



UNIVERSITÀ DEGLI STUDI DI PADOVA
DIPARTIMENTO DI FISICA E ASTRONOMIA "GALILEO GALILEI"
CORSO DI LAUREA IN FISICA
A. A. 2014/2015

Determinazione sperimentale della costante di Rydberg

Relatore: CARNERA ALBERTO

Laureando: BELLONI CARLO

Indice

1	Introduzione	1
1.1	Lo spettro dell'atomo di idrogeno ^{[5][6]}	1
1.2	Equazione dell'energia di H ^[1]	5
2	L'esperimento di Lamb e Retherford^[6]	7
3	Tecniche Sperimentali	9
3.1	Doppler-free Saturation Spectroscopy ^[4]	9
3.2	Optical Frequency Combs ^[2, 8, 9]	11
4	Dimensioni del protone^[3]	13
4.1	Procedura sperimentale	13
5	Determinazione della costante di Rydberg^[1]	15
5.1	Lamb shift del livello $2S_{1/2}$	15
5.2	Transizione 1S-2S	15
5.3	Transizioni 2S-nS e 2S-nD	15
5.4	Calcolo di R_∞	16
6	Conclusioni	18

1 Introduzione

Lo scopo di questo elaborato è di presentare i più recenti risultati in letteratura riguardanti lo spettro dell'atomo di idrogeno e le loro conseguenze sulla determinazione di alcune costanti fondamentali, con particolare attenzione rivolta alla costante di Rydberg, analizzando i diversi approcci sperimentali.

«*Never measure anything but frequency!*»^[2]
A. Schawlow

Le tecniche di misura e le misure stesse vengono eseguite rispetto al tempo e alla frequenza, le grandezze che siamo in grado di misurare con miglior precisione. In particolar modo la frequenza che, essendo una misura del numero di cicli in un dato intervallo temporale, risulta essere una procedura intrinsecamente digitale, immune a diverse fonti di errore.

Differenze tra misure e teoria hanno portato a un enorme progresso del sapere fondamentale. «*La nascita della scienza moderna stessa è strettamente legata all'arte dell'accuratezza delle misure*»^[2].

1.1 Lo spettro dell'atomo di idrogeno^{[5][6]}

«*The spectrum of the hydrogen atom has proved to be the Rosetta stone of modern physics: once this pattern of lines had been deciphered much else could be understood.*»
A. Schawlow

«*The hydrogen atom is the simplest one in nature, and the only one for which essentially exact calculations can be made on the basis of the theory.*»
W. Lamb

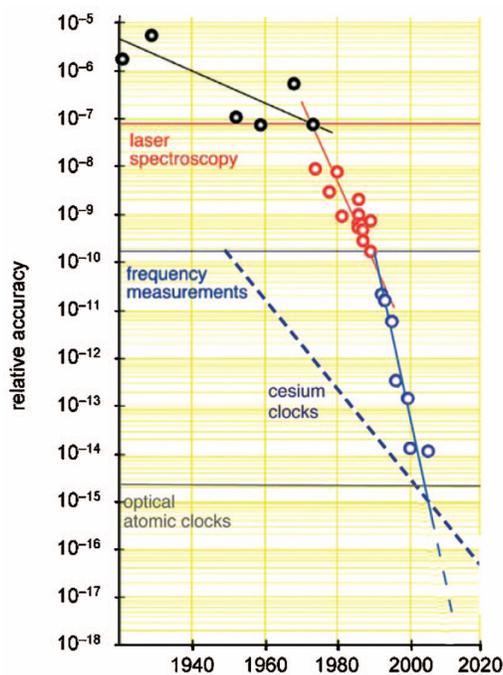


Figura 1: Accuratezza relativa nelle misure spettroscopiche dell'idrogeno dagli anni '20 ai primi anni 2000.

La spettroscopia del semplice atomo di idrogeno ha giocato un ruolo centrale nella storia della fisica atomica. Lo spettro visibile di Balmer è stata la stele di Rosetta che ha permesso di decifrare le leggi della fisica quantistica. Ha ispirato le innovative scoperte di Niels Bohr, Arnold Sommerfeld, Louis de Broglie, Erwin Schrödinger, Paul Dirac e anche Willis Lamb all'origine della moderna elettrodinamica quantistica (QED). La nascita di una ricerca della precisione spettroscopica sempre più spinta dell'atomo di idrogeno, permette un confronto unico nel suo genere tra esperimenti e teoria, ispirando progressi nelle tecniche sperimentali tra cui i *femtosecond laser frequency comb*, strumenti rivoluzionari nella misura del tempo e della frequenza, che aprono nuove frontiere della spettroscopia ottica ad alta precisione e dello studio di fenomeni ultra-veloci.

Nell'atomo di idrogeno la miglior risoluzione spettroscopica ottenuta finora riguarda la transizione a due fotoni nell'UV 1S-2S alla risonanza, con una larghezza di banda naturale di solo 1 Hz, applicando la tecnica di spettroscopia *Doppler-free* che permette di cancellare l'effetto Doppler al primo ordine. Tecnica proposta per la prima volta per studiare la transizione da V. Chebotayev nel 1974 ed eseguita a Stanford da T. W. Hänsch ed il suo gruppo nel 1975^[2].

Sempre T. W. Hänsch ed il suo gruppo raggiunsero nel 1997 quello che (allora) era il nuovo record nella metrologia delle frequenze ottiche, determinando la frequenza degli UV nella transizione 1S-2S con un'accuratezza di 3.7 parti su 10^{13} , con un'incertezza pari a 1.4×10^{-14} , ricavando conseguentemente un nuovo valore della costante di Rydberg, fattore di scala per ogni transizione spettroscopica e, tra tutte, la costante misurata con maggior precisione. Ciò permise anche di aggiornare il valore del raggio di carica del protone r_p ^[2].

Dal modello di Bohr al modello quantomeccanico

Lo spettro dell'atomo di idrogeno venne analizzato da diversi studiosi e le righe spettrali individuate vennero suddivise in serie che prendono il nome dai relativi scopritori:

Serie di	Stato finale n_f	Regione di emissione
Lyman	1	UV
Balmer	2	Visibile
Paschen	3	IR
Brackett	4	IR
Pfund	5	IR

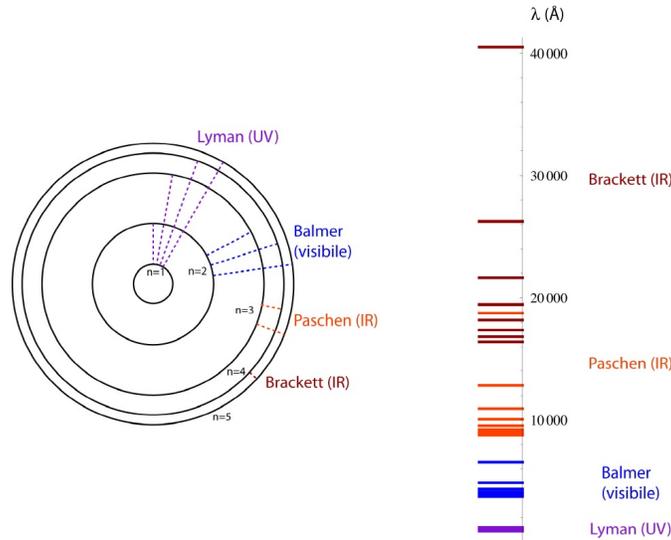


Figura 2: Schema delle transizioni elettroniche e delle relative serie spettrali dell'idrogeno.

Il primo a sviluppare un modello atomico che unificasse le serie fu Bohr, che introdusse l'ipotesi "ad hoc" di quantizzazione del momento angolare. Si noti che, fino a questo momento, la costante di Rydberg che compariva nella formula di Rydberg (generalizzazione della formula empirica di Balmer):

$$\frac{1}{\lambda} = R_H \left(\frac{1}{n_i^2} - \frac{1}{n_f^2} \right) \quad (1)$$

era stata stimata sperimentalmente con un valore di: $R_H = 1.09677581 \times 10^7 m^{-1}$. Il modello di Bohr, sotto l'ipotesi di massa infinita del nucleo ($\frac{m_p}{m_e} \approx 1836$), ne dava una stima teorica di: $R_\infty = \frac{m_e e^4}{64\pi^3 \epsilon_0^2 c \hbar^3} = 1.0973731 \times 10^7 m^{-1}$, con un accordo di 2 parti su mille col valore di R_H . Introducendo il concetto di massa ridotta $\mu = \frac{m_e m_p}{m_e + m_p} = 9.10443 \times 10^{-31} kg$, si raggiungeva un valore della stima pari a: $R_\infty = 1.09677583 \times 10^7 m^{-1}$ con un accordo di 2 parti su 10^8 . Tuttavia, Con l'avvento di tecniche spettroscopiche a risoluzione sempre più spinta, si arrivò a scoprire una struttura atomica più complicata di quanto non prevedesse la teoria di Bohr, che non riusciva a spiegare la degenerazione di alcuni livelli, come ad esempio lo *splitting* della riga α della serie di Balmer.

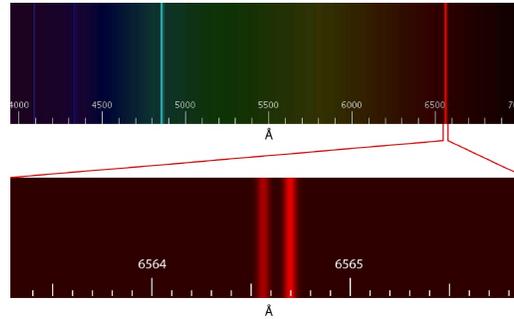


Figura 3: Spettro in alta risoluzione, con ingrandimento del tripetto della riga α della serie di Balmer: non sono risolte le righe $\lambda = 6564.5486 \text{ \AA}$ e $\lambda = 6564.5624 \text{ \AA}$, mentre è ben riconoscibile la riga $\lambda = 6564.6894 \text{ \AA}$.

Grazie all'equazione di Schrödinger e all'avvento della meccanica quantistica, con l'applicazione dei metodi perturbativi si sviluppò un modello atomico più raffinato che, oltre a giustificare le ipotesi introdotte da Bohr, riuscirono ad eliminare le varie degenerazioni e si poterono finalmente spiegare gli *shift* e gli *splittings* in multipletti delle righe spettrali dell'idrogeno. In particolare si riuscì a rimuovere la degenerazione accidentale del numero quantico di momento angolare orbitale ℓ e la degenerazione del numero quantico azimutale m_ℓ , legata all'isotropia dello spazio in cui si trova l'atomo (descritto da armoniche sferiche), eliminabile con l'applicazione di campi esterni: magnetico (effetto Zeeman) o elettrico (effetto Stark). Un diagramma che fornisce un'interpretazione dei livelli atomici e delle transizioni elettroniche è quello introdotto da Walter Grotrian nel 1928, che include la spiegazione degli *splittings* e fornisce un esempio di regola di selezione (escludendo transizioni verticali).

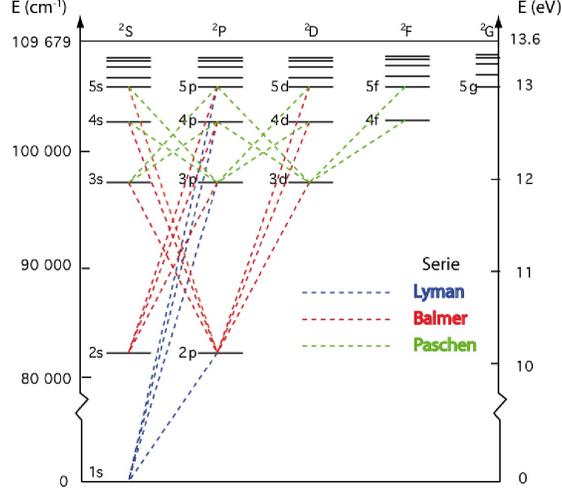


Figura 4: Diagramma di Grotrian dei livelli energetici dell'atomo di idrogeno e delle transizioni permesse.

Una menzione in particolare viene fatta per l'esperimento di Stern-Gerlach, che rivelò come l'elettrone fosse dotato di un momento angolare intrinseco, lo spin. Definiamo anche la costante adimensionale di struttura fine:

$$\alpha = \frac{e^2}{4\pi\epsilon_0 c \hbar} = \frac{1}{137.035990735} \quad (2)$$

Il risultato finale di questa modellizzazione porta alla formula di Dirac:

$$\left[\frac{p^2}{2\mu} - V(r) - \frac{p^4}{8m^3c^2} + \frac{1}{2m^2c^2} \frac{1}{r} \frac{dV}{dr} \vec{L} \cdot \vec{S} + \frac{\pi \hbar^2}{2m^2c^2} \left(\frac{Ze^2}{4\pi\epsilon_0} \right) \delta(\vec{r}) \right] \psi = E' \psi \quad (3)$$

in cui i primi due termini rappresentano l'hamiltoniano imperturbato dell'equazione di Schrödinger, il terzo è il termine correttivo relativistico di Thomas, il quarto il termine correttivo d'interazione spin-orbita e l'ultimo il termine di Darwin. Sono qui sotto riportati i contributi perturbativi all'energia:

- del termine relativistico: $\Delta E_{rel} = -E_n \frac{(Z\alpha)^2}{n^2} \left[\frac{3}{4} - \frac{n}{l + \frac{1}{2}} \right]$
- del termine d'interazione spin-orbita: $\Delta E_{SO} = -\frac{E_n}{2n} (Z\alpha)^2 \left[\frac{j(j+1) - \ell(\ell+1) - \frac{3}{4}}{\ell(\ell + \frac{1}{2})(\ell+1)} \right]$
- del termine di Darwin: $\Delta E_{Dar} = \begin{cases} -E_n \frac{(Z\alpha^2)}{\hbar m}, & \ell = 0 \\ 0, & \ell \neq 0 \end{cases}$

Fine structure splitting

La rimozione della degenerazione ottenuta grazie alla teoria di Dirac porta al *fine structure splitting*, il cui fattore di scala di separazione è dato dalla costante α , precedentemente citata. È importante notare che, nonostante i singoli contributi dipendano da ℓ , il contributo totale di *shift* in energia:

$$\Delta E = \Delta E_{rel} + \Delta E_{SO} + \Delta E_{Dar} = \Delta E_{n,j} = E_n \frac{(Z\alpha)^2}{n^2} \left(\frac{n}{j + \frac{1}{2}} - \frac{3}{4} \right) \quad (4)$$

$$E_{n,j} = E_n + \Delta E_{n,j} \quad (5)$$

è indipendente da ℓ . Tuttavia la degenerazione legata a due stati aventi stessi numeri quantici n e j (numero quantico di momento angolare totale, da $J = L + S$), ma diverso $\ell = j \pm \frac{1}{2}$, viene rimossa grazie ad effetti legati alla QED, noti come “*radiative corrections*”, responsabili dello *shift* in energia detto *Lamb shift*.

Si noti infine che i contributi energetici ΔE_{rel} , ΔE_{SO} , ΔE_{Dar} hanno lo stesso ordine di grandezza nel solo caso dell'idrogeno, mentre per atomi a più elettroni, il maggior contributo alla *fine structure splitting* è dato dal termine ΔE_{SO} .

1.2 Equazione dell'energia di H^[1]

Una formulazione alternativa delle autoenergie ricavate dall'equazione di Schrödinger, coincidenti con le energie del modello di Bohr (dipendenti solo dal numero quantico n) è:

$$E_n = -\frac{hcR_\infty}{n^2} \quad (6)$$

ove R_∞ è funzione della costante di struttura fine α , della velocità della luce c , della costante di Planck h e della massa dell'elettrone m_e , secondo la:

$$R_\infty = \frac{\alpha^2 m_e c}{2h} \quad (7)$$

Questa espressione mette in risalto come R_∞ sia collegata ad altre costanti fondamentali e pertanto ricopre un ruolo importante nell'affinamento della determinazione di queste.

Si è inoltre visto che una formulazione più precisa dell'equazione che descrive l'atomo d'idrogeno è data dall'equazione di Dirac, che tiene conto delle correzioni relativistiche, elimina la degenerazione in j e dà una descrizione della struttura fine, pur non eliminando la degenerazione dei livelli $2S_{1/2}$ e $2P_{1/2}$, nota come *Lamb shift*, che invece viene risolta con correzioni date dalla QED.

Riscriviamo dunque la (6) come somma di tre termini:

$$E_{n,\ell,j} = E_{n,j}^{Dirac} + E_n^{Recoil} + L_{n,\ell,j} \quad (8)$$

Il primo è la soluzione dell'equazione di Dirac, il secondo termine è invece una correzione relativistica dovuta al rinculo del protone e che dipende solamente dal numero quantico principale n . L'ultimo termine è invece il *Lamb shift*, già accennato precedentemente, che tiene conto delle altre correzioni: QED, termini di rinculo relativistici e gli effetti della distribuzione di carica del protone.

I primi due termini dipendono dalla costante di Rydberg.

Recoil corrections

I termini di rinculo sono stati ottenuti da sviluppi in serie delle potenze di $(Z\alpha)$. Il primo termine di rinculo è dato dalla:

$$E_n^{Recoil} = -\frac{\mu^2 c^2}{m_e + m_p} \frac{(Z\alpha)^2}{8n^4} \quad (9)$$

La prima correzione corrisponde circa a 24 MHz per il livello 1S, che corrisponde a 10^{-8} volte l'energia di ionizzazione dell'idrogeno. Vi sono altri termini dello sviluppo, ad esempio i due successivi che presentano la forma $m_e c^2 \left(\frac{m_e}{m_p}\right)^2 (Z\alpha)^4$ e $m_e c^2 \left(\frac{m_e}{m_p}\right) (Z\alpha)^5$ ed hanno un'espressione esatta, mentre il successivo ancora $m_e c^2 \left(\frac{m_e}{m_p}\right) (Z\alpha)^6$ è di difficile determinazione e dal 1988 al 1998 è stato calcolato da diversi autori. Il calcolo prevede l'impiego di metodi e strumenti di relatività e QED. Termini successivi non sono ancora stati presi in considerazione.

Tale correzione, dell'ordine dei 2 MHz, è ad ora determinata con un'incertezza di 10 Hz per il livello 1S.

QED corrections

Le correzioni provenienti dalla QED sono quelle che contribuiscono maggiormente al termine di *Lamb shift*, e comprendono: il termine di *self energy* SE, che corrisponde all'emissione e riassorbimento da parte degli elettroni di fotoni virtuali, e il termine di *vacuum polarization* VP, che corrisponde alla creazione di coppie elettrone-positrone virtuali.

L'elettrone è soggetto a fluttuazioni energetiche del vuoto che influenzano la sua posizione, modificando il potenziale coulombiano cui è soggetto e riducendo l'energia di legame, con effetti rilevanti per il livello S in quanto, per $\ell = 0$, l'elettrone ha una grande probabilità di trovarsi dentro al nucleo $|\Psi(0)|^2 \neq 0$. Questo effetto spiega lo *splitting* tra i livelli $2S_{1/2} - 2P_{1/2}$. L'espressione del termine di SE è funzione di $Z\alpha$ e la correzione al primo ordine è detta "*one-loop*" *correction*. Similmente viene trattato il termine di VP.

Altre correzioni e proton charge radius

Degli altri termini correttivi, quali il "*three-loop*", creazione di coppie di particelle virtuali $\mu + \mu^-$ e $\tau + \tau^-$, SE e polarizzabilità del nucleo, quello che ha maggior peso è l'effetto di "*non-zero size*" o "*finite size*" del nucleo ed ha l'espressione:

$$E_{NS} = \frac{2}{3} \left(\frac{\mu}{m_e} \right)^3 \frac{(Z\alpha)^2}{n^3} m_e c^2 \left(\frac{2\pi Z\alpha r_p}{\lambda_C} \right) \quad (10)$$

legato alla distribuzione di carica del protone, che non è puntiforme. Nella formula compare anche λ_C , lunghezza d'onda Compton dell'elettrone.

2 L'esperimento di Lamb e Retherford^[6]

Nonostante il modello sopra descritto sembri offrire un'accurata descrizione della struttura atomica di H, alcuni esperimenti riuscirono ad evidenziare discrepanze rispetto alla teoria di Dirac: W. V. Houston nel 1937 e R. C. Williams nel 1938 eseguirono degli esperimenti che vennero poi analizzati da S. Pasternack nel 1938, che fece notare come i livelli $2S_{1/2}$ e $2P_{1/2}$ non coincidevano, ma che il livello $2S_{1/2}$ era caratterizzato da uno *shift* verso l'alto di circa 0.03 cm. Il difficoltà nel determinare con precisione la struttura fine dell'atomo di idrogeno era legato alla scarsa risoluzione spettrale dovuta principalmente all'effetto Doppler.

Fu nel 1947 che W. E. Lamb e R. C. Retherford riuscirono a dimostrare l'esistenza di quello che verrà poi denominato *Lamb shift*. Invece di cercare di risolvere le righe di struttura fine investigando lo spettro ottico di H, eseguirono un brillante esperimento con l'impiego di tecniche a micro-onde per stimolare una transizione diretta alle radiofrequenze tra i livelli $2S_{1/2}$ e $2P_{1/2}$. Non essendoci alcuna regola di selezione su n per transizioni di dipolo elettrico, sono permesse transizioni nel *range* delle onde radio tra livelli aventi stesso numero quantico principale. Il vantaggio di utilizzare le onde radio risiede nel fatto che l'effetto Doppler, che è direttamente proporzionale alla frequenza, viene notevolmente ridotto, essendo le frequenze delle onde radio di molto inferiori a quelle delle righe ottiche. Tuttavia anche il tasso di transizione, proporzionale alla frequenza come ν^3 , è molto piccolo. Una transizione stimolata si verifica se gli atomi vengono mandati attraverso una regione, caratterizzata da un campo elettrico oscillante con una frequenza corrispondente alla transizione che si vuole studiare. Le transizioni studiate da Lamb e Retherford corrispondono alle $2S_{1/2}$ - $2P_{1/2}$ e $2S_{1/2}$ - $2P_{3/2}$. Einstein dimostrò che le probabilità di assorbimento e di emissione stimolata sono uguali, pertanto i due stati della transizione che si intende studiare non dovranno essere equamente popolati.

L'esperimento fonda sul fatto che il livello $2S_{1/2}$ è metastabile e la transizione al *ground state* $1S_{1/2}$ è proibita dalla regola di selezione $\Delta\ell = \pm 1$. Pertanto il principale meccanismo di decadimento dello stato $2S_{1/2}$ è l'emissione a due fotoni, con una vita media di $\tau_{2S_{1/2}} \sim 1/7$ s. Quindi, in assenza di perturbazioni, lo stato $2S_{1/2}$ ha una vita media molto più lunga rispetto allo stato $2P$, essendo $\tau_{2P} = 1.6 \times 10^{-9}$ s.

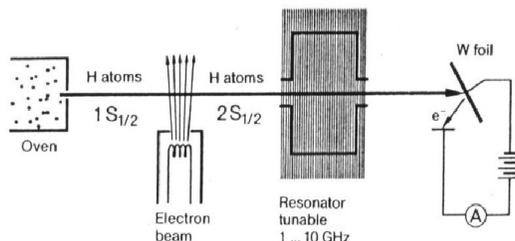


Figura 5: *Schema dell'esperimento di Lamb e Retherford (1947).*

Nell'esperimento viene prodotto un fascio di atomi di idrogeno, contenente atomi nel livello metastabile $2S_{1/2}$, dissociando le molecole ($\sim 64\%$) in un forno di tungsteno a $T \sim 2500$ K, selezionando poi il fascio attraverso fenditure e bombardandolo con elettroni di energia cinetica $E_k > 10.2$ eV, valore di soglia di eccitazione dei livelli $n = 2$ dell'atomo di H. Una piccolissima frazione di atomi, ~ 1 su 10^8 , si trova negli stati eccitati $2S_{1/2}$, $2P_{1/2}$ e $2P_{3/2}$. La velocità media del fascio è di circa $8 \times 10^5 \text{ cm s}^{-1}$, pertanto ponendo un rivelatore ad una distanza di circa 10 cm dalla regione in cui sono stati prodotti gli atomi eccitati, solo quelli nello stato $2S_{1/2}$ saranno in grado di raggiungerlo, mentre quelli nello stato $2P$, a causa della τ_{2P} breve, decadranno nello stato $1S_{1/2}$, percorrendo una distanza di soli 1.3×10^{-3} cm. Il rivelatore presenta una superficie metallica i cui elettroni vengono espulsi dagli atomi nello stato $2S_{1/2}$ che cedono l'energia di eccitazione e, dal momento che gli atomi nel *ground state* non vengono rivelati, la corrente risulta essere proporzionale al numero di

atomi metastabili che hanno raggiunto il rivelatore. Interponendo una regione di interazione tra sorgente e rivelatore, con un campo di onde radio di opportuna frequenza, gli atomi metastabili effettueranno una transizione indotta ai livelli $2P_{1/2}$ e $2P_{3/2}$ e decadranno nello stato $1S_{1/2}$. Si verificherà quindi una riduzione nel numero di atomi metastabili rivelati in corrispondenza della frequenza di risonanza delle transizioni $2S_{1/2}-2P_{1/2}$ e $2S_{1/2}-2P_{3/2}$. Nella regione di interazione, Lamb e Retherford applicarono un campo magnetico variabile al fine di separare le componenti Zeeman delle transizioni e di contrastare l'effetto Stark. Inoltre ciò permise di operare con una frequenza del campo di radio-frequenze, raggiungendo la frequenza di risonanza, ricavata per estrapolazione, variando il campo magnetico.

Lamb e Retherford ottennero così uno *shift* del livello $2S_{1/2}$ rispetto al $2P_{1/2}$ di circa 1000 MHz, che venne affinato da successivi esperimenti eseguiti da Lamb, fino a raggiungere il valore di 1057.77(10) MHz ($0.0352834 \text{ cm}^{-1}$), corrispondente ad un decimo del *fine structure splitting* per il livello $n = 2$. Questo esperimento ha aperto la strada alla formulazione dell'elettrodinamica quantistica (QED) e al calcolo delle cosiddette *radiative corrections*.

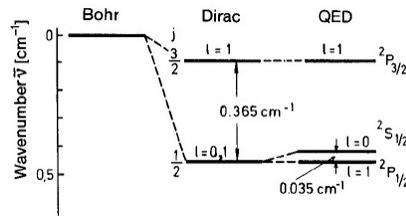


Figura 6: Schema dello splitting della riga α a seguito delle correzioni di Dirac e della QED.

L'interpretazione che diede Welton nel 1948 fu la seguente: un campo di radiazioni quantizzato al livello di energia minimo non è caratterizzato da un valore di campo elettromagnetico nullo, ma da un'energia di punto zero oscillante, come nel caso dell'oscillatore armonico. Pertanto anche nel vuoto ci sono fluttuazioni nel campo di radiazioni di punto zero, che perturbano l'elettrone causando moti di oscillazione, distribuendo la carica in modo tale che l'elettrone, fino ad ora puntiforme, diventi a tutti gli effetti una sfera di raggio $r \neq 0$. Conseguentemente un elettrone immerso in un campo elettrico non uniforme, qual è il caso atomico, risentirà di un potenziale diverso da quello calcolato nella sua posizione media e in particolare, in un atomo ad un elettrone, non sarà fortemente attratto dal nucleo sulle brevi distanze. Essendo gli stati s quelli che risentono di più di questi effetti (in quanto $|\Psi|^2 \neq 0$), questi presentano un innalzamento del livello energetico apprezzabile rispetto agli altri stati.

La stima teorica del *Lamb shift* ha portato da un valore di 1057.91 MHz, in ottimo accordo col valore sperimentale ottenuto da Lamb e un più recente valore misurato da Robiscoe e Shyn, pari a 1057.90(6) MHz. Tale effetto è stato poi calcolato e misurato anche per altri livelli dell'atomo di idrogeno e per altri atomi idrogenoidi come il deuterio, He^+ , Li^{2+} e altri ancora.

3 Tecniche Sperimentali

L'avvento dei laser negli anni '60 ha permesso di eseguire esperimenti di spettroscopia atomica e molecolare di alta precisione, portando ad una miglior comprensione della struttura di questi sistemi. Nel giro di poco tempo sono state sviluppate diverse tecniche spettroscopiche, alcune delle quali vengono qui sotto accennate.

Il laser, acronimo di «*Light Amplification by Stimulated Emission of Radiation*», è un sistema in grado di emettere un fascio estremamente collimato di luce coerente, monocromatica e ad elevatissima luminosità, proprietà che lo rendono uno strumento di alta precisione e caratterizzato da un'elevata potenza.

3.1 Doppler-free Saturation Spectroscopy^[4]

La tecnica di spettroscopia di saturazione permette di ottenere spettri le cui righe non sono affette da allargamento Doppler.

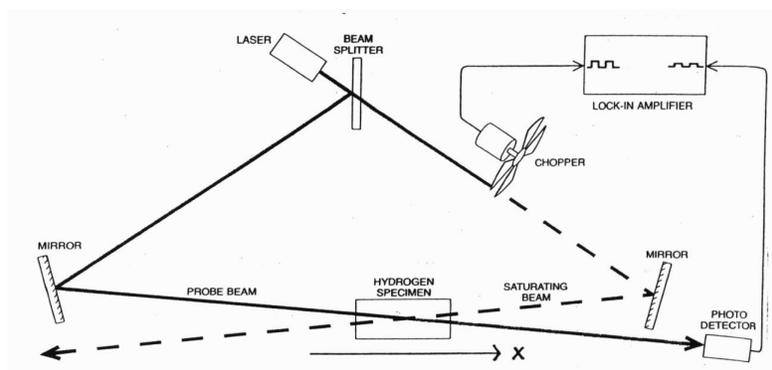


Figura 7: Apparato per la spettroscopia di saturazione Doppler-free.

Un fascio laser viene splittato in due diversi fasci che raggiungono una camera di vapore atomico attraverso percorsi diversi. I due fasci sono detti “*pump*” beam (fascio di pompa), ad elevata intensità, che serve a spopolare il *ground state* del gas, e il “*probe*” beam (fascio di analisi), che invece attraversa la camera e viene registrato tramite un fotodiodo, fornendo il segnale spettroscopico. Il rapporto d'intensità tra i due segnali è generalmente $I_{pump} \sim 10I_{probe}$.

Se si operasse solo col fascio di analisi si otterrebbe uno spettro d'assorbimento dal profilo gaussiano, caratterizzato da un forte allargamento Doppler, che a temperatura ambiente vale circa 10^2 volte la larghezza naturale di banda.

Utilizzando il fascio di pompa si ottiene un picco molto stretto (detto *Lamb dip*) nello spettro del *probe beam*, in corrispondenza della frequenza di risonanza $\nu = \nu_0$ della transizione atomica. Il motivo per cui si ottiene questo picco è che solo gli atomi che hanno velocità nulla lungo l'asse della camera vedono i due fasci laser con la stessa frequenza. Altrimenti, se la velocità fosse diversa da zero, gli atomi vedrebbero un fascio caratterizzato da *red-shift* e l'altro da *blue-shift*.

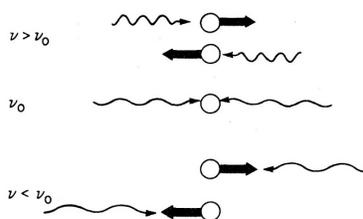


Figura 8: Interazione “fascio laser-atomo”, rispetto alla frequenza di risonanza e allo stato di moto dell'atomo.

L'elevata intensità del *pump beam* fa sì che ci sia un elevato tasso di assorbimento, portando gli atomi del gas ad uno stato eccitato e dal quale possono tornare al *ground state* tramite emissione spontanea. Se l'intensità è abbastanza elevata, si ottiene un significativo svuotamento del *ground state*, riducendo così di molto l'assorbimento del fascio di analisi, facendo così comparire il picco nello spettro di assorbimento di questo. È importante notare che nel limite di intensità infinita del fascio di pompa, metà degli atomi al massimo si troverebbe nello stato eccitato e pertanto non ci sarebbe assorbimento del *probe beam*. Per questo, questa tecnica spettroscopica è detta di "saturazione".

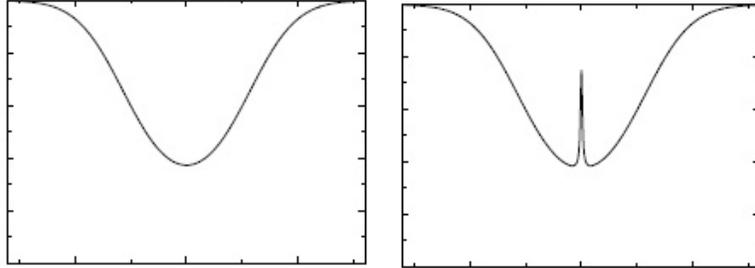


Figura 9: Spettri di assorbimento del *probe beam*, rispettivamente senza e con *pump beam*.

Nel 1972 T. W. Hänsch e I. Shahin furono «orgogliosi di presentare ad A. Schawlow uno spettro di saturazione Doppler-free della riga rossa α di Balmer dello spettro dell'atomo di idrogeno»^[2], ottenendo un'ottima risoluzione spettrale del *Lamb shift* del livello 2S.

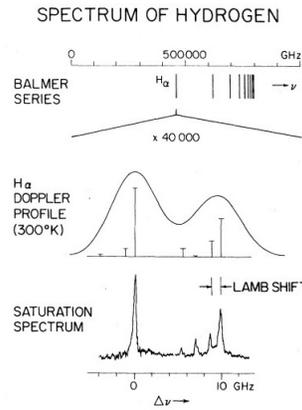


Figura 10: Serie di Balmer e struttura fine della riga α , risolta tramite spettroscopia di saturazione.

Caratteristiche

Un fascio laser di intensità I che attraversa una camera contenente gas atomico, è governato dalla legge di Beer:

$$\frac{dI}{dx} = -\alpha I \quad (11)$$

con $\alpha = \alpha(\nu)$ coefficiente di estinzione dipendente dalla frequenza e non dalla posizione. L'intensità uscente da una camera di lunghezza l sarà pertanto:

$$I_{out} = I_{in}e^{-\alpha(\nu)l} = I_{in}e^{-\tau(\nu)} \quad (12)$$

dove $\tau(\nu) = \alpha(\nu)l$ è detta profondità ottica. Il contributo a $\tau(\nu)$ di una singola classe di atomi di velocità $(v, v + dv)$ si può scrivere come $d\tau(\nu) = l\sigma(\nu, v)dn(v)$, in cui compare il coefficiente di assorbimento $\sigma(\nu, v)$, caratterizzato da una lorentziana di larghezza naturale Γ . Detto $\Phi = \frac{I}{h\nu}$ il flusso incidente, σ_0 la sezione d'urto di assorbimento alla risonanza e $\Phi_{sat} = \frac{\Gamma}{2\sigma_0}$, definiamo il parametro di saturazione $s = \frac{\Phi}{\Phi_{sat}}$ e l'intensità di saturazione $I_{sat} = \frac{2\pi^2 hc\Gamma}{3\lambda^3}$.

Si noti che lo spettro di assorbimento alla saturazione dipende da due parametri esterni regolabili: I_{pump} e τ_0 , la profondità ottica alla risonanza. Per basse densità all'interno della camera si avrà un basso assorbimento del fascio di analisi caratterizzato da un profilo gaussiano. A densità crescenti invece, crescerà il tasso di assorbimento che presenterà un profilo più largo e profondo. Ad elevate densità, infine, la profondità satura, mentre la larghezza aumenta ancora, perdendo il profilo gaussiano.

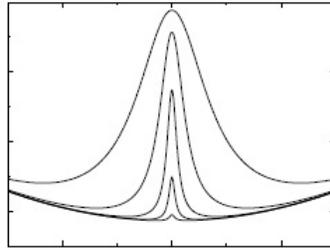


Figura 11: Picco d'assorbimento di saturazione con allargamento dovuto al power-broadening.

3.2 Optical Frequency Combs^[2, 8, 9]

«Tutti sanno che una cosa è impossibile da realizzare, finché arriva uno sprovveduto che non lo sa e la inventa.»

A. Einstein

Ideati da J. L. Hall e T. W. Hänsch (premi Nobel con R. J. Glauber nel 2005), gli *optical frequency combs* sono degli strumenti ad alta precisione per la misura di frequenze sconosciute della luce. L'*optical frequency comb* è uno spettro ottico che consiste in linee in frequenza equispaziate (~ 1 GHz), che fungono da riferimento per determinare la frequenza di un segnale da misurare. Risulta pertanto essere una sorta di righello ottico: si misura una frequenza sconosciuta, il cui valore viene dedotto da un confronto con quelli noti delle *frequencies comb*. Un metodo efficiente di generare delle *frequencies comb* è utilizzare un *mode-locked laser*, che emette impulsi dell'ordine dei fs.

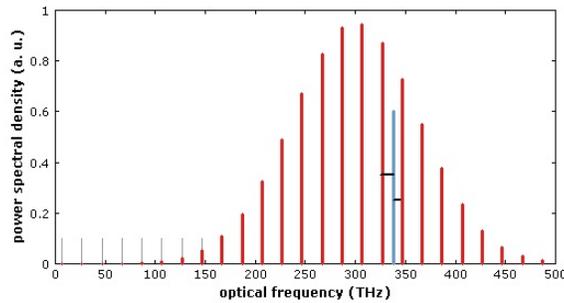


Figura 12: Esempio di frequency comb lines (rosso) e frequenza da determinare (blu).

Un'onda ottica circola in una cavità e ad ogni ciclo viene parzialmente trasmessa, tramite uno specchio, una sua copia. Ogni copia trasmessa presenta un profilo largo e piuttosto complesso. Se vengono trasmesse due copie una dietro l'altra, si otterrà una figura d'interferenza simile a quella delle fenditure di Young. Al tendere all'infinito di tali copie, si ottiene una figura d'interferenza caratterizzata da righe sottili identificabili coi modi della cavità: una serie di impulsi può essere matematicamente descritta da termini di una serie di Fourier, pertanto ogni riga corrisponderà ad uno di questi termini. La separazione tra i modi f_m sarà uguale alla frequenza di ripetizione f_r alla quale si aggiunge un termine di *carrier-envelope offset* f_{CEO} , dovuto ad uno slittamento della fase dell'onda *carrier* di inviluppo degli impulsi, fenomeno ineliminabile a causa della dispersione nella cavità. Tuttavia questo termine può essere individuato, misurato ed eliminato. Un *frequency comb synthesizer* opera come se stesso utilizzando contemporaneamente centinaia di migliaia di laser ultrastabili e perfettamente sintonizzati.

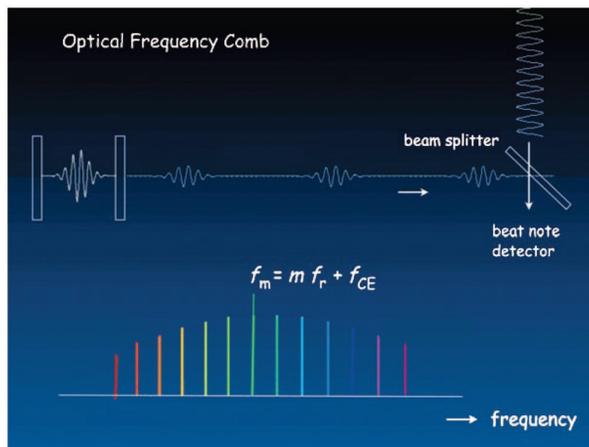


Figura 13: Schema semplificato dell'*optical frequency comb* e relativo spettro.

Ciò che questi strumenti apportano di rivoluzionario negli esperimenti di spettroscopia è la connessione diretta tra le frequenze ottiche e quelle delle micro-onde, permettendo di paragonare frequenze ottiche di risonanza dell'atomo di idrogeno e altri atomi, con le frequenze delle micro-onde degli orologi atomici al cesio. Si è così giunti alla nascita di un orologio atomico ottico che troverà applicazioni in diverse aree della scienza e della tecnologia.

Finora la teoria su cui fondano gli *optical frequency comb* tratta la luce come un'onda elettromagnetica classica, ignorando effetti e conseguenze dei contributi quantistici come l'*entanglement* tra fotoni che contribuiscono al rumore.

4 Dimensioni del protone^[3]

La dimensione del protone viene identificata con il “*rms charge radius*” $r_p = \sqrt{\langle r_p^2 \rangle}$, che viene stimato tramite esperimenti di *scattering* elastico elettrone-protone e l’accuratezza della misura è il maggior fattore limitante nella determinazione della costante di Rydberg. Il miglior risultato ottenuto sperimentalmente presenta un’accuratezza del 2%. Il valore più preciso invece, fornito da CODATA¹, raggiunge un’incertezza dell’1%, ed è stato ricavato da risultati di spettroscopia ad alta precisione sull’atomo di idrogeno e da calcoli di QED.

Un miglioramento significativo è stato ottenuto stimando r_p tramite idrogeno muonico, in cui c’è un muone negativo, al posto dell’elettrone, ad orbitare attorno al protone. Questa configurazione ha il vantaggio di essere caratterizzata da un minor raggio di Bohr (circa 200 volte) rispetto a quello dell’idrogeno ordinario, essendo il muone 200 volte più pesante dell’elettrone, e ciò comporta un aumento degli effetti dovuti alla dimensione finita del protone. Infatti gli stati S sono shiftati (ad esempio il livello 2S risente di un effetto di circa 0.93 THz a differenza dei 146 kHz nel caso di H), in quanto la funzione d’onda del muone non si annulla nella posizione del protone; non risulta altrettanto importante, invece, l’effetto sugli stati P. L’esperimento punta a stimare r_p misurando gli effetti provocati sul *Lamb shift*, tramite spettroscopia laser a impulso. Per la transizione 2S→2P, la differenza in energia teorica attesa in meV (con r_p espresso in fm) è:

$$\Delta E = 209.9779(49) - 5.2262r_p^2 + 0.0347r_p^3 \quad (13)$$

ottenuta tenendo conto dei contributi di irraggiamento, rinculo e struttura del protone e dei *fine- e hyperfine- splittings*. Il primo termine è dominato dalla VP, mentre il secondo e terzo sono legati alla dimensione finita del protone e il loro effetto complessivo risulta valere 1.8% di ΔE , due ordini di grandezza maggiore rispetto all’idrogeno ordinario. L’incertezza sulla stima corrisponde a 0.0049 meV ed è dominato principalmente dalla polarizzabilità del protone.

4.1 Procedura sperimentale

Grazie alla spettroscopia laser, si sono riusciti a vedere gli effetti sul *Lamb shift* di μp , in un esperimento svolto al Paul Scherrer Institute (PSI) in Svizzera. Per lo scopo sono stati impiegati muoni a bassa energia ($T \sim 5$ keV) fermati da un gas di H_2 alla pressione di 1hPa, formando così atomi μp fortemente eccitati ($n \sim 14$). La gran parte di questi si diseccita velocemente, raggiungendo lo stato 1S, mentre il restante $\sim 1\%$ popola lo stato 2S, che ha vita media τ_{2S} più lunga. Tramite un breve impulso laser ($\lambda \sim 6\mu m$) introdotto nella camera $\sim 0.9\mu s$ dopo il frenamento dei muoni, viene indotta per risonanza la transizione 2S→2P, seguita immediatamente dalla 2P→1S, con emissione X a 1.9 keV. Di cruciale importanza per l’esperimento è τ_{2S} . In assenza di collisioni si avrebbe $\tau_{2S} \sim \tau_{\mu^-} = 2.2\mu s$, mentre in questo caso abbiamo $\tau_{2S} \sim 1\mu s$.

La curva di risonanza che risulta dall’esperimento per la transizione 2S→2P presenta un profilo lorentziano, con centroide in 49 881.88(70) GHz e larghezza 18.0(2.2) GHz, in accordo con la larghezza attesa per effetto Doppler e *power-broadening*, tenuto conto dei soli errori statistici. Se però si include anche l’incertezza sistematica legata al procedimento di calibrazione, pari a 300 MHz, e di altre correzioni sistematiche di *shift*, con valori comunque inferiori ai 30MHz, legati agli effetti Doppler, di pressione, Zeeman e Stark, si ottiene un valore del centroide di 49 881.88(76) GHz, ove l’incertezza corrisponde alla somma in quadratura degli errori statistico (0.70 GHz) e sistematico (0.30 GHz).

Questo valore corrisponde ad un’energia $\Delta E = 206.2949(32)$ meV e grazie alla (13) si ottiene una stima di $r_p = 0.84184(36)(56)$ fm, dove il primo errore corrisponde all’incertezza sperimentale e il secondo all’incertezza sul primo termine della (13). In definitiva si ottiene un valore $r_p = 0.84184(67)$ fm, che presenta un alto livello di precisione (10 volte) rispetto alle precedenti stime, ma che tuttavia risulta essere in disaccordo (5.0σ volte più piccolo) col valore ottenuto dagli esperimenti con H. Le

¹ *Committee on Data for Science and Technology*^[7].

cause di questa deviazione possono risiedere in termini errati o mancanti della QED o da importanti contributi legati ad ordini superiori non ancora indagati.

Tale stima di r_p ha portato ad un nuovo valore della costante di Rydberg pari a $R_\infty = 1.0973731568160(16) \times 10^7 m^{-1}$ con un'accuratezza di 1.5 parti su 10^{12} , che tuttavia differisce di 4.9σ (-110 kHz/c) dal valore CODATA, ma è 4.6 volte più preciso.

«Spectroscopy in hydrogenic atoms continues to challenge our understanding of physics.»^[3]

5 Determinazione della costante di Rydberg^[1]

Per l'aggiustamento delle costanti fondamentali e per la determinazione della costante di Rydberg sono stati effettuati una serie di esperimenti che verranno brevemente presentati di seguito.

5.1 Lamb shift del livello $2S_{1/2}$

Fin dal 1947, quando Lamb e Retherford misurarono per la prima volta lo splitting dei livelli $2S_{1/2}$ e $2P_{1/2}$ che secondo l'equazione di Dirac avrebbero dovuto avere la stessa energia, sono stati effettuati una serie di esperimenti con diversi approcci per determinarne il valore. Nel 1981 Lundeen e Pipkin hanno ottenuto un valore dello *splitting* di 1057.845(9) MHz, il valore più preciso ottenuto da una misura diretta. Nel 1994 invece, Hagley e Pipkin hanno invece dedotto un valore di 1057.842(12) MHz a partire da quello teorico tra $2S_{1/2}$ e $2P_{3/2}$. Un'altra stima indiretta, calcolata misurando l'anisotropia della luce emessa in un campo elettrico, la ottenne Drake nel 1998, con un valore di 1057.852(15) MHz. Un approccio diverso venne adottato da Pal'chikov, Sokolov e Yakovlev, misurando il rapporto tra il *Lamb shift* del livello $2S_{1/2}$ e la vita media del livello $2P_{1/2}$, a partire da un esperimento di interferometria atomica. Questo metodo ha portato ad un valore di elevata precisione, pari a 1057.8514(19) MHz, nonostante si sia sollevata una diatriba sul valore teorico della vita media del livello $2P_{1/2}$ impiegato per il conto. Se si mediano invece i valori degli *splittings* $2S_{1/2} - 2P_{1/2}$ e $2S_{1/2} - 2P_{3/2}$ ricavati da misure dirette, si ottiene un valore del *Lamb shift* del livello $2S_{1/2}$ di 1057.8439(72) MHz.

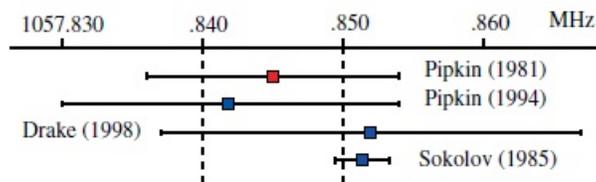


Figura 14: Differenze tra i valori misurati del *Lamb shift* tra i livelli $2S_{1/2}$ e $2P_{1/2}$.

5.2 Transizione 1S-2S

La transizione 1S-2S è stata studiata attraverso la tecnica di spettroscopia *Doppler-free* a due fotoni. Grazie alla piccola larghezza naturale del livello 2S, il fattore di qualità della transizione 1S-2S è $\sim 2 \times 10^{15}$, ma a causa della bassa probabilità di transizione e della lunghezza d'onda nel *range* degli UV, 243nm, si tratta di una transizione di difficile determinazione sperimentale.

Le prime osservazioni sono state effettuate ad opera di Hänsch nel 1975 e sono state seguite negli anni da diversi gruppi di ricerca a Southampton, Oxford, Yale e al MIT. Il maggior contributo è comunque stato apportato dal gruppo di Hänsch, che ha continuato ad operare per raggiungere una precisione sempre più spinta della misura in frequenza. Una svolta in questo senso è arrivata con l'utilizzo delle *optical frequency chain* prima e dei *laser frequency comb* dopo. Hänsch ha così ottenuto un valore della transizione di $\nu_{1S-2S} = 2\,466\,061\,413\,187\,074\,(34)$ Hz, uno dei risultati più precisi mai ottenuti nelle misure di frequenze ottiche.

5.3 Transizioni 2S-nS e 2S-nD

Una serie di esperimenti complementari a quelli svolti da Hänsch sulla transizione 1S-2S sono stati eseguiti ad opera del gruppo di ricerca di Biraben, presso il Laboratoire Kastler Brossel di Parigi, a partire dal 1983. Il risultato per H di maggior precisione corrisponde alla transizione $2S_{1/2} - 8D_{5/2}$ e vale $\nu_{2S_{1/2}-8D_{5/2}} = 770\,649\,561\,581.1\,(5.9)$ kHz, con un'incertezza relativa limitata a 7.6×10^{-12} ,

legata principalmente alla larghezza naturale del livello 8D di 572 kHz e al *light shift* non omogeneo cui sono affetti gli atomi nell'attraversamento del profilo gaussiano del raggio laser.

5.4 Calcolo di R_∞

Dalla (8) sappiamo che i termini di Dirac e di *recoil* sono in funzione di R_∞ e può essere riscritta come:

$$E_{n,\ell,j} = a_{n,j}hcR_\infty + L_{n,\ell,j} \quad (14)$$

con $a_{n,j}$ coefficiente numerico dipendente da α e $\frac{m_e}{m_p}$, il cui valore può essere approssimato tramite il valore di Bohr da: $a_{n,j} \sim -\frac{1}{n^2}$.

Pertanto, dai risultati ottenuti da Hänsch, si può riscrivere il valore in frequenza della transizione 1S-2S come:

$$\nu_{1S-2S} = (a_{2,1/2} - a_{1,1/2})cR_\infty + \frac{(L_{2S_{1/2}} - L_{1S_{1/2}})}{h} \sim \frac{3}{4}cR_\infty + \frac{(L_{2S_{1/2}} - L_{1S_{1/2}})}{h} \quad (15)$$

ν_{1S-2S} è conosciuta con un'incertezza di 34 Hz, mentre la *Lamb shift difference* $L_{2S_{1/2}} - L_{1S_{1/2}}$ è stata calcolata con un'incertezza di 44 kHz, principalmente dovuta al forte contributo d'incertezza su r_p . A dispetto della grande accuratezza della misura di ν_{1S-2S} di 1.4×10^{-14} , la costante di Rydberg viene dedotta con una precisione di solo 1.8×10^{-11} .

Se si fa invece riferimento ai risultati ottenuti da Biraben per la transizione $2S - 8D$, si ottiene:

$$\nu_{2S_{1/2}-8D_{5/2}} = (a_{8,5/2} - a_{2,1/2})cR_\infty + \frac{(L_{8D_{5/2}} - L_{2S_{1/2}})}{h} \sim \left(\frac{1}{4} - \frac{1}{64}\right)cR_\infty + \frac{(L_{8D_{5/2}} - L_{2S_{1/2}})}{h} \quad (16)$$

In questo caso l'incertezza sul *Lamb shift* del livello $8D_{5/2}$ vale 2.5 Hz, mentre per il livello $2S_{1/2}$ vale 6.4 kHz (infatti L scala come $\frac{1}{n^3}$). L'incertezza sperimentale di $\nu_{2S_{1/2}-8D_{5/2}}$ ammonta invece a 5.9 kHz e così si ottiene un valore di R_∞ con un'incertezza relativa di 1.1×10^{-11} .

Se invece si combinano $\nu_{2S_{1/2}-8D_{5/2}}$ col *Lamb shift* del livello $2S_{1/2}$, si elimina quest'ultimo livello e si ottiene:

$$\nu_{2P_{1/2}-2S_{1/2}} + \nu_{2S_{1/2}-8D_{5/2}} = (a_{8,5/2} - a_{2,1/2})cR_\infty + \frac{(L_{8D_{5/2}} - L_{2P_{1/2}})}{h} \quad (17)$$

Le incertezze sui *Lamb shifts* dei livelli $8D_{5/2}$ e $2P_{1/2}$ sono molto piccole, rispettivamente 2.5 Hz e 80 Hz, mentre la più grossa limitazione deriva dalle incertezze nelle misure di $\nu_{2P_{1/2}-2S_{1/2}}$ e $\nu_{2S_{1/2}-8D_{5/2}}$, giungendo così ad una determinazione di R_∞ con un'accuratezza di 1.2×10^{-11} . Il vantaggio di questo metodo, nonostante risulti essere meno preciso, è di non far riferimento al valore sperimentale di r_p .

Un altro metodo ancora, nato dall'esigenza di ridurre i contributi delle incertezze sui *Lamb shifts*, fattori limitanti nell'accuratezza del calcolo della costante di Rydberg, sfrutta la legge di scala $\frac{1}{n^3}$ del *Lamb shift*, tramite la deviazione da questa legge, che è stata calcolata da Karshenboim:

$$\Delta_2 = \frac{(L_{1S_{1/2}} - 8L_{2S_{1/2}})}{h} = -187.232(5)MHz \quad (18)$$

Combinando le equazioni (15), (16) e (18) si ottiene un sistema a tre equazioni nelle incognite R_∞ , $L_{1S_{1/2}}$ e $L_{2S_{1/2}}$ ed operando una combinazione lineare, si riescono ad eliminare i termini di *Lamb shift* per i livelli 1S e 2S:

$$7\nu_{2S_{1/2}-8D_{5/2}} - \nu_{1S_{1/2}-2S_{1/2}} \sim \left(\frac{57}{64}\right)cR_\infty + \frac{7L_{8D_{5/2}}}{h} + \Delta_2 \quad (19)$$

Il maggior contributo sull'incertezza è dato da quella sulla misura in frequenza di $2S_{1/2} - 8D_{5/2}$ che nella (19) vale (7×5.9) kHz, che porta ad un'incertezza relativa sulla costante di Rydberg di 1.4×10^{-11} . In questo caso il vantaggio è che, oltre a non tener conto della misura di r_p , non è necessaria una misura di $L_{2S_{1/2}}$.

Combinando infine le misure in frequenza su idrogeno e deuterio delle transizioni $1S_{1/2} - 2S_{1/2}$, $2S_{1/2} - 8D_{5/2}$ e $2S_{1/2} - 12D_{5/2}$ si ottiene un'incertezza relativa su R_∞ inferiore a 10^{-11} :

$$R_\infty = 10\,973\,731.56854 (10) \text{ m}^{-1}.$$

A partire da questo valore si possono dedurre:

$$\frac{L_{1S_{1/2}}}{h} = 8\,172.837 (26) \text{ MHz}$$

$$\frac{L_{1S_{1/2}} - L_{2P_{1/2}}}{h} = 1\,057.8447 (34) \text{ MHz}$$

e conseguentemente una stima di r_p :

$$r_p = 0.8765 (80) \text{ fm}$$

che presenta una precisione molto più elevata rispetto al valore ricavato dagli esperimenti di scattering elettrone-protone.

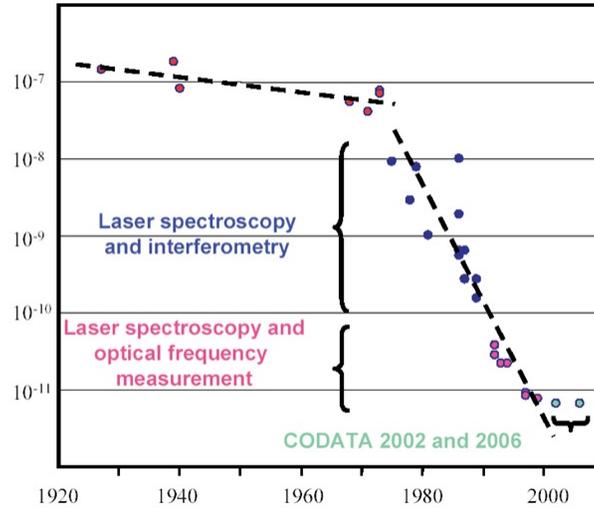


Figura 15: Precisione relativa della costante di Rydberg dagli anni '20 ai primi 2000.

6 Conclusioni

È stata messa in luce l'importanza del determinare con precisione sempre più spinta la costante di Rydberg R_∞ che, come già è stato detto, rappresenta il fattore di scala di ogni transizione spettrale. I risvolti che questa "ricerca della precisione" ha apportato in ambito fisico sono molteplici: ha portato a stime sempre più accurate di altre costanti, come ad esempio quella di struttura fine α , o di grandezze di difficile determinazione sperimentale, come il *proton charge radius* r_p (portando a correzioni fino a 5 deviazioni standard rispetto ai risultati precedenti), così da ottenere valori teorici più precisi delle frequenze del Lamb shift e delle transizioni 2S-nS/D. Ha inoltre stimolato lo sviluppo di innovative e raffinate tecnologie spettroscopiche, che hanno concesso una determinazione più accurata ed una miglior comprensione della struttura dell'atomo di idrogeno, rivoluzionando il mondo della spettroscopia ottica.

La precisione nella determinazione di R_∞ è limitata dalla stessa incertezza su r_p e sulle stesse transizioni 2S-nS/D, ma l'ambito di ricerca è così attivo e in evoluzione che il valore di R_∞ (e delle costanti e grandezze ad essa legate) è in continuo aggiornamento^[7].

Riferimenti bibliografici

- [1] F. Biraben, «*Spectroscopy of atomic hydrogen*», Eur. Phys. J. Special Topics **172**, 109-119 (2009).
- [2] T. W. Hänsch, «*Nobel Lecture: Passion for precision*», Rev. Mod. Phys. **78**, 1297-1309 (2006).
- [3] R. Pohl, A. Antognini, F. Nez, F. D. Amaro, F. Biraben, J. M. R. Cardoso, D. S. Covita, A. Dax, S. Dhawan, L. M. P. Fernandes, A. Giesen, T. Graf, T. W. Hänsch, P. Indelicato, L. Julien, C. Y. Kao, P. Knowles, E. O. Le Bigot, Y. W. Liu, J. A. M. Lopes, L. Ludhova, C. M. B. Monteiro, F. Mulhauser, T. Nebel, P. Rabinowitz, J. M. F. dos Santos, L. A. Schaller, K. Schuhmann, C. Schwob, D. Taqqu, J. F. C. A. Veloso & F. Kottmann, «*The size of the proton*», Nature **466**, 213-217 (2010).
- [4] T. Rieger, T. Volz, «*Doppler-Free Saturation Spectroscopy*» - appunti per l'esperienza didattica al Max-Planck-Institut für Quantenoptik, Garching.
- [5] A. Carnera, *Dispense del corso di Istituzioni di Fisica della Materia*, Padova.
- [6] J. H. Bransden, C. J. Joachaim, «*Physics of Atoms and Molecules*», Prentice Hall.
- [7] P. J. Mohr, B. N. Taylor, D. B. Newell, «*CODATA recommended values of the fundamental physical constants: 2010*», Rev. Mod. Phys. **84**, 1527-1605 (2012).
- [8] http://www.rp-photonics.com/frequency_combs.html
- [9] http://www.nist.gov/public_affairs/releases/frequency_combs.cfm