.t. DefVary {f in FLIGHTS, j in PATH[f] diff{first(PATH[f]),last(PATH[f])},
t in Tsect[f,j]} : (if t in T[f,j] then x[f,j,t] else 1) - (if
t in T[f,next(j,PATH[f])] then x[f,next(j,PATH[f]),t] else if t
<= Tmin[f,next(j,PATH[f])]-1 then 0 else 1) = y[f,j,t];

```

```

s.t. CapDepAirport {k in AIRPORTS, t in TIMES} : sum {f in FLIGHTS
: k == first(PATH[f])} ((if t in T[f,k] then x[f,k,t] else if t
<= Tmin[f,k]-1 then 0 else 1)-(if t-1 in T[f,k] then x[f,k,t-1]
else if t-1 <= Tmin[f,k]-1 then 0 else 1)) <= CapDep[k];

```

```

s.t. CapArrAirport {k in AIRPORTS, t in TIMES} : sum {f in FLIGHTS
: k == last(PATH[f])} ((if t in T[f,k] then x[f,k,t] else if t <=
Tmin[f,k]-1 then 0 else 1)-(if t-1 in T[f,k] then x[f,k,t-1] else
if t-1 <= Tmin[f,k]-1 then 0 else 1)) <= CapArr[k];

```

```

s.t. rel_a {j in SECTORS, f in FLIGHTS, ff in FLIGHTS, t in TIME[j,f,ff]:
((f,ff) in CONFLICTS[j])}: a[j,f,ff,t]>=(if j==member(2,PATH[f])
then 0 else (if Delta <= Tin[j,f,ff]-1 then ((if t-Tin[j,f,ff]+Delta-1
in Tsect[f,member(2,PATH[f])] then y[f,member(2,PATH[f]),t-Tin[j,f,ff]+
Delta-1] else 0)-(if t-Tin[j,f,ff]+Delta in Tsect[f,member(2,PATH[f])]
then y[f,member(2,PATH[f]),t-Tin[j,f,ff]+Delta] else 0)) else ((if
t-1 in Tsect[f,member(2,PATH[f])] then y[f,member(2,PATH[f]),t-1]
else 0)-(if t in Tsect[f,member(2,PATH[f])] then y[f,member(2,PATH[f]),t]
else 0)))));

```

```

s.t. rel_b {j in SECTORS, f in FLIGHTS, ff in FLIGHTS, t in TIME[j,f,ff]:
((f,ff) in CONFLICTS[j])}: b[j,f,ff,t]>=(if j==member(2,PATH[f])
then 0 else ((if t-Tin[j,f,ff]-1 in Tsect[f,member(2,PATH[f])] then
y[f,member(2,PATH[f]),t-Tin[j,f,ff]-1] else 0)-(if t-Tin[j,f,ff]
in Tsect[f,member(2,PATH[f])] then y[f,member(2,PATH[f]),t-Tin[j,f,ff]]
else 0)));

```

```

s.t. pos_crit {j in SECTORS, f in FLIGHTS, ff in FLIGHTS, t in
TIME[j,f,ff]:((f,ff) in CONFLICTS[j])}: c[j,f,ff,t]>= -1 + ((if
j==member(2,PATH[f]) then ((if Delta<=Tin[j,f,ff]-1 then (
(if t-Tin[j,f,ff]+Delta in Tsect[f,j] then y[f,j,t-Tin[j,f,ff]+Delta]
else 0)-(if t-Tin[j,f,ff]+Delta-1 in Tsect[f,j] then
y[f,j,t-Tin[j,f,ff]+Delta-1] else 0)) else ((if t in Tsect[f,j]
then y[f,j,t] else 0)-(if t-1 in Tsect[f,j] then y[f,j,t-1] else
0)))+(if t-Tin[j,f,ff] in Tsect[f,j] then y[f,j,t-Tin[j,f,ff]] else
0)-(if t-Tin[j,f,ff]-1 in Tsect[f,j] then y[f,j,t-Tin[j,f,ff]-1]
else 0)) else (a[j,f,ff,t]+b[j,f,ff,t]+(if Delta <= Tin[j,f,ff]-1
then (sum{i in 3 .. ord(j,PATH[f])-1}((if (t-Tin[j,f,ff]+Delta-1
in Tsect[f,member(i,PATH[f])) then y[f,member(i,PATH[f]),t-Tin[j,f,ff]+
+Delta-1] else 0)-(if (t-Tin[j,f,ff]+Delta in Tsect[f,member(i,PATH[f]))]
then y[f,member(i,PATH[f]),t-Tin[j,f,ff]+Delta] else 0))) else (sum{i
in 3 .. ord(j,PATH[f])-1}((if t-1 in Tsect[f,member(i,PATH[f])]
then y[f,member(i,PATH[f]),t-1] else 0)-(if t in Tsect[f,member(i,PATH[f])]
then y[f,member(i,PATH[f]),t] else 0)))))+(sum{i in 3 .. ord(j,PATH[f])-1}
((if (t-Tin[j,f,ff]-1 in Tsect[f,member(i,PATH[f])) then
y[f,member(i,PATH[f]),t-Tin[j,f,ff]-1] else 0)-(if (t-Tin[j,f,ff]
in Tsect[f,member(i,PATH[f])) then y[f,member(i,PATH[f]),t-Tin[j,f,ff]]
else 0)))))+(if j==member(2,PATH[ff]) then ((if Delta<=tin[j,ff,f]-1
then ((if t-tin[j,ff,f]+Delta in Tsect[ff,j] then y[ff,j,t-tin[j,ff,f]+Delta]
else 0)-(if t-tin[j,ff,f]+Delta-1 in Tsect[ff,j] then
y[ff,j,t-tin[j,ff,f]+Delta-1] else 0)) else ((if t in Tsect[ff,j]
then y[ff,j,t] else 0)-(if t-1 in Tsect[ff,j] then y[ff,j,t-1] else
0)))+(if t-tin[j,ff,f] in Tsect[ff,j] then y[ff,j,t-tin[j,ff,f]]

```

```

else 0)-(if t-tin[j,ff,f]-1 in Tsect[ff,j] then y[ff,j,t-tin[j,ff,f]-1]
else 0)) else (a[j,ff,f,t]+b[j,ff,f,t]+(if Delta <= tin[j,ff,f]-1
then (sum{i in 3 .. ord(j,PATH[ff])-1}((if (t-tin[j,ff,f]+Delta-1
in Tsect[ff,member(i,PATH[ff])) then y[ff,member(i,PATH[ff]),t-tin[j,ff,f]+
+Delta-1] else 0)-(if (t-tin[j,ff,f]+Delta in Tsect[ff,member(i,PATH[ff]))]
then y[ff,member(i,PATH[ff]),t-tin[j,ff,f]+Delta] else 0))) else
(sum{i in 3 .. ord(j,PATH[ff])-1}((if (t-1 in Tsect[ff,member(i,PATH[ff]))]
then y[ff,member(i,PATH[ff]),t-1] else 0)-(if (t in Tsect[ff,member(i,PATH[ff]))]
then y[ff,member(i,PATH[ff]),t] else 0)))))+(sum{i in 3 .. ord(j,PATH[ff])-1}
((if (t-tin[j,ff,f]-1 in Tsect[ff,member(i,PATH[ff]))] then
y[ff,member(i,PATH[ff]),t-tin[j,ff,f]-1] else 0)-(if (t-tin[j,ff,f]
in Tsect[ff,member(i,PATH[ff]))] then y[ff,member(i,PATH[ff]),t-tin[j,ff,f]]
else 0))))));

```

s.t. CapImpr {j in SECTORS, t in TIMES}: sumf in FLIGHTS, ff in FLIGHTS: (f,ff) in CONFLICTS[j] (if t in TIME[j,f,ff] then c[j,f,ff,t] else 0) <= q[j,t]\*(kk[j]-M[j,t])+M[j,t];

s.t. Nontrivialsol {f in FLIGHTS, j in PATH[f], t in T[f,j]: t=Tmax[f,j]}: x[f,j,t] = 1;

s.t. ConsTime {f in FLIGHTS, j in PATH[f], t in T[f,j]}: ((if t-1 in T[f,j] then x[f,j,t-1] else if t-1 <= Tmin[f,j]-1 then 0 else 1) -x[f,j,t]) <= 0;

s.t. ConnSectors {f in FLIGHTS, j in PATH[f] diff {last(PATH[f]), member(N[f]-1,PATH[f])}, t in T[f,j]} : ((if t+ct[f,j] in T[f,next(j,PATH[f])] then x[f,next(j,PATH[f]),t+ct[f,j]] else if t+ct[f,j] <= Tmin[f,next(j,PATH[f])]-1 then 0 else 1)-x[f,j,t]) = 0;

s.t. ConnLastSector {f in FLIGHTS, j in PATH[f], t in T[f,j] : j = member(N[f]-1,PATH[f])} : ((if t+ct[f,j] in T[f,next(j,PATH[f])] then x[f,next(j,PATH[f]),t+ct[f,j]] else if t+ct[f,j] <=

$T_{min}[f, \text{next}(j, \text{PATH}[f])] - 1$  then 0 else 1) -  $x[f, j, t]$   $\leq 0$ ;

s.t. CapSectors {j in SECTORS, t in TIMES} : sum {f in FLIGHTS  
: j in PATH[f] and  $\text{ord0}(j, \text{PATH}[f]) > 1$  and  $\text{ord0}(j, \text{PATH}[f]) < \text{card}(\text{PATH}[f])$ }  
(if t in T[f, j] then  $x[f, j, t]$  else if  $t \leq T_{min}[f, j] - 1$  then 0 else  
1) - (if t in T[f, next(j, PATH[f])] then  $x[f, \text{next}(j, \text{PATH}[f]), t]$  else  
if  $t \leq T_{min}[f, \text{next}(j, \text{PATH}[f])] - 1$  then 0 else 1))  $\leq \text{CapSect}[j]$   
+  $Q[j] * q[j, t]$ ;

#Cover inequalities:

s.t. CutPlane{m in CUTS}: sum{j in SECTORS, t in TIMES}(if  $\text{index}_q[m, j, t] == 1$   
then  $q[j, t]$  else 0) + sum{j in SECTORS, f in FLIGHTS, ff in FLIGHTS,  
t in TIME[j, f, ff] : (f, ff) in CONFLICTS[j]}(if  $\text{index}_c[m, j, f, ff, t] == 1$   
then  $c[j, f, ff, t]$  else 0)  $\leq C_c[m] + C_q[m] - 1$ ;

#Problema di separazione delle cover:

minimize covers: sum{j in SECTORS, f in FLIGHTS, ff in FLIGHTS,  
t in TIME[j, f, ff] : (f, ff) in CONFLICTS[j]}  
( $(1 - v_c[j, f, ff, t]) * w_c[j, f, ff, t]$ ) + sum{j in SECTORS, t in TIMES}(  
 $(1 - v_q[j, t]) * w_q[j, t]$ );

s.t. bound\_weights{j in SECTORS, t in TIMES:  $M[j, t] > k_k[j]$ }: sum{f  
in FLIGHTS, ff in FLIGHTS: (f, ff) in CONFLICTS[j]} (if t in TIME[j, f, ff]  
then  $w_c[j, f, ff, t]$  else 0) + ( $M[j, t] - k_k[j]$ ) \*  $w_q[j, t] \geq M[j, t] + 1$ ;

# Bibliografia

- [1] AMPL, <http://www.ampl.com/>, consultato il 19/06/2023.
- [2] A. Augustin, A. Alonso-Ayuso, L.F. Escudero, C. Pizarro, *On Air Traffic Flow Management with Rerouting, Part I: Deterministic Case*, European Journal of Operational Research 219 (1): 156-166, 2012.
- [3] D. Bertsimas, S. Stock Patterson, *The Air Traffic Flow Management Problem with Enroute Capacities*, Operations Research 46 (3): 406-422, 1998.
- [4] D. Bertsimas, S. Stock Patterson, *The Traffic Flow Management Rerouting Problem in Air Traffic Control: A Dynamic Network Flow Approach*, Transportation Science 34 (3): 239-255, 2000.
- [5] D. Bertsimas, G. Lulli, A. Odoni, *Integer Optimization Approach to Large-Scale Air Traffic Flow Management*, Operation Research 59 (1): 211-227, 2011.
- [6] M. Cocco, *Aumentare il flusso limitando i potenziali conflitti: studio di un modello di programmazione matematica a capacità variabili per la gestione del traffico aereo*, Tesi di Laura Magistrale, Università di Padova, 2020.
- [7] M. Di Summa, *Note del corso di Ottimizzazione Discreta*, Università degli Studi di Padova, 2015.
- [8] M. Di Summa, *Note del corso di Ricerca Operativa*, Università degli Studi di Padova, 2011.

- [9] A. Downey, J. Elkner, C. Meyers, *Pensare da informatico. Imparare con Python*, Green Tea Press, 2002.
- [10] ENACS, Ente Nazionale per l'Aviazione Civile, *L'organizzazione dello spazio aereo nazionale*  
<https://www.enac.gov.it/spazio-aereo/spazio-aereo-definizioni-regolazione/lorganizzazione-dello-spazio-aereo-nazionale>, consultato il 19/06/2023.
- [11] EUROCONTROL, *ATFCM Operations Manual - Edition 26.0 - Validity date: 26/04/2022*  
<https://www.eurocontrol.int/publication/atfcm-operations-manual>, consultato il 19/06/2023.
- [12] EUROCONTROL, *Performance Review Report 2019*  
<https://www.eurocontrol.int/publication/performance-review-reportpr-2019>, consultato il 19/06/2023.
- [13] F.D. Fomeni, G. Lulli, K. Zografos, *An Optimization Model for Air-signing 4D-Trajectories to Flights under the TBO Concept*, in Twelfth USA/Europe Air Traffic Management Research and Development Seminar (ATM2017): 26-30, Seattle, Washington, USA, 2017.
- [14] M. Helme, *Reducing Air Traffic Flow Delay in a space-time network*, IEEE International Conference on Systems, Man and Cybernetics (1): 236-242, 1992.
- [15] IBM, *Cplex Guide*  
<https://www.ibm.com/products/ilog-cplex-optimization-studio>, consultato il 19/06/2023.
- [16] IBM, *CPLEX User's Manual. Version 12.1*, 2015.
- [17] IEA (2022), *Aviation*, IEA, Paris  
<https://www.iea.org/reports/aviation>, License: CC BY 4.0, consultato il 19/06/2023.



- [18] International Civil Aviation Organisation, *ICAO forecasts complete and sustainable recovery and growth of air passenger demand in 2023*, 2023  
<https://www.icao.int/Newsroom/Pages/ICAO-forecasts-complete-and-sustainable-recovery-and-growth-of-air-passenger-demand-in-2023.aspx>, consultato il 19/06/2023.
- [19] K. Kaparis, A. Letchford, *Cover Inequalities*, Encyclopedia of Operations Research and Management Science, Wiley, 2011.
- [20] K. Lindsay, E. BOyd, R. Burlingame, *Traffic Flow Management Modeling with the Time Assignment Model*, Air Traffic Control Quarterly 1 (3): 255-267, 1993.
- [21] NATS, National Air Traffic Services, *Introduction to Airspace*  
<https://www.nats.aero/ae-home/introduction-to-airspace/>, consultato il 19/06/2023.
- [22] Open Flightmaps, *Open Flightmaps Italia*,  
<https://www.openflightmaps.org/li-italy/>, consultato il 19/06/2023.