



UNIVERSITÀ
DEGLI STUDI
DI PADOVA

Università degli Studi di Padova

DIPARTIMENTO DI MATEMATICA “TULLIO LEVI-CIVITA”

Corso di Laurea Triennale in Matematica

Matching Totali di Grafi

Relatore:
Prof. Manuel Francesco Aprile

Laureando: Damiano Marton
Matricola: 2006274

Anno Accademico 2022/2023

15/12/2023

Indice

1	Introduzione	3
1.1	Teoria dei grafi	6
1.2	Poliedri e politopi	8
2	Il politopo degli insiemi indipendenti di grafi perfetti	11
2.1	Grafi perfetti	11
2.2	Il politopo degli insiemi indipendenti di grafi perfetti	12
3	Il politopo dei matching totali	17
3.1	Matching totali e grafo totale	17
3.2	Il politopo dei matching totali	20
3.3	Cicli	25
4	Alberi	29
4.1	Il politopo dei matching totali di alberi	29
4.2	Matching totale massimo di alberi	31
4.3	Matching totale di peso massimo di alberi	36
5	Grafi completi	41
5.1	Il grafo totale sugli archi	41
5.2	Il politopo dei matching totali di grafi completi	46
6	Grafi bipartiti completi	51
6.1	Formulazione estesa e descrizione di $P_T(K_{r,s})$	51
6.2	Interpretazione della descrizione di $P_T(K_{r,s})$	56

Capitolo 1

Introduzione

Consideriamo un grafo semplice e non orientato $G = (V, E)$ e sia $D = V \cup E$ l'insieme dei suoi elementi. Diciamo che due elementi in D sono adiacenti se sono vertici adiacenti, o se sono archi incidenti, o se uno è un arco che ha l'altro come estremo. Se due elementi di D non sono adiacenti, diciamo che sono indipendenti. Un matching totale di G è un sottoinsieme di D i cui elementi sono a due a due indipendenti. Il Total Matching Problem (TMP) è il problema che chiede di determinare un matching totale di G di cardinalità massima, anche detto matching totale massimo. Indichiamo con $\alpha_T(G)$ la cardinalità di un matching totale massimo di G .

Il primo lavoro sul TMP è dell'anno 1977 [1]. In [7] l'autore mostra che $\alpha_T(G)$ si può determinare in tempo polinomiale per gli alberi, e che il TMP è un problema NP-completo per grafi bipartiti e planari. In [5] gli autori propongono un approccio poliedrale a questo argomento, tramite la definizione del Politopo dei Matching Totali, grazie a cui è possibile utilizzare gli strumenti della programmazione lineare per risolvere il TMP.

Il TMP generalizza il Matching Problem, che riguarda solo insiemi indipendenti di archi, e lo Stable Set Problem, che riguarda solo insiemi indipendenti di vertici. Allo stesso modo, il Politopo dei Matching Totali, dunque, generalizza quello dei Matching e quello degli Insiemi Indipendenti.

Un problema strettamente legato al TMP è il Problema della Colorazione Totale. Dato un insieme di colori $K = \{1, \dots, k\}$, una k -colorazione totale di G è una funzione $\phi: D \rightarrow K$ tale che $\phi(d_1) \neq \phi(d_2)$ per ogni $d_1, d_2 \in D$ adiacenti. Allora, una k -colorazione degli elementi di G corrisponde ad una partizione degli elementi di G in k matching totali.

Nonostante la sua stretta connessione con il Matching Problem e lo Stable Set Problem, molto studiati nella letteratura, e con la congettura di Vizing sulla colorazione totale [5], il TMP rimane poco approfondito.

Il Problema del Matching Totale e della Colorazione Totale hanno varie applicazioni pratiche.

Proponiamo un esempio di un contesto in cui trova applicazione il concetto del matching totale. Supponiamo di avere una scuola di teatro che propone corsi di improvvisazione. Per la partecipazione ai corsi è previsto che ogni candidato si sottoponga ad una prova individuale di improvvisazione. Oltre a questo, ogni candidato è tenuto a sostenere almeno due prove di improvvisazione in coppia. Gli abbinamenti sono definiti dagli esaminatori prima dell'inizio delle prove, e rimangono sempre segreti, in modo che i candidati non possano confrontarsi ed avere

quindi un vantaggio in fase di improvvisazione. Gli esaminatori calendarizzano le prove in modo che due candidati che sono abbinati in una delle prove in coppia debbano sostenere la prova individuale in giorni diversi, sempre per evitare occasioni di confronto. Ogni candidato può sostenere al massimo una prova al giorno, per motivi di recupero personale. Chiamiamo giorno x il primo giorno disponibile per le prove (individuali e a coppie). Prendiamo allora un grafo G in cui i nodi sono i candidati e in cui due vertici sono adiacenti solo se i candidati corrispondenti sono associati in una delle prove a coppie. Sia T l'insieme delle prove che si svolgono il primo giorno disponibile. Cioè, un candidato t sostiene la prova individuale il giorno x se e solo se $t \in T$, e una coppia di candidati $\{t_1, t_2\}$ sostiene la prova in coppia il giorno x se e solo se $t_1 t_2 \in T$ (come arco). Notiamo che, per costruzione, T deve essere un matching totale di G . I corsi sono in fase di avvio, ed è dunque importante che durante il giorno x vengano sostenute quante più prove possibili. Vogliamo dunque trovare un matching totale massimo di G . Rimandiamo a [6] per altri esempi di applicazioni.

Il lavoro di questa tesi è partito dallo studio degli articoli [3, 5] di cui riportiamo alcune parti nei capitoli 3, 4 e 6. Successivamente abbiamo seguito alcune direzioni di ricerca non presenti o non sufficientemente trattate in letteratura, ottenendo i seguenti contributi originali:

- Introduciamo le disuguaglianze di 3-ciclo, mostrando che definiscono faccette del politopo dei matching totali (Proposizione 3.2.5);
- Forniamo un algoritmo esplicito che restituisce un matching totale massimo di G , nel caso G sia un albero, e deriviamo da questo una formula per $\alpha_T(G)$ quando G è un albero n -ario completo di altezza h (Sezione 4.2);
- Forniamo un algoritmo esplicito che restituisce un matching totale di peso massimo di G , nel caso G sia un albero in cui ad ogni vertice e ad ogni arco è associato un peso reale (Sezione 4.3);
- Introduciamo il concetto di grafo totale sugli archi e mostriamo che gli unici grafi ad ammettere uno sono quelli completi e P_3 . Da questo deriviamo una descrizione completa e non ridondante del politopo dei matching totali di grafi completi (Capitolo 5).

Oltre a questi risultati, proponiamo in alcune occasioni dimostrazioni alternative e semplificate di risultati noti, come nel caso delle Proposizioni 3.1.1 e 3.3.2, o correzioni di risultati noti ma inesatti, come nel caso della Proposizione 3.2.3.

I contenuti di questo lavoro sono organizzati come segue:

- Nelle pagine successive a questa, richiamiamo i principali concetti della teoria dei grafi, e alcuni concetti e risultati nell'ambito dei poliedri, necessari alla comprensione dei risultati relativi alla struttura del politopo dei matching totali.
- Nel Capitolo 2, introduciamo il concetto di grafo perfetto e deriviamo una descrizione completa e non ridondante del politopo degli insiemi indipendenti nel caso di grafi perfetti. Vedremo che il politopo dei matching totali di G è il politopo degli insiemi indipendenti del grafo totale di

G , e nel caso quest'ultimo sia perfetto, grazie ai risultati di questo capitolo, potremo ottenerne in modo immediato una descrizione.

- Nel Capitolo 3, introduciamo il concetto di matching totale e di grafo totale, e forniamo alcuni risultati sulla struttura del politopo dei matching totali di un grafo qualsiasi, descrivendone alcune faccette. Studiamo poi in particolare il caso dei cicli.
- Nel Capitolo 4, nel caso in cui G sia un albero, otteniamo una descrizione completa e non ridondante del politopo dei matching totali, forniamo un algoritmo che restituisce un matching totale massimo di G , e un algoritmo che restituisce un matching totale di peso massimo di G . Dal primo algoritmo ricaviamo delle formule chiuse per $\alpha_T(G)$ nel caso di alberi n -ari completi di altezza h e di cammini di lunghezza n .
- Nel Capitolo 5, interamente originale, introduciamo il concetto di grafo totale sugli archi e mostriamo che gli unici grafi ad ammetterne uno sono quelli completi e P_3 . Da questo deriviamo una descrizione completa e non ridondante del politopo dei matching totali di grafi completi.
- Nel Capitolo 6, introduciamo le disequazioni rialzate di biclique non bilanciata e deriviamo, seguendo la trattazione di [3, 4], una descrizione completa e non ridondante del politopo dei matching totali di grafi bipartiti completi.

Nelle pagine seguenti introduciamo dunque i principali concetti, riguardanti la teoria dei grafi e dei poliedri, necessari alla comprensione degli argomenti che seguono, e forniamo alcune indicazioni sulla notazione che utilizzeremo.

1.1 Teoria dei grafi

Un grafo (semplice e non orientato) è una coppia $G = (V(G), E(G))$ dove $V(G)$ è un insieme e $E(G)$ è un insieme di coppie non ordinate di elementi distinti di $V(G)$. Per semplicità di notazione scriveremo $G = (V, E)$. Chiameremo gli elementi di V *vertici* (o *nodi*) e gli elementi di E *archi*. Indicheremo con $D(G) = D$ l'insieme degli elementi di G , cioè $D(G) = V(G) \cup E(G)$. Scriveremo $e = uv$ per indicare $e = \{u, v\} \in E$, con $u, v \in V$ detti *estremi* di e . Diremo che $u, v \in V$ sono adiacenti se esiste un arco $e = uv \in E$. Diremo che $e \in E$ è incidente in $v \in V$ se v è estremo di e . Diremo che $e, f \in E$ sono incidenti se esiste $v \in V$ tale che è estremo di entrambi.

Dati G, H grafi, una funzione $\phi: V(G) \rightarrow V(H)$ si dice isomorfismo di grafi se è una biezione e se $u, v \in V(G)$ sono adiacenti in G se e solo se $\phi(u), \phi(v) \in V(H)$ sono adiacenti in H . Un automorfismo di grafi è un isomorfismo di un grafo in se stesso.

Indicheremo con $\delta(v) = \delta_G(v)$ l'insieme degli archi incidenti in $v \in V$. Il *grado* di $v \in V$ è $d(v) = |\delta(v)|$. Indicheremo con $N(v) = N_G(v)$ l'insieme dei vicini di $v \in V$, cioè l'insieme dei vertici adiacenti a v .

Una *clique* di un grafo G è un sottoinsieme $K \subseteq V$ tale che per ogni $u, v \in K$, u e v sono adiacenti.

Un *sottografo* di un grafo $G = (V, E)$ è un grafo $Q = (U, F)$ tale che $U \subseteq V$ e $F \subseteq E$; inoltre Q si dice *sottografo indotto* da $U \subseteq V$, e si scrive $Q = G[U]$, se $F = \{e = uv \in E : u, v \in U\}$.

Un *cammino* $P = (U, F)$ in un grafo $G = (V, E)$ è un sottografo di G tale che è possibile indicizzare i nodi di U in modo che $U = \{u_1, \dots, u_n\}$ e $F = \{u_1u_2, \dots, u_{n-1}u_n\}$; diremo u_1 e u_n gli *estremi* del cammino. Un *ciclo* $C = (U, F)$ in un grafo $G = (V, E)$ è un sottografo di G tale che è possibile indicizzare i nodi di U in modo che $U = \{u_1, \dots, u_n\}$ e $F = \{u_1u_2, \dots, u_{n-1}u_n, u_nu_1\}$.

Un grafo si dice *aciclico* se non ammette cicli come sottografi. Un grafo $G = (V, E)$ si dice *connesso* se per ogni $u, v \in V$ esiste un cammino che ha u e v come estremi.

Un grafo connesso e aciclico si dice *albero*. Sia $A = (V, E)$ un albero. Si nota facilmente che per ogni $u, v \in V$ esiste in A un unico cammino che ha per estremi u e v . È noto inoltre che $|E| = |V| - 1$. Sia $r \in V$ fissato, e chiamiamolo *radice*. Chiamiamo i nodi di $N(r)$ i *figli* di r ; per ogni $v \in N(v)$ chiamiamo figli di v tutti i nodi di $N(v) \setminus r$, e così via ricorsivamente. In questo contesto, diciamo che u è genitore di u' se u' è figlio di u .

Un grafo G è *cordale* se ogni ciclo C di G (come sottografo) di lunghezza (cioè numero di nodi) maggiore di tre è tale che esistono $u, v \in C$ tali che $u \in N_G(v)$ e $u \notin N_C(v)$.

Sia $G = (V, E)$ un grafo. Il *complementare* di G è il grafo $\bar{G} = (V, F)$ dove $F = \{uv : u, v \in V, uv \notin E\}$. Il *grafo lineare* di G è il grafo $L(G) = (E, R)$ dove $R = \{ef : e, f \in E \text{ sono incidenti in } G\}$.

Sia $G = (V, E)$ un grafo. Un insieme $M \subseteq E$ si dice *matching* di G se per ogni $e, f \in M$, e ed f non sono incidenti in G . Un insieme $S \subseteq V$ si dice *insieme indipendente* di G se per ogni $u, v \in S$, u e v non sono adiacenti in G .

Un grafo $G = (V, E)$ è detto *completo* se $E = \{uv : u, v \in V\}$. Un grafo $G = (V, E)$ è detto *bipartito* se è possibile partizionare V in due insiemi indipendenti. Si dice inoltre *bipartito completo* se, detti A e B gli insiemi della partizione, per ogni $a \in A$ e $b \in B$ si ha che $ab \in E$.

Un grafo $G = (V, E)$ è detto *stella* se esiste v tale che $\{v\} \cup N(v) = V$ e $\delta(v) = E$.

Nella trattazione che segue indicheremo con:

- P_n il cammino con n nodi ($n \geq 1$);
- C_n il ciclo con n nodi ($n \geq 3$);
- K_n il grafo completo con n nodi ($n \geq 1$);
- $K_{r,s}$ il grafo bipartito completo la cui bipartizione dei vertici è $V = R \cup S$ con $|R| = r \geq 1$ e $|S| = s \geq 1$;
- S_n la stella con $n + 1$ nodi ($n \geq 1$).

1.2 Poliedri e politopi

Per una trattazione più completa degli argomenti accennati di seguito, rimandiamo a [8, 2].

Un punto $x \in \mathbb{R}^n$ è una *combinazione convessa* dei punti $x_1, \dots, x_q \in \mathbb{R}^n$ se esistono scalari non negativi $\lambda_1, \dots, \lambda_q$ tali che

$$x = \sum_{i=1}^q \lambda_i x_i \quad \text{con} \quad \sum_{i=1}^q \lambda_i = 1$$

Un insieme $C \subseteq \mathbb{R}^n$ è *convesso* se contiene tutte le combinazioni convesse di punti di C . Dato un insieme $S \subseteq \mathbb{R}^n$, l'*inviluppo convesso* di S , indicato con $\text{conv}(S)$, è il più piccolo insieme convesso che contiene S . Equivalentemente,

$$\text{conv}(S) = \left\{ \sum_{i=1}^q \lambda_i x_i : x_1, \dots, x_q \in S, \lambda_1, \dots, \lambda_q \geq 0, \sum_{i=1}^q \lambda_i = 1 \right\}.$$

Un vettore $x \in \mathbb{R}^n$ è una *combinazione conica* di vettori $x_1, \dots, x_q \in \mathbb{R}^n$ se esistono scalari non negativi $\lambda_1, \dots, \lambda_q$ tali che

$$x = \sum_{i=1}^q \lambda_i x_i.$$

Un insieme $C \subseteq \mathbb{R}^n$ si dice *cono* se $0 \in C$ e per ogni $x \in C$ e $\lambda \geq 0$, si ha $\lambda x \in C$. Un cono $C \subseteq \mathbb{R}^n$ è detto *cono convesso* se C contiene ogni combinazione convessa di vettori in C . Dato un insieme $S \subseteq \mathbb{R}^n$, il *cono* di S , indicato con $\text{cone}(S)$, è il più piccolo cono convesso che contiene S . Diciamo inoltre che $\text{cone}(S)$ è *generato* da S . Un cono si dice *puntato* se non contiene rette.

Un sottoinsieme $P \subseteq \mathbb{R}^n$ è un *poliedro* se esiste $m \geq 1$ intero, una matrice $A \in M_{m \times n}(\mathbb{R})$ e un vettore $b \in \mathbb{R}^m$ tale che $P = \{x \in \mathbb{R}^n : Ax \leq b\}$. Un poliedro è dunque l'intersezione finita di semispazi. Chiamiamo il sistema $Ax \leq b$ una *descrizione completa* di P .

Un *politopo* è un poliedro limitato. Equivalentemente possiamo dire che un politopo P è l'inviluppo convesso di un insieme finito di punti $X \subset \mathbb{R}^n$.

Una disuguaglianza $cx \leq \delta$ ($c, \delta \in \mathbb{R}$) è detta *valida* per un insieme $P \subseteq \mathbb{R}^n$ se è soddisfatta per ogni punto di P .

Una *faccia* di un poliedro P è un insieme del tipo $F = P \cap \{x \in \mathbb{R}^n : cx = \delta\}$ dove $cx \leq \delta$ è una disequazione valida per P . Diciamo che la disequazione $cx \leq \delta$ *definisce* la faccia F . Se una disuguaglianza valida $cx \leq \delta$ con $c \neq 0$ definisce una faccia non vuota di P , l'iperpiano $\{x \in \mathbb{R}^n : cx = \delta\}$ è detto *iperpiano di supporto* per la faccia F di P . Notiamo che \emptyset e P sono sempre facce di P , definite dalle disuguaglianze $0 \leq -1$ e $0 \leq 0$ rispettivamente. Una faccia di P è detta *propria* se è non vuota e propriamente contenuta in P . Diciamo *dimensione* di una faccia F di P la dimensione del più piccolo spazio affine che la contiene.

Le facce proprie di P massimali rispetto all'inclusione sono dette *faccette*. Dunque ogni faccia propria di P è contenuta in una faccetta. Chiamiamo le facce di dimensione 0 *vertici* e quelle di dimensione 1 *spigoli*.

Teorema 1.2.1. *Sia $P \subset \mathbb{R}^n$ un poliedro non vuoto, e sia $Ax \leq b$ una sua descrizione completa tramite un sistema lineare di disequazioni. Allora*

1. *Per ogni faccetta F di P , almeno una delle disequazioni che definisce F deve comparire nella descrizione di P (cioè, non possono essere rimosse tutte);*
2. *Le disuguaglianze che definiscono facce di dimensioni inferiore a $\dim(P) - 1$ possono essere rimosse dalla descrizione di P .*

Diciamo che una descrizione completa di un poliedro P tramite un sistema lineare di disequazioni $Ax \leq b$ è *non ridondante* se non esiste una disequazione fra quelle di $Ax \leq b$ che può essere rimossa ottenendo ancora una descrizione completa di P . Per il Teorema 1.2.1 questo avviene solo se ogni disequazione del sistema definisce una faccetta distinta di P .

Corollario 1.2.1. *Sia $P \subset \mathbb{R}^n$ un poliedro non vuoto, e siano $\gamma_1 : c^T x \leq a$ e $\gamma_2 : d^T x \leq b$ due disequazioni non banali valide per P , con $c, d \in \mathbb{R}^n$, $a, b \in \mathbb{R}$. Allora la disequazione $\gamma_1 + \gamma_2 : c^T x + d^T x \leq a + b$ non definisce una faccetta di P .*

Dimostrazione. Si vede facilmente che ogni $x \in \mathbb{R}^n$ che soddisfa γ_1 o γ_2 (o entrambe), soddisfa anche $\gamma_1 + \gamma_2$. Allora quest'ultima disequazione non è necessaria nella descrizione di P . Per il Teorema 1.2.1, possiamo concludere che allora $\gamma_1 + \gamma_2$ non definisce una faccetta di P . \square

Definizione 1.2.1 (Disequazione dominata). *Siano $P \subset \mathbb{R}_{\geq 0}^n$ un politopo e $\gamma_\alpha, \gamma_\beta$ due disequazioni valide per P . Diciamo che γ_α è dominata da γ_β (o che γ_β domina γ_α) se*

$$\{x \in \mathbb{R}_{\geq 0}^n : x \text{ soddisfa } \gamma_\beta\} \subset \{x \in \mathbb{R}_{\geq 0}^n : x \text{ soddisfa } \gamma_\alpha\}.$$

Proposizione 1.2.1. *Siano $P \subset \mathbb{R}_{\geq 0}^n$ un politopo e $\gamma_\alpha, \gamma_\beta$ due disequazioni valide per P , non banali, tali che γ_β domina γ_α . Allora γ_α non definisce una faccetta di P .*

Dimostrazione. Siano F_α e F_β le facce di P definite da γ_α e γ_β rispettivamente. Se $F_\alpha = \emptyset$, si conclude banalmente. Sia allora $y \in F_\alpha$. Visto che γ_β è valida per P , y soddisfa γ_β , e visto che y appartiene ad una faccia di P , allora $y \in F_\beta$. Cioè $F_\alpha \subseteq F_\beta$. Se le due facce coincidessero, avremmo che $\{x \in \mathbb{R}_{\geq 0}^n : x \text{ soddisfa } \gamma_\beta\} = \{x \in \mathbb{R}_{\geq 0}^n : x \text{ soddisfa } \gamma_\alpha\}$ che è una contraddizione. Dunque l'inclusione fra le due facce è stretta, e dunque F_α non è una faccia massimale. \square

Un cono C che è un poliedro si dice *cono poliedrale*. Un cono poliedrale ha sempre la seguente forma $C = \{x \in \mathbb{R}^n : Ax \leq 0\}$ con $A \in M_{m \times n}(\mathbb{R})$. Sia C un cono poliedrale. Un vettore $r \in \mathbb{R}^n$ tale che $\{x \in \mathbb{R}^n : x = \lambda r, \lambda \geq 0\}$ è uno spigolo di C è detto *raggio estremo* di C . Vale che $C = \text{cone}\{r \in \mathbb{R}^n : r \text{ è raggio estremo di } C\}$.

Teorema 1.2.2. *Sia $C = \{x \in \mathbb{R}^n : Ax \leq 0\}$ un cono poliedrale puntato. Allora $r \in \mathbb{R}^n$ è un raggio estremo di C se e solo se r soddisfa ad uguaglianza $n - 1$ disequazioni indipendenti di $Ax \leq 0$.*

La proiezione ortogonale di un insieme $S \subset \mathbb{R}^{n+p} \ni (x, z)$ sul sottospazio lineare $\mathbb{R}^n \times \{0\}^p$ è

$$\text{proj}_x(S) = \{x \in \mathbb{R}^n : \exists z \in \mathbb{R}^p \text{ tale che } (x, z) \in S\}.$$

Una *estensione* di un politopo $P \subseteq \mathbb{R}^n$ è un poliedro $Q \subseteq \mathbb{R}^d$ ($d \geq n$) insieme ad una mappa affine $p: \mathbb{R}^d \rightarrow \mathbb{R}^n$ che soddisfa $p(Q) = P$. Una descrizione di Q tramite un sistema di disequazioni lineari (insieme a p) è detta *formulazione estesa* di P . Notiamo che un poliedro $Q \subseteq \mathbb{R}^{n+p} \ni (x, z)$ è una estensione di $\text{proj}_x(Q) \subseteq \mathbb{R}^n$ con la mappa affine data dalla proiezione ortogonale.

Sia $Q = \{(x, z) \in \mathbb{R}^{n+p} : Ax + Bz \leq b\}$ un poliedro, con $A \in M_{m \times n}(\mathbb{R})$, $B \in M_{m \times p}(\mathbb{R})$. Il cono di proiezione di P è il cono poliedrale $C_Q = \{u \in \mathbb{R}^m : uB = 0, u \geq 0\}$.

Lemma 1.2.1. Lemma di Farkas *Un sistema di disequazioni lineari $Ax \leq b$ è inammissibile se e solo se il sistema $uA = 0, ub < 0, u \geq 0$ è ammissibile.*

Teorema 1.2.3. *Sia $Q = \{(x, z) \in \mathbb{R}^{n+p} : Ax + Bz \leq b\}$ dove $A \in M_{m,n}(\mathbb{R})$, $B \in M_{m,p}(\mathbb{R})$. Allora*

$$\text{proj}_x(Q) = \{x \in \mathbb{R}^n : \bar{u}^T Ax \leq \bar{u}^T b, \forall \bar{u} \text{ raggio estremo di } C_Q\}.$$

Dimostrazione. È sufficiente mostrare che per ogni $\bar{x} \in \mathbb{R}^n$, vale che $\bar{x} \notin \text{proj}_x(P)$ se e solo se $\bar{u}^T Ax > \bar{u}^T b$ per un raggio estremo \bar{u} di C_Q . Per definizione, $\bar{x} \notin \text{proj}_x(P)$ se e solo se il sistema $Bz \leq b - A\bar{x}$ è inammissibile. Per il Lemma di Farkas, quest'ultimo è inammissibile se e solo se esiste un vettore $u \in C_Q$ tale che $u^T Ax > u^T b$. Visto che $C_Q = \text{cone}\{\bar{u} \in \mathbb{R}^m : \bar{u} \text{ è raggio estremo di } C_Q\}$, un tale vettore u esiste se e solo se $\bar{u}^T Ax > \bar{u}^T b$ per un raggio estremo \bar{u} di C_Q . \square

Indicheremo con $\mathbb{1}$ il vettore $(1, \dots, 1)$ di dimensione opportuna.

Capitolo 2

Il politopo degli insiemi indipendenti di grafi perfetti

In questo capitolo definiremo il politopo degli insiemi indipendenti di un grafo, e nel caso di grafi perfetti, dimostreremo, come è noto, che una descrizione completa e non ridondante del politopo degli insiemi indipendenti è data dalle disuguaglianze di clique massimale e da quelle di non negatività. Lo studio del politopo degli insiemi indipendenti è strettamente collegato a quello del politopo dei matching totali; mostreremo infatti che il politopo dei matching totali di un grafo G corrisponde al politopo degli insiemi indipendenti del suo grafo totale $T(G)$.

2.1 Grafi perfetti

Sia $G = (V, E)$ un grafo. Ricordiamo che una colorazione propria (o ammissibile) dei vertici di G con $k \geq 1$ colori è una funzione $c: V \rightarrow \{1, \dots, k\}$ tale che per ogni $u, v \in V$ adiacenti, vale $c(u) \neq c(v)$. Indichiamo con $\chi(G)$ il minimo numero di colori k necessario per una colorazione propria dei vertici di G con k colori. Indichiamo invece con $\omega(G)$ la cardinalità massima $l \geq 1$ di una clique K_l che è sottografo di G .

Si nota facilmente che per ogni grafo G vale $\chi(G) \geq \omega(G)$.

Definizione 2.1.1 (Grafo perfetto). *Si dice che un grafo G è perfetto se per ogni sottografo indotto H di G vale $\chi(H) = \omega(H)$.*

Nel 1960 Berge ha proposto due congetture relative ai grafi perfetti, che sono poi state provate essere vere:

1. **Teorema debole dei grafi perfetti:** *Un grafo G è perfetto se e solo se il suo complemento lo è.*
2. **Teorema forte dei grafi perfetti:** *Un grafo G è perfetto se e solo se non contiene, come sottografi indotti, cicli dispari di lunghezza maggiore o uguale a 5, o loro complementi.*

Definizione 2.1.2 (Replicazione). *Sia $G = (V, E)$ un grafo. Chiamiamo replicazione di un vertice $v \in V$ l'azione di aggiungere un vertice v' al grafo G , in modo che sia adiacente a v e a tutti i vicini di v .*

Dopo la replicazione di un vertice di G si ottiene il grafo G' con $V(G') = V(G) \cup \{v'\}$ e $E(G') = E(G) \cup \{v'u : u \in \{v \cup N(v)\}\}$.

Dimostriamo il seguente risultato, che, insieme al Teorema forte dei grafi perfetti, sarà utile nella trattazione che segue.

Proposizione 2.1.1. *Sia $G = (V, E)$ un grafo perfetto, $v \in V$. Allora, il grafo G' ottenuto replicando v è ancora perfetto.*

Dimostrazione. Dobbiamo dimostrare che, preso H' sottografo indotto di G' , vale $\chi(H') = \omega(H')$. Se $v' \notin H'$, allora H' è un sottografo indotto di G , che è perfetto, e dunque vale $\chi(H') = \omega(H')$. Se $v \notin H'$, allora H' è isomorfo ad un sottografo indotto di G , perché v' è adiacente esattamente agli stessi nodi a cui è adiacente v .

Sia allora $v, v' \in H'$. Consideriamo $H = H' \setminus \{v'\}$. Consideriamo una colorazione di H con $\omega(H)$ colori (esiste perché H è sottografo indotto di G).

1. Supponiamo che $v \in K$, con K clique massima di H , cioè di cardinalità $\omega(H)$. Allora, per come è definita la duplicazione, $K' = K \cup \{v'\}$ è una clique massima di H' , di cardinalità $\omega(H) + 1$. Assegnando un nuovo colore a v' , e mantenendo la colorazione scelta per i vertici di H , si ottiene una colorazione di H' con $\omega(H) + 1$ colori. Dunque $\chi(H') = \omega(H')$, come si voleva.
2. Supponiamo ora che v non appartenga a nessuna clique massima di H , allora una clique massima di H è anche una clique massima di H' , in particolare $\omega(H) = \omega(H')$. Sia S l'insieme indipendente che contiene v indotto dalla colorazione di H . Visto che il numero di colori utilizzati è $\omega(H)$, ogni clique massima di H deve avere un nodo in S . Dunque ogni clique massima interseca $S \setminus \{v\}$, e dunque $\omega(H \setminus (S \setminus \{v\})) = \omega(H) - 1$. Il grafo H è perfetto, e dunque lo è anche $H \setminus (S \setminus \{v\})$. Quest'ultimo può dunque essere colorato con $\omega(H) - 1 = \omega(H') - 1$ colori. Siccome v' è adiacente solo a v e ai suoi vicini in H' , non è adiacente in H' a nessuno dei nodi di $S \setminus \{v\}$ (notiamo che nessun nodo in S , escluso v , può essere adiacente a v). Allora assegniamo un nuovo colore a $\{v'\} \cup (S \setminus \{v\})$ e otteniamo una colorazione di H' con $\omega(H')$ colori. Dunque $\chi(H') = \omega(H')$, come si voleva.

□

2.2 Il politopo degli insiemi indipendenti di grafi perfetti

Ricordiamo che un insieme indipendente di un grafo $G = (V, E)$ è un sottoinsieme S dell'insieme dei vertici V tale che per ogni scelta di $s_1, s_2 \in S$, s_1 e s_2 non sono adiacenti. Equivalentemente, S è insieme indipendente se $G[S]$ non contiene archi.

Definizione 2.2.1 (Vettore caratteristico). *Sia A un insieme, $B \subseteq A$. Chiamiamo vettore caratteristico di B in A il vettore $\chi_A[B] = \chi[B] \in \{0, 1\}^{|A|}$ dato da $\chi[B] = \{x_a\}_{a \in A}$ dove $x_a = 1$ se $a \in B$, e $x_a = 0$ altrimenti.*

Definizione 2.2.2 (Politopo degli insiemi indipendenti). *Diciamo politopo degli insiemi indipendenti di un grafo G l'involuppo convesso dei vettori caratteristici degli insiemi indipendenti*

di G (come sottoinsiemi dell'insieme dei vertici $V(G)$), cioè

$$P_{STAB}(G) = \text{conv}\{\chi[S] \in \{0, 1\}^n : S \subseteq V \text{ è un insieme indipendente di } G\}$$

dove $n = |V(G)|$.

In generale, la descrizione del politopo degli insiemi indipendenti tramite un sistema lineare richiede un numero esponenziale di disequazioni, rispetto al numero di vertici.

Si nota facilmente che i vincoli di non negatività sulle variabili dei vertici sono disequazioni valide per $P_{STAB}(G)$, e che, per ogni clique K di G , la disequazione

$$\sum_{v \in K} x_v \leq 1$$

è valida per $P_{STAB}(G)$, dove $x = \{x_v\}_{v \in V} \in P_{STAB}(G) \subseteq \mathbb{R}_{\geq 0}^n$.

Dunque possiamo scrivere che

$$P_{STAB}(G) \subseteq P_{QSTAB}(G) = \left\{ x \in \mathbb{R}^n : \sum_{v \in K} x_v \leq 1 \ \forall K \text{ clique di } G, x_v \geq 0 \ \forall v \in V \right\}.$$

In generale non vale l'uguaglianza. Infatti, consideriamo il ciclo C_5 con vertici indicizzati modulo 5 lungo il ciclo $V = \{v_0, \dots, v_4\}$:

$$P_{QSTAB}(C_5) = \{x \in \mathbb{R}^5 : x_{v_i} + x_{v_{i+1}} \leq 1, x_{v_i} \geq 0 \text{ per } i \in \{0, \dots, 4\}\}.$$

Si vede che il punto $x = \frac{1}{2}\mathbb{1}$ è un vertice di $P_{QSTAB}(C_5)$, ma non è un vertice di $P_{STAB}(C_5)$ (non ha entrate intere, e non corrisponde quindi ad un insieme indipendente di G).

Mostriamo ora che, se G è perfetto, vale $P_{STAB}(G) = P_{QSTAB}(G)$. Da questo otteniamo dunque una descrizione completa del politopo degli insiemi indipendenti di grafi perfetti.

Sia $G = (V, E)$ un grafo qualsiasi, $c = \{c_v\}_{v \in V} \in \mathbb{Z}_{\geq 0}^{|V|}$. Scriviamo (G, c) per indicare il grafo G in cui a ogni vertice è stato assegnato il peso c_v .

Scriviamo $\omega(G, c)$ per indicare il peso della clique di (G, c) di peso massimo, cioè

$$\omega(G, c) = \max \left\{ \sum_{v \in K} c_v : K \text{ clique di } G \right\} = \max \{c^T \chi[K] : K \text{ clique di } G\}.$$

Scriviamo inoltre $\chi(G, c)$ per indicare il minimo numero di colori necessari per una colorazione c -ammissibile dei vertici di G , cioè tale che:

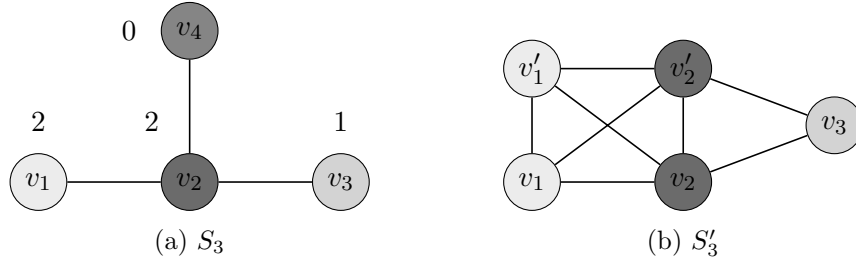
- ad ogni vertice v vengono assegnati c_v colori distinti, e indichiamo con $R_v = \{r_1, \dots, r_{c_v}\}$ l'insieme dei colori assegnati a v (se $c_v = 0$, allora $R_v = \emptyset$);
- per ogni arco $e = uv \in E(G)$, $R_u \cap R_v = \emptyset$.

Notiamo che se $c = (1, \dots, 1) \in \mathbb{R}^n$, si ha $\omega(G, c) = \omega(G)$ e $\chi(G, c) = \chi(G)$ con le definizioni usuali.

Proposizione 2.2.1. *Sia $G = (V, E)$ un grafo qualsiasi, e sia $c \in \mathbb{Z}_{\geq 0}^{|V|}$ il vettore dei pesi dei nodi di G . Sia G' il grafo ottenuto rimuovendo ogni vertice $v \in V$ tale che $c_v = 0$, e replicando $c_v - 1$ volte ogni vertice $v \in V$ tale che $c_v \geq 2$. Allora $\omega(G, c) = \omega(G')$ e $\chi(G, c) = \chi(G')$.*

Dimostrazione. Indichiamo con $G+u$ il grafo ottenuto da G replicando $u \in V$. Si nota facilmente che per ogni $u, v \in V$ si ha che $(G+u)+v$ è isomorfo a $(G+v)+u$. Dunque il grafo G' come nell'enunciato è ben definito.

Nella seguente figura, rappresentiamo (G, c) (figura (a)) e G' (figura (b)) nel caso di $(G, c) = (S_3, \bar{c})$, dove \bar{c} è il vettore dei pesi dei vertici, come in figura (a).



Per ogni $v \in V(G)$, chiamiamo $V_v \subseteq V(G')$ l'insieme dei nodi di G' ottenuti replicando v , compreso v . Si vede che $\{V_v : v \in V(G)\}$ è una partizione dei nodi di G' , e notiamo che $|V_v| = c_v$.

1. Mostriamo che $\omega(G, c) = \omega(G')$. In particolare, mostriamo che per ogni clique di cardinalità massima $\omega(G')$ in G' esiste una clique di peso $\omega(G')$ in G , e che per ogni clique di peso massimo $\omega(G, c)$ in G esiste una clique di cardinalità $\omega(G, c)$ in G' .

Sia K' una clique di cardinalità $\omega(G')$ in G' . Si vede che per ogni $u \in K'$ con $u \in V_v$, deve essere $V_v \subseteq K'$. Infatti, sia per assurdo $w \in V_v \setminus K'$. Consideriamo allora $K' \cup \{w\}$: per costruzione di G' , w è adiacente ad ogni vertice di V_v e a tutti i loro vicini, in particolare, w è adiacente a u e a tutti i nodi di $K' \subseteq N(w)$; dunque $K' \cup \{w\}$ è una clique di G' di cardinalità strettamente maggiore di $\omega(G')$, il che costituisce una contraddizione. Allora

$$\omega(G') = |K'| = \sum_{v \in K' \cap V(G)} |V_v| = \sum_{v \in K' \cap V(G)} c_v.$$

Si vede che $K' \cap V(G)$ è una clique di G (è un sottografo indotto di K' , che è una clique) e ha peso $\sum_{v \in K' \cap V(G)} c_v$, come si voleva.

Sia ora K una clique di peso $\omega(G, c)$ in G . Per come funziona la replicazione, è banale notare che $\bigcup_{v \in K} V_v$ è una clique di G' . Inoltre,

$$\left| \bigcup_{v \in K} V_v \right| = \sum_{v \in K} |V_v| = \sum_{v \in K} c_v = \omega(G, c)$$

come si voleva.

2. Mostriamo che $\chi(G, c) = \chi(G')$. In particolare, mostriamo che ad ogni colorazione c -ammissibile di G' con t colori, corrisponde una colorazione ammissibile di G con t colori, e viceversa.

Coloriamo in modo c -ammissibile i vertici di G . Per ogni $v \in V(G)$, assegnamo ad ogni vertice di $V_v \subseteq V(G')$ uno dei colori di R_v ($|V_v| = c_v = |R_v|$), e mostriamo che la colorazione di G' così ottenuta (che usa lo stesso numero di colori di quella di G) è ammissibile. Siano $v', u' \in V(G')$ adiacenti. Siano $v' \in V_v$ e $u' \in V_u$ con $v, u \in V(G)$. Notiamo che per costruzione di G' si ha che $N_{G'}(v') = \bigcup_{w \in N_G(v) \cup \{v\}} V_w$. Allora, visto che v_1 e v_2 sono adiacenti, si ha che $u \in N_G(v)$, quindi $R_v \cap R_u = \emptyset$. A v' è stato assegnato uno dei colori di R_v e a u' uno di quelli di R_u , e questi due insiemi non hanno colori in comune, dunque v' e u' sono colorati con colori distinti.

Coloriamo in modo ammissibile i vertici di G' . Per ogni $v \in V(G)$, assegniamo a v tutti i colori dei nodi di $V_v \subseteq V(G')$. Mostriamo che la colorazione di G così ottenuta (che usa lo stesso numero di colori di quella di G') è c -ammissibile. Ogni vertice v di G riceve esattamente c_v colori, perchè i nodi di V_v sono tutti adiacenti fra loro in G' e dunque hanno ricevuto colori tutti distinti, e $|V_v| = c_v$. Siano $v, u \in V(G)$ adiacenti in G . Allora, come notato precedentemente, per ogni $v' \in V_v$ e per ogni $u' \in V_u$, v' e u' sono adiacenti in G' , cioè sono stati assegnati loro colori distinti. Allora si ha $R_v \cap R_u = \emptyset$ come si voleva.

□

Proposizione 2.2.2. *Sia $G = (V, E)$ un grafo perfetto. Allora $P_{STAB}(G) = P_{QSTAB}(G)$.*

Dimostrazione. Sia $|V| = n$. Sappiamo già che per ogni grafo vale $P_{STAB}(G) \subseteq P_{QSTAB}(G)$.

Prendiamo $x \in P_{QSTAB}(G)$ e mostriamo che $x \in P_{STAB}(G)$. Per la densità di \mathbb{Q} in \mathbb{R} , esiste una successione di vettori $\{x_n\}_{n \in \mathbb{N}} \subseteq P_{QSTAB}(G) \cap \mathbb{Q}^n$ tale che $\lim_{n \rightarrow \infty} x_n = x$. Se mostriamo che $x_n \in P_{STAB}(G)$ per ogni $n \in \mathbb{N}$, possiamo concludere che $x \in P_{STAB}(G)$ perché quest'ultimo è un chiuso di \mathbb{R}^n .

Sia dunque $y \in P_{QSTAB}(G) \cap \mathbb{Q}^n$. Notiamo che y ha tutte le entrate maggiori o uguali a zero. Ricordiamo che, essendo $y \in P_{QSTAB}(G)$, si ha che per ogni clique H di G vale $\sum_{v \in H} y_v \leq 1$. Sia $q > 0$ il minimo comunque multiplo fra i denominatori delle entrate di y . Allora $qy \in \mathbb{Z}_{\geq 0}^n$. Consideriamo il grafo G con vettore dei pesi dei vertici qy . Sia K una clique di peso massimo di (G, qy) , che dunque in particolare è una clique di G . Allora

$$\omega(G, qy) = \sum_{v \in K} qy_v = q \sum_{v \in K} y_v \leq q. \quad (2.1)$$

Sia G' il grafo non pesato ottenuto a partire da (G, qy) come nella Proposizione 2.2.1, da cui sappiamo che $\omega(G, qy) = \omega(G')$ e $\chi(G, qy) = \chi(G')$. Inoltre, grazie alla Proposizione 2.1.1, sappiamo che G' è ancora perfetto, perché si ottiene da G per replicazione di vertici, e dunque $\omega(G') = \chi(G')$. Da queste due osservazioni si ottiene che $\omega(G, qy) = \chi(G, qy)$. Allora dalla (2.1) abbiamo che $\chi(G, qy) \leq q$. Cioè, esiste una colorazione qy -ammissibile dei vertici di G . In altre parole, esiste una famiglia di insiemi indipendenti S_1, \dots, S_q di G (in generale non a due a due disgiunti) tale che ogni $v \in V(G)$ appartiene esattamente a qy_v di loro. Cioè possiamo scrivere

$qy = \sum_{i=1}^q \chi[S_i]$, da cui

$$y = \frac{1}{q} \sum_{i=1}^q \chi[S_i]$$

ma allora abbiamo scritto y come combinazione convessa di vettori caratteristici di insiemi indipendenti di G . Cioè $y \in P_{STAB}(G)$, come si voleva. \square

Dunque abbiamo mostrato che, se G è un grafo perfetto,

$$P_{STAB}(G) = \left\{ x \in \mathbb{R}^n : \sum_{v \in K} x_v \leq 1 \ \forall K \text{ clique di } G, x_v \geq 0 \ \forall v \in V \right\}$$

dove chiamiamo le disuguaglianze del primo tipo *disuguaglianze di clique* e quelle del secondo *disuguaglianze di non negatività*.

Lemma 2.2.1. *Sia G un grafo. Siano H, K due clique di G tali che $H \subset K$ (strettamente contenuta). Allora la disuguaglianza di clique H non definisce una faccetta di $P_{QSTAB}(G)$.*

Dimostrazione. Basta notare che la disuguaglianza di clique H , data da $\sum_{v \in H} x_v \leq 1$, è dominata da quella di clique K , data da $\sum_{v \in K} x_v \leq 1$, che è un'osservazione banale. \square

Lemma 2.2.2. *Per ogni grafo G , le disuguaglianze di clique massimale e di non negatività definiscono faccette di $P_{STAB}(G)$.*

Dimostrazione. Mostriamo che i vincoli di clique massimale definiscono faccette di $P_{STAB}(G)$. Sia K clique massimale di G . Considero i punti corrispondenti ai vettori caratteristici degli insiemi indipendenti dati da $\{x_v\} \ \forall v \in K$ e $\{x_u, x_{v_u}\} \ \forall v \notin K$ dove x_{v_u} è un nodo di K tale che non è adiacente a x_u (esiste perchè altrimenti $K \cup \{u\}$ è clique di G che contiene K). Questi sono $n = |V(G)|$ punti affini indipendenti appartenenti a $P_{STAB}(G) \cap \{\sum_{v \in K} x_v = 1\}$. Mostriamo che i vincoli di non negatività definiscono faccette di $P_{STAB}(G)$. Sia $i \in \{1, \dots, k\}$ fissato. Considero i punti corrispondenti ai vettori caratteristici degli insiemi indipendenti dati da \emptyset e $\{x_{v_j}\} \ \forall j \in (\{1, \dots, k\} \setminus \{i\})$. Questi sono $n = |V(G)|$ punti affini indipendenti appartenenti a $P_{STAB}(G) \cap \{x_{v_i} = 0\}$. \square

Teorema 2.2.1. *Sia G perfetto. Allora una descrizione completa e non ridondante del politopo degli insiemi indipendenti di G è data da*

$$P_{STAB}(G) = \left\{ x \in \mathbb{R}^n : \sum_{v \in K} x_v \leq 1 \ \forall K \text{ clique massimale di } G, x_v \geq 0 \ \forall v \in V \right\}.$$

Dimostrazione. Sappiamo che per G perfetto $P_{STAB}(G) = P_{QSTAB}(G)$. Dal Lemma 2.2.1 e dal Teorema 1.2.1 sappiamo che possiamo rimuovere le disequazioni di clique non massimale dalla descrizione di $P_{QSTAB}(G)$. Abbiamo così mostrato che la descrizione data nell'enunciato è completa per $P_{STAB}(G)$. Sempre dal Teorema 1.2.1, visto che, dalla Proposizione 2.2.2, sappiamo che le disequazioni di clique massimale e di non negatività definiscono faccette di $P_{STAB}(G)$, possiamo concludere che la descrizione è anche non ridondante. \square

Capitolo 3

Il politopo dei matching totali

In questo capitolo introdurremo il concetto di matching totale, di grafo totale e di politopo dei matching totali di un grafo. Dimosteremo inoltre alcuni risultati riguardanti le faccette del politopo dei matching totali di un grafo qualsiasi. In particolare, mostreremo che le disuguaglianze di arco totale, di vertice totale, di non negatività, di clique massimale, di 3-ciclo e di biclique bilanciata indotta, definiscono faccette del politopo dei matching totali. Seguiremo in parte la trattazione di Ferrarini e Gualandi in [5].

3.1 Matching totali e grafo totale

Sia $G = (V, E)$ un grafo. Sia $|V| = n$, $|E| = m$. Sia $D(G) = V(G) \cup E(G)$ l'insieme dei suoi elementi.

Definizione 3.1.1 (Matching totale). *Diciamo che $T \subseteq D$ è un matching totale di G se per ogni scelta di t_1, t_2 in T , t_1 e t_2 sono indipendenti fra loro, cioè:*

- Se t_1 e t_2 sono archi di G , allora non sono incidenti in G ;
- Se t_1 e t_2 sono nodi di G , allora non sono adiacenti in G ;
- Se t_1 è un nodo di G e t_2 è un arco di G , allora t_1 non è estremo di t_2 .

Diremo inoltre che due elementi $d_1, d_2 \in D$ sono adiacenti se e solo se non sono indipendenti.

Notiamo che, per ogni nodo $v \in V$, l'insieme degli elementi adiacenti a v è $N(v) \cup \delta(v)$ e che, per ogni arco $e = vu \in E$, l'insieme degli elementi adiacenti a e è $(\{v, u\} \cup \delta(v) \cup \delta(u)) \setminus \{e\}$.

Definizione 3.1.2 (Grafo totale). *Il grafo totale $T(G) = (D, F)$ di G è il grafo i cui vertici sono gli elementi di G (nodi e archi), e in cui d_1, d_2 in D sono adiacenti (come nodi) se e solo se sono adiacenti come elementi di G .*

Si nota facilmente che il grafo lineare $L(G)$ di G è un sottografo di $T(G)$; infatti, i nodi di $L(G)$ sono gli archi di G , che sono un sottoinsieme dei vertici di $T(G)$, e due nodi di $L(G)$ sono adiacenti se e solo se sono incidenti come archi di G .

Equivalentemente, dunque, è possibile definire il grafo totale anche nel seguente modo: il grafo totale di G , $T(G)$, è il grafo dato da $T(G) = (D, F)$ con $D = V(G) \cup V(L(G))$ e $F = E(G) \cup E(L(G)) \cup \{ve : v \in V(G), e \in V(L(G)), v \text{ è estremo di } e \text{ in } G\}$.

Di seguito rappresentiamo il grafo P_3 (il cammino di lunghezza 3) e il suo grafo totale, mettendo in evidenza la costruzione appena descritta: in rosso gli elementi del grafo P_3 , in giallo quelli di $L(P_3)$ (come sottografi di $T(P_3)$) e in nero gli archi aggiunti per ogni coppia di arco e nodo estremo.



La definizione di grafo totale permette una formulazione equivalente del concetto di matching totale. Dalla definizione di elementi indipendenti in un grafo G e da quella di grafo totale $T(G)$, si evince infatti che T è un matching totale di G se e solo se è un insieme indipendente di $T(G)$.

Definizione 3.1.3 (Matching totale perfetto). *Diciamo che un matching totale T di G è perfetto se ogni vertice di G è coperto da T , cioè se ogni vertice di G o è in T , oppure uno degli archi in $\delta(v)$ è in T .*

Il seguente risultato è presente in [5] (Proposizione 7). Di seguito ne forniamo una dimostrazione semplificata.

Proposizione 3.1.1. *Ogni grafo G ammette un matching totale perfetto.*

Dimostrazione. Consideriamo un matching massimale M di $G = (V, E)$ (ad esempio, prendendo iterativamente archi di G in modo che siano disgiunti sui nodi). Chiamiamo $U \subseteq V$ l'insieme dei nodi di G che non sono coperti da M . Allora mostriamo che $M' = M \cup U$ è un matching totale perfetto. Ovviamente ogni vertice di G è coperto da M' . Devo mostrare che M' è un matching totale.

Siano $p, q \in M'$:

1. Se p e q sono archi in G , allora erano entrambi in M , che è un matching di G , e dunque p e q sono indipendenti.
2. Se p e q sono nodi in G , allora erano entrambi non coperti da M . Supponiamo che non siano indipendenti, cioè che siano adiacenti. Ma allora esisterebbe un arco $pq \in E$ che non stava in M , disgiunto sui nodi da tutti gli archi in M . Cioè M non era massimale, che è assurdo.
3. Se p è un nodo in G , e q è un arco in G , non possono essere uno incidente all'altro, perchè i nodi in M' sono solo quelli non coperti dagli archi in M' .

Allora M' è un matching totale di G , ed è perfetto. □

In generale, un matching totale massimo non è perfetto, e un matching totale perfetto non è massimo (a differenza di quanto accade con i matching).

Infatti, consideriamo C_4 , il ciclo di lunghezza 4:

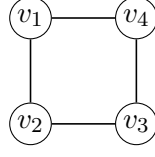


Figura 3.2: C_4

Si vede facilmente che il matching totale dato da $M = \{v_1, v_3\}$ non è perfetto, ma mostreremo alla Proposizione 3.3.1 che il matching massimo di C_4 ha proprio cardinalità 2.

Viceversa, consideriamo P_4 , il cammino di lunghezza 4:

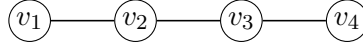


Figura 3.3: P_4

Si vede facilmente che il matching totale dato da $M = \{v_1v_2, v_3v_4\}$ è perfetto, ma non è massimo ($M' = \{v_1, v_2v_3, v_4\}$ ha cardinalità maggiore).

Dato un grafo $G = (V, E)$, nella trattazione che segue usiamo la seguente notazione: con z_d indichiamo il valore della variabile associata all'elemento $d \in D = V \cup E$, con x_v quello associato a $v \in V$ e con y_e quello associato a $e \in E$.

Il TMP (Total Matching Problem) è il problema di trovare, dato un grafo G , il matching totale di cardinalità massima di G . Dato quanto osservato in relazione al grafo totale di G , il TMP si può anche esprimere come il problema di trovare, dato un grafo G , l'insieme indipendente di cardinalità massima di $T(G)$.

Il TMP si può formulare come il seguente programma lineare intero:

$$\begin{aligned}
 \max \quad & \sum_{v \in V} x_v + \sum_{e \in E} y_e \\
 \text{t.c.} \quad & x_v + \sum_{e \in \delta(v)} y_e \leq 1 & \forall v \in V \\
 & x_v + x_w + y_e \leq 1 & \forall e = vw \in E \\
 & x_v, y_e \in \{0, 1\} & \forall v \in V, e \in E
 \end{aligned} \tag{3.1}$$

Dato un grafo $G = (V, E)$, indichiamo con $\alpha(G)$ la cardinalità massima di un insieme indipendente di G , e con $\alpha'(G)$ la cardinalità massima di un matching di G . Indicheremo con $\alpha_T(G)$ la cardinalità massima di un matching totale di G . Si nota facilmente che, per ogni grafo G , $\alpha_T(G) \geq \max\{\alpha(G), \alpha'(G)\}$ (perchè matching e insiemi indipendenti sono anche matching totali).

3.2 Il politopo dei matching totali

Definizione 3.2.1 (Politopo dei matching totali). *Diciamo politopo dei matching totali di un grafo G l'involuppo convesso dei vettori caratteristici dei matching totali di G (come sottoinsiemi dell'insieme degli elementi di $D(G)$), nel senso della Definizione 2.2.1), cioè*

$$P_T(G) = \text{conv}\{\chi[T] \in \{0,1\}^{n+m} : T \subseteq D \text{ è un matching totale di } G\}.$$

In analogia con il caso del politopo degli insiemi indipendenti, possiamo aspettarci che anche il politopo dei matching totali non sia descritto in modo completo dal solo rilassamento lineare della regione ammissibile del TMP ((3.1)), cioè

$$x_v + \sum_{e \in \delta(v)} y_e \leq 1 \quad \forall v \in V \quad (3.2)$$

$$x_v + x_w + y_e \leq 1 \quad \forall e = vw \in E \quad (3.3)$$

$$x_v, y_e \geq 0 \quad \forall v \in V, e \in E \quad (3.4)$$

Infatti, consideriamo ad esempio il ciclo C_4 e assegnamo ad ogni variabile z_d per $d \in D(C_4)$ il valore di $\frac{1}{3}$, cioè $x_v = \frac{1}{3} \forall v \in V(C_4)$ e $y_e = \frac{1}{3} \forall e \in E(C_4)$. Si vede facilmente che il vettore così formato appartiene alla regione descritta sopra, e che ne è vertice (tutte le disuguaglianze del tipo (3.2) e (3.3) sono attive, sono esattamente $n + m$ e sono linearmente indipendenti, cioè individuano una soluzione di base). Ma ovviamente questa soluzione non corrisponde ad un total matching ammissibile, in quanto non ha entrate intere.

In generale dunque, $P_T(G)$ è strettamente contenuto nella regione definita dalle disequazioni delle famiglie (3.2) (chiamiamo le disuguaglianze di questo tipo *disuguaglianze di vertice totale*), (3.3) (chiamiamo le disuguaglianze di questo tipo *disuguaglianze di arco totale*) e (3.4) (chiamiamo le disuguaglianze di questo tipo *disuguaglianze di non negatività*).

Diamo ora alcuni risultati sulle faccette del politopo, in modo da avvicinarci ad una sua descrizione completa tramite un sistema disequazioni. Se riuscissimo a descrivere in modo completo il politopo dei matching totali tramite un sistema lineare, potremmo usare i metodi della programmazione lineare per risolvere il TMP. Tuttavia, come nel caso del politopo degli insiemi indipendenti (e dei matching) in generale per descrivere $P_T(G)$ è necessario un numero esponenziale di disequazioni (rispetto alla dimensione del grafo).

Notiamo intanto che il politopo dei matching totali ha dimensione massima.

Proposizione 3.2.1. *Per ogni grafo G , $P_T(G)$ ha dimensione massima, cioè $\dim(P_T(G)) = n + m$.*

Dimostrazione. Si nota facilmente che l'insieme vuoto è un matching totale di G , e che ogni singolo elemento di D costituisce un matching totale di G (infatti avendo un solo elemento di D , o nessuno, non ci possono essere relazioni di incidenza o di adiacenza). Dunque abbiamo $n+m+1$ matching totali i cui vettori caratteristici sono l'origine e ogni vettore della base canonica

di \mathbb{R}^{n+m} , che corrispondono dunque a $n + m + 1$ punti affini indipendenti, tutti appartenenti a $P_T(G)$. Dunque $P_T(G)$ ha dimensione $n + m$. \square

Questo implica che, dato un sistema di disequazioni che definiscono faccette di $P_T(G)$, il sistema è non ridondante, e dunque in particolare è un sistema minimale per definire $P_T(G)$.

Proposizione 3.2.2. *Sia G un grafo, e $T(G)$ il suo grafo totale. Allora $P_T(G) = P_{STAB}(T(G))$.*

Dimostrazione. Basta notare che ogni elemento di D corrisponde biunivocamente ad un nodo di $T(G)$, e dunque ogni insieme indipendente di $T(G)$ è un matching totale di G . Allora i vertici di $P_T(G)$ sono i vertici di $P_{STAB}(T(G))$, e un involucro convesso è unicamente determinato dai vettori che lo generano. \square

Cominciamo ora a guardare risultati relativi alla struttura geometrica di $P_T(G)$, in particolare cioè ne studiamo le faccette.

Proposizione 3.2.3. *Le disequazioni di vertice totale per $v \in V$ con $d(v) \geq 2$, di arco totale e di non negatività definiscono delle faccette di $P_T(G)$.*

Dimostrazione. Le disuguaglianze sono banalmente valide per ogni matching totale, e dunque sono valide per $P_T(G)$.

Sia $W = T(G) = (D, F)$ il grafo totale associato a G . Sia $v \in V \subseteq D$, $e = xy \in E \subseteq D$. Per come è costruito W , i sottografi indotti $W[\delta(v) \cup \{v\}]$ e $W[e \cup \{x, y\}]$ corrispondono a delle clique in W , in particolare il primo è $K_{|\delta(v)|+1}$ e il secondo K_3 . Inoltre $\delta(v) \cup \{v\} \subseteq D$ (se $d(v) \geq 2$) e $e \cup \{x, y\}$ sono clique massimali in W , infatti:

1. Nel primo caso, supponiamo che la clique $C = \delta(v) \cup \{v\}$ sia contenuta in una clique di cardinalità maggiore U in W . Prendiamo $u \in U \setminus C$. Se u è un arco in G , allora u è adiacente a v in W (perché U è clique in W che contiene C), cioè $u \in \delta(v) \subseteq E$, ma avevamo scelto $u \notin C$, che è dunque assurdo. Se invece u è un nodo in G , allora u è adiacente a ogni arco in $\delta(v) \subseteq D$; ma allora ogni arco in $\delta(v)$ ha come estremi v e u , tutti gli archi di $\delta(v)$ coincidono, dunque $|\delta(v)| = 1$, che è assurdo.
2. Nel secondo caso, supponiamo che la clique $C' = e \cup \{x, y\}$ sia contenuta in una clique di cardinalità maggiore U' in W . Prendiamo $u \in U' \setminus C'$. Se u è un arco in G , allora u è adiacente a x e a y in W (perché U' è clique in W che contiene C'), e dunque $u = xy$ in G , cioè u coincide con e , ma $e \in C'$ e $u \notin C'$, che è un assurdo. Se invece u è un nodo in G , allora u è adiacente a e in W , ma allora e ha tre estremi distinti in G , che è un assurdo.

Allora $\delta(v) \cup \{v\} \subseteq D$ (se $|\delta(v)| \geq 2$) e $e \cup \{x, y\}$ sono clique massimali in W . Dal Lemma 1.1 sappiamo che le disequazioni di non negatività e di clique massimale definiscono faccette di $P_{STAB}(W) = P_T(G)$. \square

A differenza di quanto dichiarato in [5] (Proposizione 5), notiamo che le disequazioni di vertice totale non possono definire faccette di $P_T(G)$ per $v \in V$ con $d(v) = 1$. Prendiamo $v \in V$ con $d(v) = 1$ e chiamiamo e l'unico arco incidente a v , e u il suo altro estremo. Consideriamo la disequazione di vertice totale $\gamma_v : x_v + y_e \leq 1$ e la disequazione di arco totale $\gamma_e : x_v + x_u + y_e \leq 1$,

entrambe valide per $P_T(G)$. Si vede che γ_v è dominata da γ_e , e dunque non può definire una faccetta di $P_T(G)$, per la Proposizione 1.2.1.

Forniamo ora altre classi di disequazioni che definiscono faccette di $P_T(G)$, per un generico grafo G .

Proposizione 3.2.4. *Sia G un grafo e sia K_h una clique massimale di G , con $h \geq 3$. Allora, la disuguaglianza di clique*

$$\sum_{v \in K_h} x_v \leq 1 \quad (3.5)$$

definisce una faccetta di $P_T(G)$.

Dimostrazione. Intanto è facile notare che la disequazione (3.5) è valida per $P_T(G)$. Per mostrare che la disuguaglianza definisce una faccetta di $P_T(G)$, dobbiamo mostrare $n + m$ punti affini indipendenti contenuti nella faccia indotta da (3.5). Per ogni $u \in V(G) \setminus K_h$ prendiamo $v_u \in K_h$ tale che v_u e u non sono adiacenti (troviamo sempre v_u con questa proprietà, perchè la clique K_h è massimale). Consideriamo ora i matching totali $\{v\} \ \forall v \in K_h$ e $\{u, v_u\} \ \forall u \in V(G) \setminus K_h$. Questi sono n matching totali i cui vettori caratteristici soddisfano ad uguaglianza la (3.5), e sono banalmente linearmente indipendenti. Abbiamo dunque trovato n punti affini indipendenti che appartengono alla faccia indotta da (3.5).

Ora fissiamo $u, v, w \in K_h$. e consideriamo i total matching $\{v, e\} \ \forall e \in E \setminus \delta(v)$, $\{w, e\} \ \forall e \in \delta(v) \setminus \{vw\}$, e $\{u, vw\}$. Questi sono m matching totali (ne abbiamo uno per ogni arco in E) i cui vettori caratteristici soddisfano ad uguaglianza la (3.5), e sono banalmente linearmente indipendenti.

Allora abbiamo trovato $n + m$ punti affini indipendenti (è facile, ad esempio scriverli in una matrice in forma a scala) che appartengono alla faccia indotta da (3.5). \square

Notiamo che le disequazioni di tipo (3.5) con $h = 2$ non possono definire faccette. Prendiamo una clique massimale di G , $K_2 = \{v, u\}$. La disequazione di clique massimale corrispondente è $\gamma_K : x_v + x_u \leq 1$. Consideriamo la disuguaglianza di arco totale $\gamma_e : x_v + x_u + y_e \leq 1$ (dove $e = uv$). Sia γ_K che γ_e sono valide per $P_T(G)$, e si vede che γ_K è dominata da γ_e , e dunque non può definire una faccetta di $P_T(G)$, per la Proposizione 1.2.1.

Sarà utile nella trattazione seguente conoscere una caratterizzazione delle clique massimali di $T(G)$.

Proposizione 3.2.5. *Sia $G = (V, E)$ un grafo e $T(G)$ il suo grafo totale. Allora le clique massimali di $T(G)$ sono tutte e sole le seguenti:*

1. $\{uv, u, v\}$ per ogni $uv \in E$;
2. $\delta(v) \cup \{v\}$ per ogni $v \in V$ con $d(v) \geq 2$;
3. $\{uv, vw, wu\}$ per ogni ciclo di lunghezza tre $\{u, v, w\}$ in G ;
4. $H \subseteq V(T(G))$ per ogni $H \subseteq V(G)$ clique massimale di G con $|H| \geq 3$.

Dimostrazione. Abbiamo già visto che le 1. e 2. sono clique massimali di $T(G)$. Si vede facilmente che le 3. lo sono, perché nessun altro vertice di $T(G)$ è adiacente a tutti quelli corrispondenti agli archi uv, vw, wu di G . Le 4. sono clique di $T(G)$, e sono massimali in $T(G)$ perché se non lo fossero non definirebbero una facceta di $P_T(G) = P_{STAB}(T(G))$ (per il Corollario 2.2.1), ma sappiamo dalla Proposizione 3.2.4 che non è così.

Mostriamo ora che quelle descritte sono le uniche clique massimali di $T(G)$. Sia $K \subseteq V(T(G))$ una clique massimale di $T(G)$. Mostriamo che K appartiene ad una delle quattro famiglie descritte sopra.

CASO A. Supponiamo che la clique K contenga solo elementi di V , cioè solo nodi di G . Se contiene esattamente due nodi, vuol dire che i due nodi sono adiacenti, allora l'insieme formato dai due nodi e dall'arco che li unisce è una clique che contiene strettamente K , il che è un assurdo. Deve dunque essere $|K| \geq 3$. Ma allora $K \subseteq V(G)$ è una clique massimale di G con $|K| \geq 3$, cioè K è del tipo 4.

CASO B. Supponiamo che la clique K contenga solo elementi di E , cioè solo archi di G . Quindi per ogni scelta di $e, f \in K$ e, f devono essere archi incidenti in G . Prendiamo $e, f \in K$ e sia u il nodo in cui si incontrano (quindi siano $e = uv$ e $f = uw$). Se gli archi di K sono tutti adiacenti allo stesso nodo v , allora l'insieme formato dagli archi della clique e dal nodo in cui si incontrano è una clique che contiene strettamente K , che è un assurdo. Prendiamo allora un arco $g \in K$ che non è adiacente a v . Ma allora l'unico modo perché g sia incidente sia a e che a f è che g sia l'arco $g = vw$. Ma ora è impossibile trovare un quarto arco incidente a tutti i precedenti, che non sia uno dei precedenti. Dunque $|K| = 3$, e in particolare K è del tipo 3.

CASO C. Supponiamo che la clique K contenga almeno un nodo e almeno un arco di G , cioè almeno un elemento $v \in V$ e almeno un elemento $e \in E$. Ovviamente e e v devono essere adiacenti, quindi v deve essere un estremo di e . Non può essere che K contenga solo questi due elementi, perché l'insieme formato da e, v e dall'altro estremo di e sarebbe una clique che contiene strettamente K . Dunque $|K| \geq 3$.

Se K contiene un altro nodo di G , cioè un $u \in V$, perché u sia adiacente sia a e che a v , u deve essere l'altro estremo di e . Ma allora K contiene $\{u, v, uv\}$ che sappiamo essere una clique massimale di $T(G)$, e dunque l'inclusione è un'uguaglianza, cioè K è del tipo 1.

Se invece K contiene un altro arco di G , cioè un $f \in E$, perché f sia adiacente sia a e che a v , f deve, come e , avere come estremo v . A questo punto nessun nodo di V , oltre a v , può essere contenuto in K , perché dovrebbe essere estremo sia di e che di f , ma questi ultimi hanno già un estremo in comune, e dunque implicherebbe che $e = f$. Allora in K ci possono essere solo altri archi di G che hanno un estremo in v . Cioè K è del tipo 2. \square

Sapevamo già che le disequazioni associate alle clique massimali di tipo 1., 2., e 4. definiscono faccette di $P_T(G)$ per ogni grafo G . Dalla Proposizione 3.2.5 sappiamo ora che, per ogni ciclo di lunghezza tre $C_3 = \{v_1, v_2, v_3\}$ in G , la disequazione

$$y_{v_1 v_2} + y_{v_2 v_3} + y_{v_3 v_1} \leq 1$$

definisce una facceta di $P_T(G)$ (le chiamiamo *disequazioni di 3-ciclo*).

Notiamo che le disequazioni di arco totale possono essere viste come indotte dalla bicli-

que $K_{1,1}$. Generalizziamo questo risultato ad altre biclique. Chiameremo una biclique $K_{r,s}$ *bilanciata* se $r = s$, *non bilanciata* altrimenti.

Proposizione 3.2.6. *Sia G un grafo, e $K_{r,r}$ una biclique bilanciata indotta di G . Allora la disuguaglianza di biclique bilanciata*

$$\sum_{v \in V(K_{r,r})} x_v + \sum_{e \in E(K_{r,r})} y_e \leq r \quad (3.6)$$

definisce una faccetta di $P_T(G)$.

Dimostrazione. Siano R ed S i due insiemi indipendenti di vertici in $K_{r,r}$. Cioè $R = \{v_1, \dots, v_r\}$, $S = \{w_1, \dots, w_r\}$ e $R \cup S = V(K_{r,r})$. La disuguaglianza di biclique bilanciata è valida per $P_T(G)$ perché mostreremo che il matching totale massimo di $K_{r,r}$ ha cardinalità r (Proposizione 6.0.1). Sia $F = \{z \in P_T(C_k) : \lambda^T z = \lambda_0\}$ una faccetta di $P_T(G)$ tale che $\tilde{F} = \{z \in P_T(C_k) : \tilde{\lambda}^T z = \tilde{\lambda}_0\} \subseteq F$, dove la disuguaglianza $\tilde{\lambda}^T z \leq \tilde{\lambda}_0$ corrisponde alla disuguaglianza di biclique bilanciata per $K_{r,r}$ (cioè $\tilde{\lambda}$ è il vettore 0,1 con entrata non nulla se e solo se l'elemento corrispondente è in $K_{r,r}$, e $\tilde{\lambda}_0 = r$). Vogliamo provare che $F = \tilde{F}$, cioè che esiste un $a \in \mathbb{R}$ tale che $\lambda = a\tilde{\lambda}$ e $\lambda_0 = a\tilde{\lambda}_0$.

Sia $e = uv \in E[K_{r,r}]$ e definiamo i seguenti matching totali $T_v = (S \setminus \{v\}) \cup \{e\}$ e $T_u = (R \setminus \{u\}) \cup \{e\}$. Notiamo S, T_v e T_u sono matching totali di $K_{r,r}$ (e di G) e che hanno tutti cardinalità r (sono cioè massimi in $K_{r,r}$), e dunque $\chi[S], \chi[T_v], \chi[T_u] \in \tilde{F} \subseteq F$. Allora abbiamo che $\lambda^T \chi[S] = \lambda^T \chi[T_v] = \lambda^T \chi[T_u] = \lambda_0$. Deduciamo dunque che $\lambda_u = \lambda_v = \lambda_e$, dove λ_d è l'entrata di λ corrispondente all'elemento d di G . Avevamo scelto arbitrariamente l'arco e , dunque $\lambda_u = \lambda_v = \lambda_{uv} \forall uv \in E[K_{r,r}]$. Ma allora esiste $a \in \mathbb{R}$ tale che $\lambda_d = a$ per ogni elemento (nodo o arco) di $K_{r,r}$.

Ora consideriamo $w \notin (R \cup S \cup E[K_{r,r}])$ un elemento di G . Sia M un matching perfetto di $K_{r,r}$. Almeno uno fra $T_1 = R \cup \{w\}$, $T_2 = S \cup \{w\}$ e $T_3 = M \cup \{w\}$ è un matching totale. Senza perdere di generalità supponiamo che T_1 sia matching totale. Allora si vede che $\chi[T_1] \in \tilde{F} \subseteq F$, da cui ricordando che $T_1 = R \cup K_{r,r}$ e che $\chi[R] \in F$, si ha che $\lambda_w = 0$ per ogni elemento (nodo o arco) che non è in $K_{r,r}$.

Allora abbiamo che $\lambda = a\tilde{\lambda}$. Prendiamo $x \in \tilde{F}$. Ricordando che $\tilde{F} \subseteq F$, si ha $\lambda_0 = \lambda^T x = a\tilde{\lambda}^T x = a\tilde{\lambda}_0$. Dunque $(\lambda, \lambda_0) = a(\tilde{\lambda}, \tilde{\lambda}_0)$ come si voleva. \square

Non vale l'analogo per le biclique non bilanciate. Cioè, sia $K_{r,s}$ una biclique non bilanciata indotta di G grafo, con r strettamente maggiore di s . Allora in generale la disequazione

$$\sum_{v \in V(K_{r,s})} x_v + \sum_{e \in E(K_{r,s})} y_e \leq s$$

è valida per $P_T(G)$ (mostreremo che un matching totale massimo di $K_{r,s}$ ha cardinalità s , alla Proposizione 6.0.1) ma non definisce una faccetta di G . Infatti la disequazione può essere scritta come somma di

$$\sum_{v \in V(K_{r,r})} x_v + \sum_{e \in E(K_{r,r})} y_e \leq r$$

e di

$$\sum_{e \in \delta(v)} y_e + x_w \leq 1, \quad \forall w \in V(K_{r,s}) \setminus V(K_{r,r})$$

che sono tutte valide per per $P_T(G)$, e dunque, per il Corollario 1.2.1, la disequazione di biclique non bilanciata non definisce una faccetta di $P_T(G)$.

3.3 Cicli

Aiutandoci con il Lemma seguente, dimostriamo la formula per la cardinalità massima di un matching totale di un ciclo, trovata in [6] (Teorema 3).

Lemma 3.3.1. *Sia P un cammino, sottografo di un grafo G . Sia $D = \{d_1, \dots, d_r\}$ l'insieme degli elementi (nodi e archi) di P , indicizzati lungo P . Allora due elementi d_i e d_j sono indipendenti fra loro in P se e solo se $|j - i| \geq 3$ (cioè se, lungo il cammino, ci sono almeno due elementi fra d_i e d_j).*

Dimostrazione. Se d_i e d_j sono due nodi, sono indipendenti se e solo se non sono adiacenti, cioè se e solo se ci sono almeno tre elementi (due archi e un nodo) lungo P fra d_i e d_j . Se d_i e d_j sono due archi, sono indipendenti se e solo se non sono adiacenti (come archi), cioè se e solo se ci sono almeno tre elementi (due nodi e un arco) lungo P fra d_i e d_j . Se d_i è un nodo e d_j è un arco, se e solo se d_i non è un estremo di d_j , cioè se e solo se ci sono almeno 2 elementi (un arco e un nodo) lungo P fra d_i e d_j . \square

Proposizione 3.3.1. *Sia $C_n = (V, E)$ il ciclo di lunghezza n . Allora*

$$\alpha_T(C_n) = \left\lfloor \frac{2n}{3} \right\rfloor.$$

Dimostrazione. Sia $D = V \cup E$, e notiamo che $|D| = 2n$. Sia T un matching totale di C_n . Notiamo che ogni vertice in T è un estremo di due archi che non sono in T e che nessun altro vertice in T può essere estremo di uno di questi due archi (altrimenti avremmo in T una coppia di vertici adiacenti). Similmente, ogni arco in T ha come estremi due vertici che non sono in T , e nessun altro arco in T può avere come estremo uno di questi due vertici (altrimenti avremmo in T una coppia di archi incidenti nello stesso vertice). Questo mostra che ad ogni elemento in T corrispondono almeno due elementi in $D \setminus T$ (cioè $|D \setminus T| \geq |T|$). Dunque abbiamo che $|D| = |T| + |D \setminus T| \geq |T| + 2|T|$. Da cui $\frac{|D|}{3} \geq |T|$ per ogni matching totale $|T|$ di C_n , ma $|T|$ è un intero, e $|D| = 2n$, dunque abbiamo

$$\alpha_T(C_n) \leq \left\lfloor \frac{2n}{3} \right\rfloor.$$

Ora, indicizziamo i vertici di C_n lungo il ciclo: $V = \{v_1, \dots, v_n\}$. Come nel caso dei cammini consideriamo il ricoprimento (è una partizione) $\{D_1, \dots, D_h\}$ di D dove $D_1 = \{v_1, v_1v_2, v_2\}$, $D_2 = \{v_2v_3, v_3, v_3v_4\}$ e così via, prendendo ogni volta tre elementi consecutivi lungo il ciclo (fino a che non si incontra l'arco v_nv_0). Si ha $h = \lceil \frac{2n}{3} \rceil$ (D_h contiene uno, due o tre elementi). Consideriamo

il sottoinsieme $T = \{v_1, v_2v_3, v_4, \dots\} \subseteq D$ costruito prendendo il primo elemento (lungo il ciclo) di ogni sottoinsieme D_i della partizione di D con $i \in \{1, \dots, \lfloor \frac{2n}{3} \rfloor\}$, cioè un elemento per ogni insieme della partizione con esattamente tre elementi. Quindi, se $|D_h| \in \{1, 2\}$ (cioè $n \not\equiv 0 \pmod{3}$), allora nessun elemento di T appartiene a D_h . Allora $|T| = \lfloor \frac{2n}{3} \rfloor$. Rimane da mostrare che T è un matching totale di C_n . Consideriamo il cammino P ottenuto da C_n rimuovendo l'arco v_nv_1 ; per costruzione e grazie al Lemma 3.3.1, si ha che $T \setminus \{v_nv_1\}$ è un matching totale di P . Rimane solo da mostrare che v_1 e d sono indipendenti in C_n , dove d è l'ultimo (lungo il ciclo, a partire da v_1) elemento di T . Ma d è il primo elemento di $D_{\lfloor \frac{2n}{3} \rfloor}$, e dunque ci sono sempre almeno due elementi lungo C_n fra d e v_1 (gli altri due elementi di $D_{\lfloor \frac{2n}{3} \rfloor}$, più gli elementi di D_h , se $h \neq \lfloor \frac{2n}{3} \rfloor$). Per il Lemma 3.3.1, v_1 e d sono indipendenti. \square

Nella figura seguente rappresentiamo il ciclo C_6 e un suo matching totale massimo (di cardinalità $\lfloor \frac{2n}{3} \rfloor = 4$).

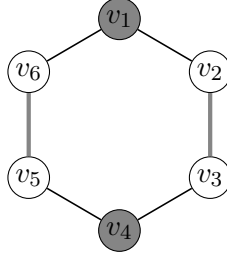


Figura 3.4: C_6

Sia $G = C_4$. Abbiamo visto che esiste un vertice z del politopo individuato dalle disuguaglianze di vertice e arco totale e di non negatività che non corrisponde ad alcun total matching in G ($z = \frac{1}{3}\mathbb{1}$). Dalla Proposizione 3.3.1 sappiamo che, dato un ciclo di lunghezza $k \in \mathbb{N}$, la cardinalità massima di un matching totale è $\lfloor \frac{2k}{3} \rfloor$. Nel caso di C_4 , considerando il vertice z descritto sopra, si ha però

$$\sum_{a \in D=V \cup E} z_a = \frac{8}{3} > 2 = \left\lfloor \frac{2 \cdot 4}{3} \right\rfloor$$

Mostriamo allora che, dato un ciclo (con l'aggiunta di una ipotesi sulla lunghezza del ciclo), la limitazione sulla cardinalità massima del matching totale appena enunciata fornisce una disuguaglianza che definisce una faccetta di $P_T(G)$.

Proposizione 3.3.2. *Sia C_k il ciclo con k nodi, con $k \equiv 1 \pmod{3}$ oppure $k \equiv 2 \pmod{3}$. Allora la disuguaglianza di ciclo $2k/3$ definita da*

$$\sum_{v \in V(C_k)} x_v + \sum_{e \in E(C_k)} y_e \leq \left\lfloor \frac{2k}{3} \right\rfloor \quad (3.7)$$

definisce una faccetta di $P_T(C_k)$.

Dimostrazione. Come motivato sopra, la disequazione è valida per $P_T(C_k)$. Sia H l'iperpiano definito dall'equazione associata alla (3.7). La faccia $\tilde{F} = P_T(C_k) \cap H$ è contenuta in una faccetta F di $P_T(C_k)$. Inoltre, \tilde{F} è non vuota; infatti il vettore caratteristico del matching totale di C_k che corrisponde a un matching totale massimo di C_k appartiene a \tilde{F} .

Sia $F = \{z \in P_T(C_k) : \lambda^T z = \lambda_0\}$ la faccetta di $P_T(C_k)$ tale che $\tilde{F} = \{z \in P_T(C_k) : \tilde{\lambda}^T z = \tilde{\lambda}_0\} \subseteq F$, dove la disuguaglianza $\tilde{\lambda}^T z \leq \tilde{\lambda}_0$ corrisponde alla (3.7) (nota che $\tilde{\lambda} = \mathbb{1}$). Vogliamo provare che $F = \tilde{F}$, cioè che esiste $a \in \mathbb{R}$ tale che $\lambda = a\tilde{\lambda}$ e $\lambda_0 = a\tilde{\lambda}_0$. Distinguiamo due casi in base alla parità del ciclo. Indicizziamo i vertici $V(C_k) = \{v_0, \dots, v_{k-1}\}$ in modo che v_i sia adiacente a v_{i-1} per $i = 0, \dots, n-1 \bmod k$ e gli archi $E(C_k) = \{e_0, \dots, e_{k-1}\}$, in modo che $e_i = v_i v_{i+1}$ per $i = 0, \dots, n-1 \bmod k$. Sia $D = E(C_k) \cup V(C_k)$ l'insieme degli elementi di C_k .

CASO A. Sia $k \equiv 1 \bmod 3$.

Consideriamo il matching totale $T_0 = \{v_i, e_{i+1} : 0 \leq i \leq k-4, \text{ per } i \equiv 0 \bmod 3\}$. Questo è un matching totale massimo di C_k , in quanto gli elementi di T_0 sono a due a due indipendenti e $|T_0| = \frac{2(k-1)}{3} = \lfloor \frac{2k}{3} \rfloor$. Dunque $\chi[T_0] \in \tilde{F}$ e quindi $\chi[T_0] \in F$. Notiamo che per costruzione di T_0 , v_{k-2} e e_{k-2} non appartengono a T_0 . Consideriamo ora il matching totale (ancora massimo) dato da $T_0^- = (T_0 \setminus \{e_{k-3}\}) \cup \{v_{k-2}\}$ e $T_0^+ = (T_0 \setminus \{e_{k-3}\}) \cup \{e_{k-2}\}$. Allo stesso modo, anche i vettori caratteristici di questi due matching totali appartengono a \tilde{F} , e quindi ad F . Dunque, visto che $\chi[T_0^-] \in F$ e $\chi[T_0^+] \in F$, allora $\lambda^T \chi[T_0] = \lambda^T \chi[T_0^-]$ e $\lambda^T \chi[T_0] = \lambda^T \chi[T_0^+]$. Ma per come sono costruiti T_0, T_0^- e T_0^+ , questo implica che $\lambda_{e_{k-3}} = \lambda_{v_{k-2}} = \lambda_{e_{k-2}}$ dove λ_d è l'entrata di λ corrispondente all'elemento d di C_k .

Ora consideriamo la funzione $\sigma_{P_n} : D \rightarrow D$ definita da $\sigma(v_i) = v_{i+1}$ e $\sigma(e_i) = e_{i+1}$. Cioè, σ sposta ogni elemento di D alla posizione successiva rispettivamente all'indicizzazione stabilita sopra. Applicando $k-1$ volte σ a T_0 , otteniamo i seguenti matching totali massimi di C_k : $\sigma(T_0), \sigma^2(T_0), \dots, \sigma^{k-1}(T_0)$. Scriviamo $\sigma^i(T_0) = T_i$. Questi sono ancora matching totali e ogni vettore caratteristico $\chi[T_i] \in \tilde{F} \subseteq F$. Notiamo che $v_{i-2} \notin T_i$ e $e_{i-2} \notin T_i$ (per $i = 1$ si ha $v_{k-1} \notin T_i$ e $e_{k-1} \notin T_i$). Quindi seguendo la procedura eseguita sopra nel caso di T_0 , deduciamo che $\lambda_{e_{i-3}} = \lambda_{v_{i-2}} = \lambda_{e_{i-2}}$ per $i = 1, \dots, k-1 \bmod k$. Questo vuol dire che esiste $a \in \mathbb{R}$ tale che $\lambda = a\mathbb{1}$. Allora, visto che $\chi[T_i] \in \tilde{F}$, si ha che $\lambda^T \chi[T_i] = a(\mathbb{1}^T \chi[T_1]) = a\tilde{\lambda}_0$. Dunque abbiamo che $(\lambda, \lambda_0) = a(\mathbb{1}, \tilde{\lambda}_0)$. Da questo segue che $F = \tilde{F}$.

CASO B. Sia $k \equiv 2 \bmod 3$.

Consideriamo il total matching $T_0 = \{v_i, e_{i+1} : 0 \leq i \leq k-5, i \equiv 0 \bmod 3\} \cup \{v_{k-2}\}$. Notiamo che $e_{k-2} \notin T_0$. T_0 è matching totale massimo, in quanto è total matching e $|T_0| = \frac{2(k-2)}{3} + 1 = \lfloor \frac{2k}{3} \rfloor$, dunque $\chi[T_0] \in \tilde{F}$. Siano $\hat{T}_0 = (T_0 \setminus \{v_{k-2}\}) \cup \{e_{k-2}\}$ e $\tilde{T}_0 = (\hat{T}_0 \setminus \{e_{k-4}\}) \cup \{v_{k-3}\}$. \hat{T}_0 e \tilde{T}_0 sono ancora matching totali massimi, e dunque i loro vettori caratteristici appartengono a \tilde{F} (che è contenuta in F). Allora, $\lambda^T \chi[\hat{T}_0] = \lambda^T \chi[T_0]$ e $\lambda^T \chi[\tilde{T}_0] = \lambda^T \chi[\hat{T}_0]$. Deduciamo allora dalla prima equazione che $\lambda_{v_{k-2}} = \lambda_{e_{k-2}}$ e dalla seconda che $\lambda_{v_{k-3}} = \lambda_{e_{k-4}}$. Da qui si procede come al caso A. \square

Mostriamo che quando $k \equiv 0 \bmod 3$, la (3.7) non definisce una faccetta di $P_T(C_k)$. Quando $k \equiv 0 \bmod 3$ la (3.7) diventa

$$\sum_{v \in V(C_k)} x_v + \sum_{e \in E(C_k)} y_e \leq \frac{2k}{3}$$

e si trovano in C_k solo tre matching totali (che sono tutti e soli quelli massimi) di cardinalità $\frac{2k}{3}$. Infatti, i matching totali massimi di C_k sono costituiti da esattamente un terzo degli elementi di C_k (nodi e archi), cioè esattamente uno ogni tre, ordinando gli elementi lungo il ciclo (vedi figura 3.4). E dunque prendendo tre elementi consecutivi (ordinandoli lungo il ciclo) si identificano gli unici tre matching totali massimi del ciclo. Allora la disequazione (3.7) definisce una faccia F di $P_T(C_k)$ che contiene esattamente tre vertici. Visto che $3 < 2n = |D|$, e visto che una faccia è una faccetta se e solo se contiene $2n = |D|$ vertici, F non è una faccetta di $P_T(C_k)$.

Capitolo 4

Alberi

In questo capitolo, dato un albero G , daremo una descrizione completa e non ridondante del politopo dei matching totali di G , come in [4]. Mostreremo in particolare che, nel caso degli alberi, un matching totale massimo può essere trovato in tempo polinomiale, anche tramite un algoritmo esplicito. Useremo questo algoritmo per dimostrare le formule per la cardinalità massima di un matching totale nel caso di cammini e alberi n -ari completi. Infine, forniremo un algoritmo che, dato un albero pesato, ne restituisce un matching totale di peso massimo.

4.1 Il politopo dei matching totali di alberi

Proposizione 4.1.1. *Sia Q un grafo cordale. Allora Q è perfetto.*

Dimostrazione. Usiamo il teorema forte dei grafi perfetti, cioè mostriamo che Q non contiene come sottografo indotto cicli dispari di lunghezza maggiore di tre o loro complementi. Ovviamente Q non contiene come sottografo indotto alcun ciclo dispari di lunghezza maggiore di 3, perché Q è cordale.

Supponiamo che Q contenga come sottografo indotto C^C dove C è un ciclo dispari di lunghezza maggiore di 3. Se C è C_5 , allora $C_5^C = C_5$ è sottografo indotto di Q , ma Q è cordale. Si ha dunque una contraddizione.

Se invece C è un ciclo dispari di lunghezza maggiore di 5, C^C contiene come sottografo indotto C_4 (è una contraddizione perché Q contiene come sottografo indotto C^C , e dunque Q conterrebbe come sottografo indotto C_4 , ma Q è cordale); infatti, C contiene come sottografo indotto P_5 il cammino di lunghezza 5. Ma è facile vedere che P_5^C contiene come sottografo indotto C_4 . \square

Lemma 4.1.1. *Sia G un albero. Allora $T(G)$ è cordale.*

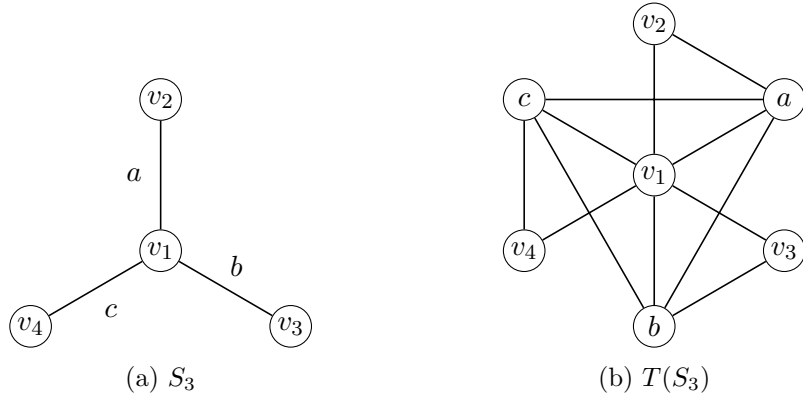
Dimostrazione. Mostriamo per induzione sull'ordine di $V(G)$ che $T(G)$ è cordale se G è un albero. Osserviamo che ogni albero G si può costruire dall'albero con un solo nodo aggiungendo foglie.

Se G è l'albero con un nodo, G è il grafo totale di sè stesso, ed è ovviamente cordale.

Sia ora G l'albero con n nodi. Sappiamo che ha almeno due foglie. Prendiamo una foglia v di G e l'unico arco $e = vu$ nel taglio di v . Notiamo che gli unici nodi adiacenti a v in $T(G)$ sono

i nodi corrispondenti a e e a u . In particolare, l'insieme $\{v, u, e\}$ è una clique di $T(G)$; allora v non può appartenere ad alcun ciclo indotto di lunghezza maggiore di tre di $T(G)$. Possiamo allora v da $T(G)$ ottenendo $T_1(G)$. In $T_1(G)$ gli unici nodi adiacenti a e sono $\{u\} \cup (\delta(u) \setminus \{e\})$. Sappiamo che $\{u\} \cup \delta(u)$ è una clique di $T(G)$ e dunque, come prima, e non può appartenere ad alcun ciclo indotto di lunghezza maggiore di tre di $T(G)$. Allora rimuoviamo e da $T_1(G)$ e otteniamo $T_2(G)$. Ma $T_2(G) = T(G \setminus v)$, e $G \setminus v$ è un albero con $n - 1$ nodi. Per induzione $T_2(G) = T(G \setminus v)$ è cordale, e abbiamo argomentato che i nodi corrispondenti a v e a e non influiscono nella presenza di cicli indotti di lunghezza maggiore di 3, e dunque anche $T(G)$ è cordale. \square

Nella figura seguente sono rappresentati il grafo S_3 e il suo grafo totale; S_3 è un albero, ed è facile controllare che $T(S_3)$ è cordale.



Il risultato precedente è in realtà una coimplicazione, come mostrato in [10] (Teorema 5).

Teorema 4.1.1. *Sia G un albero. Una descrizione completa e non ridondante di $P_T(G)$ è data da:*

$$P_T(G) = \left\{ x \in \mathbb{R}^{|D(G)|} : \begin{array}{ll} x_v + \sum_{e \in \delta(v)} y_e \leq 1 & \forall v \in V(G) \\ x_v + y_e + x_u \leq 1 & \forall e = uv \in E(G) \\ x_v, y_e \geq 0 & \forall v \in V(G), \forall e \in E(G) \end{array} \right\}.$$

Dimostrazione. Sappiamo che $P_T(G) = P_{STAB}(T(G))$. Intanto, per il Lemma 4.1.1, $T(G)$ è cordale. Dunque, per la Proposizione 4.1.1, $T(G)$ è perfetto. Allora, per il Teorema 2.2.1, si ha che

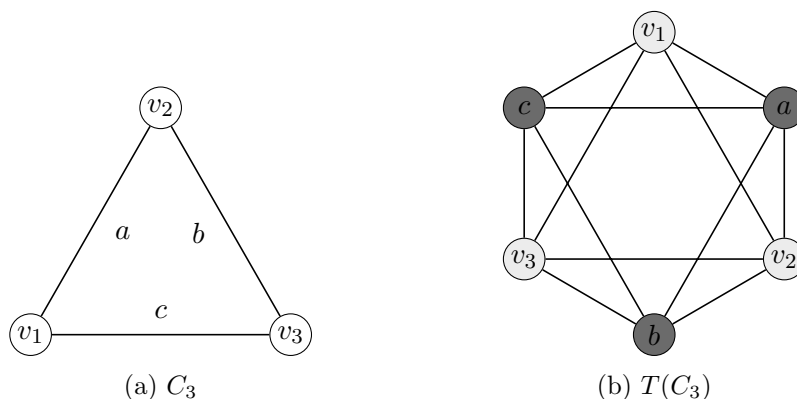
$$P_{STAB}(T(G)) = \left\{ x \in \mathbb{R}^{|D(G)|} : \sum_{v \in K} x_v \leq 1 \quad \forall K \text{ clique massimale di } T(G), x_d \geq 0 \quad \forall d \in D(G) \right\}.$$

Sia K una clique massimale di $T(G)$. Sappiamo che K deve rientrare in una delle quattro famiglie descritte nell'enunciato della Proposizione 3.2.5. Ma si vede facilmente che se K fosse del tipo 3 o del tipo 4, ci sarebbe un ciclo in G . Dunque le uniche famiglie accettabili per K sono la 1 e la 2. Allora le disuguaglianze $\sum_{v \in K} x_v \leq 1$ corrispondono alle disuguaglianze totali

di arco e di vertice. Dunque, abbiamo il risultato (per dire che la descrizione non è ridondante, basta ricordare che ciascuna delle disuguaglianze coinvolte definisce una faccetta di $P_T(G)$, e il Teorema 1.2.1). \square

Allora, quando G è un albero il TMP equivale al programma lineare che è il rilassamento di (3.1), che sappiamo avere soggetto ammissibile composto da $2(n+m) = 2|D|$ disequazioni. Quindi la taglia del sistema lineare cresce linearmente (e in particolare dunque in modo polinomiale) rispetto alla dimensione (intesa come quantità di elementi) dell'albero. Allora, ricordando che i programmi lineari si possono risolvere in tempo polinomiale, si evince che il TMP è polinomiale per gli alberi.

Notiamo che il Teorema 4.1.1 non vale già per C_3 , che è il grafo col minor numero di nodi con la proprietà di non essere un albero. Infatti, come è evidente dalla Proposizione 3.2.5, in $T(C_3)$ sono presenti due clique massimali le cui disuguaglianze non corrispondono a quelle di arco o vertice totale: quella formata dai tre nodi di C_3 (in giallo nella figura di seguito) e quella formata dai tre archi di C_3 (in rosso nella figura di seguito).



Tuttavia, è facile controllare che $T(C_3)$ è ancora perfetto, e dunque una descrizione completa e non ridondante di $P_T(C_3)$ è data ancora dalle disuguaglianze di clique massimale e di non negatività in $T(C_3)$.

Consideriamo invece C_4 . Se il suo grafo totale fosse perfetto, ogni faccetta di $P_T(C_4)$ corrisponderebbe ad una disuguaglianza di clique massimale o di non negatività in $T(C_4)$, ma sappiamo che la disuguaglianza introdotta alla Proposizione 3.3.2, che non corrisponde ad alcuna clique massimale di $T(C_4)$, definisce una faccetta di $P_T(C_4)$. Dunque il grafo totale di C_4 non è perfetto, e non possiamo usare il Teorema 2.2.1 per ottenere una descrizione completa del politopo dei matching totali di C_4 .

4.2 Matching totale massimo di alberi

Forniamo ora un algoritmo greedy esplicito per trovare un matching totale massimo dato un albero e mostriamo che è polinomiale. Da questo potremo ricavare una formula (ad esempio)

per la cardinalità massima di un matching totale di un albero n -ario completo di altezza h (cioè un albero in cui ogni nodo ha esattamente n figli, tranne le foglie, che sono tutte a distanza h dalla radice), e generalizzare quindi il risultato di [6] (Teorema 7) sulla cardinalità massima di un matching totale in un albero binario completo di altezza h .

L'idea dell'algoritmo è la seguente: costruiamo un matching totale T di G , albero di radice v^0 , prendendo, a partire dagli elementi più lontani dalla radice e risalendo verso la radice, tutti e soli gli elementi che permettono di mantenere la condizione di indipendenza fra coppie di elementi in T .

Dunque, scegliamo $v^0 \in V$ come radice dell'albero G , e sia h l'altezza dell'albero G rispetto alla radice v^0 . Per $v \in V$, chiamiamo $P(v)$ l'unico cammino di estremi v^0 e v in G . Per $i \in \{0, \dots, h\}$ sia $V_i = \{v \in V : |V(P(v))| = i + 1\}$. Per $i \in \{0, \dots, h - 1\}$, sia $E_i = \{e = vu \in E : \min\{|V(P(v))|, |V(P(u))|\} = i + 1\}$.

Algoritmo 1.

Input: Un albero $G = (V, E)$ non vuoto.

Output: $T_M(G)$.

Inizializziamo $T \leftarrow V_h$.

Per $i = h - 1, \dots, 0$:

(a) Per $e = vu \in E_i$

• se $(\{u, w\} \cup \delta(u) \cup \delta(v)) \cap T = \emptyset$, allora $T \leftarrow T \cup \{e\}$

(b) Per $v \in V_i$

• se $(N(v) \cup \delta(v)) \cap T = \emptyset$, allora $T \leftarrow T \cup \{v\}$

$T_M(G) \leftarrow T$. **Stop.**

Sia inoltre O l'insieme che contiene, ad ogni istante dell'algoritmo, tutti gli elementi analizzati fino a quell'istante (alla fine dell'algoritmo dunque vale $O = D = V \cup E$).

Si vede facilmente che l'Algoritmo 1 è polinomiale rispetto a $|D|$. Infatti, ogni elemento viene analizzato una sola volta, e per ogni elemento vengono fatte un numero di operazioni di controllo minore di $|D|$.

Proposizione 4.2.1. *Sia $G = (V, E)$ un albero non vuoto. Allora $T_M(G)$, cioè l'output dell'Algoritmo 1 con dato iniziale G , è un matching totale massimo di G .*

Dimostrazione. Notiamo che per ogni $v \in V_i$ con $i \in \{1, \dots, h\}$, v è adiacente a esattamente un nodo di V_{i-1} , che è il suo genitore, e che per ogni $u, v \in V_i$ con $i \in \{1, \dots, h\}$, u e v non sono adiacenti in G (altrimenti troveremmo un cammino di lunghezza $i + 2$ fra uno dei due nodi e v^0).

Mostriamo che $T_M(G)$ è un matching totale di G . Intanto, l'insieme V_h , da cui si inizia a costruire T , è un total matching; infatti, abbiamo appena notato che ogni coppia di elementi in V_h

è indipendente. Inoltre, ogni elemento che viene successivamente aggiunto a T , per costruzione dell'algoritmo, preserva l'indipendenza fra elementi di T .

Mostriamo ora che $T_M(G)$ è un matching totale massimo di G . Mostreremo che, ad ogni istante dell'algoritmo, T è sottoinsieme di un matching totale massimo M di G , e che $M \cap O = T$ (dove O è l'insieme degli elementi analizzati dall'algoritmo fino a quell'istante). Questo implica che, alla fine dell'algoritmo, $T = T_M(G)$ coincide con il matching totale massimo di cui è sottoinsieme.

Mostriamo che V_h , da cui si inizia a costruire $T_M(G)$, è sottoinsieme di un matching totale massimo di G . Sia $v \in V_h$ (v è dunque una foglia di G) e mostriamo che esiste un matching totale massimo che contiene v . Sia $e = uv$ l'unico arco incidente in v . Sia M un matching totale massimo di G che non contiene v . Visto che M è massimo, deve esistere in M un elemento adiacente a v in G , che può essere dunque o e oppure u . Supponiamo che sia $e \in M$ (l'altro caso è analogo); allora $u, v \notin M$, perché M è matching totale. Consideriamo $M' = (M \setminus \{e\}) \cup \{v\}$. M' è un matching totale di G di cardinalità uguale a quella di M , dunque è massimo, e contiene v , come si voleva. Questo prova che $V_h = O$ è sottoinsieme di un matching totale massimo M di G , e ovviamente vale che $M \cap O = M \cap V_h = V_h = T$.

Ora supponiamo che ad un certo istante dell'algoritmo si abbia che T (fissato) è sottoinsieme di un matching totale massimo M di G , e che $M \cap O = T$, con O l'insieme degli elementi analizzati fino a quell'istante. Mostriamo che aggiungendo un elemento (nodo o arco) d a T come nell'algoritmo ($T' = T \cup \{d\}$, $O' = O \cup \{d\}$), esiste ancora un matching totale massimo M' di G tale che contiene T' e $M' \cap O' = T'$.

1. Sia v un nodo che viene aggiunto a T come nell'algoritmo ($v \in V_i$, $i \in \{0, \dots, h-1\}$), e chiamiamo $T' = T \cup \{v\}$, $O' = O \cup \{v\}$. Supponiamo che $v \notin M$. Sappiamo che gli unici elementi in G adiacenti a v sono quelli di $N(v) \cup \delta(v)$. Siccome M è massimo, e v non è in M , deve esistere $d \in (N(v) \cup \delta(v)) \cap M$. Siccome v è stato aggiunto a T dall'algoritmo, abbiamo che $\emptyset = (N(v) \cup \delta(v)) \cap T = (N(v) \cup \delta(v)) \cap (M \cap O) = ((N(v) \cup \delta(v)) \cap M) \cap O$. Dunque $d \notin O$, e $d \neq v$ (perché $v \notin M$), da cui $d \notin O'$. Sappiamo che gli unici vicini di v in G sono in $V_{i-1} \cup V_{i+1}$. Ma tutti i nodi di V_{i+1} sono già stati analizzati dall'algoritmo, come anche gli archi fra v e i nodi di V_{i+1} ; dunque appartengono a O' . Sappiamo che v è adiacente ad esattamente un nodo di V_{i-1} , che chiamiamo u , e chiamiamo $e = vu$. Allora le uniche possibilità per la scelta di d sono, esclusivamente: o $d = u$, o $d = e$. Supponiamo $d = e$ (l'altro caso è analogo). Abbiamo dunque, per quanto detto precedentemente, $\{e\} = (N(v) \cup \delta(v)) \cap M$. Ma allora $M' = (M \setminus \{e\}) \cup \{v\}$ è ancora un matching totale (perché $M \setminus \{e\}$ non contiene nè v nè elementi a lui adiacenti), ed ha cardinalità massima. Abbiamo dunque trovato un matching totale massimo M' che contiene $\{v\} \cup T = T'$.

Mostriamo ora che $M' \cap O' = T'$. Ovviamente si ha $T' \subseteq M' \cap O'$. Sia $p \in M' \cap O'$. Allora p è indipendente da tutti gli altri elementi di M' , e quindi da tutti quelli di T' (perché $p \in M'$, che è un matching totale che contiene T'), e appartiene agli elementi già analizzati dall'algoritmo. Ma allora deve essere entrato in T' tramite l'algoritmo. Questo prova che l'inclusione è un'uguaglianza.

2. Sia $e = vu$ un arco che viene aggiunto a T come nell'algoritmo ($e \in E_i$, $i \in \{0, \dots, h-1\}$), e chiamiamo $T' = T \cup \{e\}$, $O' = O \cup \{e\}$. Supponiamo che $e \notin M$. Sappiamo che gli unici

elementi in G adiacenti a e sono quelli di $\{v, u\} \cup \delta(v) \cup \delta(u)$. Siccome M è massimo, e e non è in M , deve esistere $d \in (\{v, u\} \cup \delta(v) \cup \delta(u)) \cap M$. Siccome e è stato aggiunto a T dall'algoritmo, abbiamo che $\emptyset = (\{u, w\} \cup \delta(u) \cup \delta(v)) \cap T$, e come nel caso sopra si ottiene che $d \notin O'$. Esattamente uno fra u e v appartiene a V_{i+1} , supponiamo sia v . Allora tutti gli elementi di $\{v\} \cup \delta(v)$ sono già stati analizzati dall'algoritmo, e dunque appartengono a O' . Quindi le uniche possibilità per la scelta di d sono, esclusivamente: o $d = u$, o $d = f$ con $f \in (\delta(u) \setminus O')$. Supponiamo che valga il secondo caso (l'altro è analogo). Abbiamo dunque, per quanto detto precedentemente, $\{f\} = (\{u, w\} \cup \delta(u) \cup \delta(v)) \cap M$. Ma allora, come al caso precedente, $M' = (M \setminus \{f\}) \cup \{e\}$ è un matching totale massimo con le proprietà volute.

□

Utilizziamo l'Algoritmo 1 per ottenere una formula per la cardinalità massima di un matching totale di un albero n -ario completo.

Proposizione 4.2.2. *Sia $G_h^n = (V, E)$ un albero n -ario completo di altezza h , con $n \geq 2$ e $h \geq 0$. Allora*

$$\alpha_T(G) = \left\lfloor n^{h+1} \frac{n^2 + 1}{n^3 - 1} \right\rfloor.$$

Dimostrazione. Usiamo la proposizione precedente per descrivere un matching totale massimo di G . Si vede facilmente che, applicando l'Algoritmo 1 a G_h^n , si ottiene il matching totale massimo formato da tutti i nodi di V_h , un arco di E_{h-2} per ogni nodo di V_{h-2} , tutti i nodi di V_{h-3} e così via.

Nella figura seguente rappresentiamo ad esempio il matching totale che è output dell'algoritmo su un albero binario di altezza 4.

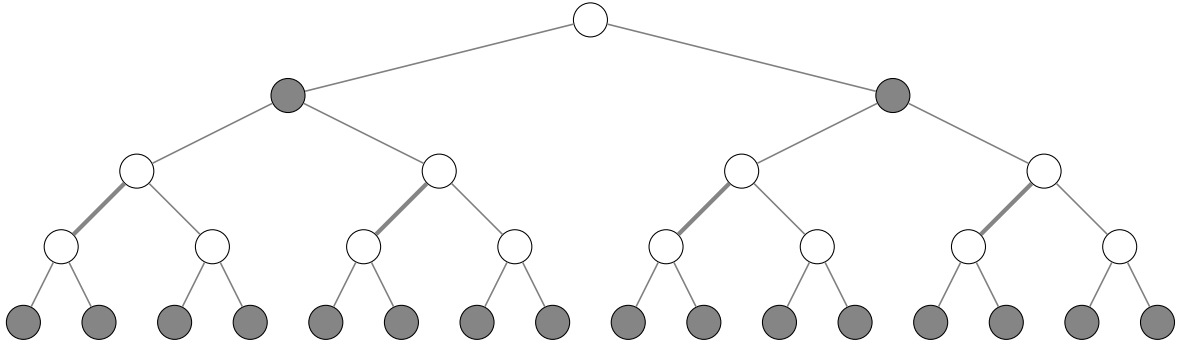


Figura 4.3: G_4^2

CASO A. Sia $h \equiv 0 \pmod 3$. Dalla descrizione che abbiamo dato di $T_M(G_h^n)$ quando G_h^n è un albero n -ario completo di altezza h , si evince facilmente che $\alpha_T(G_h^n) = |T_M(G_h^n)| = n^h + n^{h-2} + n^{h-3} + n^{h-5} + \dots + n^3 + n + 1$, cioè:

$$\alpha_T(G_h^n) = \sum_{i=0}^h n^i - n^2 \sum_{j=0}^{\frac{h-3}{3}} (n^3)^j = \frac{n^{h+3} + n^{h+1} - n - 1}{n^3 - 1} \in \mathbb{N}$$

(dove, se $h = 0$, intendiamo che la seconda somma, indicizzata su j , è calcolata sull'insieme vuoto).

Si vede facilmente che, per $n \geq 2$, si ha $0 \leq \frac{n+1}{n^3-1} < 1$, dunque:

$$\alpha_T(G_h^n) = \left\lfloor \alpha_T(G_h^n) + \frac{n+1}{n^3-1} \right\rfloor = \left\lfloor n^{h+1} \frac{n^2+1}{n^3-1} \right\rfloor$$

come si voleva.

CASO B. Ora sia $h \equiv 1 \pmod{3}$. Dalla descrizione di $T_M(G_h^n)$ data precedentemente, si vede che $\alpha_T(G_h^n) = n(\alpha_T(G_k^n))$ dove $k = h-1 \equiv 0 \pmod{3}$. Dunque possiamo applicare quanto ricavato sopra:

$$\alpha_T(G_h^n) = n \frac{n^{k+3} + n^{k+1} - n - 1}{n^3 - 1} = \frac{n^{h+3} + n^{h+1} - n^2 - n}{n^3 - 1} \in \mathbb{N}.$$

Si vede facilmente che, per $n \geq 2$, si ha $0 \leq \frac{n^2+n}{n^3-1} < 1$, dunque:

$$\alpha_T(G_h^n) = \left\lfloor \alpha_T(G_h^n) + \frac{n^2+n}{n^3-1} \right\rfloor = \left\lfloor n^{h+1} \frac{n^2+1}{n^3-1} \right\rfloor$$

come si voleva.

CASO C. Sia infine $h \equiv 2 \pmod{3}$. Dalla descrizione di $T_M(G_h^n)$ data precedentemente, si vede che $\alpha_T(G_h^n) = n^2(\alpha_T(G_k^n)) + 1$ dove $k = h-2 \equiv 0 \pmod{3}$. Dunque possiamo applicare quanto ricavato sopra:

$$\alpha_T(G_h^n) = n^2 \frac{n^{k+3} + n^{k+1} - n - 1}{n^3 - 1} + 1 = \frac{n^{h+3} + n^{h+1} - n^2 - 1}{n^3 - 1} \in \mathbb{N}.$$

Si vede facilmente che, per $n \geq 2$, si ha $0 \leq \frac{n^2+1}{n^3-1} < 1$, dunque:

$$\alpha_T(G_h^n) = \left\lfloor \alpha_T(G_h^n) + \frac{n^2+1}{n^3-1} \right\rfloor = \left\lfloor n^{h+1} \frac{n^2+1}{n^3-1} \right\rfloor$$

come si voleva. □

Notiamo che, per $n = 2$, dalla proposizione precedente si ricava che $\alpha_T(G_h^2) = \lfloor 2^{h \frac{10}{7}} \rfloor$, che è la formula per la cardinalità massima di un matching totale di un albero binario completo di altezza h trovata in [6] (Teorema 7).

Utilizziamo l'Algoritmo 1 per ottenere in modo immediato la formula per la cardinalità massima di un matching totale di un cammino di lunghezza n , trovata in [6] (Teorema 2).

Proposizione 4.2.3. *Sia $P_n = (V, E)$ il cammino di lunghezza n , con nodi $V = \{v_1, \dots, v_n\}$. Allora*

$$\alpha_T(P_n) = \left\lfloor \frac{2n-1}{3} \right\rfloor.$$

Dimostrazione. Scegliamo come radice uno dei due estremi di P_n . Allora l'Algoritmo 1, a partire dall'estremo opposto, seleziona esattamente un elemento ogni tre, lungo il cammino. Allora il numero di elementi selezionati quando finisce l'algoritmo è

$$\left\lceil \frac{|D(P_n)|}{3} \right\rceil = \left\lceil \frac{2n-1}{3} \right\rceil.$$

□

Nella figura seguente rappresentiamo il cammino P_6 e il matching totale massimo (di cardinalità $\lceil \frac{2n-1}{3} \rceil = 4$) che è l'output dell'Algoritmo 1.

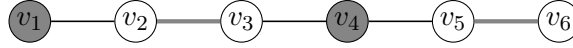


Figura 4.4: P_6

4.3 Matching totale di peso massimo di alberi

Sia $G = (V, E)$ un albero non vuoto e $w = \{w_d\}_{d \in D(G)} \in \mathbb{R}_{\geq 0}^{|D(G)|}$ un vettore dei pesi per gli elementi di G , fissato. Dato $C \subseteq D(G)$, indichiamo con $w(\bar{C})$ la somma $\sum_{c \in C} w(c)$, dove $w(c) = w_c$. Forniamo ora un algoritmo che restituisca il matching totale di G di peso massimo.

Scegliamo dunque $v_1^0 \in V$ come radice dell'albero G , e sia h l'altezza dell'albero G rispetto alla radice v_1^0 . Per $v \in V$, chiamiamo $P(v)$ l'unico cammino di estremi v_1^0 e v in G . Per $i \in \{0, \dots, h\}$ sia $V^i = \{v \in V : |V(P(v))| = i + 1\}$. Per $i \in \{1, \dots, h\}$, sia $E^i = \{e = vu \in E : \min\{|V(P(v))|, |V(P(u))|\} = i\}$. Indicizziamo gli elementi di V^k per ogni $k \in \{1, \dots, h\}$ nel seguente modo:

$$V^k = \{v_1^k, \dots, v_{t_k}^k\}$$

dove $|V^k| = t_k$. Notiamo che $V^0 = \{v_1^0\}$.

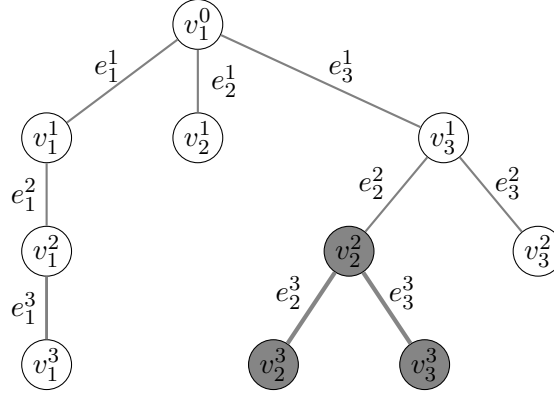
Osserviamo che, per ogni $k \in \{1, \dots, h\}$ ogni elemento $e \in E^k$ è incidente ad uno ed un solo nodo $v_i^k \in V^k$. Notiamo che $|V^k| = |E^k|$, e dunque indicizziamo gli elementi di E^k nel seguente modo:

$$E^k = \{e_1^k, \dots, e_{t_k}^k\}$$

in maniera tale che e_i^k sia incidente a v_i^k per ogni $i \in \{1, \dots, t_k\}$.

Infine, per ogni $k \in \{0, \dots, h\}$ e $i \in \{1, \dots, t_k\}$ sia G_i^k la componente connessa (è ancora un albero) che contiene v_i^k del grafo che si ottiene da G rimuovendo l'arco e_i^k .

Nella seguente figura esemplifichiamo l'indicizzazione dei nodi e degli archi appena descritta. Coloriamo inoltre $D(G_2^2)$.

Figura 4.5: Esempio di indicizzazione su G

Indichiamo con

- $T_i^k(0)$ un matching totale di peso massimo di G_i^k ;
- $T_i^k(1)$ un matching totale di peso massimo di G_i^k che non contiene $v_i^k \in D(G)$;
- $T_i^k(2)$ un matching totale di peso massimo di G_i^k che non contiene $v_i^k \in D(G)$ e tutti gli archi incidenti a v_i^k in G_i^k .

Notiamo che tutti i nodi in V^h sono foglie (vedi dimostrazione della Proposizione 4.2.1). Per gli alberi $G_i^h = \{v_i^h\}$ è allora immediato stabilire che $T_i^h(2) = \emptyset$, $T_i^h(1) = \emptyset$ e $T_i^h(0) = \{v_i^h\}$.

L'idea dell'algoritmo è la seguente. Siano k e i fissati e consideriamo G_i^k . Possiamo ottenere $T_i^k(0)$, $T_i^k(1)$ e $T_i^k(2)$ conoscendo gli stessi tre matching totali per ogni albero G_j^{k+1} tale che v_j^{k+1} è figlio di v_i^k . Infatti:

- $T_i^k(2)$ si ottiene dall'unione dei $T_j^{k+1}(0)$;
- $T_i^k(1)$ si ottiene o da $T_i^k(2)$ o selezionando un arco $\{e_{\frac{j}{i}}^{k+1}\}$ fra quelli incidenti a v_i^k (quello per cui il matching totale che si ottiene ha peso massimo) unito a $T_j^{k+1}(2)$ e ai rimanenti $T_j^{k+1}(0)$;
- $T_i^k(0)$ si ottiene o da $T_i^k(1)$ o selezionando il nodo v_i^k unito ai $T_j^{k+1}(1)$.

Algoritmo 2.

Input: Un albero $G = (V, E)$ non vuoto, e un vettore $w \in \mathbb{R}_{\geq 0}^{|D(G)|}$.

Output: $T_w(G)$.

Inizializziamo $T_i^h(2) \leftarrow \emptyset$, $T_i^h(1) \leftarrow \emptyset$ e $T_i^h(0) \leftarrow \{v_i^h\}$ per ogni $i \in \{1, \dots, t_h\}$.

Per $k = h - 1, \dots, 0$:

Per $i = 1, \dots, t_k$:

Sia $J = \{j \in \{1, \dots, t_{k+1}\} : v_j^{k+1} \text{ è figlio di } v_i^k\}$.

Se $J = \emptyset$, allora $T_i^k(2) = \emptyset$, $T_i^k(1) = \emptyset$ e $T_i^k(0) = \{v_i^k\}$.

Altrimenti:

(a)

$$T_i^k(2) = \bigcup_{j \in J} T_j^{k+1}(0).$$

(b) Sia \bar{j} un elemento di J che massimizza $\alpha(j) := w(e_j^{k+1}) + w(T_j^{k+1}(2)) - w(T_j^{k+1}(0))$ per $j \in J$.

- Se $\alpha(\bar{j}) \leq 0$, allora $T_i^k(1) = T_i^k(2)$;
- altrimenti,

$$T_i^k(1) = \bigcup_{j \in J \setminus \{\bar{j}\}} T_j^{k+1}(0) \cup \{e_{\bar{j}}^{k+1}\} \cup T_{\bar{j}}^{k+1}(2).$$

- (c)
- Se $w(T_i^k(1)) \geq w(v_i^k) + \sum_{j \in J} w(T_j^{k+1}(1))$, allora $T_i^k(0) = T_i^k(1)$;
 - altrimenti,

$$T_i^k(0) = \bigcup_{j \in J \setminus \{\bar{j}\}} T_j^{k+1}(1) \cup \{v_i^k\}.$$

$T_w(G) \leftarrow T_1^0(0)$. **Stop.**

Proposizione 4.3.1. Sia $G = (V, E)$ un albero non vuoto, e $w \in \mathbb{R}_{\geq 0}^{|D(G)|}$ un vettore dei pesi fissato. Allora $T_w(G)$, l'output dell'Algoritmo 2, è un matching totale di peso massimo di G .

Dimostrazione. Siano $k \in \{0, \dots, h\}$ e $i \in \{1, \dots, t_k\}$ fissati. Sia $J = \{j \in \{1, \dots, t_{k+1}\} : D(G_j^{k+1}) \subseteq D(G_i^k)\}$; dunque, per ogni $j \in J$, G_j^{k+1} è una delle componenti connesse (è ancora un albero) del grafo che si ottiene da G_i^k rimuovendo v_i^k e tutti gli archi a lui incidenti. Vogliamo mostrare che, per trovare un matching totale di peso massimo di G_i^k (cioè $T_i^k(0)$), è sufficiente conoscere $T_j^{k+1}(2)$, $T_j^{k+1}(1)$ e $T_j^{k+1}(0)$ per ogni $j \in J$, e procedere come nell'algoritmo. Più in particolare, per poter poi procedere ricorsivamente, dobbiamo mostrare che, a partire da questi dati e procedendo come nell'algoritmo, è possibile determinare $T_i^k(2)$, $T_i^k(1)$ e $T_i^k(0)$.

- (a) Mostriamo che $T_i^k(2)$ si trova come nell'algoritmo. Ricordiamo che $T_i^k(2)$ è un matching totale di G_i^k di peso massimo che non contiene v_i^k e gli archi a lui incidenti. Ma allora $T_i^k(2)$ contiene solo elementi di $\bigcup_{j \in J} D(G_j^{k+1})$. Visto che, presi $d \in D(G_j^{k+1})$ e $\tilde{d} \in D(G_{\tilde{j}}^{k+1})$ con $j \neq \tilde{j}$, d e \tilde{d} sono indipendenti, $\bigcup_{j \in J} T_j^{k+1}(0)$ è un matching totale di peso massimo che contiene solo elementi di $\bigcup_{j \in J} D(G_j^{k+1})$. Dunque $T_i^k(2) = \bigcup_{j \in J} T_j^{k+1}(0)$.
- (b) Mostriamo che $T_i^k(1)$ si trova come nell'algoritmo. Ricordiamo che $T_i^k(1)$ è un matching totale di G_i^k di peso massimo che non contiene v_i^k . Allora $T_i^k(1)$ contiene solo elementi di $\bigcup_{j \in J} D(G_j^{k+1})$ e archi incidenti a v_i^k .

Se $T_i^k(1)$ non contiene $e_{\bar{j}}^{k+1}$ per $\bar{j} \in J$, allora, per definizione, poniamo $T_i^k(1) = T_i^k(2)$. Se invece $T_i^k(1)$ contiene un $e_{\bar{j}}^{k+1}$ con $\bar{j} \in J$, non può contenere (per l'indipendenza degli elementi in un matching totale) altri archi e_j^{k+1} con $j \in J$, $j \neq \bar{j}$, e non può contenere $v_{\bar{j}}^{k+1}$ nè gli archi ad esso incidenti. Ricordando elementi presi in distinti sotto-alberi sono indipendenti, abbiamo allora che

$$T_i^k(1) = \bigcup_{j \in J \setminus \{\bar{j}\}} T_j^{k+1}(0) \cup \{e_{\bar{j}}^{k+1}\} \cup T_{\bar{j}}^{k+1}(2).$$

Per ottenere $T_i^k(1)$, dunque, bisogna confrontare i pesi di $T_i^k(2)$ e di $\bigcup_{j \in J \setminus \{\bar{j}\}} T_j^{k+1}(0) \cup \{e_{\bar{j}}^{k+1}\} \cup T_{\bar{j}}^{k+1}(2)$ per ogni $\bar{j} \in J$, e selezionare quello di peso massimo.

- (c) Mostriamo che $T_i^k(0)$ si trova come nell'algoritmo. Ricordiamo che $T_i^k(0)$ è un matching totale di G_i^k di peso massimo.

Se $T_i^k(0)$ non contiene v_i^k , allora, per definizione, poniamo $T_i^k(0) = T_i^k(1)$. Se invece $T_i^k(0)$ contiene v_i^k , allora non contiene archi incidenti a v_i^k nè nodi adiacenti a v_i^k , cioè può contenere, oltre a v_i^k , solo elementi di $\bigcup_{j \in J} T_j^{k+1}(1)$. Ricordando elementi presi in distinti sotto-alberi sono indipendenti, abbiamo allora che

$$T_i^k(0) = \bigcup_{j \in J \setminus \{\bar{j}\}} T_j^{k+1}(1) \cup \{v_i^k\}.$$

Per ottenere $T_i^k(0)$, dunque, bisogna confrontare i pesi di $T_i^k(1)$ e di $\bigcup_{j \in J \setminus \{\bar{j}\}} T_j^{k+1}(1) \cup \{v_i^k\}$, e selezionare quello di peso massimo.

Notiamo infine che, per definizione, $T_1^0(0)$ è un matching totale di peso massimo di G . \square

Nella seguente figura rappresentiamo il matching totale di peso massimo $T_w(G)$ dell'albero G in figura 4.5, con vettore dei pesi w descritto dalla figura seguente.

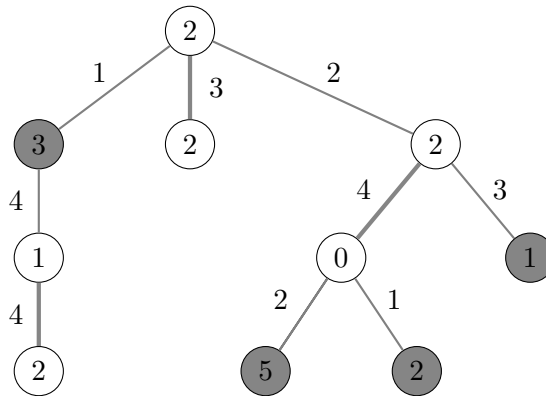


Figura 4.6: $T_w(G)$

Nel caso in cui il vettore dei pesi abbia entrate anche negative, è sufficiente implementare l'Algoritmo 2 con la seguente modifica. Per ogni $i \in \{1, \dots, t_h\}$ porre $T_i^h(2) \leftarrow \emptyset$, $T_i^h(1) \leftarrow \emptyset$ e

$$T_i^h(0) = \begin{cases} \{v_i^h\} & \text{se } w(v_i^h) \geq 0 \\ \emptyset & \text{altrimenti.} \end{cases}$$

e fare in modo analogo per ogni G_i^k con $k \in \{h-1, \dots, 0\}$ e $i \in \{1, \dots, t_k\}$ tale che il corrispondente insieme J , come definito precedentemente, risulta vuoto.

Capitolo 5

Grafi completi

In questo capitolo introdurremo il concetto di grafo totale sugli archi, e mostreremo che un grafo G ammette grafo totale sugli archi se e solo se $G = P_3$ o $G = K_n$ con $n \geq 1$. Mostreremo che, di conseguenza, il politopo dei matching totali di K_n è il politopo dei matching di K_{n+1} , e ne daremo quindi una descrizione completa e non ridondante.

5.1 Il grafo totale sugli archi

Definizione 5.1.1 (Sottografo indotto). *Sia $H = (W, F)$ un grafo, $F' \subseteq F$. Diciamo sottografo di H indotto da F' il grafo $H[F'] = (\{w \in W : w \text{ è estremo di } f \exists f \in F'\}, F)$.*

Definizione 5.1.2 (Grafo totale sugli archi). *Siano G e H due grafi con $|D(G)| = |E(H)|$. Se esiste $\phi: D(G) \rightarrow E(H)$ biettiva tale che $d, d' \in D(G)$ sono adiacenti in G se e solo se $\phi(d), \phi(d') \in E(H)$ sono incidenti in H , diciamo che H è un grafo totale sugli archi di G tramite ϕ .*

Sia G un grafo, ed H un suo grafo totale sugli archi tramite ϕ . Intanto notiamo che possiamo scrivere $H = H[\phi(D(G))]$.

Notiamo poi che se un grafo H' è isomorfo ad H , allora banalmente H' è ancora grafo totale sugli archi di G . Inoltre, dato $f: V(G) \rightarrow V(G)$ un automorfismo del grafo G , allora $\phi \circ f$ soddisfa ancora le condizioni della Definizione 5.1.2, e dunque H è un grafo totale sugli archi di G anche tramite $\phi \circ f$.

Scriviamo allora H_ϕ per indicare la classe di equivalenza $[H_\phi]_\sim$ dove $H'_\psi \sim H_\phi$ se H e H' sono isomorfi e se esiste f automorfismo di G tal che $\psi = \phi \circ f$. Tralasciamo di specificare la funzione ϕ se, fissato H , ϕ è unica a meno di automorfismi di G .

Indichiamo con

$$\mathcal{M}(G) = \{H_\phi : H \text{ è grafo totale sugli archi di } G \text{ tramite } \phi\}.$$

Notiamo infatti che, dato un grafo G , se G ammette grafo totale sugli archi H , in generale H non è unico. Consideriamo ad esempio $G = P_2$ (figura 5.1). Come rappresentato di seguito, si controlla facilmente che sia $H = S_3$ che $H = K_3$ sono grafi totali sugli archi di P_2 .

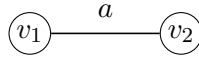


Figura 5.1: P_2



Figura 5.2: Grafi totali sugli archi di P_2

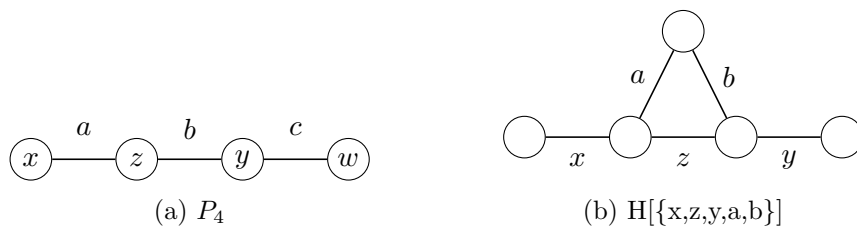
Inoltre, nella grande maggioranza dei casi G non ammette grafo totale sugli archi. Con la proposizione seguente formalizziamo questa osservazione.

Proposizione 5.1.1. *Sia $G = (V, E)$ connesso con $|V| \geq 4$. Allora, se esistono $u, v \in V$ non adiacenti, G non ammette grafo totale sugli archi.*

Dimostrazione. Mostriamo innanzitutto che esistono $x, y, z \in V$ tali che x e y non sono adiacenti, e $x, y \in N(z)$. Sia P_m un cammino con estremi u e v di lunghezza (cioè numero di nodi) minima. Non può essere $m = 2$, perché u e v non sono adiacenti. Se $m = 3$, chiamiamo $x = u, y = v$ e z il nodo centrale del cammino P_2 ; con questa scelta, $x, y, z \in V$ hanno le proprietà richieste. Se $m \geq 4$, siano $\{u, v_1, \dots, v_{m-2}, v\}$ i nodi del cammino P_m indicizzati lungo il cammino. Notiamo che u e v_{m-2} non sono adiacenti, altrimenti il cammino P i cui vertici sono $V(P) = \{u, v_{m-2}, v\}$ sarebbe un cammino di estremi u e v di lunghezza $3 < m$. Dunque u e v_{m-2} sono due nodi di G non adiacenti, e sono estremi di un cammino di lunghezza $m - 1$, cioè quello i cui vertici sono $\{u, v_1, \dots, v_{m-2}\}$. Procedendo in questo modo ci si riduce a un cammino di lunghezza tre i cui estremi non sono adiacenti. Come prima chiamiamo x e y gli estremi di questo cammino, e z il nodo centrale. Con questa scelta, $x, y, z \in V$ hanno le proprietà richieste.

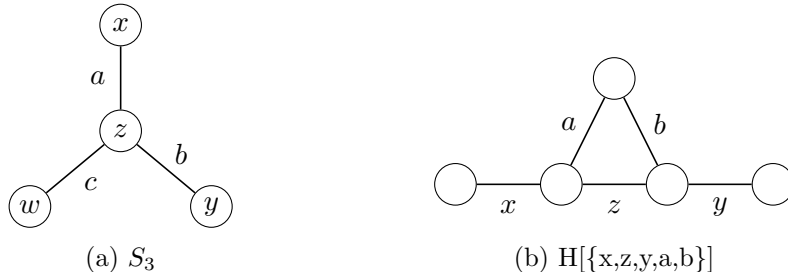
Siano dunque $x, z, y \in V$ tali che, ponendo $U = \{x, z, y\}$, si ha $G[U] = P_3$. Visto che $|V| \geq 4$, prendiamo $w \in V \setminus U$ tale che w è adiacente ad uno fra x, z, y (esiste perché G è connesso). Il caso in cui w è adiacente a x è per costruzione analogo al caso in cui w è adiacente a y . Studiamo dunque i due seguenti casi.

1. Supponiamo che w sia adiacente a y . Allora il cammino P_4 con vertici (scritti lungo il cammino) $V(P_4) = \{x, z, y, w\}$ è sottografo di G . Ricordiamo che x e y non sono adiacenti in G . Chiamiamo $a = xz$, $b = zy$, $c = yw$. Supponiamo per assurdo esista un grafo H che è grafo totale sugli archi di G tramite ϕ . Ci aiutiamo con la figura seguente, in cui ci riferiamo agli archi di H con la stessa nomenclatura utilizzata per gli elementi di G , cioè, per ogni $d \in D(G)$, $\phi(d) = d \in V(H)$.



I vertici x e z sono adiacenti in G , dunque $\phi(x)$ e $\phi(z)$ devono essere incidenti in H (figura (b)). Il vertice y è adiacente a z in G , ma non a x . Dunque $\phi(y)$ deve essere incidente a $\phi(z)$ in H , ma non a $\phi(x)$, cioè, $\phi(y)$ deve essere incidente nell'estremo di $\phi(z)$ che non è estremo di $\phi(x)$ (figura (b)). Ora, l'arco a è adiacente in G sia a x che a z , e non è adiacente a y , quindi $\phi(a)$ deve essere incidente sia a $\phi(x)$ che a $\phi(z)$ in H , ma non a $\phi(y)$; anche in questo caso la scelta dell'estremo in comune con gli archi appena citati è forzata. Similmente si può dire per l'arco b . Dunque otteniamo il sottografo di H che è in figura (b). Consideriamo ora l'arco c . Notiamo che è adiacente a b in G , ma non è adiacente nè a z nè ad a . Allora $\phi(c)$ deve essere incidente $\phi(b)$ in H , e non deve essere incidente nè a $\phi(a)$ nè a $\phi(z)$. Ma, in H , un estremo di $\phi(b)$ è anche estremo di $\phi(a)$, e l'altro estremo di $\phi(b)$ è anche estremo di $\phi(z)$. Abbiamo dunque una contraddizione.

2. Supponiamo che w sia adiacente a z . Allora la stella S_3 con vertici $V(S_3) = \{x, z, y, w\}$ è sottografo di G . Ricordiamo che x e y non sono adiacenti in G . Chiamiamo $a = xz$, $b = zy$, $c = zw$. Supponiamo per assurdo esista un grafo H che è grafo totale sugli archi di G tramite ϕ . Ci aiutiamo con la figura seguente.



Analogamente al caso precedente ricordando che x e y non sono adiacenti in G , gli archi di H corrispondenti agli elementi x, z, y, a, b di G devono avere le relazioni di incidenza descritte dalla figura (b). Consideriamo ora l'arco c come elemento di G . Notiamo che è adiacente a z in G , ma non è adiacente nè a x nè ad y . Allora l'arco $\phi(c)$ in H deve essere incidente a $\phi(z)$, e non deve essere incidente nè a $\phi(x)$ nè a $\phi(y)$. Ma, in H , un estremo di $\phi(z)$ è anche estremo di $\phi(x)$, e l'altro estremo di $\phi(z)$ è anche estremo di $\phi(y)$. Abbiamo dunque una contraddizione.

Dunque in entrambi i casi G non ammette grafo totale sugli archi, come si voleva. \square

Ora, sia $G = (V, E)$ un grafo connesso con $|V| = n \geq 4$ e tale che, per ogni $u, v \in V$, u e v sono adiacenti in G . Allora deve essere $G = K_n$. Sia invece $G = (V, E)$ un grafo connesso con

$|V| = n \leq 3$. Allora G può essere K_1 , K_2 , P_3 o K_3 . Dunque gli unici grafi che non soddisfano le ipotesi della Proposizione 5.1.1 sono i grafi completi e P_3 .

Proposizione 5.1.2. *Un grafo G ammette grafo totale sugli archi H se e solo se $G = P_3$ o $G = K_n$ con $n \geq 1$. In particolare:*

1. Se $G = P_3$, allora $\mathcal{M}(G) = \{B\}$, dove B è il bull graph (figura 5.5 (b));
2. Se $G = K_2$, allora $\mathcal{M}(G) = \{K_3, S_3\}$;
3. Se $G = K_3$, allora $\mathcal{M}(G) = \{(K_4)_\phi, (K_4)_\psi\}$, con ϕ e ψ come in figura 5.6;
4. Se $G = K_n$ con $n \geq 1$, $n \neq 2, 3$, allora $\mathcal{M}(G) = \{K_{n+1}\}$;
5. Altrimenti $\mathcal{M}(G) = \emptyset$.

Dimostrazione. Per mostrare la prima affermazione, per quanto detto finora, è sufficiente mostrare che P_3 e K_n per ogni $n \geq 1$ ammettono grafo totale sugli archi.

1. Si verifica facilmente che il grafo B (detto *bull graph*) in figura (b) è grafo totale sugli archi di $G = P_3$.

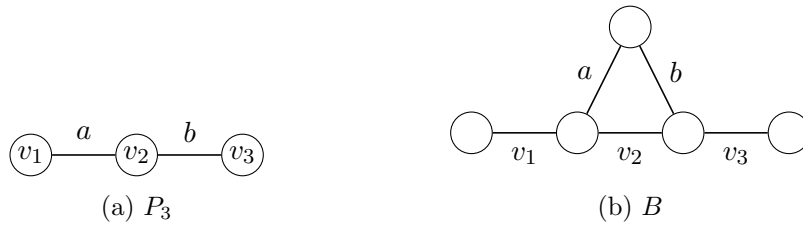
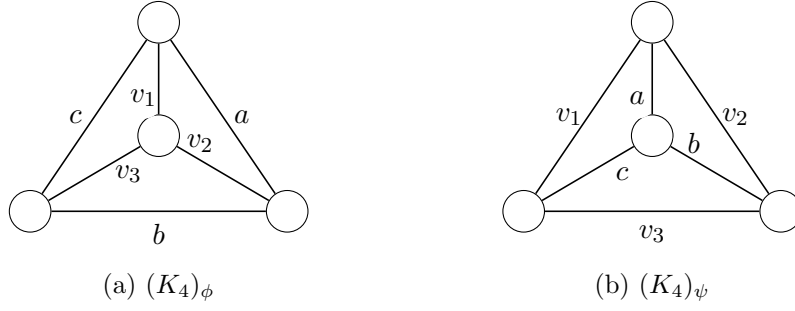


Figura 5.5: P_3 e il bull graph

Seguendo un ragionamento analogo a quello della dimostrazione della proposizione 5.1.1, è facile mostrare che B (e la funzione ϕ corrispondente) è l'unico grafo totale sugli archi di P_3 .

2. Sia $G = P_2 = K_2$. Gli elementi $D(K_2) = \{v_1, e, v_2\}$ sono tutti adiacenti a due a due in K_2 . Dunque un grafo totale sugli archi di K_2 dovrà avere tre archi tutti incidenti a due a due. Ma allora le uniche configurazioni possibili sono quelle di K_3 ed S_3 (vedi figura 5.2).
3. Sia $G = K_3$ con $V(K_3) = \{v_1, v_2, v_3\}$ e siano $a = v_1v_2$, $b = v_2v_3$ e $c = v_3v_1$. Sia H un suo grafo totale rispetto a ϕ . I vertici di K_3 sono tutti adiacenti fra loro, dunque $\{\phi(v_1), \phi(v_2), \phi(v_3)\}$ devono essere a due a due incidenti in H . Allora deve essere $H[\{\phi(v_1), \phi(v_2), \phi(v_3)\}] = S_3$ oppure $H[\{\phi(v_1), \phi(v_2), \phi(v_3)\}] = K_3$. In entrambi i casi, le immagini tramite ϕ degli archi di G sono forzate, e si ottengono rispettivamente i due grafi in figura 5.6.


 Figura 5.6: Grafi totali sugli archi di K_3

In entrambi i casi il grafo totale sugli archi è K_4 . Detta $\phi : D(K_3) \rightarrow V(K_4)$ la funzione associata alla figura (a) e $\psi : D(K_3) \rightarrow V(K_4)$ quella associata alla figura (b), si vede che $\psi \neq \phi \circ f$ per ogni f automorfismo di K_3 .

4. È banale notare che K_2 è grafo totale sugli archi di K_1 . Mostriamo ora che anche per $n \geq 4$ vale che K_{n+1} è grafo totale sugli archi di K_n . Sia $n \geq 3$ fissato. Allora

$$|D(K_n)| = |V(K_n)| + |E(K_n)| = n + \binom{n}{2} = \binom{n}{1} + \binom{n}{2}$$

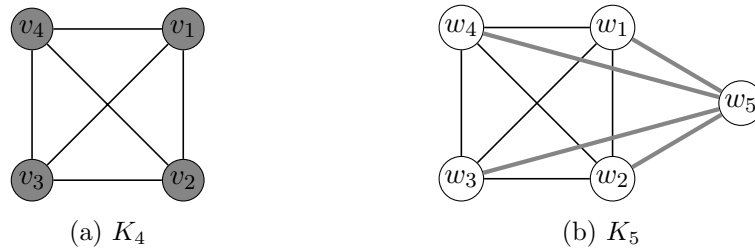
ed è noto che (ad esempio per i risultati legati al triangolo di Tartaglia) vale

$$\binom{n}{1} + \binom{n}{2} = \binom{n+1}{2} = E(K_{n+1}).$$

Dunque K_{n+1} soddisfa la condizione sulla cardinalità dell'insieme degli archi della Definizione 5.1.2.

Sia allora $\phi : D(K_n) \rightarrow E(K_{n+1})$, definita per costruzione come segue. Siano $V(K_n) = \{v_1, \dots, v_n\}$ i vertici di K_n e $V(K_{n+1}) = \{w_1, \dots, w_{n+1}\}$ quelli di K_{n+1} . Per ogni arco $e = v_i v_j \in E(K_n)$, come elemento di K_n , sia $\phi(e) = w_i w_j \in E(K_{n+1})$. Consideriamo ora $\delta(w_{n+1}) = \{e_1, \dots, e_n\} \subseteq E(K_{n+1})$, dove $e_i = w_{n+1} w_i$ per ogni $i \in \{1, \dots, n\}$. Per ogni vertice $v_i \in V(K_n)$, come elemento di K_n , sia $\phi(v_i) = e_i \in E(K_{n+1})$. La ϕ così costruita è biettiva.

Nella seguente figura rappresentiamo il grafo K_4 e il suo grafo totale sugli archi K_5 .



Mostriamo ora che $d, d' \in D(K_n)$ sono adiacenti in K_n se e solo se $\phi(d), \phi(d') \in E(K_{n+1})$ sono incidenti in K_{n+1} .

- (a) Siano d, d' vertici di K_n . Cioè siano $d = v_i$ e $d' = v_j$. Abbiamo che v_i e v_j sono adiacenti come elementi in K_n per ogni $i, j \in \{1, \dots, n\}$ e anche che $\phi(v_i) = e_i = w_{n+1}w_i$ e $\phi(v_j) = e_j = w_{n+1}w_j$ sono incidenti (nel nodo w_{n+1}) in K_{n+1} per ogni $i, j \in \{1, \dots, n\}$.
- (b) Siano d, d' archi di K_n . Cioè siano $d = v_i v_j$ e $d' = v_k v_l$. Abbiamo che d e d' sono adiacenti come elementi in K_n se e solo se hanno uno degli estremi in comune, cioè se e solo se $w_i w_j$ e $w_k w_l$ hanno uno degli estremi in comune, cioè se e solo se $\phi(v_i v_j) = w_i w_j$ e $\phi(v_k v_l) = w_k w_l$ sono incidenti in K_{n+1} .
- (c) Sia d un vertice di K_n e d' un arco di K_n . Cioè siano $d = v_k$ e $d' = v_i v_j$. Abbiamo che d e d' sono adiacenti come elementi in K_n se e solo se d è un estremo di d' , cioè se e solo se $v_k = v_i$ oppure $v_k = v_j$, cioè se e solo se $\phi(v_k) = e_k = w_{n+1}w_k$ $\phi(v_i v_j) = w_i w_j$ con $w_k = w_i$ o $w_k = w_j$, cioè se e solo se $\phi(v_k)$ e $\phi(v_i v_j)$ sono incidenti in K_{n+1} .

Dunque $\phi: D(K_n) \rightarrow E(K_{n+1})$ ha le proprietà richieste dalla Definizione 5.1.2, e possiamo concludere che K_{n+1} è grafo totale sugli archi di K_n .

Rimane da mostrare che K_{n+1} è l'unico grafo totale sugli archi di K_n . Sia H un grafo totale sugli archi di G tramite ϕ . I vertici di K_n sono tutti adiacenti e $|V(K_n)| \geq 4$. Allora deve essere $H[\phi(V(K_n))] = S_n$. Preso $e = v_i v_j$, abbiamo che $\phi(e)$ è incidente a $\phi(v_i)$ e a $\phi(v_j)$, che sono già fissati in H . Dunque la costruzione è unica, e il grafo che si ottiene è K_{n+1} . Da questo si vede anche che esiste un'unica funzione $\phi: D(K_n) \rightarrow E(K_{n+1})$ come nella Definizione 5.1.2, a meno di automorfismi di K_n .

□

Osserviamo dunque che se $G \neq K_2$ e G ammette H grafo totale sugli archi di G , allora H è l'unico grafo totale sugli archi di G .

5.2 Il politopo dei matching totali di grafi completi

Notiamo che, dato un grafo G e un suo grafo totale sugli archi H tramite ϕ , per la Definizione 5.1.2 ogni matching totale T di G corrisponde a un matching $M = \phi(T)$ di H , tale che $|M| = |T|$. Questo è analogo a quanto avviene fra i matching totali di G e gli insiemi indipendenti corrispondenti in $T(G)$. Come nel caso di $T(G)$ si ha che $P_T(G)$ e $P_{STAB}(T(G))$, nel caso del grafo totale sugli archi abbiamo dunque $P_T(G) = P_M(H)$, dove $P_M(H)$ indica il politopo dei matching di H .

Dalla Proposizione 5.1.2, sappiamo che gli unici grafi che ammettono grafo totale sugli archi sono P_3 e tutti i grafi completi. Dunque P_3 e K_n per $n \geq 1$ sono gli unici grafi il cui politopo dei matching totali è un politopo dei matching (di un loro grafo totale sugli archi).

Possiamo dunque dire che:

- $P_T(P_3) = P_M(B)$, dove B è il *bull graph*;
- $P_T(K_n) = P_M(K_{n+1})$ per ogni $n \geq 1$.

Da [2] (Teorema 4.24) sappiamo che per ogni grafo $G = (V, E)$ una descrizione completa del politopo dei matching di G è:

$$P_M(G) = \left\{ x \in \mathbb{R}^{|E|} : \begin{array}{ll} \sum_{e \in \delta(v)} y_e \leq 1 & \forall v \in V \\ \sum_{e \in E(G[U])} y_e \leq \frac{|U|-1}{2} & \forall U \subseteq V, |U| \text{ dispari} \\ y_e \geq 0 & \forall e \in E \end{array} \right\} \quad (5.1)$$

Grazie a questo risultato, possiamo dare allora una descrizione completa del politopo dei matching totali nel caso di grafi completi.

Lemma 5.2.1. *Sia $K_n = (V, E)$. Allora una descrizione completa del politopo dei matching totali di K_n è la seguente.*

$$P_T(K_n) = \left\{ (x, y) \in \mathbb{R}^{|V|+|E|} : \begin{array}{ll} \sum_{e \in \delta(v)} y_e + x_v \leq 1 & \forall v \in V \text{ (A)} \\ \sum_{v \in V} x_v \leq 1 & \text{(B)} \\ \sum_{e \in E[U]} y_e \leq \frac{|U|-1}{2} & \forall U \subseteq V, |U| \text{ dispari (C)} \\ \sum_{e \in E[U]} y_e + \sum_{v \in U} x_v \leq \frac{|U|}{2} & \forall U \subseteq V, |U| \text{ pari (D)} \\ x_v, y_e \geq 0 & \forall v \in V, e \in E \text{ (E)} \end{array} \right\} \quad (5.2)$$

dove $E[U] = E(K_n[U])$.

Dimostrazione. Sia $K_n = (V, E)$ grafo completo. Sappiamo dalla Proposizione 5.1.2 che $K_{n+1} = (W, F)$ è un suo grafo totale sugli archi, e dalle osservazioni precedenti vale dunque che $P_T(K_n) = P_M(K_{n+1})$, cioè, ogni matching totale T di K_n corrisponde tramite $\phi: D(K_n) \rightarrow E(K_{n+1})$ a un matching M di K_{n+1} con $|T| = |M|$. Ricordiamo che, detti $V = \{v_1, \dots, v_n\} = V$ i vertici di K_n e $W = \{w_1, \dots, w_{n+1}\}$ quelli di K_{n+1} , e $\delta(w_{n+1}) = \{f_1, \dots, f_n\} \subseteq F$, dove $f_i = w_{n+1}w_i$ per ogni $i \in \{1, \dots, n\}$, vale che $\phi(v_i v_j) = w_i w_j$ e $\phi(v_i) = f_i$.

Sappiamo da 5.1 che una descrizione completa di $P_M(K_{n+1})$ è data da $y' \in \mathbb{R}^{|F|}$ tali che

$$\sum_{f \in \delta(w)} y'_f \leq 1 \quad \forall w \in W \quad (5.3)$$

$$\sum_{f \in F[Z]} y'_f \leq \frac{|Z|-1}{2} \quad \forall Z \subseteq W, |Z| \text{ dispari} \quad (5.4)$$

$$y'_f \geq 0 \quad \forall f \in F \quad (5.5)$$

dove $F[Z] = E(K_{n+1}[Z]) \subseteq F$.

Consideriamo innanzitutto le disequazioni (5.3). Se $w = w_i$ con $i \neq n+1$, abbiamo che $\delta(w_i) = \{w_i w_j : j \in \{1, \dots, n\} \setminus \{i\}\} \cup \{f_i\}$ che corrispondono tramite ϕ a $\{v_i v_j : j \in \{1, \dots, n\} \setminus \{i\}\} \cup \{v_i\} = \delta(v_i) \cup \{v_i\} \subseteq D(K_n)$. Dunque la (5.3) relativa a w_i corrisponde alla (A) relativa a v_i , per ogni $i \in \{1, \dots, n\}$. Se invece $w = w_{n+1}$, abbiamo che $\delta(w_{n+1}) = \{f_1, \dots, f_n\}$ che corrispondono tramite ϕ ai vertici $\{v_1, \dots, v_n\}$ di K_n . Dunque la (5.3) relativa a w_{n+1} corrisponde alla (B).

Consideriamo ora le disequazioni (5.4). Se $|Z| = 1$, abbiamo $F[Z] = \emptyset$. Dunque supponiamo $|Z| \geq 3$, $|Z|$ dispari. Se $w_{n+1} \notin Z$, gli archi di $F[Z]$ corrispondono tramite ϕ agli archi di $E[U]$ con $U = \{v_i \in V : \phi(v_i) \in Z\}$. Dunque la (5.4) relativa a $Z \not\ni w_{n+1}$ corrisponde alla (C) relativa ad $U = \{v_i \in V : \phi(v_i) \in Z\}$. Se invece $w_{n+1} \in Z$, gli archi di $F[Z]$ che non hanno come estremo w_{n+1} corrispondono tramite ϕ a quelli di $E[U]$ con $U = \{v_i \in V : \phi(v_i) \in Z \setminus \{w_{n+1}\}\}$ (notiamo che $|U|$ è pari), e gli archi di $F[Z]$ che hanno come estremo w_{n+1} corrispondono tramite ϕ ai vertici di U . Dunque la (5.4) relativa a $Z \ni w_{n+1}$ corrisponde alla (D) relativa ad $U = \{v_i \in V : \phi(v_i) \in Z \setminus \{w_{n+1}\}\}$.

Infine, visto che ogni arco di F corrisponde ad un elemento in $D = V \cup E$, le disequazioni (5.5) corrispondono alle (E). \square

Sappiamo che le disuguaglianze di vertice totale, di arco totale e di non negatività definiscono faccette di $P_T(G)$ per ogni grafo G , e che dunque devono comparire in ogni descrizione completa del politopo. Dunque dobbiamo aspettarci che le disuguaglianze appena citate compaiano nella descrizione fornita al Lemma 5.2.1.

Infatti, le disuguaglianze di vertice totale sono le (A) e quelle di non negatività le (E). Consideriamo $U = \{v_i, v_j\} \subseteq V$ e chiamiamo $e = v_i v_j$; allora la (D) si scrive $y_e + x_{v_i} + x_{v_j} \leq 1$. Dunque le disuguaglianze di arco totale corrispondono alle (D) relative ad $U \subseteq V$ con $|U| = 2$ e $G[U]$ connesso.

Dalla Proposizione 3.2.5 sappiamo che per ogni grafo G le disequazioni di clique massimale, e di 3-ciclo definiscono faccette di $P_T(G)$; anche le disequazioni associate a queste due famiglie di clique massimali devono dunque comparire nella descrizione di $P_T(K_n)$ appena fornita. Infatti, consideriamo $U = \{v_i, v_j, v_k\} \subseteq V$ e chiamiamo $a = v_i v_j$, $b = v_j v_k$, $c = v_k v_i$; allora la (C) si scrive $y_a + y_b + y_c \leq 1$. Dunque le disequazioni di 3-ciclo corrispondono alle (C) relative ad $U \subseteq V$ con $|U| = 3$ e $G[U]$ connesso. Inoltre, l'unica clique massimale di $K_n = (V, E)$ è V , e la disuguaglianza associata alla clique V è la (B).

Mostriamo ora, con la Proposizione 5.2.1, che tutte le disequazioni (5.4) definiscono faccette di $P_M(K_n)$. In questo modo avremo che le (C) e (D) definiscono tutte faccette di $P_T(K_n)$. Allora, dal Lemma 5.2.1, si ottiene il seguente.

Teorema 5.2.1. *Sia $K_n = (V, E)$. Allora la (5.2) è una descrizione completa e non ridondante del politopo dei matching totali di K_n .*

La seguente è una dimostrazione alternativa nel caso di grafi completi del Teorema 25.5 di [9].

Proposizione 5.2.1. *Sia $K_n = (V, E)$, $n \geq 3$, e sia $U \subseteq V$ con $|U| \geq 3$ dispari. Allora la disequazione*

$$\sum_{e \in E[U]} y_e \leq \frac{|U| - 1}{2} \quad (5.6)$$

definisce una faccetta di $P_M(K_n)$.

Dimostrazione. Sia $H = \{z \in P_M(K_n) : \tilde{\lambda}^T z = \tilde{\lambda}_0\}$ l'iperpiano associato alla (5.6), cioè possiamo assumere sia $\tilde{\lambda}_e = 1$ per ogni $e \in E[U]$, che sia $\tilde{\lambda}_f = 0$ per ogni $f \notin E[U]$ e $\tilde{\lambda}_0 = \frac{|U|-1}{2}$. Intanto, la (5.6) è valida per $P_M(K_n)$ ((5.1)). Allora $\tilde{F} = H \cap P_M(K_n)$ è una faccia di $P_M(K_n)$, contenuta in una faccetta $F = \{z \in P_M(K_n) : \lambda^T z = \lambda_0\}$ del politopo.

Vogliamo mostrare che $F = \tilde{F}$, cioè che esiste $a \in \mathbb{R}$ tale che $\lambda = a\tilde{\lambda}$ e $\lambda_0 = a\tilde{\lambda}_0$.

Sia $f \in E \setminus E[U]$. Dunque possiamo supporre $f = xy$ con $x \notin U$. Se $y \in U$, prendiamo una partizione dei nodi di $U \setminus \{y\}$ in coppie, chiamiamo T il matching di K_n indotto dalla partizione, e prendiamo $T' = T \cup \{f\}$. Se invece $y \notin U$, fissiamo $z \in U$ e costruiamo il matching T a partire dalla partizione in coppie di $U \setminus \{z\}$; definiamo anche in questo caso $T' = T \cup \{f\}$. In entrambi i casi abbiamo che T e T' sono matching di K_n i cui vettori caratteristici (come sottoinsiemi dell'insieme E degli archi) appartengono ad \tilde{F} e dunque a F . Allora abbiamo $\lambda^T \chi[T] = \lambda^T \chi[T']$, da cui, per costruzione, $\lambda_f = 0$. Dunque $\lambda_f = 0$ per ogni $f \notin E[U]$.

Sia ancora T il matching costruito fissando $u \in U$ e partizionando i nodi di $U \setminus \{u\}$ in coppie. Scegliamo un arco $e = u_1 u_2 \in T$, quindi $u_1, u_2 \in U \setminus \{u\}$. Allora $T' = (T \setminus \{e\}) \cup \{uu_1\}$ e $T'' = (T \setminus \{e\}) \cup \{uu_2\}$ sono ancora matching di K_n i cui vettori caratteristici appartengono a \tilde{F} , e dunque ad F . Dunque abbiamo $\lambda^T \chi[T] = \lambda^T \chi[T'] = \lambda^T \chi[T'']$, e per costruzione questo implica $\lambda_{u_1 u_2} = \lambda_{uu_1} = \lambda_{uu_2}$. Notiamo che questa costruzione vale per ogni scelta di tre nodi $u, u_1, u_2 \in U$, e dunque si ha $\lambda_e = \lambda_f = \lambda_g$ per ogni $e, f, g \in E[U]$ che appartengono ad un ciclo di lunghezza tre in K_n . Da questo si ottiene facilmente che $\lambda_{e_1} = \lambda_{e_2}$ per ogni $e_1, e_2 \in E[U]$.

Dunque esiste $a \in \mathbb{R}$ tale che $\lambda = a\tilde{\lambda}$. Visto che $\chi[T] \in \tilde{F} \subseteq F$, abbiamo che $\lambda_0 = \lambda^T \chi[T] = a(\tilde{\lambda}^T \chi[T]) = a\tilde{\lambda}_0$, da cui $(\lambda, \lambda_0) = a(\tilde{\lambda}, \tilde{\lambda}_0)$, come si voleva. \square

Proponiamo ora il risultato sulla massima cardinalità di un matching totale in grafi completi ottenuto in [6] (Teorema 4).

Proposizione 5.2.2. *Sia $K_n = (V, E)$ il grafo completo con $n \geq 1$ vertici. Allora*

$$\alpha_T(K_n) = \left\lceil \frac{n}{2} \right\rceil.$$

Inoltre, se $n \equiv 1 \pmod{2}$, ogni matching totale massimo deve contenere esattamente un vertice.

Dimostrazione. Sia T un matching totale di K_n . Notiamo che $V \cap T \leq 1$, perché tutti i vertici sono adiacenti in K_n . Supponiamo non ci siano vertici in T . Allora in T ci sono solo archi, cioè T è un matching di K_n . Si vede facilmente che la massima cardinalità di un matching in K_n è $\lfloor \frac{n}{2} \rfloor$. Se invece T include (esattamente) un vertice $v \in V$, gli unici altri elementi che possono essere presenti in T sono gli archi che non hanno come estremo v , cioè gli archi di $K_n \setminus v$, che è isomorfo a K_{n-1} . Quindi se T contiene un vertice, la sua massima cardinalità sarà uno più di quella del matching massimo di K_{n-1} , cioè $1 + \lfloor \frac{n-1}{2} \rfloor = \lceil \frac{n}{2} \rceil$. Visto che $\lfloor \frac{n}{2} \rfloor \leq \lceil \frac{n}{2} \rceil$, è verificata

la formula per $\alpha_T(K_n)$. Inoltre, se $n \equiv 1 \pmod{2}$, si ha $\lfloor \frac{n}{2} \rfloor < \lceil \frac{n}{2} \rceil$ e dunque un matching totale massimo è ottenuto solo con la costruzione del secondo tipo, cioè quando nel matching totale è presente un vertice. \square

Dalla proposizione precedente abbiamo che la disequazione

$$\sum_{v \in V(K_n)} x_v + \sum_{e \in E(K_n)} y_e \leq \left\lceil \frac{n}{2} \right\rceil \quad (5.7)$$

è valida per $P_T(K_n)$, e ne definisce una faccia non vuota. Tuttavia, come accade per la disequazione legata alla cardinalità massima di un matching totale di un ciclo (Proposizione 3.3.2), la (5.7) non definisce sempre una faccetta di $P_T(K_n)$. In particolare, confrontandola con la descrizione (5.2), si vede che la (5.7) definisce una faccetta di $P_T(K_n)$ se e solo se $n \equiv 0 \pmod{2}$.

Capitolo 6

Grafi bipartiti completi

In questo capitolo, seguendo la trattazione di [3] e [4], introdurremo le disequazioni rialzate di biclique non bilanciata, e mostreremo che una descrizione completa e non ridondante del politopo dei matching totali di un grafo bipartito completo è data da queste ultime, dalle disequazioni di biclique bilanciata, da quelle di arco e vertice totale e da quelle di non negatività.

Riportiamo intanto la formula per la cardinalità massima di un matching totale di un grafo bipartito completo, trovata in [6] (Teorema 5).

Proposizione 6.0.1. *Sia $K_{n,m} = (V, E)$ il grafo bipartito completo con partizione dei vertici $V = N \cup M$, $|N| = n \geq 1$, $|M| = m \geq 1$. Allora*

$$\alpha_T(K_{n,m}) = \max\{n, m\}.$$

Dimostrazione. Sia T un matching totale di $K_{n,m}$. Notiamo che almeno uno fra $T \cap N$ e $T \cap M$ deve essere vuoto. Infatti, presi due nodi $v \in N$ e $u \in M$ questi sono adiacenti, e non possono dunque appartenere entrambi a T . Se $T \cap M = \emptyset$, allora T può contenere solo vertici di N o archi. Notiamo che ogni arco ha un estremo in N . Dunque T al massimo può contenere un elemento per ogni nodo di N , cioè n elementi. Analogamente, se $T \cap N = \emptyset$, allora T può contenere al massimo m elementi. Dunque la cardinalità massima di un matching totale di $K_{n,m}$ è $\max\{n, m\}$. \square

6.1 Formulazione estesa e descrizione di $P_T(K_{r,s})$

Sappiamo che le disequazioni di non negatività, di vertice totale e di arco totale definiscono faccette di $P_T(G)$. Sappiamo inoltre che, data una biclique bilanciata indotta di G , la corrispondente disequazione di biclique bilanciata definisce una faccetta di $P_T(G)$. Non vale lo stesso per una biclique non bilanciata.

Da [4] (Proposizione 36) però sappiamo che vale il seguente risultato. Data $K_{p,q}$ con $1 < p < q$ una biclique non bilanciata, con P e Q i sottoinsiemi di vertici indipendenti massimali, per ogni

$u \in P$ fissato, la disequazione rialzata di biclique non bilanciata

$$\sum_{v \in R \setminus \{u\}} x_v + (q - p + 1)x_u + \sum_{w \in S} x_w + \sum_{e \in E(K_{p,q})} y_e \leq s \quad (6.1)$$

definisce una faccetta di $P_T(K_{p,q})$.

Da questo segue ([4], Teorema 42) che, dato un grafo bipartito $G = K_{r,s}$, per ogni biclique non bilanciata di G la corrispondente disequazione rialzata di biclique non bilanciata definisce una faccetta di $P_T(G)$.

In questa sezione considereremo sempre G grafo bipartito completo, con $V(G) = R \cup S$ dove $R = \{v_1, \dots, v_r\}$ ed $S = \{w_1, \dots, w_s\}$ sono i due insiemi indipendenti massimali di G . Ricordiamo che un matching totale che contiene un nodo di R (rispettivamente, di S) non può contenere alcun vertice di S (rispettivamente, di R). Dunque un qualsiasi matching totale T di G soddisfa almeno una fra $T \cap R = \emptyset$ e $T \cap S = \emptyset$. Allora possiamo risolvere il TMP nel seguente modo: troviamo l'insieme indipendente di cardinalità massima in $T(G) \setminus R$ (cioè il grafo totale di G in cui sono rimossi i nodi corrispondenti ad elementi di R) e quello in $T(G) \setminus S$, e poi selezioniamo fra le due la soluzione migliore.

Proposizione 6.1.1. *Sia $U = R$ o $U = S$. Allora il grafo $T(G) \setminus U$ è perfetto.*

Dimostrazione. Senza perdita di generalità supponiamo sia $U = S$. Denotiamo con (r_i, s_j) il vertice di $T(G)$ corrispondente in G all'arco $e = v_i w_j$ e con r_i il vertice di $T(G)$ corrispondente in G al nodo v_i . I vertici in $T(G) \setminus S$ sono tutti dei due tipi appena descritti. Per provare che $T(G) \setminus S$ è perfetto, proviamo che nè lui nè il suo complementare contengono come sottografi indotti cicli dispari di lunghezza maggiore o uguale a 5.

1. Mostriamo che $T(G) \setminus S$ non contiene come sottografi indotti cicli dispari di lunghezza maggiore o uguale a 5. Consideriamo un nodo r_i . I nodi adiacenti a r_i in $T(G) \setminus S$ sono tutti e soli quelli corrispondenti agli archi incidenti in v_i nel grafo G . Sappiamo che un nodo e gli archi incidenti nel nodo formano una clique (massimale) nel grafo totale. Dunque r_i appartiene ad una clique in $T(G) \setminus S$ e non è adiacente ad alcun nodo in $T(G) \setminus S$ che non sia nella clique. Allora r_i non può essere contenuto in nessun buco dispari di $T(G) \setminus S$. Sia C un buco dispari di $T(G) \setminus S$. Allora C contiene solo vertici del tipo (r_i, s_j) . Chiamiamo r_i la prima componente del vertice, e s_i la seconda. Presi tre vertici consecutivi in C questi non possono avere tutti la stessa prima o seconda componente (sarebbero tutti incidenti nello stesso vertice in G e dunque formerebbero una clique). Invece, due vertici consecutivi in C devono avere una componente uguale (per essere consecutivi in C , devono essere adiacenti in $T(G)$, e cioè devono essere incidenti in uno stesso vertice in G , e quindi devono avere una delle componenti in comune). Sia $C = \{e_0, \dots, e_{k-1}\}$. Possiamo assumere che per i dispari e_i abbia in comune con e_{i+1} la prima componente, e con e_{i-1} la seconda (gli indici sono scritti modulo k). Ma questa indicizzazione per i vertici di C è in contraddizione con la disparità del numero di nodi di C .
2. Ora mostriamo che $(T(G) \setminus S)^C$ non contiene come sottografi indotti cicli dispari di lunghezza maggiore o uguale a 5. Sia $C = \{e_0, \dots, e_{k-1}\}$ un buco dispari di $(T(G) \setminus S)^C$. Notiamo intanto

che C non può contenere nodi di R ; se fosse infatti che $r_i \in R$ è un nodo di C , avremmo che $e_{\lfloor \frac{k}{2} \rfloor} = (r_i, s_j)$ e $e_{\lceil \frac{k}{2} \rceil} = (r_i, s_l)$ (perché $e_{\lfloor \frac{k}{2} \rfloor}$ e $e_{\lceil \frac{k}{2} \rceil}$ non devono essere adiacenti a r_i in $(T(G) \setminus S)^C$, e dunque devono essere adiacenti a r_i in $T(G) \setminus S$, ma gli unici nodi adiacenti a r_i in $T(G) \setminus S$ sono gli quelli corrispondenti agli archi incidenti in r_i), ma allora $e_{\lfloor \frac{k}{2} \rfloor}$ e $e_{\lceil \frac{k}{2} \rceil}$ sono adiacenti in $T(G) \setminus S$ e dunque non lo sono in $(T(G) \setminus S)^C$, ma questa è una contraddizione, perché sono nodi consecutivi di C .

Dunque i vertici di C sono tutti del tipo (r_i, s_j) . Notiamo che due vertici di questo tipo non sono adiacenti in $(T(G) \setminus S)^C$ se e solo se hanno una delle due entrate in comune. Senza perdita di generalità sia $e_0 = (r_1, s_1)$.

Supponiamo $k = 5$. In C_5 (sottografo indotto di $(T(G) \setminus S)^C$) si ha che e_2 e e_3 non sono adiacenti a e_0 ma sono adiacenti l'un l'altro. Allora senza perdita di generalità possiamo assumere che $e_2 = (r_1, s_2)$ e $e_3 = (r_2, s_1)$. Visto che e_1 è adiacente a e_0 , ma non a e_3 , dobbiamo avere che $e_1 = (r_2, s_t)$ con $t \neq 1$; e visto che e_1 è adiacente a e_2 , deve anche essere $t \neq 2$. Similmente, considerando e_4 , otteniamo che $e_4 = (r_p, s_2)$ con $p \neq 1, 2$. Ma v_1 e v_4 non sono adiacenti, e dunque deve essere o $t = 2$ o $p = 2$, ma questa è una contraddizione.

Supponiamo ora che sia $k \geq 7$. Come sopra possiamo supporre che $e_{\lfloor \frac{k}{2} \rfloor} = (r_1, s_2)$ e $e_{\lceil \frac{k}{2} \rceil} = (r_2, s_1)$. Visto che $e_{\lfloor \frac{k}{2} \rfloor - 1}$ non è adiacente né a v_0 né a $e_{\lfloor \frac{k}{2} \rfloor}$, deve essere $e_{\lfloor \frac{k}{2} \rfloor - 1} = (r_t, s_1)$ con $t \neq 1, 2$. Analogamente, $e_{\lceil \frac{k}{2} \rceil + 1} = (r_1, s_p)$ con $p \neq 1, 2$. Ma $e_{\lfloor \frac{k}{2} \rfloor - 1}$ e $e_{\lceil \frac{k}{2} \rceil + 1}$ non sono adiacenti, e dunque deve essere che $t = 1$ o $p = 1$, che è una contraddizione.

□

Definiamo i seguenti due politopi:

- $P_R = \{z \in P_T(G) : x_w = 0 \text{ per } w \in S\} = \{z \in P_{STAB}(T(G)) : x_w = 0 \text{ per } w \in S\};$
- $P_S = \{z \in P_T(G) : x_v = 0 \text{ per } v \in R\} = \{z \in P_{STAB}(T(G)) : x_v = 0 \text{ per } v \in R\}.$

Sia $\phi_R: \mathbb{R}_+^{|R|+|E|} \rightarrow \mathbb{R}_+^{|R|+|S|+|E|}$ la funzione che manda (x, y) in $(x, 0_S, y)$ e $\phi_S: \mathbb{R}_+^{|S|+|E|} \rightarrow \mathbb{R}_+^{|R|+|S|+|E|}$ quella che manda (z, y) in $(0_R, z, y)$.

Notiamo che $P_R = \phi_R(P_{STAB}(T(G) \setminus S))$; infatti, P_R è l'involuppo convesso dei vettori caratteristici degli insiemi indipendenti I di $T(G)$ tali che $I \cap S = \emptyset$ (hanno tutte le coordinate corrispondenti a vertici di S nulle). Similmente $P_S = \phi_S(P_{STAB}(T(G) \setminus R))$.

Abbiamo mostrato che $T(G) \setminus U$ (con $U = R$ o $U = S$) è perfetto, e dunque

$$P_U = \phi_U \left(\left\{ x \in \mathbb{R}^{|V(T(G) \setminus U)|} : \sum_{u \in K} x_u \leq 1 \forall K \in \omega, x_u \geq 0 \forall u \in V(T(G) \setminus U) \right\} \right) \quad (6.2)$$

dove ω è l'insieme delle clique massimali di $T(G) \setminus U$.

Notiamo che, visto che in G non ci sono clique di cardinalità maggiore o uguale a tre, nè cicli di lunghezza tre, abbiamo che, per la Proposizione 3.2.5, le uniche clique massimali in $T(G)$ sono quelle che corrispondono in G a un nodo e agli archi incidenti in quel nodo, oppure ad un arco e ai suoi estremi. Ogni arco di G ha un estremo in R e uno in S , dunque, preso $U = R$ oppure $U = S$, in $T(G) \setminus U$ non ci sono clique corrispondenti in G a un arco e ai suoi estremi. Allora le

uniche clique massimali in $T(G) \setminus U$ (cioè gli unici elementi di ω) sono quelle che corrispondono in G a un nodo di $\{R, S\} \setminus U$ e agli archi a lui incidenti, oppure ad archi incidenti in un nodo di U .

In particolare, $T(G) \setminus U$ ha un numero di clique massimali che cresce in modo lineare con la dimensione di G (c'è esattamente una clique massimale per ogni nodo in $V(G)$). Allora possiamo riscrivere la (6.2) e ottenere una descrizione compatta di P_R e di P_S . Abbiamo che

$$P_R = \left\{ (x, y) \in \mathbb{R}_+^{|V|+|E|} : x_u + \sum_{e \in \delta(u)} y_e \leq 1, \forall u \in R; \sum_{e \in \delta(u)} y_e \leq 1, \forall u \in S; z_u = 0 \forall u \in S \right\};$$

$$P_S = \left\{ (x, y) \in \mathbb{R}_+^{|V|+|E|} : z_u + \sum_{e \in \delta(u)} y_e \leq 1, \forall u \in S; \sum_{e \in \delta(u)} y_e \leq 1, \forall u \in R; x_u = 0 \forall u \in R \right\}.$$

Ricordando che ogni matching totale T di G è tale che almeno una fra $T \cap R = \emptyset$ e $T \cap S = \emptyset$ è soddisfatta, possiamo scrivere che $P_T(G) = \text{conv}(P_R \cup P_S)$.

In [9] (Teorema 2.1) si prova che l'involuppo convesso di due politopi ha una formulazione estesa che può essere descritta in termini della formulazione originaria dei politopi. Applicando questo risultato al caso di P_R e P_S , si ottiene il seguente.

Teorema 6.1.1. *La seguente è una formulazione estesa di $P_T(G)$, con la proiezione sulle componenti (x, y) :*

$$Q = \left\{ (x, y, \lambda, y_e^1) \in \mathbb{R}^{|V|+|E|+1+|E|} : \begin{array}{ll} x_v + \sum_{e \in \delta(v)} y_e^1 - \lambda \leq 0 & \forall v \in R, [u_v^1] \\ \sum_{e \in \delta(w)} y_e^1 - \lambda \leq 0 & \forall w \in S, [u_w^1] \\ x_w + \sum_{e \in \delta(w)} (y_e - y_e^1) + \lambda \leq 1 & \forall w \in S, [u_w^2] \\ \sum_{e \in \delta(v)} (y_e - y_e^1) + \lambda \leq 1 & \forall v \in R, [u_v^2] \\ -y_e^1 \leq 0 & \forall e \in E, [u_e^1] \\ -y_e + y_e^1 \leq 0 & \forall e \in E, [u_e^2] \\ -\lambda \leq 0 & [u_\lambda^1] \\ \lambda \leq 1 & [u_\lambda^2] \end{array} \right\} \quad (6.3)$$

dove fra parentesi quadre sono riportati i nomi dei moltiplicatori duali di ogni vincolo.

Ricordiamo il **Teorema 1.2.3**.

Sia $Q = \{(x, z) \in \mathbb{R}^{n+p} : Ax + Bz \leq b\}$ dove $A \in M_{m,n}(\mathbb{R})$, $B \in M_{m,p}(\mathbb{R})$. Definiamo il cono di proiezione di Q come $C_P = \{u \in \mathbb{R}^m : u^T B = 0, u \geq 0\}$. Allora la proiezione di Q nello spazio x è:

$$\text{Proj}_x(Q) = \{x \in \mathbb{R}^n : \bar{u}^T A x \leq \bar{u}^T b, \forall \bar{u} \text{ raggio estremo di } C_P\}.$$

Applichiamo questo risultato alla formulazione estesa per $P_T(G)$ del Teorema 6.1.1.

Proposizione 6.1.2. *Sia $G = (V, E)$ grafo bipartito completo con $V = R \cup S$. Allora*

$$P_T(G) = \left\{ (x, y) \in \mathbb{R}_+^{|V|+|E|} : \sum_{v \in R} u_v^1 x_v + \sum_{w \in S} u_w^2 x_w + \sum_{e=vw \in E} \min_{j=1,2} (u_v^j + u_w^j) y_e \leq \max_{j=1,2} \sum_{q \in V} u_q^j, \forall u \in Y \right\} \quad (6.4)$$

dove Y è l'insieme dei vettori $u \in \mathbb{R}_+^{2(|R|+|S|)}$ che soddisfano $2(|R|+|S|)-1$ vincoli linearmente indipendenti dall'insieme seguente:

$$\begin{aligned} u &= 0 && \text{(li chiamiamo } Y\text{-vincoli di non negatività),} \\ u_v^1 + u_w^1 &= u_v^2 + u_w^2 && \text{per } v \in R, w \in S \text{ (li chiamiamo } Y\text{-vincoli di arco),} \\ \sum_{q \in V} u_q^1 &= \sum_{q \in V} u_q^2 && \text{(lo chiamiamo } Y\text{-vincolo dei vertici).} \end{aligned} \quad (6.5)$$

Dimostrazione. Scriviamo intanto una descrizione del cono di proiezione della formulazione estesa per $P_T(G)$ come nel Teorema 1.2.3. Mostriamo che è

$$C_P = \left\{ u \in \mathbb{R}^{2(|V|+|E|+1)} : \begin{aligned} &u_v^1 + u_w^1 - u_e^1 = u_v^2 + u_w^2 - u_e^2, \forall e = vw \in E \\ &\sum_{q \in V} u_q^1 + u_\lambda^1 = \sum_{q \in V} u_q^2 + u_\lambda^2 \\ &u \geq 0 \end{aligned} \right\}. \quad (6.6)$$

Infatti, consideriamo la matrice B associata in (6.3) alle variabili aggiunte (oltre a (x, y)). Sappiamo che i vettori $u \in C_P$ sono tali che $u^T B = 0$. Nominiamo le entrate di u come i rispettivi moltiplicatori duali. Le equazioni corrispondenti all'equazione matriciale appena scritta sono allora le seguenti:

- lungo la colonna di B corrispondente ad una fissata incognita del tipo y_e^1 con $e = vw$ (e dunque $e \in \delta(v)$ e $e \in \delta(w)$) otteniamo: $u_v^1 + u_w^1 - u_e^1 - u_v^2 - u_w^2 + u_e^2 = 0$ che corrisponde alla prima equazione (per $e \in E$ fissato) di (6.6);
- lungo la colonna di B corrispondente a λ otteniamo $-\sum_{v \in R} u_v^1 - \sum_{w \in S} u_w^1 + \sum_{w \in S} u_w^2 + \sum_{v \in R} u_v^2 - u_\lambda^1 + u_\lambda^2 = 0$ che corrisponde alla seconda equazione di (6.6).

Possiamo allora applicare il Teorema 1.2.3 e ottenere che $P_T(G)$ è il politopo descritto dalle disequazioni della forma:

$$\sum_{v \in R} \bar{u}_v^1 x_v + \sum_{w \in S} \bar{u}_w^2 x_w + \sum_{e=vw \in E} (\bar{u}_v^2 + \bar{u}_w^2 - \bar{u}_e^2) y_e \leq \sum_{w \in V} \bar{u}_w^2 + \bar{u}_\lambda^2 \quad (6.7)$$

dove \bar{u} è un raggio estremo di C_P , e cioè in particolare \bar{u} soddisfa le equazioni di (6.6).

Mostriamo che possiamo supporre che, per $e \in E$, almeno una fra le entrate \bar{u}_e^1 e \bar{u}_e^2 è nulla, e almeno una fra \bar{u}_λ^1 e \bar{u}_λ^2 è nulla (ricordiamo che tutte le entrate sono non negative). Infatti, se sia \bar{u}_e^1 che \bar{u}_e^2 fossero strettamente positive, potremmo prendere il vettore \tilde{u} ottenuto da \bar{u}

riducendo le entrate in analisi della quantità $\min\{\bar{u}_e^1, \bar{u}_e^2\}$, che sarebbe ancora in C_P (soddisfa ancora le equazioni di (6.6)) e fornirebbe una disequazione più forte della (6.7). Analogamente si può dire per \bar{u}_λ^1 e \bar{u}_λ^2 .

Usando questa osservazione e le equazioni di (6.6) possiamo allora riscrivere la (6.7) come

$$\sum_{v \in R} \bar{u}_v^1 x_v + \sum_{w \in S} \bar{u}_w^2 x_w + \sum_{e=vw \in E} \min_{j=1,2} (\bar{u}_v^j + \bar{u}_w^j) y_e \leq \max_{j=1,2} \sum_{q \in V} \bar{u}_q^j. \quad (6.8)$$

Sia \bar{u} un raggio estremo di C_P . Mostriamo che il vettore ottenuto da \bar{u} rimuovendo le entrate $\{u_e^1, u_e^2\}_{e \in E}, u_\lambda^1, u_\lambda^2$ è un vettore con entrate non negative che soddisfa $2(|R| + |S|) - 1$ vincoli linearmente indipendenti di (6.5). Visto che \bar{u} è un raggio estremo di C_P , \bar{u} soddisfa ad uguaglianza un insieme \mathbb{S} di $2(|R| + |S|) + 2|E| + 1$ vincoli linearmente indipendenti fra quelli di (6.6) (notiamo che qualsiasi vettore di C_P soddisfa ad uguaglianza almeno $|E| + 1$ vincoli).

Possiamo assumere che \mathbb{S} contenga l'insieme \mathbb{S}' di vincoli linearmente indipendenti costruito come segue. Per $e = vw \in E$, se $\bar{u}_e^1 = \bar{u}_e^2 = 0$, i vincoli $u_e^1 = 0$ e $u_e^2 = 0$ siano in \mathbb{S}' . Altrimenti, come argomentato sopra, deve essere che una delle due entrate sia nulla (\bar{u}_e^j), e l'altra strettamente positiva; in questo caso inseriamo $u_e^j = 0$ e $u_v^1 + u_w^1 - u_e^1 = u_v^2 + u_w^2 - u_e^2$ in \mathbb{S}' . Similmente, se $\bar{u}_\lambda^1 = \bar{u}_\lambda^2 = 0$, inseriamo i vincoli $u_\lambda^1 = 0$ e $u_\lambda^2 = 0$ in \mathbb{S}' ; altrimenti, inseriamo $u_\lambda^j = 0$ ($j = 1$ o $j = 2$) e $\sum_{q \in V} u_q^1 + u_\lambda^1 = \sum_{q \in V} u_q^2 + u_\lambda^2$.

Si vede facilmente che i vincoli in \mathbb{S}' sono linearmente indipendenti e che $|\mathbb{S}'| = 2|E| + 2$. Dunque $\mathbb{S} \setminus \mathbb{S}'$ è un insieme di $2(|R| + |S|) - 1$ vincoli linearmente indipendenti.

Notiamo ora che un vincolo s del primo tipo di (6.6) appartiene a $\mathbb{S} \setminus \mathbb{S}'$ solo se i vincoli $u_e^1 = 0$ e $u_e^2 = 0$ sono in \mathbb{S}' (dove u_e^1 e u_e^2 sono le variabili che compaiono nel vincolo s), e dunque solo se \bar{u}_e^1 e \bar{u}_e^2 sono nulle. In particolare, in questo caso \bar{u} soddisfa $\bar{u}_v^1 + \bar{u}_w^1 = \bar{u}_v^2 + \bar{u}_w^2$. Similmente, un vincolo t del primo tipo di (6.6) appartiene a $\mathbb{S} \setminus \mathbb{S}'$ solo se $\sum_{q \in V} \bar{u}_q^1 = \sum_{q \in V} \bar{u}_q^2$.

Allora \bar{u} soddisfa ad uguaglianza $2(|R| + |S|) - 1$ vincoli di (6.5), come si voleva.

Inoltre, ogni vettore con entrate non negative $\{u_q^1, u_q^2\}_{q \in V}$ che soddisfa vincoli di (6.5) può essere esteso a un vettore di C_P aggiungendo in modo opportuno le componenti $\{u_e^1, u_e^2\}_{e \in E}, u_\lambda^1, u_\lambda^2$. \square

Notiamo che gli Y -vincoli di non negatività sono uno per ogni entrata di u , cioè sono $2(|R| + |S|)$. Gli Y -vincoli di arco sono uno per ogni arco in G , cioè sono $|R||S|$. Dunque il numero di vincoli fra cui è possibile scegliere è $2(|R| + |S|) + |R||S| + 1$.

6.2 Interpretazione della descrizione di $P_T(K_{r,s})$

Con la Proposizione 6.1.2 abbiamo ottenuto una descrizione completa di $P_T(G)$. In questa sezione studiamo come interpretare i vettori $u \in Y$ per arrivare ad una descrizione di $P_T(G)$ che non li coinvolga.

Chiamiamo *valido* un vettore u che appartiene all'insieme Y definito come nella proposizione 6.1.2 ($u \in \mathbb{R}^{2(|R|+|S|)}$) e le entrate di u sono $\{u_v^1\}_{v \in R}, \{u_w^1\}_{w \in S}, \{u_v^2\}_{v \in R}, \{u_w^2\}_{w \in S}$, e chiamiamo la disuguaglianza della descrizione di $P_T(G)$ data nella proposizione 6.1.2 ottenuta da un vettore valido u *disequazione associata* ad u . Diciamo che un insieme \mathbb{S} di $2(|R| + |S|) - 1$

vincoli linearmente indipendenti di (6.5) *supporta* un vettore valido u se ogni vincolo nell'insieme è attivo in u .

Inoltre chiamiamo *fondamentale* un vettore u valido tale che la disuguaglianza associata ad u definisce una faccetta di $P_T(G)$ diversa da quelle date dalle disuguaglianze di arco e vertice totale, da quelle di non negatività.

Sia \mathbb{S} un insieme di vincoli che supporta un vettore valido u . Definiamo $G(\mathbb{S})$ il grafo tale che:

- I vertici di $G(\mathbb{S})$ sono quelli di $G = K_{r,s}$;
- Ogni vertice q è colorato di blu se il vincolo $u_q^1 = 0$ è in \mathbb{S} , e di rosso se il vincolo $u_q^2 = 0$ è in \mathbb{S} ;
- L'arco vw (con $v \in R$ e $w \in S$) appartiene a $E(G(\mathbb{S}))$ se il vincolo $u_v^1 + u_w^1 = u_v^2 + u_w^2$ è in \mathbb{S} .

Notiamo che $G(\mathbb{S})$ è un sottografo di $G = K_{r,s}$, in cui ad ogni nodo è stato assegnato nessuno, uno o due colori fra blu e rosso.

Un nodo di $G(\mathbb{S})$ colorato sia di blu che di rosso sarà detto *bicolorato*; un nodo di $G(\mathbb{S})$ colorato esattamente di un colore (fra blu e rosso) sarà invece detto *monocromatico*. Da ora scriveremo componente connessa intendendo componente connessa non banale.

Sia \mathbb{S} un insieme di vincoli che supporta un vettore u fondamentale. \mathbb{S} è detto *canonico* se:

- Fra gli insiemi di vincoli che supportano u , massimizza il numero di colori usati per i nodi di $G(\mathbb{S})$;
- Subordinatamente alla condizione precedente, massimizza il numero di archi di $G(\mathbb{S})$.

Lemma 6.2.1. *Sia u fondamentale. Sia \mathbb{S} un insieme canonico di vincoli che lo supporta. Sia \mathbb{I} l'insieme dei nodi isolati di $G(\mathbb{S})$. Allora valgono le seguenti.*

1. $G(\mathbb{S})$ non ha cicli.
2. $G(\mathbb{S})$ contiene almeno un arco.
3. Sia $u_q^1 = 0$ (rispettivamente, $u_q^2 = 0$) per un $q \in V = R \cup S$. Allora q è colorato di blu (rispettivamente, di rosso), cioè il vincolo $u_q^1 = 0$ (rispettivamente, $u_q^2 = 0$) appartiene ad \mathbb{S} .
4. Per ogni arco $e = vw$ in $G(\mathbb{S})$, v e w sono monocromatici e colorati con colori opposti.
5. Se $\sum_{q \in V} u_q^1 = \sum_{q \in V} u_q^2$ non appartiene ad \mathbb{S} , in $G(\mathbb{S})$ c'è esattamente una componente connessa \mathbb{C} ; inoltre tutti i nodi di \mathbb{D} sono monocromatici, e tutti i nodi di \mathbb{I} sono bicolorati.
6. Se $\sum_{q \in V} u_q^1 = \sum_{q \in V} u_q^2$ appartiene ad \mathbb{S} , si possono verificare solo le due seguenti.
 - (A) In $G(\mathbb{S})$ c'è esattamente una componente connessa \mathbb{C} ; inoltre tutti i nodi di \mathbb{D} sono monocromatici, e tutti i nodi di \mathbb{I} sono bicolorati, tranne uno che è monocromatico;
 - (B) In $G(\mathbb{S})$ ci sono esattamente due componenti connesse $\mathbb{C}_\alpha, \mathbb{C}_\beta$; inoltre tutti i nodi di $\mathbb{C}_\alpha \cup \mathbb{C}_\beta$ sono monocromatici, e tutti i nodi di \mathbb{I} sono bicolorati.

Dimostrazione. 1. Visto che $G(\mathbb{S})$ è sottografo di G , e G è bipartito, ogni ciclo in $G(\mathbb{S})$ deve essere di lunghezza pari. Sia C un ciclo pari in $G(\mathbb{S})$. Siano $\{v^1, w^1, \dots, v^h, w^h\}$ i vertici di C letti lungo il ciclo. Sappiamo che allora i seguenti vincoli appartengono ad \mathbb{S} :

$$\begin{aligned} s_1 : \quad & u_{v^1}^1 + u_{w^1}^1 = u_{v^1}^2 + u_{w^1}^2 \\ s_2 : \quad & u_{w^1}^1 + u_{v^2}^1 = u_{w^1}^2 + u_{v^2}^2 \\ & \dots \\ s_{2h} : \quad & u_{w^h}^1 + u_{v^1}^1 = u_{w^h}^2 + u_{v^1}^2 \end{aligned}$$

Ma si vede che $s_1 - s_2 + s_3 - \dots - s_{2h} = 0$, il che contraddice l'indipendenza lineare dei vincoli di \mathbb{S} .

2. Supponiamo per assurdo che $E(G(\mathbb{S})) = \emptyset$. Allora nessun Y-vincolo di arco appartiene ad \mathbb{S} . Dunque gli unici Y-vincoli che possono appartenere a \mathbb{S} sono quelli di non negatività e quello dei vertici (che sono in totale $2(|R| + |S|) + 1$).

Caso A. Supponiamo che il vincolo dei vertici non appartenga ad \mathbb{S} . Allora \mathbb{S} è composto da $2(|R| + |S|) - 1$ Y-vincoli di non negatività (linearmente indipendenti). Cioè, tutti i nodi di $G(\mathbb{S})$ sono bicolorati, tranne uno ($q \in V$) che è monocromatico. Supponiamo senza perdita di generalità che v sia colorato di rosso (cioè il vincolo $u_v^2 = 0$ appartiene a \mathbb{S}). Se $u_v^1 = 0$, allora u è il vettore nullo, che non è fondamentale, perché la sua disequazione associata ($0 \leq 0$) non definisce una faccetta di $P_T(G)$. Se invece $u_v^1 > 0$, allora la disuguaglianza associata a u è $x_v \leq 1$, che è dominata dalla disuguaglianza di arco totale $x_v + x_w + y_e \leq 1$ (dove w è un vicino di v in G). Dunque, per la Proposizione 1.2.1, la disequazione associata ad u non definisce una faccetta di $P_T(G)$, e u non è fondamentale, il che è una contraddizione.

Caso B. Supponiamo invece che il vincolo dei vertici appartenga ad \mathbb{S} . Allora \mathbb{S} è composto da $2(|R| + |S|) - 2$ Y-vincoli di non negatività, cioè, o tutti i nodi tranne uno sono bicolorati e a quello rimanente non è assegnato alcun colore, o tutti i nodi tranne 2 sono bicolorati e i due rimanenti sono monocromatici. Considerando inoltre il vincolo dei vertici $\sum_{q \in V} u_q^1 = \sum_{q \in V} u_q^2$, otteniamo che devono esistere due vertici $p, q \in V$ (possono anche coincidere) tali che $u_p^1 = u_q^2$. Se fosse $u_p^1 = 0$, avremmo che u è il vettore nullo, il che implica che non è fondamentale. Dunque abbiamo che $u_p^1 = u_q^2 > 0$ per $p, q \in V$ anche coincidenti. Se p e q sono adiacenti in G (cioè sono in insiemi diversi della partizione dei vertici di G), possiamo sostituire in \mathbb{S} l'Y-vincolo dei vertici con l'Y-vincolo di arco corrispondente all'arco pq (che in questo caso ha la forma $u_p^1 = u_q^2$) e otteniamo un altro insieme di vincoli che supporta u e che permette la costruzione di un arco (questo mostra che \mathbb{S} non era canonico). Allora supponiamo che p e q appartengano allo stesso insieme della partizione dei vertici di G (senza perdita di generalità, supponiamo sia R). Anche in questo caso, la disequazione associata ad u è $x_p \leq 1$ è dominata da una opportuna disuguaglianza di arco totale, e si può concludere come sopra.

3. Supponiamo per assurdo che, senza perdita di generalità, sia $u_q^1 = 0$ con $q \in V$ non colorato di blu (cioè il vincolo $u_q^1 = 0$ non è in \mathbb{S}). Dal punto 2 sappiamo che $G(\mathbb{S})$ ha almeno un arco, cioè che \mathbb{S} contiene almeno un Y-vincolo di arco. Se $u_q^1 = 0$ è linearmente indipendente dai vincoli di \mathbb{S} , possiamo sostituire un Y-vincolo di arco in \mathbb{S} con $u_q^1 = 0$, ma questo contraddice la canonicità di \mathbb{S} . Allora $u_q^1 = 0$ può essere generato dai vincoli di \mathbb{S} . Consideriamo un insieme

minimale di vincoli di \mathbb{S} che genera $u_q^1 = 0$ (notiamo che un tale insieme deve contenere un Y-vincolo di arco incidente a v , oppure l'Y-vincolo dei vertici, in quanto sono gli unici il cui supporto contiene u_q^1). Possiamo allora sostituire uno di questi ultimi con il vincolo $u_q^1 = 0$, il che contraddice la canonicità di \mathbb{S} .

4. Mostriamo innanzitutto che v e w non possono essere colorati con lo stesso colore. Supponiamo senza perdita di generalità che siano entrambi colorati di blu. Cioè in particolare $u_v^1 = u_w^1 = 0$. Visto che vw è un arco di $G(\mathbb{S})$, l'Y-vincolo di arco corrispondente appartiene ad \mathbb{S} , e in questo caso ha la seguente forma: $u_v^2 + u_w^2 = 0$. Per la non negatività delle entrate di u si deve dunque avere $u_v^2 = u_w^2 = 0$. Dunque v e w sono entrambi bicolorati. Per il punto 3 sappiamo allora che i vincoli $u_v^1 = 0$, $u_w^1 = 0$, $u_v^2 = 0$ e $u_w^2 = 0$ appartengono tutti ad \mathbb{S} . Ma anche il Y-vincolo di arco vw è in \mathbb{S} , ed è ovviamente generato dai quattro precedenti; questo contraddice la lineare indipendenza dei vincoli di \mathbb{S} .

Ora mostriamo che v e w sono entrambi colorati (per quanto appena mostrato, dovranno allora essere entrambi monocromatici, e colorati di colori opposti). Sia C la componente connessa di $G(\mathbb{S})$ che contiene v e w . Dal punto 1, C è connessa e aciclica, dunque è un albero, e dunque ha $k \in \mathbb{N}$ nodi e $k - 1$ archi. Notiamo che in \mathbb{S} ci possono essere al massimo $2|V| - 2k$ Y-vincoli che non coinvolgono variabili di C (gli Y-vincoli di non negatività associati a nodi che non sono in C). Dunque in \mathbb{S} ci sono almeno $2(|V|) - 1 - (2|V| - 2k) = 2k - 1$ vincoli che coinvolgono variabili associate a nodi di C .

Caso A. Supponiamo allora che l'Y-vincolo dei vertici sia in \mathbb{S} . Per assurdo supponiamo a che a v non sia assegnato alcun colore. Ovviamente non può allora essere che $u_v^1 = 0$ o che $u_v^2 = 0$ (per il punto 3). Dunque $u_v^1 > 0$ e $u_v^2 > 0$. Sia $\alpha = \min\{u_v^1, u_v^2\}$ e sia \hat{u} il vettore (valido) ottenuto da u riducendo u_v^1 e u_v^2 di α . Allora la disuguaglianza associata ad u (la chiamiamo γ) si può ottenere come combinazione conica della disuguaglianza associata ad \hat{u} (la chiamiamo $\tilde{\gamma}$) e della disuguaglianza $x_v + \sum_{e \in \delta(v)} y_e \leq 1$ (la chiamiamo $\tilde{\gamma}$). Infatti, supponendo senza perdita di generalità che $v \in R$, abbiamo che:

$$\begin{aligned} \gamma : \quad & \sum_{p \in R} u_v^1 x_p + \sum_{w \in S} u_w^2 x_w + \sum_{e=pw \in E} \min_{j=1,2} (u_v^j + u_w^j) y_e \leq \max_{j=1,2} \sum_{q \in V} u_q^j \\ \gamma : \quad & \sum_{p \in R \setminus \{v\}} u_v^1 x_p + (u_v^1 - \alpha) x_v + \alpha x_v + \sum_{w \in S} u_w^2 x_w + \sum_{e=pw \in E \setminus \delta(v)} \min_{j=1,2} (u_v^j + u_w^j) y_e + \\ & + \sum_{e=vw' \in \delta(v)} \min_{j=1,2} (u_v^j + u_{w'}^j - \alpha) y_e + \alpha \sum_{e \in \delta(w')} y_e \leq \max_{j=1,2} \left(\sum_{q \in V \setminus \{v\}} u_q^j + u_v^j - \alpha \right) + \alpha \\ \gamma : \quad & \sum_{p \in R} \hat{u}_v^1 x_p + \alpha x_v + \sum_{w \in S} \hat{u}_w^2 x_w + \sum_{e=pw \in E} \min_{j=1,2} (\hat{u}_v^j + \hat{u}_w^j) y_e + \alpha \sum_{e \in \delta(w')} y_e \leq \max_{j=1,2} \sum_{q \in V} \hat{u}_q^j + \alpha \end{aligned}$$

che dunque equivale alla somma di $\tilde{\gamma}$ (con coefficiente $\alpha > 0$) e di $\hat{\gamma}$. Ma queste ultime sono entrambe valide per $P_T(G)$, e dunque, per il Corollario 1.2.1, γ non definisce una faccetta di $P_T(G)$. Allora u non è fondamentale, il che è una contraddizione.

Caso B. Supponiamo l'Y-vincolo dei vertici non sia in \mathbb{S} . Allora (ovviamente tutti gli Y-vincoli di arco associati ad archi di C appartengono ad \mathbb{S} , e sono $k - 1$) ci sono almeno k Y-vincoli di non negatività associati a nodi di C in \mathbb{S} . Supponiamo per assurdo che a v non sia assegnato alcun colore. Allora, per quanto detto finora, ci deve essere un nodo v' bicolorato

in C . Cioè v' è tale che $u_{v'}^1 = u_{v'}^2 = 0$. Sia w' un nodo adiacente a v' in C (notiamo che v' e w' appartengono a insiemi diversi della partizione dei vertici di G). Abbiamo mostrato che due nodi adiacenti in $G(\mathbb{S})$ non possono essere colorati dello stesso colore, e dunque a w' non può essere assegnato alcun colore. L'Y-vincolo di arco $v'w'$ ha la seguente forma (v' è bicoloreto) $u_{w'}^1 = u_{w'}^2$. Non può essere $u_{w'}^1 = u_{w'}^2 = 0$, altrimenti dal punto 3 avremmo che w' è colorato. Dunque deve essere $u_{w'}^1 = u_{w'}^2 > 0$. Sia u' il vettore (valido) ottenuto da u ponendo a zero $u_{w'}^1$ e $u_{w'}^2$. Allora usando le notazioni del caso A, si può scrivere $\gamma = u_{w'}^1 \tilde{\gamma} + \hat{\gamma}$ (dove questa volta $\tilde{\gamma}$ corrisponde alla disuguaglianza di vertice totale di relativa al nodo v). Si conclude come al caso A.

5. Dai punti precedenti, sappiamo che $G(\mathbb{S})$ ha una componente connessa (non banale) C , i cui nodi sono tutti monocromatici (il numero di colori assegnati in C è esattamente k). Sia k il numero di nodi in C . Abbiamo già visto che C è un albero, e che dunque ha $k - 1$ archi. Notiamo intanto che la presenza in $G(\mathbb{S})$ di una componente connessa non banale D di t nodi, in assenza di altre condizioni, riduce il numero di possibili vincoli in \mathbb{S} che riguardano i nodi di D ($2t - 1$ invece di $2t$ se non ci fossero gli archi di C , oltre all'Y-vincolo dei vertici).

Visto che l'Y-vincolo dei vertici non appartiene a \mathbb{S} per ipotesi, allora in \mathbb{S} ci sono esattamente $k + k - 1 = 2k - 1$ vincoli che riguardano (solo) i nodi di C . Quindi in \mathbb{S} ci sono esattamente $2|V| - 1 - (2k - 1) = 2(|V| - k)$ vincoli che riguardano (solo) nodi che non sono in C , ma questo, per quanto osservato prima, corrisponde al numero massimo di vincoli che non riguardano nodi C che ci possono essere in \mathbb{S} , e si ottiene solo se ogni nodo non in C è bicoloreto, e dunque isolato, cioè appartiene a \mathbb{I} .

6. Abbiamo visto al punto 5 che per ogni componente connessa C di $G(\mathbb{S})$ di k nodi ci sono in \mathbb{S} $2k - 1$ vincoli che riguardano nodi solo di C (oltre possibilmente all'Y-vincolo dei vertici). Stiamo supponendo ora che l'Y-vincolo dei vertici sia in \mathbb{S} . Sappiamo esiste sempre una componente connessa C in $G(\mathbb{S})$ (diciamo di k nodi, e che richiede $2k - 1$ vincoli in \mathbb{S}). Rimangono allora $2|V| - 1 - (2k - 1) - 1 = 2(|V| - k) - 1$ vincoli in \mathbb{S} , i quali riguardano solo nodi che non sono in C . Per quanto detto finora, è facile notare che ci sono allora solo due casi possibili:

- (A) Ci sono esattamente due componenti connesse in $G(\mathbb{S})$, i cui nodi sono tutti monocromatici, e tutti i nodi di \mathbb{I} sono bicoloreti (in questo caso i rimanenti $2(|V| - k) - 1$ vincoli vengono utilizzati in questo modo: $2h - 1$ ($h \leq |V| - k$) per i vincoli (di archi e di non negatività) della seconda componente connessa, e $2(|V| - k - h) = 2|\mathbb{I}|$ per i vincoli di non negatività dei nodi isolati).
- (B) C'è esattamente una componente connessa in $G(\mathbb{S})$, i cui nodi sono tutti monocromatici, e tutti i nodi di \mathbb{I} sono bicoloreti, tranne uno che è monocromatico (in questo caso i rimanenti $2(|V| - k) - 1$ vincoli vengono utilizzati in questo modo: $2(|V| - k) - 2$ per i vincoli di non negatività dei nodi bicoloreti di \mathbb{I} e 1 per il vincolo di non negatività del nodo monocromatico di \mathbb{I}).

□

Dopo aver studiato i vettori $u \in U$, possiamo ora concludere dando una descrizione completa e non ridondante di $P_T(G)$ che non li coinvolga.

Appuntiamo che in fase di studio dell'articolo [3], da cui derivano i risultati di questo capitolo, abbiamo notato un errore nella dimostrazione che segue, e che il sopracitato articolo è, per questo, tuttora in fase di correzione.

Teorema 6.2.1. *Una descrizione completa e non ridondante di $P_T(K_{r,s})$ è data da:*

- le disuguaglianze di non negatività;
- le disuguaglianze di vertice totale (per $v \in V(G)$ tale che $d(v) \geq 2$);
- le disuguaglianze di biclique bilanciata (comprese le disuguaglianze di arco totale);
- le disuguaglianze rialzate di biclique non bilanciata.

Dimostrazione. Sappiamo che le disuguaglianze elencate nell'enunciato definiscono tutte faccette di $P_T(G)$.

Notiamo che, per la Proposizione 6.1.2, una descrizione completa di $P_T(K_{r,s})$ è data dall'insieme delle disuguaglianze associate ai vettori $u \in Y$, cioè validi, e che per il Teorema 1.2.1 ogni disequazione associata ad $u \in Y$ che non definisce una faccetta di $P_T(K_{r,s})$ può essere rimossa. Dunque per descrivere in modo completo $P_T(K_{r,s})$, è sufficiente considerare le disequazioni di arco e vertice totale, quelle di non negatività e quelle associate a vettori u fondamentali. Inoltre, dato che la disuguaglianza associata ad $u \in Y$ dipende solo dalle entrate di u , per ogni u fondamentale possiamo considerare un insieme canonico \mathbb{S} di vincoli che supporta u .

Allora basta mostrare che per ogni u fondamentale, e dato \mathbb{S} un insieme canonico di vincoli che lo supporta (cioè con le ipotesi del Lemma 6.2.1), la disuguaglianza associata ad u corrisponde ad una delle disequazioni dell'enunciato (o ad un loro riscaldamento tramite costante positiva).

Consideriamo inoltre u in modo che la più piccola entrata di u sia 1 (basta dividere eventualmente u per il valore della sua entrata minima). Grazie ai risultati del Lemma 6.2.1, abbiamo molte informazioni sui vettori fondamentali u , e sugli insiemi di vincoli canonici \mathbb{S} .

1. Supponiamo che l' Y -vincolo dei vertici non appartenga ad \mathbb{S} . Allora (per il punto 5. del Lemma 6.2.1) $G(\mathbb{S})$ ha esattamente una componente connessa non banale C , i cui nodi sono monocromatici, e tutti gli altri nodi sono bicolorati. Inoltre, i nodi di $R' = V(C) \cap R$ e $S' = V(C) \cap S$ sono colorati con colori opposti. Come argomentato anche sopra, deduciamo allora che tutte le entrate non nulle di u hanno lo stesso valore (che dunque è 1).

Allora, se i nodi di R' sono colorati di blu e quelli di S' sono colorati di rosso, la disuguaglianza associata a u è

$$\sum_{e=vw \in R' \times S'} y_e \leq \max\{|R'|, |S'|\}.$$

Se invece i nodi di R' sono colorati di rosso e quelli di S' sono colorati di blu, la disuguaglianza associata a u è

$$\sum_{v \in R'} x_v + \sum_{w \in S'} x_w + \sum_{e=vw \in R' \times S'} y_e \leq \max\{|R'|, |S'|\}.$$

È facile vedere che entrambe queste disequazioni coincidono o sono dominate dalle equazioni di biclique bilanciata o non bilanciata associate alla bipartizione (R', S') .

2. Supponiamo che l'Y-vincolo dei vertici appartenga ad \mathbb{S} e che si verifichi il Caso A. del punto 6. del Lemma 6.2.1.

Omettiamo questa parte della dimostrazione, in quanto l'articolo [3], da cui derivano i risultati di questo capitolo, è in fase di correzione e la versione aggiornata non è ancora disponibile.

3. Supponiamo infine che l'Y-vincolo dei vertici appartenga ad \mathbb{S} e che si verifichi il Caso B. del punto 6. del Lemma 6.2.1.

Allora $G(\mathbb{S})$ ha esattamente una componente connessa non banale C , i cui nodi sono monocromatici, e tutti gli altri nodi sono bicolorati, tranne uno che è monocromatico (lo chiamiamo \bar{v}). Sappiamo come prima che i nodi di $R' = V(C) \cap R$ e di $S' = V(C) \cap S$ sono colorati di colori opposti, e che tutte le entrate non negative di u che sono indicizzate da nodi di C hanno lo stesso valore (lo chiamiamo $\alpha > 0$). Assumiamo che $|R'| < |S'|$ e che i nodi di R' siano colorati di rosso (dunque quelli di S' sono colorati di blu); gli altri casi seguono in modo analogo. Utilizzando l'Y-vincolo dei vertici (con le assunzioni fatte precedentemente) otteniamo $\alpha(|S'| - |R'|) = u_{\bar{v}}^1 - u_{\bar{v}}^2$: visto che il termine di sinistra è positivo, deve esserlo anche quello di destra, e sapendo che \bar{v} è monocromatico, questo implica che $u_{\bar{v}}^2 = 0$ (cioè \bar{v} è colorato di rosso) e che $u_{\bar{v}}^1 = \alpha(|S'| - |R'|)$. A questo punto possiamo ovviamente considerare $\alpha = 1$, e otteniamo che la disuguaglianza associata ad u è

$$\sum_{v \in R'} x_v + (|S'| - |R'|)x_{\bar{v}} + \sum_{w \in S'} x_w + \sum_{e=vw \in R' \times S'} y_e \leq |S'|$$

che è esattamente la disuguaglianza di biclique non bilanciata rialzata associata alla bipartizione $(R' \cup \{\bar{v}\}, S')$ e con coefficiente del vertice \bar{v} uguale a $|S'| - |R'|$.

□

Bibliografia

- [1] Yousef Alavi et al. “Total matchings and total coverings of graphs”. In: *Journal of Graph Theory* (1977).
- [2] Michele Conforti, Gérard Cornuéjols e Giacomo Zambelli. *Integer programming models*. Springer, 2014.
- [3] Yuri Faenza e Luca Ferrarini. “The Total Matching Polytope of Complete Bipartite Graphs”. In: *arXiv:2303.00328* (2023).
- [4] L Ferrarini et al. “Polyhedral Approach to Total Matching and Total Coloring Problems”. Tesi di dott. Università degli Studi di Milano-Bicocca, 2023.
- [5] Luca Ferrarini e Stefano Gualandi. “Total coloring and total matching: Polyhedra and facets”. In: *European Journal of Operational Research* (2022).
- [6] Maxfield Edwin Leidner. *A study of the total coloring of graphs*. University of Louisville, 2012.
- [7] David F Manlove. “On the algorithmic complexity of twelve covering and independence parameters of graphs”. In: *Discrete Applied Mathematics* (1999).
- [8] Kanstantsin Pashkovich. “Extended formulations for combinatorial polytopes”. Tesi di dott. Otto von Guericke University of Magdeburg, 2012.
- [9] Alexander Schrijver et al. *Combinatorial optimization: polyhedra and efficiency*. Springer, 2003.
- [10] Mihalis Yannakakis e Fanica Gavril. “Edge dominating sets in graphs”. In: *SIAM journal on applied mathematics* (1980).