UNIVERSITÀ DEGLI STUDI DI PADOVA

Dipartimento di Fisica e Astronomia "Galileo Galilei"

Corso di Laurea in Fisica

Tesi di Laurea

Cariche accelerate che non emettono radiazione

Relatore

Prof. Kurt Lechner

Laureando

Ideal Majtara

Anno Accademico 2018/2019

Indice

Capitolo 1

Introduzione

Il fenomeno dell'irraggiamento è uno dei più rilevanti dell'elettrodinamica. Esso consiste nell'emissione di radiazione, ossia onde elettromagnetiche, da parte di cariche elettriche in moto. Una condizione necessaria per questo fenomeno è che le cariche si muovano di moto accelerato. Tuttavia, benché una singola carica elettrica (puntiforme) accelerata emetta sempre delle radiazione elettromagnetica, ciò non è vero in generale per sorgenti elettromagnetiche estese, cariche e correnti, in cui, con particolari configurazioni e moti del sistema, è possibile che la presenza di accelerazione non comporti l'emissione di radiazione. Il motivo di tale assenza va ricercato in un effetto di interferenza distruttiva globale dovuto al principio di sovrapposizione a cui l'elettrodinamica obbedisce; per i sistemi che non irradiano, il campo elettromagnetico complessivo, dato dalla sovrapposizione di quelli emessi singolarmente dalle particelle, è nullo.

Il comportamento dei campi elettromagnetici rilevante nell'analisi della radiazione emessa è quello a grandi distanze, cioè per distanze dalla sorgente molto grandi, condizione che deve essere adattata anche al tipo di sistema esaminato, ad esempio, distinguendo tra sorgenti a supporto compatto e a supporto non compatto. Nella tesi si cercheranno le condizioni, il più possibile generali, sotto le quali si ha assenza di tale radiazione. La grande varietà di sistemi trattabili con l'elettrodinamica rende, tuttavia, difficile analizzare dettagliatamente il problema per una sorgente generica. Pertanto, verrà fatto uno studio di varie tipologie di sistemi, derivando per ognuno le condizioni che portano all'assenza di radiazione.

La prima categoria di sistemi analizzati è quella, ben nota in elettrodinamica, delle correnti stazionarie e delle sorgenti a simmetrica sferica. Semplici esempi di sistemi accelerati che non irradiano sono una spira percorsa da una corrente costante nel tempo o una sfera carica di raggio variabile nel tempo.

Una seconda categoria di sistemi che verranno analizzati, in cui l'assenza di radiazione è molto meno evidente, è quella delle sorgenti compatte, cioè limitate ad una certa regione, fissata, dello spazio. Per questi sistemi è possibile analizzare con più precisione l'energia irradiata a grandi distanze, ovvero quella dovuta alla radiazione. Dopo aver derivato in questo caso l'espressione del quadripotenziale a grandi distanze, sarà possibile derivare una condizione generale sotto la quale una sorgente compatta non irradia. Si esamineranno, quindi, alcuni sistemi particolari, cercando di vedere quando essi soddisfano alla condizione ricavata. Tra questi si distingueranno corpi carichi rigidi nel laboratorio, cioè corpi i cui punti sono a distanza fissata in un certo riferimento inerziale, in moto traslatorio periodico, dove si vedrà che la condizione di non radiazione si tradurrà in una condizione sul periodo del moto, e corpi che compiono moti rigidi relativistici, una possibile generalizzazione relativistica della condizione classica di corpo rigido.

Il quadripotenziale ricavato nel caso di sorgenti compatte, può essere analizzato alternativamente attraverso lo sviluppo in multipoli. Con questo si intende che la quadricorrente, che genera il potenziale, viene sviluppata in serie rispetto al tempo ritardato microscopico, che tiene conto del ritardo dovuto alla struttura interna della sorgente, e tale sviluppo risulta essere uno sviluppo in potenze di $\frac{1}{c}$ dove c è la velocità della luce nel vuoto. I termini dello sviluppo hanno come coefficienti delle quantità dette momenti di multipolo (elettrico o magnetico). In particolare, il termine di ordine $\frac{1}{c}$, per la parte spaziale, contiene un termine detto potenziale di dipolo elettrico che è solitamente usato per l'analisi non relativistica della radiazione, di cui fornisce l'enegia irradiata tramite la formula di Larmor. Sempre usando l'analisi limitata al termine di dipolo, si possono derivare condizioni più deboli per l'assenza di radiazione, in cui la radiazione è nulla solo all'ordine di dipolo.

La validità dello sviluppo in multipolo si ha normalmente se la velocità v, caratteristica del sistema, è non relativistica, ossia $\frac{v}{c} << 1$. In realtà, la condizione per la validità dello sviluppo in multipolo risulta più stringente e in alcuni casi non è sufficiente il regime non relativistico. Infatti, si vedrà come certi sistemi, che non irradiano, ad esempio una sfera rigida nel laboratorio, pur muovendosi a velocità non relativistiche presentano un momento di dipolo non nullo, cosicché, se ci si limitasse all'analisi non relativistica tramite la formula di Larmor, si concluderebbe che essi emettono radiazione. Nella tesi si spiegherà in maniera dettagliata il motivo di questa contraddizione.

La terza categoria analizzata di sistemi che non presentano radiazione è quella costituita dalle sorgenti non compatte. In questo caso l'analisi risulta meno generale e bisogna trattare separatamente sistemi che presentano simmetrie differenti, in particolare, le formule ricavate nel caso compatto non sono più applicabili. Più precisamente si analizzeranno sistemi a simmetria cilindrica, quali un filo rettilineo percorso da una corrente variabile, che presentano un' asse di simmetria lungo il quale il sistema è infinitamente esteso e sono invarianti sotto traslazioni lungo tale asse e rotazioni attorno all'asse stesso, e sistemi distribuiti lungo una regione illimitata nelle direzioni di un piano, come, ad esempio, un piano infinito percorso da una corrente di superficie. Per i sistemi a simmetria cilindrica, si vedrà che il fatto che la sorgente sia estesa sarà cruciale. infatti risulterà che nel caso di un cilindro di raggio R percorso da una corrente di superficie, la radiazione potrà essere annullata solo nel caso $R \neq 0$. Nella tesi si mostrerà che tale condizione deriva, ancora una volta, dal fatto che l'assenza di radiazione è dovuta a un effetto di interferenza distruttiva dei campi generati dalle varie parti del sistema.

Capitolo 2

Campi elettromagnetici generati da una sorgente generica

Le leggi fondamentali che regolano il comportamento dei campi elettromagnetici sono le equazioni di Maxwell

$$\nabla\cdot\boldsymbol{E} = \rho, \qquad \nabla\times\boldsymbol{E} = -\frac{1}{c}\frac{\partial\boldsymbol{B}}{\partial t},$$
$$\nabla\cdot\boldsymbol{B} = 0, \qquad \nabla\times\boldsymbol{B} = \frac{1}{c}\boldsymbol{j} + \frac{1}{c}\frac{\partial\boldsymbol{E}}{\partial t},$$

dove $\boldsymbol{E}, \boldsymbol{B}$ sono i campi elettrico e magnetico rispettivamente e $\rho, \boldsymbol{j}$ sono le densità di carica e corrente rispettivamente. Tali equazioni possono essere riscritte in forma covariante introducendo due quantità tensoriali, il tensore elettromagnetico e la quadricorrente. Il tensore elettromagnetico $F^{\mu\nu}$ è definito come

$$F^{\mu\nu} = \partial^\mu A^\nu - \partial^\nu A^\mu, \tag{2.1}$$

ove è stato introdotto il quadripotenziale $A^\mu = (\phi, \boldsymbol{A})$ in cui ϕ è il potenziale scalare e $\boldsymbol{A}$ il potenziale vettore in funzione dei quali i campi elettrico e magnetico si scrivono

$$\boldsymbol{E} = -\nabla\phi - \frac{\partial\boldsymbol{A}}{\partial t}, \qquad \boldsymbol{B} = \nabla\times\boldsymbol{A}.$$

La quadricorrente è invece la quantità $j^\mu = (\rho c, \boldsymbol{j})$ per la quale si richiede che siano soddisfatte le condizioni:

1. j^μ è un campo vettoriale ed è una distribuzione,
2. j^μ è localmente conservata, $\partial_\mu j^\mu = 0$,
3. $\lim_{|\boldsymbol{x}|\to\infty} (j^\mu(t, \boldsymbol{x})|\boldsymbol{x}|^3) = 0$.[1]

Utilizzando tali tensori le equazioni di Maxwell, in gauge di Lorenz, si riscrivono

$$\partial_\mu F^{\mu\nu} = j^\nu \quad \to \quad \Box A^\mu = \frac{j^\mu}{c}, \quad \partial_\mu A^\mu = 0. \tag{2.2}$$

[1]Questa condizione è verificata nel caso di sistemi compatti.

Sotto le ipotesi 1, 2, 3, una soluzione delle equazioni di Maxwell (2.2), che rappresenta il potenziale generato da una quadricorrente j^μ, è

$$A^\mu(t, \boldsymbol{x}) = \int \frac{j^\mu(t - \frac{|\boldsymbol{x}-\boldsymbol{y}|}{c}, \boldsymbol{y})}{4\pi c|\boldsymbol{x}-\boldsymbol{y}|}\, d^3\boldsymbol{y}, \tag{2.3}$$

dove $\boldsymbol{x}$ è la posizione in cui si valuta il potenziale A^μ e $\boldsymbol{y}$ è la posizione che parametrizza la distribuzione di carica. La soluzione (2.3) è analoga a quella dell'equazione di Poisson

$$\nabla^2\phi = -\rho,$$

di un campo ϕ con sorgente ρ, con la differenza che la sorgente j^μ è calcolata al tempo ritardato $t' = t - \frac{|\boldsymbol{x}-\boldsymbol{y}|}{c}$ che tiene conto della velocità finita del segnale elettromagnetico. A partire dal potenziale A^μ dato da (2.3) è poi possibile derivare i campi elettromagnetici, calcolando il tensore elettromagnetico $F^{\mu\nu}$ tramite la relazione (2.1).

L'espressione (2.3) è stata derivata tramite il metodo della funzione di Green, in cui la soluzione di (2.2) è ottenuta come la convoluzione $A^\mu = G * j^\mu$, dove $G = \frac{1}{2\pi}\delta(x^2)H(x^0)$, detta funzione di Green ritardata, è la soluzione di $\Box G(x) = \delta^4(x)$ che soddisfa alla condizione di causalità $G(x) = 0$ per $x^0 < 0$ ($H(x)$ è la funzione di Heavyside). Perché la convoluzione tra la funzione di Green $G(x)$ e la quadricorrente $j^\mu(x)$ abbia senso bisognerebbe che fosse $j^\mu \in \mathcal{S}(\mathbb{R}^4)$, condizione fisicamente mai verificata, oppure che j^μ avesse supporto compatto, condizione anch'essa mai verificata perché la quadricorrente è non nulla ad ogni tempo. Se invece la j^μ non rispetta tali condizioni, la validità del metodo della funzione di Green non è più garantita. In tal caso si può procedere formalmente, valutando la trasformata di Fourier $\hat{A}^\mu(k)$ di $A^\mu(x)$[2]:

$$\hat{A}^\mu(k) = (2\pi)^4\hat{G}(k)J^\mu(k).$$

La trasformata di $G(x)$ è

$$\hat{G}(k) = -\frac{1}{(2\pi)^2}\left(\mathcal{P}\left(\frac{1}{k^2}\right) + i\pi\mathrm{sign}(k^0)\delta(k^2)\right),$$

dove $\mathcal{P}\left(\frac{1}{k^2}\right)$ denota la parte principale di $\frac{1}{k^2}$ e $\mathrm{sign}(x)$ è la funzione segno. L'espressione di $\hat{A}^\mu(k)$ diventa

$$\hat{A}^\mu(k) = -(2\pi)^2\left(\mathcal{P}\left(\frac{1}{k^2}\right) + i\pi\mathrm{sign}(k^0)\delta(k^2)\right)J^\mu(k). \tag{2.4}$$

Se ora la trasformata di Fourier è tale che il secondo membro di (2.4) definisce una distribuzione, si può definire il potenziale $A^\mu(x)$ come l'antitrasformata di Fourier della (2.4). Tale possibilità dipende dalle proprietà di regolarità della trasformata $J^\mu(k)$ della quadricorrente $j^\mu(x)$ che dovranno essere verificate caso per caso.

2.1 Campo di radiazione per sorgenti compatte

L'espressione (2.3) del potenziale, generato da una sorgente con supporto spaziale compatto, può essere semplificata analizzando il comportamento a grandi distanze che è quello rilevante nell'analisi dell'irraggiamento. Precisamente, il quadrimomento trasportato dal campo elettromagnetico è

[2]Si denota con $J^\mu(k)$ la trasformata di Fourier di $j^\mu(x)$ e con $\hat{G}(k)$ quella di $G(x)$.

rappresentato tramite il tensore energia-impulso

$$T^{\mu\nu} = F^{\mu\rho}F_{\rho}{}^{\nu} + \frac{1}{4}\eta^{\mu\nu}F_{\alpha\beta}F^{\alpha\beta}, \tag{2.5}$$

si nota che esso è quadratico nei campi $F^{\mu\nu}$. Il flusso $\frac{dP^\mu}{d\sigma dt}$ di quadrimomento P^μ che attraversa un elemento d'area $d\sigma$ di una superficie Σ, di versore normale $\boldsymbol{u}$, nell'unità di tempo è

$$\frac{dP^\mu}{d\sigma dt} = T^{i\mu}u^i.$$

Nel caso compatto si può scegliere come superficie Σ una sfera, di raggio sufficientemente grande da contenere la sorgente. Per una sfera di raggio r, l'elemento di superficie è $d\sigma = r^2 d\Omega$, ove $d\Omega$ denota l'elemento di angolo solido, e il versore normale è $u^i = n^i = \frac{x^i}{|\boldsymbol{x}|}$. Prendendo il limite $r \to \infty$, l'espressione precedente diventa

$$\frac{dP^\mu}{d\Omega dt} = \lim_{r\to\infty} T^{i\mu}n^i\, r^2, \tag{2.6}$$

da cui si vede che se $T^{i\mu} \sim \frac{1}{r^n}$ esso dà contributo finito non nullo solo per $n = 2$. Di conseguenza se si vuole analizzare l'energia irradiata a grandi distanze è sufficiente considerare i termini di ordine $\frac{1}{r}$ del quadripotenziale (2.3) trascurando quelli di ordine superiore, poiché $T^{\mu\nu}$ è quadratico nei campi.

Innanzitutto, denotando con $r = |\boldsymbol{x}|$ la norma del vettore posizione e con $\boldsymbol{n} = \frac{\boldsymbol{x}}{|\boldsymbol{x}|}$ il versore normale di osservazione, si ha che l'espressione $|\boldsymbol{x} - \boldsymbol{y}|$, per $r \to \infty$, può essere riscritta come:

$$|\boldsymbol{x} - \boldsymbol{y}| = r\left(1 - \frac{\boldsymbol{n}\cdot\boldsymbol{y}}{r}\right) + O\left(\frac{|\boldsymbol{y}|}{r}\right), \tag{2.7}$$

dove si è tenuto conto che $|\boldsymbol{y}| << r$ in ogni direzione, grazie alla compattezza della sorgente. Bisogna ora considerare l'espressione (2.3) nella zona delle onde, cioè per per $r \to \infty$ e tenendo costante il ritardo $t - r/c$. In tale modo, sostituendo (2.7) nell'espressione (2.3), si ha

$$A^\mu(t, \boldsymbol{x}) = \frac{1}{4\pi rc}\int j^\mu\left(t - \frac{r}{c} + \frac{\boldsymbol{n}\cdot\boldsymbol{y}}{c}, \boldsymbol{y}\right) d^3\boldsymbol{y} + O\left(\frac{1}{r^2}\right), \tag{2.8}$$

dove $\frac{\boldsymbol{n}\cdot\boldsymbol{y}}{c}$ è detto ritardo microscopico e tiene conto della struttura della sorgente e $\frac{r}{c}$ è detto ritardo macroscopico e dipende dalla distanza r alla quale viene rilevata la radiazione. L'espressione (2.8) fornisce il quadripotenziale dei campi di radiazione nel caso di sorgenti compatte. Si verifica che il quadripotenziale (2.8) soddisfa le seguenti relazioni, dette delle onde, all'ordine $\frac{1}{r}$

(i) $\partial^\mu A^\nu = n^\mu \dot{A}^\nu$,

(ii) $n_\mu \dot{A}^\mu = 0 \;\leftrightarrow \dot{A}^0 = (\boldsymbol{n}\cdot\dot{\boldsymbol{A}})$,

dove si è introdotto il versore normale nello spaziotempo: $n^\mu = (1, \boldsymbol{n})$ e si è posto $\dot{A}^\mu = \partial_0 A^\mu$. Poichè $|\boldsymbol{n}| = 1$, si ha che $n^2 = n_\mu n^\mu = 0$ cioè n^μ è un quadrivettore di tipo luce. Sfruttando le relazioni delle onde e le relazioni (2.1) e (2.5), è possibile riscrivere il tensore elettromagnetico e il tensore energia-impulso del campo di radiazione:

$$F^{\mu\nu} = n^\mu\dot{A}^\nu - n^\nu\dot{A}^\mu,$$
$$T^{\mu\nu} = -n^\mu n^\nu \dot{A}_\alpha\dot{A}^\alpha.$$

Il campo elettrico e il tensore energia-impulso si riscrivono

$$\boldsymbol{E} = \boldsymbol{n}\times\boldsymbol{n}\times(\dot{\boldsymbol{A}}), \tag{2.9}$$

$$T^{\mu\nu} = n^\mu n^\nu |\boldsymbol{E}|^2, \tag{2.10}$$

poiché $\dot{A}_\mu \dot{A}^\mu = -|\boldsymbol{E}|^2$, e, usando (2.6), il quadrimomento emesso per unità di tempo nell'unità di angolo solido risulta

$$\frac{dP^\mu}{d\Omega dt} = \lim_{r\to\infty} r^2 T^{i\mu} n^i = r^2 n^\mu |\boldsymbol{E}|^2. \tag{2.11}$$

2.2 Sviluppo in multipoli

L'espressione (2.8) può essere ulteriormente semplificata eseguendo lo sviluppo in multipoli della quadricorrente j^μ. Esso consiste nello sviluppare l'argomento temporale della quadricorrente j^μ attorno a $t - \frac{r}{c}$

$$j^\mu\left(t - \frac{r}{c} + \frac{\boldsymbol{n}\cdot\boldsymbol{y}}{c}, \boldsymbol{y}\right) = j^\mu\left(t - \frac{r}{c}, \boldsymbol{y}\right) + \partial_t j^\mu\left(t - \frac{r}{c}, \boldsymbol{y}\right)\frac{\boldsymbol{n}\cdot\boldsymbol{y}}{c} + \frac{1}{2}\partial_t^2 j^\mu\left(t - \frac{r}{c}, \boldsymbol{y}\right)\left(\frac{\boldsymbol{n}\cdot\boldsymbol{y}}{c}\right)^2 + \dots \,. \tag{2.12}$$

Sostituendo tale sviluppo nell'espressione (2.8) si ottiene, quindi, uno sviluppo del potenziale A^μ in potenze di $\frac{1}{c}$.

$$A^\mu(t, \boldsymbol{x}) = \frac{1}{4\pi rc}\int j^\mu\left(t - \frac{r}{c}, \boldsymbol{y}\right) d^3\boldsymbol{y} + \frac{1}{4\pi rc^2}\int \partial_t j^\mu\left(t - \frac{r}{c}, \boldsymbol{y}\right)\boldsymbol{n}\cdot\boldsymbol{y}\, d^3\boldsymbol{y} + \dots \,. \tag{2.13}$$

I termini dello sviluppo (2.13) sono detti termini di multipolo e quello di ordine $\frac{1}{c}$ è detto termine di dipolo. L'espressione, delle componenti spaziali, del termine di dipolo può essere riscritta in forma più semplice, introducendo il momento di dipolo elettrico $\boldsymbol{D}(t)$ di una distribuzione di carica $\rho(t, \boldsymbol{x})$

$$\boldsymbol{D}(t) = \int \rho(t, \boldsymbol{y})\boldsymbol{y} d^3\boldsymbol{y}, \quad \dot{\boldsymbol{D}}(t) = \int \boldsymbol{j}(t, \boldsymbol{y}) d^3\boldsymbol{y}, \tag{2.14}$$

quindi, usando (2.14), l'espressione del potenziale, troncato all'ordine di dipolo, diventa

$$\boldsymbol{A}(t, r) = \frac{1}{4\pi rc}\int \boldsymbol{j}\left(t - \frac{r}{c}, \boldsymbol{y}\right) d^3\boldsymbol{y} = \frac{\dot{\boldsymbol{D}}(t - \frac{r}{c})}{4\pi rc}. \tag{2.15}$$

Poiché a grandi distanze $|\boldsymbol{E}| = |\boldsymbol{n}\times\dot{\boldsymbol{A}}|$, sostituendo l'espressione (2.15) nell'espressione (2.11) si ottiene la potenza W emessa nell'unità di angolo solido in approssimazione di dipolo

$$\frac{dW}{d\Omega} = \frac{r^2}{c}|\boldsymbol{E}|^2 = \frac{\left|\boldsymbol{n}\times\ddot{\boldsymbol{D}}(t - \frac{r}{c})\right|^2}{16\pi^2 c^3} = \frac{|\ddot{\boldsymbol{D}}(t - \frac{r}{c})|^2 \sin^2\theta}{16\pi^2 c^3},$$

dove si è indicato con θ l'angolo compreso tra $\ddot{\boldsymbol{D}}$ e $\boldsymbol{n}$. Infine, integrando in $d\Omega$ si ottiene la potenza totale emessa

$$W = \frac{\left|\ddot{\boldsymbol{D}}(t - \frac{r}{c})\right|^2}{6\pi c^3}. \tag{2.16}$$

L'espressione (2.16) è detta *formula di Larmor* e rappresenta la potenza totale emessa in approssimazione di dipolo. Solitamente, essa viene utilizzata per calcolare la potenza emessa dalla sorgente per regimi non relativistici.

In generale, l'approssimazione all'ordine di dipolo nella (2.12) è valida se $|j^i| >> |\left(\frac{\boldsymbol{n}\cdot\boldsymbol{y}}{c}\right)\partial_t j^i|$. Se le variazioni apprezzabili Δj^i di j^i avvengono in un tempo tipico T, cioè $|\frac{\Delta j}{j}| \sim 1$ in $\Delta t \sim T$ la condizione diventa $\frac{\boldsymbol{n}\cdot\boldsymbol{y}}{c} << T$. Denotando con R il diametro della regione che contiene la sorgente, l la distanza tipica percorsa dalle cariche durante il tempo T e v la velocità caratteristica delle cariche, Tale condizione, dato che $|\boldsymbol{n}\cdot\boldsymbol{y}| \sim R$ e $T \sim \frac{l}{v}$, diventa

$$\frac{v}{c} << \frac{l}{R} \leftrightarrow \frac{R}{c} << \frac{l}{v} \sim T, \tag{2.17}$$

Se $l \sim R$, come avviene ad esempio nel caso di un sistema di particelle puntiformi, la condizione (2.17) diventa $\frac{v}{c} << 1$ cioè, per tali sorgenti, l'approssimazione di dipolo è valida per regimi non relativistici. Per sorgenti estese è possibile che sia $l << R$ quindi essa potrebbe non essere valida anche per regimi non relativistici. In effetti, nell'analisi della radiazione emessa da una sfera rigida, utilizzando la formula di Larmor (2.16) si otterrebbe un valore non nullo di potenza emessa, ma si vedrà che in tale caso l'approssimazione di dipolo non è applicabile proprio perché $l << R$.

2.3 Analisi spettrale

Il comportamento della radiazione può essere esaminato in maniera precisa eseguendo l'*analisi spettrale* del campo elettromagnetico. Ogni potenziale A^μ nella zona delle onde, cioè ogni campo elettromagnetico di radiazione, si può scrivere nella forma

$$A^\mu(t, \boldsymbol{x}) = \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \int A^\mu(\omega, \boldsymbol{x}) e^{i\omega t}\, d\omega, \tag{2.18}$$

cioè come una sovrapposizione di onde elementari monocromatiche della forma $A^\mu(\omega, \boldsymbol{x})e^{i\omega t}$, dette *armoniche*, dove ω è la frequenza dell'onda e $A^\mu(\omega, \boldsymbol{x})$ è la trasformata di Fourier, temporale, del potenziale $A^\mu(t, \boldsymbol{x})$, data da

$$A^\mu(\omega, \boldsymbol{x}) = \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \int A^\mu(t, \boldsymbol{x}) e^{-i\omega t}\, dt, \tag{2.19}$$

e indica il peso con cui compare la frequenza ω nella sovrapposizione e la polarizzazione di tale onda. Analogamente, anche il campo elettrico può essere scritto in tale forma

$$\boldsymbol{E}(t, \boldsymbol{x}) = \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \int \boldsymbol{E}(\omega, \boldsymbol{x}) e^{i\omega t}\, d\omega, \tag{2.20}$$

$$\boldsymbol{E}(\omega, \boldsymbol{x}) = \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \int \boldsymbol{E}(t, \boldsymbol{x}) e^{-i\omega t}\, dt. \tag{2.21}$$

L'insieme delle frequenze che compongono un campo elettromagnetico di radiazione viene detto spettro della radiazione, ed è, in generale, un sottoinsieme continuo di $\mathbb{R}$. Lo spettro può anche essere discreto cioè composto da un insieme numerabile di frequenze ω_n. In tale caso, le (2.18) e (2.20) si riducono a delle serie della forma (si omette la dipendenza da $\boldsymbol{x}$)

$$A^\mu(t) = \sum_n A_n^\mu e^{i\omega_n t}, \tag{2.22}$$

$$\boldsymbol{E}(t) = \sum_n \boldsymbol{E}_n e^{i\omega_n t}. \tag{2.23}$$

Questo accade, per esempio, nel caso di campi periodici di periodo T, che presentano uno spettro discreto con frequenze $\omega_n = \frac{2\pi n}{T}, n \in \mathbb{Z}$. Sempre nel caso periodico di periodo T, i coefficienti delle serie (2.22) e (2.23) sono dati da

$$A_n^\mu = \frac{1}{T}\int_0^T A^\mu(t)e^{-i\omega_n t}\,dt, \tag{2.24}$$

$$\boldsymbol{E}_n = \frac{1}{T}\int_0^T \boldsymbol{E}(t)e^{-i\omega_n t}\,dt, \tag{2.25}$$

Nel caso in cui la radiazione sia periodica di periodo T, risulta significativo calcolare, tramite l'espressione (2.11), la potenza media totale emessa

$$\frac{dW}{d\Omega} = \frac{c}{T}\int_0^T r^2|\boldsymbol{E}|^2\,dt = 2cr^2\sum_n |\boldsymbol{E}_n|^2, \tag{2.26}$$

dove si sono utilizzate le espressioni (2.23) e (2.25) per il campo elettrico nel caso periodico e si è indicata con $|\boldsymbol{E}_n|$ la norma di $\boldsymbol{E}_n$ data dal prodotto scalare complesso. Si può notare come la potenza media per unità di angolo solido, nel caso periodico, risulti la somma di *pesi spettrali* della forma

$$\frac{dW_n}{d\Omega} = 2cr^2|\boldsymbol{E}_n|^2, \tag{2.27}$$

riferiti alle frequenze ω_n dello spettro. Se non è presente radiazione, ognuna delle potenze (2.27) risulta nulla.

Sia ora $j^\mu(x)$ una quadricorrente che genera il potenziale $A^\mu(x)$, in accordo con (2.3). Nel caso in cui la sorgente sia compatta, è possibile esprimere i coefficienti di Fourier del campo elettrico direttamente in funzione di $j^\mu(x)$. Innanzitutto, si introduce la trasformata di Fourier della quadricorrente $j^\mu(x)$ nello spaziotempo

$$J^\mu(k) = \frac{1}{(2\pi)^2}\int j^\mu(x)e^{-ik_\nu x^\nu}\,d^4x, \tag{2.28}$$

e si riscrive la derivata temporale $\dot{A}^\mu$ del potenziale a grandi distanze, dato da (2.8), come un integrale sullo spaziotempo

$$A^\mu(t,\boldsymbol{x}) = \frac{1}{4\pi rc}\int j^\mu(y)\delta(ct - y^0 - r + \boldsymbol{n}\cdot\boldsymbol{y})\,d^4y, \tag{2.29}$$

dove la delta di dirac $\delta(x)$ si può esprimere in forma integrale come $\delta(x) \equiv \frac{1}{2\pi}\int e^{ikx}\,dk$. Sostituendo ora l'espressione di $\boldsymbol{j}(y)$, in funzione della trasformata (2.28), nell'espressione (2.29) di $\boldsymbol{A}(t,\boldsymbol{x})$, si ha (ponendo $ct^* = ct - y^0 - r + \boldsymbol{n}\cdot\boldsymbol{y}$)

$$\begin{aligned}\boldsymbol{A}(t,\boldsymbol{x}) &= \frac{1}{4\pi rc}\int \boldsymbol{j}(y)\delta(ct^*)\,d^4y = \frac{1}{4^2\pi^3 rc}\iint \boldsymbol{J}(q)e^{iq_\nu y^\nu}\delta(ct^*)\,d^4y\,d^4q = \\ &= \frac{1}{2^5\pi^4 rc^2}\iiint \boldsymbol{J}(q)e^{iq_\nu y^\nu}e^{i\omega(t-\frac{y^0+r-\boldsymbol{n}\cdot\boldsymbol{y}}{c})}\,d^4y\,d^4q\,d\omega.\end{aligned}$$

Notando che $n_\mu y^\mu = y^0 - \boldsymbol{n}\cdot\boldsymbol{y}$, si ottiene

$$\boldsymbol{A}(t,\boldsymbol{x}) = \frac{1}{2rc^2}\int e^{i\omega(t-\frac{r}{c})}\left(\frac{1}{(2\pi)^2}\int\left(\frac{1}{(2\pi)^2}\int \boldsymbol{J}(q)e^{iq_\nu y^\nu}\,d^4q\right)e^{-i\frac{\omega}{c}n_\nu y^\nu}\,d^4y\right)d\omega = \tag{2.30}$$

$$= \frac{1}{2rc^2}\int e^{i\omega(t-\frac{r}{c})}\boldsymbol{J}(k)d\omega, \tag{2.31}$$

dove si è introdotto il quadrivettore $k^\mu = \frac{\omega}{c} n^\mu$, che è un quadrivettore di tipo luce dato che n^μ lo è. Il campo elettrico, nella zona delle onde, si ottiene sostituendo (2.31) in (2.9)

$$\boldsymbol{E}(t, \boldsymbol{x}) = \frac{i}{2rc^3} \boldsymbol{n} \times \left(\boldsymbol{n} \times \int \omega e^{i\omega(t - \frac{r}{c})} \boldsymbol{J}(k) d\omega \right). \tag{2.32}$$

Confrontando con la (2.20), si ottiene l'espressione dei coefficienti di Fourier

$$\boldsymbol{E}(\omega, \boldsymbol{x}) = \frac{i\sqrt{2\pi}}{2rc^3} \omega e^{-i\frac{\omega r}{c}} (\boldsymbol{n} \times (\boldsymbol{n} \times \boldsymbol{J}(k))),$$

e nel caso di corrente periodica di periodo T, la quadricorrente $j^\mu(x)$ è riscrivibile in serie di Fourier come

$$j^\mu(t, \boldsymbol{x}) = \sum_n j_n^\mu(\boldsymbol{x}) e^{i\omega_n t},$$

dove $\omega_m = \frac{2\pi m}{T}$. Quindi, la trasformata di Fourier nello spaziotempo di $j^\mu(x)$ è

$$J^\mu(k) = \sum_n \frac{\sqrt{2\pi} c \delta(\omega - \omega_n)}{(2\pi)^{\frac{3}{2}}} \int j_n^\mu(\boldsymbol{x}) e^{-i\boldsymbol{k} \cdot \boldsymbol{x}} \, d^3\boldsymbol{x} = \sum_n \sqrt{2\pi} c \delta(\omega - \omega_n) J_n^\mu(\boldsymbol{k}). \tag{2.33}$$

Poiché $j^\mu(x)$ è periodica di periodo T, il campo elettrico è anch'esso periodico di periodo T e lo si può scrivere come serie di Fourier della forma (2.23). Sostituendo (2.33) in (2.32) si ottiene

$$\boldsymbol{E}(t, \boldsymbol{x}) = \sum_m \frac{i\sqrt{2\pi} \omega_m e^{-i\omega_m \frac{r}{c}}}{2rc^2} \boldsymbol{n} \times (\boldsymbol{n} \times \boldsymbol{J}_n(\omega_m \boldsymbol{n})) \, e^{i\omega_m t}. \tag{2.34}$$

Confrontando l'espressione (2.34) con la (2.23), si ricavano i coefficienti di Fourier del campo elettrico

$$\boldsymbol{E}_m(\boldsymbol{x}) = \frac{i\sqrt{2\pi}}{2rc^2} \omega_m e^{-i\omega_m \frac{r}{c}} (\boldsymbol{n} \times (\boldsymbol{n} \times \boldsymbol{J}_m(\omega_m \boldsymbol{n}))),$$

dunque, si possono ricavare i pesi spettrali dati da (2.27)

$$\frac{dW_m}{d\Omega} = \frac{\pi}{c^3} \omega_m^2 |\boldsymbol{n} \times \boldsymbol{J}_m(\omega_m \boldsymbol{n})|^2. \tag{2.35}$$

Capitolo 3

Esempi classici di sistemi non irradianti

Si comincia qui l'analisi dei sistemi che non presentano radiazione. Come primi esempi di sistemi non irradianti si analizzeranno i casi, ben noti in elettrodinamica, delle sorgenti stazionarie e delle sorgenti a simmetria sferica. Verranno poi analizzate le condizioni sotto le quali si ha assenza di radiazione all'ordine di dipolo.

3.1 Correnti stazionarie

Un primo esempio di sistemi non irradianti è costituito dalle sorgenti stazionarie ossia non dipendenti dal tempo, cioè in cui si ha $\partial_t j^\mu = 0$. In queso caso, l'espressione (2.3) per il quadripotenziale, generato da una corrente j^μ, risulta una funzione della sola posizione $\boldsymbol{x}$ e, quindi, usando (2.3), i campi elettromagnetici generati risultano

$$\boldsymbol{E}(t,\boldsymbol{x}) = \int \rho(\boldsymbol{y}) \frac{(\boldsymbol{x}-\boldsymbol{y})}{4\pi|\boldsymbol{x}-\boldsymbol{y}|^3}\, d^3\boldsymbol{y}, \qquad \boldsymbol{B}(t,\boldsymbol{x}) = \int \boldsymbol{j}(\boldsymbol{y}) \times \frac{(\boldsymbol{x}-\boldsymbol{y})}{4\pi c|\boldsymbol{x}-\boldsymbol{y}|^3}\, d^3\boldsymbol{y},$$

che sono campi stazionari e quindi non è presente radiazione. In particolare, nel caso di sorgenti compatte, il campo elettrico ha andamento $\frac{1}{r^2}$ e il campo magnetico ha andamento $\frac{1}{r^3}$. Si nota come analizzando l'espressione del campo magnetico sembra che anche esso abbia un andamento $\frac{1}{r^2}$, tuttavia, utilizzando l'espressione (2.8) del potenziale di radiazione, il campo magnetico a grandi distanze risulta

$$\boldsymbol{B}(t,\boldsymbol{x}) = \frac{\boldsymbol{n}}{4\pi c} \times \int \boldsymbol{j}(\boldsymbol{y})\, d^3\boldsymbol{y} + O\left(\frac{1}{r^3}\right), \tag{3.1}$$

ma poiché nel caso stazionario $\partial_i j^i = 0$, si ha

$$0 = \int \partial_i j^i(\boldsymbol{y}) y^k\, d^3\boldsymbol{y} = -\int j^k(\boldsymbol{y})\, d^3\boldsymbol{y},$$

e quindi il campo (3.1) è nullo all'ordine $\frac{1}{r^2}$. Un caso interessante di sorgente stazionaria, è quello di una spira in quiete percorsa da una corrente costante nel tempo. Se si immagina tale sistema come composto da cariche puntiformi in moto lungo la spira, ognuna di esse singolarmente risulta accelerata, e quindi dovrebbe emettere radiazione. La sovrapposizione delle varie cariche però crea un effetto di interferenza distruttiva globale che annulla la radiazione emessa dal sistema. Si vede quindi come la presenza di accelerazione non implica emissione di radiazione. Nel caso stazionario, tale effetto non richiede nessuna particolare simmetria del sistema. Esso è piuttosto dovuto ad un effetto di media temporale. Infatti, dato che la corrente è stazionaria, si può pensare che ogni particella che la compone segua la stessa traiettoria, con legge oraria $\boldsymbol{y}(t)$. Il campo elettromagnetico complessivo che è presente in un punto $\boldsymbol{x}$ ad un istante t^* è allora dato dalla sovrapposizione di tutti i valori nel punto $\boldsymbol{x}$ assunti dal campo elettromagnetico generato dalla singola particella, durante il suo moto $\boldsymbol{y}(t)$, allo scorrere del tempo, indipendentemente dall'istante t^* analizzato, ed è quindi stazionario.

3.2 Sorgenti a simmetria sferica

Una sorgente a simmetria sferica è una sorgente puramente radiale, cioè in cui $\rho(t, \boldsymbol{x}) = \rho(t, r)$ e $\boldsymbol{j}(t, r) = \boldsymbol{n} j(t, r)$, dove si è denotato con $r = |\boldsymbol{x}|$ la norma del vettore posizione e con $\boldsymbol{n} = \frac{\boldsymbol{x}}{|\boldsymbol{x}|}$ il versore normale di osservazione. Se il supporto spaziale di tale corrente è compatto, cioè se

$$\exists R > 0 \mid j^\mu(t, \boldsymbol{x}) = 0, \text{ per } r > R\,, \forall t, \tag{3.2}$$

vale il seguente teorema

Teorema (Birkhoff)**.** *Sia j^μ una quadricorrente a simmetria sferica a supporto spaziale compatto. Allora i campi elettrici e magnetici nella regione $r > R$ sono della forma*

$$\boldsymbol{E} = \frac{Q}{4\pi r^2}\boldsymbol{n}, \quad \boldsymbol{B} = \boldsymbol{0},$$

dove $Q = \int \rho(r, t)\, d^3\boldsymbol{x}$ è la carica totale del sistema.

Per il teorema precedente, dato che Q è conservata, cioè indipendente dal tempo, risulta che a distanze sufficientemente grandi ($r > R$) il campo elettromagnetico è coulombiano e statico, pertanto una sorgente a simmetria sferica non emette onde elettromagnetiche. Tale sorgente però, dipendendo in generale dal tempo, può essere costituita da cariche accelerate. Di nuovo, si ha che la particolare struttura della sorgente genera un effetto di interferenza distruttiva che elimina la componente di radiazione del campo elettromagnetico.

3.3 Assenza di radiazione all'ordine di dipolo

Sia data una quadricorrente j^μ a supporto compatto. In approssimazione di dipolo la potenza emessa è data dalla formula di Larmor (2.16). Pertanto, se tale potenza è nulla si ha

$$W = \frac{|\ddot{\boldsymbol{D}}(t - \frac{r}{c})|^2}{6\pi c^3} = 0 \quad \rightarrow \quad \ddot{\boldsymbol{D}}(t) = \boldsymbol{0},$$

Se, quindi, il momento di dipolo ha derivata seconda nulla, non c'è potenza emessa all'ordine di dipolo. Come esempio di tale situazione, sia dato un sistema isolato di N particelle puntiformi, ognuna di carica e_i, massa m_i e posizione $\boldsymbol{x_i}(t)$. La densità di carica del sistema è

$$\rho(t, \boldsymbol{x}) = \sum_{i=1}^{N} e_i \delta(\boldsymbol{x} - \boldsymbol{x}_i(t)).$$

Quindi, la derivata seconda del momento di dipolo (2.14) risulta

$$\ddot{\boldsymbol{D}}(t) = \sum_{i=1}^{N} e_i \ddot{\boldsymbol{x}}_i(t) = \sum_{i=1}^{N} \frac{e_i}{m_i}\boldsymbol{F}_i(t),$$

dove si è indicato con $\boldsymbol{F}_i(t)$ la forza che agisce sull'i-esima particella. Ora, visto che il sistema è isolato, cioè $\sum_{i=1}^{N} \boldsymbol{F}_i(t) = \boldsymbol{0}$, e se si ha $\frac{e_i}{m_i} = \frac{e}{m}$ $\forall i$, si ottiene

$$\ddot{\boldsymbol{D}}(t) = \frac{e}{m} \sum_{i=1}^{N} m_i \boldsymbol{F}_i(t) = \boldsymbol{0}. \tag{3.3}$$

Quindi, un sistema di particelle cariche puntiformi, isolato, per cui il rapporto carica/massa sia lo stesso per ogni particella, non irradia all'ordine di dipolo. Ciò succede, per esempio, nel caso di un sistema isolato composto da particelle identiche, e comporta, in particolare, che durante lo scattering di due elettroni (o protoni) non venga emessa radiazione di dipolo. Nel caso N=1, la condizione (3.3) implica che sulla particella non agiscono forze cioè che non si ha accelerazione. Per quest'ultimo caso, muovendosi la particella necessariamente di moto rettilineo uniforme, l'assenza di radiazione di dipolo implica assenza ad ogni ordine di multipolo.

Un altro caso in cui si ha assenza di radiazione di dipolo è quando il sistema risulta elettricamente neutro, cioè per $\rho(t, \boldsymbol{x}) = 0$. Infatti, usando la definizione (2.14) per il momento di dipolo nel caso di un sistema neutro, risulta $\boldsymbol{D} = \boldsymbol{0}$, e quindi $\ddot{\boldsymbol{D}} = \boldsymbol{0}$. Un esempio di tale situazione è un conduttore filiforme (neutro), di forma arbitraria, percorso da una generica corrente $I(t)$, come una spira o un filo.

Capitolo 4

Sorgenti compatte

In questa sezione si analizzeranno generiche quadricorrenti j^μ a supporto spaziale compatto, cioè per cui vale (3.2).

4.1 Condizione generale per l'assenza di radiazione nel caso compatto

Riprendendo l'espressione (2.10) per il tensore energia-impulso si vede che esso è nullo se e solo se il campo elettrico a grandi distanze $\boldsymbol{E}$ è nullo, come ci si poteva aspettare. Riscrivendo in funzione di $\dot{\boldsymbol{A}}$, si ha

$$\mathbf{0} = \boldsymbol{E} = \boldsymbol{n}(\boldsymbol{n}\cdot\dot{\boldsymbol{A}}) - \dot{\boldsymbol{A}} \leftrightarrow \boldsymbol{n}(\boldsymbol{n}\cdot\dot{\boldsymbol{A}}) = \dot{\boldsymbol{A}}.$$

La condizione di assenza di radiazione è quindi equivalente al fatto che i vettori $\boldsymbol{n}$ e $\dot{\boldsymbol{A}}$ siano ovunque paralleli, ovvero

$$\boldsymbol{n}\times\dot{\boldsymbol{A}} = \mathbf{0}, \tag{4.1}$$

che riscritta in funzione della trasformata $J^\mu(k)$ della quadricorrente $j^\mu(x)$, tramite l'espressione (2.31), diventa

$$\frac{\boldsymbol{n}}{2rc^2}\times\int i\omega e^{i\omega(t-\frac{r}{c})}\boldsymbol{J}(k)d\omega = \mathbf{0},$$

dove si ricorda che $k^\mu = \frac{\omega}{c}n^\mu \to k_\mu k^\mu = 0$. Prendendo, infine, l'antitrasformata di Fourier rispetto a $ct - r$, si ottiene

$$\boldsymbol{n}\times\dot{\boldsymbol{A}} = \mathbf{0} \Leftrightarrow \boldsymbol{k}\times\boldsymbol{J}(k) = \mathbf{0}, \quad k_\mu k^\mu = 0.[1] \tag{4.2}$$

Quindi, affinché una quadricorrente j^μ non produca radiazione, la sua trasformata di fuorier J^μ deve soddisfare, sul cono luce $k_\mu k^\mu = 0$, alla relazione (4.2). Un caso particolare, noto come condizione di Goedecke, in cui la relazione precedente è banalmente verificata, è quello in cui $\boldsymbol{J}(k) = \mathbf{0}$ per $k_\mu k^\mu = 0$. Si sottolinea come la condizione (4.2) non implichi per forza che sia $\boldsymbol{J}(k) = \mathbf{0}$ sul cono luce, un esempio sono le sorgenti a simmetria sferica in cui la corrente $\boldsymbol{j}$ (e dunque la sua trasformata) è puramente radiale, quindi $\boldsymbol{J}||\boldsymbol{n}$, ma $\boldsymbol{J} \neq \mathbf{0}$ in generale.

Infine, la condizione (4.2) risulta in realtà covariante, poiché equivalente a $k^\mu J^\nu - k^\nu J^\mu = 0$ con $k_\mu k^\mu = 0$, condizione che è manifestamente covariante. Infatti, tenendo conto che la quadricorrente è

[1] A rigore, poiché si ha $k_\mu k^\mu = 0 \leftrightarrow |k^0| = |\boldsymbol{k}|$, la condizione (4.2) andrebbe verificata per ogni $k^0 \in \mathbb{R}$. Tuttavia, essa è banalmente verificata per $k^0 = 0$. Inoltre, siccome $j^\mu(x)$ è reale, vale $J^{*\mu}(k^0, \boldsymbol{k}) = J^\mu(-k^0, -\boldsymbol{k})$. Quindi, se $J^\mu(|\boldsymbol{k}|, \boldsymbol{k}) = 0$, $\forall \boldsymbol{k} \in \mathbb{R}^3$ vale anche $J^\mu(-|\boldsymbol{k}|, \boldsymbol{k}) = 0$, $\forall \boldsymbol{k} \in \mathbb{R}^3$. È quindi sufficiente verificare la condizione (4.2) per $k^0 = |\boldsymbol{k}| > 0$, cosa che verrà fatta nel seguito della trattazione.

localmente conservata, cioè che $\partial_\mu j^\mu = 0$, condizione che in trasformata di Fourier diventa

$$k_\mu J^\mu = 0 \ \to k^0 J^0 = k^i J^i,$$

risulta

$$\begin{aligned} &0 = k^\mu J^\nu - k^\nu J^\mu \to k^i J^l - k^l J^i = 0 \Leftrightarrow \boldsymbol{k} \times \boldsymbol{J}(k) = \boldsymbol{0}, \\ &\boldsymbol{k} \times \boldsymbol{J}(k) = \boldsymbol{0} \to \boldsymbol{k} \times (\boldsymbol{k} \times \boldsymbol{J}(k)) = \boldsymbol{0} \to k^i(k^l J^l) - J^i(k^l k^l) = 0 \to k^0(k^i J^0 - k^0 J^i) = 0, \end{aligned}$$

dove si è tenuto conto che $(k^0)^2 = k^l k^l$. L'assenza di radiazione si ha quindi in ogni riferimento inerziale.

Di seguito si analizzeranno alcuni sistemi che presentano quadricorrente a supporto compatto, e si vedrà esplicitamente come intervengano le condizioni sopra ricavate per l'assenza di radiazione.

4.2 Corpi rigidi nel laboratorio

Come prima applicazione della relazione (4.2) si analizzeranno le condizioni sotto le quali dei corpi carichi, rigidi nel laboratorio e che compiono certi moti periodici, non irradiano. Per corpo rigido nel laboratorio si intende un sistema di punti P_i in cui, in un fissato sistema di riferimento inerziale $\mathcal{R}$, il laboratorio, le distanze $d_{ij}(t) = |\boldsymbol{x}_i(t) - \boldsymbol{x}_j(t)|$, per una qualsiasi coppia di punti (P_i, P_j), rimangono invariate nel tempo, dove $\boldsymbol{x}_i(t)$ è la posizione all'istante t del punto i-esimo rispetto a $\mathcal{R}$. Il moto, nel riferimento $\mathcal{R}$, avviene quindi senza deformazioni dell'oggetto. [2] Tale sistema può essere modellizzato come sovrapposizione di cariche puntiformi. La quadricorrente di una carica puntiforme in moto con legge oraria $\boldsymbol{x}(t)$ è:

$$j^\mu(t, \boldsymbol{x}) = e\delta^{(3)}(\boldsymbol{x} - \boldsymbol{x}(t))(1, \boldsymbol{v}(t)),$$

dove $\boldsymbol{v}(t) = \dot{\boldsymbol{x}}(t)$ è la velocità della particella ed e è la carica elettrica della particella.

Sia dato un corpo rigido nel laboratorio con una distribuzione di carica $\rho(\boldsymbol{x})$ nelle configurazione iniziale che si muove di moto traslatorio con legge oraria del centro di massa $\boldsymbol{z}(t)$, con $|\boldsymbol{z}(t)| < R$ per qualche $R > 0$. Per tale sistema la quadricorrente è data dalla sovrapposizione continua di quelle delle cariche puntiformi:

$$j^\mu(t, \boldsymbol{x}) = \int \rho(\boldsymbol{y})\delta^{(3)}(\boldsymbol{y} - \boldsymbol{z}(t))(c, \dot{\boldsymbol{z}}(t))\, d^3\boldsymbol{y} = \rho(\boldsymbol{x} - \boldsymbol{z}(t))(c, \dot{\boldsymbol{z}}(t)). \tag{4.3}$$

Grazie alla condizione di moto traslatorio rigido, la densità di carica all'istante t è quella iniziale $\rho(\boldsymbol{x})$ traslata di $\boldsymbol{z}(t)$ e la velocità è la stessa per ogni punto del corpo. Si nota che

$$\partial_\mu j^\mu(t, \boldsymbol{x}) = \partial_t(\rho(\boldsymbol{x} - \boldsymbol{z}(t))) + \nabla\cdot(\rho(\boldsymbol{x} - \boldsymbol{z}(t))\dot{\boldsymbol{z}}(t)) = -\nabla\rho(\boldsymbol{x} - \boldsymbol{z}(t))\cdot\dot{\boldsymbol{z}}(t) + \nabla\rho(\boldsymbol{x} - \boldsymbol{z}(t))\cdot\dot{\boldsymbol{z}}(t) = 0,$$

e quindi tale quadricorrente risulta, effettivamente, localmente conservata.

La trasformata di Fourier di tale quadricorrente è:

$$J^\mu(k) = \frac{1}{(2\pi)^2} \int \rho(\boldsymbol{x}{-}\boldsymbol{z}(t))(c, \dot{\boldsymbol{z}}(t))e^{-ik_\nu x^\nu}\, d^4x = \frac{1}{(2\pi)^2} \left(\int e^{-i(k^0 ct - \boldsymbol{k}\cdot\boldsymbol{z}(t))}(c, \dot{\boldsymbol{z}}(t))c dt\right) \left(\int \rho(\boldsymbol{x})e^{i\boldsymbol{k}\cdot\boldsymbol{x}}\, d^3\boldsymbol{x}\right).$$

Come si vede l'integrale si separa in due fattori. Il primo dipende solo dal moto del corpo, tramite

[2] Fisicamente, poichè in relatività i corpi in moto sono soggetti alla contrazione delle lunghezze, per apparire rigido il corpo dovrebbe aumentare le sue dimensioni a riposo in modo che in $\mathcal{R}$ le sue dimensioni rimangano invariate.

$\boldsymbol{z}(t)$, il secondo invece dipende solo dalla geometria del sistema, rappresentata dalla densità di carica $\rho(\boldsymbol{x})$. Si nota poi che il secondo fattore è proporzionale al complesso coniugato della trasformata di Fourier $\hat{\rho}(\boldsymbol{k})$ della densità di carica $\rho(\boldsymbol{x})$.

Se ora il moto $\boldsymbol{z}(t)$ è periodico, con periodo T, anche la funzione $a^\mu(t, \boldsymbol{k}) = e^{i\boldsymbol{k}\cdot\boldsymbol{z}(t))}(c, \dot{\boldsymbol{z}}(t))$ lo è, come funzione del tempo, quindi, è possibile espandere in serie di Fourier tale funzione come $a^\mu(t, \boldsymbol{k}) = \sum_n a_n^\mu(\boldsymbol{k})e^{\frac{i2\pi n}{T}t}$. Sostituendo nell'espressione di $J^\mu(k)$ e usando la definizione integrale della δ di Dirac:

$$J^\mu(k) = \frac{c}{2\pi}\sum_n a_n^\mu(\boldsymbol{k})\delta\left(\frac{2\pi n}{T} - ck^0\right)\left(\int \rho(\boldsymbol{x})e^{i\boldsymbol{k}\cdot\boldsymbol{x}}\, d^3\boldsymbol{x}\right) = \sqrt{2\pi}\sum_n a_n^\mu(\boldsymbol{k})\delta\left(\frac{2\pi n}{cT} - k^0\right)\hat{\rho}^*(\boldsymbol{k}). \quad (4.4)$$

L'espressione (4.4) è valutata sul cono luce, cioè per $k^0 = \pm\boldsymbol{k}$. Si nota come la periodicità del moto, e di conseguenza, della corrente, si rifletta nella presenza di uno spettro discreto di frequenze $\omega_n = \frac{2\pi n}{T}$ che sono presenti solo nel caso in cui la trasformata di Fuorier $\hat{\rho}(\boldsymbol{k})$ sia non nulla se valutata sulle sfere di raggio $|\boldsymbol{k}| = \frac{2\pi n}{cT}$ con $n \in \mathbb{N}$ (che sono i supporti delle delta di Dirac nella sommatoria). La condizione

$$\hat{\rho}(\boldsymbol{k}) = 0, \text{ per } |\boldsymbol{k}| = \frac{2\pi n}{cT} = \frac{\omega_n}{c}, \quad \forall n, \quad (4.5)$$

implica, in effetti, che $\boldsymbol{J}(k)$ sia nulla sul cono luce e, quindi, in accordo con (4.2), che il corpo rigido non irradi. Si vede che, con particolari geometrie, che determinano la forma di $\hat{\rho}(\boldsymbol{k})$, è possibile annullare l'emissione di radiazione.

Si può vedere l'assenza di radiazione in modo più diretto, eseguendo l'analisi spettrale della radiazione prodotta dalla corrente (4.4). I pesi spettrali, che forniscono la potenza emessa alle varie frequenze presenti nella radiazione, sono dati da (2.35), poiché $j^\mu(x)$ è periodica, e i coefficienti della quadricorrente sono $\boldsymbol{J}_m(\boldsymbol{k}) = \sqrt{2\pi}\hat{\rho}^*(\boldsymbol{k})\boldsymbol{a}_m(\boldsymbol{k})$, quindi, si ha

$$\frac{dW_m}{d\Omega} = \frac{2\pi^2\omega_m^2}{c^3}|\hat{\rho}(\omega_m\boldsymbol{n})|^2|\boldsymbol{n}\times\boldsymbol{a}_m(\omega_m\boldsymbol{n})|^2, \quad (4.6)$$

da cui si vede che, se $\hat{\rho}(\omega_m\boldsymbol{n}) = 0\ \forall\boldsymbol{n}$, il peso spettrale (4.6), relativo alla frequenza ω_m, si annulla, in accordo con la (4.5).

Come applicazione della condizione (4.5), si affronterà ora in dettaglio il caso di una sfera rigida in moto traslatorio periodico.

4.2.1 Sfera rigida che compie un moto periodico

Sia dato un guscio sferico di carica e, di raggio R e centrato nell'origine del sistema di coordinate. La densità di carica risulta

$$\rho(\boldsymbol{x}) = \frac{e}{4\pi r^2}\delta(r - R) = \frac{e}{4\pi R^2}\delta(r - R), \quad (4.7)$$

dove il fattore di normalizzazione $\frac{e}{4\pi R^2}$ garantisce che integrando la densità di carica $\rho(\boldsymbol{x})$ in tutto lo spazio si ottiene la carica e della sfera e dove si è posto $r = |\boldsymbol{x}|$ (in coordinate polari sferiche $d^3\boldsymbol{x} = r^2\sin\theta dr d\phi d\theta$). La trasformata di Fourier (spaziale) di tale densità di carica è

$$\hat{\rho}(\boldsymbol{k}) = \frac{e}{(2\pi)^{\frac{3}{2}}}\int_0^\infty \frac{\delta(r - R)}{|\boldsymbol{k}|r}\frac{e^{i|\boldsymbol{k}|r} - e^{-i|\boldsymbol{k}|r}}{2i}\, dr = \frac{e}{(2\pi)^{\frac{3}{2}}}\frac{\sin(|\boldsymbol{k}|R)}{|\boldsymbol{k}|R}. \quad (4.8)$$

Imponendo che $\hat{\rho}(\boldsymbol{k})$ sia nulla per $|\boldsymbol{k}| = \frac{2\pi n}{cT}$ $\forall n$:

$$\sin\left(\frac{2\pi n}{cT}R\right) = 0 \rightarrow \frac{2R}{cT} = q, \quad \forall q,$$

cioè

$$T = \frac{2R}{qc} \leftrightarrow \omega = \frac{\pi qc}{R} \quad \forall q. \tag{4.9}$$

In conclusione, se la sfera rigida si muove di moto periodico con periodo T pari ad una frazione intera del tempo $\frac{2R}{c}$, necessario alla luce per percorrere il diametro della sfera, essa non emette radiazione. Si nota come tale risultato richiami una specie di condizione di quantizzazione sul valore del periodo. Si potrebbe, quindi, pensare di utilizzare tale condizione per costruire un modello classico dell'elettrone in un atomo, considerando l'elettrone come una sfera rigida di carica $-e$. Tuttavia i periodi (4.9) hanno una forma particolare, a causa della presenza del fattore c, e quindi il modello proposto incontra subito delle difficoltà.

Si consideri un atomo di idrogeno come un nucleo di carica e, fisso e centrato nell'origine, attorno al quale orbita l'elettrone, visto come una sfera rigida di raggio R e carica $-e$ con il centro di massa che si muove di moto circolare uniforme, centrato nell'origine, con raggio dell'orbita l e periodo T dato da (4.9). La velocità dell'elettrone è $v = \frac{2\pi}{T}l = \frac{\pi qcl}{R} \leq c \rightarrow l \leq \frac{R}{\pi q}$, quindi il raggio dell'orbita dovrebbe essere sempre minore del raggio dell'elettrone, che dovrebbe contenere il centro dell'orbita. Il raggio di Bohr è $r_B \simeq 0.53$ Å $= 0.53{\cdot}10^{-10}$ m e la dimensione tipica di un nucleo atomico è $r_N \simeq 10$ fm $= 10^{-15}$ m. Il raggio R dell'elettrone nel modello è maggiore del raggio dell'orbita $l \sim r_B$ quindi $R > r_B >> r_N$, l'elettrone sarebbe, quindi, un guscio sferico che circonderebbe il nucleo. Ovviamente, ciò non è in accordo con la visione attuale dell'elettrone, che appare puntiforme, e quindi, se fosse esteso, dovrebbe avere un raggio molto minore del nucleo.

La sfera rigida nel laboratorio fornisce anche un esempio di sistema in cui l'approssimazione di dipolo non è valida in regime non relativistico. Sostituendo la densità di carica data da (4.3) di un corpo rigido nel laboratorio, in moto traslatorio con legge oraria $\boldsymbol{z}(t)$, dove ρ è data da (4.7), nell'espressione (2.14), si ottiene il momento di dipolo per la sfera in moto

$$\boldsymbol{D}(t) = \frac{e}{4\pi R^2}\int \delta(|\boldsymbol{y}-\boldsymbol{z}(t)|-R)\boldsymbol{y}\,d^3\boldsymbol{y} = \frac{e\boldsymbol{z}(t)}{R^2}\int \delta(r-R)r^2\,dr = \frac{e}{4\pi R^2}\int \delta(|\boldsymbol{y}|-R)\boldsymbol{y}\,d^3\boldsymbol{y} = e\boldsymbol{z}(t),$$

analogo a quello della carica puntiforme. Pertanto, la formula di Larmor (2.16) fornirebbe la potenza emessa

$$W = \frac{e^2|\ddot{\boldsymbol{z}}(t-\frac{r}{c})|^2}{6\pi c^3}, \tag{4.10}$$

non nulla se $\ddot{\boldsymbol{z}}(t) \neq 0$, cioè se il moto è accelerato. La condizione (2.17), di validità dell'approssimazione di dipolo, impone $\frac{R}{c} << T$ dove T è il periodo del moto del centro di massa della sfera, che è dato da (4.9). Si ha, quindi, $\frac{R}{c} << \frac{2R}{qc} \rightarrow 1 << \frac{2}{q}$ condizione mai verificata per $q \in \mathbb{N}$. Pertanto, l'approssimazione di dipolo non è valida. Tuttavia, la velocità della sfera è $v = \frac{2\pi l}{T}$ dove l può essere arbitrariamente piccolo, e, dunque, anche la velocità può essere arbitrariamente piccola. Sostituendo l'espressione (4.8) di $\hat{\rho}(\boldsymbol{k})$ nell'espressione (4.6), si ottengono i pesi spettrali

$$\frac{dW_m}{d\Omega} = \frac{e^2}{4\pi c}\frac{\sin^2(\omega_m\frac{R}{c})}{R^2}|\boldsymbol{n}\times\boldsymbol{a}_m(\omega_m\boldsymbol{n})|^2,$$

dove si ricorda che $\omega_m = \frac{2\pi m}{T}$ e dove T è il periodo del moto della sfera. Se vale la condizione (4.9), tali potenze si annullano $\forall m \in \mathbb{N}$. Espandendo in potenze di $\frac{1}{c}$ il termine $\sin^2\left(\frac{\omega_m}{c}R\right)$ si ottiene lo sviluppo in multipoli della potenza irradiata

$$\frac{dW_m}{d\Omega} = \frac{e^2\omega_m^2}{4\pi c^3}|\boldsymbol{n}\times\boldsymbol{a}_m(\omega_m\boldsymbol{n})|^2 - \frac{1}{3}\frac{e^2R^2\omega_m^4}{4\pi c^5}|\boldsymbol{n}\times\boldsymbol{a}_m(\omega_m\boldsymbol{n})|^2 + O\left(\frac{1}{c^7}\right). \tag{4.11}$$

Integrando sull'angolo solido il termine di ordine $\frac{1}{c^3}$ si ottiene la potenza

$$W_m^D = \int \frac{e^2\omega_m^2}{4\pi c^3}|\boldsymbol{n}\times\boldsymbol{a}_m(\omega_m\boldsymbol{n})|^2\, d\Omega = \frac{e^2\omega_m^2}{6\pi c^3}|\boldsymbol{a}_m(\omega_m\boldsymbol{n})|^2, \tag{4.12}$$

che rappresenta esattamente la potenza totale media emessa alla frequenza ω_m all'ordine di dipolo. Tale fatto si può vedere utilizzando la potenza (4.10) fornita dalla formula di Larmor. La potenza (4.10) è quella istantanea, quindi bisogna valutare la sua media temporale

$$\overline{W} = \frac{1}{T}\frac{e^2\int_0^T |\ddot{\boldsymbol{z}}(t-\frac{r}{c})|^2}{6\pi c^3}, \tag{4.13}$$

ricordando che

$$\begin{aligned}
\boldsymbol{a}(t,\boldsymbol{k}) &= e^{i\boldsymbol{k}\cdot\boldsymbol{z}(t))}\dot{\boldsymbol{z}}(t) = \sum_m \boldsymbol{a}_m(\boldsymbol{k})e^{i\omega_m t},\\
|\ddot{\boldsymbol{z}}(t)|^2 &= \sum_m \omega_m^2|\boldsymbol{a}_m(\boldsymbol{k})|^2 - \sum_{q\neq -p}\omega_q\omega_p\boldsymbol{a}_q(\boldsymbol{k})\cdot\boldsymbol{a}_p(\boldsymbol{k})e^{i(\omega_q+\omega_p)t},
\end{aligned}$$

la potenza media (4.13) si può riscrivere

$$\overline{W} = \sum_m \frac{e^2\omega_m^2}{6\pi c^3}|\boldsymbol{a}_m(\omega_m\boldsymbol{n})|^2 = \sum_m W_m^D,$$

e risulta quindi la somma dei pesi spettrali all'ordine di dipolo. Si vede quindi che pur essendo non nulli i singoli termini dello sviluppo (4.11), e in particolare quello di ordine $\frac{1}{c^3}$, che è quello di dipolo, essi si bilanciano in modo tale che la somma risulti nulla. Si capisce così perché la formula di Larmor in questo caso dia un risultato errato, essa non tiene conto di tale cancellazione che inficia la validità dell'approssimazione di dipolo.

4.2.2 Sfera in moto rigido relativistico

La condizione di corpo rigido nel laboratorio è analoga a quella classica, ma al contrario di questa, non è relativisticamente invariante; A causa della contrazione delle lunghezze essa risulta valida nel solo riferimento inerziale del laboratorio. Si può fornire un'altra nozione di corpo rigido, o meglio di moto rigido, che fa uso di un sistema di riferimento di quiete e che è relativisticamente invariante. Innanzitutto, si ricorda che data una particella che compie un certo moto, questa descrive una successione di eventi, cioè una curva nello spaziotempo, detta linea di universo, parametrizzata da un parametro $\lambda \in \mathbb{R}$. Detta $z^\mu(\lambda)$ tale parametrizzazione si richiede che essa soddisfi le seguenti proprietà

1. $(\frac{dz^\mu}{d\lambda}(\lambda))^2 \geq 0$;

2. $z^0(\lambda)$ è una funzione monotona crescente.

La prima proprietà assicura che la particella si muove sempre a velocità minore o uguale della luce, e che quindi la causalità viene preservata. La seconda proprietà assicura che il tempo della particella è sempre crescente al variare di λ, indipendentemente dal riferimento inerziale scelto. Fissato un certo valore di $\lambda = \lambda^*$ ad esso corrisponde un sistema di riferimento inerziale, definito a meno di rototraslazioni spaziali e traslazioni temporali, in cui la particella è in quiete, detto sistema di riferimento di quiete istantanea (s.r.q.i) della particella[3] per $\lambda = \lambda^*$. Una possibile scelta del parametro λ è il *tempo proprio* s della particella definito come il tempo misurato da un orologio ideale, cioè il cui funzionamento non è alterato dalla presenza di accelerazioni, solidale alla particella. Per procedere, bisogna dare una nozione di distanza nel s.r.q.i di una particella P. Detta $z^\mu(\lambda)$ la linea di universo di P, la distanza propria per $\lambda = \lambda^*$ tra due punti P_i e P_j, relativamente a P, è la distanza tra tali punti nel s.r.q.i. di P all'istante corrispondente all'evento $z^\mu(\lambda^*)$. Geometricamente, nello spaziotempo di Minkowski, detti $z_i^\mu(\lambda_i^*)$ e $z_j^\mu(\lambda_j^*)$ gli eventi corrispondenti alle intersezioni delle linee di universo, rispettivamente, di P_i e P_j con lo spazio di simultaneità dell'evento $z^\mu(\lambda^*)$ nel s.r.q.i.[4], tale distanza corrisponde a $d_{ij} = \sqrt{-(z_i^\mu(\lambda_i^*) - z_j^\mu(\lambda_j^*))^2}$, che è, evidentemente, una quantità scalare. Si noti che tale distanza è indipendente dalla scelta di un'origine e dall'orientazione degli assi spaziali, come ci si aspetta dato che il s.r.q.i. è definito a meno di rototraslazioni spaziali e traslazioni temporali. Si può ora dare la nozione di moto rigido relativistico

Definizione (Moto rigido relativistico)**.** *Dato un punto C, detto centro, che segue una linea di universo $z^\mu(\lambda)$, un sistema di punti P_i compie un moto rigido relativistico rispetto a C se la distanza propria tra una qualsiasi coppia di punti (P_i, P_j), relativamente a C, è indipendente da λ.*

È importante notare alcune differenze rispetto alla nozione classica di corpo rigido. Il vincolo di rigidità classico fissa le distanze tra i punti del sistema, ma tali distanze sono delle proprietà intrinseche che non dipendono dalla scelta di un punto rispetto a cui osservare il sistema. La condizione di moto rigido relativistico non è applicabile ad un sistema di punti in sé ma richiede la scelta di un *centro*, che ha il ruolo di fissare un riferimento di quiete rispetto a cui misurare le distanze tra i punti[5]. La condizione diventa più significativa nel momento in cui, detto $\mathcal{Q}$ il sistema di punti, esiste un s.r.q.i. comune a tutti i punti di $\mathcal{Q}$, ovvero quando, comunque presi $C, P \in \mathcal{Q}$, P è in quiete nel s.r.q.i. di C all'istante λ, $\forall C, P, \lambda$. Una condizione necessaria per avere un s.r.q.i. per il sistema $\mathcal{Q}$ è che esso non ruoti, bisognerà quindi restringersi a moti traslatori. Si potrà dire allora che un sistema $\mathcal{Q}$ compie un moto traslatorio (rigido) relativistico se, scelto un qualsiasi $C \in \mathcal{Q}$, esso compie un moto rigido relativistico rispetto a C. La definizione non dipende dalla scelta di C poiché il s.r.q.i. è comune a tutti i punti.

Un semplice esempio di sistema che compie un moto traslatorio relativistico è un corpo piano che si muove di moto accelerato rispetto a un sistema di riferimento inerziale $\mathcal{R}$. Più precisamente, in $\mathcal{R}$ l'insieme delle linee di universo del corpo è dato dalla parametrizzazione

$$\mathcal{C}(t, q^2, q^3) = (t, x^1(t), q^2, q^3), \quad q^2, q^3 \in E, \tag{4.14}$$

$$\frac{d\mathcal{C}}{ds}(t, q^2, q^3) = \gamma(v(t))(1, v(t), 0, 0), \quad q^2, q^3 \in E, \tag{4.15}$$

[3] Tale sistema è definito operativamente considerando l'intervallo infinitesimo formato dagli eventi $z^\mu(\lambda)$ e $z^\mu(\lambda + d\lambda)$. Se in un determinato riferimento inerziale tali eventi hanno la stessa posizione allora tale riferimento è un riferimento di quiete istantanea per la particella.

[4] Con spazio di simultaneità di un evento E in un riferimento inerziale $\mathcal{R}$ si intende l'insieme degli eventi simultanei a E in $\mathcal{R}$.

[5] Il motivo di tale richiesta è che la distanza tra i punti coinvolge le loro posizione ad un determinato istante di tempo, cioè eventi simultanei, ma la relatività della simultaneità richiede di fissare un riferimento speciale, quello di quiete istantanea del centro, rispetto a cui valutare le distanze.

dove $x^1(t)$ è una funzione arbitraria del tempo, $v(t) = \frac{dx^1}{dt}(t)$ e $E \subseteq \mathbb{R}^2$. La (4.14) descrive un corpo piano E, in cui ogni punto è parametrizzato dalle coordinate (q^2, q^3), che giace su un piano parallelo a (x^2, x^3) e si muove lungo l'asse x^1, ortogonale al corpo, con legge oraria $x^1(t)$; la (4.15) fornisce la quadrivelocità di ogni punto del corpo. In questo caso, fissato un istante t^*, eseguendo un boost di velocità $v(t) = \dot{x}^1(t)$ lungo l'asse x^1, passando così ad un nuovo riferimento $\mathcal{R}_t$, la parametrizzazione nel nuovo riferimento diventa

$$\mathcal{C}'(t, x^2, x^3) = \Big(\gamma(v(t))\Big(t - \frac{v(t)}{c^2}x^1(t)\Big), \gamma(v(t))\Big(x^1(t) - v(t)t\Big), q^2, q^3\Big), \quad q^2, q^3 \in E, \tag{4.16}$$

$$\frac{d\mathcal{C}}{ds}(t, q^2, q^3) = (1, 0, 0, 0), \quad q^2, q^3 \in E. \tag{4.17}$$

Come si vede dalla (4.17), in $\mathcal{R}_t$ tutti i punti del corpo E sono in quiete simultaneamente, poiché la coordinata temporale è indipendente da (q^2, q^3), ad ogni istante t, e quindi $\mathcal{R}_t$ è un s.r.q.i. per il corpo E. Inoltre, il moto è traslatorio relativistico poiché le distanze tra i punti coinvolgono solo i parametri q^2, q^3 che non cambiano applicando il boost[6]. Infine, si nota che in questo caso, in $\mathcal{R}$ il corpo E è anche rigido nel laboratorio. Un altro sistema in cui è possibile dimostrare l'esistenza di moti traslatori relativistici è quello di un'asta che si muova lungo la direzione del suo asse con accelerazione arbitraria. In questo caso i punti dell'asta devono muoversi in modo che esista un riferimento di quiete comune a tutti i punti il che comporta che in un riferimento inerziale fissato, in cui l'asta sia in moto, ad ogni istante i punti hanno velocità differenti. È possibile dimostrare[7]che la quadricorrente di un corpo carico che compie un moto traslatorio relativistico, che abbia forma sferica nel riferimento di quiete istantanea, può soddisfare alla condizione di assenza di radiazione (4.2), solo nel caso in cui tale moto risulti rettilineo uniforme. Pertanto, al contrario della sfera rigida nel laboratorio, non è possibile che tale sistema esegua moti accelerati senza emettere radiazione.

[6]È importante sottolineare che le (4.17) rappresenta le quadrivelocità dei punti nello stesso istante nell's.r.q.i. solo perché la coordinata temporale della parametrizzazione è la stessa per tutti, altrimenti essa fornisce la quadrivelocità dei punti a istanti diversi e perde di significato.

[7]Si veda [7].

Capitolo 5

Sorgenti non compatte

Verrà trattato ora il caso in cui la sorgente j^μ è non compatta. Ciò significa che essa è infinitamente estesa in qualche direzione dello spazio e, quindi, non vale più la condizione (3.2). Fisicamente, ciò corrisponde a trattare un sistema finito trascurando gli effetti di bordo, che ne complicherebbero l'analisi, pensando di mandare all'infinito tale bordo. In questo caso non è più possibile una trattazione generale, poiché il comportamento a grandi distanze del quadripotenziale A^μ generato dipende dalla simmetria della sorgente e dalla dimensione della regione illimitata. Si analizzeranno, per semplicità, sistemi neutri, in cui la densità di carica complessiva, delle particelle che formano le correnti, è nulla[1].

5.1 Simmetria cilindrica

Nel caso di simmetria cilindrica, la quadricorrente j^μ è invariante sotto rotazioni attorno ad un asse x^3 ed è indipendente da x^3. Passando in coordinate cilindriche (r, θ, x^3) , dove $r = \sqrt{(x^1)^2 + (x^2)^2}$ è la distanza dall'asse x^3 e θ è l'angolo formato dal vettore (x^1, x^2) con l'asse x^1, la condizione di simmetria cilindrica si traduce nel fatto che j^μ è indipendente da θ e x^3. Si considereranno sorgenti che sono limitate per $r \to \infty$ cioè

$$\lim_{r \to \infty} |j^\mu(t, r)| r^3 = 0.$$

Assumendo che l'espressione (2.4) definisca una distribuzione, si può calcolare A^μ tramite l'espressione (2.3). La simmetria cilindrica suggerisce che l'emissione di radiazione avviene in direzione radiale, normale ad una superficie cilindrica di raggio r con asse x^3. In generale, la non limitatezza lungo la direzione x^3 implica che la potenza totale irradiata può essere infinita. È quindi più significativo analizzare la potenza per unità di lunghezza w calcolando il flusso di energia attraverso una superficie cilindrica di altezza infinitesima dh. Ricordando l'espressione del quadrimomento irradiato su una superficie infinitesima $d\sigma$ nell'unità di tempo

$$\frac{dP^\mu}{d\sigma dt} = T^{i\mu} u^i,$$

poiché nel caso del cilindro si ha $d\sigma = 2\pi r dh$, si ottiene

$$w = c\frac{dP^0}{dhdt} = 2\pi r c T^{i0} u^i = 2\pi r S^i u^i, \tag{5.1}$$

dove u^i indica il versore normale alla superficie cilindrica e $S^i = cT^{i0} = c(E \times B)^i$ è il vettore di Poynting, che rappresenta il flusso di energia del campo elettromagnetico. Per calcolare l'energia

[1]Proprietà che, a causa delle trasformazioni di Lorentz, vale solo nel riferimento considerato.

emessa a grandi distanze bisogna prendere il limite di (5.1) per $r \to \infty$ tenendo costante il ritardo $t' = t - \frac{r}{c}$. Si può notare come solo le componenti del tensore energia impulso con andamento $\frac{1}{r}$ contribuiscono all'energia irradiata a grandi distanze e ciò implica che, nel caso di simmetria cilindrica, poiché il tensore energia impulso è quadratico in $F^{\mu\nu}$, solo i campi elettromagnetici con andamento $\frac{1}{\sqrt{r}}$ sono rilevanti nell'analisi dell'irraggiamento. Si analizzeranno ora due casi specifici, in cui è possibile avere assenza di radiazione. Si vedrà come anche tali casi soddisfino la condizione generale (4.2) ricavata nel caso compatto.

5.1.1 Cilindro infinito percorso da una corrente parallela al suo asse

Sia data una superficie cilindrica, non carica, di raggio R e asse x^3 percorsa da una corrente $I(t)$, parallela all'asse del cilindro e indipendente da x^3. La quadricorrente è

$$j^\mu(t, \boldsymbol{x}) = \left(0, \frac{I(t)}{2\pi R}\delta(r - R)\boldsymbol{e}_3\right), \tag{5.2}$$

dove si è indicato con $\boldsymbol{e}_3$ il versore dell'asse x^3. Data la forma della quadricorrente solo la componente A^3 del quadripotenziale (2.3) risulta non nulla, quindi, ci si può limitare al calcolo di tale componente. Sostituendo l'espressione (5.2) in (2.3), si ha

$$A^3(t, \boldsymbol{x}) = \int \frac{I(t - \frac{|\boldsymbol{x}-\boldsymbol{y}|}{c})\delta(h - R)}{8\pi^2 Rc|\boldsymbol{y} - \boldsymbol{x}|}\, d^3\boldsymbol{y},$$

dove $h = \sqrt{(y^1)^2 + (y^2)^2}$. Ponendo $z = y^3 - x^3$ e detto ϕ l'angolo tra i le proiezioni $Y = (y^1, y^2, 0)$ e $X = (x^1, x^2, 0)$ dei vettori $\boldsymbol{x}$ e $\boldsymbol{y}$ sul piano 12, l'espressione di A^3 si riscrive

$$A^3(t, \boldsymbol{x}) = \int \frac{I(t - \frac{\sqrt{|X-Y|^2+z^2}}{c})\delta(h - R)}{8\pi^2 Rc\sqrt{|X - Y|^2 + z^2}} h\, dh\, d\phi\, dz = \int_0^{2\pi} \int \frac{I(t - \frac{\sqrt{\xi^2+z^2}}{c})}{8\pi^2 c\sqrt{\xi^2 + z^2}}\, d\phi\, dz, \tag{5.3}$$

dove $r = \sqrt{(x^1)^2 + (x^2)^2}$ e dove si è posto $\xi = \sqrt{R^2 + r^2 - 2Rr\cos\phi}$. L'integrale (5.3) presenta una divergenza in dz di tipo logaritmico, poiché $|z| \to \infty$ nel dominio di integrazione. Tale divergenza può essere eliminata, ad esempio, se la corrente $I(t)$ è nulla prima di un istante di accensione t_0 in modo che l'integrando sia non nullo solo in un intervallo limitato di valori di z.

Si consideri ora una corrente $I(t)$ armonica, cioè della forma

$$I(t) = Ie^{i\omega t}, \tag{5.4}$$

dove ω è la frequenza della corrente[2] e I il suo modulo. Inserendo la corrente (5.4) nell'espressione (5.3), si ottiene[3]

$$A^3(t, \boldsymbol{x}) = Ie^{i\omega t} \int_0^{2\pi} \int_{-\infty}^{+\infty} \frac{e^{-i\omega(\frac{\sqrt{\xi^2+z^2}}{c})}}{8\pi^2 c\sqrt{\xi^2 + z^2}}\, d\phi\, dz = Ie^{i\omega t} \int_0^{2\pi} \int_{\xi}^{+\infty} \frac{e^{-i\omega(\frac{q}{c})}}{4\pi^2 c\sqrt{q^2 - \xi^2}}\, d\phi\, dq\, = \tag{5.5}$$

$$= Ie^{i\omega t} \int_0^{2\pi} \int_1^{+\infty} \frac{e^{-ix\omega(\frac{\xi}{c})}}{4\pi^2 c\sqrt{x^2 - 1}}\, d\phi\, dq\,, \tag{5.6}$$

[2]Tale corrente non viene accesa dopo un istante t_0, tuttavia, comunque non si ha divergenza poiché la (5.3) diverge come $\log z$ e quindi la presenza del fattore oscillante $\sim e^{i\omega\frac{z}{c}}$ rende l'integrale convergente.

[3]La corrente (5.4) risulta essere un numero complesso e, di conseguenza, anche il potenziale da essa generato. I campi si ottengono considerando la parte reale di tale potenziale.

dove in (5.5), si è decomposto il dominio di integrazione nelle due semirette $z > 0$ e $z < 0$ e per ogni termine si è eseguito il cambio di variabile $z \to q = \pm\sqrt{z^2 + \xi^2}$, il segno essendo scelto in base a quello di z, e in (5.6) si è eseguito il cambio di variabile $x = \frac{q}{\xi}$. L'integrale (5.6) può essere svolto in maniera esatta introducendo le funzioni di Bessel J_ν e Neumann Y_ν, (si veda l'appendice) i cui integrali sono noti in letteratura. In particolare valgono le seguenti relazioni

$$\int_1^\infty \frac{\sin(ax)dx}{\sqrt{x^2-1}} = \frac{\pi}{2} J_0(a), \quad a > 0, \tag{5.7}$$

$$\int_1^\infty \frac{\cos(ax)}{\sqrt{x^2-1}} dx = -\frac{\pi}{2} Y_0(a). \tag{5.8}$$

Riscrivendo l'esponenziale della (5.6) come $e^{-ix\omega(\frac{\xi}{c})} = \cos\left(x\omega(\frac{\xi}{c})\right) - i\sin\left(x\omega(\frac{\xi}{c})\right)$ e applicando le relazioni (5.7) e (5.8), con $a = \omega\frac{\xi}{c}$, si ottiene

$$A^3(t, \boldsymbol{x}) = -\frac{I}{8\pi c} e^{i\omega t} \int_0^{2\pi} \left(Y_0\left(\frac{\omega\xi}{c}\right) + iJ_0\left(\frac{\omega\xi}{c}\right)\right) d\phi = -\frac{I}{4\pi c} e^{i\omega t} \int_0^{\pi} \left(Y_0\left(\frac{\omega\xi}{c}\right) + iJ_0\left(\frac{\omega\xi}{c}\right)\right) d\phi\,, \tag{5.9}$$

dove si è sfruttato il fatto che il coseno è una funzione pari. Anche l'integrale (5.9) può essere calcolato in maniera esatta utilizzando le relazioni

$$\int_0^\pi (\sin x)^{2n} \frac{J_n(\sqrt{\alpha^2+\beta^2-2\alpha\beta\cos x})}{(\sqrt{\alpha^2+\beta^2-2\alpha\beta\cos x})^n} dx = 2^n\sqrt{\pi}\Gamma\left(n+\frac{1}{2}\right)\frac{J_n(\alpha)}{\alpha^n}\frac{J_n(\beta)}{\beta^n}, \tag{5.10}$$

$$\int_0^\pi (\sin x)^{2n} \frac{Y_n(\sqrt{\alpha^2+\beta^2-2\alpha\beta\cos x})}{(\sqrt{\alpha^2+\beta^2-2\alpha\beta\cos x})^n} dx = 2^n\sqrt{\pi}\Gamma\left(n+\frac{1}{2}\right)\frac{J_n(\alpha)}{\alpha^n}\frac{Y_n(\beta)}{\beta^n} \quad |\alpha| < |\beta|. \tag{5.11}$$

Applicando le (5.10) e (5.11), con $\alpha = \frac{\omega R}{c}$, $\beta = \frac{\omega r}{c}$, $n = 0$, all'integrale (5.9), si ha (si ricorda che $\xi = \sqrt{R^2 + r^2 - 2Rr\cos\phi}$ e $\Gamma\left(\frac{1}{2}\right) = \sqrt{\pi}$)

$$A^3(t, \boldsymbol{x}) = -\frac{I}{4c} e^{i\omega t} J_0\left(\frac{\omega R}{c}\right)\left(Y_0\left(\frac{\omega r}{c}\right) + iJ_0\left(\frac{\omega r}{c}\right)\right). \tag{5.12}$$

Il potenziale calcolato è quello per $r > R$, cioè esterno al cilindro. Il campo elettromagnetico per $r > R$ risulta allora (considerando la parte reale del potenziale (5.12))

$$\boldsymbol{E}(t, r) = -\frac{1}{c}\frac{\partial \boldsymbol{A}}{\partial t} = -\frac{\omega I}{4c^2} J_0\left(\frac{\omega R}{c}\right)\left(J_0\left(\frac{\omega r}{c}\right)\cos(\omega t) + Y_0\left(\frac{\omega r}{c}\right)\sin(\omega t)\right)\boldsymbol{e}_3, \tag{5.13}$$

$$\boldsymbol{B}(t, r) = \nabla\times\boldsymbol{A} = -\frac{\omega I}{4c^2} J_0\left(\frac{\omega R}{c}\right)\left(Y_1\left(\frac{\omega r}{c}\right)\cos(\omega t) - J_1\left(\frac{\omega r}{c}\right)\sin(\omega t)\right)\boldsymbol{e}_\theta, \tag{5.14}$$

dove si è indicato con $\boldsymbol{e}_\theta$ il vettore della base naturale delle coordinate cilindriche riferito alla coordinata θ e dove si sono usate le seguenti relazioni per il calcolo delle derivate delle funzioni di Bessel e Neumann (si veda l'appendice)

$$J_n'(z) = J_{n-1}(z) - \frac{n}{z}J_n(z), \qquad Y_n'(z) = Y_{n-1}(z) - \frac{n}{z}Y_n(z). \tag{5.15}$$

Si nota come i campi elettrico e magnetico siano ortogonali tra loro. Le espressioni (5.13) e (5.14) per il campo elettromagnetico sono quelle esatte, per analizzare l'energia irradiata è necessario esaminare il comportamento del campo elettromagnetico a grandi distanze. L'andamento asintotico, per $r \to \infty$, tenendo l'istante ritardato $t^* = t - \frac{r}{c}$ costante, delle espressioni (5.13) e (5.14), all'ordine $\frac{1}{\sqrt{r}}$, risulta (si vedano le espressioni (A.4) e (A.5) in appendice)

$$\boldsymbol{E}(t,r) \sim -I\sqrt{\frac{\omega}{8\pi r c^3}} J_0\left(\frac{\omega R}{c}\right)\cos\left(\omega t^* + \frac{\pi}{4}\right)\boldsymbol{e}_3, \tag{5.16}$$

$$\boldsymbol{B}(t,r) \sim I\sqrt{\frac{\omega}{8\pi r c^3}} J_0\left(\frac{\omega R}{c}\right)\cos\left(\omega t^* + \frac{\pi}{4}\right)\boldsymbol{e}_\theta. \tag{5.17}$$

Le espressioni (5.16) e (5.17) mostrano che il campo elettromagnetico ha un andamento $\frac{1}{\sqrt{r}}$. Ricordando che il flusso di energia è dato dal vettore di Poynting $S^i = cT^{i0} = c(E \times B)^i$, si può calcolare, tramite l'espressione (5.1), la potenza irradiata per unità di lunghezza

$$\boldsymbol{S}(t,r) \sim \frac{\omega I^2}{16\pi r c^2} J_0^2\left(\frac{\omega R}{c}\right)(1 - \sin(2\omega t^*))\,\boldsymbol{e}_r,$$
$$w = c\frac{dP^0}{dhdt} = 2\pi r \boldsymbol{S}(t,r)\cdot\boldsymbol{e}_r = \frac{\omega I^2}{8c^2} J_0^2\left(\frac{\omega R}{c}\right)(1 - \sin(2\omega t^*)),$$

da cui si vede che il flusso di energia è radiale uscente e ha andamento $\frac{1}{r}$, in accordo con la simmetria cilindrica del sistema. Inoltre, dalle espressioni (5.16) e (5.17) si vede che il campo elettromagnetico presenta solo la frequenza ω, di conseguenza la potenza è emessa solo a tale frequenza. La presenza del fattore $J_0\left(\frac{\omega R}{c}\right)$ nell'espressione dei campi e della potenza rende possibile l'assenza di radiazione nel caso in cui $\frac{\omega R}{c}$ sia uno zero di J_0. Quindi, la condizione affinché non si abbia radiazione per una corrente armonica (5.4) è

$$\omega_n = f_n \frac{c}{R},\ \ J_0(f_n) = 0 \to f_n = 2.405, 5.520, 8.654, \dots\ . \tag{5.18}$$

Si può notare che, in realtà, se la frequenza verifica la condizione (5.18), il campo elettromagnetico è esattamente nullo in tutto lo spazio al di fuori del cilindro. In questo caso, quindi, l'assenza di radiazione non si ha solo a grandi distanze ma anche vicino alla sorgente. Per il principio di sovrapposizione, se una corrente presenta solo frequenze del tipo (5.18), cioè se la corrente è della forma

$$I(t) = \sum_n I_n e^{i\omega_n t}, \tag{5.19}$$

non viene emessa radiazione. È importante notare che la corrente (5.19) non è necessariamente periodica, poiché le frequenze che compaiono non sono multipli interi di una frequenza fondamentale come invece accade nel caso della serie di Fourier. Inoltre, è cruciale che la sorgente sia un cilindro di raggio non nullo. Infatti, per $R = 0$, cioè per una sorgente filiforme, si avrebbe un fattore $J_0(0) = 1$, quindi, non si potrebbero annullare i campi. Ciò è dovuto al fatto che l'assenza di radiazione ha origine da un fenomeno di interferenza distruttiva. Questo effetto si comprende facilmente immaginando il cilindro come sovrapposizione continua di fili percorsi da corrente. In tal caso, ogni filo emette onde elettromagnetiche e il campo elettromagnetico in un punto è dato dalla sovrapposizione di campi della forma (5.13) e (5.14). Risulta così possibile, per opportune frequenze, annullare, in ogni punto dello spazio al di fuori del cilindro, il campo elettromagnetico complessivo. Per $R = 0$ il sistema si riduce ad un singolo filo e tale effetto di interferenza non è, ovviamente, possibile. Dato che $f_n > 2$, $\forall n$, l'effetto non può verificarsi per frequenze minori di $\frac{2c}{R}$ e, dato il grande valore di c, se $R < 1\,\mathrm{m}$, tale effetto risulta osservabile ad alte frequenze $\omega > 10^8\ \frac{\mathrm{rad}}{\mathrm{s}}$.

Infine, calcolando la trasformata di Fourier della quadricorrente (5.2), per la parte spaziale, si ottiene

$$\boldsymbol{J}(k) = \frac{\sqrt{2}\hat{I}(k^0)}{\pi^{\frac{7}{2}}} J_0(pR)\delta(k^3)\, \boldsymbol{e}_3, \tag{5.20}$$

dove si è indicato con $p = \sqrt{(k^1)^2 + (k^2)^2}$ la distanza dall'asse k^3 e dove si è denotato con $\hat{I}(k^0)$ la trasformata di Fuorier (unidimensionale) della corrente $I(t)$. Nel caso di corrente armonica (5.4) la trasformata di Fourier (5.20) si riduce a

$$\boldsymbol{J}(k) = \frac{\sqrt{2}I}{\pi^{\frac{7}{2}}} \delta\left(k^0 - \frac{\omega}{c}\right) J_0(pR)\delta(k^3)\, \boldsymbol{e}_3,$$

e valutando tale espressione sul cono luce, si ha

$$\boldsymbol{J}(k) = \frac{\sqrt{2}I}{\pi^{\frac{7}{2}}} \delta\left(p - \frac{\omega}{c}\right) J_0\left(\frac{\omega R}{c}\right) \delta(k^3)\, \boldsymbol{e}_3.$$

Quindi, se ω soddisfa la condizione (5.18) si ha $\boldsymbol{J}(k) = 0$ e risulta verificata la condizione di non radiazione generale, derivata nel caso compatto, (4.2).

5.1.2 Solenoide infinito

Sia dato un solenoide circolare di lunghezza infinita ossia una superficie cilindrica neutra di asse x^3, infinitamente estesa lungo tale direzione, di raggio R e percorsa da una corrente attorno al suo asse. In questo caso la quadricorrente risulta

$$j^\mu(t, \boldsymbol{x}) = (0, I(t)\delta(r - R)\boldsymbol{e}_\theta). \tag{5.21}$$

Data la forma della quadricorrente, la componente lungo $\boldsymbol{e}_3$ di A^μ risulta nulla e si ha dipendenza solo da r, data la simmetria cilindrica. Analogamente a prima, sostituendo l'espressione (5.21) in (2.3), si ottiene

$$\boldsymbol{A}(t, r) = \int_0^{2\pi} \int \frac{I(t - \frac{\sqrt{\xi^2+z^2}}{c})}{4\pi c\sqrt{\xi^2 + z^2}} R\, \boldsymbol{e}_\varphi\, d\varphi\, dz, \tag{5.22}$$

dove φ è l'angolo formato dalla proiezione $\boldsymbol{Y} = (y^1, y^2, 0)$ con l'asse x^1, $\xi = \sqrt{r^2 + R^2 - 2rR\cos\phi}$ e dove ϕ è l'angolo tra $\boldsymbol{X} = (x^1, x^2, 0)$ e la proiezione $\boldsymbol{Y}$. Fissato $\boldsymbol{x}$ e detto θ l'angolo tra $\boldsymbol{X}$ e l'asse x^1 è conveniente eseguire una rotazione antioraria degli assi di angolo θ attorno all'asse x^3, in modo che il nuovo asse x'^1 sia parallelo a $\boldsymbol{X}$ e quindi sia $\varphi = \phi$. Detti $\boldsymbol{e}'_1$ e $\boldsymbol{e}'_2$ gli assi ruotati , si ha $\boldsymbol{e}_\theta = \boldsymbol{e}'_2$ e $\boldsymbol{e}_\varphi = (\boldsymbol{e}'_2 \cos\phi - \boldsymbol{e}'_1 \sin\phi)$. L'integrale diventa

$$\boldsymbol{A}(t, r) = \int_0^{2\pi} \int \frac{I(t - \frac{\sqrt{\xi^2+z^2}}{c})}{4\pi c\sqrt{\xi^2 + z^2}} R(\boldsymbol{e}'_2 \cos\phi - \boldsymbol{e}'_1 \sin\phi)\, d\phi\, dz = \tag{5.23}$$

$$= \int_0^{2\pi} \int \frac{I(t - \frac{\sqrt{\xi^2+z^2}}{c})}{4\pi c\sqrt{\xi^2 + z^2}} R\cos\phi\, d\phi\, dz\, \boldsymbol{e}_\theta, \tag{5.24}$$

dove la componente dell'integrale relativa a $\boldsymbol{e}'_1$ si annulla grazie al fatto che $\sin\phi$ è una funzione dispari[4]. Il risultato è simile a quello ottenuto per un cilindro percorso da corrente lungo la direzione x^3 ma in questo caso $\boldsymbol{A}||\boldsymbol{e}_\theta$ e compare un fattore $\cos\phi$ nell'integrale. Sostituendo in (5.24) l'espressione

[4]Si esegua il cambio di variabile $\phi \to \phi - \pi$ nella componente $\boldsymbol{e}'_1$ dell'integrale.

(5.4) per $I(t)$, si ottiene il potenziale generato (per $r > R$) da una corrente armonica

$$\boldsymbol{A}(t, \boldsymbol{x}) = IR\, e^{i\omega t} \int_0^{2\pi} \int_{\xi}^{+\infty} \frac{e^{-i\omega\left(\frac{q}{c}\right)}}{2\pi c\sqrt{q^2 - \xi^2}} \cos\phi\, d\phi\, dq\, \boldsymbol{e}_\theta. \tag{5.25}$$

Di nuovo, utilizzando le formule (5.7) e (5.8), si ottiene

$$\boldsymbol{A}(t, \boldsymbol{x}) = -\frac{IR}{4c} e^{i\omega t} \int_0^{2\pi} \left(Y_0\left(\frac{\omega\xi}{c}\right) + iJ_0\left(\frac{\omega\xi}{c}\right)\right) \cos\phi\, d\phi\, \boldsymbol{e}_\theta = \tag{5.26}$$

$$= -\frac{IR}{4c^2} e^{i\omega t} \int_0^{2\pi} \frac{\omega r R}{\xi} \left(Y_1\left(\frac{\omega\xi}{c}\right) + iJ_1\left(\frac{\omega\xi}{c}\right)\right) \sin^2\phi\, d\phi\, \boldsymbol{e}_\theta = \tag{5.27}$$

$$= -\frac{I\omega^2 R^2 r}{2c^3} e^{i\omega t} \int_0^{\pi} \frac{c}{\omega\xi} \left(Y_1\left(\frac{\omega\xi}{c}\right) + iJ_1\left(\frac{\omega\xi}{c}\right)\right) \sin^2\phi\, d\phi\, \boldsymbol{e}_\theta, \tag{5.28}$$

dove nel passare da (5.26) a (5.27) si è eseguita un' integrazione per parti (considerando $\cos\phi$ come funzione derivata) e per scrivere (5.28) si è utilizzata la parità di $\cos\phi$. Utilizzando le formule (5.10) e (5.11) (con $n = 1, \alpha = \frac{\omega R}{c}, \beta = \frac{\omega R}{c}$ e ricordando che $\Gamma\left(\frac{3}{2}\right) = \frac{\sqrt{\pi}}{2}$)

$$\boldsymbol{A}(t, \boldsymbol{x}) = -\frac{I\pi R}{2c} e^{i\omega t} J_1\left(\frac{\omega R}{c}\right) \left(Y_1\left(\frac{\omega r}{c}\right) + iJ_1\left(\frac{\omega r}{c}\right)\right) \boldsymbol{e}_\theta. \tag{5.29}$$

Il campo elettromagnetico associato (per $r > R$) è (le derivate si ottengono usando le relazioni (5.15))

$$\boldsymbol{E}(t, r) = -\frac{1}{c}\frac{\partial \boldsymbol{A}}{\partial t} = -\frac{\pi\omega IR}{2c^2} J_1\left(\frac{\omega R}{c}\right) \left(J_1\left(\frac{\omega r}{c}\right)\cos(\omega t) + Y_1\left(\frac{\omega r}{c}\right)\sin(\omega t)\right) \boldsymbol{e}_\theta, \tag{5.30}$$

$$\boldsymbol{B}(t, r) = \nabla\times\boldsymbol{A} = \frac{\pi\omega IR}{2c^2} J_1\left(\frac{\omega R}{c}\right) \left(J_0\left(\frac{\omega r}{c}\right)\sin(\omega t) - Y_0\left(\frac{\omega r}{c}\right)\cos(\omega t)\right) \boldsymbol{e}_3, \tag{5.31}$$

in cui le direzioni di campo elettrico e magnetico risultano scambiate rispetto al caso di corrente verticale. Per analizzare l'energia irradiata a grandi distanze bisogna esaminare l'andamento asintotico[5] delle espressioni (5.30) e (5.31) per $r \to \infty$, si ha

$$\boldsymbol{E}(t, r) \sim IR\sqrt{\frac{\pi\omega}{2rc^3}} J_1\left(\frac{\omega R}{c}\right) \sin\left(\omega t^* + \frac{\pi}{4}\right) \boldsymbol{e}_\theta, \tag{5.32}$$

$$\boldsymbol{B}(t, r) \sim IR\sqrt{\frac{\pi\omega}{2rc^3}} J_1\left(\frac{\omega R}{c}\right) \sin\left(\omega t^* + \frac{\pi}{4}\right) \boldsymbol{e}_3. \tag{5.33}$$

Sostituendo le (5.32) e (5.33) nell'espressione (5.1), la potenza per unità di lunghezza irradiata a grandi distanze risulta

$$\boldsymbol{S}(t, r) \sim \frac{\pi\omega I^2 R^2}{4rc^2} J_1^2\left(\frac{\omega R}{c}\right) \left(1 + \sin\left(2\omega t^*\right)\right) \boldsymbol{e}_r,$$

$$w = c\frac{dP^0}{dhdt} = 2\pi r \boldsymbol{S}(t, r)\cdot\boldsymbol{e}_r = \frac{\pi^2\omega I^2 R^2}{2c^2} J_1^2\left(\frac{\omega R}{c}\right) \left(1 + \sin\left(2\omega t^*\right)\right),$$

Anche in questo caso il vettore di Poynting ha direzione radiale uscente e andamento $\frac{1}{r}$, in accordo con la simmetria cilindrica. Come nel caso di corrente verticale, la radiazione è emessa solo alla frequenza ω di oscillazione dei campi. La presenza del fattore $J_1\left(\frac{\omega R}{c}\right)$ permette, anche nel caso del solenoide, di annullare la presenza di radiazione dovuta ad una corrente armonica di frequenza ω, se tale frequenza

[5] Si vedano le relazioni (A.4) e (A.5) in appendice.

verifica la condizione

$$\omega_n = f_n \frac{c}{R},\ J_1(f_n) = 0 \to f_n = 3.832, 7.016, 10.173, ... \ , \tag{5.34}$$

l'assenza di radiazione si ha solo per $R \neq 0$ e comporta l'annullamento del campo elettromagnetico in tutti i punti dello spazio al di fuori del solenoide. Grazie al principio di sovrapposizione, anche una corrente $I(t)$ della forma (5.19) non emette radiazione nel caso in cui le frequenze ω_n rispettino la condizione (5.34). Anche per il solenoide risulta verificata la condizione generale (4.2). Infatti, la parte spaziale della trasformata di Fourier della quadricorrente (5.21), risulta

$$\boldsymbol{J}(k) = iR\frac{\sqrt{2}\hat{I}(k^0)}{\pi^{\frac{7}{2}}} J_1(pR)\delta(k^3)\,\boldsymbol{e}_3, \tag{5.35}$$

dove $p = \sqrt{(k^1)^2 + (k^2)^2}$. Sostituendo la (5.4) nella (5.35) si ottiene la trasformata di Fourier per una corrente armonica di frequenza ω

$$\boldsymbol{J}(k) = \frac{iR\sqrt{2}I}{\pi^{\frac{7}{2}}}\delta\left(k^0 - \frac{\omega}{c}\right) J_1(pR)\delta(k^3)\,\boldsymbol{e}_3,$$

che, valutata sul cono luce, dà

$$\boldsymbol{J}(k) = \frac{iR\sqrt{2}I}{\pi^{\frac{7}{2}}}\delta\left(p - \frac{\omega}{c}\right) J_1\left(\frac{\omega R}{c}\right)\delta(k^3)\,\boldsymbol{e}_3. \tag{5.36}$$

In conclusione, se ω soddisfa la condizione (5.34) la trasformata (5.36) si annulla e la condizione generale (4.2) risulta soddisfatta.

5.2 Regione piana infinita

Sia data una regione spaziale infinitamente estesa nelle direzioni del piano (x^1, x^2), percorsa, lungo la direzione x^1, da una corrente $I(t, x^3)$, uniforme sul piano (x^1, x^2), e con densità di carica $\rho = 0$. Quindi, la quadricorrente ha la forma

$$j^\mu = (0, I(t, x^3)\boldsymbol{e}_1). \tag{5.37}$$

La simmetria del problema impone che l'emissione di radiazione avvenga nella direzione x^3 uscente dalla regione attraversata dalla corrente. Risulta quindi significativo esaminare l'energia irradiata attraverso una superficie piana parallela al piano (x^1, x^2). In generale, l'energia che attraversa una superficie piana infinita può divergere, quindi risulta più significativo analizzare la potenza emessa su un elemento $d\sigma$ di una superficie piana parallela al piano (x^1, x^2), data dall'espressione

$$w = c\frac{dP^0}{d\sigma dt} = cT^{i0}u^i = S^i u^i, \tag{5.38}$$

dove il versore normale u^i è uscente dalla regione in cui fluisce la corrente. Pertanto, daranno contributo non nullo all'energia irradiata a grandi distanze solo i termini del tensore elettromagnetico con andamento $F^{\mu\nu} \sim 1$. I campi che contribuiranno all'irraggiamento saranno dunque solo quelli che non decadono con la distanza r dal piano (x^1, x^2). Di seguito si analizzerà un esempio specifico.

5.2.1 Piani paralleli percorsi da corrente

Sia dato un piano parallelo al piano (x^1, x^2) percorso dalla corrente $I(t)$ lungo l'asse x^1, a distanza d dall'origine del sistema di riferimento. La quadricorrente di tale sistema è

$$j^\mu = (0, I(t)\delta(x^3 - d)\boldsymbol{e}_1). \tag{5.39}$$

Per la forma della quadricorrente, solo la componente A^1 del potenziale risulta non nulla. Sostituendo l'espressione (5.39) in (2.3), si ha (per $(x^1 - y^1, x^2 - y^2)$ si usano coordinate polari (q, ϕ))

$$\begin{aligned} A^1(t, \boldsymbol{x}) &= \int \frac{I(t - \frac{|\boldsymbol{x}-\boldsymbol{y}|}{c})\delta(y^3 - d)}{4\pi c|\boldsymbol{y} - \boldsymbol{x}|}\, d^3\boldsymbol{y} = \frac{1}{4\pi c}\int \frac{I\left(t - \frac{\sqrt{(x^1-y^1)^2+(x^2-y^2)^2+(x^3-d)^2}}{c}\right)}{\sqrt{(x^1 - y^1)^2 + (x^2 - y^2)^2 + (x^3 - d)^2}}\, d^2\boldsymbol{y} = \\ &= \frac{1}{2c}\int_0^\infty q\frac{I\left(t - \frac{\sqrt{(q^2+(x^3-d)^2}}{c}\right)}{\sqrt{(q^2 + (x^3 - d)^2}}\, dq = \frac{1}{2c}\int_{|x^3-d|}^\infty I\left(t - \frac{p}{c}\right)\, dp, \end{aligned}$$

dove nell'ultimo passaggio si è eseguito il cambio di variabile $q \to p = \sqrt{(q^2 + (x^3 - d)^2}$. L'integrale precedente non è definito per una corrente di tipo periodico o che comunque non tende a 0 per $t \to -\infty$; affinché l'integrale sia ben definito è necessario troncare l'estremo superiore di integrazione. Poiché, per grandi valori di p, la corrente è valutata nel passato ($t \to -\infty$) è necessario introdurre un istante T in cui la corrente si accende, cioè, prima del quale la corrente sia nulla. Ciò corrisponde a moltiplicare la corrente per una funzione a gradino di Heavyside, ottenendo la nuova corrente $\tilde{I}(t) = I(t)H(t - T)$, che, sostituita nell'espressione del potenziale calcolato, fornisce

$$A^1(t, \boldsymbol{x}) = \frac{1}{2c}\int_{|x^3-d|}^\infty I\left(t - \frac{p}{c}\right) H\left(t - \frac{p}{c} - T\right)\, dp = \frac{1}{2c}\int_{|x^3-d|}^{c(t-T)} I\left(t - \frac{p}{c}\right)\, dp,$$

dove, per avere risultato non nullo, deve essere $t > T + \frac{|x^3-d|}{c}$, che è il tempo necessario affinché il segnale arrivi in $y^3 = x^3$ partendo da $y^3 = d$. Per una corrente armonica (5.4), si ottiene (indicando con $t^* = t - \frac{|x^3-d|}{c}$) l'istante di tempo ritardato)

$$A^1(t, \boldsymbol{x}) = \frac{I}{2c}\int_{|x^3-d|}^{c(t-T)} e^{i\omega(t-\frac{p}{c})}\, dp = i\frac{I}{2\omega}\left(e^{i\omega T} - e^{i\omega t^*}\right),$$

in cui si vede che l'istante di accensione T comporta solo la comparsa di un termine costante che non influenza il valore dei campi. Il campo elettromagnetico è

$$\boldsymbol{E}(t, x^3) = -\frac{1}{c}\frac{\partial \boldsymbol{A}}{\partial t} = -\frac{I}{2c}\cos(\omega t^*)\, \boldsymbol{e}_1, \tag{5.40}$$

$$\boldsymbol{B}(t, x^3) = \nabla\times\boldsymbol{A} = -\frac{I}{2c}\text{sign}(x^3 - d)\cos(\omega t^*)\, \boldsymbol{e}_2, \tag{5.41}$$

ed è quindi costituito da onde piane uscenti dal piano dove scorre la corrente. La potenza emessa su un elemento di superficie piana, parallela al piano (x^1, x^2) nella posizione x^3, è data da (5.38) e risulta

$$\boldsymbol{S}(t, x^3) = \text{sign}(x^3 - d)\frac{I^2}{4c}\cos^2(\omega t^*)\, \boldsymbol{e}_3, \quad w = c\frac{dP^0}{d\sigma dt} = \text{sign}(x^3 - d)\boldsymbol{S}(t, x^3)\cdot\boldsymbol{e}_3 = \frac{I^2}{4c}\cos^2(\omega t^*), \tag{5.42}$$

dove si può notare come il vettore di Poynting non decada con la distanza dal piano in cui fluisce la corrente e come l'energia si propaghi lungo l'asse x^3 in direzione uscente da tale piano, come atteso.

Per il principio di sovrapposizione, il potenziale di più piani è dato dalla somma dei potenziali dei singoli piani (si omette il termine costante)

$$A^1(t,\boldsymbol{x}) = -\sum_k i\frac{I_k}{2\omega_k}e^{i\omega_k(t-\frac{|x^3-d_k|}{c})}, \tag{5.43}$$

dove d_k è la distanza del k-esimo piano dall'origine del sistema di riferimento. Per due piani percorsi da correnti armoniche $I_+(t) = I_-(t) = Ie^{i\omega t}$ a distanza $d_+ = d$ e $d_- = -d$ dall'origine, la (5.43) dà per la somma

$$A^1(t,\boldsymbol{x}) = -i\frac{Ie^{i\omega t}}{2\omega}\left(e^{-i\frac{|x^3-d|}{c}} + e^{-i\frac{|x^3+d|}{c}}\right) = -i\frac{Ie^{i\omega t}}{2\omega}\left(e^{-i\frac{|x^3-d|}{c}} + e^{-i\frac{|x^3+d|}{c}}\right),$$

e valutando per $|x^3| > d$ (al di fuori della regione compresa tra i due piani)

$$A^1(t,\boldsymbol{x}) = -i\frac{Ie^{i\omega(t-\frac{|x^3|}{c})}}{\omega}\cos\left(\frac{\omega d}{c}\right), \quad |x^3| > d.$$

Nella regione al di fuori dei piani, compare nell'espressione del potenziale un fattore $\cos\left(\frac{\omega d}{c}\right)$. Dunque, si ha assenza di radiazione se la frequenza ω è uno zero di $\cos\left(\frac{\omega d}{c}\right)$, cioè se essa è della forma

$$\omega_n = \pi\left(\frac{2n+1}{2}\right)\frac{c}{d},\ n \in \mathbb{N}. \tag{5.44}$$

Se i piani vengono attraversati da una stessa corrente, che sia sovrapposizione di correnti armoniche con frequenze della forma (5.44), non si ha emissione di radiazione. Tale sovrapposizione risulta essere periodica con frequenza fondamentale $\omega_0 = \frac{\pi c}{2d}$. Per questo sistema si vede chiaramente che l'assenza di radiazione è dovuta ad un effetto di interferenza distruttiva tra le onde generate dai due piani in tutta la regione al di fuori degli stessi. Infatti, in una generica posizione x^3, con $|x^3| > d$, il campo elettrico è dato dalla sovrapposizione delle due onde piane date da (5.40). Si ha interferenza distruttiva se le due onde sono sfasate di un multiplo dispari di π ovvero se la differenza $\Delta\varphi$ delle loro fasi $\varphi_+ = \omega t - k|x^3 - d|$ e $\varphi_- = \omega t - k|x^3 + d|$, dove si è indicato con $k = \frac{\omega}{c}$ il numero d'onda, è un multiplo dispari di π, cioè

$$|\Delta\varphi| = |\varphi_+ - \varphi_-| = 2dk = 2d\frac{\omega}{c} = (2n+1)\pi \to \omega = \pi\left(\frac{2n+1}{2}\right)\frac{c}{d},$$

che è esattamente la condizione (5.44). Infine, anche in questo caso risulta verificata la condizione generale (4.2). Infatti, la trasformata di Fourier di una corrente armonica (5.4), che scorre su un piano a distanza d dall'origine, è

$$\boldsymbol{J}(k) = \delta^2(k^1,k^2)\delta\left(k^0 - \frac{\omega}{c}\right)e^{-ik^3d}\boldsymbol{e}_1,$$

e valutata sul cono luce, diventa

$$\boldsymbol{J}(k) = \delta^2(k^1,k^2)\delta\left(k^0 - \frac{\omega}{c}\right)e^{-i\frac{\omega d}{c}}\boldsymbol{e}_1,\ k_\mu k^\mu = 0.$$

Pertanto, se si hanno due piani percorsi da corrente a distanze, rispettivamente, d e $-d$ dall'origine, la trasformata è data dalla sovrapposizione

$$\boldsymbol{J}(k) = \delta^2(k^1, k^2)\delta\left(k^0 - \frac{\omega}{c}\right)\left(e^{i\frac{\omega d}{c}} + e^{-i\frac{\omega d}{c}}\right)\boldsymbol{e}_1 = 2\delta^2(k^1, k^2)\delta\left(k^0 - \frac{\omega}{c}\right)\cos\left(\frac{\omega d}{c}\right)\boldsymbol{e}_1,\ k_\mu k^\mu = 0, \tag{5.45}$$

in cui compare un termine $\cos\left(\frac{\omega d}{c}\right)$ e dunque, se vale (5.44), la trasformata (5.45) si annulla e quindi la condizione (4.2) risulta verificata. Il fatto che nella regione tra i due piani il campo elettromagnetico è non nullo mostra che la condizione (4.2) garantisce l'assenza del campo di radiazione, ma non del campo elettromagnetico in tutto lo spazio, come si è visto anche nel caso di simmetria cilindrica.

Appendice A

Funzioni di Bessel

Le funzioni di Bessel sono funzioni di variabile complessa definite come soluzioni Z_ν dell'equazione di Bessel

$$\frac{d^2 Z_\nu}{dz^2} + \frac{1}{z}\frac{dZ_\nu}{dz} + \left(1 - \frac{\nu^2}{z^2}\right) Z_\nu = 0, \tag{A.1}$$

dove $\nu \in \mathbb{C}$ è detto ordine della funzione di Bessel Z_ν. Tra queste, particolare rilevanza hanno le funzioni di Bessel di ordine intero, cioè con $\nu \in \mathbb{Z}$, che vengono anche dette *armoniche cilindriche* poiché forniscono una base di soluzioni dell'equazione di Laplace $\nabla^2 Z = 0$ in coordinate cilindriche. Poiché l'equazione (A.1) è lineare del secondo ordine la sua soluzione generale sarà combinazione lineare di due soluzioni linearmente indipendenti. Una possibile scelta di tale base di soluzioni sono le funzioni di Bessel di prima specie J_ν e le funzioni di Neumann, o funzioni di Bessel di seconda specie, Y_ν (indicate anche con N_ν), definite come

$$\begin{aligned}
J_\nu(z) &= \frac{z^\nu}{2^\nu}\sum_{k=0}^{\infty}(-1)^k \frac{z^{2k}}{2^{2k}k!\Gamma(\nu+k+1)}, \quad z \in \mathbb{C}^-,\\
Y_\nu(z) &= \frac{1}{\sin\nu\pi}\left(\cos\nu\pi J_\nu(z) - J_{-\nu}(z)\right), \quad \nu \in \mathbb{C}\setminus\mathbb{Z},\, z \in \mathbb{C}^-,\\
Y_n(z) &= \lim_{\nu\to n} Y_\nu(z), \quad n \in \mathbb{Z},\, z \in \mathbb{C}^-,
\end{aligned}$$

dove si è posto $\mathbb{C}^- = \mathbb{C} \setminus (-\infty, 0)$. Un'altra base di soluzioni è costituita dalle funzioni di Bessel di terza specie, o funzioni di Hankel, $H_\nu^{(1)}$ e $H_\nu^{(2)}$ definite tramite combinazioni lineari delle J_ν e Y_ν

$$\begin{aligned}
H_\nu^{(1)}(z) &= J_\nu(z) + iY_\nu(z),\\
H_\nu^{(2)}(z) &= J_\nu(z) - iY_\nu(z),
\end{aligned}$$

Se si considera $\nu = n \in \mathbb{N}$ si hanno le seguenti relazioni per le funzioni J_n e N_n

$$J_{-n}(z) = (-1)^n J_n(z), \qquad \frac{d}{dz}\left(z^n J_n(z)\right) = z^n J_{z-1}(z), \qquad J_n'(z) = J_{n-1}(z) - \frac{n}{z}J_n(z), \tag{A.2}$$

$$Y_{-n}(z) = (-1)^n Y_n(z), \qquad \frac{d}{dz}\left(z^n Y_n(z)\right) = z^n Y_{n-1}(z), \qquad Y_n'(z) = Y_{n-1}(z) - \frac{n}{z}Y_n(z), \tag{A.3}$$

dove si sono indicate con J_n' e Y_n' le derivate delle funzioni J_n e Y_n rispettivamente. Risulta utile esprimere le funzioni J_n in forma integrale come

$$J_n(z) = \frac{1}{2\pi}\int_{-\pi}^{\pi} e^{-ni\theta + iz\sin\theta} d\theta = \frac{1}{\pi}\int_0^{\pi} \cos(n\theta - z\sin\theta) d\theta,$$

Le funzioni di Bessel J_n e Y_n appaiono nello studio delle onde elettromagnetiche dei sistemi a simmetria cilindrica, pertanto risulta utile conoscere il loro andamento asintotico per $|z| \to \infty$, si ha

$$J_n(z) = \sqrt{\frac{2}{\pi z}} \left[\cos w \sum_{k=0}^{\infty} \frac{(-1)^k (n, 2k)}{(2z)^{2k}} - \sin w \sum_{k=0}^{\infty} \frac{(-1)^k (n, 2k+1)}{(2z)^{2k+1}} \right], \tag{A.4}$$

$$Y_n(z) = \sqrt{\frac{2}{\pi z}} \left[\sin w \sum_{k=0}^{\infty} \frac{(-1)^k (n, 2k)}{(2z)^{2k}} + \cos w \sum_{k=0}^{\infty} \frac{(-1)^k (n, 2k+1)}{(2z)^{2k+1}} \right], \tag{A.5}$$

in cui si è posto $(n, k) = \frac{1}{k!} \frac{\Gamma\left(n+k+\frac{1}{2}\right)}{\Gamma\left(n-k+\frac{1}{2}\right)}$, $\Gamma(z)$ è la funzione Gamma di Eulero, e $w = z - \frac{\pi}{2}n - \frac{\pi}{4}$.

Per completezza, si riportano alcuni integrali che coinvolgono le funzioni di Bessel e Neumann, che si sono utilizzati nel calcolo dei campi elettromagnetici dei sistemi a simmetria cilindrica trattati nel paragrafo 5.1

$$\int_1^{\infty} \frac{\sin(ax)dx}{\sqrt{x^2-1}} = \frac{\pi}{2} J_0(a), \quad a > 0, \tag{A.6}$$

$$\int_1^{\infty} \frac{\cos(ax)}{\sqrt{x^2-1}} dx = -\frac{\pi}{2} Y_0(a), \tag{A.7}$$

$$\int_0^{\pi} (\sin x)^{2n} \frac{J_n(\sqrt{\alpha^2+\beta^2-2\alpha\beta\cos x})}{(\sqrt{\alpha^2+\beta^2-2\alpha\beta\cos x})^n} dx = 2^n \sqrt{\pi}\, \Gamma\left(n+\frac{1}{2}\right) \frac{J_n(\alpha)}{\alpha^n} \frac{J_n(\beta)}{\beta^n}, \tag{A.8}$$

$$\int_0^{\pi} (\sin x)^{2n} \frac{Y_n(\sqrt{\alpha^2+\beta^2-2\alpha\beta\cos x})}{(\sqrt{\alpha^2+\beta^2-2\alpha\beta\cos x})^n} dx = 2^n \sqrt{\pi}\, \Gamma\left(n+\frac{1}{2}\right) \frac{J_n(\alpha)}{\alpha^n} \frac{Y_n(\beta)}{\beta^n} \quad |\alpha| < |\beta|. \tag{A.9}$$

Bibliografia

[1] T. A. Abbott e D. J. Griffiths, *Acceleration without radiation*, American Journal of Physics 53 (1984), 1203–1211.

[2] V. Barone, *Relatività, princìpi e applicazioni*, Bollati Boringhieri, Torino, 2004.

[3] G. H. Goedecke, *Classically Radiationless Motions and Possible Implications for Quantum Theory*, Physical Review 135 (1964), B281–B288.

[4] I. S. Gradshteyn e I. M. Ryzhik, *Table of integrals, series, and products*, Seventh edition, Elsevier/Academic Press, Amsterdam, 2007.

[5] K. Lechner, *Classical Electrodynamics: A Modern Perspective*, Springer International Publishing, 2018.

[6] J. S. Nodvik, *A covariant formulation of classical electrodynamics for charges of finite extension*, Annals of Physics 28 (1964), 225–319.

[7] P. Pearle, *Absence of radiationless motions of relativistically rigid classical electron*, Foundations of Physics 7 (1977), 931–945.

[8] F. Rohrlich, *Classical charged particles: Foundations of their theory*, Addison-Wesley, 1965.

[9] D. Teplitz, *Electromagnetism : paths to research*, Springer US, 1982.