Università degli Studi di Padova

Dipartimento di Matematica
"Tullio Levi-Civita"

Corso di Laurea Magistrale in Matematica

Una caratterizzazione delle categorie quasi-abeliane

Tesi di Laurea Magistrale in Matematica

Relatore

Chiar.mo Prof.
Riccardo Colpi

Matricola

1232184

Laureando

Federico Rizzetto

Data ufficiale di laurea

21 Aprile 2022

Anno Accademico 2021-2022

Ammiro chi resiste, chi ha fatto del verbo resistere carne, sudore, sangue e ha dimostrato senza grandi gesti che è possibile vivere, e vivere in piedi anche nei momenti peggiori.

—L. Sepúlveda

Indice

Prefazione . . . 8

1 Prerequisiti **11**
- 1.1 Nozioni generali . . . 11
- 1.2 Categorie con struttura algebrica . . . 19
- 1.3 Categorie abeliane . . . 20
  - 1.3.1 Co-omologia di una zero-sequenza . . . 25
- 1.4 Categorie esatte . . . 27

2 Categorie quasi-abeliane **35**
- 2.1 Esempi di categorie quasi-abeliane . . . 45
  - 2.1.1 Esempio algebrico . . . 45
  - 2.1.2 Esempio topologico . . . 45
  - 2.1.3 Esempio analitico . . . 46
- 2.2 Sequenze in categorie preadditive . . . 46
  - 2.2.1 Esattezza e co-esattezza di sequenze . . . 47
- 2.3 Esattezza e co-esattezza di funtori . . . 59

3 Categorie Triangolate **67**
- 3.1 Le categorie con traslazione . . . 67
- 3.2 Definizioni . . . 71
- 3.3 Funtori tra categorie triangolate . . . 72
- 3.4 Alcune proprietà . . . 74

4 Complessi nelle categorie additive con traslazione **83**
- 4.1 Prime definizioni . . . 83
- 4.2 Mappa cono . . . 84
- 4.3 La categoria omotopica . . . 85
- 4.4 La categoria omotopica con traslazione . . . 86
- 4.5 L'usuale nozione di complesso . . . 87
- 4.6 Categorie abeliane con traslazione e co-omologia . . . 89
- 4.7 Nozioni co-omologiche sui complessi nel caso abeliano . . . 91
- 4.8 Alcuni complessi notevoli . . . 92

5 Localizzazione di categorie **93**
5.1 Definizioni . . . 93
5.2 Proprietà principali . . . 95
5.3 Esistenza della localizzazione destra . . . 96
5.4 Localizzazione di categorie additive . . . 98
5.5 Localizzazione rispetto ad un sistema nullo . . . 101

6 t-Strutture nelle categorie triangolate **103**
6.1 Definizioni . . . 103
6.2 Proprietà principali . . . 104
6.3 Localizzazione di una t-struttura . . . 129

7 Derivazione nelle categorie quasi-abeliane **135**
7.1 t-strutture canoniche di $\mathcal{K}(\mathscr{C})$ . . . 137
7.2 La categoria $\mathrm{D}(\mathscr{C})$ . . . 146
7.3 L'immersione canonica . . . 146

8 Le coppie di torsione **153**
8.1 Definizioni . . . 153
8.2 Proprietà notevoli . . . 154
8.3 Esempio di coppia di torsione . . . 157
8.4 I funtori parte di torsione-parte libera . . . 158
8.5 Ereditarietà . . . 163

9 Il Teorema di Caratterizzazione **165**

Bibliografia **171**

Prefazione

L'obiettivo di questa tesi è dimostrare un recente risultato che descrive le categorie quasi-abeliane in termini di coppie di torsione tilting e cotilting nelle categorie abeliane. L'elaborato si suddivide in nove capitoli.

- Capitolo 1: Si introducono alcuni concetti di base sulle categorie, sui funtori e sulle aggiunzioni tra funtori. Si richiama qualche nozione riguardante le categorie pre-additive. Si enunciano alcune definizioni ed alcuni risultati di base nell'ambito delle categorie esatte e delle categorie abeliane.

- Capitolo 2: Questo capitolo inizia con la definizione di *categoria quasi-abeliana*. Poi si enunciano e dimostrano i teoremi più importanti relativi ad esse, quindi si espongono alcuni esempi di categorie quasi-abeliane e non abeliane.

  Si analizzano distinti concetti di esattezza relativi alle sequenze di morfismi nelle categorie pre-additive con oggetto zero e pre-abeliane. Successivamente si enunciano e dimostrano proprietà notevoli riguardanti queste ultime.

  Si conclude il capitolo definendo i concetti di esattezza dei funtori tra categorie quasi-abeliane.

- Capitolo 3: Questo capitolo inizia con le definizioni di categoria con traslazione e di triangolo in una tale categoria. Poi si presenta la definizione di *categoria triangolata*, concetto essenziale per questa tesi. Si introducono le definizioni di *funtore triangolato* e di *funtore co-omologico*. L'ultima sezione tratta alcuni risultati fondamentali riguardanti le categorie triangolate.

- Capitolo 4: Questo capitolo è dedicato allo studio dei complessi e degli oggetti differenziali, nelle categorie additive con traslazione. Si analizza la categoria omotopica di una categoria additiva con traslazione. Si ricorda che nel caso di traslazione isomorfa, essa è triangolata. Il capitolo termina con l'elenco di alcuni complessi notevoli, nelle categorie additive.

- Capitolo 5: Si introduce il concetto di *localizzazione di una categoria rispetto ad un sistema moltiplicativo*, e se ne analizzano le proprietà più importanti rispetto a sistemi moltiplicativi destri e sinistri. Infine si dimostra l'esistenza della localizzazione di una categoria triangolata rispetto ad un sistema nullo, concetto chiave di questa tesi.

- Capitolo 6: Si introduce la definizione di t-struttura in una categoria triangolata e se ne spiegano le caratteristiche principali.

- Capitolo 7: Questo capitolo è interamente dedicato alla derivazione della categoria omotopica di una categoria quasi-abeliana. Si studiano le t-strutture della categoria $\mathcal{K}(\mathscr{C})$, dove $\mathscr{C}$ è una categoria quasi-abeliana. Si conclude trattando l'immersione canonica di una categoria quasi-abeliana nel cuore sinistro della categoria derivata ad essa associata.

- Capitolo 8: Questo capitolo è dedicato al concetto di *Coppia di Torsione* nelle categorie abeliane ed alle costruzioni associate. Vengono analizzate le costruzioni più importanti riguardanti le coppie di torsione. Si discutono i funtori *parte di torsione* e *parte libera*. La trattazione termina con la definizione di coppia di torsione ereditaria, e con il teorema che afferma: le classi di torsione ereditarie sono sottocategorie abeliane.

- Capitolo 9: Questo capitolo è interamente dedicato alla dimostrazione del Teorema di Caratterizzazione delle categorie quasi-abeliane tramite le coppie di torsione cotilting.

Capitolo 1

Prerequisiti

In questo capitolo si richiamano i prerequisiti principali. Per una loro trattazione esaustiva ci si riferisce, ad esempio ad [SB21] ed [ML98].

1.1 Nozioni generali

Definizione 1.1 (Sottocategoria piena). Siano $\mathscr{C}$ una categoria e $\mathscr{D}$ una sottocategoria di $\mathscr{C}$. Allora $\mathscr{D}$ si dice *piena in* $\mathscr{C}$ se e solo se

(FULL) per ogni coppia di oggetti A e B in $\mathscr{D}$ vale l'uguaglianza

$$\mathrm{Hom}_{\mathscr{D}}(A, B) = \mathrm{Hom}_{\mathscr{C}}(A, B)\,.$$

Definizione 1.2 (Sottocategoria saturata). Siano $\mathscr{C}$ una categoria e $\mathscr{D}$ una sottocategoria di $\mathscr{C}$. Allora $\mathscr{D}$ si dice *saturata in* $\mathscr{C}$ se e solo se

(SAT) per ogni coppia di oggetti X di $\mathscr{C}$ ed Y in $\mathscr{D}$ vale l'implicazione

$$X \cong_{\mathscr{C}} Y \implies X \in \mathrm{Ob}(\mathscr{D})\,.$$

Definizione 1.3 (Chiusura per sotto-oggetti). Siano $\mathscr{C}$ una categoria e $\mathscr{D}$ una sottocategoria di $\mathscr{C}$. Allora $\mathscr{D}$ si dice *chiusa per sotto-oggetti in* $\mathscr{C}$ se e solo se per ogni D in $\mathrm{Ob}(\mathscr{D})$, C in $\mathrm{Ob}(\mathscr{C})$ ed m in $\mathrm{Hom}_{\mathscr{C}}(C, D)$ vale l'implicazione

$$m \text{ è mono in } \mathscr{C} \implies C \in \mathrm{Ob}(\mathscr{D})\,.$$

Definizione 1.4 (Chiusura per quozienti). Siano $\mathscr{C}$ una categoria e $\mathscr{D}$ una sottocategoria di $\mathscr{C}$. Allora $\mathscr{D}$ si dice *chiusa per quozienti in* $\mathscr{C}$ se e solo se per ogni A in $\mathrm{Ob}(\mathscr{D})$, B in $\mathrm{Ob}(\mathscr{C})$ ed ε in $\mathrm{Hom}_{\mathscr{C}}(A, B)$ vale l'implicazione

$$\varepsilon \text{ è epi in } \mathscr{C} \implies B \in \mathrm{Ob}(\mathscr{D})\,.$$

Definizione 1.5 (**Immersione**)**.** Siano $\mathscr{C}$ e $\mathscr{D}$ categorie. Una *immersione di $\mathscr{C}$ in $\mathscr{D}$* è un funtore $F : \mathscr{C} \to \mathscr{D}$ iniettivo sugli oggetti, pieno e fedele.

Definizione 1.6 (**Immagine**)**.** Siano $\mathscr{C}$, $\mathscr{D}$ categorie ed $F : \mathscr{C} \to \mathscr{D}$ un funtore. L'*immagine di F* è la sottocategoria $\mathrm{Imm}(F)$ di $\mathscr{D}$ definita ponendo

- $$\mathrm{Ob}(\mathrm{Imm}(F)) := \big\{F(C) \in \mathrm{Ob}(\mathscr{D}) \mid C \in \mathrm{Ob}(\mathscr{C})\big\}\,;$$
- $$\mathrm{Ar}(\mathrm{Imm}(F)) := \big\{F(g) \in \mathrm{Ar}(\mathscr{D}) \mid g \in \mathrm{Ar}(\mathscr{C})\big\}\,;$$
- le uguaglianze, la composizione, le mappe dominio e co-dominio e le identità come le restrizioni delle rispettive in $\mathscr{D}$.

Definizione 1.7 (**Immagine essenziale**)**.** Siano $\mathscr{C}$, $\mathscr{D}$ categorie ed $F : \mathscr{C} \to \mathscr{D}$ un funtore. L'*immagine essenziale di F* è la sottocategoria piena $\mathrm{Ess}(F)$ di $\mathscr{D}$ che verifica la seguente proprietà

$$\forall Y \in \mathrm{Ob}(\mathscr{D})\Big(Y \in \mathrm{Ob}(\mathrm{Ess}(F)) \iff \exists X \in \mathrm{Ob}(\mathscr{C}) \text{ t.c. } F(X) \cong_{\mathscr{D}} Y\Big).$$

Lemma 1.8. Siano $\mathscr{C}$, $\mathscr{D}$ categorie ed $F : \mathscr{C} \to \mathscr{D}$ un funtore. Allora $\mathrm{Ess}(F)$ è sottocategoria saturata di $\mathscr{D}$.

Dimostrazione. Chiaro dalla transitività della relazione $\cong_{\mathscr{D}}$. □

Notazione 1.9. *Siano:*

- *$\mathscr{C}$ e $\mathscr{D}$ categorie;*
- *$F : \mathscr{C} \to \mathscr{D}$, $G : \mathscr{C} \to \mathscr{D}$ funtori.*

Allora si scrive

$$F \cong_{\mathrm{nat.\,iso.}} G$$

se e solo se esiste una trasformazione naturale $\eta : F \to G$ tale che η_C è isomorfismo in $\mathscr{D}$, per ogni C oggetto di $\mathscr{C}$.

Definizione 1.10 (**Composizione di trasformazione naturale con funtore**)**.** Siano $L : \mathscr{E} \to \mathscr{C}$, $F : \mathscr{C} \to \mathscr{D}$, $G : \mathscr{C} \to \mathscr{D}$ ed $R : \mathscr{D} \to \mathscr{B}$ funtori tra categorie, $\eta : F \to G$ una trasformazione naturale da F a G. Allora $\eta L : F \circ L \to G \circ L$ ed $R\eta : R \circ F \to R \circ G$ sono le trasformazioni naturali definite ponendo

$$\begin{cases} (\eta L)_E := \eta_{L(E)} \\ \\ (R\eta)_C := R(\eta_C) \end{cases}$$

per ogni (E, C) in $\mathrm{Ob}(\mathscr{E}) \times \mathrm{Ob}(\mathscr{C})$.

Definizione 1.11 (Definizione di equivalenza tra categorie). Siano $\mathscr{C}$ e $\mathscr{D}$ categorie. Una *equivalenza di categorie da $\mathscr{C}$ a $\mathscr{D}$* è una quaterna (F, G, η, ξ) tale che:

- $F : \mathscr{C} \to \mathscr{D}$ e $G : \mathscr{D} \to \mathscr{C}$ sono funtori;
- $\eta : \mathrm{id}_{\mathscr{C}} \to G \circ F$ e $\xi : F \circ G \to \mathrm{id}_{\mathscr{D}}$ sono isomorfismi naturali.

Trascurando molti aspetti fondazionali della Teoria delle Categorie, si considera come corretta l'usuale dimostrazione della seguente Proposizione.

Proposizione 1.12. Sia $L : \mathscr{C} \to \mathscr{D}$ un funtore da $\mathscr{C}$ a $\mathscr{D}$. Allora le seguenti condizioni sono equivalenti:

(1) esistono un funtore $R : \mathscr{D} \to \mathscr{C}$ e due trasformazioni naturali $\eta : \mathrm{id}_{\mathscr{C}} \to R \circ L$, $\xi : L \circ R \to \mathrm{id}_{\mathscr{D}}$ tali che (L, R, η, ξ) è una equivalenza da $\mathscr{C}$ a $\mathscr{D}$;

(2) il funtore L è pieno, fedele ed essenzialmente suriettivo sugli oggetti.

Dimostrazione. Leggere ad esempio la prova della Proposizione 1.1 di [STMG]. □

Definizione 1.13 (Aggiunzione). Siano $\mathscr{C}$ e $\mathscr{D}$ categorie, $L : \mathscr{C} \to \mathscr{D}$ ed $R : \mathscr{D} \to \mathscr{C}$ funtori. Una *aggiunzione da L ad R* è una famiglia

$$(\tau_{C,D})_{(C,D) \in \mathrm{Ob}(\mathscr{C}) \times \mathrm{Ob}(\mathscr{D})}$$

tale che:

(ADJ-B) per ogni C in $\mathrm{Ob}(\mathscr{C})$ e D in $\mathrm{Ob}(\mathscr{D})$,

$$\tau_{C,D} : \mathrm{Hom}_{\mathscr{D}}(L(C), D) \longrightarrow \mathrm{Hom}_{\mathscr{C}}(C, R(D))$$

è una biiezione;

(ADJ-L) per ogni D in $\mathrm{Ob}(\mathscr{D})$, C e C' in $\mathrm{Ob}(\mathscr{C})$, g in $\mathrm{Hom}_{\mathscr{C}}(C, C')$, il diagramma

$$\begin{tikzcd}
\mathrm{Hom}_{\mathscr{D}}(L(C), D) \arrow[r, "\tau_{C,D}"] & \mathrm{Hom}_{\mathscr{C}}(C, R(D)) \\
\mathrm{Hom}_{\mathscr{D}}(L(C'), D) \arrow[u, "\mathrm{Hom}_{\mathscr{D}}(L(g),D)"] \arrow[r, "\tau_{C',D}"'] & \mathrm{Hom}_{\mathscr{C}}(C', R(D)) \arrow[u, "\mathrm{Hom}_{\mathscr{C}}(g,R(D))"']
\end{tikzcd}$$

commuta in Set;

(ADJ-R) per ogni C in $\mathrm{Ob}(\mathscr{C})$, D e D' in $\mathrm{Ob}(\mathscr{D})$, h in $\mathrm{Hom}_{\mathscr{D}}(D, D')$, il diagramma

$$\begin{tikzcd}
\mathrm{Hom}_{\mathscr{D}}(L(C), D) \arrow[r, "\tau_{C,D}"] \arrow[d, "\mathrm{Hom}_{\mathscr{D}}(L(C),h)"'] & \mathrm{Hom}_{\mathscr{C}}(C, R(D)) \arrow[d, "\mathrm{Hom}_{\mathscr{C}}(C,R(h))"] \\
\mathrm{Hom}_{\mathscr{D}}(L(C), D') \arrow[r, "\tau_{C,D'}"'] & \mathrm{Hom}_{\mathscr{C}}(C, R(D'))
\end{tikzcd}$$

commuta in Set.

La famiglia

$$(\tau_{C,D})_{(C,D)\in \mathrm{Ob}(\mathscr{C})\times \mathrm{Ob}(\mathscr{D})}$$

viene indicata anche con τ.

Notazione 1.14 (Simbolo aggiunzione). *Siano:*

- $\mathscr{C}$ *e* $\mathscr{D}$ *categorie;*
- $L : \mathscr{C} \to \mathscr{D}$ *ed* $R : \mathscr{D} \to \mathscr{C}$ *funtori.*

Allora si dice che L è aggiunto sinistro di R *oppure che* R è aggiunto destro di L *se e solo se esiste una aggiunzione* τ *da* L *ad* R*. In questo caso si scrive*

$$L \dashv R \ .$$

Graficamente si rende con

$$\begin{tikzcd}
\mathscr{C} \arrow[r, shift left, "L"] \arrow[r, phantom, "\perp"] & \mathscr{D} \arrow[l, shift left, "R"]
\end{tikzcd} \ .$$

Lemma 1.15. Siano $\mathscr{C}$ e $\mathscr{D}$ categorie, $L : \mathscr{C} \to \mathscr{D}$ ed $R : \mathscr{D} \to \mathscr{C}$ funtori e τ una aggiunzione da L ad R. Definisco le famiglie di morfismi $\eta : \mathrm{id}_{\mathscr{C}} \to R \circ L$ e $\xi : L \circ R \to \mathrm{id}_{\mathscr{D}}$ ponendo

$$\begin{cases} \eta_C := \tau_{C,L(C)}\big(\mathrm{id}_{L(C)}\big) & \forall C \in \mathrm{Ob}(\mathscr{C}) \\ \\ \tau_{R(D),D}\big(\xi_D\big) := \mathrm{id}_{R(D)} & \forall D \in \mathrm{Ob}(\mathscr{D}) \ . \end{cases}$$

Allora η e ξ sono trasformazioni naturali, dette rispettivamente *unità* e *co-unità* dell'aggiunzione τ.

Dimostrazione. Omessa. Vedere [SB21], ad esempio. □

Definizione 1.16. Siano $\mathscr{C}$ e $\mathscr{D}$ categorie, $L : \mathscr{C} \to \mathscr{D}$ ed $R : \mathscr{D} \to \mathscr{C}$ funtori. Si indica con $\mathrm{ADJ}(L, R)$ la collezione di tutte le aggiunzioni di L in R e con $\mathrm{Couple}(L, R)$ la collezione di tutte le coppie (α, β) tali che:

- α è trasformazione naturale di $\mathrm{id}_{\mathscr{C}}$ in $R \circ L$ e β è trasformazione naturale di $L \circ R$ in $\mathrm{id}_{\mathscr{D}}$;
- per ogni (C, D) in $\mathrm{Ob}(\mathscr{C}) \times \mathrm{Ob}(\mathscr{D})$ valgono le uguaglianze

$$\begin{cases} \beta_{L(C)} \circ L(\alpha_C) = \mathrm{id}_{L(C)} \\ \\ R(\beta_D) \circ \alpha_{R(D)} = \mathrm{id}_{R(D)} \end{cases} .$$

Teorema 1.17. Siano $\mathscr{C}$ e $\mathscr{D}$ categorie, $L : \mathscr{C} \to \mathscr{D}$ ed $R : \mathscr{D} \to \mathscr{C}$ funtori. Allora le relazioni funzionali

$$\mathcal{U} : \mathrm{ADJ}(L, R) \longrightarrow \mathrm{Couple}(L, R)$$

$$\tau \longmapsto (\eta, \xi)$$

dove η e ξ sono rispettivamente l'unità e la co-unità di τ

e

$$\mathcal{V} : \mathrm{Couple}(L, R) \longrightarrow \mathrm{ADJ}(L, R)$$

$$\mathcal{V}(\alpha, \beta)_{C,D}(\theta) := R(\theta) \circ \alpha_C$$

per ogni (C, D) in $\mathrm{Ob}(\mathscr{C}) \times \mathrm{Ob}(\mathscr{D})$ e θ in $\mathrm{Hom}_{\mathscr{D}}(L(C), D)$, sono ben definite ed una l'inversa dell'altra.

Dimostrazione. Omessa. Vedere [SB21], ad esempio. □

Proposizione 1.18 (Comportamento delle Agggiunzioni rispetto ai limiti/co-limiti). Siano:

- $\mathscr{C}$ e $\mathscr{D}$ categorie;
- $L : \mathscr{C} \to \mathscr{D}$ ed $R : \mathscr{D} \to \mathscr{C}$ funtori;
- τ una aggiunzione da L ad R.

Allora:

(1) $R(T)$ è oggetto terminale di $\mathscr{C}$, per ogni T oggetto terminale di $\mathscr{D}$;

(2) $L(I)$ è oggetto iniziale di $\mathscr{D}$, per ogni I oggetto iniziale di $\mathscr{C}$;

(3) $R(e)$ è equalizzatore di $(R(f), R(g))$ in $\mathscr{C}$, per ogni f e g frecce parallele in $\mathscr{D}$ ed e equalizzatore di (f, g) in $\mathscr{D}$;

(4) $L(\gamma)$ è co-equalizzatore di $(L(f), L(g))$ in $\mathscr{D}$, per ogni f e g frecce parallele in $\mathscr{C}$ e γ co-equalizzatore di (f, g) in $\mathscr{C}$;

(5) $R(m)$ è mono in $\mathscr{C}$, per ogni m mono in $\mathscr{D}$;

(6) $L(e)$ è epi in $\mathscr{D}$, per ogni e epi in $\mathscr{C}$;

(7) $(R(P), R(\pi_A), R(\pi_B))$ è prodotto di $(R(A), R(B))$ in $\mathscr{C}$, per ogni (A, B) in $\mathrm{Ob}(\mathscr{D}) \times \mathrm{Ob}(\mathscr{D})$ e (P, π_A, π_B) prodotto di (A, B) in $\mathscr{D}$;

(8) $(L(C), L(\varepsilon_A), L(\varepsilon_B))$ è co-prodotto di $(L(A), L(B))$ in $\mathscr{D}$, per ogni (A, B) in $\mathrm{Ob}(\mathscr{C}) \times \mathrm{Ob}(\mathscr{C})$ e $(C, \varepsilon_A, \varepsilon_B)$ co-prodotto di (A, B) in $\mathscr{C}$;

(9) per ogni $\mathcal{I}$ categoria piccola, $F : \mathcal{I} \to \mathscr{D}$ funtore e

$$\big(p_i\big)_{i \in \mathrm{Ob}(\mathcal{I})}$$

cono limite di F si ha che

$$\big(R(p_i)\big)_{i \in \mathrm{Ob}(\mathcal{I})}$$

è cono limite di $R \circ F$;

(10) per ogni $\mathcal{I}$ categoria piccola, $G : \mathcal{I} \to \mathscr{C}$ funtore e

$$\big(e_i\big)_{i \in \mathrm{Ob}(\mathcal{I})}$$

cono co-limite di G si ha che

$$\big(L(e_i)\big)_{i \in \mathrm{Ob}(\mathcal{I})}$$

è cono co-limite di $L \circ G$.

Dimostrazione. Omessa. Vedere [LOM222] oppure [SB21], ad esempio. $\square$

Proposizione 1.19. Siano $\mathscr{C}$, $\mathscr{D}$ categorie, $L : \mathscr{C} \to \mathscr{D}$ e $R : \mathscr{D} \to \mathscr{C}$ funtori, $\eta : \mathrm{id}_{\mathscr{C}} \to R \circ L$ e $\beta : L \circ R \to \mathrm{id}_{\mathscr{D}}$ isomorfismi naturali. Si definisce

$$\begin{cases} \xi := \beta \circ (L\eta^{-1}R) \circ ((L \circ R)\beta^{-1}) \\ \\ \tau_{C,D}(\theta) := R(\theta) \circ \eta_C \end{cases}$$

per ogni (C, D) in $\mathrm{Ob}(\mathscr{C}) \times \mathrm{Ob}(\mathscr{D})$, θ in $\mathrm{Hom}_{\mathscr{D}}(L(C), D)$. Allora:

(1) per ogni (C, D) in $\mathrm{Ob}(\mathscr{C}) \times \mathrm{Ob}(\mathscr{D})$ la mappa

$$\tau_{C,D} : \mathrm{Hom}_{\mathscr{D}}(L(C), D) \longrightarrow \mathrm{Hom}_{\mathscr{C}}(C, R(D))$$

è ben definita;

(2) la collezione ξ è un isomorfismo naturale da $L \circ R$ ad $\mathrm{id}_{\mathscr{D}}$;

(3) per ogni (C, D) in $\mathrm{Ob}(\mathscr{C}) \times \mathrm{Ob}(\mathscr{D})$ valgono le uguaglianze

$$\begin{cases} \xi_{L(C)} \circ L(\eta_C) = \mathrm{id}_{L(C)} \\ \\ R(\xi_D) \circ \eta_{R(D)} = \mathrm{id}_{R(D)} \ ; \end{cases}$$

(4) $\tau := (\tau_{C,D})_{(C,D) \in \mathrm{Ob}(\mathscr{C}) \times \mathrm{Ob}(\mathscr{D})}$ è una aggiunzione da L ad R, avente come unità e co-unità rispettivamente η e ξ.

Dimostrazione. Vedere ad esempio la prova del Lemma 2.3 di [STMG]. □

Teorema 1.20. Siano:

- $\mathscr{C}$ e $\mathscr{D}$ categorie;
- $L : \mathscr{C} \to \mathscr{D}$ ed $R : \mathscr{D} \to \mathscr{C}$ funtori;
- τ una aggiunzione da L ad R;
- η e ξ rispettivamente l'unità e la co-unità di τ.

Allora:

(1) R è fedele se e solo se per ogni D in $\mathrm{Ob}(\mathscr{D})$ la freccia ξ_D è epi in $\mathscr{D}$;

(2) R è pieno se e solo se per ogni D in $\mathrm{Ob}(\mathscr{D})$ la freccia ξ_D è split mono in $\mathscr{D}$;

(3) R è pienamente fedele se e solo se ξ è un isomorfismo naturale.

Dimostrazione. Omessa. Vedere ad esempio la prova del Teorema 3.2.5 in [GR1]. □

Dualmente si ottiene

Teorema 1.21. Siano:

- $\mathscr{C}$ e $\mathscr{D}$ categorie;
- $L : \mathscr{C} \to \mathscr{D}$ ed $R : \mathscr{D} \to \mathscr{C}$ funtori;
- τ una aggiunzione da L ad R;
- η e ξ rispettivamente l'unità e la co-unità di τ.

Allora:

(1) L è fedele se e solo se per ogni C in $\mathrm{Ob}(\mathscr{C})$ la freccia η_C è mono in $\mathscr{C}$;

(2) L è pieno se e solo se per ogni C in $\mathrm{Ob}(\mathscr{C})$ la freccia η_C è split epi in $\mathscr{C}$;

(3) L è pienamente fedele se e solo se η è un isomorfismo naturale.

Lemma 1.22. Siano:

- $\mathscr{A}_i$ categoria per ogni i da 1 a 4 in $\mathbb{N}$;
- $L_i : \mathscr{A}_i \to \mathscr{A}_{i+1}$ funtori per ogni i da 1 a 3 in $\mathbb{N}$;
- $R_i : \mathscr{A}_{i+1} \to \mathscr{A}_i$ funtori per ogni i da 1 a 3 in $\mathbb{N}$.

Suppongo che τ^i sia aggiunzione da L_i ad R_i per ogni i da 1 a 3 in $\mathbb{N}$. Allora $L_2 \circ L_1 \dashv R_1 \circ R_2$ ed $L_3 \circ L_2 \dashv R_2 \circ R_3$, tramite aggiunzioni costruite in modo canonico da quelle date nelle ipotesi.

Definizione 1.23 (**Sottocategoria riflettiva**)**.** Siano $\mathscr{C}$ una categoria, $\mathscr{D}$ una sua sottocategoria ed $I : \mathscr{D} \to \mathscr{C}$ il funtore inclusione di $\mathscr{D}$ in $\mathscr{C}$. Allora $\mathscr{D}$ si dice *sottocategoria riflettiva di* $\mathscr{C}$ se e solo se esiste un funtore $J : \mathscr{C} \to \mathscr{D}$ tale che $J \dashv I$.

Definizione 1.24 (**Sottocategoria co-riflettiva**)**.** Siano $\mathscr{C}$ una categoria, $\mathscr{D}$ una sua sottocategoria ed $I : \mathscr{D} \to \mathscr{C}$ il funtore inclusione di $\mathscr{D}$ in $\mathscr{C}$. Allora $\mathscr{D}$ si dice *sottocategoria co-riflettiva di* $\mathscr{C}$ se e solo se esiste un funtore $J : \mathscr{C} \to \mathscr{D}$ tale che $I \dashv J$.

Osservazione 1.25. Si ponga attenzione perché alcuni autori scambiano le definizioni 1.23 e 1.24.

Definizione 1.26 (**Sottocategoria generante**)**.** Siano $\mathscr{C}$ una categoria e $\mathscr{D}$ una sua sottocategoria. Allora $\mathscr{D}$ si dice *generante in* $\mathscr{C}$ se e solo se per ogni A in $\mathrm{Ob}(\mathscr{C})$ esistono E in $\mathrm{Ob}(\mathscr{D})$ ed $e : E \to A$ un epi di $\mathscr{C}$.

Definizione 1.27 (**Sottocategoria co-generante**)**.** Siano $\mathscr{C}$ una categoria e $\mathscr{D}$ una sua sottocategoria. Allora $\mathscr{D}$ si dice *co-generante in* $\mathscr{C}$ se e solo se per ogni C in $\mathrm{Ob}(\mathscr{C})$ esistono M in $\mathrm{Ob}(\mathscr{D})$ ed $m : C \to M$ un mono di $\mathscr{C}$.

1.2 Categorie con struttura algebrica

Definizione 1.28 (Sottocategoria additiva). Siano $\mathscr{C}$ una categoria additiva e $\mathscr{D}$ una sottocategoria di $\mathscr{C}$. Allora $\mathscr{D}$ si dice *sottocategoria additiva di* $\mathscr{C}$ se e solo se:

- la categoria $\mathscr{D}$ è additiva;
- il funtore inclusione di $\mathscr{D}$ in $\mathscr{C}$ è additivo;
- per ogni coppia di oggetti (A, B) in $\mathscr{D}$, per ogni (P, π_1, π_2) prodotto di (A, B) in $\mathscr{D}$, la terna (P, π_1, π_2) è prodotto di (A, B) in $\mathscr{C}$;
- per ogni coppia di oggetti (A, B) in $\mathscr{D}$, per ogni $(L, \varepsilon_1, \varepsilon_2)$ co-prodotto di (A, B) in $\mathscr{D}$, la terna $(L, \varepsilon_1, \varepsilon_2)$ è co-prodotto di (A, B) in $\mathscr{C}$.

Lemma 1.29. Siano $\mathscr{C}$, $\mathscr{D}$ categorie additive ed $F : \mathscr{C} \to \mathscr{D}$ un funtore pieno e fedele. Allora:

(1) per ogni Z oggetto zero di $\mathscr{C}$ si ha che $F(Z)$ è oggetto zero di $\mathscr{D}$;

(2) il funtore F preserva tutti i morfismi zero;

(3) il funtore F preserva i bi-prodotti;

(4) il funtore F commuta con tutti i prodotti e co-prodotti binari;

(5) il funtore F è additivo.

Dimostrazione. Lasciata come esercizio per il lettore. □

Definizione 1.30 (Categoria pre-abeliana). Una categoria $\mathscr{C}$ si dice *pre-abeliana* se e solo se:

- $\mathscr{C}$ è additiva;
- ogni morfismo f di $\mathscr{C}$, possiede nucleo e co-nucleo in $\mathscr{C}$.

Definizione 1.31 (Fattorizzazione canonica). Siano $\mathscr{C}$ una categoria preadditiva con oggetto zero ed $f : A \to B$ un morfismo di $\mathscr{C}$. La fattorizzazione canonica di f è il diagramma commutativo

$$\begin{tikzcd}
A \arrow[r, "f"] \arrow[d, two heads, "\mathrm{coker}(\ker(f))"'] & B \\
\mathrm{Coim}(f) \arrow[r, "\overline{f}"'] & \mathrm{Im}(f) \arrow[u, hook, "\ker(\mathrm{coker}(f))"']
\end{tikzcd}$$

nel caso in cui i nuclei e co-nuclei coinvolti siano tutti ben definiti in $\mathscr{C}$. In questo caso pongo $\mu_f := \ker(\mathrm{coker}(f))$ e $\nu_f := \mathrm{coker}(\ker(f))$, e la freccia $\overline{f}$ si dice *morfismo parallelo di f*.

Definizione 1.32 (Morfismo stretto). Sia $\mathscr{C}$ una categoria pre-abeliana. Un *morfismo stretto* di $\mathscr{C}$ è una freccia f tale che il suo morfismo parallelo $\overline{f}$, nella fattorizzazione canonica, sia un isomorfismo di $\mathscr{C}$.

Lemma 1.33. Siano $\mathscr{C}$ una categoria pre-abeliana ed f una freccia di $\mathscr{C}$. Allora le seguenti affermazioni sono equivalenti:

(1) f è mono stretto di $\mathscr{C}$;

(2) esiste un morfismo g tale che f è nucleo di g;

(3) f è nucleo di h, per ogni h conucleo di f.

Dimostrazione. Omessa. Vedere [SB21], ad esempio. □

Dualmente si ottiene

Lemma 1.34. Siano $\mathscr{C}$ una categoria pre-abeliana ed f una freccia di $\mathscr{C}$. Allora le seguenti affermazioni sono equivalenti:

(1) f è epi stretto di $\mathscr{C}$;

(2) esiste un morfismo g tale che f è co-nucleo di g;

(3) f è co-nucleo di h, per ogni h nucleo di f.

1.3 Categorie abeliane

Definizione 1.35 (Sottocategoria abeliana). Siano $\mathscr{C}$ una categoria abeliana, $\mathscr{D}$ una sottocategoria di $\mathscr{C}$ ed I il funtore inclusione di $\mathscr{D}$ in $\mathscr{C}$. Allora $\mathscr{D}$ si dice *sottocategoria abeliana di $\mathscr{C}$* se e solo se:

- la categoria $\mathscr{D}$ è abeliana;
- il funtore I è additivo ed esatto.

Criterio 1.36 (di Esattezza). Siano:

- $\mathscr{C}$ una categoria abeliana;
- $E:\ A \xrightarrow{f} B \xrightarrow{g} C$ una zero-sequenza in $\mathscr{C}$.

Allora E è esatta in $\mathscr{C}$ se e solo se per ogni morfismo $\beta : Y \to B$ tale che $g \circ \beta = 0$ esiste un diagramma commutativo

$$\begin{tikzcd} X \arrow[r, dotted, "e"] \arrow[d, dotted, "\alpha"'] & Y \arrow[d, "\beta"] \arrow[dr, "0"] & \\ A \arrow[r, "f"'] & B \arrow[r, "g"'] & C \end{tikzcd}$$

con $e : X \to Y$ epi in $\mathscr{C}$.

Dimostrazione. Omessa. Vedere la prova del Lemma 8.3.12. in [KS2], ad esempio. □

Osservazione 1.37. Questo **Criterio di Esattezza** ha anche una sua versione duale. La versione duale è da utilizzare nel caso in cui le dimostrazioni sono divise in due parti, una diretta e l'altra con le frecce invertite.

Lemma 1.38. Siano:

- $\mathscr{C}$ una categoria abeliana;
- $A \xrightarrow{f} B \xrightarrow{g} C$ una successione di morfismi di $\mathscr{C}$ con g mono.

Allora esiste un'unica successione esatta breve di $\mathscr{C}$

$$0 \longrightarrow \mathrm{CoKer}(f) \xrightarrow{u} \mathrm{CoKer}(g \circ f) \xrightarrow{v} \mathrm{CoKer}(g) \longrightarrow 0$$

che rende il diagramma

$$\Omega : \begin{tikzcd} B \arrow[r, "g"] \arrow[d, "\mathrm{coker}(f)"'] & C \arrow[r, equal, "\mathrm{id}_C"] \arrow[d, "\mathrm{coker}(g\circ f)"'] & C \arrow[d, "\mathrm{coker}(g)"'] \\ \mathrm{CoKer}(f) \arrow[r, dotted, "u"'] & \mathrm{CoKer}(g \circ f) \arrow[r, dotted, "v"'] & \mathrm{CoKer}(g) \end{tikzcd}$$

commutativo.

Dimostrazione. La catena di uguaglianze

$$(\mathrm{coker}(g \circ f)g) \circ f = \mathrm{coker}(g \circ f) \circ (g \circ f) = 0$$

implica l'esistenza della freccia u dell'enunciato, per la proprietà universale di $\mathrm{coker}(f)$.

Analogamente dalle relazioni

$$\mathrm{coker}(g) \circ (g \circ f) = (\mathrm{coker}(g) \circ g) \circ f = 0$$

si deduce l'esistenza del morfismo v.

- u mono: siano X in $\mathrm{Ob}(\mathscr{C})$ e $\theta : X \to \mathrm{CoKer}(f)$ tali che $u \circ \theta = 0$. Si costruisce un pullback

$$\begin{tikzcd} \Delta_1 : & Y \arrow[r, "h_2"] \arrow[d, "e_1"'] & B \arrow[d, "\mathrm{coker}(f)"] \\ & X \arrow[r, "\theta"'] & \mathrm{CoKer}(f) \end{tikzcd}$$

in $\mathscr{C}$ di $(\theta, \mathrm{coker}(f))$. Le proprietà delle categorie abeliane implicano che e_1 è epi in $\mathscr{C}$.

L'esattezza di

$$E_1 : \ A \xrightarrow{g \circ f} C \xrightarrow{\mathrm{coker}(g \circ f)} \mathrm{CoKer}(g \circ f)$$

e la commutatività del diagramma Ω implicano l'esistenza di un diagramma commutativo

$$\begin{tikzcd} Z \arrow[r, "\sigma"] \arrow[d, "\gamma"'] & Y \arrow[d, "g \circ h_2"] \arrow[dr, "0"] & \\ A \arrow[r, "g \circ f"'] & C \arrow[r, "\mathrm{coker}(g \circ f)"'] & \mathrm{CoKer}(g \circ f) \end{tikzcd}$$

con σ epi, per il **Criterio di Esattezza**. Essendo g mono, si ottiene $f \circ \gamma = h_2 \circ \sigma$. E pertanto

$$\theta \circ e_1 \circ \sigma = \mathrm{coker}(f) \circ h_2 \circ \sigma =$$

$$= \mathrm{coker}(f) \circ f \circ \gamma = 0$$

per la commutatività di Δ_1. Il carattere epi di e_1, σ implica $\theta = 0$. L'arbitrarietà di θ implica che u è mono di $\mathscr{C}$.

- $\mathrm{Im}(u) \subseteq \mathrm{Ker}(v)$: dalla commutatività del diagramma Ω si ottiene

$$v \circ u \circ \mathrm{coker}(f) = \mathrm{coker}(g) \circ g = 0\,.$$

Dal carattere epi di $\mathrm{coker}(f)$ si ottiene $v \circ u = 0$.

- $\mathrm{Ker}(v) \subseteq \mathrm{Im}(u)$: sia $\delta : D \to \mathrm{CoKer}(g \circ f)$ tale che $v \circ \delta = 0$. Si costruisce un pullback

$$\Delta_2 : \begin{tikzcd} W \arrow[r, "\gamma_2"] \arrow[d, "\varepsilon_1"'] & C \arrow[d, "\mathrm{coker}(g \circ f)"] \\ D \arrow[r, "\delta"'] & \mathrm{CoKer}(g \circ f) \end{tikzcd}$$

in $\mathscr{C}$ di $(\delta, \mathrm{coker}(g \circ f))$. Le proprietà delle categorie abeliane implicano che ε_1 è epi in $\mathscr{C}$. Allora

$$\mathrm{coker}(g) \circ \gamma_2 = v \circ \mathrm{coker}(g \circ f) \circ \gamma_2 =$$

$$= v \circ \delta \circ \varepsilon_1 = 0$$

per la commutatività del diagramma dell'enunciato. E pertanto esiste un unico morfismo $\psi : W \to B$ tale che $\gamma_2 = g \circ \psi$, essendo g mono. Dal diagramma Ω si ottiene la commutatività del diagramma

$$\begin{tikzcd} W \arrow[r, "\varepsilon_1"] \arrow[d, "\mathrm{coker}(f) \circ \psi"'] & D \arrow[d, "\delta"] \arrow[dr, "0"] & \\ \mathrm{CoKer}(f) \arrow[r, "u"'] & \mathrm{CoKer}(g \circ f) \arrow[r, "v"'] & \mathrm{CoKer}(g) \end{tikzcd}$$

utilizzando Δ_2. Essendo ε_1 epi, si ottiene l'asserto per l'arbitrarietà di δ e per il **Criterio di Esattezza**.

- v epi: discende da $\mathrm{coker}(g)$ epi e dall'uguaglianza $v \circ \mathrm{coker}(g \circ f) = \mathrm{coker}(g)$.

- Unicità: direttamente dalla commutatività di Ω e dal carattere epi di $\mathrm{coker}(f)$, $\mathrm{coker}(g \circ f)$.

$\square$

Dualizzando la dimostrazione si ottiene

Lemma 1.39. Siano:

- $\mathscr{C}$ una categoria abeliana;

- $A \xrightarrow{f} B \xrightarrow{g} C$ una successione di morfismi di $\mathscr{C}$ con f epi.

Allora esiste un'unica successione esatta breve di $\mathscr{C}$

$$0 \longrightarrow \mathrm{Ker}(f) \xrightarrow{k} \mathrm{Ker}(g \circ f) \xrightarrow{\varepsilon} \mathrm{Ker}(g) \longrightarrow 0$$

che rende il diagramma

$$\begin{tikzcd}
\Omega : & A \arrow[r, equal, "\mathrm{id}_A"] & A \arrow[r, "f"] & B \\
& \mathrm{Ker}(f) \arrow[u, "\ker(f)"] \arrow[r, dotted, "k"'] & \mathrm{Ker}(g \circ f) \arrow[u, "\ker(g \circ f)"] \arrow[r, dotted, "\varepsilon"'] & \mathrm{Ker}(g) \arrow[u, "\ker(g)"]
\end{tikzcd}$$

commutativo.

Lemma 1.40. Siano $\mathscr{C}$ una categoria abeliana e

$$\begin{tikzcd}
\Delta : & X \arrow[r, "f"] & Y \arrow[r, "g"] \arrow[d, "u"'] & Z \arrow[d, equal, "\mathrm{id}_Z"] & \\
& 0 \arrow[r] & A \arrow[r, "\alpha"'] \arrow[d] & Z \arrow[r, "\beta"'] & B \\
& & 0 & &
\end{tikzcd}$$

un diagramma commutativo in $\mathscr{C}$. Suppongo che u sia co-nucleo di f ed α sia nucleo di β. Allora la riga superiore di Δ è esatta in $\mathscr{C}$.

Dimostrazione.

$\mathrm{Im}(f) \subseteq \mathrm{Ker}(g)$: la commutatività di Δ implica

$$g \circ f = \alpha \circ (u \circ f) = 0\,.$$

$\mathrm{Ker}(g) \subseteq \mathrm{Im}(f)$: siano C un oggetto di $\mathscr{C}$ ed $h : C \to Y$ tale che $g \circ h = 0$. La commutatività di Δ implica

$$\alpha \circ u \circ h = 0\,.$$

Il carattere mono di α implica $u \circ h = 0$. Essendo la sequenza

$$X \xrightarrow{f} Y \xrightarrow{u} A$$

esatta in $\mathscr{C}$, si conclude applicando il **Criterio di Esattezza** al diagramma commutativo

$$\begin{tikzcd} & C \arrow[d, "h"'] \arrow[dr, "0"] & \\ X \arrow[r, "f"'] & Y \arrow[r, "u"'] & A \end{tikzcd}$$

□

1.3.1 Co-omologia di una zero-sequenza

Siano $\mathscr{C}$ una categoria abeliana, $f : A \to B$ e $g : B \to C$ frecce di $\mathscr{C}$ tali che $g \circ f = 0$ ed $X := (f, g)$. Sia $\ker(g) : \mathrm{Ker}(g) \to B$ il nucleo di g della sua struttura esplicita e

$$\begin{tikzcd} A \arrow[r, "f"] \arrow[d, two heads, "\mathrm{coker}(\ker(f))"'] & B \\ \mathrm{Coim}(f) \arrow[r, "\overline{f}"'] & \mathrm{Im}(f) \arrow[u, hook, "\ker(\mathrm{coker}(f))"'] \end{tikzcd}$$

la fattorizzazione canonica di f. L'abelianità di $\mathscr{C}$ e le ipotesi sulla coppia X implicano

$$g \circ \ker(\mathrm{coker}(f)) = 0\,.$$

Allora esiste un unico morfismo $\alpha_X : \mathrm{Im}(f) \to \mathrm{Ker}(g)$ che rende il diagramma

$$\begin{tikzcd} B & \\ \mathrm{Im}(f) \arrow[u, hook, "\ker(\mathrm{coker}(f))"] \arrow[dr, dotted, "\alpha_X"'] & \\ & \mathrm{Ker}(g) \arrow[uul, hook, "\ker(g)"'] \end{tikzcd}$$

commutativo in $\mathscr{C}$. Il codominio del morfismo $\mathrm{coker}(\alpha_X)$ si indica con $\mathrm{H}(X)$, e si chiama *co-omologia di X*. L'abelianità di $\mathscr{C}$ implica che la sequenza

$$0 \longrightarrow \mathrm{Im}(f) \xrightarrow{\alpha_X} \mathrm{Ker}(g) \xrightarrow{\mathrm{coker}(\alpha_X)} \mathrm{H}(X) \longrightarrow 0$$

è esatta breve in $\mathscr{C}$.

Ora si definisce la categoria $\mathrm{SeqBin}(\mathscr{C})$ ponendo:

- come oggetti le sequenze $A \xrightarrow{f} B \xrightarrow{g} C$ in $\mathscr{C}$ tali che $g \circ f = 0$;
- se (f_1, g_1) e (f_2, g_2) sono oggetti allora i morfismi da (f_1, g_1) a (f_2, g_2) sono tutte e sole le terne (α, β, γ) di morfismi in $\mathscr{C}$ che rendono il diagramma

$$\begin{tikzcd} A_1 \arrow[r, "f_1"] \arrow[d, "\alpha"'] & B_1 \arrow[r, "g_1"] \arrow[d, "\beta"'] & C_1 \arrow[d, "\gamma"'] \\ A_2 \arrow[r, "f_2"] & B_2 \arrow[r, "g_2"] & C_2 \end{tikzcd}$$

  commutativo.
- le uguaglianze, identità e le composizioni sono quelle indotte da $\mathscr{C}$.

Si prova che la categoria $\mathrm{SeqBin}(\mathscr{C})$ è ben definita ed abeliana.

Sia (α, β, γ) un morfismo da (f_1, g_1) a (f_2, g_2) in $\mathrm{SeqBin}(\mathscr{C})$. Indico con F la terna (α, β, γ), e con X ed Y rispettivamente le coppie (f_1, g_1), (f_2, g_2). Tramite le proprietà universali dei nuclei e co-nuclei si dimostra che esistono e sono unici i morfismi $\theta(F)$ ed $\mathrm{H}(F)$ che rendono i diagrammi

$$\begin{tikzcd} \mathrm{Ker}(g_1) \arrow[rr, "\beta \circ \mathrm{ker}(g_1)"] \arrow[dr, dotted, "\theta(F)"'] & & B_2 \\ & \mathrm{Ker}(g_2) \arrow[ur, "\mathrm{ker}(g_2)"'] & \end{tikzcd}$$

e

$$\begin{tikzcd}
\mathrm{Ker}(g_1) \arrow[rr, "\mathrm{coker}(\alpha_Y)\circ\theta(F)"] \arrow[dr, "\mathrm{coker}(\alpha_X)"'] & & \mathrm{H}(Y) \\
& \mathrm{H}(X) \arrow[ur, dotted, "\mathrm{H}(F)"'] &
\end{tikzcd}$$

commutativi in $\mathscr{C}$, utilizzando il fatto che (α, β, γ) è morfismo.

Le assegnazioni $\theta(\_)$ e $\mathrm{H}(\_)$, definiscono due funtori additivi da $\mathrm{SeqBin}(\mathscr{C})$ verso $\mathscr{C}$.

1.4 Categorie esatte

Definizione 1.41. Sia $\mathscr{C}$ una categoria preadditiva con oggetto zero. Allora si definiscono le coppie *nucleo-conucleo* come le coppie (ε, π) con $\varepsilon : A \to B$ nucleo di π e $\pi : B \to C$ conucleo di ε. Un sinonimo di coppia nucleo-conucleo è *conflazione*.

Definizione 1.42. Sia $\mathscr{C}$ una categoria additiva ed $\mathcal{E}$ una classe di coppie nucleo-conucleo di $\mathscr{C}$. Allora si definiscono:

- *inflazioni* i morfismi $i : X \to Y$ che ammettono un morfismo $d : Y \to Z$ tale che $(i, d) \in \mathcal{E}$;
- *deflazioni* i morfismi $d : Y \to Z$ che ammettono un morfismo $i : X \to Y$ tale che $(i, d) \in \mathcal{E}$.

Definizione 1.43. Sia $\mathscr{C}$ una categoria additiva ed $\mathcal{E}$ una classe di coppie nucleo-conucleo di $\mathscr{C}$. La classe $\mathcal{E}$ si dice *chiusa per isomorfismi* se e solo se: per ogni $i : A \to B$, $d : B \to C$ con $(i, d) \in \mathcal{E}$, $f : A \to A'$, $g : B \to B'$ ed $h : C \to C'$ isomorfismi ed $i' : A' \to B'$, $d' : B' \to C'$ morfismi di $\mathscr{C}$ tali che il diagramma

$$\begin{tikzcd}
A \arrow[r, "i"] \arrow[d, "f"] & B \arrow[r, "d"] \arrow[d, "g"] & C \arrow[d, "h"] \\
A' \arrow[r, "i'"'] & B' \arrow[r, "d'"'] & C'
\end{tikzcd}$$

risulta commutativo, allora $(i', d') \in \mathcal{E}$.

Definizione 1.44. Sia $\mathscr{C}$ una categoria additiva ed $\mathcal{E}$ una classe di coppie nucleo-conucleo di $\mathscr{C}$. Allora $\mathcal{E}$ è una *struttura esatta su* $\mathscr{C}$ se e solo se:

(EX0) id_0 è deflazione per ogni 0 oggetto zero di $\mathscr{C}$;

(EX0$^{\mathrm{op}}$) id_0 è inflazione per ogni 0 oggetto zero di $\mathscr{C}$;

(EX1) se $d : X \to Y$ e $d' : Y \to Z$ sono deflazioni allora $d' \circ d$ è deflazione;

(EX1$^{\mathrm{op}}$) se $i : A \to B$ e $i' : B \to C$ sono inflazioni allora $i' \circ i$ è inflazione;

(EX2) per ogni $d : X \to Y$ deflazione ed ogni $f : X' \to Y$ morfismo di $\mathscr{C}$ esiste un pullback

$$\begin{tikzcd} Z \arrow[r, "d'"] \arrow[d, "f'"'] & X' \arrow[d, "f"] \\ X \arrow[r, "d"'] & Y \end{tikzcd}$$

di (f, d) in $\mathscr{C}$ con d' deflazione;

(EX2$^{\mathrm{op}}$) per ogni $i : X \to Y$ inflazione ed ogni $g : X \to Y'$ morfismo di $\mathscr{C}$ esiste un push-out

$$\begin{tikzcd} X \arrow[r, "i"] \arrow[d, "g"'] & Y \arrow[d, "g'"] \\ Y' \arrow[r, "i'"'] & W \end{tikzcd}$$

di (i, g) in $\mathscr{C}$ con i' inflazione;

(CLUI) la classe $\mathcal{E}$ è chiusa per isomorfismi.

Definizione 1.45 (**Categoria Esatta**)**.** Una *categoria esatta* è una coppia $(\mathscr{C}, \mathcal{E})$ tale che:

- $\mathscr{C}$ è categoria additiva;
- $\mathcal{E}$ è una struttura esatta su $\mathscr{C}$.

Proposizione 1.46. Siano:

- $(\mathscr{C}, \mathcal{E})$ una categoria esatta;
- d ed f morfismi con d deflazione;
- $$\begin{tikzcd} Z \arrow[r, "d'"] \arrow[d, "f'"'] & X' \arrow[d, "f"] \\ X \arrow[r, "d"'] & Y \end{tikzcd}$$

  un pullback di (f, d) in $\mathscr{C}$.

Allora d' è deflazione.

Dimostrazione. Lasciata come esercizio per il lettore. □

Proposizione 1.47. Siano:

- $(\mathscr{C}, \mathcal{E})$ una categoria esatta;
- d ed f morfismi con d deflazione;
- $\Delta :$
$$\begin{tikzcd} Z \arrow[r, "d'"] \arrow[d, "f'"'] & X' \arrow[d, "f"] \\ X \arrow[r, "d"'] & Y \end{tikzcd}$$
 un pullback di (f, d) in $\mathscr{C}$;
- $i : Z' \to X$ morfismo tale che $(i, d) \in \mathcal{E}$.

Allora esiste $i' : Z' \to Z$ morfismo di $\mathscr{C}$ tale che $(i', d') \in \mathcal{E}$ e che rende il diagramma

$$\begin{tikzcd} Z' \arrow[r, "i'"] \arrow[d, equal, "\mathrm{id}_{Z'}"'] & Z \arrow[r, "d'"] \arrow[d, "f'"'] & X' \arrow[d, "f"] \\ Z' \arrow[r, "i"'] & X \arrow[r, "d"'] & Y \end{tikzcd}$$

commutativo.

Dimostrazione. Essendo Δ un pullback di (d, f), esiste un unico morfismo $i' : Z' \to Z$ che rende il diagramma

$$\begin{tikzcd} Z' \arrow[dr, dotted, "i'"] \arrow[drr, bend left, "0"] \arrow[ddr, bend right, "i"'] & & \\ & Z \arrow[r, "d'"] \arrow[d, "f'"'] & X' \arrow[d, "f"] \\ & X \arrow[r, "d"'] & Y \end{tikzcd}$$

commutativo in $\mathscr{C}$.

- i' mono: discende da $f' \circ i' = i$ ed i mono.
- i' è nucleo di d': sia $\theta : A \to Z$ tale che $d' \circ \theta = 0$. Allora

$$d \circ f' \circ \theta = f \circ d' \circ \theta = 0\,.$$

E pertanto esiste un unico $h : A \to Z'$ tale che $f' \circ \theta = i \circ h$, essendo $(i, d) \in \mathcal{E}$.

I diagrammi

$$\begin{tikzcd} A \arrow[dr, "\theta"] \arrow[drr, bend left, "0"] \arrow[ddr, bend right, "i \circ h"'] & & \\ & Z \arrow[r, "d'"] \arrow[d, "f'"'] & X' \arrow[d, "f"] \\ & X \arrow[r, "d"'] & Y \end{tikzcd}$$

e

$$\begin{tikzcd} A \arrow[dr, "i' \circ h"] \arrow[drr, bend left, "0"] \arrow[ddr, bend right, "i \circ h"'] & & \\ & Z \arrow[r, "d'"] \arrow[d, "f'"'] & X' \arrow[d, "f"] \\ & X \arrow[r, "d"'] & Y \end{tikzcd}$$

sono commutativi. Quindi $\theta = i' \circ h$, essendo Δ un pullback di (f, d). Essendo i' mono, trovo che i' è nucleo di d'.

- Conclusione: Essendo $(i, d) \in \mathcal{E}$ e Δ un pullback di (f, d) si trova che d' è deflazione di $(\mathscr{C}, \mathcal{E})$, per la Proposizione 1.46. Allora esiste $j : W \to Z$ tale che $(j, d') \in \mathcal{E}$. Da questo deduce che j ed i' sono nuclei di d'. Allora esiste un unico isomorfismo $r : W \to Z'$ che rende il diagramma

$$\Omega : \begin{tikzcd} W \arrow[r, "j"] \arrow[d, dotted, "r"'] & Z \arrow[r, "d'"] \arrow[d, equal, "\mathrm{id}_Z"'] & X' \arrow[d, equal, "\mathrm{id}_{X'}"] \\ Z' \arrow[r, "i'"'] & Z \arrow[r, "d'"'] & X' \end{tikzcd}$$

commutativo. Utilizzando l'assioma (CLUI) sul diagramma Ω e la relazione $(j, d') \in \mathcal{E}$, ottengo $(i', d') \in \mathcal{E}$.

□

Proposizione 1.48. Siano:

- $(\mathscr{C}, \mathcal{E})$ una categoria esatta;
- i e j morfismi con i inflazione;
- $$\begin{tikzcd} X \arrow[r, "i"] \arrow[d, "j"'] & Y \arrow[d, "j'"] \\ Y' \arrow[r, "i'"'] & W \end{tikzcd}$$
  un push-out di (i, j) in $\mathscr{C}$.

Allora i' è inflazione.

Dimostrazione. Dualizzare la prova della Proposizione 1.46. □

Proposizione 1.49. Siano:

- $(\mathscr{C}, \mathcal{E})$ una categoria esatta;
- i e j morfismi con i inflazione;
- $$\begin{tikzcd} X \arrow[r, "i"] \arrow[d, "j"'] & Y \arrow[d, "j'"] \\ Y' \arrow[r, "i'"'] & W \end{tikzcd}$$
  un push-out di (i, j) in $\mathscr{C}$;
- $d : Y \to Z$ morfismo di $\mathscr{C}$ tale che $(i, d) \in \mathcal{E}$.

Allora esiste $d' : W \to Z$ che rende commutativo il diagramma

$$\begin{tikzcd} X \arrow[r, "i"] \arrow[d, "j"'] & Y \arrow[r, "d"] \arrow[d, "j'"'] & Z \arrow[d, equal, "\mathrm{id}_Z"] \\ Y' \arrow[r, "i'"'] & W \arrow[r, "d'"'] & Z \end{tikzcd}$$

ed $(i', d') \in \mathcal{E}$.

Dimostrazione. Si dualizza la dimostrazione della Proposizione 1.47. □

Definizione 1.50. Sia $\mathscr{C}$ una categoria preadditiva con oggetto zero. Si indica con $\mathcal{M}(\mathscr{C})$ la totalità di tutte le coppie nucleo-conucleo di $\mathscr{C}$. La coppia $(\mathscr{C}, \mathcal{M}(\mathscr{C}))$ si dice *struttura esatta canonica di* $\mathscr{C}$.

Proposizione 1.51. Per ogni categoria abeliana $\mathscr{C}$ la coppia $(\mathscr{C}, \mathcal{M}(\mathscr{C}))$ è una categoria esatta.

Dimostrazione. Nelle categorie abeliane ogni mono m è nucleo di un conucleo di m ed ogni epi e è co-nucleo di un nucleo di e. Da questo gli assiomi (EX-0)-0$^{\text{op}}$)-1)-1$^{\text{op}}$) e (CLUI) sono direttamente verificati. Per la verifica degli assiomi (EX-2)-2$^{\text{op}}$) vedere ad esempio [SB21]. $\square$

Osservazione 1.52. Nelle categorie abeliane, quando si tratta l'esattezza di categoria, la classe delle coppie nucleo-conucleo sottointesa è quella canonica. Nel caso si usasse un'altra struttura, verrà specificato.

Definizione 1.53 (Chiusura per estensioni). Siano $(\mathscr{C}, \mathcal{E})$ una categoria esatta e $\mathscr{D}$ una sottocategoria di $\mathscr{C}$. Allora la sottocategoria $\mathscr{D}$ si dice *chiusa per estensioni in* $(\mathscr{C}, \mathcal{E})$ se e solo se per ogni successione

$$A \xrightarrow{i} B \xrightarrow{d} C$$

in $\mathscr{C}$, vale l'implicazione

$$\Big((i,d) \in \mathcal{E} \ \& \ A \in \mathrm{Ob}(\mathscr{D}) \ \& \ C \in \mathrm{Ob}(\mathscr{D})\Big) \implies B \in \mathrm{Ob}(\mathscr{D})\,.$$

Definizione 1.54. Siano $(\mathscr{C}, \mathcal{E})$ una categoria esatta e $\mathscr{D}$ una sottocategoria di $\mathscr{C}$. Si indica con $\mathcal{E}_{|\mathscr{D}}$ la totalità delle coppie $(i,d) \in \mathcal{E}$ tali che $\{i,d\} \subseteq \mathrm{Ar}(\mathscr{D})$.

Definizione 1.55. Sia $(\mathscr{C}, \mathcal{E})$ una categoria esatta. Una *sottocategoria pienamente esatta di* $(\mathscr{C}, \mathcal{E})$ è una coppia $(\mathscr{D}, \mathcal{E}_{|\mathscr{D}})$ dove:

- $\mathscr{D}$ è una sottocategoria piena ed additiva di $\mathscr{C}$;
- $\mathscr{D}$ è chiusa per estensioni in $(\mathscr{C}, \mathcal{E})$.

Lemma 1.56. Siano:

- $(\mathscr{C}, \mathcal{E})$ una categoria esatta;
- $\mathscr{D}$ una sottocategoria pienamente esatta di $(\mathscr{C}, \mathcal{E})$;
- $f : X' \to Y$, $d : X \to Y$ frecce in $\mathscr{D}$;
- d è deflazione di $\mathcal{E}_{|\mathscr{D}}$;
- $$\Delta_1 : \quad \begin{array}{ccc} Z & \xrightarrow{d'} & X' \\ {\scriptstyle f'}\downarrow & & \downarrow{\scriptstyle f} \\ X & \xrightarrow[d]{} & Y \end{array}$$

  un pullback di (d,f) in $\mathscr{C}$.

Allora:

- Z è oggetto di $\mathscr{D}$;
- Δ_1 è pullback di (d, f) in $\mathscr{D}$;
- d' è deflazione di $\mathcal{E}_{|\mathscr{D}}$.

Dimostrazione. Le ipotesi implicano l'esistenza di una freccia $i : Z' \to X$ in $\mathscr{D}$ tale che $(i, d) \in \mathcal{E}$. Dalla Proposizione 1.47 si deduce l'esistenza di un diagramma commutativo in $\mathscr{C}$

$$\Delta_2 : \quad \begin{tikzcd} Z' \arrow[r, "i'"] \arrow[d, equal, "\mathrm{id}_{Z'}"'] & Z \arrow[r, "d'"] \arrow[d, "f'"'] & X' \arrow[d, "f"] \\ Z' \arrow[r, "i"'] & X \arrow[r, "d"'] & Y \end{tikzcd}$$

tale che $(i', d') \in \mathcal{E}$. Le ipotesi implicano $\{Z', X'\} \subseteq \mathrm{Ob}(\mathscr{D})$. La chiusura per estensioni di $\mathscr{D}$ rispetto a $(\mathscr{C}, \mathcal{E})$ implica $Z \in \mathrm{Ob}(\mathscr{D})$, essendo $(i', d') \in \mathcal{E}$. Quindi Δ_1 è un pullback di (d, f) in $\mathscr{D}$ ed $(i', d') \in \mathcal{E}_{|\mathscr{D}}$. $\square$

Lemma 1.57. Siano:

- $(\mathscr{C}, \mathcal{E})$ una categoria esatta;
- $\mathscr{D}$ una sottocategoria pienamente esatta di $(\mathscr{C}, \mathcal{E})$.

Allora $(\mathscr{D}, \mathcal{E}_{|\mathscr{D}})$ è una categoria esatta, con la struttura additiva indotta da $\mathscr{C}$.

Dimostrazione. L'additività di $\mathscr{D}$ implica l'esistenza di un oggetto zero Z di $\mathscr{C}$ tale che $Z \in \mathrm{Ob}(\mathscr{D})$.

(EX0) ed (EX0$^{\mathrm{op}}$): gli assiomi (EX0) e (CLUI) di $(\mathscr{C}, \mathcal{E})$ implicano l'esistenza di $d : Z \to A$ freccia di $\mathscr{C}$ tale che $(\mathrm{id}_Z, d) \in \mathcal{E}$. Essendo Z un oggetto zero di $\mathscr{C}$, si ha che id_Z è co-nucleo di id_Z in $\mathscr{C}$. Allora $\varphi : A \to Z$ è isomorfismo. La chiusura per isomorfismi di $(\mathscr{C}, \mathcal{E})$ implica che $(\mathrm{id}_Z, \mathrm{id}_Z) \in \mathcal{E}$. Essendo $Z \in \mathrm{Ob}(\mathscr{D})$ ottengo $(\mathrm{id}_Z, \mathrm{id}_Z) \in \mathcal{E}_{|\mathscr{D}}$.

(EX1): siano

$$\sigma_1 : \ X \xrightarrow{i} B \xrightarrow{d} C$$

$$\sigma_2 : \ Y \xrightarrow{i'} C \xrightarrow{d'} D$$

elementi di $\mathcal{E}_{|\mathscr{D}}$. Allora $\{\sigma_1, \sigma_2\} \subseteq \mathcal{E}$. L'assioma (EX2) di $(\mathscr{C}, \mathcal{E})$ implica l'esistenza di un pullback

$$\Delta_1 : \quad \begin{tikzcd} Z \arrow[r, "h"] \arrow[d, "f"'] & Y \arrow[d, "i'"] \\ B \arrow[r, "d"'] & C \end{tikzcd}$$

di (d, i') in $\mathscr{C}$. Utilizzando il Lemma 1.56 sul diagramma Δ_1 si ottiene $Z \in \mathrm{Ob}(\mathscr{D})$ e l'esistenza di una freccia

$$g : W \to Z$$

in $\mathscr{D}$ tale che $(g, h) \in \mathcal{E}_{|\mathscr{D}}$. L'assioma (EX1) di $(\mathscr{C}, \mathcal{E})$ implica l'esistenza di una freccia

$$\gamma : A' \to B$$

in $\mathscr{C}$ tale che $(\gamma, d' \circ d) \in \mathcal{E}$, per la relazione $\{\sigma_1, \sigma_2\} \subseteq \mathcal{E}$. Un calcolo diretto mostra che f è nucleo di $d' \circ d$ in $\mathscr{C}$. Allora esiste un unico isomorfismo $r : A' \to Z$ in $\mathscr{C}$ che rende il diagramma

$$\Delta_2 : \quad \begin{tikzcd} A' \arrow[r, "\gamma"] \arrow[d, dotted, "r"'] & B \arrow[r, "d' \circ d"] \arrow[d, equal, "\mathrm{id}_B"'] & D \arrow[d, equal, "\mathrm{id}_D"'] \\ Z \arrow[r, "f"'] & B \arrow[r, "d' \circ d"'] & D \end{tikzcd}$$

commutativo. Utilizzando l'assioma (CLUI) di $(\mathscr{C}, \mathcal{E})$ sul diagramma Δ_2, si ottiene $(f, d' \circ d) \in \mathcal{E}$. La relazione $Z \in \mathrm{Ob}(\mathscr{D})$ implica $(f, d' \circ d) \in \mathcal{E}_{|\mathscr{D}}$, essendo $\mathscr{D}$ una sottocategoria piena di $\mathscr{C}$.

(EX1$^{\mathrm{op}}$): si dualizza la prova di (EX1).

(EX2): è il contenuto del Lemma 1.56.

(EX2$^{\mathrm{op}}$): si dualizza la prova di (EX2).

(CLUI): si ottiene applicando direttamente l'assioma (CLUI) di $(\mathscr{C}, \mathcal{E})$ e ricordando che $\mathscr{D}$ è sottocategoria piena di $\mathscr{C}$.

Un possibile riferimento per questa dimostrazione è [HANS1]. □

Teorema 1.58. Siano:

- $\mathscr{C}$ una categoria abeliana;
- $\mathscr{D}$ una sottocategoria pienamente esatta di $\mathscr{C}$;
- $\mathcal{E}$ la classe formata da tutte e sole le coppie (f, g) di morfismi di $\mathscr{D}$ tali che f è nucleo di g in $\mathscr{C}$ e g è co-nucleo di f in $\mathscr{C}$.

Allora $(\mathscr{D}, \mathcal{E})$ è una categoria esatta.

Dimostrazione. La tesi segue immediatamente dal Lemma 1.57. □

Capitolo 2

Categorie quasi-abeliane

Si inizia questo capitolo con la definizione di categoria quasi-abeliana, poi si enunciano e dimostrano le proprietà di base ed i lemmi che caratterizzano tali categorie. L'esposizione segue maggiormente [SCH1] e [PROS1].

Definizione 2.1 (**Categoria quasi-abeliana**). Sia $\mathscr{C}$ una categoria. Si dice che $\mathscr{C}$ è *quasi-abeliana* se e solo se:

(a) la categoria $\mathscr{C}$ è pre-abeliana;

(b) per ogni epimorfismo stretto f e pullback

$$\begin{tikzcd} X \arrow[r, "g'"] \arrow[d, "f'"'] & A \arrow[d, "f"] \\ C \arrow[r, "g"'] & B \end{tikzcd}$$

in $\mathscr{C}$, si ha che f' è epimorfismo stretto in $\mathscr{C}$.

(c) per ogni monomorfismo stretto α e pushout

$$\begin{tikzcd} Y \arrow[r, "\beta"] \arrow[d, "\alpha"'] & E \arrow[d, "\alpha'"] \\ F \arrow[r, "\beta'"'] & D \end{tikzcd}$$

in $\mathscr{C}$, si ha che α' è monomorfismo stretto in $\mathscr{C}$.

Lemma 2.2. Siano:

- $\mathscr{C}$ e $\mathscr{D}$ categorie tali che $\mathscr{C}$ è quasi-abeliana;
- $F : \mathscr{C} \to \mathscr{D}$ una equivalenza di categorie da $\mathscr{C}$ a $\mathscr{D}$.

Allora $\mathscr{D}$ è quasi-abeliana.

Dimostrazione. Omessa. □

Lemma 2.3. Siano:

- $\mathscr{C}$ e $\mathscr{D}$ categorie tali che $\mathscr{D}$ è quasi-abeliana;
- $F : \mathscr{C} \to \mathscr{D}$ una equivalenza di categorie da $\mathscr{C}$ a $\mathscr{D}$.

Allora $\mathscr{C}$ è quasi-abeliana.

Dimostrazione. Omessa. □

Lemma 2.4. Siano $\mathscr{C}$ una categoria quasi-abeliana ed $f : A \to B$ un morfismo di $\mathscr{C}$. Considero la fattorizzazione canonica di f

$$\begin{tikzcd} A \arrow[r, "f"] \arrow[d, two heads, "e"'] & B \\ \mathrm{Coim}(f) \arrow[r, "\overline{f}"'] & \mathrm{Im}(f) \arrow[u, hook, "m"'] \end{tikzcd}$$

Allora:

(a) $m \circ \overline{f}$ è monomorfismo, e è epimorfismo stretto;

(b) per ogni diagramma commutativo

$$\begin{tikzcd} A \arrow[rr, "f"] \arrow[dr, "\lambda"'] & & B \\ & J \arrow[ur, "\mu"'] & \end{tikzcd}$$

tale che μ è mono in $\mathscr{C}$, esiste un unico morfismo $h : \mathrm{Coim}(f) \to J$ che rende il diagramma

$$\begin{tikzcd}
& \mathrm{Coim}(f) \arrow[dr, "m\circ\overline{f}"] \arrow[dd, dotted, "h"] & \\
A \arrow[ur, "e"] \arrow[dr, "\lambda"'] & & B \\
& J \arrow[ur, "\mu"'] &
\end{tikzcd}$$

commutativo.

(c) m è monomorfismo stretto, $\overline{f} \circ e$ è epimorfismo;

(d) per ogni diagramma commutativo

$$\begin{tikzcd}
A \arrow[rr, "f"] \arrow[dr, "\beta"'] & & B \\
& I \arrow[ur, "\alpha"'] &
\end{tikzcd}$$

tale che β è epi in $\mathscr{C}$, esiste un unico morfismo $\psi : I \to \mathrm{Im}(f)$ che rende il diagramma

$$\begin{tikzcd}
& \mathrm{Im}(f) \arrow[dr, "m"] & \\
A \arrow[ur, "\overline{f}\circ e"] \arrow[dr, "\beta"'] & & B \\
& I \arrow[ur, "\alpha"'] \arrow[uu, dotted, "\psi"] &
\end{tikzcd}$$

commutativo.

Dimostrazione.

(a): sia $\theta : X \to \mathrm{Coim}(f)$ tale che $m \circ \overline{f} \circ \theta = 0$. La pre-abelianità di $\mathscr{C}$ implica l'esistenza di un pullback

$$\Delta_1 : \begin{tikzcd} X' \arrow[r, "\theta'"] \arrow[d, "e'"'] & A \arrow[d, "e"] \\ X \arrow[r, "\theta"'] & \mathrm{Coim}(f) \end{tikzcd}$$

di (θ, e). Il morfismo e è un epi stretto di $\mathscr{C}$, per il Lemma 1.34. La quasi-abelianità di $\mathscr{C}$ implica che e' è un epi stretto di $\mathscr{C}$, essendo Δ_1 un pullback di (θ, e). Allora e' è un epi in $\mathscr{C}$. La commutatività di Δ_1 implica

$$f \circ \theta' = m \circ \overline{f} \circ e \circ \theta' =$$

$$= m \circ \overline{f} \circ \theta \circ e' = 0$$

per le definizioni di e ed m. Allora esiste un unico β morfismo tale che $\theta' = \ker(f) \circ \beta$, per la proprietà universale di $\ker(f)$. Allora

$$\theta \circ e' = e \circ \ker(f) \circ \beta = 0$$

essendo e un co-nucleo di $\ker(f)$. E pertanto $\theta = 0$, essendo e' un epi di $\mathscr{C}$. L'arbitrarietà di θ implica la conclusione.

(b): Le ipotesi implicano

$$\mu \circ \lambda \circ \ker(f) = f \circ \ker(f) = 0$$

Allora $\lambda \circ \ker(f) = 0$, essendo μ un mono. Questo implica l'esistenza di un unico morfismo h tale che $\lambda = h \circ e$, essendo e un co-nucleo di $\ker(f)$. Allora

$$m \circ \overline{f} \circ e = f = \mu \circ \lambda =$$

$$= \mu \circ h \circ e\,.$$

Il carattere epi di e implica $m \circ \overline{f} = \mu \circ h$.

L'unicità discende dal carattere mono di μ.

(c): si dualizza la prova del punto (a).

(d): si dualizza la prova del punto (b).

□

Corollario 2.5. Siano $\mathscr{C}$ una categoria quasi-abeliana ed $f : A \to B$ un morfismo di $\mathscr{C}$. Allora il morfismo parallelo $\overline{f}$ è mono ed epi in $\mathscr{C}$.

Dimostrazione. Il Lemma 2.4 implica che $\ker(\operatorname{coker}(f)) \circ \overline{f}$ è mono in $\mathscr{C}$. Allora $\overline{f}$ è mono in $\mathscr{C}$.

Il Lemma 2.4 implica che $\overline{f} \circ \operatorname{coker}(\ker(f))$ è epi in $\mathscr{C}$. Allora $\overline{f}$ è epi in $\mathscr{C}$. □

Lemma 2.6. Siano $\mathscr{C}$ una categoria quasi-abeliana, $f : A \to B$ e $g : B \to C$ epimorfismi stretti di $\mathscr{C}$. Allora $g \circ f : A \to C$ è epimorfismo stretto di $\mathscr{C}$.

Dimostrazione. Siano:

- $h := g \circ f$;
- $i_f : K \to A$ un nucleo di f in $\mathscr{C}$;
- $i_g : K' \to B$ un nucleo di g in $\mathscr{C}$;
- $i_h : K'' \to A$ un nucleo di h in $\mathscr{C}$.

Si ha

$$g \circ (f \circ i_h) = h \circ i_h = 0\,.$$

La proprietà universale di i_g implica l'esistenza di un unico morfismo β in $\operatorname{Hom}_{\mathscr{C}}(K'', K')$ che rende il diagramma

$$\Delta_1 : \begin{tikzcd} K'' \arrow[r, "i_h"] \arrow[d, dotted, "\beta"'] & A \arrow[d, "f"] \\ K' \arrow[r, "i_g"'] & B \end{tikzcd}$$

commutativo.

Si ha

$$h \circ i_f = g \circ (f \circ i_f) = 0\,.$$

La proprietà universale di i_h implica l'esistenza di un unico morfismo α in $\operatorname{Hom}_{\mathscr{C}}(K, K'')$ che rende il diagramma

$$\begin{tikzcd} \Delta_2 : K \arrow[rr, "i_f"] \arrow[dr, dotted, "\alpha"'] & & A \\ & K'' \arrow[ur, "i_h"'] & \end{tikzcd}$$

commutativo.

Ora dimostro che Δ_1 è un pullback di (i_g, f) in $\mathscr{C}$. Siano $\gamma : X \to K'$ e $\delta : X \to A$ che rendono il diagramma

$$\begin{tikzcd} \Delta_3 : X \arrow[drr, bend left, "\delta"] \arrow[ddr, bend right, "\gamma"'] & & \\ & K'' \arrow[r, "i_h"] \arrow[d, "\beta"'] & A \arrow[d, "f"] \\ & K' \arrow[r, "i_g"'] & B \end{tikzcd}$$

commutativo. Allora

$$h \circ \delta = g \circ f \circ \delta = g \circ i_g \circ \gamma = 0\,.$$

E pertanto la proprietà universale di i_h implica l'esistenza di un unico morfismo u in $\mathrm{Hom}_{\mathscr{C}}(X, K'')$ tale che $\delta = i_h \circ u$. Allora

$$i_g \circ \beta \circ u = f \circ i_h \circ u =$$

$$= f \circ \delta = i_g \circ \gamma\,.$$

Il carattere mono di i_g implica $\beta \circ u = \gamma$. Allora il diagramma

$$\begin{tikzcd} \Delta_4 : X \arrow[drr, bend left, "\delta"] \arrow[ddr, bend right, "\gamma"'] \arrow[dr, "u"] & & \\ & K'' \arrow[r, "i_h"] \arrow[d, "\beta"'] & A \arrow[d, "f"] \\ & K' \arrow[r, "i_g"'] & B \end{tikzcd}$$

è commutativo. Il carattere mono di i_h implica che Δ_1 è un pullback di (i_g, f). La quasi-abelianità di $\mathscr{C}$, il diagramma Δ_1 e le ipotesi su f implicano che β è un epi stretto di $\mathscr{C}$. Quindi β è epi in $\mathscr{C}$.

Ora dimostro che h è co-nucleo di i_h in $\mathscr{C}$.

(EPI): le ipotesi implicano che f e g sono epi stretti di $\mathscr{C}$. Allora f e g sono epi in $\mathscr{C}$. E pertanto ottengo l'asserto voluto.

(COK2 debole): sia $r : A \to R$ un morfismo di $\mathscr{C}$ tale che $r \circ i_h = 0$. La commutatività di Δ_2 implica

$$r \circ i_f = r \circ i_h \circ \alpha = 0\,.$$

Allora esiste un unico morfismo v tale che $r = v \circ f$, essendo per ipotesi f un co-nucleo di i_f. La commutatività di Δ_1 implica

$$v \circ i_g \circ \beta = v \circ f \circ i_h = r \circ i_h = 0\,.$$

Il carattere epi di β implica $v \circ i_g = 0$. Le ipotesi su g implicano l'esistenza di un unico morfismo w tale che $v = w \circ g$. Allora

$$r = v \circ f = w \circ h\,.$$

(COK2): discende dai due punti precedenti.

Il Lemma 1.34, utilizzato sul morfismo h, implica la tesi. □

Lemma 2.7. Siano $\mathscr{C}$ una categoria quasi-abeliana, $f : A \to B$ e $g : B \to C$ monomorfismi stretti di $\mathscr{C}$. Allora $g \circ f : A \to C$ è monomorfismo stretto di $\mathscr{C}$.

Dimostrazione. Si dualizza la prova del Lemma 2.6. □

Lemma 2.8. Siano $\mathscr{C}$ una categoria quasi-abeliana, $f : A \to B$ e $g : B \to C$ morfismi di $\mathscr{C}$ tali che $g \circ f$ è epimorfismo stretto di $\mathscr{C}$. Allora g è epimorfismo stretto di $\mathscr{C}$.

Dimostrazione. Siano:

- $h := g \circ f$;
- $i_f : K \to A$ un nucleo di f in $\mathscr{C}$;
- $i_g : K' \to B$ un nucleo di g in $\mathscr{C}$;
- $i_h : K'' \to A$ un nucleo di h in $\mathscr{C}$.

Si ha

$$g \circ (f \circ i_h) = h \circ i_h = 0\,.$$

La proprietà universale di i_g implica l'esistenza di un unico morfismo β in $\mathrm{Hom}_{\mathscr{C}}(K'', K')$ che rende il diagramma

$$\begin{tikzcd} \Delta_1 : K'' \arrow[r, "i_h"] \arrow[d, dotted, "\beta"'] & A \arrow[d, "f"] \\ K' \arrow[r, "i_g"'] & B \end{tikzcd}$$

commutativo.
Si ha

$$h \circ i_f = g \circ (f \circ i_f) = 0\,.$$

La proprietà universale di i_h implica l'esistenza di un unico morfismo α in $\mathrm{Hom}_{\mathscr{C}}(K, K'')$ che rende il diagramma

$$\begin{tikzcd} \Delta_2 : K \arrow[rr, "i_f"] \arrow[dr, dotted, "\alpha"'] & & A \\ & K'' \arrow[ur, "i_h"'] & \end{tikzcd}$$

commutativo.
Considero il diagramma

$$\begin{tikzcd} \Delta_3 : A \oplus K' \arrow[r, "f\circ\pi_1 + i_g\circ\pi_2"] \arrow[d, "\pi_1"'] & B \arrow[d, "g"] \\ A \arrow[r, "h"'] & C \end{tikzcd}$$

nella categoria $\mathscr{C}$. Ora provo che Δ_3 è un pullback di (h, g). La commutatività discende direttamente da $g \circ i_g = 0$. Siano $v : X \to B$ e $w : X \to A$ frecce di $\mathscr{C}$ tali che $g \circ v = h \circ w$. Allora

$$g \circ (v - f \circ w) = 0\,.$$

La proprietà universale di i_g implica l'esistenza di un unico φ in $\mathrm{Hom}_{\mathscr{C}}(X, K')$ che verifica l'uguaglianza

$$v - f \circ w = i_g \circ \varphi\,.$$

Si definisce

$$\psi := \varepsilon_1 \circ w + \varepsilon_2 \circ \varphi\,.$$

Si ha

$$\pi_1 \circ \psi = \pi_1 \circ \varepsilon_1 \circ w + \pi_1 \circ \varepsilon_2 \circ \varphi =$$

$$= w + 0 = w$$

e

$$(f \circ \pi_1 + i_g \circ \pi_2) \circ \psi =$$

$$= f \circ w + i_g \circ \varphi = v\,.$$

Sia $\theta : X \to A \oplus K'$ una freccia che soddisfa le uguaglianze

$$\begin{cases} \pi_1 \circ \theta = w \\ \\ (f \circ \pi_1 + i_g \circ \pi_2) \circ \theta = v\,. \end{cases}$$

Allora

$$\theta = \mathrm{id}_{A \oplus K'} \circ \theta =$$

$$= \varepsilon_1 \circ \pi_1 \circ \theta + \varepsilon_2 \circ \pi_2 \circ \theta =$$

$$= \varepsilon_1 \circ w + \varepsilon_2 \circ \pi_2 \circ \theta$$

e

$$i_g \circ \pi_2 \circ \theta = v - f \circ w =$$

$$= i_g \circ \varphi\,.$$

E pertanto $\pi_2 \circ \theta = \varphi$, dal carattere mono di i_g. Quindi $\theta = \psi$. Questo implica che Δ_3 è un pullback di (h, g) in $\mathscr{C}$. Allora $f \circ \pi_1 + i_g \circ \pi_2$ è epi stretto di $\mathscr{C}$, per la quasi-abelianità di $\mathscr{C}$ e per il carattere strettamente epi di h.

Essendo $h = g \circ f$ un epi, si trova che g è epi. Ora provo che g è conucleo di i_g in $\mathscr{C}$. Sia $\eta : B \to E$ morfismo di $\mathscr{C}$ tale che $\eta \circ i_g = 0$. La commutatività di Δ_1 implica

$$\eta \circ f \circ i_h = \eta \circ i_g \circ \beta = 0\,.$$

Il carattere strettamente epi di h implica l'esistenza di un unico morfismo σ in $\mathscr{C}$ tale che $\eta \circ f = \sigma \circ h$. Allora

$$(\star_1) \quad (\eta - \sigma \circ g) \circ f = 0\,.$$

Vale l'uguaglianza

$$(\star_2) \quad (\eta - \sigma \circ g) \circ i_g = 0\,.$$

Le uguaglianze $(\star_1)$ e $(\star_2)$ implicano

$$(\eta - \sigma \circ g) \circ (f \circ \pi_1 + i_g \circ \pi_2) = 0\,.$$

Il carattere epi di $f \circ \pi_1 + i_g \circ \pi_2$ implica $\eta = \sigma \circ g$. □

Lemma 2.9. Siano $\mathscr{C}$ una categoria quasi-abeliana, $f : A \to B$ e $g : B \to C$ morfismi di $\mathscr{C}$ tali che $g \circ f$ è monomorfismo stretto di $\mathscr{C}$. Allora f è monomorfismo stretto di $\mathscr{C}$.

Dimostrazione. Si dualizza la prova del Lemma 2.8. □

Teorema 2.10. Per ogni categoria quasi-abeliana $\mathscr{C}$ la coppia $(\mathscr{C}, \mathcal{M}(\mathscr{C}))$ è una categoria esatta.

Dimostrazione.

(EX0): chiaro.

(EX0$^{\mathrm{op}}$): chiaro.

(EX1): segue dai Lemmi 2.6 e 1.34.

(EX1$^{\mathrm{op}}$): segue dai Lemmi 2.7 e 1.33.

(EX2): segue dalla definizione di categoria quasi-abeliana e dal Lemma 1.34.

(EX2$^{\mathrm{op}}$): segue dalla definizione di categoria quasi-abeliana e dal Lemma 1.33.

(CLUI): è sufficiente svolgere una calcolo diretto.

□

2.1 Esempi di categorie quasi-abeliane

In questa sezione si vede qualche esempio di categoria quasi-abeliana e non abeliana.

2.1.1 Esempio algebrico

Siano $\mathcal{F}$ e $\mathcal{T}$ le sottocategorie piene di $\mathcal{A}b$ avente per oggetti rispettivamente:

- tutti e soli i gruppi abeliani senza torsione;
- tutti e soli i gruppi abeliani di torsione.

Lemma 2.11. La coppia $(\mathcal{T}, \mathcal{F})$ è di torsione in $\mathcal{A}b$.

Dimostrazione. Omessa. Per una dimostrazione vedere [SB21], ad esempio. □

Corollario 2.12. La categoria $\mathcal{F}$ è quasi-abeliana.

Dimostrazione. Discende dal Capitolo 8 e dal Lemma 2.11. □

Proposizione 2.13. La categoria $\mathcal{F}$ non è abeliana.

Dimostrazione. Sia $f : \mathbb{Z} \to \mathbb{Z}$ il morfismo di $\mathcal{A}b$ definito ponendo $f(x) := 2x$, per ogni x in $\mathbb{Z}$. Si può dimostrare che f è mono ed epi in $\mathcal{F}$. La freccia f non è iso in $\mathcal{F}$, perché $\mathrm{Im}(f) \neq \mathbb{Z}$. Questo implica la non abelianità di $\mathcal{F}$. □

L'esistenza dei gruppi abeliani liberi implica che $\mathcal{F}$ è sottocategoria generante di $\mathcal{A}b$. Si può inoltre dimostrare che $(\mathcal{T}, \mathcal{F})$ è una coppia di torsione *ereditaria*, (Cfr. Capitolo 8). E pertanto, la sezione 8.5 implica che $\mathcal{T}$ è una categoria abeliana.

2.1.2 Esempio topologico

In questa sottosezione indico con $\mathscr{C}$ la categoria dei gruppi abeliani topologici, di Hausdorff e localmente compatti.

Proposizione 2.14. La categoria $\mathscr{C}$ è quasi-abeliana.

Dimostrazione. Omessa. Per la dimostrazione vedere [RO1], ad esempio. □

Lemma 2.15. La categoria $\mathscr{C}$ non è abeliana.

Dimostrazione. Si può provare che la freccia

$$i : (\mathbb{Q}, \tau_{\mathbb{Q}}) \longrightarrow (\mathbb{R}, \tau_{\mathbb{R}})$$

$$x \longmapsto x$$

è mono ed epi in $\mathscr{C}$, ma non iso. E pertanto $\mathscr{C}$ non è abeliana. □

2.1.3 Esempio analitico

Sia Ban la totalità definita ponendo:

- Ob(Ban) come la classe di tutti e soli gli spazi di Banach su $\mathbb{R}$;
- Ar(Ban) come la collezione di tutte le mappe lineari e continue tra spazi di Banach;
- la composizione, le identità e le uguaglianze le stesse di Set.

Teorema 2.16. La collezione Ban è una categoria ben definita e quasi-abeliana.

Dimostrazione. Omessa. Vedere la dimostrazione della Proposizione 3.1.7. in [PROS1], ad esempio. □

Proposizione 2.17. La categoria Ban non è abeliana.

Dimostrazione. Si consideri il morfismo

$$\varphi : (\ell^2, \|\cdot\|_{\ell^2}) \longrightarrow (\ell^2, \|\cdot\|_{\ell^2})$$

$$\left(a_n\right)_{n\in\mathbb{N}_{\geq 1}} \longmapsto \left(\frac{a_n}{n}\right)_{n\in\mathbb{N}_{\geq 1}}$$

in Ban. Si può provare che φ è mono, epi e non iso in Ban. Allora Ban non è una categoria abeliana. Per una dimostrazione completa vedere [PTH1] e [PDL1], ad esempio. □

2.2 Sequenze in categorie preadditive

Definizione 2.18 (Zero-sequenza). Siano $\mathscr{C}$ una categoria preadditiva con oggetto zero e $\sigma :\ A \xrightarrow{f} B \xrightarrow{g} C$ una successione di morfismi in $\mathscr{C}$. Allora σ si dice *zero-sequenza* se e solo se $g \circ f = 0$.

Definizione 2.19 (Zero-sequenza generale). Siano $\mathscr{C}$ una categoria preadditiva con oggetto zero, j in $\mathbb{Z}$ e $\sigma : (f^i : X^i \to X^{i+1})_{i\in\mathbb{Z}}$ una successione di morfismi in $\mathscr{C}$. Allora σ si dice:

- *zero-sequenza al grado j* se e solo se (f^{j-1}, f^j) è una zero-sequenza,
- *zero-sequenza* oppure *complesso di $\mathscr{C}$* se e solo se (f^{i-1}, f^i) è una zero-sequenza, per ogni i in $\mathbb{Z}$.

2.2.1 Esattezza e co-esattezza di sequenze

Definizione 2.20 (Sequenza spezzante). Sia $\mathscr{C}$ una categoria additiva. Una sequenza

$$\sigma : \; 0 \longrightarrow A \xrightarrow{f} B \xrightarrow{g} C \longrightarrow 0$$

si dice *spezzante* se e solo se esiste un isomorfismo $\psi : B \to A \oplus C$ di $\mathscr{C}$ che rende il diagramma

$$\begin{tikzcd}
\Delta : \; 0 \arrow[r] & A \arrow[r, "f"] \arrow[d, equal, "\mathrm{id}_A"'] & B \arrow[r, "g"] \arrow[d, "\psi"'] & C \arrow[r] \arrow[d, equal, "\mathrm{id}_C"] & 0 \\
0 \arrow[r] & A \arrow[r, "\varepsilon_A"'] & A \oplus C \arrow[r, "\pi_C"'] & C \arrow[r] & 0
\end{tikzcd}$$

commutativo. La riga $(0, \varepsilon_A, \pi_C, 0)$ del diagramma Δ è la somma diretta esplicita di (A, C).

Definizione 2.21 (Sequenza fortemente esatta). Sia $\mathscr{C}$ una categoria preadditiva con oggetto zero. Una sequenza $\sigma : \; A \xrightarrow{f} B \xrightarrow{g} C$ si dice *fortemente esatta* se e solo se per ogni X oggetto di $\mathscr{C}$ la sequenza

$$\mathrm{Hom}_{\mathscr{C}}(X, \sigma) : \; \mathrm{Hom}_{\mathscr{C}}(X, A) \xrightarrow{\mathrm{Hom}_{\mathscr{C}}(X,f)} \mathrm{Hom}_{\mathscr{C}}(X, B) \xrightarrow{\mathrm{Hom}_{\mathscr{C}}(X,g)} \mathrm{Hom}_{\mathscr{C}}(X, C)$$

è esatta nella categoria $\mathcal{A}b$.

Definizione 2.22 (Sequenza fortemente esatta generale). Siano $\mathscr{C}$ una categoria preadditiva con oggetto zero, j in $\mathbb{Z}$ e $\sigma : (f^i : X^i \to X^{i+1})_{i \in \mathbb{Z}}$ una successione di morfismi in $\mathscr{C}$. Allora σ si dice:

- *fortemente esatta al grado j* se e solo se (f^{j-1}, f^j) è fortemente esatta,
- *fortemente esatta* se e solo se (f^{i-1}, f^i) è una fortemente esatta, per ogni i in $\mathbb{Z}$.

Lemma 2.23. Siano $\mathscr{C}$ una categoria preadditiva con oggetto zero, A e B oggetti di $\mathscr{C}$ ed u in $\mathrm{Hom}_{\mathscr{C}}(A, B)$. Allora la successione

$$0 \longrightarrow A \xrightarrow{u} B$$

è fortemente esatta se e solo se u è mono in $\mathscr{C}$.

Lemma 2.24. Siano $\mathscr{C}$ una categoria preadditiva con oggetto zero, B e C oggetti di $\mathscr{C}$ ed v in $\mathrm{Hom}_{\mathscr{C}}(B,C)$. Allora la successione

$$B \xrightarrow{v} C \longrightarrow 0$$

è fortemente esatta se e solo se v è uno split epi di $\mathscr{C}$.

Lemma 2.25. Siano $\mathscr{C}$ una categoria pre-additiva con oggetto zero e

$$\sigma :\ 0 \longrightarrow A \xrightarrow{u} B \xrightarrow{v} C$$

una successione di morfismi in $\mathscr{C}$. Allora σ è fortemente esatta se e solo se u è nucleo di v in $\mathscr{C}$.

Lemma 2.26. Siano $\mathscr{C}$ una categoria pre-abeliana e $\sigma :\ A \xrightarrow{f} B \xrightarrow{g} C$ una zero-sequenza. Allora σ è fortemente esatta se e solo se la successione canonica

$$0 \longrightarrow \mathrm{Ker}(f) \longrightarrow A \longrightarrow \mathrm{Ker}(g) \longrightarrow 0$$

è fortemente esatta.

Dimostrazione. Indico con

- $i_f : \mathrm{Ker}(f) \to A$ un nucleo di f;
- $i_g : \mathrm{Ker}(g) \to B$ un nucleo di g;
- $u : A \to \mathrm{Ker}(g)$ l'unico morfismo che soddisfa l'uguaglianza $i_g \circ u = f$.

$\Rightarrow$: ora si prova che i_f è un nucleo di u. Si ha

$$i_g \circ u \circ i_f = f \circ i_f = 0\,.$$

Il carattere mono di i_g implica $u \circ i_f = 0$. Sia $\theta : X \to A$ tale che $u \circ \theta = 0$. Allora $f \circ \theta = 0$. Deduco l'asserto dalla proprietà universale di i_f.

Il Lemma 2.25 implica la forte esattezza della sequenza

$$\sigma_1 :\ 0 \longrightarrow \mathrm{Ker}(f) \xrightarrow{i_f} A \xrightarrow{u} \mathrm{Ker}(g)\ .$$

Siano X in $\mathrm{Ob}(\mathscr{C})$ e v in $\mathrm{Hom}_{\mathscr{C}}(X, \mathrm{Ker}(g))$. Allora

$$g_*(i_g \circ v) = g \circ i_g \circ v = 0\,.$$

E pertanto esiste φ in $\mathrm{Hom}_{\mathscr{C}}(X, A)$ tale che $f \circ \varphi = i_g \circ v$, per le ipotesi. La definizione di u ed il carattere mono di i_g implicano

$$v = u \circ \varphi = u_*(\varphi)\,.$$

$\Leftarrow$: siano X in $\mathrm{Ob}(\mathscr{C})$ e ψ in $\mathrm{Hom}_{\mathscr{C}}(X, B)$ tale che $g \circ \psi = 0$. Allora esiste una unica freccia α tale che $\psi = i_g \circ \alpha$, per la proprietà universale di i_g. Le ipotesi implicano che la successione

$$\sigma_2 :\ 0 \longrightarrow \mathrm{Hom}_{\mathscr{C}}(X, \mathrm{Ker}(f)) \xrightarrow{i_{f,*}} \mathrm{Hom}_{\mathscr{C}}(X, A) \xrightarrow{u_*} \mathrm{Hom}_{\mathscr{C}}(X, \mathrm{Ker}(g)) \longrightarrow 0$$

è esatta in $\mathcal{A}b$. Essendo α in $\mathrm{Hom}_{\mathscr{C}}(X, \mathrm{Ker}(g))$, esiste β in $\mathrm{Hom}_{\mathscr{C}}(X, A)$ tale che $\alpha = u \circ \beta$. Allora

$$\psi = i_g \circ u \circ \beta = f \circ \beta\,.$$

L'arbitrarietà di X e ψ implica la tesi. □

Definizione 2.27 (**Sequenza fortemente co-esatta**)**.** Sia $\mathscr{C}$ una categoria preadditiva con oggetto zero. Una sequenza $\sigma :\ A \xrightarrow{f} B \xrightarrow{g} C$ si dice *fortemente co-esatta* se e solo se per ogni X oggetto di $\mathscr{C}$ la sequenza

$$\mathrm{Hom}_{\mathscr{C}}(\sigma, X) :\ \mathrm{Hom}_{\mathscr{C}}(C, X) \xrightarrow{\mathrm{Hom}_{\mathscr{C}}(g,X)} \mathrm{Hom}_{\mathscr{C}}(B, X) \xrightarrow{\mathrm{Hom}_{\mathscr{C}}(f,X)} \mathrm{Hom}_{\mathscr{C}}(A, X)$$

è esatta nella categoria dei gruppi abeliani.

Definizione 2.28 (**Sequenza fortemente co-esatta generale**)**.** Siano $\mathscr{C}$ una categoria preadditiva con oggetto zero, j in $\mathbb{Z}$ e $\sigma : (f^i : X^i \to X^{i+1})_{i \in \mathbb{Z}}$ una successione di morfismi in $\mathscr{C}$. Allora σ si dice:

- *fortemente co-esatta al grado* j se e solo se (f^{j-1}, f^j) è fortemente co-esatta,
- *fortemente co-esatta* se e solo se (f^{i-1}, f^i) è una fortemente co-esatta, per ogni i in $\mathbb{Z}$.

Lemma 2.29. Siano $\mathscr{C}$ una categoria preadditiva con oggetto zero, A e B oggetti di $\mathscr{C}$ ed u in $\mathrm{Hom}_{\mathscr{C}}(A, B)$. Allora la successione

$$0 \longrightarrow A \xrightarrow{u} B$$

è fortemente co-esatta se e solo se u è uno split mono in $\mathscr{C}$.

Lemma 2.30. Siano $\mathscr{C}$ una categoria preadditiva con oggetto zero, B e C oggetti di $\mathscr{C}$ ed v in $\mathrm{Hom}_{\mathscr{C}}(B, C)$. Allora la successione

$$B \xrightarrow{v} C \longrightarrow 0$$

è fortemente co-esatta se e solo se v è epi in $\mathscr{C}$.

Lemma 2.31. Siano $\mathscr{C}$ una categoria preadditiva con oggetto zero e

$$\sigma: \ A \xrightarrow{u} B \xrightarrow{v} C \longrightarrow 0$$

una successione di morfismi in $\mathscr{C}$. Allora σ è fortemente co-esatta se e solo se v è co-nucleo di u in $\mathscr{C}$.

Proposizione 2.32. Siano $\mathscr{C}$ una categoria additiva e

$$\sigma: \ 0 \longrightarrow A \xrightarrow{f} B \xrightarrow{g} C \longrightarrow 0$$

una successione di morfismi in $\mathscr{C}$. Allora le seguenti affermazioni sono equivalenti:

(1) la sequenza σ è spezzante;

(2) σ è fortemente esatta;

(3) σ è fortemente co-esatta;

(4) (f, g) è una coppia nucleo-conucleo di $\mathscr{C}$ ed esiste $u : B \to A$ tale che $u \circ f = \mathrm{id}_A$;

(5) (f, g) è una coppia nucleo-conucleo di $\mathscr{C}$ ed esiste $v : C \to B$ tale che $g \circ v = \mathrm{id}_C$.

Dimostrazione.

(1) $\Rightarrow$ (2): le ipotesi implicano l'esistenza di un isomorfismo θ in $\mathscr{C}$ che rende il diagramma

$$\begin{tikzcd}
\Delta_1 : \ 0 \arrow[r] & A \arrow[r, "f"] \arrow[d, equal, "\mathrm{id}_A"'] & B \arrow[r, "g"] \arrow[d, dotted, "\theta"'] & C \arrow[r] \arrow[d, equal, "\mathrm{id}_C"] & 0 \\
0 \arrow[r] & A \arrow[r, "\varepsilon_A"'] & A \oplus C \arrow[r, "\pi_C"'] & C \arrow[r] & 0
\end{tikzcd}$$

commutativo.

Sia X un oggetto di $\mathscr{C}$. La commutatività di Δ_1 implica la commutatività di

$$\begin{tikzcd}
\Delta_2 : 0 \arrow[r] & \mathrm{Hom}_{\mathscr{C}}(X,A) \arrow[r, "f_*"] \arrow[d, equal, "\mathrm{id}"'] & \mathrm{Hom}_{\mathscr{C}}(X,B) \arrow[r, "g_*"] \arrow[d, dotted, "\theta_*"'] & \mathrm{Hom}_{\mathscr{C}}(X,C) \arrow[r] \arrow[d, equal, "\mathrm{id}"] & 0 \\
0 \arrow[r] & \mathrm{Hom}_{\mathscr{C}}(X,A) \arrow[r, "\varepsilon_{A,*}"'] & \mathrm{Hom}_{\mathscr{C}}(X,A\oplus C) \arrow[r, "\pi_{C,*}"'] & \mathrm{Hom}_{\mathscr{C}}(X,C) \arrow[r] & 0
\end{tikzcd}$$

Ora dimostro che la riga inferiore di Δ_2 è esatta in $\mathcal{A}b$.

Essendo $\pi_A \circ \varepsilon_A = \mathrm{id}_A$, si ottiene $\pi_{A,*} \circ \varepsilon_{A,*} = \mathrm{id}_{\mathrm{Hom}_{\mathscr{C}}(X,A)}$. Quindi $\varepsilon_{A,*}$ è mono in $\mathcal{A}b$.

Essendo ε_A un nucleo di π_C in $\mathscr{C}$, si trova $\mathrm{Ker}(\pi_{C,*}) = \mathrm{Im}(\varepsilon_{A,*})$.

Essendo $\pi_C \circ \varepsilon_C = \mathrm{id}_C$, si ottiene $\pi_{C,*} \circ \varepsilon_{C,*} = \mathrm{id}_{\mathrm{Hom}_{\mathscr{C}}(X,C)}$. Quindi $\pi_{C,*}$ è epi in $\mathcal{A}b$.

E pertanto la riga inferiore di Δ_2 è esatta nella categoria dei gruppi abeliani.

La freccia θ è un isomorfismo, allora θ_* è un isomorfismo di $\mathcal{A}b$. La commutatività di Δ_2, l'esattezza della sua riga inferiore ed il carattere iso di θ_* implicano l'esattezza della riga superiore di Δ_2. L'arbitrarietà di X implica che σ è una successione fortemente esatta di $\mathscr{C}$.

(2) $\Rightarrow$ (4): per ogni X oggetto di $\mathrm{Ob}(\mathscr{C})$ definisco η_X come la sequenza

$$0 \longrightarrow \mathrm{Hom}_{\mathscr{C}}(X,A) \xrightarrow{f_*} \mathrm{Hom}_{\mathscr{C}}(X,B) \xrightarrow{g_*} \mathrm{Hom}_{\mathscr{C}}(X,C) \longrightarrow 0$$

in $\mathcal{A}b$.

Le ipotesi implicano che η_X è una successione esatta di gruppi abeliani, per ogni X in $\mathrm{Ob}(\mathscr{C})$. Allora f è nucleo di g in $\mathscr{C}$.

L'esattezza di η_C implica l'esistenza di un morfismo $h : C \to B$ tale che $g \circ h = \mathrm{id}_C$. Allora

$$g_*(\mathrm{id}_B - h \circ g) = g - g \circ h \circ g = g - g = 0\,.$$

E pertanto l'esattezza di η_B implica l'esistenza di un unico morfismo $u : B \to A$ tale che

$$(\star_3) \quad \mathrm{id}_B - h \circ g = f \circ u\,.$$

Allora

$$f = \mathrm{id}_B \circ f = (\mathrm{id}_B - h \circ g) \circ f = f \circ u \circ f\,.$$

Essendo f mono si ottiene $u \circ f = \mathrm{id}_A$.

Ora provo che g è co-nucleo di f.

g epi: chiaro da $g \circ h = \mathrm{id}_C$.

Sia $\gamma : B \to Y$ morfismo tale che $\gamma \circ f = 0$. L'uguaglianza $(\star_3)$ implica

$$\gamma \circ (\mathrm{id}_B - h \circ g) = \gamma \circ f \circ u = 0\,.$$

E pertanto $\gamma = (\gamma \circ h) \circ g$. Il carattere epi di g implica il punto (4).

(4) $\Rightarrow$ (1): si definisce $r := \varepsilon_A \circ u + \varepsilon_C \circ g$. Allora il diagramma

$$\begin{tikzcd} \Delta_3 : & 0 \arrow[r] & A \arrow[r, "f"] \arrow[d, equal, "\mathrm{id}_A"'] & B \arrow[r, "g"] \arrow[d, dotted, "r"'] & C \arrow[r] \arrow[d, equal, "\mathrm{id}_C"] & 0 \\ & 0 \arrow[r] & A \arrow[r, "\varepsilon_A"'] & A \oplus C \arrow[r, "\pi_C"'] & C \arrow[r] & 0 \end{tikzcd}$$

commuta. La relazione $u \circ f = \mathrm{id}_A$ implica

$$(\mathrm{id}_B - f \circ u) \circ f = 0\,.$$

E pertanto esiste un unico morfismo $h : C \to B$ tale che

$$\mathrm{id}_B - f \circ u = h \circ g\,,$$

essendo g un co-nucleo di f. Si definisce $s := f \circ \pi_A + h \circ \pi_C$. Ora si prova che $r = s^{-1}$.

$$s \circ r = f \circ u + h \circ g = \mathrm{id}_B$$

per definizione di h.

Si calcola $u \circ h$.

$$u \circ h \circ g = u \circ (\mathrm{id}_B - f \circ u) =$$

$$= u - (u \circ f) \circ u = u - u = 0\,.$$

Allora ($\star_1$) $u \circ h = 0$, essendo g un epi.

Ora si determina $g \circ h$.

$$g \circ h \circ g = g \circ (\mathrm{id}_B - f \circ u) =$$

$$= g - (g \circ f) \circ u = g - 0 = g\,.$$

Allora ($\star_2$) $g \circ h = \mathrm{id}_C$, essendo g un epi.

Svolgendo un calcolo diretto, si trova

$$r \circ s = \mathrm{id}_{A \oplus C}$$

utilizzando le uguaglianze ($\star_1$) e ($\star_2$).

(1) $\Leftrightarrow$ (3) $\Leftrightarrow$ (5): si dualizza la prova appena svolta.

□

Definizione 2.33 (**Successione strettamente esatta**)**.** Siano $\mathscr{C}$ una categoria pre-abeliana e $\sigma\ :\ A \xrightarrow{f} B \xrightarrow{g} C$ una zero-successione di morfismi in $\mathscr{C}$. Allora σ si dice *sequenza strettamente esatta* se e solo se:

- il morfismo f è stretto;
- la freccia canonica da $\mathrm{Im}(f)$ a $\mathrm{Ker}(g)$ è un isomorfismo.

Definizione 2.34 (**Successione strettamente co-esatta**)**.** Siano $\mathscr{C}$ una categoria pre-abeliana e $\sigma\ :\ A \xrightarrow{f} B \xrightarrow{g} C$ una zero-successione di morfismi in $\mathscr{C}$. Allora σ si dice *sequenza strettamente co-esatta* se e solo se:

- il morfismo g è stretto;
- la freccia canonica da $\mathrm{Im}(f)$ a $\mathrm{Ker}(g)$ è un isomorfismo.

Definizione 2.35 (**Successione strettamente esatta generale**)**.** Siano $\mathscr{C}$ una categoria pre-abeliana, j in $\mathbb{Z}$ e $\sigma : (f^i : X^i \to X^{i+1})_{i \in \mathbb{Z}}$ una zero-successione di morfismi in $\mathscr{C}$. Allora σ si dice:

- *strettamente esatta al grado* j se e solo se (f^{j-1}, f^j) è strettamente esatta,
- *strettamente esatta* se e solo se (f^{i-1}, f^i) è una strettamente esatta, per ogni i in $\mathbb{Z}$.

Definizione 2.36 (**Successione strettamente co-esatta generale**)**.** Siano $\mathscr{C}$ una categoria pre-abeliana, j in $\mathbb{Z}$ e $\sigma : (f^i : X^i \to X^{i+1})_{i\in\mathbb{Z}}$ una zero-successione di morfismi in $\mathscr{C}$. Allora σ si dice:

- *strettamente co-esatta al grado* j se e solo se (f^{j-1}, f^j) è strettamente co-esatta,
- *strettamente co-esatta* se e solo se (f^{i-1}, f^i) è una strettamente co-esatta, per ogni i in $\mathbb{Z}$.

Lemma 2.37. Siano $\mathscr{C}$ una categoria pre-abeliana e

$$\xi :\ 0 \longrightarrow A \xrightarrow{f} B \xrightarrow{g} C \longrightarrow 0$$

una zero-sequenza in $\mathscr{C}$. Allora le seguenti affermazioni sono equivalenti:

(1) ξ è strettamente esatta;

(2) ξ è strettamente co-esatta;

(3) f è nucleo di g e g è co-nucleo di f in $\mathscr{C}$.

Dimostrazione.

(1) $\Rightarrow$ (3): la stretta esattezza della sequenza

$$0 \longrightarrow A \xrightarrow{f} B$$

implica che f è mono in $\mathscr{C}$. E pertanto $\mathrm{coker}(\ker(f))$ è un isomorfismo in $\mathscr{C}$.

La stretta esattezza della sequenza

$$A \xrightarrow{f} B \xrightarrow{g} C$$

implica che $\ker(\mathrm{coker}(f))$ è un nucleo di g e che $\overline{f}$ è iso. Tramite tutte le informazioni ricavate fino adesso e l'uguaglianza

$$f = \ker(\mathrm{coker}(f)) \circ \overline{f} \circ \mathrm{coker}(\ker(f))$$

si deduce che f è nucleo di g in $\mathscr{C}$. Si conclude tramite la stretta esattezza della sequenza

$$B \xrightarrow{g} C \longrightarrow 0\ .$$

(3) $\Rightarrow$ (1): i Lemmi 1.34 e 1.33 implicano che f e g sono morfismi stretti di $\mathscr{C}$. Si conclude osservando che f è mono e g è epi in $\mathscr{C}$.

(2) $\Leftrightarrow$ (3): simile alla prova di (1) $\Leftrightarrow$ (3).

$\square$

Lemma 2.38. Siano $\mathscr{C}$ una categoria pre-abeliana e $\sigma : A \xrightarrow{f} B \xrightarrow{g} C$ una zero-sequenza. Allora σ è strettamente esatta se e solo se la successione canonica

$$0 \longrightarrow \mathrm{Ker}(f) \longrightarrow A \longrightarrow \mathrm{Ker}(g) \longrightarrow 0$$

è strettamente esatta.

Dimostrazione. Siano i_f il nucleo di f, i_g il nucleo di g ed u la freccia definita dall'uguaglianza $i_g \circ u = f$.

$\Rightarrow$: La stretta esattezza di σ implica l'esistenza di un unico isomorfismo v di $\mathscr{C}$ che sodddisfa l'uguaglianza $i_g \circ v = \mathrm{ker}(\mathrm{coker}(f))$. La stretta esattezza della sequenza σ implica che $\overline{f}$ è un isomorfismo in $\mathscr{C}$. La fattorizzazione canonica di f implica $u = v \circ \overline{f} \circ \mathrm{coker}(\mathrm{ker}(f))$. Allora u è co-nucleo di i_f in $\mathscr{C}$.

Essendo i_g mono, $f = i_g \circ u$ ed i_f un nucleo di f si ottiene che i_f è nucleo di u in $\mathscr{C}$. Si ottiene la stretta esattezza di $(0, i_f, u, 0)$ tramite il Lemma 2.37.

$\Leftarrow$: il Lemma 2.37 implica che u è co-nucleo di i_f in $\mathscr{C}$. La fattorizzazione canonica di f implica l'esistenza di una unica freccia v tale che $\mathrm{ker}(\mathrm{coker}(f)) = i_g \circ v$. Allora

$$i_g \circ u = f =$$

$$= \mathrm{ker}(\mathrm{coker}(f)) \circ \overline{f} \circ \mathrm{coker}(\mathrm{ker}(f)) =$$

$$= i_g \circ v \circ \overline{f} \circ \mathrm{coker}(\mathrm{ker}(f))\,.$$

Allora $u = v \circ \overline{f} \circ \mathrm{coker}(\mathrm{ker}(f))$. Essendo u ed $\mathrm{coker}(\mathrm{ker}(f))$ co-nuclei di i_f si trova che $v \circ \overline{f}$ è un isomorfismo. E pertanto v è mono e split epi. Allora v ed $\overline{f}$ sono isomorfismi. Ora la dimostrazione è completa.

$\square$

Proposizione 2.39. Siano $\mathscr{C}$ una categoria pre-abeliana e $X^\bullet$ un oggetto di $\mathrm{Coch}(\mathscr{C})$. Allora le seguenti condizioni sono equivalenti:

(a) la sequenza $X^\bullet$ è fortemente esatta;

(b) la sequenza $X^\bullet$ è fortemente co-esatta;

(c) il complesso $X^\bullet$ è un oggetto zero di $\mathcal{K}(\mathscr{C})$.

Dimostrazione.

(a) $\Rightarrow$ (c): per ogni n in $\mathbb{Z}$ indico con $(K^n, \varepsilon_1^n, \varepsilon_2^n, \pi_1^n, \pi_2^n)$ il biprodotto esplicito di $(\mathrm{Ker}(d_X^n), \mathrm{Ker}(d_X^{n+1}))$ in $\mathscr{C}$. Si dimostra che $\mathrm{id}_{X^\bullet} \simeq 0$. Il Lemma 2.26 implica che la sequenza canonica

$$\sigma_n :\ 0 \longrightarrow \mathrm{Ker}(d_X^n) \xrightarrow{i_X^n} X^n \xrightarrow{\delta_X^n} \mathrm{Ker}(d_X^{n+1}) \longrightarrow 0$$

è fortemente esatta, per ogni n in $\mathbb{Z}$. La Proposizione 2.32 implica che per ogni n in $\mathbb{Z}$ esiste un isomorfismo $\psi_n : X^n \to K^n$ in $\mathscr{C}$ che rende il diagramma

$$\begin{tikzcd} \Delta_n :\ 0 \arrow[r] & \mathrm{Ker}(d_X^n) \arrow[r, "i_X^n"] \arrow[d, equal, "\mathrm{id}"'] & X^n \arrow[r, "\delta_X^n"] \arrow[d, dotted, "\psi_n"] & \mathrm{Ker}(d_X^{n+1}) \arrow[r] \arrow[d, equal, "\mathrm{id}"] & 0 \\ 0 \arrow[r] & \mathrm{Ker}(d_X^n) \arrow[r, "\varepsilon_1^n"'] & K^n \arrow[r, "\pi_2^n"'] & \mathrm{Ker}(d_X^{n+1}) \arrow[r] & 0 \end{tikzcd}$$

commutativo. Si definisce la famiglia di morfismi

$$\theta : X^\bullet \longrightarrow X^\bullet[-1]$$

ponendo

$$\theta^n := \left(\psi_{n-1}\right)^{-1} \circ \varepsilon_2^{n-1} \circ \pi_1^n \circ \psi_n$$

per ogni n in $\mathbb{Z}$.

Tramite un calcolo diretto si prova che θ soddisfa la condizione $\mathrm{id}_{X^\bullet} \simeq 0$. Questo è equivalente a dire che $X^\bullet$ è isomorfo all'oggetto zero di $\mathrm{Coch}(\mathscr{C})$ in $\mathcal{K}(\mathscr{C})$.

(c) $\Rightarrow$ (a): Le ipotesi implicano $\mathrm{id}_{X^\bullet} \simeq 0$. Allora per ogni n in $\mathbb{Z}$ esiste una freccia $\theta^n : X^n \to X^{n-1}$ che soddisfa l'uguaglianza

$$(\star_n) \quad \mathrm{id}_{X^n} = \theta^{n+1} \circ d_X^n + d_X^{n-1} \circ \theta^n \,.$$

Siano n in $\mathbb{Z}$ ed A un oggetto di $\mathscr{C}$. Si considera la sequenza

$$\sigma_n : \operatorname{Hom}_{\mathscr{C}}(A, X^{n-1}) \xrightarrow{\operatorname{Hom}_{\mathscr{C}}(A, d_X^{n-1})} \operatorname{Hom}_{\mathscr{C}}(A, X^n) \longrightarrow$$

$$\xrightarrow{\operatorname{Hom}_{\mathscr{C}}(A, d_X^{n})} \operatorname{Hom}_{\mathscr{C}}(A, X^{n+1})$$

nella categoria $\mathcal{A}b$. Ora si prova che σ_n è esatta.

$\operatorname{Im}(\operatorname{Hom}_{\mathscr{C}}(A, d_X^{n-1})) \subseteq \operatorname{Ker}(\operatorname{Hom}_{\mathscr{C}}(A, d_X^{n}))$: discende direttamente da $d_X^n \circ d_X^{n-1} = 0$.

$\operatorname{Ker}(\operatorname{Hom}_{\mathscr{C}}(A, d_X^{n})) \subseteq \operatorname{Im}(\operatorname{Hom}_{\mathscr{C}}(A, d_X^{n-1}))$: sia $f : A \to X^n$ un morfismo tale che $d_X^n \circ f = 0$. Ora provo l'uguaglianza

$$f = d_X^{n-1} \circ \theta^n \circ f\,.$$

L'uguaglianza $(\star_n)$ implica

$$f = \mathrm{id}_{X^n} \circ f =$$

$$= \theta^{n+1} \circ d_X^n \circ f + d_X^{n-1} \circ \theta^n \circ f =$$

$$= d_X^{n-1} \circ \theta^n \circ f\,.$$

E pertanto

$$f = d_X^{n-1} \circ \theta^n \circ f \in \operatorname{Im}(\operatorname{Hom}_{\mathscr{C}}(A, d_X^{n-1}))\,.$$

(b) $\Leftrightarrow$ (c): sia $(Y^\bullet, d_Y)$ l'oggetto di $\operatorname{Coch}(\mathscr{C}^{\mathrm{op}})$ definito ponendo

$$\begin{cases} Y^n := X^{-n} \\ \\ d_Y^n := \left(d_X^{-n-1}\right)^{\mathrm{op}} \end{cases}$$

per ogni n in $\mathbb{Z}$. Tramite le definizioni si dimostra che $(X^\bullet, d_X)$ è una sequenza fortemente co-esatta di $\mathscr{C}$ se e solo se $(Y^\bullet, d_Y)$ è fortemente esatta in $\mathscr{C}^{\mathrm{op}}$. Usando l'equivalenza (a) $\Leftrightarrow$ (c) sulla categoria $\mathscr{C}^{\mathrm{op}}$, si trova che $(Y^\bullet, d_Y)$ è fortemente esatta in $\mathscr{C}^{\mathrm{op}}$ se e solo se vale la relazione

$$\left(Y^\bullet, d_Y\right) \cong_{\mathcal{K}(\mathscr{C}^{\mathrm{op}})} 0_{\mathrm{Coch}(\mathscr{C}^{\mathrm{op}})} .$$

Un calcolo diretto mostra che vale l'equivalenza

$$\left(Y^\bullet, d_Y\right) \cong_{\mathcal{K}(\mathscr{C}^{\mathrm{op}})} 0_{\mathrm{Coch}(\mathscr{C}^{\mathrm{op}})} \quad \Longleftrightarrow \quad \left(X^\bullet, d_X\right) \cong_{\mathcal{K}(\mathscr{C})} 0_{\mathrm{Coch}(\mathscr{C})} .$$

□

Proposizione 2.40. Siano $\mathscr{C}$ una categoria quasi-abeliana e

$$\sigma_0 : \ A \xrightarrow{u} B \xrightarrow{v} C$$

una successione fortemente esatta in $\mathscr{C}$. Allora σ è strettamente esatta in $\mathscr{C}$.

Dimostrazione. Sia w il morfismo definito dall'uguaglianza

$$\ker(v) \circ w = u .$$

La Proposizione 2.26 implica che la sequenza

$$\sigma_1 : \ 0 \longrightarrow \mathrm{Ker}(u) \xrightarrow{\ker(u)} A \xrightarrow{w} \mathrm{Ker}(v) \longrightarrow 0$$

è fortemente esatta. Applicando il funtore covariante

$$\mathrm{Hom}_{\mathscr{C}}(\mathrm{Ker}(v), \_)$$

alla sequenza σ_1 si deduce l'esistenza di una freccia $r : \mathrm{Ker}(v) \to A$ tale che

$$w \circ r = \mathrm{id}_{\mathrm{Ker}(v)} .$$

Ora si prova che la freccia $\ker(\mathrm{coker}(u)) \circ \overline{u}$ è un nucleo di v in $\mathscr{C}$.

(MONO): essendo $\mathscr{C}$ una categoria quasi-abeliana, è sufficiente utilizzare il Lemma 2.4.

(KER1): discende dall'uguaglianza $v \circ u = 0$ e dal carattere epi di $\mathrm{coker}(\ker(u))$.

(KER2 debole): sia $f : X \to B$ tale che $v \circ f = 0$. La proprietà universale di $\ker(v)$ implica l'esistenza di un unico morfismo $h : X \to \mathrm{Ker}(v)$ tale che $\ker(v) \circ h = f$. Si ha

$$\ker(\mathrm{coker}(u)) \circ \overline{u} \circ \mathrm{coker}(\ker(u)) \circ r \circ h =$$

$$= u \circ r \circ h = \ker(v) \circ w \circ r \circ h =$$

$$= \ker(v) \circ h = f\,.$$

(KER2): discende dai tre punti precedenti.

La conclusione segue dall'unicità a meno di isomorfismo del nucleo di v. $\square$

2.3 Esattezza e co-esattezza di funtori

In questa sezione si presentano le definizioni di esatezza e co-esattezza di funtori tra categorie quasi-abeliane, e le proprietà principali di queste.

Definizione 2.41 (**Funtore esatto a sinistra**)**.** Siano $\mathscr{C}$ e $\mathscr{D}$ categorie quasi-abeliane, $F : \mathscr{C} \to \mathscr{D}$ un funtore additivo. Allora F si dice *esatto a sinistra* se e solo se per ogni successione strettamente esatta

$$0 \longrightarrow A \xrightarrow{\alpha} B \xrightarrow{\beta} C \longrightarrow 0$$

in $\mathscr{C}$, la successione

$$0 \longrightarrow F(A) \xrightarrow{F(\alpha)} F(B) \xrightarrow{F(\beta)} F(C)$$

è strettamente esatta in $\mathscr{D}$.

Proposizione 2.42. Siano $\mathscr{C}$ e $\mathscr{D}$ categorie quasi-abeliane, $F : \mathscr{C} \to \mathscr{D}$ un funtore additivo. Allora F è esatto a sinistra se e solo se $F(\mu)$ è nucleo di $F(\gamma)$ in $\mathscr{D}$, per ogni γ morfismo stretto e μ nucleo di γ in $\mathscr{C}$.

Definizione 2.43 (**Funtore fortemente esatto a sinistra**)**.** Siano $\mathscr{C}$ e $\mathscr{D}$ categorie quasi-abeliane, $F : \mathscr{C} \to \mathscr{D}$ un funtore additivo. Allora F si dice *fortemente esatto a sinistra* se e solo se per ogni successione strettamente esatta

$$0 \longrightarrow A \xrightarrow{\alpha} B \xrightarrow{\beta} C$$

in $\mathscr{C}$, la successione

$$0 \longrightarrow F(A) \xrightarrow{F(\alpha)} F(B) \xrightarrow{F(\beta)} F(C)$$

è strettamente esatta in $\mathscr{D}$.

Proposizione 2.44. Siano $\mathscr{C}$ e $\mathscr{D}$ categorie quasi-abeliane, $F : \mathscr{C} \to \mathscr{D}$ un funtore additivo. Allora F è fortemente esatto a sinistra se e solo se $F(\mu)$ è nucleo di $F(\gamma)$ in $\mathscr{D}$, per ogni γ morfismo e μ nucleo di γ in $\mathscr{C}$.

Definizione 2.45 (Funtore esatto a destra). Siano $\mathscr{C}$ e $\mathscr{D}$ categorie quasi-abeliane, $F : \mathscr{C} \to \mathscr{D}$ un funtore additivo. Allora F si dice *esatto a destra* se e solo se per ogni successione strettamente esatta

$$0 \longrightarrow A \xrightarrow{\alpha} B \xrightarrow{\beta} C \longrightarrow 0$$

in $\mathscr{C}$, la successione

$$F(A) \xrightarrow{F(\alpha)} F(B) \xrightarrow{F(\beta)} F(C) \longrightarrow 0$$

è strettamente co-esatta in $\mathscr{D}$.

Proposizione 2.46. Siano $\mathscr{C}$ e $\mathscr{D}$ categorie quasi-abeliane, $F : \mathscr{C} \to \mathscr{D}$ un funtore additivo. Allora F è esatto a destra se e solo se $F(\varepsilon)$ è co-nucleo di $F(\alpha)$ in $\mathscr{D}$, per ogni α morfismo stretto e ε co-nucleo di α in $\mathscr{C}$.

Definizione 2.47 (Funtore fortemente esatto a destra). Siano $\mathscr{C}$ e $\mathscr{D}$ categorie quasi-abeliane, $F : \mathscr{C} \to \mathscr{D}$ un funtore additivo. Allora F si dice *fortemente esatto a destra* se e solo se per ogni successione strettamente co-esatta

$$A \xrightarrow{\alpha} B \xrightarrow{\beta} C \longrightarrow 0$$

in $\mathscr{C}$, la successione

$$F(A) \xrightarrow{F(\alpha)} F(B) \xrightarrow{F(\beta)} F(C) \longrightarrow 0$$

è strettamente co-esatta in $\mathscr{D}$.

Proposizione 2.48. Siano $\mathscr{C}$ e $\mathscr{D}$ categorie quasi-abeliane, $F : \mathscr{C} \to \mathscr{D}$ un funtore additivo. Allora F è esatto a destra in senso forte se e solo se $F(\varepsilon)$ è co-nucleo di $F(\alpha)$ in $\mathscr{D}$, per ogni α morfismo e ε co-nucleo di α in $\mathscr{C}$.

Definizione 2.49 (Funtore regolare). Siano $\mathscr{C}$ e $\mathscr{D}$ categorie quasi-abeliane, $F : \mathscr{C} \to \mathscr{D}$ un funtore additivo. Allora F si dice *regolare* se e solo se $F(\gamma)$ è morfismo stretto in $\mathscr{D}$, per ogni γ morfismo stretto di $\mathscr{C}$.

Definizione 2.50 (Funtore regolarizzante). Siano $\mathscr{C}$ e $\mathscr{D}$ categorie quasi-abeliane, $F : \mathscr{C} \to \mathscr{D}$ un funtore additivo. Allora F si dice *regolarizzante* se e solo se $F(\gamma)$ è morfismo stretto in $\mathscr{D}$, per ogni γ morfismo in $\mathscr{C}$.

Definizione 2.51 (Funtore esatto). Siano $\mathscr{C}$ e $\mathscr{D}$ categorie quasi-abeliane, $F : \mathscr{C} \to \mathscr{D}$ un funtore additivo. Allora F si dice *esatto* se e solo se per ogni successione strettamente esatta

$$0 \longrightarrow A \xrightarrow{\alpha} B \xrightarrow{\beta} C \longrightarrow 0$$

in $\mathscr{C}$, la successione

$$0 \longrightarrow F(A) \xrightarrow{F(\alpha)} F(B) \xrightarrow{F(\beta)} F(C) \longrightarrow 0$$

è strettamente esatta in $\mathscr{D}$.

Proposizione 2.52. Siano $\mathscr{C}$ e $\mathscr{D}$ categorie quasi-abeliane, $F : \mathscr{C} \to \mathscr{D}$ un funtore additivo. Allora F è esatto se e solo se F è esatto sia a destra sia a sinistra.

Definizione 2.53 (Funtore strettamente esatto). Siano $\mathscr{C}$ e $\mathscr{D}$ categorie quasi-abeliane, $F : \mathscr{C} \to \mathscr{D}$ un funtore additivo. Allora F si dice *esatto in senso stretto* se e solo se per ogni successione strettamente esatta

$$A \xrightarrow{\alpha} B \xrightarrow{\beta} C$$

in $\mathscr{C}$, la successione

$$F(A) \xrightarrow{F(\alpha)} F(B) \xrightarrow{F(\beta)} F(C)$$

è strettamente esatta in $\mathscr{D}$.

Definizione 2.54 (Funtore strettamente co-esatto). Siano $\mathscr{C}$ e $\mathscr{D}$ categorie quasi-abeliane, $F : \mathscr{C} \to \mathscr{D}$ un funtore additivo. Allora F si dice *co-esatto in senso stretto* se e solo se per ogni successione strettamente co-esatta

$$A \xrightarrow{\alpha} B \xrightarrow{\beta} C$$

in $\mathscr{C}$, la successione

$$F(A) \xrightarrow{F(\alpha)} F(B) \xrightarrow{F(\beta)} F(C)$$

è strettamente co-esatta in $\mathscr{D}$.

Definizione 2.55 (**Funtore fortemente esatto**). Siano $\mathscr{C}$ e $\mathscr{D}$ categorie quasi-abeliane, $F : \mathscr{C} \to \mathscr{D}$ un funtore additivo. Allora F si dice *fortemente esatto* se e solo se è strettamente esatto e strettamente co-esatto.

Lemma 2.56. Siano $\mathscr{C}$ e $\mathscr{D}$ categorie quasi-abeliane, $F : \mathscr{C} \to \mathscr{D}$ un funtore additivo. Allora F è fortemente esatto se e solo se è fortemente esatto a sinistra e fortemente esatto a destra.

Notazione 2.57 (**Funtori applicati a sequenze**). *Siano $\mathscr{C}$ e $\mathscr{D}$ categorie quasi-abeliane, $F : \mathscr{C} \to \mathscr{D}$ un funtore additivo. Si supponga che*

$$\xi_1 : \ 0 \longrightarrow A \xrightarrow{f} B \xrightarrow{g} C \longrightarrow 0$$

$$\xi_2 : \ A \xrightarrow{h} B \xrightarrow{e} C \longrightarrow 0$$

$$\xi_3 : \ 0 \longrightarrow A \xrightarrow{\alpha} B \xrightarrow{\beta} C$$

$$\xi_4 : \ A \xrightarrow{\mu} B \xrightarrow{\nu} C$$

siano sequenze in $\mathscr{C}$. Allora si indicano con

$$F(\xi_1)$$

$$F(\xi_2)$$

$$F(\xi_3)$$

$$F(\xi_4)$$

rispettivamente le sequenze

$$0 \longrightarrow F(A) \xrightarrow{F(f)} F(B) \xrightarrow{F(g)} F(C) \longrightarrow 0$$

$$F(A) \xrightarrow{F(h)} F(B) \xrightarrow{F(e)} F(C) \longrightarrow 0$$

$$0 \longrightarrow F(A) \xrightarrow{F(\alpha)} F(B) \xrightarrow{F(\beta)} F(C)$$

$$F(A) \xrightarrow{F(\mu)} F(B) \xrightarrow{F(\nu)} F(C)$$

Definizione 2.58 (R **ed** L **esattezza a sinistra di funtori**)**.** Siano $\mathscr{C}$ e $\mathscr{D}$ categorie quasi-abeliane, $F : \mathscr{C} \to \mathscr{D}$ un funtore additivo. Allora F si dice:

- L L esatto a sinistra se e solo se per ogni sequenza $\xi : \ 0 \longrightarrow A \xrightarrow{f} B \xrightarrow{g} C$ strettamente esatta in $\mathscr{C}$, la sequenza $F(\xi)$ è strettamente esatta in $\mathscr{D}$;

- L R esatto a sinistra se e solo se per ogni sequenza $\xi : \ 0 \longrightarrow A \xrightarrow{f} B \xrightarrow{g} C$ strettamente esatta in $\mathscr{C}$, la sequenza $F(\xi)$ è strettamente co-esatta in $\mathscr{D}$;

- R L esatto a sinistra se e solo se per ogni sequenza $\xi : \ 0 \longrightarrow A \xrightarrow{f} B \xrightarrow{g} C$ strettamente co-esatta in $\mathscr{C}$, la sequenza $F(\xi)$ è strettamente esatta in $\mathscr{D}$;

- R R esatto a sinistra se e solo se per ogni sequenza $\xi : \ 0 \longrightarrow A \xrightarrow{f} B \xrightarrow{g} C$ strettamente co-esatta in $\mathscr{C}$, la sequenza $F(\xi)$ è strettamente co-esatta in $\mathscr{D}$.

Proposizione 2.59. Siano $\mathscr{C}$ e $\mathscr{D}$ categorie quasi-abeliane, $F : \mathscr{C} \to \mathscr{D}$ un funtore additivo. Allora F è:

- L L esatto a sinistra se e solo se è fortemente esatto a sinistra;

- L R esatto a sinistra se e solo se è fortemente esatto a sinistra e regolarizzante;

- R L esatto a sinistra se e solo se è esatto a sinistra;

- R R esatto a sinistra se e solo se è esatto a sinistra e regolare.

Lemma 2.60. Siano $\mathscr{C}$ e $\mathscr{D}$ categorie quasi-abeliane, $F : \mathscr{C} \to \mathscr{D}$ un funtore additivo. Allora F è:

- L L esatto a sinistra se e solo se è R L esatto a sinistra e per ogni m mono in $\mathscr{C}$ si ha che $F(m)$ è mono in $\mathscr{D}$;

- L R esatto a sinistra se e solo se è R R esatto a sinistra e per ogni m mono in $\mathscr{C}$ si ha che $F(m)$ è mono stretto in $\mathscr{D}$.

Definizione 2.61 (R **ed** L **esattezza a destra di funtori**)**.** Siano $\mathscr{C}$ e $\mathscr{D}$ categorie quasi-abeliane, $F : \mathscr{C} \to \mathscr{D}$ un funtore additivo. Allora F si dice:

- L L esatto a destra se e solo se per ogni sequenza $\xi :\ A \xrightarrow{f} B \xrightarrow{g} C \longrightarrow 0$ strettamente esatta in $\mathscr{C}$, la sequenza $F(\xi)$ è strettamente esatta in $\mathscr{D}$;

- L R esatto a destra se e solo se per ogni sequenza $\xi :\ A \xrightarrow{f} B \xrightarrow{g} C \longrightarrow 0$ strettamente esatta in $\mathscr{C}$, la sequenza $F(\xi)$ è strettamente co-esatta in $\mathscr{D}$;

- R L esatto a destra se e solo se per ogni sequenza $\xi :\ A \xrightarrow{f} B \xrightarrow{g} C \longrightarrow 0$ strettamente co-esatta in $\mathscr{C}$, la sequenza $F(\xi)$ è strettamente esatta in $\mathscr{D}$;

- R R esatto a destra se e solo se per ogni sequenza $\xi :\ A \xrightarrow{f} B \xrightarrow{g} C \longrightarrow 0$ strettamente co-esatta in $\mathscr{C}$, la sequenza $F(\xi)$ è strettamente co-esatta in $\mathscr{D}$.

Proposizione 2.62. Siano $\mathscr{C}$ e $\mathscr{D}$ categorie quasi-abeliane, $F : \mathscr{C} \to \mathscr{D}$ un funtore additivo. Allora F è:

- L L esatto a destra se e solo se è fortemente esatto a destra;

- L R esatto a destra se e solo se è fortemente esatto a destra e regolarizzante;

- R L esatto a destra se e solo se è esatto a destra;

- R R esatto a destra se e solo se è esatto a destra e regolare.

Lemma 2.63. Siano $\mathscr{C}$ e $\mathscr{D}$ categorie quasi-abeliane, $F : \mathscr{C} \to \mathscr{D}$ un funtore additivo. Allora F è:

- L L esatto a destra se e solo se è R L esatto a destra e per ogni e epi in $\mathscr{C}$ si ha che $F(e)$ è epi in $\mathscr{D}$;

- L R esatto a destra se e solo se è R R esatto a destra e per ogni e epi in $\mathscr{C}$ si ha che $F(e)$ è epi stretto in $\mathscr{D}$.

L'autore non ha trovato dimostrazioni del seguente Lemma, in alcuna fonte citata in Bibliografia.

Lemma 2.64. Siano:

- $\mathscr{C}$ una categoria quasi-abeliana;

- $\mathcal{A}$ una categoria abeliana;

- $F : \mathscr{C} \to \mathcal{A}$ un funtore pieno, fedele e strettamente esatto.

Allora per ogni successione

$$\sigma: \ A \xrightarrow{\alpha} B \xrightarrow{\beta} C$$

in $\mathscr{C}$, vale l'implicazione

$$(F(\alpha), F(\beta)) \text{ è esatta in } \mathcal{A} \quad \Longrightarrow \quad (\alpha, \beta) \text{ è strettamente esatta in } \mathscr{C}$$

Dimostrazione. Sia

$$\sigma: \ A \xrightarrow{\alpha} B \xrightarrow{\beta} C$$

una successione di morfismi in $\mathscr{C}$ tale che $(F(\alpha), F(\beta))$ è sequenza esatta in $\mathcal{A}$. Il Lemma 1.29 implica l'additività del funtore F.

Ora si prova che (α, β) è una zero-sequenza. Le ipotesi implicano che $(F(\alpha), F(\beta))$ è una zero-sequenza. Allora

$$F(\beta \circ \alpha) = F(\beta) \circ F(\alpha) = 0\,.$$

Il carattere fedele di F implica $\beta \circ \alpha = 0$.

Siano i_α un nucleo di α, e una co-immagine di α ed i_β un nucleo di β in $\mathscr{C}$.

La stretta esattezza di F implica che $F(i_\alpha)$ ed $F(i_\beta)$ sono nuclei in $\mathcal{A}$ rispettivamente di $F(\alpha)$ e $F(\beta)$. La relazione $\beta \circ \alpha = 0$ implica l'esistenza di una unica freccia $\gamma : \mathrm{Coim}(\alpha) \to \mathrm{Ker}(\beta)$ che rende il diagramma

$$\Delta_1 : \quad \begin{tikzcd} A \arrow[r, "\alpha"] \arrow[d, "e"'] & B \\ \mathrm{Coim}(\alpha) \arrow[r, dotted, "\gamma"'] & \mathrm{Ker}(\beta) \arrow[u, "i_\beta"'] \end{tikzcd}$$

commutativo in $\mathscr{C}$.

Ora si dimostra che $F(e)$ è una co-immagine di $F(\alpha)$ in $\mathcal{A}$. La pre-abelianità di $\mathscr{C}$ implica la stretta esattezza della successione

$$\sigma_1 : \ 0 \longrightarrow \mathrm{Ker}(\alpha) \xrightarrow{i_\alpha} A \xrightarrow{e} \mathrm{Coim}(\alpha) \longrightarrow 0$$

in $\mathscr{C}$. La stretta esattezza di F implica l'esattezza in $\mathcal{A}$ della successione

$$F(\sigma_1) : \ 0 \longrightarrow F(\mathrm{Ker}(\alpha)) \xrightarrow{F(i_\alpha)} F(A) \xrightarrow{F(e)} F(\mathrm{Coim}(\alpha)) \longrightarrow 0\ .$$

E pertanto $F(e)$ è co-immagine di $F(\alpha)$ in $\mathcal{A}$. Quindi l'uguaglianza $F(\alpha) = F(i_\beta) \circ F(\gamma) \circ F(e)$, le proprietà universali di $F(e)$ ed $F(i_\beta)$, l'esattezza di $(F(\alpha), F(\beta))$ in $\mathcal{A}$ implicano che $F(\gamma)$ è isomorfismo in $\mathcal{A}$. Allora il carattere pieno e fedele di F implica che γ è isomorfismo in $\mathscr{C}$. La commutatività di Δ_1 permette di dedurre la tesi. $\square$

Capitolo 3

Categorie Triangolate

Questo capitolo è dedicato ad una trattazione schematica e riassuntiva delle *Categorie Triangolate.* Viene presentato il materiale strettamente necessario per raggiungere l'obiettivo finale di questa tesi. Nell'argomentazione ci si appoggia a [KS2] ed [AY1].

3.1 Le categorie con traslazione

Definizione 3.1 (Categoria con Traslazione). Una *categoria con traslazione* è una coppia $(\mathscr{C}, (T, S, \eta, \xi))$ tale che:

- $\mathscr{C}$ è una categoria;
- (T, S, η, ξ) è una equivalenza di categorie di $\mathscr{C}$ in $\mathscr{C}$.

Il funtore T è detto *funtore di traslazione* oppure *funtore di sospensione.*

Definizione 3.2 (Sottocategoria con Traslazione). Sia $(\mathscr{C}, (T, S, \eta, \xi))$ una categoria con traslazione. Una *sottocategoria con traslazione di* $(\mathscr{C}, (T, S, \eta, \xi))$ è una coppia $(\mathscr{D}, (F, G, \alpha, \beta))$ tale che:

- $\mathscr{D}$ è sottocategoria di $\mathscr{C}$;
- (F, G, α, β) è una equivalenza di categorie di $\mathscr{D}$ in $\mathscr{D}$;
- $F(X) = T(X)$, $F(g) = T(g)$ per ogni (X, g) in $\mathrm{Ob}(\mathscr{D}) \times \mathrm{Ar}(\mathscr{D})$;
- $G(Y) = S(Y)$, $G(h) = S(h)$ per ogni (Y, h) in $\mathrm{Ob}(\mathscr{D}) \times \mathrm{Ar}(\mathscr{D})$;
- $\alpha_Z = \eta_Z$ e $\beta_Z = \xi_Z$, per ogni Z oggetto di $\mathscr{D}$.

Definizione 3.3 (Categoria additiva con Traslazione). Una *categoria additiva con traslazione* è una categoria con traslazione $(\mathscr{C}, (T, S, \eta, \xi))$ tale che:

- $\mathscr{C}$ è una categoria additiva.

Proposizione 3.4. Per ogni $(\mathscr{C}, (T, S, \eta, \xi))$ categoria additiva con traslazione, il funtore T è additivo.

Dimostrazione. Discende dal Lemma 1.29 e dall'implicazione (1) $\Rightarrow$ (2) della Proposizione 1.12. □

Definizione 3.5 (Categoria con Traslazione isomorfa). Una *categoria con traslazione isomorfa* è una coppia $(\mathscr{C}, (T, S, \eta, \xi))$ tale che:

- $\mathscr{C}$ è una categoria additiva;
- T è un isomorfismo di categorie di $\mathscr{C}$ in $\mathscr{C}$;
- S è il funtore inverso di T;
- $\eta = \xi = 1_{\mathrm{id}_{\mathscr{C}}}$.

Notazione 3.6. *Se $(\mathscr{C}, (T, S, \eta, \xi))$ è una categoria con traslazione, allora si indica il funtore S con T^{-1}. Nella notazione si sottointendono gli isomorfismi naturali η, ξ ed il funtore S. D'ora in poi si scriverà semplicemente: $(\mathscr{C}, T)$ è categoria con traslazione.*

Notazione 3.7. *Ogni categoria con traslazione isomorfa $(\mathscr{C}, (T, S, \eta, \xi))$, si denota semplicemente con* $\mathrm{Trasl}(\mathscr{C}, T)$.

Definizione 3.8 (Funtore con traslazione). Siano $(\mathscr{C}, (T, S, \eta, \xi))$ e $(\mathscr{D}, (L, R, \alpha, \beta))$ categorie con traslazione. Un *funtore tra categorie con traslazione* di $(\mathscr{C}, (T, S, \eta, \xi))$ in $(\mathscr{D}, (L, R, \alpha, \beta))$ è una coppia (F, γ) tale che:

- F è un funtore da $\mathscr{C}$ a $\mathscr{D}$;
- γ è un isomorfismo naturale da $F \circ T$ ad $L \circ F$.

Definizione 3.9 (Funtore additivo con traslazione). Siano $(\mathscr{C}, (T, S, \eta, \xi))$ e $(\mathscr{D}, (L, R, \alpha, \beta))$ categorie additive con traslazione. Un *funtore tra categorie additive con traslazione* di $(\mathscr{C}, (T, S, \eta, \xi))$ in $(\mathscr{D}, (L, R, \alpha, \beta))$ è una coppia (F, γ) tale che:

- (F, γ) è funtore tra categorie con traslazione di $(\mathscr{C}, (T, S, \eta, \xi))$ in $(\mathscr{D}, (L, R, \alpha, \beta))$;
- F è un funtore additivo da $\mathscr{C}$ a $\mathscr{D}$.

Definizione 3.10 (Triangolo in una categoria con traslazione). Sia $(\mathscr{C}, T)$ una categoria additiva con traslazione. Un *triangolo* in $(\mathscr{C}, T)$ è una successione

$$\sigma : \ A \xrightarrow{f} B \xrightarrow{g} C \xrightarrow{h} T(A)$$

di morfismi in $\mathscr{C}$.

Definizione 3.11 (Morfismo tra triangoli). Siano:

- $(\mathscr{C}, T)$ una categoria additiva con traslazione;
- $$\sigma : A \xrightarrow{f} B \xrightarrow{g} C \xrightarrow{h} T(A)$$

  e

  $$\tau : X \xrightarrow{\alpha} Y \xrightarrow{\beta} Z \xrightarrow{\gamma} T(X)$$

  triangoli in $(\mathscr{C}, T)$.

Un morfismo di triangoli da σ ad τ è una terna (u, v, w) tale che:

- $u \in \mathrm{Hom}_{\mathscr{C}}(A, X)$;
- $v \in \mathrm{Hom}_{\mathscr{C}}(B, Y)$;
- $w \in \mathrm{Hom}_{\mathscr{C}}(C, Z)$;
- il diagramma

$$\begin{tikzcd} A \arrow[r, "f"] \arrow[d, "u"'] & B \arrow[r, "g"] \arrow[d, "v"'] & C \arrow[r, "h"] \arrow[d, "w"'] & T(A) \arrow[d, "T(u)"] \\ X \arrow[r, "\alpha"'] & Y \arrow[r, "\beta"'] & Z \arrow[r, "\gamma"'] & T(X) \end{tikzcd}$$

  commuta in $\mathscr{C}$.

Lemma 3.12. Sia $(\mathscr{C}, T)$ una categoria additiva con traslazione. La categoria dei triangoli di $(\mathscr{C}, T)$ con oggetti tutti i triangoli di $(\mathscr{C}, T)$, con morfismi tutti i morfismi di triangoli, con la composizione e le identità indotte da $\mathscr{C}$, è una categoria ben definita.

Sia $(\mathscr{C}, T)$ una categoria additiva con traslazione. Si definisce $\Delta(\mathscr{C}, T)$ come la categoria dei triangoli di $(\mathscr{C}, T)$. Si consideri l'assegnazione

$$\widetilde{T} : \Delta(\mathscr{C}, T) \longrightarrow \Delta(\mathscr{C}, T)$$

$$(f, g, h) \in \mathrm{Ob}(\Delta(\mathscr{C}, T)) \longmapsto (T(f), T(g), T(h))$$

$$(\alpha, \beta, \gamma) \in \mathrm{Ar}(\Delta(\mathscr{C}, T)) \longmapsto (T(\alpha), T(\beta), T(\gamma))$$

Tramite le definizioni si prova che $(\Delta(\mathscr{C}, T), \widetilde{T})$ è una ben definita categoria additiva con traslazione.

Definizione 3.13. Siano:

- $\mathscr{C}$ una categoria additiva;
- $T : \mathscr{C} \to \mathscr{C}$ un funtore invertibile;
- $$\sigma_1 : \ A \xrightarrow{f} B \xrightarrow{h} C' \xrightarrow{\theta} T(A)$$

  $$\sigma_2 : \ A \xrightarrow{g \circ f} C \xrightarrow{\ell} B' \xrightarrow{\varphi} T(A)$$

  $$\sigma_3 : \ B \xrightarrow{g} C \xrightarrow{k} A' \xrightarrow{\lambda} T(B)$$

  e

  $$\sigma_4 : \ C' \xrightarrow{u} B' \xrightarrow{v} A' \xrightarrow{w} T(C')$$

  successioni di morfismi in $\mathscr{C}$.

Allora si scrive

$$\mathrm{DGOCT}(\sigma_1, \sigma_2, \sigma_3, \sigma_4)$$

se e solo se il diagramma

$$\begin{tikzcd}
A \arrow[r, "f"] \arrow[d, equal, "\mathrm{id}_A"'] & B \arrow[r, "h"] \arrow[d, "g"'] & C' \arrow[r, "\theta"] \arrow[d, "u"] & T(A) \arrow[d, equal, "\mathrm{id}_{T(A)}"] \\
A \arrow[r, "g \circ f"] \arrow[d, "f"'] & C \arrow[r, "\ell"] \arrow[d, equal, "\mathrm{id}_C"'] & B' \arrow[r, "\varphi"] \arrow[d, "v"] & T(A) \arrow[d, "T(f)"] \\
B \arrow[r, "g"] \arrow[d, "h"'] & C \arrow[r, "k"] \arrow[d, "\ell"'] & A' \arrow[r, "\lambda"] \arrow[d, equal, "\mathrm{id}_{A'}"'] & T(B) \arrow[d, "T(h)"] \\
C' \arrow[r, "u"'] & B' \arrow[r, "v"'] & A' \arrow[r, "w"'] & T(C')
\end{tikzcd}$$

commuta in $\mathscr{C}$.

3.2 Definizioni

Definizione 3.14 (Categoria Triangolata). Una *categoria triangolata* è una terna $(\mathscr{C}, T, \partial)$ in cui $\mathscr{C}$ è una categoria additiva, T è un automorfismo di $\mathscr{C}$ e ∂ è una sottocollezione di triangoli di $(\mathscr{C}, T)$ tale che:

(trcat1) per ogni a triangolo di $(\mathscr{C}, T)$ e $b \in \partial$ vale l'implicazione

$$a \cong b \implies a \in \partial;$$

(trcat2) per ogni A oggetto di $\mathscr{C}$ il triangolo

$$A \xrightarrow{\mathrm{id}_A} A \xrightarrow{0} 0 \xrightarrow{0} T(A)$$

appartiene a ∂;

(trcat3) per ogni $f : A \to B$ morfismo di $\mathscr{C}$ esiste un triangolo

$$A \xrightarrow{f} B \xrightarrow{g} C \xrightarrow{h} T(A)$$

appartenente a ∂;

(trcat4) per ogni triangolo

$$\sigma : \ A \xrightarrow{f} B \xrightarrow{g} C \xrightarrow{h} T(A)$$

di $(\mathscr{C}, T)$ vale la seguente condizione

$$\sigma \in \partial$$

se e solo se

$$B \xrightarrow{-g} C \xrightarrow{-h} T(A) \xrightarrow{-T(f)} T(B) \ \in \partial;$$

(trcat5) per ogni

$$\sigma : \ A \xrightarrow{f} B \xrightarrow{g} C \xrightarrow{h} T(A)$$

e

$$\tau : X \xrightarrow{\alpha} Y \xrightarrow{\beta} Z \xrightarrow{\gamma} T(X)$$

triangoli in ∂, $u : A \to X$ e $v : B \to Y$ morfismi in $\mathscr{C}$ tali che $\alpha \circ u = v \circ f$, esiste un morfismo $w : C \to Z$ in $\mathscr{C}$ che rende la terna (u, v, w) un morfismo di triangoli da σ a τ;

(trcat6) per ogni

$$\sigma_1 : A \xrightarrow{f} B \xrightarrow{h} C' \xrightarrow{\theta} T(A)$$

$$\sigma_2 : A \xrightarrow{g \circ f} C \xrightarrow{\ell} B' \xrightarrow{\varphi} T(A)$$

e

$$\sigma_3 : B \xrightarrow{g} C \xrightarrow{k} A' \xrightarrow{\lambda} T(B)$$

triangoli in ∂ esiste un triangolo in ∂ della forma

$$\sigma_4 : C' \xrightarrow{u} B' \xrightarrow{v} A' \xrightarrow{w} T(C')$$

tale che

$$\mathrm{DGOCT}(\sigma_1, \sigma_2, \sigma_3, \sigma_4)\,.$$

Notazione 3.15 (Triangoli distinti). *Quando si fissa una categoria triangolata $(\mathscr{C}, T, \delta)$, per ogni triangolo Δ di $(\mathscr{C}, T)$ si scrive*

$$\Delta \text{ \textit{è un} T. D.}$$

per intendere $\Delta \in \delta$. I triangoli di δ si dicono triangoli distinti.

3.3 Funtori tra categorie triangolate

Definizione 3.16 (Funtore triangolato). Siano $(\mathscr{C}, T, \delta)$ e $(\mathscr{D}, S, \partial)$ categorie triangolate. Un *funtore triangolato di $(\mathscr{C}, T, \delta)$ in $(\mathscr{D}, S, \partial)$* è una coppia (F, γ) tale che:

- (F, γ) è funtore tra categorie additive con traslazione di $\mathrm{Trasl}(\mathscr{C}, T)$ in $\mathrm{Trasl}(\mathscr{D}, S)$;

- $F(\Delta) \in \partial$, per ogni Δ in δ.

Definizione 3.17 (**Sottocategoria triangolata**). Sia $(\mathscr{C}, T, \delta)$ una categoria triangolata. Una *sottocategoria triangolata di* $(\mathscr{C}, T, \delta)$ è una terna $(\mathscr{D}, S, \partial)$ tale che:

- $\mathscr{D}$ è sottocategoria additiva di $\mathscr{C}$;
- $(\mathscr{D}, S)$ è sottocategoria con traslazione di $(\mathscr{C}, T)$;
- $(\mathscr{D}, S, \partial)$ è categoria triangolata;
- il funtore inclusione I di $\mathscr{D}$ in $\mathscr{C}$ è triangolato, munito della trasformazione naturale identica da $I \circ S$ a $T \circ I$.

Definizione 3.18 (**Sottocategoria chiusa per triangoli**). Sia $(\mathscr{C}, T, \partial)$ una categoria triangolata. Una *sottocategoria chiusa per triangoli di* $(\mathscr{C}, T, \partial)$ è una sottocategoria $\mathscr{D}$ di $\mathscr{C}$ tale che:

- $\mathscr{D}$ è sottocategoria additiva di $\mathscr{C}$;
- $\mathscr{D}$ è sottocategoria piena di $\mathscr{C}$;
- per ogni C in $\mathrm{Ob}(\mathscr{C})$ vale l'equivalenza

$$C \in \mathrm{Ob}(\mathscr{D}) \iff T(C) \in \mathrm{Ob}(\mathscr{D})$$

- per ogni triangolo

$$\sigma : A \xrightarrow{f} B \xrightarrow{g} C \xrightarrow{h} T(A)$$

  in ∂ tale che A e B sono oggetti di $\mathscr{D}$, si ha $C \in \mathrm{Ob}(\mathscr{D})$.

Lemma 3.19. Siano $(\mathscr{C}, T, \partial)$ una categoria triangolata e $\mathscr{D}$ un sottocategoria chiusa per triangoli di $(\mathscr{C}, T, \partial)$. Definisco S come il funtore T da $\mathscr{D}$ a $\mathscr{D}$ e θ come la sottocollezione dei triangoli di ∂ aventi tutti i termini in $\mathscr{D}$. Allora $(\mathscr{D}, S, \theta)$ è una sottocategoria triangolata di $(\mathscr{C}, T, \partial)$.

Dimostrazione. È una verifica diretta delle definizioni. □

Definizione 3.20 (**Funtore co-omologico**). Siano $\mathscr{D}$ una categoria abeliana, $(\mathscr{C}, T, \partial)$ una categoria triangolata ed $F : \mathscr{C} \to \mathscr{D}$ un funtore additivo. Allora si dice che F è un *funtore co-omologico* se e solo se per ogni triangolo

$$\sigma : A \xrightarrow{f} B \xrightarrow{g} C \xrightarrow{h} T(A)$$

in ∂ si ha che la sequenza

$$F(A) \xrightarrow{F(f)} F(B) \xrightarrow{F(g)} F(C)$$

è esatta in $\mathscr{D}$.

Definizione 3.21 (**Funtore controvariante co-omologico**)**.** Siano $\mathscr{D}$ una categoria abeliana, $(\mathscr{C}, T, \partial)$ una categoria triangolata ed $F : \mathscr{C} \to \mathscr{D}$ un funtore controvariante additivo. Allora si dice che F è un *funtore controvariante co-omologico* se e solo se per ogni triangolo

$$\sigma :\ A \xrightarrow{f} B \xrightarrow{g} C \xrightarrow{h} T(A)$$

in ∂ si ha che la sequenza

$$F(C) \xrightarrow{F(g)} F(B) \xrightarrow{F(f)} F(A)$$

è esatta in $\mathscr{D}$.

3.4 Alcune proprietà

Lemma 3.22. Siano $(\mathscr{C}, T, \partial)$ una categoria triangolata e

$$\sigma :\ A \xrightarrow{f} B \xrightarrow{g} C \xrightarrow{h} T(A)$$

un triangolo distinto. Allora $g \circ f = 0$.

Dimostrazione. L'assioma (trcat2) delle categorie triangolate implica che la sequenza

$$\theta :\ A \xrightarrow{\mathrm{id}_A} A \longrightarrow 0 \longrightarrow T(A)$$

è un triangolo distinto. Il diagramma

$$\begin{tikzcd} A \arrow[r, "\mathrm{id}_A"] \arrow[d, "\mathrm{id}_A"'] & A \arrow[d, "f"] \\ A \arrow[r, "f"'] & B \end{tikzcd}$$

è commutativo, allora l'assioma (trcat5) implica l'esistenza di un morfismo $u : 0 \to C$ che rende la terna (id_A, f, u) un morfismo di triangoli da θ a σ. E pertanto $u = 0$ e $g \circ f = u \circ 0 = 0$. $\square$

Dualmente si ottiene

Lemma 3.23. Siano $(\mathscr{C}, T, \partial)$ una categoria triangolata e

$$\sigma:\ A \xrightarrow{f} B \xrightarrow{g} C \xrightarrow{h} T(A)$$

un triangolo distinto. Allora $h \circ g = 0$.

Teorema 3.24 (della successione lunga in co-omologia). Siano $\mathscr{D}$ una categoria abeliana, $(\mathscr{C}, T, \partial)$ una categoria triangolata, $F : \mathscr{C} \to \mathscr{D}$ un funtore co-omologico e

$$\sigma:\ A \xrightarrow{f} B \xrightarrow{g} C \xrightarrow{h} T(A)$$

un triangolo in ∂. Allora la sequenza di morfismi

$$\cdots\cdots \longrightarrow F(T^n(A)) \xrightarrow{F(T^n(f))} F(T^n(B)) \xrightarrow{F(T^n(g))} (T^n(C)) \xrightarrow{F(T^n(h))}$$

$$\xrightarrow{F(T^n(h))} F(T^{n+1}(A)) \xrightarrow{F(T^{n+1}(f))} F(T^{n+1}(B)) \longrightarrow \cdots\cdots$$

con indice n in $\mathbb{Z}$, è esatta in $\mathscr{D}$.

Dimostrazione. Omessa. Vedere ad esempio la dimostrazione della Proposizione 5.2.6 in [AY1]. □

Proposizione 3.25. Siano $(\mathscr{C}, T, \partial)$ una categoria triangolata ed A in $\mathrm{Ob}(\mathscr{C})$. Allora:

(1) il funtore $\mathrm{Hom}_{\mathscr{C}}(\_\,, A)$ è controvariante co-omologico;

(2) il funtore $\mathrm{Hom}_{\mathscr{C}}(A, \_)$ è co-omologico.

Dimostrazione.

(1): sia

$$\sigma:\ A \xrightarrow{f} B \xrightarrow{g} C \xrightarrow{h} T(A)$$

un triangolo distinto ed X un oggetto di $\mathscr{C}$. Considero la sequenza

$$\mathrm{Hom}_{\mathscr{C}}(\sigma, X):\ \mathrm{Hom}_{\mathscr{C}}(C, X) \xrightarrow{g^*} \mathrm{Hom}_{\mathscr{C}}(B, X) \xrightarrow{f^*} \mathrm{Hom}_{\mathscr{C}}(A, X)$$

nella categoria $\mathcal{A}b$. Ora dimostro che $\mathrm{Hom}_{\mathscr{C}}(\sigma, X)$ è esatta in $\mathcal{A}b$.

$\mathrm{Im}(g^*) \subseteq \mathrm{Ker}(f^*)$: il Lemma 3.22 implica $g \circ f = 0$. Allora $\beta \circ g \circ f = 0$, per ogni β in $\mathrm{Hom}_{\mathscr{C}}(C, X)$.

$\mathrm{Ker}(f^*) \subseteq \mathrm{Im}(g^*)$: sia θ in $\mathrm{Ker}(f^*)$. Allora valgono le relazioni $\theta \in \mathrm{Hom}_{\mathscr{C}}(B, X)$, $\theta \circ f = 0$. Gli assiomi (trcat1), (trcat2) e (trcat4) implicano che la sequenza

$$\xi :\ T^{-1}(0) \longrightarrow X \xrightarrow{\mathrm{id}_X} X \longrightarrow 0$$

è un triangolo distinto. Essendo il diagramma

$$\begin{tikzcd} A \arrow[r, "f"] \arrow[d, "0"'] & B \arrow[d, "\theta"] \\ T^{-1}(0) \arrow[r, "0"'] & X \end{tikzcd}$$

commutativo, esiste un morfismo $u : C \to X$ tale che $(0, \theta, u)$ è un morfismo di triangoli da σ a ξ, per l'assioma (trcat5). E pertanto $\theta = u \circ g = g^*(f)$.

(2): simile a (1). Vedere ad esempio la dimostrazione della Proposizione 5.2.7 in [AY1].

□

Lemma 3.26. Siano $(\mathscr{C}, T, \partial)$ una categoria triangolata ed

$$\begin{tikzcd} A \arrow[r, "\alpha"] \arrow[d, "u"'] & B \arrow[r, "\beta"] \arrow[d, "v"'] & C \arrow[r, "\gamma"] \arrow[d, "w"'] & T(A) \arrow[d, "T(u)"'] \\ X \arrow[r, "f"'] & Y \arrow[r, "g"'] & Z \arrow[r, "h"'] & T(X) \end{tikzcd}$$

un morfismo di triangoli distinti. Se due tra le frecce verticali sono isomorfismi di $\mathscr{C}$, allora anche la rimanente gode della stessa proprietà.

Dimostrazione.

- u,w iso $\Rightarrow$ v iso: sia D un oggetto di $\mathscr{C}$. La Proposizione 3.25 implica che $\mathrm{Hom}_{\mathscr{C}}(D, \_\_)$ è un funtore co-omologico. Allora il diagramma

$$\begin{tikzcd} \Delta: \mathrm{Hom}_{\mathscr{C}}(D, C[-1]) \arrow[r, "\gamma[-1]_*"] \arrow[d, "w[-1]_*"'] & \mathrm{Hom}_{\mathscr{C}}(D, A) \arrow[r, "\alpha_*"] \arrow[d, "u_*"'] & \mathrm{Hom}_{\mathscr{C}}(D, B) \arrow[r, "\beta_*"] \arrow[d, "v_*"'] & \mathrm{Hom}_{\mathscr{C}}(D, C) \arrow[r, "\gamma_*"] \arrow[d, "w_*"'] & \mathrm{Hom}_{\mathscr{C}}(D, A[1]) \arrow[d, "u[1]_*"'] \\ \mathrm{Hom}_{\mathscr{C}}(D, Z[-1]) \arrow[r, "h[-1]_*"'] & \mathrm{Hom}_{\mathscr{C}}(D, X) \arrow[r, "f_*"'] & \mathrm{Hom}_{\mathscr{C}}(D, Y) \arrow[r, "g_*"'] & \mathrm{Hom}_{\mathscr{C}}(D, Z) \arrow[r, "h_*"'] & \mathrm{Hom}_{\mathscr{C}}(D, X[1]) \end{tikzcd}$$

è commutativo e tutte le sue righe sono esatte, per il **Teorema della successione lunga in co-omologia**.

Le ipotesi implicano che $w[-1]_*$, u_*, w_* e $u[1]_*$ sono isomorfismi. Utilizzando il **Lemma dei cinque** sul diagramma Δ, si trova che v_* è un isomorfismo in $\mathcal{A}b$. L'arbitrarietà di D ed un calcolo diretto mostrano che $(\mathrm{Hom}_{\mathscr{C}}(Y, v))^{-1}(\mathrm{id}_Y)$ è il morfismo inverso di v in $\mathscr{C}$.

- u,v iso $\Rightarrow$ w iso: simile a quanto appena svolto.
- v,w iso $\Rightarrow$ u iso: analogo al primo punto.

□

Lemma 3.27. Siano $(\mathscr{C}, T, \partial)$ una categoria triangolata e

$$\sigma: \ A \xrightarrow{f} B \xrightarrow{g} C \xrightarrow{h} T(A)$$

un triangolo distinto. Allora le seguenti affermazioni sono equivalenti:

(1) la freccia f è un isomorfismo di $\mathscr{C}$;

(2) C è un oggetto zero di $\mathscr{C}$.

Dimostrazione. L'assioma (trcat2) implica che la sequenza

$$\mu: \ B \xrightarrow{\mathrm{id}_B} B \longrightarrow 0 \longrightarrow B[1]$$

è un triangolo distinto.

(1) $\Rightarrow$ (2): Essendo $\mathrm{id}_B \circ f = \mathrm{id}_B \circ f$, l'assioma (trcat5) implica l'esistenza di un morfismo $u : C \to 0$ tale che (f, id_B, u) è un morfismo di triangoli da σ a μ. Essendo f e id_B isomorfismi, si ottiene che u è isomorfismo applicando il Lemma 3.26 alla terna (f, id_B, u). Tramite un calcolo diretto, si ottiene il punto (2).

(2) $\Rightarrow$ (1): Il diagramma

$$\begin{tikzcd} \Delta: A \arrow[r, "f"] \arrow[d, "f"'] & B \arrow[r, "g"] \arrow[d, "\mathrm{id}_B"'] & C \arrow[r, "h"] \arrow[d, "0"'] & T(A) \arrow[d, "T(f)"'] \\ B \arrow[r, "\mathrm{id}_B"'] & B \arrow[r] & 0 \arrow[r] & T(B) \end{tikzcd}$$

è commutativo in $\mathscr{C}$. Le ipotesi implicano che id_B e $0 : C \to 0$ sono isomorfismi. E pertanto applicando il Lemma 3.26 al diagramma Δ, si ottiene che f è isomorfismo in $\mathscr{C}$.

□

Dualizzando la dimostrazione si ottiene

Lemma 3.28. Siano $(\mathscr{C}, T, \partial)$ una categoria triangolata e

$$\sigma : \ A \xrightarrow{f} B \xrightarrow{g} C \xrightarrow{h} T(A)$$

un triangolo distinto. Allora le seguenti affermazioni sono equivalenti:

(1) la freccia g è un isomorfismo di $\mathscr{C}$;

(2) A è un oggetto zero di $\mathscr{C}$.

Lemma 3.29. Siano:

- $(\mathscr{C}, T, \partial)$ una categoria triangolata;
- A e B oggetti di $\mathscr{C}$;
- $(A \oplus B, \varepsilon_1, \varepsilon_2, \pi_1, \pi_2)$ un biprodotto di (A, B) in $\mathscr{C}$.

Allora

$$\theta : \ A \xrightarrow{\varepsilon_1} A \oplus B \xrightarrow{\pi_2} B \xrightarrow{0} T(A)$$

è un triangolo distinto.

Dimostrazione. L'assioma (trcat3) implica l'esistenza di un triangolo distinto

$$\rho : \ B[-1] \xrightarrow{0} A \xrightarrow{g} C \xrightarrow{h} B \ .$$

Sia D in $\mathrm{Ob}(\mathscr{C})$. La Proposizione 3.25 implica che $\mathrm{Hom}_{\mathscr{C}}(D, \_)$ è un funtore co-omologico. Allora utilizzando il **Teorema della successione lunga in co-omologia** sul triangolo ρ, si ottiene l'esattezza della successione

$$\mathrm{Hom}_{\mathscr{C}}(D, B[-1]) \xrightarrow{0} \mathrm{Hom}_{\mathscr{C}}(D, A) \xrightarrow{g_*} \mathrm{Hom}_{\mathscr{C}}(D, C) \xrightarrow{h_*}$$

$$\xrightarrow{h_*} \mathrm{Hom}_{\mathscr{C}}(D, B) \xrightarrow{0} \mathrm{Hom}_{\mathscr{C}}(D, A[1])$$

in $\mathcal{A}b$. Questo equivale a dire che la sequenza

$$0 \xrightarrow{0} \mathrm{Hom}_{\mathscr{C}}(D, A) \xrightarrow{g_*} \mathrm{Hom}_{\mathscr{C}}(D, C) \xrightarrow{h_*} \mathrm{Hom}_{\mathscr{C}}(D, B) \xrightarrow{0} 0$$

è esatta in $\mathcal{A}b$. L'arbitrarietà di D implica che la successione

$$0 \longrightarrow A \xrightarrow{g} C \xrightarrow{h} B \longrightarrow 0$$

è fortemente esatta in $\mathscr{C}$. Allora la Proposizione 2.32 implica l'esistenza di un isomorfismo $\psi : C \to A \oplus B$ di $\mathscr{C}$, che rende il diagramma

$$\begin{tikzcd} \Delta : 0 \arrow[r] & A \arrow[r, "g"] \arrow[d, equal, "\mathrm{id}_A"'] & C \arrow[r, "h"] \arrow[d, "\psi"] & B \arrow[r] \arrow[d, equal, "\mathrm{id}_B"] & 0 \\ 0 \arrow[r] & A \arrow[r, "\varepsilon_1"'] & A \oplus B \arrow[r, "\pi_2"'] & B \arrow[r] & 0 \end{tikzcd}$$

commutativo.

Gli assiomi (trcat1) e (trcat4) implicano che

$$\sigma : \; A \xrightarrow{g} C \xrightarrow{h} B \xrightarrow{0} A[1]$$

è un triangolo distinto, essendo ρ tale. La commutatività di Δ implica che $(\mathrm{id}_A, \psi, \mathrm{id}_B)$ è un isomorfismo di triangoli da σ a θ. Allora l'assioma (trcat1) implica la tesi. □

Lemma 3.30. Siano:

- $(\mathscr{C}, T, \partial)$ una categoria triangolata;
- $$A \xrightarrow{f} B \xrightarrow{g} C \xrightarrow{\alpha} T(A)$$

  e

  $$A \xrightarrow{f} B \xrightarrow{g} C \xrightarrow{\beta} T(A)$$

  triangoli distinti.

Si supponga che $\mathrm{Hom}_{\mathscr{C}}(T(A), C) = 0$. Allora $\alpha = \beta$.

Dimostrazione. Il diagramma

$$\begin{tikzcd} A \arrow[r, "f"] \arrow[d, "\mathrm{id}_A"'] & B \arrow[d, "\mathrm{id}_B"] \\ A \arrow[r, "f"'] & B \end{tikzcd}$$

commuta in $\mathscr{C}$. L'assioma (trcat5) implica l'esistenza di u in $\mathrm{End}_{\mathscr{C}}(C)$ che rende il diagramma

$$\Delta : \quad \begin{tikzcd} A \arrow[r, "f"] \arrow[d, "\mathrm{id}_A"'] & B \arrow[r, "g"] \arrow[d, "\mathrm{id}_B"'] & C \arrow[r, "\alpha"] \arrow[d, dotted, "u"'] & T(A) \arrow[d, "\mathrm{id}_{T(A)}"] \\ A \arrow[r, "f"'] & B \arrow[r, "g"'] & C \arrow[r, "\beta"'] & T(A) \end{tikzcd}$$

commutativo.

Gli assiomi (trcat1) e (trcat4) implicano che la sequenza

$$B \xrightarrow{g} C \xrightarrow{\alpha} T(A) \xrightarrow{-T(f)} T(B)$$

è un triangolo distinto. La Proposizione 3.25 implica che $\mathrm{Hom}_{\mathscr{C}}(\_\,, C)$ è funtore controvariante co-comologico. Allora la sequenza

$$\mathrm{Hom}_{\mathscr{C}}(T(A), C) \xrightarrow{\alpha^*} \mathrm{Hom}_{\mathscr{C}}(C, C) \xrightarrow{g^*} \mathrm{Hom}_{\mathscr{C}}(B, C)$$

è esatta in $\mathcal{A}b$. La commutatività di Δ implica $g^*(\mathrm{id}_C - u) = 0$. E pertanto esiste θ in $\mathrm{Hom}_{\mathscr{C}}(T(A), C)$ tale che $\mathrm{id}_C - u = \theta \circ \alpha$. Essendo $\mathrm{Hom}_{\mathscr{C}}(T(A), C) \cong 0$ per ipotesi, si ottiene $\theta = 0$. Allora $u = \mathrm{id}_C$. Infine

$$\beta = \beta \circ \mathrm{id}_C = \beta \circ u =$$

$$= \mathrm{id}_{T(A)} \circ \alpha = \alpha$$

per la commutatività di Δ. □

Si conclude il capitolo con una dimostrazione alternativa del Lemma 3.31. Questo lo si prova utilizzando solamente gli assiomi delle categorie triangolate, diversamente rispetto ad [AY1].

Lemma 3.31. Siano $(\mathscr{C}, T, \partial)$ una categoria triangolata e

$$\sigma : \ A \xrightarrow{f} B \xrightarrow{g} C \xrightarrow{h} T(A)$$

un triangolo distinto. Allora le seguenti affermazioni sono equivalenti:

(1) la freccia f è split mono di $\mathscr{C}$;

(2) $h = 0$.

Dimostrazione.

(1) $\Rightarrow$ (2): le assunzioni implicano l'esistenza di e in $\mathrm{Hom}_{\mathscr{C}}(B, A)$ tale che $e \circ f = \mathrm{id}_A$. Le ipotesi, gli assiomi (trcat1) e (trcat4) implicano che la sequenza

$$\sigma_1 : \ C[-1] \xrightarrow{h[-1]} A \xrightarrow{f} B \xrightarrow{-g} C$$

è un triangolo distinto. Allora $f \circ (h[-1]) = 0$, per il Lemma 3.22. Si deduce

$$h[-1] = \mathrm{id}_A \circ (h[-1]) =$$

$$= e \circ (f \circ (h[-1])) = 0\,.$$

Infine

$$h = (h[-1])[1] = 0\,.$$

(2) $\Rightarrow$ (1): le ipotesi, gli assiomi (trcat1) e (trcat4) implicano che la sequenza

$$\sigma_1 : \ C[-1] \xrightarrow{h[-1]} A \xrightarrow{f} B \xrightarrow{-g} C$$

è un triangolo distinto. Gli assiomi (trcat1) e (trcat2) implicano che la sequenza

$$0[-1] \xrightarrow{0} A \xrightarrow{\mathrm{id}_A} A \xrightarrow{0} 0$$

è un triangolo distinto. L'uguaglianza $h = 0$ comporta la commutatività del diagramma

$$\begin{tikzcd}
C[-1] \arrow[r, "{h[-1]}"] \arrow[d, "0"'] & A \arrow[d, "\mathrm{id}_A"] \\
0[-1] \arrow[r, "0"'] & A
\end{tikzcd}$$

Allora dall'assioma (trcat5) si deduce l'esistenza di una freccia $e : B \to A$ in $\mathscr{C}$ che rende il diagramma

$$\begin{tikzcd}
C[-1] \arrow[r, "{h[-1]}"] \arrow[d, "0"'] & A \arrow[r, "f"] \arrow[d, "\mathrm{id}_A"] & B \arrow[r, "-g"] \arrow[d, "e"'] & C \arrow[d, "0"] \\
0[-1] \arrow[r, "0"'] & A \arrow[r, "\mathrm{id}_A"'] & A \arrow[r, "0"'] & 0
\end{tikzcd}$$

commutativo in $\mathscr{C}$. E pertanto $e \circ f = \mathrm{id}_A$.

$\square$

Capitolo 4

Complessi nelle categorie additive con traslazione

In questo capitolo si definiscono gli oggetti differenziali ed i complessi di una categoria additiva con traslazione. Infine si vedono le categorie omotopiche e le costruzioni principali ad esse relative. La trattazione segue [KS2].

4.1 Prime definizioni

Sia $(\mathscr{C}, T)$ una categoria additiva con traslazione. Si definisce la totalità $\mathscr{C}_{\mathrm{d}}(T)$ ponendo:

(1) come oggetti le coppie (C, d) tali che $C \in \mathrm{Ob}(\mathscr{C})$ e $d \in \mathrm{Hom}_{\mathscr{C}}(C, T(C))$;

(2) per ogni coppia di oggetti (A, d) e (B, ρ), le frecce da (A, d) a (B, ρ) sono tutti e soli i morfismi $f : A \to B$ in $\mathscr{C}$ che rendono il diagramma

$$\begin{tikzcd} A \arrow[r, "d"] \arrow[d, "f"'] & T(A) \arrow[d, "T(f)"] \\ B \arrow[r, "\rho"'] & T(B) \end{tikzcd}$$

commutativo in $\mathscr{C}$;

(3) le composizioni, le uguaglianze e le identità sono quelle indotte da $\mathscr{C}$.

Lemma 4.1. Per ogni categoria additiva con traslazione $(\mathscr{C}, T)$, la totalità $\mathscr{C}_{\mathrm{d}}(T)$ è una categoria additiva ben definita.

Dimostrazione. È sufficiente una verifica diretta delle definizioni. □

Definizione 4.2. Sia $(\mathscr{C}, T)$ una categoria additiva con traslazione. La categoria $\mathscr{C}_{\mathrm{d}}(T)$ si dice *categoria degli oggetti differenziali di* $(\mathscr{C}, T)$.

Definizione 4.3. Sia $(\mathscr{C}, T)$ una categoria additiva con traslazione. Si definisce $\mathscr{C}_{\mathrm{c}}(T)$ come la sottocategoria piena $\mathscr{C}_{\mathrm{d}}(T)$ formata da tutti e soli gli oggetti di (X, d) di $\mathscr{C}_{\mathrm{d}}(T)$ tali che $T(d) \circ d = 0$.

Definizione 4.4. Sia $(\mathscr{C}, T)$ una categoria additiva con traslazione. La categoria $\mathscr{C}_{\mathrm{c}}(T)$ si dice *categoria dei complessi di* $(\mathscr{C}, T)$.

Sia $(\mathscr{C}, T)$ una categoria additiva con traslazione e si consideri l'assegnazione

$$\mathscr{C}_{\mathrm{d}}(T) \xrightarrow{\underline{T}} \mathscr{C}_{\mathrm{d}}(T)$$

$$(X, d) \longmapsto (T(X), T(d))$$

$$f \longmapsto T(f)$$

Si può dimostrare che $(\mathscr{C}_{\mathrm{d}}(T), \underline{T})$ è una categoria additiva con traslazione e che restringendo $\underline{T}$ a $\mathscr{C}_{\mathrm{c}}(T)$ si ottiene un'altra categoria additiva con traslazione.

4.2 Mappa cono

In questa sezione si estende il concetto di mappa cono alle categorie con traslazione.

Siano $(\mathscr{C}, T)$ una categoria additiva con traslazione, (A, d) e (B, ρ) oggetti di $\mathscr{C}_{\mathrm{d}}(T)$, $f \in \mathrm{Hom}_{\mathscr{C}}(A, B)$ e ψ l'isomorfismo canonico in $\mathscr{C}$ da $T^2(A) \oplus T(B)$ a $T(T(A) \oplus B)$. La *mappa cono di f da (A, d) a (B, ρ)* è l'elemento (C, γ) di $\mathscr{C}_{\mathrm{d}}(T)$ definito ponendo

$$\begin{cases} C := T(A) \oplus B \\ \\ \gamma := \psi \circ \begin{bmatrix} -T(d) & 0 \\ \\ T(f) & \rho \end{bmatrix} \end{cases}.$$

L'elemento (C, γ) si indica con $\mathrm{Mc}(f)$. L'immersione ε_2 di B in $T(A) \oplus B$ si denota con $\alpha(f)$ e la proiezione π_1 di $T(A) \oplus B$ in $T(A)$ si indica con $\beta(f)$. La sequenza

$$A \xrightarrow{\quad f \quad} B \xrightarrow{\quad \alpha(f) \quad} T(A) \oplus B \xrightarrow{\quad \beta(f) \quad} T(A)$$

di morfismi in $\mathscr{C}$ si indica con $\Delta(f)$.

Lemma 4.5. Siano $(\mathscr{C}, T)$ una categoria additiva con traslazione, (A, d) e (B, ρ) oggetti di $\mathscr{C}_{\mathrm{c}}(T)$, f in $\mathrm{Hom}_{\mathscr{C}}(A, B)$. Allora $\mathrm{Mc}(f)$ è oggetto di $\mathscr{C}_{\mathrm{c}}(T)$ se e solo se f appartiene ad $\mathrm{Hom}_{\mathscr{C}_{\mathrm{d}}(T)}((A, d), (B, \rho))$.

Dimostrazione. È sufficiente ricordare che gli isomorfismi canonici da $T(X \oplus Y)$ a $T(X) \oplus T(Y)$ sono naturali in (X, Y), e svolgere un calcolo diretto tramite le matrici. $\square$

4.3 La categoria omotopica

In questa sezione si studia il concetto di categoria omotopica di una categoria additiva con traslazione.

Definizione 4.6 (Nullomotopia). Siano $(\mathscr{C}, (T, T^{-1}, \eta, \xi))$ una categoria additiva con traslazione ed $f : (A, d) \to (B, \rho)$ un morfismo di $\mathscr{C}_{\mathrm{d}}(T)$. Si dice che f è *omotopico a zero* e si scrive $f \simeq 0$ se e solo se esiste un morfismo $u : A \to T^{-1}(B)$ di $\mathscr{C}$ tale che $f = \eta_B^{-1} \circ T^{-1}(\rho) \circ u + \xi_B \circ T(u) \circ d$.

Lemma 4.7. Siano $(\mathscr{C}, T)$ una categoria additiva con traslazione, $f : (A, d) \to (B, \rho)$ e $g : (B, \rho) \to (C, \theta)$ frecce in $\mathscr{C}_{\mathrm{d}}(T)$. Allora vale l'implicazione

$$(f \simeq 0 \ \text{ oppure } \ g \simeq 0) \implies g \circ f \simeq 0\,.$$

Dimostrazione. Omessa. Vedere ad esempio la prova del Lemma 11.2.3. in [KS2]. $\square$

Sia $(\mathscr{C}, T)$ una categoria additiva con traslazione. Si definisce la totalità $\mathcal{K}_{\mathrm{d}}(T)$ ponendo:

- $\mathrm{Ob}(\mathcal{K}_{\mathrm{d}}(T)) := \mathrm{Ob}(\mathscr{C}_{\mathrm{d}}(T))$;
- $\mathrm{Ar}(\mathcal{K}_{\mathrm{d}}(T)) := \mathrm{Ar}(\mathscr{C}_{\mathrm{d}}(T))$;
- l'uguaglianza $=_{0,\mathcal{K}_{\mathrm{d}}(T)}$ come la relazione binaria $=_{0,\mathscr{C}_{\mathrm{d}}(T)}$;
- l'uguaglianza $=_{1,\mathcal{K}_{\mathrm{d}}(T)}$ come la relazione binaria $\simeq$;
- la composizione $\circ_{\mathcal{K}_{\mathrm{d}}(T)}$ come la stessa di $\mathscr{C}_{\mathrm{d}}(T)$;
- le funzioni dominio e co-dominio come le stesse di $\mathscr{C}_{\mathrm{d}}(T)$;
- le addizioni tra i morfismi come le stesse di $\mathscr{C}_{\mathrm{d}}(T)$;

- le identità di $\mathcal{K}_{\mathrm{d}}(T)$ come le stesse di $\mathscr{C}_{\mathrm{d}}(T)$.

dove per ogni coppia di oggetti (A, d), (B, ρ) in $\mathscr{C}_{\mathrm{d}}(T)$ ed f, g in $\mathrm{Hom}_{\mathscr{C}_{\mathrm{d}}(T)}((A, d), (B, \rho))$ si pone

$$f \simeq g \iff (f - g) \simeq 0\,.$$

Il Lemma 4.7 implica che $\mathcal{K}_{\mathrm{d}}(T)$ è una categoria additiva ben definita, e con lo stesso oggetto zero di $\mathscr{C}_{\mathrm{d}}(T)$.

Si indica con $\mathcal{K}_{\mathrm{c}}(T)$ la sottocategoria piena di $\mathcal{K}_{\mathrm{d}}(T)$ formata da tutti e soli gli oggetti di $\mathscr{C}_{\mathrm{c}}(T)$.

4.4 La categoria omotopica con traslazione

In questa sezione si studia la struttura di traslazione in una categoria omotopica.

Lemma 4.8. Siano $\mathrm{Trasl}(\mathscr{C}, T)$ una categoria con traslazione isomorfa, $f : (A, d) \to (B, \rho)$ freccia in $\mathscr{C}_{\mathrm{d}}(T)$ tale che $f \simeq 0$. Allora $T(f) \simeq 0$.

Dimostrazione. Le ipotesi implicano l'esistenza di un morfismo $\sigma : A \to T^{-1}(B)$ tale che $f = T^{-1}(\rho) \circ \sigma + T(\sigma) \circ d$. Allora

$$T(f) = \rho \circ T(\sigma) + T(T(\sigma)) \circ T(d)\,.$$

Questo prova che la freccia $T(\sigma)$ verifica la condizione $T(f) \simeq 0$. $\square$

Sia $\mathrm{Trasl}(\mathscr{C}, T)$ una categoria con traslazione isomorfa. Il Lemma 4.8 implica che l'assegnazione

$$\mathcal{K}_{\mathrm{d}}(T) \xrightarrow{\quad \underline{T} \quad} \mathcal{K}_{\mathrm{d}}(T)$$

$$(X, d) \longmapsto (T(X), T(d))$$

$$f \in \mathrm{Hom}_{\mathcal{K}_{\mathrm{d}}(T)}((X, d), (Y, \rho)) \longmapsto T(f)$$

è un funtore additivo ben definito. Si può inoltre provare che $\underline{T}$ è una equivalenza di categorie.

Lemma 4.9. Sia $\mathrm{Trasl}(\mathscr{C}, T)$ una categoria con traslazione isomorfa. Allora $(\mathcal{K}_{\mathrm{d}}(T), \underline{T})$ è una categoria additiva con traslazione.

Definizione 4.10. Siano $(\mathscr{C}, T)$ una categoria additiva con traslazione, (A, d) e (B, e) oggetti di $\mathscr{C}_{\mathrm{d}}(T)$. Si dice che (A, d) e (B, e) sono *omotopici* se e solo se sono isomorfi nella categoria $(\mathcal{K}_{\mathrm{d}}(T), \underline{T})$. In tal caso si scrive $(A, d) \sim (B, e)$.

Definizione 4.11 (**Triangolo distinto nella categoria omotopica**)**.** Siano $\mathrm{Trasl}(\mathscr{C}, T)$ una categoria con traslazione isomorfa ed Ω un triangolo di $\mathcal{K}_{\mathrm{d}}(T)$. Allora Ω si dice *triangolo distinto canonico* se e solo se esiste un morfismo f in $\mathscr{C}_{\mathrm{d}}(T)$ che rende Ω isomorfo a $\Delta(f)$ in $(\mathcal{K}_{\mathrm{d}}(T), \underline{T})$.

Teorema 4.12 (**Omotopico implica triangolato**)**.** Siano $\mathrm{Trasl}(\mathscr{C}, T)$ una categoria con traslazione isomorfa e ∂ la famiglia dei triangoli distinti canonici di $(\mathcal{K}_{\mathrm{d}}(T), \underline{T})$. Allora $(\mathcal{K}_{\mathrm{d}}(T), \underline{T}, \partial)$ è una categoria triangolata.

Dimostrazione. Omessa. Vedere ad esempio la prova del Teorema 11.2.6. in [KS2]. □

Corollario 4.13. Siano $\mathrm{Trasl}(\mathscr{C}, T)$ una categoria con traslazione isomorfa e ∂ la famiglia dei triangoli distinti canonici di $(\mathcal{K}_{\mathrm{d}}(T), \underline{T})$. Allora $\mathcal{K}_{\mathrm{c}}(T)$ è sua sottocategoria triangolata, munita del funtore T e di tutti i triangoli di ∂ aventi i termini in $\mathcal{K}_{\mathrm{c}}(T)$.

Dimostrazione. Tramite le definizioni ed il Lemma 4.5, si prova che $\mathcal{K}_{\mathrm{c}}(T)$ è una sottocategoria chiusa per triangoli di $(\mathcal{K}_{\mathrm{d}}(T), \underline{T})$. Tramite il Lemma 3.19 si conclude. □

Notazione 4.14. *Sia $\mathscr{C}$ una categoria additiva. Quando si scrive $\mathcal{K}(\mathscr{C})$ è* categoria triangolata*, si sottointende che si sta considerando la famiglia dei triangoli distinti canonici.*

4.5 L'usuale nozione di complesso

In questa sezione si vede come le definizioni "standard" di complesso cocatenario e di differenziale, siano casi particolari dei concetti appena visti.

Si indica con $\underline{\mathbb{Z}}$ la categoria dell'usuale ordine parziale di $\mathbb{Z}$.

Sia $\mathscr{C}$ una categoria additiva. Si definisce la *categoria graduata associata a* $\mathscr{C}$ come la categoria additiva con traslazione $(\mathrm{Fct}(\underline{\mathbb{Z}}, \mathscr{C}), (T, T^{-1}, \eta, \xi))$, dove:

- $\mathrm{Fct}(\underline{\mathbb{Z}}, \mathscr{C})$ è la categoria dei funtori da $\underline{\mathbb{Z}}$ a $\mathscr{C}$, le frecce sono le trasformazioni naturali tra di essi;
- il funtore $T : \mathrm{Fct}(\underline{\mathbb{Z}}, \mathscr{C}) \to \mathrm{Fct}(\underline{\mathbb{Z}}, \mathscr{C})$ è definito ponendo $T(F)_{|n} := F(n+1)$, $T(F)_{|(n,m)} := (-1)^{m-n} F(n+1, m+1)$, per ogni $F : \underline{\mathbb{Z}} \to \mathscr{C}$ funtore ed $n \leq m$ in $\mathbb{Z}$;
- $T(\alpha)_{|n} := \alpha_{n+1}$ per ogni α freccia di $\mathrm{Fct}(\underline{\mathbb{Z}}, \mathscr{C})$ ed n in $\mathbb{Z}$;

- il funtore $T^{-1} : \mathrm{Fct}(\underline{\mathbb{Z}}, \mathscr{C}) \to \mathrm{Fct}(\underline{\mathbb{Z}}, \mathscr{C})$ è definito ponendo $T^{-1}(F)_{|n} := F(n-1)$, $T^{-1}(F)_{|(n,m)} := (-1)^{m-n} F(n-1, m-1)$, per ogni $F : \underline{\mathbb{Z}} \to \mathscr{C}$ funtore ed $n \leq m$ in $\mathbb{Z}$;
- $T^{-1}(\beta)_{|n} := \beta_{n-1}$ per ogni β freccia di $\mathrm{Fct}(\underline{\mathbb{Z}}, \mathscr{C})$ ed n in $\mathbb{Z}$;
- gli isomorfismi naturali η e ξ sono le identità di $\mathrm{id}_{\mathrm{Fct}(\underline{\mathbb{Z}}, \mathscr{C})}$.

Questa categoria si indica con $\mathrm{Gr}(\mathscr{C})$ ed il funtore T si indica con $[1]$.

Lemma 4.15. Siano:

- $\mathscr{C}$ una categoria;
- $(X^n)_{n\in\mathbb{Z}}$ ed $(Y^n)_{n\in\mathbb{Z}}$ famiglie di oggetti di $\mathscr{C}$, che si indicano rispettivamente con $\widehat{X}$ ed $\widehat{Y}$;
- $(\alpha^n : X^n \to X^{n+1})_{n\in\mathbb{Z}}$ e $(\beta^n : Y^n \to Y^{n+1})_{n\in\mathbb{Z}}$ famiglie di morfismi di $\mathscr{C}$, che si indicano rispettivamente con $\widehat{\alpha}$ ed $\widehat{\beta}$;
- $(f^n : X^n \to Y^n)_{n\in\mathbb{Z}}$ una famiglia di morfismi di $\mathscr{C}$ che rende il diagramma

$$\begin{tikzcd} X^n \arrow[r, "\alpha^n"] \arrow[d, "f^n"'] & X^{n+1} \arrow[d, "f^{n+1}"] \\ Y^n \arrow[r, "\beta^n"'] & Y^{n+1} \end{tikzcd}$$

commutativo in $\mathscr{C}$, per ogni n in $\mathbb{Z}$. Si denota questa famiglia con $\widehat{f}$.

Allora:

(1) L'assegnazione

$$L\left(\widehat{X}, \widehat{\alpha}\right) : \underline{\mathbb{Z}} \longrightarrow \mathscr{C}$$

$$n \in \mathbb{Z} \longmapsto X^n$$

$$(n, n) \longmapsto \mathrm{id}_{X^n}$$

$$n \lneq m \longmapsto \alpha^{m-1} \circ \cdots \circ \alpha^{n+1} \circ \alpha^n$$

è un ben definito funtore.

(2) La famiglia $(\eta_n)_{n\in\mathbb{Z}}$ dove $\eta_n = f^n$ per ogni n in $\mathbb{Z}$, è una ben definita trasformazione

naturale da $L(\widehat{X}, \widehat{\alpha})$ ad $L(\widehat{Y}, \widehat{\beta})$.

Dimostrazione. È sufficiente applicare le definizioni. □

Notazione 4.16. *Se $\mathscr{C}$ è una categoria generica, allora grazie al Lemma 4.15, i funtori da $\underline{\mathbb{Z}}$ a $\mathscr{C}$ si indicano con $(X^n, d_X^n)_{n\in\mathbb{Z}}$, e le trasformazioni naturali tra gli oggetti di* $\mathrm{Fct}(\underline{\mathbb{Z}}, \mathscr{C})$ *si indicano con* $(f^n : X^n \to Y^n)_{n\in\mathbb{Z}}$.

Osservazione 4.17. Sia $\mathscr{C}$ una categoria additiva. Con queste notazioni si ottiene che la categoria $\mathrm{Gr}(\mathscr{C})_{\mathrm{c}}([1])$ coincide con $\mathrm{Coch}(\mathscr{C})$ e che $\mathcal{K}_{\mathrm{c}}([1]) = \mathcal{K}(\mathscr{C})$.

Tramite le sezioni precedenti del capitolo corrente, si ritrovano tutte le definizioni e le proprietà di algebra omologica dei complessi co-catenari.

Teorema 4.18. Sia $\mathscr{C}$ una categoria additiva. Allora la categoria con traslazione isomorfa $(\mathcal{K}(\mathscr{C}), [1])$, munita dei triangoli distinti canonici, è una categoria triangolata.

Dimostrazione. Discende direttamente dal Corollario 4.13. □

4.6 Categorie abeliane con traslazione e co-omologia

In questa sezione si estendono i concetti di co-omologia alle categorie abeliane con traslazione.

Definizione 4.19 (Categoria abeliana con traslazione). Una *categoria abeliana con traslazione* è una coppia $(\mathscr{C}, (T, T^{-1}, \eta, \xi))$ tale che $\mathscr{C}$ è categoria abeliana e $(\mathscr{C}, (T, T^{-1}, \eta, \xi))$ è categoria con traslazione.

Siano $(\mathscr{C}, (T, T^{-1}, \eta, \xi))$ una categoria abeliana con traslazione e (A, d) un oggetto di $\mathscr{C}_{\mathrm{c}}(T)$. Allora la naturalità di η e la condizione $T(d) \circ d = 0$ implicano che $(\eta_A^{-1} \circ T^{-1}(d), d)$ è un oggetto di $\mathrm{SeqBin}(\mathscr{C})$.

Si può dimostrare che se f è un morfismo in $\mathscr{C}_{\mathrm{c}}(T)$ da (A, d) a (B, ρ), allora $(T^{-1}(f), f, T(f))$ è un ben definito morfismo in $\mathrm{SeqBin}(\mathscr{C})$ da $(\eta_A^{-1} \circ T^{-1}(d), d)$ a $(\eta_B^{-1} \circ T^{-1}(\rho), \rho)$.

Tenendo le stesse notazioni della sezione 1.3, si definiscono le assegnazioni $\mathcal{H}$ e Θ ponendo

$$\begin{cases} \Theta(A,d) := \theta(\eta_A^{-1} \circ T^{-1}(d), d) \\ \\ \Theta(f) := \theta(T^{-1}(f), f, T(f)) \\ \\ \mathcal{H}(A,d) := \mathrm{H}(\eta_A^{-1} \circ T^{-1}(d), d) \\ \\ \mathcal{H}(f) := \mathrm{H}(T^{-1}(f), f, T(f)) \ . \end{cases}$$

per ogni (A,d) oggetto di $\mathscr{C}_{\mathrm{c}}(T)$ ed f morfismo in $\mathscr{C}_{\mathrm{c}}(T)$.

La sezione 1.3 implica che $\mathcal{H}$, Θ sono funtori additivi ben definiti da $\mathscr{C}_{\mathrm{c}}(T)$ verso $\mathscr{C}$. Si utilizza la notazione $\mathcal{H} := \mathrm{H}$, $\Theta := \theta$.

Lemma 4.20. Siano $(\mathscr{C}, (T, T^{-1}, \eta, \xi))$ una categoria abeliana con traslazione ed f un morfismo di $\mathscr{C}_{\mathrm{c}}(T)$ omotopico a zero. Allora $\mathrm{H}(f) = 0$.

Dimostrazione. In questa dimostrazione si utilizzano tutte le notazioni della sezione 1.3. Si definisce:

- $((A,d),(B,\rho)) := (\partial^0(f), \partial^1(f))$;
- g come il morfismo parallelo di $\eta_B^{-1} \circ T^{-1}(\rho)$;
- $\mu := \ker(\mathrm{coker}(\eta_B^{-1} \circ T^{-1}(\rho)))$;
- $\nu := \mathrm{coker}(\ker(\eta_B^{-1} \circ T^{-1}(\rho)))$;
- $F := (T^{-1}(f), f, T(f))$;
- $X := (d, \eta_A^{-1} \circ T^{-1}(d))$;
- $Y := (\rho, \eta_B^{-1} \circ T^{-1}(\rho))$.

Le ipotesi implicano l'esistenza di un morfismo $u : A \to T^{-1}(B)$ in $\mathscr{C}$ tale che $f = \eta_B^{-1} \circ T^{-1}(\rho) \circ u + \xi_B \circ T(u) \circ d$. Allora

$$f \circ \ker(d) = \eta_B^{-1} \circ T^{-1}(\rho) \circ u \circ \ker(d) \, .$$

La sezione 1.3 implica

$$\ker(\rho) \circ \theta(F) = \ker(\rho) \circ \alpha_Y \circ g \circ \nu \circ u \circ \ker(d) \, .$$

Essendo $\ker(\rho)$ un mono si ottiene

$$\theta(F) = \alpha_Y \circ g \circ \nu \circ u \circ \ker(d) \, .$$

Allora

$$\operatorname{coker}(\alpha_Y) \circ \theta(F) = 0\,.$$

La sezione 1.3 comporta

$$\mathrm{H}(f) \circ \operatorname{coker}(\alpha_X) = \operatorname{coker}(\alpha_Y) \circ \theta(F) = 0\,.$$

Essendo $\operatorname{coker}(\alpha_X)$ un epi, si trova $\mathrm{H}(f) = 0$. □

Il Lemma 4.20 implica che se $\mathscr{C}$ è una categoria abeliana con traslazione, allora il funtore

$$\mathcal{H}^{\mathcal{K}} : \mathcal{K}_{\mathrm{c}}(T) \longrightarrow \mathscr{C}$$

$$(A, d) \longmapsto \mathcal{H}(A, d)$$

$$(A, d) \xrightarrow{\ f\ } (B, \rho) \ \longmapsto \mathcal{H}(f)$$

è ben definito ed additivo. Per brevità si indica questo funtore con H.

4.7 Nozioni co-omologiche sui complessi nel caso abeliano

In questa sezione si ripassano alcuni concetti di co-omologia dei complessi co-catenari nelle categorie abeliane.

Siano $\mathscr{C}$ una categoria abeliana e $\mathrm{Coch}(\mathscr{C})$ la categoria dei complessi co-catenari su di essa. Per ogni $(X^\bullet, d_X)$ e $(Y^\bullet, d_Y)$ oggetti di $\mathrm{Coch}(\mathscr{C})$, $f : (X^\bullet, d_X) \to (Y^\bullet, d_Y)$ morfismo di $\mathrm{Coch}(\mathscr{C})$ ed n in $\mathbb{Z}$, si pone

$$\begin{cases} \theta^n(X^\bullet, d_X) := \theta(d_X^{n-1}, d_X^n) \\ \\ \theta^n(f) := \theta(f^{n-1}, f^n, f^{n+1}) \\ \\ \mathrm{H}^n(X^\bullet, d_X) := \mathrm{H}(d_X^{n-1}, d_X^n) \\ \\ \mathrm{H}^n(f) := \mathrm{H}(f^{n-1}, f^n, f^{n+1}) \quad . \end{cases}$$

Per ogni n in $\mathbb{Z}$ il funtore H^n è detto *n-esimo funtore co-omologico di $\mathscr{C}$*.

Definizione 4.21 (Quasi-isomorfismo). Siano $(\mathscr{C}, T)$ una categoria abeliana con traslazione ed f un morfismo in $\mathscr{C}_{\mathrm{c}}(T)$. Allora f si dice *quasi-isomorfismo* se e solo se $\mathrm{H}(f)$ è un isomorfismo di $\mathscr{C}$. In questo caso si scrive f qis.

Lemma 4.22. Siano $\mathscr{C}$ una categoria abeliana ed f un morfismo di $\mathrm{Coch}(\mathscr{C})$. Allora f è un quasi-isomorfismo di $\mathrm{Coch}(\mathscr{C})$ se e solo se $\mathrm{H}^n(f)$ è isomorfismo di $\mathscr{C}$, per ogni n in $\mathbb{Z}$.

4.8 Alcuni complessi notevoli

Siano $\mathscr{C}$ una categoria pre-abeliana, n in $\mathbb{Z}$ e $(X^\bullet, d_X)$ un oggetto di $\mathrm{Coch}(\mathscr{C})$. Si definisce $\tau^{\leq n}(X^\bullet, d_X)$ come il complesso

$$\cdots \longrightarrow X^{n-2} \xrightarrow{d_X^{n-2}} X^{n-1} \xrightarrow{\delta_X^{\leq n-1}} \mathrm{Ker}(d_X^n) \longrightarrow 0 \longrightarrow$$

$$\longrightarrow 0 \longrightarrow \cdots$$

avente $\mathrm{Ker}(d_X^n)$ al grado n, dove $\delta_X^{\leq n-1}$ è l'unico morfismo che rende il diagramma

$$\begin{tikzcd}
X^{n-1} \arrow[rr, "d_X^{n-1}"] \arrow[dr, dotted, "\delta_X^{\leq n-1}"'] & & X^n \\
& \mathrm{Ker}(d_X^n) \arrow[ur, "\ker(d_X^n)"'] &
\end{tikzcd}$$

commutativo.
Si definisce $\tau^{\geq n+1}(X^\bullet, d_X)$ come il complesso

$$\cdots \longrightarrow 0 \longrightarrow 0 \longrightarrow \mathrm{Ker}(d_X^n) \xrightarrow{\ker(d_X^n)} X^n \xrightarrow{d_X^n}$$

$$\xrightarrow{d_X^n} X^{n+1} \longrightarrow \cdots$$

avente X^n al grado n.

Capitolo 5

Localizzazione di categorie

In questo capitolo si affronta la nozione di *localizzazione di una categoria*. La spiegazione segue la linea di [AY1] e [KS2].

5.1 Definizioni

Definizione 5.1. Siano $\mathscr{C}$ e $\mathscr{D}$ categorie, g una freccia di $\mathscr{C}$ ed $F : \mathscr{C} \to \mathscr{D}$ un funtore covariante oppure controvariante. Si dice che F *rende invertibile* g se e solo se $F(g)$ è un isomorfismo di $\mathscr{D}$.

Definizione 5.2. Sia $\mathscr{C}$ una categoria. Un *sistema moltiplicativamente chiuso di* $\mathscr{C}$ è una sottocategoria $\mathscr{D}$ di $\mathscr{C}$ tale che $\mathrm{Ob}(\mathscr{D}) = \mathrm{Ob}(\mathscr{C})$.

Definizione 5.3. Siano $\mathscr{C}$ una categoria ed $\mathcal{S}$ un sistema moltiplicativamente chiuso di $\mathscr{C}$. Una *localizzazione di* $\mathscr{C}$ *rispetto ad* $\mathcal{S}$ è una coppia $(Q, \mathscr{D})$ tale che:

- $\mathscr{D}$ è una categoria grande e Q è un funtore da $\mathscr{C}$ a $\mathscr{D}$;
- $\mathrm{Ob}(\mathscr{D}) = \mathrm{Ob}(\mathscr{C})$;
- $Q(X) = X$ per ogni X in $\mathrm{Ob}(\mathscr{D})$;
- il funtore Q rende invertibile ogni elemento di $\mathrm{Ar}(\mathcal{S})$;
- per ogni categoria grande $\mathscr{A}$, $F : \mathscr{C} \to \mathscr{A}$ funtore tale che $F(\sigma)$ è isomorfismo in $\mathscr{A}$ per ogni σ in $\mathrm{Ar}(\mathcal{S})$, esiste un unico funtore $G : \mathscr{D} \to \mathscr{A}$ tale che $F = G \circ Q$.

Definizione 5.4 (Sistema moltiplicativo a destra). Siano $\mathscr{C}$ una categoria ed $\mathcal{A}$ una sottocategoria di $\mathscr{C}$. Allora $\mathcal{A}$ si dice *sistema moltiplicativo a destra in* $\mathscr{C}$ se e solo se:

(RMS2) la sottocategoria $\mathcal{A}$ è un sistema moltiplicativamente chiuso di $\mathscr{C}$;

(RMS3) per ogni B, C e D in $\mathrm{Ob}(\mathscr{C})$, t in $\mathrm{Hom}_{\mathcal{A}}(B,D)$ e g in $\mathrm{Hom}_{\mathscr{C}}(C,D)$, esistono A in $\mathrm{Ob}(\mathscr{C})$, f in $\mathrm{Hom}_{\mathscr{C}}(A,B)$, s in $\mathrm{Hom}_{\mathcal{A}}(A,C)$ che rendono il diagramma

$$\begin{tikzcd} A \arrow[r, dotted, "f"] \arrow[d, dotted, "s"'] & B \arrow[d, "t"] \\ C \arrow[r, "g"'] & D \end{tikzcd}$$

commutativo;

(RMS4) siano A e B oggetti di $\mathscr{C}$ e f, g in $\mathrm{Hom}_{\mathscr{C}}(A,B)$. Se esiste $t \in \mathrm{Hom}_{\mathcal{A}}(B,D)$ tale che $t \circ f = t \circ g$, allora esiste $s \in \mathrm{Hom}_{\mathcal{A}}(C,A)$ tale che $f \circ s = g \circ s$.

Definizione 5.5 (**Sistema fortemente moltiplicativo a destra**)**.** Siano $\mathscr{C}$ una categoria ed $\mathcal{A}$ una sottocategoria di $\mathscr{C}$. Allora $\mathcal{A}$ si dice *sistema fortemente moltiplicativo a destra in* $\mathscr{C}$ se e solo se:

(RFMS1) per ogni freccia f in $\mathscr{C}$ vale l'implicazione

$$f \text{ è isomorfismo di } \mathscr{C} \implies f \in \mathcal{A}\,;$$

(MOLTDX) la sottocategoria $\mathcal{A}$ è un sistema moltiplicativo a destra in $\mathscr{C}$.

Definizione 5.6. Siano $\mathscr{C}$ una categoria ed $\mathcal{S}$ un sistema moltiplicativamente chiuso di $\mathscr{C}$. Una *localizzazione di Ore a destra di* $\mathscr{C}$ *rispetto ad* $\mathcal{S}$ è una coppia $(Q,\mathscr{D})$ tale che:

- $\mathscr{D}$ è una categoria grande e Q è un funtore da $\mathscr{C}$ a $\mathscr{D}$;
- $\mathrm{Ob}(\mathscr{D}) = \mathrm{Ob}(\mathscr{C})$;
- $Q(X) = X$ per ogni X in $\mathrm{Ob}(\mathscr{D})$;
- $Q(\sigma)$ è isomorfismo di $\mathscr{D}$ per ogni σ in $\mathrm{Ar}(\mathcal{S})$;
- per ogni f in $\mathrm{Ar}(\mathscr{D})$ esistono g in $\mathrm{Ar}(\mathscr{C})$ e σ in $\mathrm{Ar}(\mathcal{S})$ tali che $f = Q(g) \circ (Q(\sigma))^{-1}$;
- per ogni A e B in $\mathrm{Ob}(\mathscr{C})$, f e g in $\mathrm{Hom}_{\mathscr{C}}(A,B)$ vale l'implicazione

$$Q(f) = Q(g) \implies \exists \sigma \in \mathrm{Ar}(\mathcal{S}) \text{ t.c. } f \circ \sigma = g \circ \sigma\,.$$

Definizione 5.7. Siano $\mathscr{C}$ una categoria, $\mathcal{S}$ un sistema moltiplicativamente chiuso di $\mathscr{C}$, $(Q, \mathscr{D})$ una localizzazione di Ore a destra di $\mathscr{C}$ rispetto ad $\mathcal{S}$ e q in $\mathrm{Ar}(\mathscr{D})$. Se $q = Q(f) \circ (Q(s))^{-1}$ con f in $\mathrm{Ar}(\mathscr{C})$ ed s in $\mathrm{Ar}(\mathcal{S})$, allora si dice:

- $Q(f) \circ (Q(s))^{-1}$ è una *rappresentazione di q come frazione destra*;
- (s, f) è un *rappresentante destro di q*.

Osservazione 5.8. Riscrivendo tutte queste definizioni nella categoria opposta, si ritrovano le definizioni delle frazioni a sinistra.

5.2 Proprietà principali

In questa sezione vengono affrontate alcune proprietà basilari delle localizzazioni di categorie, in tutti i sensi visti nella sezione precedente.

Proposizione 5.9. Siano $\mathscr{C}$ una categoria ed $\mathcal{S}$ un sistema moltiplicativamente chiuso di $\mathscr{C}$. Allora:

(1) esiste una localizzazione di $\mathscr{C}$ su $\mathcal{S}$;

(2) per ogni $(Q, \mathscr{D})$ e $(Q', \mathscr{D}')$ localizzazioni di $\mathscr{C}$ rispetto ad $\mathcal{S}$ esiste un unico $F : \mathscr{D} \to \mathscr{D}'$ isomorfismo di categorie tale che $F \circ Q = Q'$.

Dimostrazione. Omessa. Vedere ad esempio [AY1], [BOR94A], [GM1] oppure [GABZIS]. □

Lemma 5.10. Siano:

- $\mathscr{C}$ una categoria;
- $\mathcal{S}$ un sistema moltiplicativamente chiuso di $\mathscr{C}$;
- $(Q, \mathscr{D})$ una localizzazione di Ore a destra di $\mathscr{C}$ rispetto ad $\mathcal{S}$;
- A, B, C e D oggetti di $\mathscr{C}$;
- $f_1 \in \mathrm{Hom}_{\mathscr{C}}(A, B)$, $f_2 \in \mathrm{Hom}_{\mathscr{C}}(D, B)$, $s_1 \in \mathrm{Hom}_{\mathcal{S}}(A, C)$ ed $s_2 \in \mathrm{Hom}_{\mathcal{S}}(D, C)$;

Allora le seguenti condizioni sono equivalenti:

(a) $Q(f_1) \circ (Q(s_1))^{-1} = Q(f_2) \circ (Q(s_2))^{-1}$;

(b) esistono W in $\mathrm{Ob}(\mathscr{C})$, $g_1 \in \mathrm{Hom}_{\mathscr{C}}(W, A)$ e $g_2 \in \mathrm{Hom}_{\mathscr{C}}(W, D)$ tali che $f_1 \circ g_1 = f_2 \circ g_2$, $s_1 \circ g_1 = s_2 \circ g_2$ ed $s_1 \circ g_1 \in \mathcal{S}$.

Proposizione 5.11. Siano $\mathscr{C}$ una categoria, $\mathcal{S}$ un sistema moltiplicativamente chiuso di $\mathscr{C}$ e $(Q, \mathscr{D})$ una localizzazione a destra di Ore rispetto ad $\mathcal{S}$. Allora $\mathcal{S}$ è un sistema moltiplicativo a destra di $\mathscr{C}$.

5.3 Esistenza della localizzazione destra

Ora si vede come da un sistema moltiplicativo a destra di $\mathscr{C}$ si trova una localizzazione a destra di $\mathscr{C}$ rispetto ad $\mathcal{S}$. Mentre si fa questo, non si considerano i problemi fondazionali derivanti da ciò.

Siano $\mathscr{C}$ una categoria ed $\mathcal{S}$ un sistema moltiplicativo a destra di $\mathscr{C}$. Sulla collezione $\mathrm{Ob}(\mathscr{C}) \times \mathrm{Ar}(\mathcal{S}) \times \mathrm{Ar}(\mathscr{C})$ si definisce la relazione binaria $R(\mathcal{S}, \mathscr{C})$ ponendo: per ogni A, B, C e D oggetti di $\mathscr{C}$, per ogni $f_1 \in \mathrm{Hom}_{\mathscr{C}}(A, B)$, $f_2 \in \mathrm{Hom}_{\mathscr{C}}(D, B)$, $s_1 \in \mathrm{Hom}_{\mathcal{S}}(A, C)$ ed $s_2 \in \mathrm{Hom}_{\mathcal{S}}(D, C)$

$$(A, s_1, f_1) R(\mathcal{S}, \mathscr{C}) (D, s_2, f_2)$$

se e solo se esistono W in $\mathrm{Ob}(\mathscr{C})$, $g_1 \in \mathrm{Hom}_{\mathscr{C}}(W, A)$ e $g_2 \in \mathrm{Hom}_{\mathscr{C}}(W, D)$ che rendono il diagramma

$$\begin{tikzcd}
& C & \\
A \arrow[ur, "s_1"] \arrow[dr, "f_1"'] & W \arrow[l, dotted, "g_1"'] \arrow[r, dotted, "g_2"] & D \arrow[ul, "s_2"'] \arrow[dl, "f_2"] \\
& B &
\end{tikzcd}$$

commutativo in $\mathscr{C}$ ed $s_1 \circ g_1 \in \mathcal{S}$.

Si può dimostrare che $R(\mathcal{S}, \mathscr{C})$ è una ben definita relazione di equivalenza.

Si definisce la totalità $\mathscr{C}[\mathcal{S}^{-1}]$ ponendo:

- $\mathrm{Ob}(\mathscr{C}[\mathcal{S}^{-1}]) := \mathrm{Ob}(\mathscr{C})$;
- per ogni A e B in $\mathrm{Ob}(\mathscr{C})$

$$\mathrm{Hom}_{\mathscr{C}[\mathcal{S}^{-1}]}(A, B) :=$$

$$:= \Big\{ (\partial^0(\sigma), \sigma, f) \in \mathrm{Ob}(\mathscr{C}) \times \mathrm{Ar}(\mathcal{S}) \times \mathrm{Ar}(\mathscr{C}) \ \Big| \ \partial^0_{\mathscr{C}}(\sigma) = \partial^0_{\mathscr{C}}(f) \ \&$$

$$\& \ \partial^1_{\mathscr{C}}(\sigma) = A \ \& \ \partial^1_{\mathscr{C}}(f) = B \Big\}$$

- l'uguaglianza tra gli oggetti di $\mathscr{C}[\mathcal{S}^{-1}]$ è la stessa di $\mathscr{C}$;

- per ogni A e B in $\mathrm{Ob}(\mathscr{C})$, $(\partial^0(\sigma_1), \sigma_1, f_1)$ e $(\partial^0(\sigma_2), \sigma_2, f_2)$ in $\mathrm{Hom}_{\mathscr{C}[\mathcal{S}^{-1}]}(A, B)$

$$(\partial^0(\sigma_1), \sigma_1, f_1) =_{\mathscr{C}[\mathcal{S}^{-1}]} (\partial^0(\sigma_2), \sigma_2, f_2)$$

se e solo se

$$(\partial^0(\sigma_1), \sigma_1, f_1) R(\mathcal{S}, \mathscr{C}) (\partial^0(\sigma_2), \sigma_2, f_2)$$

- per ogni A in $\mathrm{Ob}(\mathscr{C})$

$$\mathrm{id}_A^{\mathscr{C}[\mathcal{S}^{-1}]} := (A, \mathrm{id}_A, \mathrm{id}_A)$$

- per ogni B_1, B_2, C_1, C_2 e C_3 oggetti di $\mathscr{C}$, $s_1 \in \mathrm{Hom}_{\mathcal{S}}(B_1, C_1)$, $f_1 \in \mathrm{Hom}_{\mathscr{C}}(B_1, C_2)$, $s_2 \in \mathrm{Hom}_{\mathcal{S}}(B_2, C_2)$ ed $f_2 \in \mathrm{Hom}_{\mathscr{C}}(B_2, C_3)$ si determina A_1 in $\mathrm{Ob}(\mathscr{C})$, $s_3 \in \mathrm{Hom}_{\mathcal{S}}(A_1, B_1)$ ed f_3 in $\mathrm{Hom}_{\mathscr{C}}(A_1, B_2)$ che rendono il diagramma

$$\begin{tikzcd} A_1 \arrow[r, dotted, "f_3"] \arrow[d, dotted, "s_3"'] & B_2 \arrow[d, "s_2"] \\ B_1 \arrow[r, "f_1"'] & C_2 \end{tikzcd}$$

  commutativo in $\mathscr{C}$ e si definisce

$$(B_2, s_2, f_2) \circ_{\mathscr{C}[\mathcal{S}^{-1}]} (B_1, s_1, f_1) := (A_1, s_1 \circ s_3, f_2 \circ f_3)$$

Si costruisce l'assegnazione

$$Q_{\mathcal{S}} : \mathscr{C} \longrightarrow \mathscr{C}[\mathcal{S}^{-1}]$$

ponendo

- $Q_{\mathcal{S}}(C) := C$,
- $Q_{\mathcal{S}}(f) := (A, \mathrm{id}_A, f)$

per ogni A, B e C in $\mathrm{Ob}(\mathscr{C})$ ed f in $\mathrm{Hom}_{\mathscr{C}}(A, B)$.

Si può provare che $\mathscr{C}[\mathcal{S}^{-1}]$ è una categoria ben definita, le operazioni in essa non dipendono dai rappresentanti e che $(\mathscr{C}[\mathcal{S}^{-1}], Q_{\mathcal{S}})$ è una ben definita localizzazione di Ore a destra di $\mathscr{C}$ rispetto ad $\mathcal{S}$. Questa coppia si chiama *localizzazione canonica destra di $\mathscr{C}$ rispetto ad $\mathcal{S}$*.

Notazione 5.12. *Nel caso in cui sia chiaro dal contesto, non si specificherà a pedice il sistema moltiplicativo dove si sta localizzando nel funtore $Q_{\mathcal{S}}$ scrivendo semplicemente Q.*

Lemma 5.13. Siano:

- $\mathscr{C}$ una categoria;
- $\mathcal{S}$ un sistema moltiplicativamente chiuso di $\mathscr{C}$;
- A e B in $\mathrm{Ob}(\mathscr{C})$;
- $(Q, \mathscr{D})$ una localizzazione a destra di Ore rispetto ad $\mathcal{S}$;
- f, g in $\mathrm{Hom}_{\mathscr{D}}(A, B)$.

Allora esistono:

- C in $\mathrm{Ob}(\mathscr{C})$,
- σ in $\mathrm{Hom}_{\mathcal{S}}(C, A)$,
- f_1 e g_1 in $\mathrm{Hom}_{\mathscr{C}}(C, B)$

tali che

$$\begin{cases} f = Q(f_1) \circ (Q(\sigma))^{-1} \\ \\ g = Q(g_1) \circ (Q(\sigma))^{-1} \end{cases} .$$

5.4 Localizzazione di categorie additive

In questa sezione si vede come la struttura additiva della categoria di partenza induce canonicamente una struttura additiva sulla localizzazione.

Proposizione 5.14. Siano $\mathscr{C}$ una categoria pre-additiva, $\mathcal{S}$ un sistema moltiplicativo destro di $\mathscr{C}$ e $(Q, \mathscr{D})$ una localizzazione di Ore destra di $\mathscr{C}$ su $\mathcal{S}$. Allora:

(a) esiste un'unica struttura pre-additiva di $\mathscr{D}$ che rende Q un funtore additivo;

(b) per ogni funtore additivo $F : \mathscr{C} \to \mathscr{B}$ che rende invertibile ogni elemento di $\mathcal{S}$ e tale che $\mathscr{B}$ sia una categoria pre-additiva. Allora l'unico funtore $G : \mathscr{D} \to \mathscr{B}$ tale che $G \circ Q = F$, è additivo;

(c) se la categoria $\mathscr{C}$ è additiva, allora $\mathscr{D}$ è additiva se munita della struttura pre-additiva del punto (a).

Definizione 5.15 (Sistema nullo). Siano $(\mathscr{C}, T, \partial)$ una categoria triangolata ed $\mathcal{N}$ una sottocollezione di $\mathrm{Ob}(\mathscr{C})$. Allora $\mathcal{N}$ si dice *sistema nullo di* $(\mathscr{C}, T, \partial)$ se e solo se:

(NULL1) $0 \in \mathcal{N}$;

(NULL2) per ogni C oggetto di $\mathscr{C}$ vale l'equivalenza

$$C \in \mathcal{N} \iff T(C) \in \mathcal{N};$$

(NULL3) per ogni

$$\Delta : \ A \xrightarrow{\ f\ } B \xrightarrow{\ g\ } C \xrightarrow{\ h\ } T(A)$$

triangolo distinto vale l'implicazione

$$\Big(A \in \mathcal{N} \ \& \ B \in \mathcal{N}\Big) \implies C \in \mathcal{N}.$$

Definizione 5.16 (Sistema Q). Siano $(\mathscr{C}, T, \partial)$ una categoria triangolata ed $\mathcal{N}$ un sistema nullo di $(\mathscr{C}, T, \partial)$. Allora per ogni A e B oggetti di $\mathscr{C}$ si definisce

$$M(A, B) :=$$

$$:= \Big\{ f \in \mathrm{Hom}_{\mathscr{C}}(A, B) \ \Big| \text{ esiste un T. D.}$$

$$A \xrightarrow{\ f\ } B \xrightarrow{\ g\ } C \xrightarrow{\ h\ } T(A) \quad \text{t.c. } \ C \in \mathcal{N} \Big\}$$

ed

$$\mathcal{S}Q \ := \bigcup_{(A,B) \in \mathrm{Ob}(\mathscr{C}) \times \mathrm{Ob}(\mathscr{C})} M(A, B).$$

Definizione 5.17 (Sottocategoria $\mathcal{N}Q$). Siano $(\mathscr{C}, T, \partial)$ una categoria triangolata ed $\mathcal{N}$ un sistema nullo di $(\mathscr{C}, T, \partial)$. Si indica con $\mathcal{N}Q$, la sottocategoria di $\mathscr{C}$ definita ponendo:

- $\mathrm{Ob}(\mathcal{N}Q) := \mathrm{Ob}(\mathscr{C})$;
- $\mathrm{Hom}_{\mathcal{N}Q}(A, B) := M(A, B)$, per ogni A e B in $\mathrm{Ob}(\mathscr{C})$.

Lemma 5.18 (Carattere dei sistemi nulli). Siano $(\mathscr{C}, T, \partial)$ una categoria triangolata ed $\mathcal{N}$ un sistema nullo di $(\mathscr{C}, T, \partial)$. Allora $\mathcal{N}Q$ è un sistema fortemente moltiplicativo destro e sinistro di $\mathscr{C}$.

Teorema 5.19 (Esistenza della categoria quoziente). Siano $(\mathscr{C}, T, \partial)$ una categoria triangolata ed $\mathcal{N}$ un sistema nullo di $(\mathscr{C}, T, \partial)$. Allora esiste una localizzazione destra di Ore di $\mathscr{C}$ tramite $\mathcal{N}Q$.

Dimostrazione. Il **Lemma del Carattere dei sistemi nulli** implica che $\mathcal{N}Q$ è un sistema fortemente moltiplicativo destro e sinistro. La sezione 5.3 implica la tesi. $\square$

Notazione 5.20. *Siano $(\mathscr{C}, T, \partial)$ una categoria triangolata ed $\mathcal{N}$ un sistema nullo di $(\mathscr{C}, T, \partial)$. Allora la localizzazione canonica destra di $\mathscr{C}$ tramite $\mathcal{N}Q$ si indica con $\mathscr{C}/\mathcal{N}$.*

Lemma 5.21. Siano $(\mathscr{C}, T, \partial)$ una categoria triangolata e $(\mathscr{D}, S, \varphi)$ una sottocategoria piena, saturata e triangolata di $(\mathscr{C}, T, \partial)$. Allora:

- $\mathscr{D}$ è un sistema nullo di $(\mathscr{C}, T, \partial)$.

Lemma 5.22. Siano:

- $(\mathscr{C}, T, \partial)$ una categoria triangolata;
- $\mathscr{D}$ una sottocategoria piena e saturata di $\mathscr{C}$;
- $\mathrm{Ob}(\mathscr{D})$ un sistema nullo di $(\mathscr{C}, T, \partial)$;
- $S : \mathscr{D} \to \mathscr{D}$ la restrizione e co-restrizione di T a $\mathscr{D}$;
- φ la collezione di tutti i triangoli di ∂ aventi tutti i termini in $\mathscr{D}$.

Allora:

(1) $(\mathscr{D}, S, \varphi)$ è sottocategoria piena, saturata e triangolata di $(\mathscr{C}, T, \partial)$;

(2) per ogni $\sigma : X_1 \xrightarrow{f} X_2 \xrightarrow{g} X_3 \xrightarrow{h} T(X_1)$ in ∂, i in $\{1, 2, 3\}$, j in $\{1, 2, 3\} \setminus \{i\}$ e k in $\{1, 2, 3\} \setminus \{i, j\}$ vale l'implicazione

$$\Big(X_i \in \mathscr{D} \ \&\ X_j \in \mathscr{D}\Big) \implies X_k \in \mathscr{D}.$$

5.5 Localizzazione rispetto ad un sistema nullo

Siano $(\mathscr{C}, T, \partial)$ una categoria triangolata ed $\mathcal{N}$ un sistema nullo di $(\mathscr{C}, T, \partial)$. Si consideri la localizzazione destra canonica $(\mathscr{C}/\mathcal{N}, Q)$ di $\mathscr{C}$ su $\mathcal{N}$ e l'assegnazione

$$\widehat{T} : \mathscr{C}/\mathcal{N} \longrightarrow \mathscr{C}/\mathcal{N}$$

$$A \longmapsto T(A)$$

$$[(A, s, f)]_\sim \longmapsto [(T(A), T(s), T(f))]_\sim$$

dove $\partial^0(f) = \partial^0(s)$.

Si defìnsce ρ come la famiglia dei triangoli δ in $\mathscr{C}/\mathcal{N}$ che ammettono un triangolo a in ∂ per cui $Q(a) \cong \delta$.

Si possono dimostrare i seguenti fatti:

- $(\mathscr{C}/\mathcal{N}, \widehat{T}, \rho)$ è una categoria triangolata;
- Q è un funtore triangolato di $(\mathscr{C}/\mathcal{N}, \widehat{T}, \rho)$ in $(\mathscr{C}/\mathcal{N}, \widehat{T}, \rho)$;
- per ogni C in $\mathrm{Ob}(\mathscr{C})$ vale l'equivalenza

$$C \in \mathcal{N} \iff Q(C) \cong 0\,;$$

- per ogni $F : \mathscr{C} \to \mathscr{D}$ funtore triangolato tra categorie triangolate tale che $F(X) \cong 0$ per ogni $X \in \mathrm{Ob}(\mathcal{N})$, esiste un unico funtore $R : \mathscr{C}/\mathcal{N} \to \mathscr{D}$ tale che $F = R \circ Q$.

Capitolo 6

t-Strutture nelle categorie triangolate

In questo capitolo si vedono le t-*strutture* nelle categorie triangolate. La stesura di questo capitolo trae ispirazione da [PROS1].

6.1 Definizioni

Definizione 6.1 (**t-struttura**). Sia $(\mathscr{C}, T, \partial)$ una categoria triangolata. Una t-*struttura* su $(\mathscr{C}, T, \partial)$ è una coppia $(\mathscr{D}, \mathscr{E})$ tale che:

(TS1) $\mathscr{D}$ ed $\mathscr{E}$ sono sottocategorie piene e saturate di $\mathscr{C}$;

(TS2) $T(\mathscr{D})$ è sottocategoria di $\mathscr{D}$ e $T^{-1}(\mathscr{E})$ è sottocategoria di $\mathscr{E}$;

(TS3) per ogni A in $\mathrm{Ob}(\mathscr{D})$ e B in $\mathrm{Ob}(T^{-1}(\mathscr{E}))$ vale $\mathrm{Hom}_{\mathscr{C}}(A, B) = 0$;

(TS4) per ogni B oggetto di $\mathscr{C}$ esiste un T. D.

$$A \xrightarrow{f} B \xrightarrow{g} C \xrightarrow{h} T(A)$$

tale che A è oggetto di $\mathscr{D}$ e C è oggetto di $T^{-1}(\mathscr{E})$.

Definizione 6.2 (**Cuore di una t-struttura**). Siano $(\mathscr{C}, T, \partial)$ una categoria triangolata e $(\mathscr{D}, \mathscr{E})$ una t-struttura su $(\mathscr{C}, T, \partial)$. Il *cuore* di $(\mathscr{D}, \mathscr{E})$ è la sottocategoria piena di $\mathscr{C}$ avente $\mathrm{Ob}(\mathscr{D}) \cap \mathrm{Ob}(\mathscr{E})$ come classe di oggetti.

Notazione 6.3. *Siano $(\mathscr{C}, T, \partial)$ una categoria triangolata, $(\mathscr{D}, \mathscr{E})$ una t-struttura su $(\mathscr{C}, T, \partial)$ ed n in $\mathbb{Z}$. Allora si indica con:*

- $\mathscr{C}^{\leq 0}$ *la categoria $\mathscr{D}$;*
- $\mathscr{C}^{\geq 0}$ *la categoria $\mathscr{E}$;*

- $[0]$ *il funtore* $\mathrm{id}_{\mathscr{C}}$*;*
- $[n]$ *il funtore* T^n*;*
- $\mathscr{C}^{\leq n}$ *la categoria* $\mathscr{D}[-n]$*;*
- $\mathscr{C}^{\geq n}$ *la categoria* $\mathscr{E}[-n]$*;*
- $\mathcal{H}$ *il cuore di* $(\mathscr{D}, \mathscr{E})$*;*
- $\mathcal{H}^n$ *la sottocategoria piena di* $\mathscr{C}$ *avente* $\mathrm{Ob}(\mathscr{C}^{\leq n}) \cap \mathrm{Ob}(\mathscr{C}^{\geq n})$ *come classe di oggetti.*

6.2 Proprietà principali

In questa sezione si studiano i fatti più importanti che caratterizzano le t-strutture nelle categorie triangolate.

Lemma 6.4. Siano:

- $(\mathscr{C}, [1], \partial)$ una categoria triangolata;
- $(\mathscr{C}^{\leq 0}, \mathscr{C}^{\geq 0})$ una t-struttura su $(\mathscr{C}, [1], \partial)$;
- a, b e k in $\mathbb{Z}$.

Allora:

(1) $\mathscr{C}^{\leq k} \subseteq \mathscr{C}^{\leq 0}$ se $k \leq 0$;

(2) $\mathscr{C}^{\geq k} \subseteq \mathscr{C}^{\geq 0}$ se $k \geq 0$;

(3) $\mathscr{C}^{\leq a} \subseteq \mathscr{C}^{\leq b}$ se $a \leq b$;

(4) $\mathscr{C}^{\geq a} \subseteq \mathscr{C}^{\geq b}$ se $a \geq b$.

Dimostrazione.

(1): ora si prova l'inclusione $\mathscr{C}^{\leq -2} \subseteq \mathscr{C}^{\leq 0}$. Si ha

$$\mathscr{C}^{\leq -2} = \mathscr{C}^{\leq -1}[1] \subseteq \mathscr{C}^{\leq 0}[1] =$$

$$= \mathscr{C}^{\leq -1} \subseteq \mathscr{C}^{\leq 0}$$

tramite l'assioma (TS2). Si supponga $k \leq -3$. Allora

$$\mathscr{C}^{\leq k} = \mathscr{C}^{\leq k+1}[1] \subseteq \mathscr{C}^{\leq 0}[1] =$$

$$= \mathscr{C}^{\leq -1} \subseteq \mathscr{C}^{\leq 0}$$

per l'ipotesi induttiva. Si conclude tramite il principio di induzione su $-k \in \mathbb{N}$.

(2): si ragiona similmente al punto (1).

(3): il punto (1) implica

$$(\star) \quad \mathscr{C}^{\leq a-b} \subseteq \mathscr{C}^{\leq 0}\,.$$

Applicando il funtore $[-b]$ ad entrambi i membri di $(\star)$ si ottiene

$$\mathscr{C}^{\leq a} \subseteq \mathscr{C}^{\leq b}\,.$$

(4): si svolge una prova analoga al punto (3).

□

Lemma 6.5. Siano:

- $(\mathscr{C}, [1], \partial)$ una categoria triangolata;
- $(\mathscr{C}^{\leq 0}, \mathscr{C}^{\geq 0})$ una t-struttura su $(\mathscr{C}, [1], \partial)$;
- a e b in $\mathbb{Z}$;
- $a \lneq b$;
- $(X, Y) \in \mathrm{Ob}(\mathscr{C}^{\leq a}) \times \mathrm{Ob}(\mathscr{C}^{\geq b})$.

Allora

$$\mathrm{Hom}_{\mathscr{C}}(X, Y) \cong 0\,.$$

Dimostrazione. Tramite le definizioni si ottiene

$$\mathscr{C}^{\geq b} = \mathscr{C}^{\geq 1}[b+1]\,.$$

Le ipotesi implicano $a - b - 1 \leq 0$. Allora $\mathscr{C}^{a-b-1} \subseteq \mathscr{C}^{\leq 0}$, per il Lemma 6.4. E pertanto

$$(\star_1) \quad \mathrm{Hom}_{\mathscr{C}}(X[-b-1], Y[-b-1]) \cong 0\,.$$

Essendo $[b+1]$ e $[-b-1]$ due funtori uno l'inverso dell'altro, si ottiene l'invertibilità della mappa

$$F_{X,Y} : \mathrm{Hom}_{\mathscr{C}}(X[-b-1], Y[-b-1]) \longrightarrow \mathrm{Hom}_{\mathscr{C}}(X, Y)$$

$$\theta \longmapsto \theta[b+1]$$

Allora la relazione $(\star_1)$ implica la tesi. $\square$

Proposizione 6.6. Siano $(\mathscr{C}, T, \partial)$ una categoria triangolata, $(\mathscr{C}^{\leq 0}, \mathscr{C}^{\geq 0})$ una t-struttura su $(\mathscr{C}, T, \partial)$, A_0 oggetto di $\mathscr{C}^{\leq 0}$ e

$$B_0 \xrightarrow{f} B \xrightarrow{g} B_1 \xrightarrow{h} B_0[1]$$

un triangolo distinto tale che $B_0 \in \mathrm{Ob}(\mathscr{C}^{\leq 0})$ e $B_1 \in \mathrm{Ob}(\mathscr{C}^{\geq 1})$. Allora $\mathrm{Hom}_{\mathscr{C}}(A_0, f)$ è un isomorfismo di $\mathcal{A}b$.

Dimostrazione. Gli assiomi (trcat1) e (trcat4) implicano che la successione

$$\sigma :\ B_1[-1] \xrightarrow{-h[-1]} B_0 \xrightarrow{f} B \xrightarrow{g} B_1$$

è un triangolo distinto. Dalla Proposizione 3.25 si deduce che il funtore $\mathrm{Hom}_{\mathscr{C}}(A_0, \_)$ è co-omologico. Allora la successione

$$\mathrm{Hom}_{\mathscr{C}}(A_0, \sigma) :\ \mathrm{Hom}_{\mathscr{C}}(A_0, B_1[-1]) \xrightarrow{h[-1]_*} \mathrm{Hom}_{\mathscr{C}}(A_0, B_0) \xrightarrow{f_*}$$

$$\xrightarrow{f_*} \mathrm{Hom}_{\mathscr{C}}(A_0, B) \xrightarrow{g_*} \mathrm{Hom}_{\mathscr{C}}(A_0, B_1)$$

è esatta nella categoria dei gruppi abeliani.

- $\mathrm{Hom}_{\mathscr{C}}(A_0, B_1[-1]) \cong 0$: le ipotesi implicano $B_1[-1] \in \mathrm{Ob}(\mathscr{C}^{\geq 1}[-1]) = \mathrm{Ob}(\mathscr{C}^{\geq 2})$. Il Lemma 6.5 e la relazione $A_0 \in \mathrm{Ob}(\mathscr{C}^{\leq 0})$, permettono di dedurre l'asserto.
- $\mathrm{Hom}_{\mathscr{C}}(A_0, B_1) \cong 0$: essendo $A_0 \in \mathrm{Ob}(\mathscr{C}^{\leq 0})$ e $B_1 \in \mathrm{Ob}(\mathscr{C}^{\geq 1})$, si ottiene l'asserto direttamente dagli assiomi delle t-strutture.

Quindi l'esattezza di $\mathrm{Hom}_{\mathscr{C}}(A_0, \sigma)$ implica che $\mathrm{Hom}_{\mathscr{C}}(A_0, f)$ è un isomorfismo di gruppi abeliani. $\square$

Dualizzando la prova si ottiene

Proposizione 6.7. Siano $(\mathscr{C}, T, \partial)$ una categoria triangolata, $(\mathscr{C}^{\leq 0}, \mathscr{C}^{\geq 0})$ una t-struttura su $(\mathscr{C}, T, \partial)$, B_1 oggetto di $\mathscr{C}^{\geq 1}$ e

$$A_0 \xrightarrow{f} A \xrightarrow{g} A_1 \xrightarrow{h} A_0[1]$$

un triangolo distinto tale che $A_0 \in \mathrm{Ob}(\mathscr{C}^{\leq 0})$ ed $A_1 \in \mathrm{Ob}(\mathscr{C}^{\geq 1})$. Allora $\mathrm{Hom}_{\mathscr{C}}(g, B_1)$ è un isomorfismo di $\mathcal{A}b$.

Proposizione 6.8. Siano $(\mathscr{C}, T, \partial)$ una categoria triangolata, $(\mathscr{C}^{\leq 0}, \mathscr{C}^{\geq 0})$ una t-struttura su $(\mathscr{C}, T, \partial)$, n in $\mathbb{Z}$, A_n oggetto di $\mathscr{C}^{\leq n}$ e

$$B_n \xrightarrow{f} B \xrightarrow{g} B_{n+1} \xrightarrow{h} B_n[1]$$

un triangolo distinto tale che $B_n \in \mathrm{Ob}(\mathscr{C}^{\leq n})$ e $B_{n+1} \in \mathrm{Ob}(\mathscr{C}^{\geq n+1})$. Allora $\mathrm{Hom}_{\mathscr{C}}(A_n, f)$ è un isomorfismo di $\mathcal{A}b$.

Proposizione 6.9. Siano $(\mathscr{C}, T, \partial)$ una categoria triangolata, $(\mathscr{C}^{\leq 0}, \mathscr{C}^{\geq 0})$ una t-struttura su $(\mathscr{C}, T, \partial)$, n in $\mathbb{Z}$, B_{n+1} oggetto di $\mathscr{C}^{\geq n+1}$ e

$$A_n \xrightarrow{f} A \xrightarrow{g} A_{n+1} \xrightarrow{h} A_n[1]$$

un triangolo distinto tale che $A_n \in \mathrm{Ob}(\mathscr{C}^{\leq n})$ e $A_{n+1} \in \mathrm{Ob}(\mathscr{C}^{\geq n+1})$. Allora $\mathrm{Hom}_{\mathscr{C}}(g, B_{n+1})$ è un isomorfismo di $\mathcal{A}b$.

Notazione 6.10. *Siano $(\mathscr{C}, T, \partial)$ una categoria triangolata, $(\mathscr{C}^{\leq 0}, \mathscr{C}^{\geq 0})$ una* t*-struttura su $(\mathscr{C}, T, \partial)$ ed X un oggetto di $\mathscr{C}$. Il triangolo distinto di X determinato dalla struttura esplicita di $(\mathscr{C}^{\leq 0}, \mathscr{C}^{\geq 0})$ si indica con*

$$\tau^{\leq 0}(X) \xrightarrow{T^{\leq 0}(X)} X \xrightarrow{T^{\geq 1}(X)} \tau^{\geq 1}(X) \xrightarrow{h_X^0} \tau^{\leq 0}(X)[1]$$

dove $\tau^{\leq 0}(X) \in \mathrm{Ob}(\mathscr{C}^{\leq 0})$ e $\tau^{\geq 1}(X) \in \mathrm{Ob}(\mathscr{C}^{\geq 1})$.

Notazione 6.11. *Siano $(\mathscr{C}, T, \partial)$ una categoria triangolata, $(\mathscr{C}^{\leq 0}, \mathscr{C}^{\geq 0})$ una* t*-struttura su $(\mathscr{C}, T, \partial)$ ed n in $\mathbb{Z}$. Allora si indicano rispettivamente con*

$$I^{\leq n} : \mathscr{C}^{\leq n} \longrightarrow \mathscr{C}$$

ed

$$I^{\geq n} : \mathscr{C}^{\geq n} \longrightarrow \mathscr{C}$$

i funtori inclusione di $\mathscr{C}^{\leq n}$ in $\mathscr{C}$ e di $\mathscr{C}^{\geq n}$ in $\mathscr{C}$.

Teorema 6.12 (Esistenza dei funtori $\tau^{\leq 0}$ e $\tau^{\geq 1}$). Siano $(\mathscr{C}, T, \partial)$ una categoria triangolata e $(\mathscr{C}^{\leq 0}, \mathscr{C}^{\geq 0})$ una t-struttura su $(\mathscr{C}, T, \partial)$. Allora esistono funtori $\tau^{\leq 0} : \mathscr{C} \to \mathscr{C}^{\leq 0}$ e $\tau^{\geq 1} : \mathscr{C} \to \mathscr{C}^{\geq 1}$ tali che $I^{\leq 0} \dashv \tau^{\leq 0}$ e $\tau^{\geq 1} \dashv I^{\geq 1}$.

Dimostrazione.

- Calcolo di $\tau^{\leq 0}$: la Notazione 6.10 determina il funtore $\tau^{\leq 0}$ sugli oggetti di $\mathscr{C}$. Siano A, B in $\mathrm{Ob}(\mathscr{C})$ ed f in $\mathrm{Hom}_{\mathscr{C}}(A, B)$. La Proposizione 6.6 implica che la mappa $\mathrm{Hom}_{\mathscr{C}}(\tau^{\leq 0}(A), T^{\leq 0}(B))$ è un isomorfismo di gruppi abeliani. Allora si definisce

$$\tau^{\leq 0}(f) := \Bigg((\mathrm{Hom}_{\mathscr{C}}(\tau^{\leq 0}(A), T^{\leq 0}(B)))^{-1} \circ \mathrm{Hom}_{\mathscr{C}}(\tau^{\leq 0}(A), f) \circ$$

$$\circ \mathrm{Hom}_{\mathscr{C}}(\tau^{\leq 0}(A), T^{\leq 0}(A)) \Bigg)_{|\,\mathrm{id}}$$

  La funtorialità di $\mathrm{Hom}_{\mathscr{C}}(\tau^{\leq 0}(A), \_)$ implica che $\tau^{\leq 0} : \mathscr{C} \to \mathscr{C}^{\leq 0}$ è un ben definito funtore covariante.

- Calcolo di $\tau^{\geq 1}$: la Notazione 6.10 determina il funtore $\tau^{\geq 1}$ sugli oggetti di $\mathscr{C}$. Con la stessa metodologia del primo punto si definisce

$$\tau^{\geq 1}(f) := \Bigg((\mathrm{Hom}_{\mathscr{C}}(T^{\geq 1}(A), \tau^{\geq 1}(B)))^{-1} \circ \mathrm{Hom}_{\mathscr{C}}(f, \tau^{\geq 1}(B)) \circ$$

$$\circ \mathrm{Hom}_{\mathscr{C}}(T^{\geq 1}(B), \tau^{\geq 1}(B)) \Bigg)_{|\,\mathrm{id}}$$

  per ogni A, B in $\mathrm{Ob}(\mathscr{C})$ ed f in $\mathrm{Hom}_{\mathscr{C}}(A, B)$. Si ottiene l'asserto dualizzando la dimostrazione.

- $I^{\leq 0} \dashv \tau^{\leq 0}$: siano C in $\mathrm{Ob}(\mathscr{C}^{\leq 0})$ e D in $\mathrm{Ob}(\mathscr{C})$. La Proposizione 6.6 implica che $\mathrm{Hom}_{\mathscr{C}}(C, T^{\leq 0}(D))$ è un isomorfismo in $\mathcal{A}b$. Si definisce

$$A^{\leq 0}_{C,D} := \Big(\mathrm{Hom}_{\mathscr{C}}(C, T^{\leq 0}(D)) \Big)^{-1}$$

$$A^{\leq 0} := \Big(A^{\leq 0}_{X,Y} \Big)_{(X,Y) \in \mathrm{Ob}(\mathscr{C}^{\leq 0}) \times \mathrm{Ob}(\mathscr{C})}$$

  Ora si prova che $A^{\leq 0}$ è una ben definita aggiunzione da $I^{\leq 0}$ a $\tau^{\leq 0}$.

(ADJ-B): la definizione di $A^{\leq 0}$ implica che $A^{\leq 0}_{X,Y}$ è una mappa biiettiva, per ogni (X, Y) in $\mathrm{Ob}(\mathscr{C}^{\leq 0}) \times \mathrm{Ob}(\mathscr{C})$.

(ADJ-L): si svolge una verifica diretta.

(ADJ-R): si svolge un calcolo diretto osservando che per ogni X, Y in $\mathrm{Ob}(\mathscr{C})$ ed f in $\mathrm{Hom}_{\mathscr{C}}(X, Y)$ vale l'uguaglianza $T^{\leq 0}(Y) \circ \tau^{\leq 0}(f) = f \circ T^{\leq 0}(X)$. Questa ultima relazione discende direttamente dalla definizione di $\tau^{\leq 0}$.

- $\tau^{\geq 1} \dashv I^{\geq 1}$: si dualizza quello che è stato scritto nel punto precedente, definendo

$$A^{\geq 1}_{C,D} := \mathrm{Hom}_{\mathscr{C}}(T^{\geq 1}(C), D)$$

$$A^{\geq 1} := \left(A^{\geq 1}_{X,Y}\right)_{(X,Y) \in \mathrm{Ob}(\mathscr{C}) \times \mathrm{Ob}(\mathscr{C}^{\geq 1})}$$

per ogni C in $\mathrm{Ob}(\mathscr{C})$ e D in $\mathrm{Ob}(\mathscr{C}^{\geq 1})$.

$\square$

Teorema 6.13 **(Naturalità delle** $T01$**).** Siano $(\mathscr{C}, T, \partial)$ una categoria triangolata e $(\mathscr{C}^{\leq 0}, \mathscr{C}^{\geq 0})$ una t-struttura su $(\mathscr{C}, T, \partial)$. Allora:

(a) la famiglia

$$T^{\leq 0} := \left(T^{\leq 0}(C)\right)_{C \in \mathrm{Ob}(\mathscr{C})}$$

è una trasformazione naturale da $I^{\leq 0} \circ \tau^{\leq 0}$ verso $\mathrm{id}_{\mathscr{C}}$.

(b) la famiglia

$$T^{\geq 1} := \left(T^{\geq 1}(C)\right)_{C \in \mathrm{Ob}(\mathscr{C})}$$

è una trasformazione naturale da $\mathrm{id}_{\mathscr{C}}$ verso $I^{\geq 1} \circ \tau^{\geq 1}$.

Dimostrazione.

(a): siano A e B in $\mathrm{Ob}(\mathscr{C})$ ed f in $\mathrm{Hom}_{\mathscr{C}}(A, B)$. L'uguaglianza

$$\tau^{\leq 0}(f) = \Big((\mathrm{Hom}_{\mathscr{C}}(\tau^{\leq 0}(A), T^{\leq 0}(B)))^{-1} \circ \mathrm{Hom}_{\mathscr{C}}(\tau^{\leq 0}(A), f) \circ$$

$$\left.\circ \operatorname{Hom}_{\mathscr{C}}(\tau^{\leq 0}(A), T^{\leq 0}(A))\right)_{|\,\mathrm{id}}$$

vale per definzione di $\tau^{\leq 0}$ sui morfismi. Allora

$$\operatorname{Hom}_{\mathscr{C}}(\tau^{\leq 0}(A), T^{\leq 0}(B))_{|\tau^{\leq 0}(f)} = \Big(\operatorname{Hom}_{\mathscr{C}}(\tau^{\leq 0}(A), f) \circ$$

$$\left.\circ \operatorname{Hom}_{\mathscr{C}}(\tau^{\leq 0}(A), T^{\leq 0}(A))\right)_{|\,\mathrm{id}}$$

E pertanto il diagramma

$$\begin{tikzcd} \tau^{\leq 0}(A) \arrow[r, "T^{\leq 0}(A)"] \arrow[d, "\tau^{\leq 0}(f)"'] & A \arrow[d, "f"] \\ \tau^{\leq 0}(B) \arrow[r, "T^{\leq 0}(B)"'] & B \end{tikzcd}$$

commuta in $\mathscr{C}$. L'arbitrarietà di f implica l'asserto.

(b): Si dualizza il punto precedente.

□

Definizione 6.14 (**Funtori** $\tau\, n$)**.** Siano $(\mathscr{C}, T, \partial)$ una categoria triangolata, $(\mathscr{C}^{\leq 0}, \mathscr{C}^{\geq 0})$ una t-struttura su $(\mathscr{C}, T, \partial)$ ed n in $\mathbb{Z}$. Si definiscono i funtori $\tau^{\leq n} : \mathscr{C} \to \mathscr{C}^{\leq n}$ e $\tau^{\geq n} : \mathscr{C} \to \mathscr{C}^{\geq n}$ ponendo

$$\begin{cases} \tau^{\leq n} := [-n] \circ \tau^{\leq 0} \circ [n] \\ \\ \tau^{\geq n} := [-n+1] \circ \tau^{\geq 1} \circ [n-1] \ . \end{cases}$$

Definizione 6.15 (**Trasformazioni** $T\, n$)**.** Siano $(\mathscr{C}, T, \partial)$ una categoria triangolata, $(\mathscr{C}^{\leq 0}, \mathscr{C}^{\geq 0})$ una t-struttura su $(\mathscr{C}, T, \partial)$, X in $\mathrm{Ob}(\mathscr{C})$ ed n in $\mathbb{Z}$. Allora:

$$\begin{cases} T^{\leq n}(X) := [-n]\left(T^{\leq 0}([n](X))\right) \\ \\ T^{\geq n}(X) := [-n+1]\left(T^{\geq 1}([n-1](X))\right) \ . \end{cases}$$

Teorema 6.16 (Naturalità delle Tn). Siano $(\mathscr{C}, T, \partial)$ una categoria triangolata, $(\mathscr{C}^{\leq 0}, \mathscr{C}^{\geq 0})$ una t-struttura su $(\mathscr{C}, T, \partial)$ ed n in $\mathbb{Z}$. Allora:

(a) la famiglia

$$T^{\leq n} := \left(T^{\leq n}(C)\right)_{C \in \mathrm{Ob}(\mathscr{C})}$$

è una trasformazione naturale da $I^{\leq n} \circ \tau^{\leq n}$ verso $\mathrm{id}_{\mathscr{C}}$;

(b) la famiglia

$$T^{\geq n} := \left(T^{\geq n}(C)\right)_{C \in \mathrm{Ob}(\mathscr{C})}$$

è una trasformazione naturale da $\mathrm{id}_{\mathscr{C}}$ verso $I^{\geq n} \circ \tau^{\geq n}$.

Dimostrazione. È una conseguenza diretta del Teorema 6.13 e del carattere iso di $[z]$, per ogni z in $\mathbb{Z}$. □

Definizione 6.17. Siano $(\mathscr{C}, T, \partial)$ una categoria triangolata, $(\mathscr{C}^{\leq 0}, \mathscr{C}^{\geq 0})$ una t-struttura su $(\mathscr{C}, T, \partial)$ ed n in $\mathbb{Z}$. Allora si definisce

- $$A^{\leq n}_{X,Y} := \left(\mathrm{Hom}_{\mathscr{C}}(X, T^{\leq n}(Y))\right)^{-1}$$

- $$A^{\geq n}_{Y,Z} := \mathrm{Hom}_{\mathscr{C}}(T^{\geq n}(Y), Z)$$

- $$A^{\leq n} := \left(A^{\leq n}_{R,S}\right)_{(R,S) \in \mathrm{Ob}(\mathscr{C}^{\leq n}) \times \mathrm{Ob}(\mathscr{C})}$$

- $$A^{\geq n} := \left(A^{\geq n}_{S,L}\right)_{(S,L) \in \mathrm{Ob}(\mathscr{C}) \times \mathrm{Ob}(\mathscr{C}^{\geq n})}$$

per ogni X in $\mathrm{Ob}(\mathscr{C}^{\leq n})$, Y in $\mathrm{Ob}(\mathscr{C})$ e Z in $\mathrm{Ob}(\mathscr{C}^{\geq n})$.

Teorema 6.18 (Aggiunzione dei funtori $\tau^{\leq n}$ e $\tau^{\geq n}$). Siano $(\mathscr{C}, T, \partial)$ una categoria triangolata, $(\mathscr{C}^{\leq 0}, \mathscr{C}^{\geq 0})$ una t-struttura su $(\mathscr{C}, T, \partial)$ ed n in $\mathbb{Z}$. Allora:

- $A^{\leq n}$ è una aggiunzione di $I^{\leq n}$ in $\tau^{\leq n}$;
- $A^{\geq n}$ è una aggiunzione di $\tau^{\geq n}$ in $I^{\geq n}$.

Dimostrazione. Discende direttamente dalle definizioni, dal Teorema 6.12 e dal carattere iso di $[n]$. □

Lemma 6.19. Siano $(\mathscr{C}, T, \partial)$ una categoria triangolata, $(\mathscr{C}^{\leq 0}, \mathscr{C}^{\geq 0})$ una t-struttura su $(\mathscr{C}, T, \partial)$, n in $\mathbb{Z}$. Allora $\mathscr{C}^{\leq n}$ e $\mathscr{C}^{\geq n}$ sono sottocategorie piene e saturate di $\mathscr{C}$.

Dimostrazione. Discende direttamente dall'assioma (TS1) e dal fatto che $[n]$ è isomorfismo di categorie. $\square$

Lemma 6.20. Siano $(\mathscr{C}, T, \partial)$ una categoria triangolata, $(\mathscr{C}^{\leq 0}, \mathscr{C}^{\geq 0})$ una t-struttura su $(\mathscr{C}, T, \partial)$, n in $\mathbb{Z}$. Allora $\mathcal{H}^n$ è sottocategoria saturata di $\mathscr{C}$.

Dimostrazione. Discende direttamente dal Lemma 6.19. $\square$

L'autore non ha trovato dimostrazioni del seguente Lemma, in alcuna fonte citata in Bibliografia.

Lemma 6.21. Siano $(\mathscr{C}, T, \partial)$ una categoria triangolata, $(\mathscr{C}^{\leq 0}, \mathscr{C}^{\geq 0})$ una t-struttura su $(\mathscr{C}, T, \partial)$, n in $\mathbb{Z}$, Z un oggetto zero di $\mathscr{C}$. Allora $Z \in \mathrm{Ob}(\mathcal{H}^n)$ e Z è oggetto zero di $\mathcal{H}^n$.

Dimostrazione. Dimostro la tesi per la sottocategoria $\mathscr{C}^{\leq n}$, per $\mathscr{C}^{\geq n}$ si dualizza la prova. Le ipotesi implicano che Z è oggetto terminale di $\mathscr{C}$, allora l'aggiunzione $I^{\leq n} \dashv \tau^{\leq n}$ implica che $\tau^{\leq n}(Z)$ è oggetto terminale di $\mathscr{C}^{\leq n}$. Ora provo che $Z \cong_{\mathscr{C}} \tau^{\leq n}(Z)$. Il carattere zero di Z in $\mathscr{C}$ implica la commutatività del diagramma

$$\begin{tikzcd}
Z \arrow[r, "?_{\tau^{\leq n}(Z)}"] \arrow[dr, "\mathrm{id}_Z"'] & \tau^{\leq n}(Z) \arrow[d, "!_{\tau^{\leq n}(Z)}"] \\
& Z
\end{tikzcd}$$

in $\mathscr{C}$. Il Lemma 6.19 implica che $\mathscr{C}^{\leq n}$ è sottocategoria piena di $\mathscr{C}$. Allora

$$!_{\tau^{\leq n}(Z)} \circ ?_{\tau^{\leq n}(Z)} \in \mathrm{Ar}(\mathscr{C}^{\leq n})$$

Ed essendo $\tau^{\leq n}(Z)$ oggetto terminale di $\mathscr{C}^{\leq n}$ si trova

$$!_{\tau^{\leq n}(Z)} \circ ?_{\tau^{\leq n}(Z)} = \mathrm{id}_{\tau^{\leq n}(Z)} \quad .$$

E pertanto ottengo $Z \cong_{\mathscr{C}} \tau^{\leq n}(Z)$. Il Lemma 6.19 implica che $\mathscr{C}^{\leq n}$ è sottocategoria saturata di $\mathscr{C}$. Allora Z è oggetto di $\mathscr{C}^{\leq n}$. Essendo Z oggetto zero di $\mathscr{C}$, si ottiene che Z è oggetto zero di $\mathscr{C}^{\leq n}$. $\square$

Definizione 6.22 (Funtori co-omologici associati ad una t-struttura). Siano $(\mathscr{C}, T, \partial)$ una categoria triangolata, $(\mathscr{C}^{\leq 0}, \mathscr{C}^{\geq 0})$ una t-struttura su $(\mathscr{C}, T, \partial)$ ed n in $\mathbb{Z}$. Allora si definisce il funtore

$$\mathrm{H}^n : \mathscr{C} \longrightarrow \mathcal{H}$$

ponendo

$$\begin{cases} \mathrm{H}^n(X) := [n]\left(\tau^{\leq n}(\tau^{\geq n}(X))\right) & \forall X \in \mathrm{Ob}(\mathscr{C}) \\ \\ \mathrm{H}^n(f) := [n]\left(\tau^{\leq n}(\tau^{\geq n}(f))\right) & \forall f \in \mathrm{Ar}(\mathscr{C}) \end{cases} .$$

L'assegnazione H^n è detta *n-esimo funtore co-omologico* associato alla t-struttura $(\mathscr{C}^{\leq 0}, \mathscr{C}^{\geq 0})$.

Proposizione 6.23. Siano $(\mathscr{C}, T, \partial)$ una categoria triangolata, $(\mathscr{C}^{\leq 0}, \mathscr{C}^{\geq 0})$ una t-struttura di $(\mathscr{C}, T, \partial)$ ed n in $\mathbb{Z}$. Allora:

(a) Per ogni C oggetto di $\mathscr{C}$ esiste un unico morfismo $h^n_C : \tau^{\geq n+1}(C) \to [1](\tau^{\leq n}(C))$ che rende la successione di morfismi

$$\tau^{\leq n}(C) \xrightarrow{T^{\leq n}(C)} C \xrightarrow{T^{\geq n+1}(C)} \tau^{\geq n+1}(C) \xrightarrow{h^n_C} \tau^{\leq n}(C)[1]$$

un triangolo distinto;

(b) la collezione $h^n := (h^n_A)_{A \in \mathrm{Ob}(\mathscr{C})}$ è una trasformazione naturale di $\tau^{\geq n+1}$ in $[1] \circ \tau^{\leq n}$.

Dimostrazione.

(a): Per ogni X oggetto di $\mathscr{C}$ si definisce

$$h^n_X := [-n]\Big((-1)^n \circ h^0_{X[n]}\Big) .$$

Per gli assiomi delle categorie triangolate e la Notazione 6.10 si ha che il triangolo

$$\tau^{\leq n}(X) \xrightarrow{T^{\leq n}(X)} X \xrightarrow{T^{\geq n+1}(X)} \tau^{\geq n+1}(X) \xrightarrow{h^n_X} \tau^{\leq n}(X)[1]$$

è distinto e che $\tau^{\leq n}(X) \in \mathrm{Ob}(\mathscr{C}^{\leq n})$, $\tau^{\geq n+1}(X) \in \mathrm{Ob}(\mathscr{C}^{\geq n+1})$.

Siano η^n_X e ξ^n_X frecce di $\mathscr{C}$ che rendono i triangoli

$$\delta^n_X:\ \tau^{\leq n}(X) \xrightarrow{T^{\leq n}(X)} X \xrightarrow{T^{\geq n+1}(X)} \tau^{\geq n+1}(X) \xrightarrow{\eta^n_X} \tau^{\leq n}(X)[1]$$

e

$$\alpha^n_X:\ \tau^{\leq n}(X) \xrightarrow{T^{\leq n}(X)} X \xrightarrow{T^{\geq n+1}(X)} \tau^{\geq n+1}(X) \xrightarrow{\xi^n_X} \tau^{\leq n}(X)[1]$$

distinti. Il Lemma 6.5 implica

$$\mathrm{Hom}_{\mathscr{C}}(\tau^{\leq n}(X)[1], \tau^{\geq n+1}(X)) \cong 0\,.$$

Allora utilizzando il Lemma 3.30 sulle sequenze α^n_X e δ^n_X, ottengo $\eta^n_X = \xi^n_X$.

(b): Naturalità di h^0: siano C e B in $\mathrm{Ob}(\mathscr{C})$ ed f in $\mathrm{Hom}_{\mathscr{C}}(C,B)$. Il Teorema 6.13 implica che il diagramma

$$\begin{tikzcd}
\tau^{\leq 0}(C) \arrow[r, "T^{\leq 0}(C)"] \arrow[d, "\tau^{\leq 0}(f)"'] & C \arrow[d, "f"] \\
\tau^{\leq 0}(B) \arrow[r, "T^{\leq 0}(B)"'] & B
\end{tikzcd}$$

commuta in $\mathscr{C}$. L'assioma (trcat5) implica l'esistenza di un morfismo $u^1_{C,B} : \tau^{\geq 1}(C) \to \tau^{\geq 1}(B)$ che rende il diagramma

$$\begin{tikzcd}
\tau^{\leq 0}(C) \arrow[r, "T^{\leq 0}(C)"] \arrow[d, "\tau^{\leq 0}(f)"'] & C \arrow[r, "T^{\geq 1}(C)"] \arrow[d, "f"] & \tau^{\geq 1}(C) \arrow[r, "h^0_C"] \arrow[d, dotted, "u^1_{C,B}"] & \tau^{\leq 0}(C)[1] \arrow[d, "{[1](\tau^{\leq 0}(f))}"] \\
\tau^{\leq 0}(B) \arrow[r, "T^{\leq 0}(B)"'] & B \arrow[r, "T^{\geq 1}(B)"'] & \tau^{\geq 1}(B) \arrow[r, "h^0_B"'] & \tau^{\leq 0}(B)[1]
\end{tikzcd}$$

commutativo.

Il Teorema 6.13 implica la commutatività del diagramma

$$\begin{tikzcd}
C \arrow[r, "T^{\geq 1}(C)"] \arrow[d, "f"'] & \tau^{\geq 1}(C) \arrow[d, "\tau^{\geq 1}(f)"] \\
B \arrow[r, "T^{\geq 1}(B)"'] & \tau^{\geq 1}(B)
\end{tikzcd}$$

in $\mathscr{C}$.

Allora

$$A^{\geq 1}_{C,\tau^{\geq 1}(B)}(u^1_{C,B}) = u^1_{C,B} \circ T^{\geq 1}(C) =$$

$$= T^{\geq 1}(B) \circ f = \tau^{\geq 1}(f) \circ T^{\geq 1}(C) =$$

$$= A^{\geq 1}_{C,\tau^{\geq 1}(B)}(\tau^{\geq 1}(f)).$$

Essendo $A^{\geq 1}$ una aggiunzione da $\tau^{\geq 1}$ ad $I^{\geq 1}$, si trova $u^1_{C,B} = \tau^{\geq 1}(f)$. L'arbitrarietà di C, B ed f implica l'asserto.

Naturalità di h^n: discende dalla naturalità di h^0 e dalla sua definizione.

□

Lemma 6.24. Siano $(\mathscr{C}, T, \partial)$ una categoria triangolata, $(\mathscr{C}^{\leq 0}, \mathscr{C}^{\geq 0})$ una t-struttura di $(\mathscr{C}, T, \partial)$, n in $\mathbb{Z}$ e C un oggetto di $\mathscr{C}$. Allora le seguenti condizioni sono equivalenti:

(1) $C \in \mathrm{Ob}(\mathscr{C}^{\leq n})$;

(2) la freccia $T^{\leq n}(C)$ è un isomorfismo;

(3) $\tau^{\leq n}(C) \cong C$;

(4) $\tau^{\geq n+1}(C) \cong 0$.

Dimostrazione.

(1) ⇒ (2): le ipotesi implicano che $A^{\leq n}_{C,C}$ è un isomorfismo di gruppi abeliani ben definito. Si definisce

$$\varphi := A^{\leq n}_{C,C}\big(\,\mathrm{id}_C\,\big)\,.$$

Ora si prova che φ è il morfismo inverso di $T^{\leq n}(C)$. Le definizioni di φ e $A^{\leq n}_{\tau^{\leq n}(C),C}$ implicano la commutatività del diagramma

$$\begin{tikzcd} C \arrow[r, "\varphi"] \arrow[dr, "\mathrm{id}_C"'] & \tau^{\leq n}(C) \arrow[d, "T^{\leq n}(C)"] \\ & C \end{tikzcd}$$

Si ha

$$\left(A^{\leq n}_{\tau^{\leq n}(C),C}\right)^{-1}(\varphi\circ T^{\leq n}(C)) =$$

$$= \big(\mathrm{Hom}_{\mathscr{C}}(\tau^{\leq n}(C), T^{\leq n}(C))\big)\,(\varphi\circ T^{\leq n}(C)) =$$

$$= T^{\leq n}(C)\circ\varphi\circ T^{\leq n}(C) = T^{\leq n}(C) =$$

$$= \left(A^{\leq n}_{\tau^{\leq n}(C),C}\right)^{-1}\big(\,\mathrm{id}_{\tau^{\leq n}(C)}\,\big)\,.$$

Essendo $A^{\leq n}$ una aggiunzione da $I^{\leq n}$ a $\tau^{\leq n}$, si ottiene

$$\varphi\circ\big(T^{\leq n}(C)\big) = \mathrm{id}_{\tau^{\leq n}(C)}\,.$$

(2) ⇒ (3): immediato dalla definizione di essere "isomorfo a".

(3) ⇒ (1): discende direttamente dal fatto che $\mathscr{C}^{\leq n}$ è una sottocategoria piena e saturata di $\mathscr{C}$.

(2) ⇔ (4): dalla Proposizione 6.23 si ottiene che il triangolo

$$\tau^{\leq n}(C) \xrightarrow{\;T^{\leq n}(C)\;} X \xrightarrow{\;T^{\geq n+1}(C)\;} \tau^{\geq n+1}(C) \xrightarrow{\;h^n_C\;} \tau^{\leq n}(C)[1]$$

è distinto. Allora il Lemma 3.27 implica che $\tau^{\geq n+1}(C)\cong 0$ se e solo se $T^{\leq n}(C)$ è isomorfismo.

$\square$

Dualizzando la prova si ottiene

Lemma 6.25. Siano $(\mathscr{C}, T, \partial)$ una categoria triangolata, $(\mathscr{C}^{\leq 0}, \mathscr{C}^{\geq 0})$ una t-struttura di $(\mathscr{C}, T, \partial)$, n in $\mathbb{Z}$ e C un oggetto di $\mathscr{C}$. Allora le seguenti condizioni sono equivalenti:

(1) $C \in \mathrm{Ob}(\mathscr{C}^{\geq n})$;

(2) la freccia $T^{\geq n}(C)$ è un isomorfismo;

(3) $\tau^{\geq n}(C) \cong C$;

(4) $\tau^{\leq n-1}(C) \cong 0$.

Proposizione 6.26. Siano:

- $(\mathscr{C}, T, \partial)$ una categoria triangolata;
- $(\mathscr{C}^{\leq 0}, \mathscr{C}^{\geq 0})$ una t-struttura di $(\mathscr{C}, T, \partial)$;
- $$\sigma : \ A \xrightarrow{\ f\ } B \xrightarrow{\ g\ } C \xrightarrow{\ h\ } T(A)$$

  un triangolo distinto.

Si supponga che A e C siano oggetti di $\mathscr{C}^{\geq 0}$. Allora $B \in \mathrm{Ob}(\mathscr{C}^{\geq 0})$.

Dimostrazione. Ora si prova $\tau^{\leq -1}(X) \cong 0$. La Proposizione 3.25 implica che il funtore $\mathrm{Hom}_{\mathscr{C}}(\tau^{\leq -1}(B), \_)$ è co-omologico. Allora la successione

$$\mathrm{Hom}_{\mathscr{C}}(\tau^{\leq -1}(B), \sigma) : \ \mathrm{Hom}_{\mathscr{C}}(\tau^{\leq -1}(B), A) \xrightarrow{\ f_*\ } \mathrm{Hom}_{\mathscr{C}}(\tau^{\leq -1}(B), B) \xrightarrow{\ g_*\ }$$

$$\xrightarrow{\ g_*\ } \mathrm{Hom}_{\mathscr{C}}(\tau^{\leq -1}(B), C)$$

è esatta in $\mathcal{A}b$, essendo σ un triangolo distinto.
Avendo $\tau^{\leq -1}(X) \in \mathrm{Ob}(\mathscr{C}^{\leq -1})$ e $\{A, C\} \subseteq \mathrm{Ob}(\mathscr{C}^{\geq 0})$ si ottiene

$$\mathrm{Hom}_{\mathscr{C}}(\tau^{\leq -1}(B), A) \cong 0 \cong \mathrm{Hom}_{\mathscr{C}}(\tau^{\leq -1}(B), C)$$

utilizzando gli assiomi delle t-strutture. E pertanto l'esattezza di $\mathrm{Hom}_{\mathscr{C}}(\tau^{\leq -1}(X), \sigma)$ implica

$$\mathrm{Hom}_{\mathscr{C}}(\tau^{\leq -1}(B), B) \cong 0\,.$$

La mappa $A^{\leq -1}_{\tau^{\leq -1}(B),B}$ è un isomorfismo di gruppi abeliani, per il Teorema 6.18. Allora

$$\mathrm{Hom}_{\mathscr{C}}(\tau^{\leq -1}(B), \tau^{\leq -1}(B)) \cong 0\,.$$

Questo implica l'asserto. Dal Lemma 6.25 si deduce $B \in \mathrm{Ob}(\mathscr{C}^{\geq 0})$. $\square$

Dualizzando la prova si ottiene

Proposizione 6.27. Siano:

- $(\mathscr{C}, T, \partial)$ una categoria triangolata;
- $(\mathscr{C}^{\leq 0}, \mathscr{C}^{\geq 0})$ una t-struttura di $(\mathscr{C}, T, \partial)$;
- $$\sigma : \; A \xrightarrow{f} B \xrightarrow{g} C \xrightarrow{h} T(A)$$

  un triangolo distinto.

Si supponga che A e C siano oggetti di $\mathscr{C}^{\leq 0}$. Allora $B \in \mathrm{Ob}(\mathscr{C}^{\leq 0})$.

Proposizione 6.28. Siano:

- $(\mathscr{C}, T, \partial)$ una categoria triangolata;
- n in $\mathbb{Z}$;
- $(\mathscr{C}^{\leq 0}, \mathscr{C}^{\geq 0})$ una t-struttura di $(\mathscr{C}, T, \partial)$;
- $$\sigma : \; A \xrightarrow{f} B \xrightarrow{g} C \xrightarrow{h} T(A)$$

  un triangolo distinto.

Si supponga che A e C siano oggetti di $\mathscr{C}^{\geq n}$. Allora $B \in \mathrm{Ob}(\mathscr{C}^{\geq n})$.

Proposizione 6.29. Siano:

- $(\mathscr{C}, T, \partial)$ una categoria triangolata;
- n in $\mathbb{Z}$;
- $(\mathscr{C}^{\leq 0}, \mathscr{C}^{\geq 0})$ una t-struttura di $(\mathscr{C}, T, \partial)$;
- $$\sigma : \; A \xrightarrow{f} B \xrightarrow{g} C \xrightarrow{h} T(A)$$

  un triangolo distinto.

Si supponga che A e C siano oggetti di $\mathscr{C}^{\leq n}$. Allora $B \in \mathrm{Ob}(\mathscr{C}^{\leq n})$.

Corollario 6.30. Siano:

- $(\mathscr{C}, T, \partial)$ una categoria triangolata;
- n in $\mathbb{Z}$;
- $(\mathscr{C}^{\leq 0}, \mathscr{C}^{\geq 0})$ una t-struttura di $(\mathscr{C}, T, \partial)$;
- $$A \xrightarrow{f} B \xrightarrow{g} C \xrightarrow{h} T(A)$$
  un triangolo distinto;

Si supponga che A e C siano oggetti di $\mathcal{H}^n$. Allora $B \in \mathrm{Ob}(\mathcal{H}^n)$.

Dimostrazione. È immediata conseguenza delle Proposizioni 6.28 e 6.29. □

Lemma 6.31. Siano:

- $(\mathscr{C}, T, \partial)$ una categoria triangolata;
- $(\mathscr{C}^{\leq 0}, \mathscr{C}^{\geq 0})$ una t-struttura di $(\mathscr{C}, T, \partial)$;
- $$A \xrightarrow{f} B \xrightarrow{g} C \xrightarrow{h} A[1]$$
  un triangolo distinto.

Si supponga che A e B siano oggetti di $\mathcal{H}$. Allora

$$C \in \mathrm{Ob}(\mathscr{C}^{\geq -1}) \cap \mathrm{Ob}(\mathscr{C}^{\leq 0}) .$$

Dimostrazione. Le ipotesi e gli assiomi (trcat1) e (trcat4) implicano che la sequenza

$$\sigma : \ B \xrightarrow{g} C \xrightarrow{h} A[1] \xrightarrow{-f[1]} B[1]$$

è un triangolo distinto. Le ipotesi implicano

$$A[1] \in \mathrm{Ob}(\mathscr{C}^{\leq 0})[1] = \mathrm{Ob}(\mathscr{C}^{\leq -1}) \subseteq \mathrm{Ob}(\mathscr{C}^{\leq 0})$$

per gli assiomi delle t-strutture. Allora utilizzando il Lemma 6.29 sul triangolo σ si ottiene

$$C \in \mathrm{Ob}(\mathscr{C}^{\leq 0})$$

essendo $\{B, A[1]\} \subseteq \mathrm{Ob}(\mathscr{C}^{\leq 0})$.
Gli assiomi delle categorie triangolate implicano che la sequenza

$$\sigma' : \; B[-1] \xrightarrow{-g[-1]} C[-1] \xrightarrow{-h[-1]} A \xrightarrow{f} B$$

è un triangolo distinto. Dalle ipotesi si deduce

$$B[-1] \in \mathrm{Ob}(\mathscr{C}^{\geq 0})[-1] = \mathrm{Ob}(\mathscr{C}^{\geq 1}) \subseteq \mathrm{Ob}(\mathscr{C}^{\geq 0})$$

Utilizzando il Lemma 6.28 sul triangolo σ' si ottiene

$$C[-1] \in \mathrm{Ob}(\mathscr{C}^{\geq 0})\,.$$

E pertanto

$$C \in \mathrm{Ob}(\mathscr{C}^{\geq 0})[1] = \mathrm{Ob}(\mathscr{C}^{\geq -1})\,.$$

□

Lemma 6.32. Siano $(\mathscr{C}, T, \partial)$ una categoria triangolata, $(\mathscr{C}^{\leq 0}, \mathscr{C}^{\geq 0})$ una t-struttura su $(\mathscr{C}, T, \partial)$, n in $\mathbb{Z}$. Allora $\mathscr{C}^{\leq n}$ e $\mathscr{C}^{\geq n}$ sono sottocategorie additive di $\mathscr{C}$.

Dimostrazione. Si dimostra il Lemma per $\mathscr{C}^{\leq n}$, per l'altra sottocategoria è sufficiente dualizzare la dimostrazione. Siano A e B oggetti di $\mathscr{C}^{\leq n}$. Si considera un biprodotto $(A \oplus B, \pi_A, \pi_B, \varepsilon_A, \varepsilon_B)$ di (A, B) in $\mathscr{C}$. Il Lemma 3.29 implica che la sequenza

$$\sigma : \; A \xrightarrow{\varepsilon_A} A \oplus B \xrightarrow{\pi_B} B \xrightarrow{0} A[1]$$

è un triangolo distinto. Utilizzando il Lemma 6.29 su σ, si ottiene $A \oplus B \in \mathrm{Ob}(\mathscr{C}^{\leq n})$. Il Lemma 6.19 implica la pienezza di $\mathscr{C}^{\leq n}$ in $\mathscr{C}$. Allora $(A \oplus B, \pi_A, \pi_B, \varepsilon_A, \varepsilon_B)$ è biprodotto di (A, B) in $\mathscr{C}^{\leq n}$.

Il Lemma 6.21 implica che $\mathscr{C}^{\leq n}$ contiene ogni oggetto zero di $\mathscr{C}$. Ora la prova è conclusa. □

Lemma 6.33. Siano $(\mathscr{C}, T, \partial)$ una categoria triangolata, $(\mathscr{C}^{\leq 0}, \mathscr{C}^{\geq 0})$ una t-struttura su $(\mathscr{C}, T, \partial)$, n in $\mathbb{Z}$. Allora $\mathcal{H}^n$ è una sottocategoria piena, saturata ed additiva di $\mathscr{C}$.

Dimostrazione. È conseguenza diretta dei Lemmi 6.19 e 6.32. □

Proposizione 6.34. Siano:

- $(\mathscr{C}, T, \partial)$ una categoria triangolata;
- $(\mathscr{C}^{\leq 0}, \mathscr{C}^{\geq 0})$ una t-struttura di $(\mathscr{C}, T, \partial)$;

- n ed m in $\mathbb{Z}$.

Allora:

(a) se $n \leq m$ allora $\tau^{\leq m} \circ \tau^{\leq n}$, $\tau^{\leq n} \circ \tau^{\leq m}$ e $\tau^{\leq n}$ sono a due a due naturalmente isomorfi;

(b) se $n \leq m$ allora $\tau^{\geq m} \circ \tau^{\geq n}$, $\tau^{\geq n} \circ \tau^{\geq m}$ e $\tau^{\geq m}$ sono a due a due naturalmente isomorfi;

(c) se $m \lneq n$ allora $\tau^{\leq m} \circ \tau^{\geq n}$ e $\tau^{\geq n} \circ \tau^{\leq m}$ sono entrambi naturalmente isomorfi al funtore zero.

Dimostrazione.

(a): le ipotesi implicano $\mathscr{C}^{\leq n} \subseteq \mathscr{C}^{\leq m}$, essendo $(\mathscr{C}^{\leq 0}, \mathscr{C}^{\geq 0})$ una t-struttura di $(\mathscr{C}, T, \partial)$. Allora per ogni X in $\mathrm{Ob}(\mathscr{C}^{\leq n})$ si ha $\tau^{\leq n}(X) \in \mathrm{Ob}(\mathscr{C}^{\leq m})$. Il Lemma 6.24 implica che la freccia

$$T^{\leq m}(\tau^{\leq n}(X)) : \tau^{\leq m}(\tau^{\leq n}(X)) \to \tau^{\leq n}(X)$$

è un isomorfismo di $\mathscr{C}$, per ogni X oggetto di $\mathscr{C}$. Dal Teorema 6.16 si deduce che la famiglia

$$\left(T^{\leq m}(\tau^{\leq n}(X))\right)_{X \in \mathrm{Ob}(\mathscr{C})}$$

è un isomorfismo naturale da $\tau^{\leq m} \circ \tau^{\leq n}$ a $\tau^{\leq n}$.

Sia X in $\mathrm{Ob}(\mathscr{C})$. La pienezza di $\mathscr{C}^{\leq n}$ e $\mathscr{C}^{\leq m}$, l'inclusione $\mathscr{C}^{\leq n} \subseteq \mathscr{C}^{\leq m}$ implicano che il seguente

$$A^{\leq n}_{\tau^{\leq n}(X), \tau^{\leq m}(X)}\left(A^{\leq m}_{\tau^{\leq n}(X), X}\left((A^{\leq n}_{\tau^{\leq n}(X), X})^{-1}(\mathrm{id})\right)\right)$$

è un morfismo ben definito in $\mathscr{C}$, da $\tau^{\leq n}(\tau^{\leq m})(X)$ a $\tau^{\leq n}(X)$, e si denota con ψ_X.

Sempre per gli stessi motivi il morfismo

$$A^{\leq n}_{\tau^{\leq n}(\tau^{\leq m}(X)), X}\left((A^{\leq m}_{\tau^{\leq n}(\tau^{\leq m}(X)), X})^{-1}\left((A^{\leq n}_{\tau^{\leq n}(\tau^{\leq m}(X)), \tau^{\leq m}(X)})^{-1}(\mathrm{id})\right)\right)$$

è un ben definito in $\mathscr{C}$, da $\tau^{\leq n}(X)$ a $\tau^{\leq n}(\tau^{\leq m})(X)$. Si indica questo morfismo con φ_X.

Essendo $A^{\leq n}$ e $A^{\leq m}$ aggiunzioni, si trova che ψ_X e φ_X sono uno l'inverso dell'altro e che φ_X definisce un isomorfismo naturale da $\tau^{\leq n}$ a $\tau^{\leq n} \circ \tau^{\leq m}$.

(b): si dualizza la prova del punto precedente.

(c): le ipotesi implicano $m+1 \leq n$. Gli assiomi delle t-strutture implicano $\mathscr{C}^{\geq n} \subseteq \mathscr{C}^{\geq m+1}$. Quindi per ogni X in $\mathrm{Ob}(\mathscr{C})$ si ha $\tau^{\geq n}(X) \in \mathrm{Ob}(\mathscr{C}^{\geq m+1})$. Il Lemma 6.25 implica $\tau^{\leq m}(\tau^{\geq n}(X)) \cong 0$. Per dedurre la relazione $\tau^{\geq n} \circ \tau^{\leq m} \cong_{\text{nat. iso.}} 0$, si svolgono calcoli simili.

□

Teorema 6.35. Siano:

- $(\mathscr{C}, T, \partial)$ una categoria triangolata;
- $(\mathscr{C}^{\leq 0}, \mathscr{C}^{\geq 0})$ una t-struttura di $(\mathscr{C}, T, \partial)$;
- a ed b in $\mathbb{Z}$.

Allora esiste un unico isomorfismo naturale $\eta : \tau^{\geq a} \circ \tau^{\leq b} \to \tau^{\leq b} \circ \tau^{\geq a}$ che rende il diagramma

$$\Delta_C : \quad \begin{tikzcd} \tau^{\leq b}(C) \arrow[r, "T^{\leq b}(C)"] \arrow[d, "T^{\geq a}(\tau^{\leq b}(C))"'] & C \arrow[r, "T^{\geq a}(C)"] & \tau^{\geq a}(C) \\ \tau^{\geq a}(\tau^{\leq b}(C)) \arrow[rr, dotted, "\eta_C"'] & & \tau^{\leq b}(\tau^{\geq a}(C)) \arrow[u, "T^{\leq b}(\tau^{\geq a}(C))"'] \end{tikzcd}$$

commutativo in $\mathscr{C}$, per ogni C in $\mathrm{Ob}(\mathscr{C})$.

Dimostrazione. Si distinguono i casi $b \lneq a$ ed $a \leq b$.

- $b \lneq a$: il Lemma 6.5 implica

$$\mathrm{Hom}_{\mathscr{C}}(\tau^{\leq b}(C), \tau^{\geq a}(C)) \cong 0 \,.$$

Allora

$$T^{\geq a}(C) \circ T^{\leq b}(C) = 0 \,.$$

La Proprosizione 6.34 implica

$$\tau^{\geq a}(\tau^{\leq b}(C)) \cong 0 \cong \tau^{\leq b}(\tau^{\geq a}(C)) \,.$$

E pertanto $\eta_C = 0$ ed il diagramma Δ_C commuta. La naturalità e l'unicità di η sono chiare.

- $a \leq b$: questo punto è molto tecnico e lungo, perciò è omesso. Vedere ad esempio la prova del punto (c) della Proposizione 1.3.9. in [PROS1].

□

Lemma 6.36. Siano:

- $(\mathscr{C}, T, \partial)$ una categoria triangolata;
- $(\mathscr{C}^{\leq 0}, \mathscr{C}^{\geq 0})$ una t-struttura di $(\mathscr{C}, T, \partial)$;
- $$\alpha :\ X \xrightarrow{f} Y \xrightarrow{g} Z \xrightarrow{h} X[1]$$
  un triangolo distinto;
- $\mathcal{H}$ il cuore di $(\mathscr{C}^{\leq 0}, \mathscr{C}^{\geq 0})$.

Si supponga che X ed Y siano oggetti di $\mathcal{H}$. Allora:

(a) $h[-1] \circ (T^{\leq 0}(Z[-1]))$ è un nucleo di f in $\mathcal{H}$;

(b) $(T^{\geq 0}(Z)) \circ g$ è un co-nucleo di f in $\mathcal{H}$.

Dimostrazione. Le ipotesi implicano che:

- $$\sigma :\ Y \xrightarrow{g} Z \xrightarrow{h} X[1] \xrightarrow{-f[1]} Y[1]$$
  è un triangolo distinto, per gli assiomi delle categorie triangolate.
- $X[1] \in \mathrm{Ob}(\mathscr{C}^{\leq 0}[1]) = \mathrm{Ob}(\mathscr{C}^{\leq -1}) \subseteq \mathrm{Ob}(\mathscr{C}^{\leq 0})$.

Utilizzando il Lemma 6.31 sul triangolo σ si ottiene

$$Z \in \mathrm{Ob}(\mathscr{C}^{\geq -1}) \cap \mathrm{Ob}(\mathscr{C}^{\leq 0})\,.$$

La relazione $Z \in \mathrm{Ob}(\mathscr{C}^{\leq 0})$ implica che $T^{\leq 0}(Z)$ è isomorfismo di $\mathscr{C}$, per il Lemma 6.25. Allora

$$\tau^{\geq 0}(T^{\leq 0}(Z)) : \tau^{\geq 0}(\tau^{\leq 0}) \to \tau^{\geq 0}(Z)$$

è un isomorfismo in $\mathscr{C}$. Il Teorema 6.35 implica che $\tau^{\geq 0}(\tau^{\leq 0}) \cong \tau^{\leq 0}(\tau^{\geq 0})$. Il Lemma 6.20 implica che $\mathcal{H}$ è una sottocategoria saturata di $\mathscr{C}$. Allora $\tau^{\geq 0}(Z)$ è oggetto di $\mathcal{H}$.

Ora si prova che $\tau^{\leq 0}(Z[-1])$ è oggetto di $\mathcal{H}$. Si ha

$$\tau^{\leq 0}(Z[-1]) \in \mathrm{Ob}(\mathscr{C}^{\leq 0})$$

per definizione di $\tau^{\leq 0}$. Essendo

$$Z \in \mathrm{Ob}(\mathscr{C}^{\geq -1})$$

si trova

$$Z[-1] \in \mathrm{Ob}(\mathscr{C}^{\geq 0}).$$

E pertanto il Lemma 6.25 implica che la freccia

$$T^{\geq 0}(Z[-1]) : Z[-1] \longrightarrow \tau^{\geq 0}(Z[-1])$$

è un isomorfismo di $\mathscr{C}$. Allora la freccia

$$\tau^{\leq 0}(T^{\geq 0}(Z[-1])) : \tau^{\leq 0}(Z[-1]) \longrightarrow \tau^{\leq 0}(\tau^{\geq 0}(Z[-1]))$$

è un isomorfismo in $\mathscr{C}$, per la funtorialità di $\tau^{\leq 0}$. Ora ottengo l'asserto dalla saturazione di $\mathcal{H}$ in $\mathscr{C}$ e dalla relazione $\tau^{\leq 0}(\tau^{\geq 0}(Z[-1])) \in \mathrm{Ob}(\mathcal{H})$.

Sia W un oggetto di $\mathcal{H}$. La Proposizione 3.25 implica la co-omologicità dei funtori $\mathrm{Hom}_{\mathscr{C}}(W, \_)$ ed $\mathrm{Hom}_{\mathscr{C}}(\_\,, W)$. Allora le sequenze

$$\theta_1 : \ \mathrm{Hom}_{\mathscr{C}}(X[1], W) \xrightarrow{h^*} \mathrm{Hom}_{\mathscr{C}}(Z, W) \xrightarrow{g^*} \mathrm{Hom}_{\mathscr{C}}(Y, W) \xrightarrow{f^*} \mathrm{Hom}_{\mathscr{C}}(X, W)$$

$$\theta_2 : \ \mathrm{Hom}_{\mathscr{C}}(W, Y[-1]) \xrightarrow{g[-1]_*} \mathrm{Hom}_{\mathscr{C}}(W, Z[-1]) \xrightarrow{h[-1]_*}$$

$$\xrightarrow{h[-1]_*} \mathrm{Hom}_{\mathscr{C}}(W, X) \xrightarrow{f_*} \mathrm{Hom}_{\mathscr{C}}(W, Y)$$

sono esatte in $\mathcal{A}b$, per il **Teorema della successione lunga in coomologia**. Gli assiomi delle t-strutture implicano

$$\mathrm{Hom}_{\mathscr{C}}(X[1], W) \cong 0 \cong \mathrm{Hom}_{\mathscr{C}}(W, Y[-1])$$

essendo W oggetto di $\mathcal{H}$, $X[1] \in \mathrm{Ob}(\mathscr{C}^{\leq -1})$ ed $Y[-1] \in \mathrm{Ob}(\mathscr{C}^{\geq 1})$. Le mappe $A^{\leq 0}_{W, Z[-1]}$ ed $A^{\geq 0}_{Z,W}$ sono isomorfismi di gruppi abeliani, per il Teorema 6.12. Allora le successioni

$$\theta_3 : \ 0 \longrightarrow \mathrm{Hom}_{\mathscr{C}}(\tau^{\geq 0}(Z), W) \xrightarrow{(T^{\geq 0}(Z) \circ g)^*} \mathrm{Hom}_{\mathscr{C}}(Y, W) \xrightarrow{f^*} \mathrm{Hom}_{\mathscr{C}}(X, W)$$

$$\theta_4 : \ 0 \longrightarrow \mathrm{Hom}_{\mathscr{C}}(W, Z[-1]) \xrightarrow{(h[-1] \circ T^{\leq 0}(Z[-1]))_*} \mathrm{Hom}_{\mathscr{C}}(W, X) \xrightarrow{f_*} \mathrm{Hom}_{\mathscr{C}}(W, Y)$$

sono esatte nella categoria dei gruppi abeliani. L'arbitrarietà di W in $\mathrm{Ob}(\mathcal{H})$ implica la tesi. $\square$

Lemma 6.37. Siano:

- $(\mathscr{C}, T, \partial)$ una categoria triangolata;
- $(\mathscr{C}^{\leq 0}, \mathscr{C}^{\geq 0})$ una t-struttura di $(\mathscr{C}, T, \partial)$;
- $\mathcal{H}$ il cuore di $(\mathscr{C}^{\leq 0}, \mathscr{C}^{\geq 0})$.

Allora ogni freccia di $\mathcal{H}$ è morfismo stretto in $\mathcal{H}$.

Dimostrazione. Siano X, Y oggetti di $\mathcal{H}$ ed f in $\mathrm{Hom}_{\mathcal{H}}(X, Y)$. L'assioma (trcat3) implica l'esistenza di un triangolo distinto

$$\sigma_0 : \ X \xrightarrow{f} Y \xrightarrow{g} Z \xrightarrow{h} X[1] \ .$$

Gli assiomi delle categorie triangolate implicano che la sequenza

$$\sigma_1 : \ Y \xrightarrow{g} Z \xrightarrow{h} X[1] \xrightarrow{-f[1]} Y[1]$$

è un triangolo distinto.
Utilizzando il Lemma 6.31 sul triangolo σ_1 si ottiene

$$Z \in \mathrm{Ob}(\mathscr{C}^{\geq -1}) \cap \mathrm{Ob}(\mathscr{C}^{\leq 0}) \, .$$

Il Lemma 6.36 implica che le frecce

$$T^{\geq 0}(Z) \circ g : Y \to \tau^{\geq 0}(Z)$$

ed

$$h[-1] \circ T^{\leq 0}(Z[-1]) : \tau^{\leq 0}(Z[-1]) \longrightarrow X$$

sono rispettivamente co-nucleo e nucleo di f in $\mathcal{H}$.
L'assioma (trcat3) implica l'esistenza di un triangolo distinto

$$\sigma_2 : \ Y \xrightarrow{T^{\geq 0}(Z) \circ g} \tau^{\geq 0}(Z) \xrightarrow{\alpha} W \xrightarrow{\beta} Y[1] \ .$$

Ora si prova che $W[-1]$ è oggetto di $\mathscr{C}^{\geq 0}$. Direttamente tramite le definizioni si trova che $\tau^{\geq 0}(Z)[-1]$ è oggetto di $\mathscr{C}^{\geq 0}$. Gli assiomi delle categorie triangolate implicano che la sequenza $(\alpha[-1], \beta[-1], T^{\geq 0}(Z) \circ g)$ è un triangolo distinto. Allora utilizzando il Lemma 6.28 su questo triangolo si ottiene l'asserto voluto.

Gli assiomi delle categorie triangolate implicano che la successione

$$\sigma_3 : \; Z \xrightarrow{T^{\geq 0}(Z)} \tau^{\geq 0}(Z) \xrightarrow{h_Z^{-1}} \tau^{\leq -1}(Z)[1] \xrightarrow{-T^{\leq -1}(Z)[1]} Z[1]$$

è un triangolo distinto.
L'assioma (trcat6) implica l'esistenza di un triangolo distinto

$$\sigma_4 : \; X[1] \xrightarrow{u} W \xrightarrow{v} \tau^{\leq -1}(Z)[1] \xrightarrow{w} X[2]$$

che soddisfa

$$\mathrm{DGOCT}(\sigma_1, \sigma_2, \sigma_3, \sigma_4)\,.$$

Sia Δ il diagramma commutativo in $\mathscr{C}$ definito da $\mathrm{DGOCT}(\sigma_1, \sigma_2, \sigma_3, \sigma_4)$.

Gli assiomi delle categorie triangolate implicano che $(-u[-1], -v[-1], -w[-1])$ è un triangolo distinto. Gli oggetti X e $\tau^{\leq -1}(Z)$ appartengono a $\mathscr{C}^{\leq 0}$. Allora il Lemma 6.29 implica

$$W[-1] \in \mathrm{Ob}(\mathscr{C}^{\leq 0})\,.$$

Tramite le informazioni precedentemente ricavate si trova

$$W[-1] \in \mathrm{Ob}(\mathcal{H})\,.$$

Un calcolo diretto mostra

$$T^{\leq -1}(Z)[1][-2] = T^{\leq -1}(Z)[-1] =$$

$$= [-1]([1](T^{\leq 0}(Z[-1]))) = T^{\leq 0}(Z[-1])\,.$$

Allora

$$w[-2] = -h[-1] \circ T^{\leq 0}(Z[-1])$$

dalla commutatività di Δ, e $w[-2]$ è nucleo di f in $\mathcal{H}$. E pertanto il Lemma 6.36 implica che la freccia $T^{\geq 0}(W[-1]) \circ (u[-1])$ è co-immagine di f in $\mathcal{H}$.

Essendo σ_2 un triangolo distinto e $T^{\geq 0}(Z) \circ g$ un co-nucleo di f in $\mathcal{H}$, si trova che $\beta[-1] \circ (T^{\leq 0}(W[-1]))$ è immagine di f in $\mathcal{H}$, per il Lemma 6.36. Avendo dimostrato che

$$W[-1] \in \mathrm{Ob}(\mathcal{H})\,,$$

i Lemmi 6.25 e 6.24 implicano che $T^{\geq 0}(W[-1])$ e $T^{\leq 0}(W[-1])$ sono isomorfismi in $\mathscr{C}$. Allora il diagramma

$$
\Delta' : \quad \begin{tikzcd}
X \arrow[r, "f"] \arrow[d, dotted, "{u[-1]}"'] & Y \\
W[-1] \arrow[r, dotted, "-\operatorname{id}_{W[-1]}"'] & W[-1] \arrow[u, dotted, "{\beta[-1]}"']
\end{tikzcd}
$$

commuta in $\mathscr{C}$, per la commutatività di Δ. Il diagramma Δ' è una fattorizzazione canonica di f in $\mathcal{H}$. Allora $\overline{f}$ è isomorfismo in $\mathcal{H}$, per l'unicità a meno di isomorfismo dei morfismi paralleli. $\square$

Corollario 6.38. Siano:

- $(\mathscr{C}, T, \partial)$ una categoria triangolata;
- $(\mathscr{C}^{\leq 0}, \mathscr{C}^{\geq 0})$ una t-struttura di $(\mathscr{C}, T, \partial)$;
- $\mathcal{H}$ il cuore di $(\mathscr{C}^{\leq 0}, \mathscr{C}^{\geq 0})$.

Allora $\mathcal{H}$ è una categoria abeliana.

Dimostrazione.

- $\mathcal{H}$ additiva: discende direttamente dal Lemma 6.33.
- $\mathcal{H}$ ha tutti nuclei ed i co-nuclei: questa è la conclusione del Lemma 6.36.
- ogni morfismo di $\mathcal{H}$ è stretto: questo è il contenuto del Lemma 6.37.

$\square$

Proposizione 6.39. Siano:

- $(\mathscr{C}, T, \partial)$ una categoria triangolata;
- $(\mathscr{C}^{\leq 0}, \mathscr{C}^{\geq 0})$ una t-struttura su $(\mathscr{C}, T, \partial)$;
- $$\sigma_0 : \ 0 \longrightarrow X \xrightarrow{f} Y \xrightarrow{g} Z \longrightarrow 0$$

  una successione esatta breve in $\mathcal{H}$.

Allora esiste h in $\mathrm{Hom}_{\mathscr{C}}(Z, X[1])$ che rende la sequenza

$$X \xrightarrow{f} Y \xrightarrow{g} Z \xrightarrow{h} X[1]$$

un triangolo distinto.

Dimostrazione. L'assioma (trcat3) implica l'esistenza di un triangolo distinto

$$\sigma_1 : \ X \xrightarrow{f} Y \xrightarrow{u} W \xrightarrow{v} X[1] \ .$$

Ora si prova che W è oggetto di $\mathscr{C}^{\geq 0}$. Il Lemma 6.36 implica che il morfismo

$$\big(- v[-1]\big) \circ T^{\leq 0}(W[-1]) : \tau^{\leq 0}(W[-1]) \to X$$

è nucleo di f in $\mathcal{H}$. L'esattezza di σ_0 in $\mathcal{H}$ implica

$$\tau^{\leq 0}(W[-1]) \cong_{\mathscr{C}} 0\,.$$

La definizione di $\tau^{\leq -1}(W)$ implica

$$\tau^{\leq -1}(W) \cong_{\mathscr{C}} 0$$

Allora il Lemma 6.25 implica

$$W \in \mathrm{Ob}(\mathscr{C}^{\geq 0})$$

e che $T^{\geq 0}(W)$ è isomorfismo in $\mathscr{C}$.
Utilizzando il Lemma 6.36 sul triangolo σ_1 si deduce che la freccia

$$T^{\geq 0}(W) \circ u : Y \to \tau^{\geq 0}(W)$$

è un co-nucleo di f in $\mathcal{H}$. E pertanto l'esattezza di σ_0 in $\mathcal{H}$ implica l'esistenza di un unico isomorfismo ψ in $\mathscr{C}$ che rende il diagramma

$$\begin{tikzcd}
\Delta_1 : \ Y \arrow[rr, "T^{\geq 0}(W)\circ u"] \arrow[dr, "g"'] & & \tau^{\geq 0}(W) \\
& Z \arrow[ur, dotted, "\psi"'] &
\end{tikzcd}$$

commutativo.
La commutatività di Δ_1 e l'assioma (trcat1) implicano che la sequenza

$$\sigma_2 : \ X \xrightarrow{f} Y \xrightarrow{g} Z \xrightarrow{v \circ \left(T^{\geq 0}(W)\right)^{-1} \circ \psi} X[1]$$

è un triangolo distinto. □

Proposizione 6.40. Siano $(\mathscr{C}, T, \partial)$ una categoria triangolata, $(\mathscr{C}^{\leq 0}, \mathscr{C}^{\geq 0})$ una t-struttura su $(\mathscr{C}, T, \partial)$ e $\mathscr{D}$ il suo cuore. Allora il funtore

$$\mathrm{H}^0 : \mathscr{C} \to \mathscr{D}$$

è co-omologico.

Dimostrazione. La prova è lunga e tecnica, per questo motivo è omessa. Vedere ad esempio la dimostrazione del Teorema 1.3.17. in [PROS1]. □

Corollario 6.41. Siano $(\mathscr{C}, T, \partial)$ una categoria triangolata, $(\mathscr{C}^{\leq 0}, \mathscr{C}^{\geq 0})$ una t-struttura su $(\mathscr{C}, T, \partial)$, n in $\mathbb{Z}$ e $\mathscr{D}$ il suo cuore. Allora il funtore

$$\mathrm{H}^n : \mathscr{C} \to \mathscr{D}$$

è co-omologico.

Dimostrazione. Discende direttamente dalla definizione di H^n e dalla Proposizione 6.40. □

6.3 Localizzazione di una t-struttura

Proposizione 6.42. Siano:

- $(\mathscr{C}, T, \partial)$ una categoria triangolata;
- $(\mathscr{C}^{\leq 0}, \mathscr{C}^{\geq 0})$ una t-struttura su $(\mathscr{C}, T, \partial)$;
- $\mathcal{N}$ un sistema nullo di $(\mathscr{C}, T, \partial)$;
- $(Q, \mathscr{C}/\mathcal{N})$ la localizzazione canonica destra di $\mathscr{C}$ rispetto ad $\mathcal{N}$;
- φ la famiglia di tutti i triangoli σ in $\mathscr{C}/\mathcal{N}$ che ammettono un triangolo a in ∂ tale che $\sigma \cong Q(a)$;
- γ la coppia $\left(\mathrm{Ess}(Q_{|\mathscr{C}^{\leq 0}}), \, \mathrm{Ess}(Q_{|\mathscr{C}^{\geq 0}})\right)$.

Allora le seguenti condizioni sono equivalenti:

(a) γ è una t-struttura su $(\mathscr{C}/\mathcal{N}, T, \varphi)$;

(b) per ogni triangolo

$$A_1 \xrightarrow{f} A_0 \xrightarrow{g} M \xrightarrow{h} A_1[1]$$

in ∂ vale l'implicazione

$$\Big(A_1 \in \mathrm{Ob}(\mathscr{C}^{\geq 1}) \ \& \ A_0 \in \mathrm{Ob}(\mathscr{C}^{\leq 0}) \ \& \ M \in \mathcal{N}\Big) \implies \Big(A_1 \in \mathcal{N} \ \& \ A_0 \in \mathcal{N}\Big).$$

Dimostrazione.

(a) $\Rightarrow$ (b): sia

$$\sigma_1 : \ A_1 \xrightarrow{f} A_0 \xrightarrow{g} M \xrightarrow{h} A_1[1]$$

un triangolo distinto che verifica le condizioni: $M \in \mathcal{N}$, $A_1 \in \mathrm{Ob}(\mathscr{C}^{\geq 1})$ ed $A_0 \in \mathrm{Ob}(\mathscr{C}^{\leq 0})$. Allora

$$\sigma_2 : \ Q(A_1) \xrightarrow{Q(f)} Q(A_0) \xrightarrow{Q(g)} Q(M) \xrightarrow{Q(h)} Q(A_1)[1]$$

è triangolo distinto di $\mathscr{C}/\mathcal{N}$. Essendo M in $\mathcal{N}$, si ottiene

$$Q(M) \cong_{\mathscr{C}/\mathcal{N}} 0\,.$$

Il Lemma 3.27 implica che $Q(f)$ è isomorfismo in $\mathscr{C}/\mathcal{N}$. Essendo γ una t-struttura su $(\mathscr{C}/\mathcal{N}, T, \varphi)$, si ottiene

$$\mathrm{Hom}_{\mathscr{C}}(Q(A_0), Q(A_1)) \cong 0\,.$$

Avendo

$$\big(Q(f)\big)^{-1} \in \mathrm{Hom}_{\mathscr{C}}(Q(A_0), Q(A_1))$$

si ottiene $Q(f) = 0$ in $\mathscr{C}/\mathcal{N}$. Allora

$$Q(A_0) \cong_{\mathscr{C}/\mathcal{N}} 0 \cong_{\mathscr{C}/\mathcal{N}} Q(A_1)\,.$$

Questo implica

$$\{A_0, A_1\} \subseteq \mathcal{N}\,.$$

(b) $\Rightarrow$ (a): l'assioma (TS1) è soddisfatto da γ per definizione.

Applicando il funtore Q alle relazioni $\mathscr{C}^{\geq 1} \subseteq \mathscr{C}^{\geq 0}$ e $\mathscr{C}^{\leq -1} \subseteq \mathscr{C}^{\leq 0}$ si dimostra che l'assioma (TS2) è soddisfatto da γ.

Ora si prova che γ soddisfa l'assioma (TS3). Siano Y_0 ed Y_1 oggetti rispettivamente di $\mathrm{Ess}(Q_{|\mathscr{C}^{\leq 0}})$ ed $\mathrm{Ess}(Q_{|\mathscr{C}^{\geq 0}})[-1]$. Allora esistono X_0 in $\mathscr{C}^{\leq 0}$ ed X_1 in $\mathscr{C}^{\geq 1}$ tali che

$$Y_0 \cong_{\mathscr{C}/\mathcal{N}} Q(X_0)$$

e

$$Y_1 \cong_{\mathscr{C}/\mathcal{N}} Q(X_1)\,.$$

E pertanto

$$\mathrm{Hom}_{\mathscr{C}/\mathcal{N}}(Y_0, Y_1) \cong \mathrm{Hom}_{\mathscr{C}/\mathcal{N}}(X_0, X_1)\,.$$

Ora si dimostra

$$\mathrm{Hom}_{\mathscr{C}/\mathcal{N}}(X_0, X_1) \cong 0\,.$$

Siano $s : Z \to X_0$ in $\mathrm{Ar}(\mathcal{N}Q)$ ed $a : Z \to X_1$ in $\mathrm{Ar}(\mathscr{C})$. Ora si prova che (Z, s, a) è uguale a zero in $\mathscr{C}/\mathcal{N}$. Le ipotesi implicano l'esistenza di un triangolo distinto

$$\sigma_3 :\ Z \xrightarrow{s} X_0 \xrightarrow{f} M \xrightarrow{g} Z[1]$$

di $\mathscr{C}$ che soddisfa $M \in \mathcal{N}$.

Utilizzando l'assioma (TS4) di $(\mathscr{C}^{\leq 0}, \mathscr{C}^{\geq 0})$ sull'oggetto Z, si ottiene l'esistenza di un triangolo distinto

$$\sigma_1 :\ Z_0 \xrightarrow{t} Z \xrightarrow{\alpha} Z_1 \xrightarrow{\beta} Z_0[1]$$

che soddisfa le condizioni

$$\begin{cases} Z_0 \in \mathrm{Ob}(\mathscr{C}^{\leq 0}) \\ Z_1 \in \mathrm{Ob}(\mathscr{C}^{\geq 1})\,. \end{cases}$$

Applicando l'assioma (trcat3) al morfismo $s \circ t$ si ottiene l'esistenza di un triangolo

$$\sigma_2 : \ Z_0 \xrightarrow{s \circ t} X_0 \xrightarrow{f'} M_0 \xrightarrow{g'} Z_0[1]$$

appartenente a ∂.

Applicando l'assioma (trcat6) alla terna $(\sigma_1, \sigma_2, \sigma_3)$ si ottiene un triangolo

$$\sigma_4 : \ Z_1 \xrightarrow{u} M_0 \xrightarrow{v} M \xrightarrow{w} Z_1[1]$$

di ∂ tale che

$$\mathrm{DGOCT}(\sigma_1, \sigma_2, \sigma_3, \sigma_4)$$

valga in $\mathscr{C}$.

Ora si prova che M_0 appartiene a $\mathscr{C}^{\leq 0}$. Essendo $\sigma_2 \in \partial$, si ottiene $(-f', -g', (-s \circ t)[1]) \in \partial$ utilizzando gli assiomi delle categorie triangolate. E pertanto si ha

$$M_0 \in \mathrm{Ob}(\mathscr{C}^{\leq 0})$$

dal Lemma 6.29.

Ora si ha $\sigma_4 \in \partial$, $Z_1 \in \mathrm{Ob}(\mathscr{C}^{\geq 1})$ ed $M_0 \in \mathrm{Ob}(\mathscr{C}^{\leq 0})$. Usando le ipotesi del punto (b) sul triangolo σ_4 si ottiene

$$\{Z_1, N_0\} \subseteq \mathcal{N}.$$

Questo implica $t \in \mathrm{Ar}(\mathcal{N}Q)$, dalla relazione $\sigma_1 \in \partial$.

L'assioma (TS3) di $(\mathscr{C}^{\leq 0}, \mathscr{C}^{\geq 0})$ implica

$$\mathrm{Hom}_{\mathscr{C}}(Z_0, X_1) \cong 0\,.$$

Allora $a \circ t =_{\mathscr{C}} 0$.

Il Lemma 5.18 implica che $\mathcal{N}Q$ è un sistema moltiplicativamente chiuso. Allora $s \circ t \in \mathrm{Ar}(\mathcal{N}Q)$.

La commutatività dei diagrammi in $\mathscr{C}$

$$\begin{tikzcd}
 & X_0 & \\
Z \arrow[ur, "s"] \arrow[dr, "a"'] & Z_0 \arrow[l, "t"'] \arrow[r, "\mathrm{id}_{Z_0}"] & Z_0 \arrow[ul, "s\circ t"'] \arrow[dl, "0"] \\
 & X_1 &
\end{tikzcd}$$

$$\begin{tikzcd}
 & X_0 & \\
Z_0 \arrow[ur, "s\circ t"] \arrow[dr, "0"'] & Z_0 \arrow[l, "\mathrm{id}_{Z_0}"'] \arrow[r, "s\circ t"] & X_0 \arrow[ul, "\mathrm{id}_{X_0}"'] \arrow[dl, "0"] \\
 & X_1 &
\end{tikzcd}$$

implica $(Z, s, a) =_{\mathscr{C}/\mathcal{N}} 0$.

Ora si prova l'assioma (TS4) per la coppia γ. Sia X un oggetto di $\mathscr{C}/\mathcal{N}$. Allora $X \in \mathrm{Ob}(\mathscr{C})$. L'assioma (TS4) per la coppia $(\mathscr{C}^{\leq 0}, \mathscr{C}^{\geq 0})$ implica l'esistenza di una sequenza

$$\theta_X : \ \tau^{\leq 0}(X) \xrightarrow{\ T^{\leq 0}(X)\ } X \xrightarrow{\ T^{\geq 1}(X)\ } \tau^{\geq 1}(X) \xrightarrow{h_X^0} \tau^{\leq 0}(X)[1]$$

che soddisfa $\theta_X \in \partial$, $\tau^{\leq 0}(X) \in \mathrm{Ob}(\mathscr{C}^{\leq 0})$ e $\tau^{\geq 1}(X) \in \mathrm{Ob}(\mathscr{C}^{\geq 1})$. Applicando il funtore Q alla sequenza θ_X si trova un triangolo di φ che soddisfa $Q(\tau^{\leq 0}(X)) \in \mathrm{Ob}(\mathrm{Ess}(Q_{|\mathscr{C}^{\leq 0}}))$ e $Q(\tau^{\geq 1}(X)) \in \mathrm{Ob}(\mathrm{Ess}(Q_{|\mathscr{C}^{\geq 1}})) \subseteq \mathrm{Ob}(\mathrm{Ess}(Q_{|\mathscr{C}^{\geq 0}}))[-1]$.

□

Capitolo 7

Derivazione nelle categorie quasi-abeliane

In questo capitolo si studia dettagliatamente la categoria derivata di una categoria quasi-abeliana. La trattazione segue principalmente [SCH1] e [PROS1].

Lemma 7.1. Siano $\mathscr{C}$ una categoria pre-abeliana ed $(X^\bullet, d_X)$ un oggetto di $\mathcal{K}(\mathscr{C})$. Allora esiste un triangolo distinto canonico di $\mathcal{K}(\mathscr{C})$ della forma

$$\tau^{\leq 0}(X^\bullet, d_X) \xrightarrow{f} (X^\bullet, d_X) \xrightarrow{g} \tau^{\geq 1}(X^\bullet, d_X) \xrightarrow{h} \tau^{\leq 0}(X^\bullet, d_X)[1]$$

Dimostrazione. Si definiscono f, g ed h ponendo

$$f^n := \begin{cases} \mathrm{id}_{X^n} & \text{se} \quad n \leq -1 \\ \\ \ker(d_X^0) & \text{se} \quad n = 0 \\ \\ 0 & \text{se} \quad n \geq -1 \end{cases}$$

$$g^n := \begin{cases} 0 & \text{se} \quad n \leq -2 \\ \\ \delta_X^{-1} & \text{se} \quad n = -1 \\ \\ \mathrm{id}_{X^n} & \text{se} \quad n \geq 0 \end{cases}$$

$$h^n := \begin{cases} 0 & \text{se} \quad n \in \mathbb{Z} \setminus \{-1\} \\ \\ \mathrm{id}_{X^0} & \text{altrimenti} \end{cases}$$

dove δ_X^{-1} è definita dall'uguaglianza $\ker(d_X^0) \circ \delta_X^{-1} = d_X^{-1}$.
Si definisce

$$\sigma : \ \tau^{\leq 0}(X^\bullet, d_X) \xrightarrow{f} (X^\bullet, d_X) \xrightarrow{g} \tau^{\geq 1}(X^\bullet, d_X) \xrightarrow{h} \tau^{\leq 0}(X^\bullet, d_X)[1] \ .$$

Si ha σ è una sequenza di morfismi in $\mathcal{K}(\mathscr{C})$ ben definita. Ora si prova che σ è isomorfo al triangolo $\Delta(f)$, in $\mathcal{K}(\mathscr{C})$.

Calcolando $\mathrm{Mc}(f)$ tramite la definizione si trova che $\mathrm{Mc}(f)$ è isomorfo in $\mathcal{K}(\mathscr{C})$ al complesso $N^\bullet$

$$\cdots X^{-3} \oplus X^{-4} \longrightarrow X^{-2} \oplus X^{-3} \xrightarrow{\begin{bmatrix} -d_X^{-2} & 0 \\ 1 & d_X^{-3} \end{bmatrix}}$$

$$\cdots X^{-1} \oplus X^{-2} \xrightarrow{\begin{bmatrix} -\delta_X^{-1} & 0 \\ 1 & d_X^{-2} \end{bmatrix}} \mathrm{Ker}(d_X^0) \oplus X^{-1} \xrightarrow{[\ker(d_X^0), d_X^{-1}]} X^0 \xrightarrow{d_X^0} X^1 \cdots$$

avente X^0 al grado 0. Siano $\gamma : N^\bullet \to \tau^{\geq 1}(X^\bullet, d_X)$ e $\delta : N^\bullet \to \tau^{\geq 1}(X^\bullet, d_X)$ i morfismi definiti ponendo

$$(\gamma^n, \delta^n) := \begin{cases} (0,0) & \text{se} \quad n \leq -2 \\ \left(\begin{bmatrix} 1 \\ 0 \end{bmatrix}, \begin{bmatrix} 1, d \end{bmatrix} \right) & \text{se} \quad n = -1 \\ (1,1) & \text{se} \quad n \geq 0 \end{cases}$$

Sia σ l'omotopia definita ponendo

$$\sigma^n := \begin{cases} \begin{bmatrix} 0 & -1 \\ 0 & 0 \end{bmatrix} & \text{se} \ \ n \leq -1 \\ 0 & \text{se} \ \ n \geq 0 \end{cases}$$

Tramite un calcolo diretto si trova

$$\begin{cases} \delta \circ \gamma = \mathrm{id} \\ \\ \gamma \circ \delta - 1 = d_{N^\bullet} \circ \sigma + \sigma \circ d_{N^\bullet} \end{cases}$$

E pertanto $\tau^{\geq 1}(X^\bullet, d_X)$ è isomorfo in $\mathcal{K}(\mathscr{C})$ al complesso $N^\bullet$.
Sia

$$\eta: \ \tau^{\leq 0}(X^\bullet, d_X) \xrightarrow{f} (X^\bullet, d_X) \xrightarrow{\alpha} N^\bullet \xrightarrow{\beta} \tau^{\leq 0}(X^\bullet, d_X)[1]$$

la sequenza di morfismi in $\mathcal{K}(\mathscr{C})$ tale che α è l'immersione di $(X^\bullet, d_X)$ in $N^\bullet$ e β è la proiezione di $N^\bullet$ in $\tau^{\leq 0}(X^\bullet, d_X)[1]$. Il triangolo η è chiaramente isomorfo in $\mathcal{K}(\mathscr{C})$ al triangolo $\Delta(f)$. Quindi è sufficiente mostrare che η e σ sono triangoli isomorfi in $\mathcal{K}(\mathscr{C})$.

Considero il diagramma

$$\begin{tikzcd}
\Omega: \ \tau^{\leq 0}(X^\bullet, d_X) \arrow[r, "f"] \arrow[d, equal] & (X^\bullet, d_X) \arrow[r, "g"] \arrow[d, equal] & \tau^{\geq 1}(X^\bullet, d_X) \arrow[r, "h"] \arrow[d, "\delta"] & \tau^{\leq 0}(X^\bullet, d_X)[1] \arrow[d, equal] \\
\tau^{\leq 0}(X^\bullet, d_X) \arrow[r, "f"'] & (X^\bullet, d_X) \arrow[r, "\alpha"'] & N^\bullet \arrow[r, "\beta"'] & \tau^{\leq 0}(X^\bullet, d_X)[1]
\end{tikzcd}$$

in $\mathcal{K}(\mathscr{C})$. Ora si prova la commutatività di Ω in $\mathcal{K}(\mathscr{C})$. I quadrati di Ω a destra ed a sinistra commutano in $\mathrm{Coch}(\mathscr{C})$. Un calcolo diretto mostra che il quadrato centrale di Ω commuta in $\mathcal{K}(\mathscr{C})$ utilizzado l'omotopia $\rho: \tau^{\geq 1}(X^\bullet) \to \tau^{\leq 0}(X^\bullet)$ definita ponendo

$$\rho^n := \begin{cases} 0 & \text{se } n \geq 0 \\ \\ \begin{bmatrix} -1 \\ 0 \end{bmatrix} & \text{altrimenti} \end{cases}$$

Il carattere iso di δ in $\mathcal{K}(\mathscr{C})$ permette di concludere. □

7.1 t-strutture canoniche di $\mathcal{K}(\mathscr{C})$

Definizione 7.2. Sia $\mathscr{C}$ una categoria quasi-abeliana. Allora si definisce:

- $\mathcal{K}^{\geq 0}(\mathscr{C})$ come la sottocategoria piena di $\mathcal{K}(\mathscr{C})$ avente come oggetti tutti e soli i complessi che sono fortemente esatti in ogni grado strettamente negativo;
- $\mathcal{K}^{\leq 0}(\mathscr{C})$ come la sottocategoria piena di $\mathcal{K}(\mathscr{C})$ avente come oggetti tutti e soli i complessi che sono fortemente esatti in ogni grado strettamente positivo.

Notazione 7.3 (**Complessi fortemente esatti**). *Siano $\mathscr{C}$ una categoria additiva ed n in $\mathbb{Z}$. Si indica con:*

- *$\mathcal{F}(\mathscr{C})^n$ la totalità degli oggetti X di* $\mathrm{Coch}(\mathscr{C})$ *che sono fortemente esatti in $\mathscr{C}$ al grado n;*
- $$\mathcal{F}(\mathscr{C}) := \bigcap_{z\in\mathbb{Z}} \mathcal{F}(\mathscr{C})^z \quad .$$

Notazione 7.4 (**Complessi strettamente esatti**). *Siano $\mathscr{C}$ una categoria pre-abeliana ed n in $\mathbb{Z}$. Si indica con:*

- *$\mathcal{N}(\mathscr{C})^n$ la totalità degli oggetti X di* $\mathrm{Coch}(\mathscr{C})$ *che sono strettamente esatti in $\mathscr{C}$ al grado n;*
- $$\mathcal{N}(\mathscr{C}) := \bigcap_{z\in\mathbb{Z}} \mathcal{N}(\mathscr{C})^z \quad .$$

Lemma 7.5. Siano $\mathscr{C}$ una categoria additiva ed $(X^\bullet, d_X)$, $(Y^\bullet, d_Y)$ complessi isomorfi in $\mathcal{K}(\mathscr{C})$. Allora per ogni n in $\mathbb{Z}$ sussiste l'equivalenza

$$(X^\bullet, d_X) \in \mathcal{F}(\mathscr{C})^n \iff (Y^\bullet, d_Y) \in \mathcal{F}(\mathscr{C})^n \quad .$$

Dimostrazione. $\Rightarrow$: le ipotesi implicano che la successione

$$\varphi_X^n : \ X^{n-1} \xrightarrow{d_X^{n-1}} X^n \xrightarrow{d_X^n} X^{n+1}$$

è fortemente esatta in $\mathscr{C}$. Sempre le ipotesi implicano l'esistenza di

$$\alpha : (X^\bullet, d_X) \longrightarrow (Y^\bullet, d_Y)$$

e

$$\beta : (Y^\bullet, d_Y) \longrightarrow (X^\bullet, d_X)$$

morfismi di $\mathrm{Coch}(\mathscr{C})$ e di

$$\sigma : (X^\bullet, d_X) \longrightarrow (X^\bullet, d_X)[-1]$$

e

$$\theta : (Y^\bullet, d_Y) \longrightarrow (Y^\bullet, d_Y)[-1]$$

famiglie di morfismi che soddisfano rispettivamente

$$(\star_1) \quad \beta \circ \alpha - \mathrm{id}_{X^\bullet} \simeq 0$$

e

$$(\star_2) \quad \alpha \circ \beta - \mathrm{id}_{Y^\bullet} \simeq 0\,.$$

Ora si prova che la sequenza

$$\psi_Y^n : \; Y^{n-1} \xrightarrow{\quad d_Y^{n-1} \quad} Y^n \xrightarrow{\quad d_Y^n \quad} Y^{n+1}$$

è fortemente esatta in $\mathscr{C}$.
Sia A in $\mathrm{Ob}(\mathscr{C})$.

- $\mathrm{Im}(\mathrm{Hom}_{\mathscr{C}}(A, d_Y^{n-1})) \subseteq \mathrm{Ker}(\mathrm{Hom}_{\mathscr{C}}(A, d_Y^n))$: discende direttamente da $d_Y^n \circ d_Y^{n-1} = 0$.

- $\mathrm{Ker}(\mathrm{Hom}_{\mathscr{C}}(A, d_Y^n)) \subseteq \mathrm{Im}(\mathrm{Hom}_{\mathscr{C}}(A, d_Y^{n-1}))$: sia $f : A \to Y^n$ freccia di $\mathscr{C}$ tale che $d_Y^n \circ f = 0$. La relazione $(\star_2)$ implica

$$(\star_3) \quad \alpha^n \circ \beta^n \circ f - f = (\alpha^n \circ \beta^n - \mathrm{id}_{Y^n}) \circ f$$

$$= (\theta^{n+1} \circ d_Y^n + d_Y^{n-1} \circ \theta^n) \circ f =$$

$$= d_Y^{n-1} \circ \theta^n \circ f\,.$$

Ora si prova $d_X^n \circ \beta^n \circ f = 0$.

Essendo β un morfismo di $\mathrm{Coch}(\mathscr{C})$ si ha $d_X^n \circ \beta^n = \beta^{n+1} \circ d_Y^n$. E pertanto le assunzioni implicano

$$d_X^n \circ \beta^n \circ f = \beta^{n+1} \circ d_Y^n \circ f = 0\,.$$

La forte esattezza di φ_X^n implica l'esistenza di γ in $\mathrm{Hom}_{\mathscr{C}}(A, X^{n-1})$ tale che

$$(\star_4) \quad \beta^n \circ f = d_X^{n-1} \circ \gamma \,.$$

Essendo α un morfismo di $\mathrm{Coch}(\mathscr{C})$ si ottiene

$$(\star_5) \quad \alpha^n \circ d_X^{n-1} = d_Y^{n-1} \circ \alpha^{n-1} \,.$$

Dalle relazioni $(\star_3)$, $(\star_4)$ e $(\star_5)$ si deduce

$$f \in \mathrm{Im}\big(\mathrm{Hom}_{\mathscr{C}}(A, d_Y^{n-1})\big) \,.$$

$\Leftarrow$: simile a $\Rightarrow$. $\square$

Lemma 7.6. Siano $\mathscr{C}$ una categoria quasi-abeliana ed $(X^\bullet, d_X)$, $(Y^\bullet, d_Y)$ complessi isomorfi in $\mathcal{K}(\mathscr{C})$. Allora per ogni n in $\mathbb{Z}$ sussiste l'equivalenza

$$(X^\bullet, d_X) \in \mathcal{N}(\mathscr{C})^n \iff (Y^\bullet, d_Y) \in \mathcal{N}(\mathscr{C})^n \quad .$$

Dimostrazione. Omessa. Vedere la dimostrazione della Proposizione 2.4.7. in [PROS1], ad esempio. $\square$

Proposizione 7.7. Siano:

- $\mathscr{C}$ una categoria quasi-abeliana;
- n in $\mathbb{Z}$;
- $$\sigma :\ A \xrightarrow{f} B \xrightarrow{g} C \xrightarrow{h} A[1]$$

  un triangolo distinto canonico di $\mathcal{K}(\mathscr{C})$.

Suppongo che A e C siano strettamente esatti al grado n. Allora B è strettamente esatto in n.

Proposizione 7.8. Per ogni categoria quasi-abeliana $\mathscr{C}$, la collezione $\mathcal{N}(\mathscr{C})$ è un sistema nullo di $\mathcal{K}(\mathscr{C})$.

Dimostrazione.

(NULL1): immediato.

(NULL2): chiaro dalle definizioni.

(NULL3): sia

$$\sigma_1 : \ A \xrightarrow{f} B \xrightarrow{g} C \xrightarrow{h} A[1]$$

un triangolo distinto canonico tale che $\{A, B\} \subseteq \mathcal{N}(\mathscr{C})$. Essendo $\mathcal{K}(\mathscr{C})$ una categoria triangolata si ottiene che la sequenza

$$\sigma_2 : \ B[-1] \xrightarrow{\quad g[-1] \quad} C[-1] \xrightarrow{\quad h[-1] \quad} A \xrightarrow{\quad f \quad} B$$

è un triangolo distinto canonico. Applicando la Proposizione 7.7 sul triangolo σ_2 si ottiene

$$C[-1] \in \mathcal{N}(\mathscr{C})\,.$$

La conclusione segue dal secondo punto.

□

Teorema 7.9. Sia $\mathscr{C}$ una categoria quasi-abeliana. Allora la coppia $(\mathcal{K}^{\leq 0}(\mathscr{C}), \mathcal{K}^{\geq 0}(\mathscr{C}))$ è una t-struttura in $\mathcal{K}(\mathscr{C})$.

Dimostrazione.

- $\mathcal{K}^{\leq 0}(\mathscr{C})$ e $\mathcal{K}^{\geq 0}(\mathscr{C})$ sono sottocategorie piene di $\mathcal{K}(\mathscr{C})$: questo è imposto dalla definizione.
- $\mathcal{K}^{\leq 0}(\mathscr{C})$ e $\mathcal{K}^{\geq 0}(\mathscr{C})$ sono sottocategorie saturate di $\mathcal{K}(\mathscr{C})$: discende direttamente dal Lemma 7.5.
- $\mathcal{K}^{\leq -1}(\mathscr{C}) \subseteq \mathcal{K}^{\leq 0}(\mathscr{C})$: direttamente dalle definizioni.
- $\mathcal{K}^{\geq 1}(\mathscr{C}) \subseteq \mathcal{K}^{\geq 0}(\mathscr{C})$: è sufficiente svolgere un calcolo diretto.
- (TS3): siano $(X^\bullet, d_X)$ in $\mathrm{Ob}(\mathcal{K}^{\leq 0}(\mathscr{C}))$ ed $(Y^\bullet, d_Y)$ in $\mathrm{Ob}(\mathcal{K}^{\geq 1}(\mathscr{C}))$. Il Lemma 7.1 implica l'esistenza di triangoli distinti canonici della forma

$$\tau^{\leq 0}(X^\bullet, d_X) \xrightarrow{f} (X^\bullet, d_X) \xrightarrow{g} \tau^{\geq 1}(X^\bullet, d_X) \xrightarrow{h} \tau^{\leq 0}(X^\bullet, d_X)[1]$$

$$\tau^{\leq 0}(Y^\bullet, d_Y) \xrightarrow{\alpha} (Y^\bullet, d_Y) \xrightarrow{\beta} \tau^{\geq 1}(Y^\bullet, d_Y) \xrightarrow{h} \tau^{\leq 0}(Y^\bullet, d_Y)[1]\ .$$

Ora si prova che f è isomorfismo di $\mathcal{K}(\mathscr{C})$. Essendo $(X^\bullet, d_X) \in \mathrm{Ob}(\mathcal{K}^{\leq 0}(\mathscr{C}))$, la definizione di $\tau^{\geq 1}(X^\bullet, d_X)$ implica che $\tau^{\geq 1}(X^\bullet, d_X)$ è fortemente esatto. Allora la Proposizione 2.39 implica che $\tau^{\geq 1}(X^\bullet, d_X)$ è un oggetto zero di $\mathcal{K}(\mathscr{C})$. Essendo $\mathcal{K}(\mathscr{C})$ una categoria triangolata con i triangoli distinti canonici, il Lemma 3.27 implica che f è isomorfismo di $\mathcal{K}(\mathscr{C})$.

Per provare che β è isomorfismo di $\mathcal{K}(\mathscr{C})$, si dualizza la dimostrazione appena svolta. Allora la mappa

$$\varepsilon : \mathrm{Hom}_{\mathcal{K}(\mathscr{C})}\big((X^\bullet, d_X), (Y^\bullet, d_Y)\big) \longrightarrow \mathrm{Hom}_{\mathcal{K}(\mathscr{C})}\big((\tau^{\leq 0}(X^\bullet, d_X), \tau^{\geq 1}(Y^\bullet, d_Y)\big)$$

$$\theta \longmapsto \beta \circ \theta \circ f$$

è un isomorfismo ben definito in $\mathcal{A}b$.

Ora si dimostra che il codominio di ε è un gruppo banale. Sia u in $\mathrm{Hom}_{\mathcal{K}(\mathscr{C})}(\tau^{\leq 0}(X^\bullet, d_X), \tau^{\geq 1}(Y^\bullet, d_Y))$. Allora u è un morfismo di $\mathrm{Coch}(\mathscr{C})$. Questo implica che $u^n = 0$ per ogni n in $\mathbb{Z} \setminus \{-1, 0\}$ e che valgono le uguaglianze

$$\begin{cases} \ker(d_Y^0) \circ u^{-1} = u^0 \circ \delta_X^{-1} \\ \\ u^{-1} \circ d_X^{-2} = 0 \\ \\ d_Y^0 \circ u^0 = 0 \end{cases}$$

Quindi la proprietà universale di $\ker(d_Y^0)$ implica l'esistenza di un unico σ_0 in $\mathrm{Hom}_{\mathscr{C}}(\mathrm{Ker}(d_X^0), \mathrm{Ker}(d_Y^0))$ tale che $\ker(d_Y^0) \circ \sigma_0 = u^0$. Allora

$$\ker(d_Y^0) \circ u^{-1} = u^0 \circ \delta_X^{-1} = \ker(d_Y^0) \circ \sigma_0 \circ \delta_X^{-1}\,.$$

E pertanto $u^{-1} = \sigma_0 \circ \delta_X^{-1}$, dal carattere mono di $\ker(d_Y^0)$. Definendo la collezione di mappe

$$s : \tau^{\leq 0}(X^\bullet, d_X) \longrightarrow \tau^{\geq 1}(Y^\bullet, d_Y)[-1]$$

ponendo

$$s^n := \begin{cases} \sigma_0 & \text{se} \;\; n = 0 \\ \\ 0 & \text{se} \;\; n \in \mathbb{Z} \setminus \{0\} \end{cases}$$

si ottiene una omotopia che verifica $u \simeq 0$. Tramite l'isomorfismo ε si ottiene l'asserto.

- (TS4): sia $(X^\bullet, d_X)$ un oggetto di $\mathcal{K}(\mathscr{C})$. Il Lemma 7.1 implica l'esistenza di un triangolo distinto canonico della forma

$$\tau^{\leq 0}(X^\bullet, d_X) \xrightarrow{f} (X^\bullet, d_X) \xrightarrow{g} \tau^{\geq 1}(X^\bullet, d_X) \xrightarrow{h} \tau^{\leq 0}(X^\bullet, d_X)[1] \ .$$

Le definizioni di $\tau^{\leq 0}(X^\bullet, d_X)$ e $\tau^{\geq 1}(X^\bullet, d_X)$ implicano

$$\begin{cases} \tau^{\leq 0}(X^\bullet, d_X) \in \mathrm{Ob}(\mathcal{K}^{\leq 0}(\mathscr{C})) \\ \\ \tau^{\geq 1}(X^\bullet, d_X) \in \mathrm{Ob}(\mathcal{K}^{\geq 1}(\mathscr{C})) \,. \end{cases}$$

□

Definizione 7.10. Sia $\mathscr{C}$ una categoria quasi-abeliana. Allora:

- la coppia $(\mathcal{K}^{\leq 0}(\mathscr{C}), \mathcal{K}^{\geq 0}(\mathscr{C}))$ si dice t-*struttura sinistra di* $\mathcal{K}(\mathscr{C})$.

Lemma 7.11. Si supponga che:

- $\mathscr{C}$ sia una categoria quasi-abeliana;
- $$\sigma : \ A_1 \xrightarrow{f} B_0 \xrightarrow{g} C \xrightarrow{h} A_1[1]$$
  sia un triangolo distinto canonico di $\mathcal{K}(\mathscr{C})$;
- $(A_1, B_0) \in \mathrm{Ob}(\mathcal{K}^{\geq 1}(\mathscr{C})) \times \mathrm{Ob}(\mathcal{K}^{\leq 0}(\mathscr{C}))$;
- C sia strettamente esatto.

Allora A_1 e B_0 sono strettamente esatti.

Notazione 7.12. *Sia $\mathscr{C}$ una categoria quasi-abeliana. Allora:*

- *il cuore di $(\mathcal{K}^{\leq 0}(\mathscr{C}), \mathcal{K}^{\geq 0}(\mathscr{C}))$ si indica con $\mathscr{LK}(\mathscr{C})$;*
- *l'n-esimo funtore co-omologico di $(\mathcal{K}^{\leq 0}(\mathscr{C}), \mathcal{K}^{\geq 0}(\mathscr{C}))$ si indica con $\mathrm{L\,K}^n$, per ogni n in $\mathbb{Z}$.*

Proposizione 7.13. Sia $\mathscr{C}$ una categoria quasi-abeliana ed n in $\mathbb{Z}$. Allora:

- il funtore di troncamento $\tau^{\leq n}$ per la t-struttura sinistra di $\mathcal{K}(\mathscr{C})$ è tale che ad ogni complesso $(X^\bullet, d_X)$ associa il complesso

$$\cdots \longrightarrow X^{n-2} \longrightarrow X^{n-1} \longrightarrow \mathrm{Ker}(d_X^n) \longrightarrow 0 \longrightarrow \cdots$$

  avente $\mathrm{Ker}(d_X^n)$ al grado n;

- il funtore di troncamento $\tau^{\geq n}$ per la t-struttura sinistra di $\mathcal{K}(\mathscr{C})$ è tale che ad ogni complesso $(X^\bullet, d_X)$ associa il complesso

$$\cdots \longrightarrow 0 \longrightarrow \mathrm{Ker}(d_X^{n-1}) \longrightarrow X^{n-1} \longrightarrow X^n \longrightarrow \cdots$$

  avente X^n al grado n;

- per ogni complesso $(X^\bullet, d_X)$ il complesso $\mathrm{L\,K}^n(X^\bullet, d_X)$ è dato da

$$\cdots \longrightarrow 0 \longrightarrow \mathrm{Ker}(d_X^{n-1}) \longrightarrow X^{n-1} \longrightarrow \mathrm{Ker}(d_X^n) \longrightarrow 0 \longrightarrow$$

$$\longrightarrow 0 \longrightarrow \cdots$$

  avente $\mathrm{Ker}(d_X^n)$ al grado 0.

Dimostrazione. La tesi segue dalla dimostrazione del Lemma 7.1, dalla prova del **Teorema di Esistenza dei funtori** $\tau^{\leq 0}$ **e** $\tau^{\geq 1}$ e dal fatto che i funtori di troncamento sono determinati a meno di isomorfismo naturale. $\square$

Corollario 7.14. Per ogni categoria quasi-abeliana $\mathscr{C}$, la categoria $\mathscr{LK}(\mathscr{C})$ è equivalente alla sottocategoria piena $\mathscr{B}$ di $\mathcal{K}(\mathscr{C})$ avente come oggetti tutti e soli i complessi della forma

$$\cdots \longrightarrow 0 \longrightarrow 0 \longrightarrow \mathrm{Ker}(f) \xrightarrow{\ker(f)} A \xrightarrow{f} B \longrightarrow 0 \longrightarrow \cdots$$

tali che $f : A \to B$ è un morfismo di $\mathscr{C}$ e B è al grado 0.

Dimostrazione. Le definizioni implicano che $\mathscr{B}$ è sottocategoria piena di $\mathscr{LK}(\mathscr{C})$. Allora il funtore inclusione I di $\mathscr{B}$ in $\mathscr{LK}(\mathscr{C})$, è ben definito.

- I è fedele: chiaro dalle definizioni.

- I è pieno: discende direttamente dalla pienezza di $\mathscr{B}$ in $\mathscr{C}$.

- I è essenzialmente suriettivo sugli oggetti: Sia X un oggetto di $\mathscr{LK}(\mathscr{C})$. Il Capitolo 6 implica

$$X \cong_{\mathcal{K}(\mathscr{C})} \tau^{\leq 0}(\tau^{\geq 0}(X)) \ .$$

La conclusione segue da

$$\tau^{\leq 0}(\tau^{\geq 0}(X)) \in \mathrm{Ob}(\mathscr{B}) \ .$$

□

Definizione 7.15. Per ogni categoria quasi-abeliana $\mathscr{C}$, $(X^\bullet, d_X)$ oggetto di $\mathcal{K}(\mathscr{C})$ ed $f : A \to B$ morfismo di $\mathscr{C}$ si dice che $(X^\bullet, d_X)$ è rappresentato da f se e solo se $(X^\bullet, d_X)$ è isomorfo in $\mathcal{K}(\mathscr{C})$ al complesso

$$\cdots \longrightarrow 0 \longrightarrow 0 \longrightarrow \mathrm{Ker}(f) \xrightarrow{\ \ker(f)\ } A \xrightarrow{f} B \longrightarrow 0 \longrightarrow \cdots$$

in cui B è al grado 0.

Sia $\mathscr{C}$ una categoria additiva con tutti i nuclei ed i co-nuclei. Per ogni oggetto $(X^\bullet, d_X)$ di $\mathrm{Coch}(\mathscr{C})$, si definisce l'oggetto $G(X^\bullet, d_X)$ di $\mathrm{Coch}(\mathscr{C}^{\mathrm{op}})^{\mathrm{op}}$ ponendo

$$\begin{cases} G(X^\bullet, d_X)^n := X^{-n} \\ \\ d^n_{G(X^\bullet, d_X)} := \left(d_X^{-n-1}\right)^{\mathrm{op}} \end{cases}$$

per ogni n in $\mathbb{Z}$. Per ogni $f : X^\bullet \to Y^\bullet$ morfismo in $\mathrm{Coch}(\mathscr{C})$, si definisce $G(f)$ come il morfismo di $G(X^\bullet, d_X)$ in $G(Y^\bullet, d_Y)$ in $\mathrm{Coch}(\mathscr{C}^{\mathrm{op}})^{\mathrm{op}}$, ponendo

$$G(f)^n := \left(f^{-n}\right)^{\mathrm{op}}$$

per ogni n in $\mathbb{Z}$. Si consideri l'assegnazione

$$F : \mathcal{K}(\mathscr{C}) \longrightarrow \left(\mathcal{K}(\mathscr{C}^{\mathrm{op}})\right)^{\mathrm{op}}$$

$$(X^\bullet, d_X) \longmapsto G(X^\bullet, d_X)$$

$$\theta \in \mathrm{Ar}(\mathcal{K}(\mathscr{C})) \longmapsto G(\theta)$$

Tramite calcoli diretti si dimostra che F è un ben definito isomorfismo di categorie.

L'immagine tramite F^{-1} di $((\mathcal{K}^{\leq 0}(\mathscr{C}^{\mathrm{op}}))^{\mathrm{op}}, (\mathcal{K}^{\geq 0}(\mathscr{C}^{\mathrm{op}}))^{\mathrm{op}})$ è un'altra t-struttura in $\mathcal{K}(\mathscr{C})$ e si dice t-*struttura destra* di $\mathcal{K}(\mathscr{C})$ ed il suo cuore si indica con $\mathscr{RK}(\mathscr{C})$. I suoi funtori co-omologici si indicano con $\mathrm{R}\,\mathrm{K}^n$.

Definizione 7.16. Sia $\mathscr{C}$ una categoria quasi-abeliana. Allora si definisce:

- $\mathcal{K}_{\leq 0}(\mathscr{C})$ come la sottocategoria piena di $\mathcal{K}(\mathscr{C})$ avente come oggetti tutti e soli i complessi che sono fortemente co-esatti in ogni grado strettamente negativo;
- $\mathcal{K}_{\geq 0}(\mathscr{C})$ come la sottocategoria piena di $\mathcal{K}(\mathscr{C})$ avente come oggetti tutti e soli i complessi che sono fortemente co-esatti in ogni grado strettamente positivo.

Sia $\mathscr{C}$ una categoria pre-abeliana. Allora la t-struttura destra di $\mathcal{K}(\mathscr{C})$ è la coppia $(\mathcal{K}_{\leq 0}(\mathscr{C}), \mathcal{K}_{\geq 0}(\mathscr{C}))$.

Definizione 7.17 (Quasi-isomorfismo stretto). Siano $\mathscr{C}$ una categoria quasi-abeliana ed $f : (A^\bullet, d_A) \to (B^\bullet, d_B)$ un morfismo di $\mathcal{K}(\mathscr{C})$. Allora f si dice *quasi-isomorfismo stretto* se e solo se $\mathrm{Mc}(f)$ è un complesso strettamente esatto.

7.2 La categoria $\mathrm{D}(\mathscr{C})$

Sia $\mathscr{C}$ una categoria quasi-abeliana. La Proposizione 7.8 implica che $\mathcal{N}(\mathscr{C})$ è un sistema nullo di $\mathcal{K}(\mathscr{C})$. La sezione 7.1 ed il **Teorema di Esistenza della categoria quoziente** implicano che la localizzazione destra canonica $(Q, \mathcal{K}(\mathscr{C})/\mathcal{N}(\mathscr{C}))$ è ben definita. Si indica questa coppia con $\mathrm{D}(\mathscr{C})$ e si chiama *categoria derivata di* $\mathscr{C}$. La Proposizione 6.42 ed il Lemma 7.11 implicano che $(\mathrm{Ess}(Q_{|\mathcal{K}_{\leq 0}(\mathscr{C})}), \mathrm{Ess}(Q_{|\mathcal{K}_{\geq 0}(\mathscr{C})}))$ è una t-struttura ben definita su $\mathrm{D}(\mathscr{C})$. Quest'ultima si chiama t-*struttura sinistra di* $\mathrm{D}(\mathscr{C})$ e si indica con $(\mathrm{D}^{\leq 0}(\mathscr{C}), \mathrm{D}^{\geq 0}(\mathscr{C}))$. Il cuore della t-struttura sinistra di $\mathrm{D}(\mathscr{C})$ si indica con $\mathscr{LH}(\mathscr{C})$ e i funtori co-omologici associati si denotano con $\mathrm{L}\,\mathrm{H}^n$.

7.3 L'immersione canonica

In questa sezione si studia l'immersione canonica di una categoria quasi-abeliana $\mathscr{C}$ in $\mathscr{LH}(\mathscr{C})$.

Corollario 7.18. Sia $\mathscr{C}$ una categoria quasi-abeliana. Allora $\mathscr{LH}(\mathscr{C})$ è equivalente alla localizzazione della sottocategoria piena di $\mathcal{K}(\mathscr{C})$ formata da tutti e soli i complessi $(X^\bullet, d_X)$ della forma

$$\mathbb{O} \longrightarrow X^{-1} \xrightarrow{\delta_X} X^0 \longrightarrow \mathbb{O}$$

tali che δ_X è mono, X^0 è al grado 0, rispetto al sistema moltiplicativo costituito da tutti e soli i morfismi $u : (X^\bullet, d_X) \to (Y^\bullet, d_Y)$ in $\mathrm{Coch}(\mathscr{C})$, tali che il quadrato commutativo

$$\begin{tikzcd} X^{-1} \arrow[r, "\delta_X"] \arrow[d, "u^{-1}"'] & X^0 \arrow[d, "u^0"] \\ Y^{-1} \arrow[r, "\delta_Y"'] & Y^0 \end{tikzcd}$$

sia pull-back e push-out in $\mathscr{C}$.

Notazione 7.19. *Siano $\mathscr{C}$ una categoria additiva, A e B oggetti di $\mathscr{C}$ ed f in $\mathrm{Hom}_{\mathscr{C}}(A, B)$. Allora si indica con:*

- *$A^\bullet$ l'oggetto di $\mathrm{Coch}(\mathscr{C})$ definito ponendo:*

$$\begin{cases} (A^\bullet)^n := 0 & \forall n \in \mathbb{Z} \setminus \{0\} \\ (A^\bullet)^0 := A & \\ d^n_{A^\bullet} = 0 & \forall n \in \mathbb{Z} \end{cases}$$

- *$f^\bullet$ il morfismo di $A^\bullet$ in $B^\bullet$, nella categoria $\mathrm{Coch}(\mathscr{C})$, definito ponendo:*

$$\begin{cases} (f^\bullet)^n := f & \text{se} \quad n \neq 0 \\ (f^\bullet)^0 := f & \text{altrimenti} \end{cases}$$

Definizione 7.20. Sia $\mathscr{C}$ una categoria quasi-abeliana. Indico con I il funtore da $\mathscr{C}$ a $\mathscr{LH}(\mathscr{C})$ definito ponendo $I(X) := X^\bullet$, per ogni X oggetto di $\mathscr{C}$ ed $\mathrm{I}(f) = Q(f^\bullet)$, per ogni f freccia di $\mathscr{C}$.

Lemma 7.21. Siano $\mathscr{C}$ una categoria preadditiva, con oggetto zero,

$$\Delta : \begin{tikzcd} A \arrow[r, "f"] \arrow[d, "h"'] & B \arrow[d, "\theta"] \\ C \arrow[r, "g"'] & D \end{tikzcd}$$

un push-out di (h, f) in $\mathscr{C}$, $e : D \to X$ un co-nucleo di g. Allora $e \circ \theta$ è un co-nucleo di f.

Dimostrazione. Le ipotesi implicano

$$e \circ \theta \circ f = e \circ g \circ h = 0 \circ h = 0 \,.$$

Sia $\alpha : B \to Y$ un morfismo di $\mathscr{C}$ tale che $\alpha \circ f = 0$. Essendo Δ un push-out di (h, f), esiste un unico morfismo $\beta : D \to Y$ che rende il diagramma

$$\begin{tikzcd} A \arrow[r, "f"] \arrow[d, "h"'] & B \arrow[d, "\theta"] \arrow[ddr, bend left, "\alpha"] & \\ C \arrow[r, "g"'] \arrow[drr, bend right, "0"'] & D \arrow[dr, dotted, "\beta"] & \\ & & Y \end{tikzcd}$$

commutativo. Essendo e un co-nucleo di g, esiste un unico morfismo $\gamma : X \to Y$ che rende il diagramma

$$\begin{tikzcd} D \arrow[rr, "\beta"] \arrow[dr, "e"'] & & Y \\ & X \arrow[ur, dotted, "\gamma"'] & \end{tikzcd}$$

commutativo. Allora $\alpha = \gamma \circ e \circ \theta$. Siano γ_1 e γ_2 in $\mathrm{Hom}_{\mathscr{C}}(X, Y)$ tali che $\alpha = \gamma_1 \circ e \circ \theta = \gamma_2 \circ e \circ \theta$. Allora i diagrammi

$$\begin{tikzcd} A \arrow[r, "f"] \arrow[d, "h"'] & B \arrow[d, "\theta"] \arrow[ddr, bend left, "\alpha"] & \\ C \arrow[r, "g"'] \arrow[drr, bend right, "0"'] & D \arrow[dr, dotted, "\gamma_1 \circ e"] & \\ & & Y \end{tikzcd}$$

$$\begin{tikzcd} A \arrow[r, "f"] \arrow[d, "h"'] & B \arrow[d, "\theta"] \arrow[ddr, bend left, "\alpha"] & \\ C \arrow[r, "g"'] \arrow[drr, bend right, "0"'] & D \arrow[dr, dotted, "\gamma_2 \circ e"] & \\ & & Y \end{tikzcd}$$

commutano in $\mathscr{C}$. Essendo Δ un push-out di (h, f), si trova $\gamma_1 \circ e = \gamma_2 \circ e$. Allora $\gamma_1 = \gamma_2$, essendo e un epimorfismo. $\square$

Sia $\mathscr{C}$ una categoria quasi-abeliana. Allora tramite il Lemma 7.21 e il Corollario 7.18, si riesce a definire un funtore

$$\mathrm{C} : \mathscr{LH}(\mathscr{C}) \to \mathscr{C}$$

associando ad un oggetto X di $\mathscr{LH}(\mathscr{C})$ rappresentato dal monomorfismo $\delta_X : X^{-1} \to X^0$, l'oggetto $\mathrm{CoKer}(\delta_X)$ di $\mathscr{C}$. Per ogni oggetto B di $\mathscr{LH}(\mathscr{C})$, l'oggetto $\mathrm{C}(B)$ si dice *parte classica di* B.

Proposizione 7.22. Sia $\mathscr{C}$ una categoria quasi-abeliana. Allora esistono due trasformazioni naturali $i : \mathrm{C} \circ \mathrm{I} \to \mathrm{id}_{\mathscr{C}}$, $e : \mathrm{id}_{\mathscr{LH}(\mathscr{C})} \to \mathrm{I} \circ \mathrm{C}$ tali che:

(1) i è un isomorfismo naturale;

(2) e_X è un epimorfismo in $\mathscr{LH}(\mathscr{C})$, per ogni X oggetto di $\mathscr{LH}(\mathscr{C})$;

(3) per ogni $(A, B) \in \mathrm{Ob}(\mathscr{LH}(\mathscr{C})) \times \mathrm{Ob}(\mathscr{C})$ e $\theta \in \mathrm{Hom}_{\mathscr{C}}(\mathrm{C}(A), B)$, $\tau_{A,B}(\theta) = \mathrm{I}(\theta) \circ e_A$ definisce un'aggiunzione da C a I;

(4) $\mathscr{C}$ è una sottocategoria riflettiva di $\mathscr{LH}(\mathscr{C})$.

Dimostrazione. Sia B un oggetto di $\mathscr{C}$. Essendo il co-nucleo di $0 \to B$ un isomorfismo, si ottiene un isomorfismo canonico $i_B : \mathrm{C} \circ \mathrm{I}(B) \to B$. Sia A un oggetto di $\mathscr{LH}(\mathscr{C})$ rappresentato dal mono $\delta_A : A^{-1} \to A^0$. Il co-nucleo di δ_A induce un morfismo $e_A : A \to \mathrm{I} \circ \mathrm{C}(A)$. Essendo il quadrato commutativo

$$\begin{tikzcd}
A^{-1} \arrow[r, "\delta_A"] \arrow[d] & A^0 \arrow[d, "\mathrm{coker}(\delta_A)"] \\
0 \arrow[r] & \mathrm{CoKer}(\delta_A)
\end{tikzcd}$$

un pushout, si ha che e_A è un epimorfismo di $\mathscr{LH}(\mathscr{C})$. Dalle definizioni di i ed e si trova

$$\begin{cases} I(i_X) \circ e_{I(X)} = \mathrm{id}_{\mathrm{I}(X)} & \forall X \in \mathrm{Ob}(\mathscr{C}) \\ i_{\mathrm{C}(A)} \circ \mathrm{C}(e_A) = \mathrm{id}_{\mathrm{C}(A)} & \forall A \in \mathrm{Ob}(\mathscr{LH}(\mathscr{C})) \ . \end{cases}$$

Allora si ottiene la tesi.

Questa dimostrazione è riportata in [SCH1]. $\square$

Corollario 7.23. Siano $\mathscr{C}$ una categoria quasi-abeliana ed $\mathrm{I} : \mathscr{C} \to \mathscr{LH}(\mathscr{C})$ l'inclusione canonica. Allora:

(1) il funtore I è una immersione di $\mathscr{C}$ in $\mathscr{LH}(\mathscr{C})$;

(2) una successione $\sigma :\ A \xrightarrow{f} B \xrightarrow{g} C$ in $\mathscr{C}$ è strettamente esatta in $\mathscr{C}$ se e solo se $\mathrm{I}(\sigma)$ è esatta in $\mathscr{LH}(\mathscr{C})$.

Dimostrazione. L'iniettività di I sugli oggetti è immediata. La Proposizione 7.22 implica $\mathrm{C} \dashv \mathrm{I}$ con unità epi e co-unità iso. Dunque I è pieno e fedele, per il Teorema 1.20. Sia

$$0 \longrightarrow A \xrightarrow{f} B \xrightarrow{g} C \longrightarrow 0$$

una successione strettamente esatta di $\mathscr{C}$. Dalla Teoria delle t-strutture si deduce che un co-nucleo di $\mathrm{I}(f)$ si ottiene applicando il funtore $\mathrm{L\,H}^0$ al complesso

$$\sigma :\ \mathbb{O} \longrightarrow A \xrightarrow{f} B \longrightarrow \mathbb{O}$$

avente B al grado 0. Essendo g un epi, l'oggetto $\mathrm{CoKer}(\mathrm{I}(g))$ è rappresentato dallo stesso complesso. Tramite un calcolo diretto si vede che il morfismo di complessi

$$\begin{tikzcd} 0 \arrow[r] & A \arrow[r, "f"] \arrow[d] & B \arrow[r] \arrow[d, "g"] & 0 \\ 0 \arrow[r] & 0 \arrow[r] & C \arrow[r] & 0 \end{tikzcd}$$

ha la mappa cono strettamente esatta, essendo σ strettamente esatta. Allora $\mathrm{CoKer}(g) \cong \mathrm{I}(C)$. Essendo $\mathrm{C} \dashv \mathrm{I}$, la Proposizione 1.18 implica che il funtore I commuta con i nuclei. Allora la sequenza

$$0 \longrightarrow \mathrm{I}(A) \xrightarrow{\mathrm{I}(f)} \mathrm{I}(B) \xrightarrow{\mathrm{I}(g)} \mathrm{I}(C) \longrightarrow 0$$

è esatta in $\mathscr{LH}(\mathscr{C})$.
Sia

$$\sigma :\ A \xrightarrow{f} B \xrightarrow{g} C$$

una successione strettamente esatta di $\mathscr{C}$. Allora la successione

$$\theta :\ 0 \longrightarrow \mathrm{Ker}(f) \xrightarrow{\ker(f)} A \xrightarrow{\alpha_{(f,g)} \circ \overline{f} \circ \nu_f} \mathrm{Ker}(g) \longrightarrow 0$$

è strettamente esatta. Applicando i risultati precedenti alla successione θ ed usando la commutazione di I con i nuclei, si trova l'esattezza di $\mathrm{I}(\sigma)$. Essendo I un funtore pieno e fedele, il Lemma 2.64 permette di dedurre l'implicazione opposta.

Questo ragionamento è tratto da [SCH1]. $\square$

Capitolo 8

Le coppie di torsione

In questo capitolo si spiega la definizione di teoria di torsione in una categoria abeliana, e si illustrano le principali proprietà inerenti alle coppie di torsione. Le fonti principalmente seguite sono [BVD1] e [BOR94B].

8.1 Definizioni

Definizione 8.1 (**Teoria di Torsione**)**.** Sia $\mathscr{C}$ una categoria abeliana. Una *Teoria di Torsione* in $\mathscr{C}$ è una coppia $(\mathscr{T}, \mathscr{F})$ tale che:

(TORS1) le sottocategorie $\mathscr{T}$ e $\mathscr{F}$ sono piene e saturate in $\mathscr{C}$;

(TORS2) per ogni (A, B) in $\mathrm{Ob}(\mathscr{T}) \times \mathrm{Ob}(\mathscr{F})$ si ha $\mathrm{Hom}_{\mathscr{C}}(A, B) = 0$;

(TORS3) per ogni C oggetto di $\mathscr{C}$ esiste una sequenza esatta breve

$$0 \longrightarrow T \xrightarrow{\alpha} C \xrightarrow{\beta} F \longrightarrow 0$$

in $\mathscr{C}$ tale che $T \in \mathrm{Ob}(\mathscr{T})$ ed $F \in \mathrm{Ob}(\mathscr{F})$.

In questo caso le sottocategorie $\mathscr{T}$ e $\mathscr{F}$ si dicono rispettivamente *classe di torsione* e *classe libera di torsione*. Un sinonimo di teoria di torsione è *coppia di torsione*.

Definizione 8.2 (**Coppia di torsione spezzante**)**.** Sia $\mathscr{C}$ una categoria abeliana. Una *coppia di torsione spezzante* in $\mathscr{C}$ è una coppia $(\mathscr{T}, \mathscr{F})$ che soddifa:

- gli assiomi (TORS1) e (TORS2) della Definizione 8.1;
- per ogni C in $\mathrm{Ob}(\mathscr{C})$ esiste una sequenza spezzante

$$\sigma :\ 0 \longrightarrow T \xrightarrow{\alpha} C \xrightarrow{\beta} F \longrightarrow 0$$

in $\mathscr{C}$ tale che $T \in \mathrm{Ob}(\mathscr{T})$ ed $F \in \mathrm{Ob}(\mathscr{F})$.

Lemma 8.3. Siano $\mathscr{C}$ una categoria abeliana e $(\mathscr{T}, \mathscr{F})$ una coppia di torsione spezzante in $\mathscr{C}$. Allora $(\mathscr{T}, \mathscr{F})$ è teoria di torsione in $\mathscr{C}$.

Dimostrazione. Tutte le sequenze spezzanti sono esatte brevi. La tesi ora è chiara. □

Definizione 8.4 (Coppia di torsione tilting/cotilting). Siano $\mathscr{C}$ una categoria abeliana e $(\mathscr{T}, \mathscr{F})$ una coppia di torsione in $\mathscr{C}$. Allora $(\mathscr{T}, \mathscr{F})$ si dice:

- *tilting* se e solo se $\mathscr{T}$ è sottocategoria co-generante di $\mathscr{C}$;
- *cotilting* se e solo se $\mathscr{F}$ è sottocategoria generante di $\mathscr{C}$.

8.2 Proprietà notevoli

Proposizione 8.5. Siano $\mathscr{C}$ una categoria abeliana, $(\mathscr{T}, \mathscr{F})$ una coppia di torsione in $\mathscr{C}$ ed X in $\mathrm{Ob}(\mathscr{C})$ tale che $\mathrm{Hom}_{\mathscr{C}}(T, X) = 0$, per ogni T in $\mathrm{Ob}(\mathscr{T})$. Allora $X \in \mathrm{Ob}(\mathscr{F})$.

Dimostrazione. Le ipotesi implicano l'esistenza di una successione

$$\sigma : \; 0 \longrightarrow A \xrightarrow{f} X \xrightarrow{g} C \longrightarrow 0$$

esatta in $\mathscr{C}$ con A in $\mathrm{Ob}(\mathscr{T})$ e C in $\mathrm{Ob}(\mathscr{F})$. L'esattezza a sinistra di $\mathrm{Hom}_{\mathscr{C}}(A, \_)$ implica che la sequenza

$$\mathrm{Hom}_{\mathscr{C}}(A, \sigma) : \; 0 \longrightarrow \mathrm{Hom}_{\mathscr{C}}(A, A) \xrightarrow{f_*} \mathrm{Hom}_{\mathscr{C}}(A, X) = 0 \xrightarrow{g_*} \mathrm{Hom}_{\mathscr{C}}(A, C) = 0$$

è esatta nella categoria dei gruppi abeliani. Allora $\mathrm{id}_A = 0$. E pertanto l'esattezza di σ implica che g è isomorfismo. L'assioma (TORS1) e la relazione $C \in \mathrm{Ob}(\mathscr{F})$ implicano $X \in \mathrm{Ob}(\mathscr{F})$. □

Proposizione 8.6. Siano $\mathscr{C}$ una categoria abeliana, $(\mathscr{T}, \mathscr{F})$ una coppia di torsione in $\mathscr{C}$ ed X in $\mathrm{Ob}(\mathscr{C})$ tale che $\mathrm{Hom}_{\mathscr{C}}(X, F) = 0$, per ogni F in $\mathrm{Ob}(\mathscr{F})$. Allora $X \in \mathrm{Ob}(\mathscr{T})$.

Dimostrazione. È sufficiente dualizzare la prova della Proposizione 8.5. □

Lemma 8.7. Siano $\mathscr{C}$ una categoria abeliana, $(\mathscr{T}, \mathscr{F})$ una coppia di torsione in $\mathscr{C}$. Allora ogni oggetto zero Z di $\mathscr{C}$ appartiene ad $\mathrm{Ob}(\mathscr{T}) \cap \mathrm{Ob}(\mathscr{F})$.

Dimostrazione. Per ogni (T, F) in $\mathrm{Ob}(\mathscr{T}) \times \mathrm{Ob}(\mathscr{F})$ si ha

$$\mathrm{Hom}_{\mathscr{C}}(T, Z) \cong 0 \cong \mathrm{Hom}_{\mathscr{C}}(Z, F)\,.$$

La conclusione ora segue immediatamente dalle Proposizioni 8.5 e 8.6. □

Proposizione 8.8. Siano $\mathscr{C}$ una categoria abeliana, $(\mathscr{T}, \mathscr{F})$ una coppia di torsione in $\mathscr{C}$ ed X in $\mathrm{Ob}(\mathscr{T}) \cap \mathrm{Ob}(\mathscr{F})$. Allora:

- $X \cong 0_{\mathscr{C}}$.

Dimostrazione. Le ipotesi implicano $\mathrm{Hom}_{\mathscr{C}}(X, X) = 0$, leggendo la prima entrata in $\mathscr{T}$ e la seconda in $\mathscr{F}$. Allora $\mathrm{id}_X = 0$. Tramite un calcolo diretto si trova $X \cong 0_{\mathscr{C}}$. □

Proposizione 8.9. Siano $\mathscr{C}$ una categoria abeliana, $(\mathscr{T}, \mathscr{F})$ una coppia di torsione in $\mathscr{C}$. Allora:

- le sottocategorie $\mathscr{T}$ ed $\mathscr{F}$ sono piene, additive e chiuse per estensioni in $\mathscr{C}$.

Dimostrazione. Proviamo la tesi per la categoria $\mathscr{T}$, per la classe di torsione libera si dualizza la dimostrazione.

- $0_{\mathscr{C}} \in \mathscr{T}$: discende dal Lemma 8.7.
- $\mathscr{T}$ piena: direttamente dalle ipotesi sulle coppie di torsione.
- $\mathscr{T}$ chiusa per estensioni: sia

  $$\sigma:\ 0 \longrightarrow A \xrightarrow{\ f\ } B \xrightarrow{\ g\ } C \longrightarrow 0$$

  una successione esatta corta in $\mathscr{C}$ tale che A e C sono oggetti di $\mathscr{T}$. Sia F un oggetto di $\mathscr{F}$. L'esattezza a sinistra di $\mathrm{Hom}_{\mathscr{C}}(\_\,, F)$ implica che la sequenza

  $$\mathrm{Hom}_{\mathscr{C}}(\sigma, F):\ 0 \longrightarrow \mathrm{Hom}_{\mathscr{C}}(C, F) \xrightarrow{\ g^*\ } \mathrm{Hom}_{\mathscr{C}}(B, F) \xrightarrow{\ f^*\ } \mathrm{Hom}_{\mathscr{C}}(A, F)$$

  è esatta in $\mathcal{A}b$. Essendo $F \in \mathrm{Ob}(\mathscr{F})$, $A \in \mathrm{Ob}(\mathscr{T})$ e $C \in \mathrm{Ob}(\mathscr{T})$ si ottiene

  $$\mathrm{Hom}_{\mathscr{C}}(A, F) \cong 0 \cong \mathrm{Hom}_{\mathscr{C}}(C, F)$$

  dall'assioma (TORS2). L'esattezza di $\mathrm{Hom}_{\mathscr{C}}(\sigma, F)$ implica

$$\mathrm{Hom}_{\mathscr{C}}(B, F) \cong 0\,.$$

Dall'arbitrarietà di F in $\mathrm{Ob}(\mathscr{F})$ si deduce $B \in \mathrm{Ob}(\mathscr{T})$, per il Lemma 8.6.

- $\mathscr{T}$ è additiva: siano A e B oggetti di $\mathscr{T}$ e $(A \oplus B, \pi_A, \pi_B, \varepsilon_A, \varepsilon_B)$ un biprodotto di (A, B) in $\mathscr{C}$. Ora si prova che $A \oplus B$ è oggetto di $\mathscr{T}$. Sia F in $\mathrm{Ob}(\mathscr{F})$. Allora

$$\mathrm{Hom}_{\mathscr{C}}(A \oplus B, F) \cong \mathrm{Hom}_{\mathscr{C}}(A, F) \oplus \mathrm{Hom}_{\mathscr{C}}(B, F) \cong$$

$$\cong 0 \oplus 0 \cong 0\,.$$

essendo $\{A, B\} \subseteq \mathrm{Ob}(\mathscr{T})$. L'arbitrarietà di F in $\mathrm{Ob}(\mathscr{F})$ implica

$A \oplus B \in \mathrm{Ob}(\mathscr{T})$, per il Lemma 8.6. La pienezza di $\mathscr{T}$ in $\mathscr{C}$ implica

$$\{\pi_A, \pi_B, \varepsilon_A, \varepsilon_B\} \subseteq \mathrm{Ar}(\mathscr{T})\,.$$

La 5-upla $(A \oplus B, \pi_A, \pi_B, \varepsilon_A, \varepsilon_B)$ è un biprodotto di (A, B) in $\mathscr{T}$, perché lo è in $\mathscr{C}$. E pertanto si deduce che tutti i prodotti e co-prodotti binari di (A, B) in $\mathscr{T}$, lo sono anche in $\mathscr{C}$, per l'unicità di questi a meno di isomorfismi. L'arbitrarietà di (A, B) in $\mathrm{Ob}(\mathscr{T}) \times \mathrm{Ob}(\mathscr{T})$ implica la tesi.

□

Proposizione 8.10. Siano $\mathscr{C}$ una categoria abeliana, $(\mathscr{T}, \mathscr{F})$ una coppia di torsione in $\mathscr{C}$ ed $\mathcal{E}$ la classe di tutte le coppie nucleo-conucleo di $\mathscr{C}$. Allora:

- le coppie $(\mathscr{T}, \mathcal{E}_{|\mathscr{T}})$ e $(\mathscr{F}, \mathcal{E}_{|\mathscr{F}})$ sono categorie esatte, con la struttura additiva indotta da $\mathscr{C}$.

Dimostrazione. La Proposizione 8.9 implica che $\mathscr{T}$ ed $\mathscr{F}$ sono piene, additive e chiuse per estensioni in $(\mathscr{C}, \mathcal{E})$. Il Lemma 1.57 implica la tesi. □

Lemma 8.11. Siano:

- $\mathscr{C}$ una categoria abeliana;
- $(\mathscr{T}, \mathscr{F})$ una coppia di torsione;
- $T \in \mathrm{Ob}(\mathscr{T})$;

- $$\sigma:\ 0 \longrightarrow A \xrightarrow{f} B \xrightarrow{g} C \longrightarrow 0$$

  una successione esatta corta in $\mathscr{C}$ tale che $A \in \mathrm{Ob}(\mathscr{T})$ e $C \in \mathrm{Ob}(\mathscr{F})$.

Allora $\mathrm{Hom}_{\mathscr{C}}(T, f)$ è un isomorfismo di gruppi abeliani.

Dimostrazione. Si svolge una prova molto simile alla dimostrazione della Proposizione 6.6. □

Lemma 8.12. Siano:

- $\mathscr{C}$ una categoria abeliana;
- $(\mathscr{T}, \mathscr{F})$ una coppia di torsione;
- $F \in \mathrm{Ob}(\mathscr{F})$;
- $$\sigma:\ 0 \longrightarrow A \xrightarrow{f} B \xrightarrow{g} C \longrightarrow 0$$

  una successione esatta corta in $\mathscr{C}$ tale che $A \in \mathrm{Ob}(\mathscr{T})$ e $C \in \mathrm{Ob}(\mathscr{F})$.

Allora $\mathrm{Hom}_{\mathscr{C}}(g, F)$ è un isomorfismo di gruppi abeliani.

Dimostrazione. Si dualizza la prova del Lemma 8.11. □

8.3 Esempio di coppia di torsione

In questa sezione si vede un esempio specifico di coppia di torsione.

Siano:

- $\mathcal{D}$ la sottocategoria piena di $\mathcal{A}b$ avente come oggetti tutti e soli i gruppi abeliani divisibili;
- $\mathcal{R}$ la sottocategoria piena di $\mathcal{A}b$ avente come oggetti tutti e soli i gruppi abeliani ridotti.

Si può dimostrare che $(\mathcal{D}, \mathcal{R})$ è una coppia di torsione spezzante di $\mathcal{A}b$. Inoltre $(\mathcal{D}, \mathcal{R})$ è tilting e cotilting in $\mathcal{A}b$. Questo è un esempio classico, un riferimento è [SB21].

8.4 I funtori parte di torsione-parte libera

Siano $\mathscr{C}$ una categoria abeliana e $(\mathscr{T},\mathscr{F})$ una coppia di torsione in $\mathscr{C}$ fissate. Per ogni X in $\mathrm{Ob}(\mathscr{C})$ si fissi una sequenza esatta breve

$$\sigma_X :\ 0 \longrightarrow T^X \xrightarrow{t_X} X \xrightarrow{f_X} F^X \longrightarrow 0$$

in $\mathscr{C}$ che rispetti le seguenti clausole:

- $(T^X, F^X) \in \mathrm{Ob}(\mathscr{T}) \times \mathrm{Ob}(\mathscr{F})$;
- $F^X = X$, $T^X = 0_{\mathscr{C}}$, $t_X = 0$ ed $f_X = \mathrm{id}_X$ se $X \in \mathrm{Ob}(\mathscr{F})$;
- $F^X = 0_{\mathscr{C}}$, $T^X = X$, $t_X = \mathrm{id}_X$ ed $f_X = 0$ se $X \in \mathrm{Ob}(\mathscr{T})$.

Questo può essere fatto, per i risultati della sezione 8.1.
Si definiscono le assegnazioni

$$\tau : \mathscr{C} \longrightarrow \mathscr{T}$$

e

$$\phi : \mathscr{C} \longrightarrow \mathscr{F}$$

ponendo:

- $\tau(X) := T^X$;
- $\phi(X) := F^X$;
- $$\tau(g) := \Big((\mathrm{Hom}_{\mathscr{C}}(\tau(A), t_B))^{-1} \circ \mathrm{Hom}_{\mathscr{C}}(\tau(A), g) \circ \mathrm{Hom}_{\mathscr{C}}(\tau(A), t_A) \Big)_{|\,\mathrm{id}}$$
- $$\phi(g) := \Big((\mathrm{Hom}_{\mathscr{C}}(f_A, \phi(B)))^{-1} \circ \mathrm{Hom}_{\mathscr{C}}(g, \phi(B)) \circ \mathrm{Hom}_{\mathscr{C}}(f_B, \phi(B)) \Big)_{|\,\mathrm{id}}$$

per ogni X, A, B in $\mathrm{Ob}(\mathscr{C})$ e $g \in \mathrm{Hom}_{\mathscr{C}}(A, B)$. Avendo fissato la famiglia di successioni esatte corte $(\sigma_X)_{X \in \mathrm{Ob}(\mathscr{C})}$, si ha che τ e ϕ sono ben definiti funtori. La scelta delle sequenze σ_X permette di dedurre:

- $\tau(X) = X$;

- $\phi(Y) = Y$;
- $\tau(g) = g$;
- $\phi(h) = h$

per ogni (X, Y) in $\mathrm{Ob}(\mathscr{T}) \times \mathrm{Ob}(\mathscr{F})$ e (g, h) in $\mathrm{Ar}(\mathscr{T}) \times \mathrm{Ar}(\mathscr{F})$.

L'assegnazione τ si chiama *funtore parte di torsione*, mentre ϕ si indica come *funtore parte libera*.

Direttamente dalle definizioni di τ e ϕ si trova che il diagramma

$$\begin{array}{rccccccccc} \Delta_g: & 0 & \longrightarrow & \tau(A) & \xrightarrow{t_A} & A & \xrightarrow{f_A} & \phi(A) & \longrightarrow & 0 \\ & & & \downarrow{\scriptstyle \tau(g)} & & \downarrow{\scriptstyle g} & & \downarrow{\scriptstyle \phi(g)} & & \\ & 0 & \longrightarrow & \tau(B) & \xrightarrow[t_B]{} & B & \xrightarrow[f_B]{} & \phi(B) & \longrightarrow & 0 \end{array}$$

commuta in $\mathscr{C}$ per ogni A, B in $\mathrm{Ob}(\mathscr{C})$ e g in $\mathrm{Hom}_{\mathscr{C}}(A, B)$.

Si indicano con

$$I^{\mathscr{T}} : \mathscr{T} \longrightarrow \mathscr{C}$$

e

$$I^{\mathscr{F}} : \mathscr{F} \longrightarrow \mathscr{C}$$

i funtori inclusione rispettivamente di $\mathscr{T}$ in $\mathscr{C}$ e di $\mathscr{F}$ in $\mathscr{C}$. Da quanto dimostrato fino adesso, si ha che le famiglie di morfismi

$$(t_X)_{X \in \mathrm{Ob}(\mathscr{C})} : I^{\mathscr{T}} \circ \tau \longrightarrow \mathrm{id}_{\mathscr{C}}$$

e

$$(f_X)_{X \in \mathrm{Ob}(\mathscr{C})} : \mathrm{id}_{\mathscr{C}} \longrightarrow I^{\mathscr{F}} \circ \phi$$

sono trasformazioni naturali.

Per ogni C', D oggetti di $\mathscr{C}$, $C \in \mathrm{Ob}(\mathscr{T})$ e $D' \in \mathrm{Ob}(\mathscr{F})$ si definisce

$$A^{\mathscr{T}}_{C,D} := \big(\mathrm{Hom}_{\mathscr{C}}(C, t_D)\big)^{-1} \quad ;$$

$$A^{\mathscr{F}}_{C',D'} := \mathrm{Hom}_{\mathscr{C}}(f_{C'}, D') \quad ;$$

$$A^{\mathscr{T}} := (A^{\mathscr{T}}_{X,Y})_{(X,Y) \in \mathrm{Ob}(\mathscr{T}) \times \mathrm{Ob}(\mathscr{C})} \quad ;$$

$$A^{\mathscr{F}} := (A^{\mathscr{F}}_{Z,W})_{(Z,W)\in \mathrm{Ob}(\mathscr{C})\times \mathrm{Ob}(\mathscr{F})} \quad .$$

Come nel caso delle t-strutture si prova che $A^{\mathscr{T}}$ e $A^{\mathscr{F}}$ sono aggiunzioni rispettivamente di $I^{\mathscr{T}}$ in τ e di ϕ in $I^{\mathscr{F}}$.

Siano $k : A \to B$ ed $e : D \to C$ rispettivamente un mono ed un epi di $\mathscr{C}$. Allora le relazioni

$$\begin{cases} k \circ t_A = t_B \circ \tau(k) \\ \\ f_B \circ e = \phi(e) \circ f_A \end{cases}$$

e l'esattezza di σ_A e σ_B, implicano che $\tau(k)$ e $\phi(e)$ sono rispettivamente un mono ed un epi di $\mathscr{C}$.

La prova della seguente Proposizione trae ispirazione da [BVD1], ma l'autore non ha trovato dimostrazioni della seguente Proposizione, in alcuna fonte citata in Bibliografia.

Proposizione 8.13. Si mantengano tutte le notazioni di questa sezione. Si indichi con $\mathcal{E}$ la totalità delle coppie nucleo-conucleo di $\mathscr{C}$. Allora $\mathcal{M}(\mathscr{T}) = \mathcal{E}_{|\mathscr{T}}$.

Dimostrazione. $\subseteq$: Sia

$$\theta :\ A \xrightarrow{f} B \xrightarrow{g} C$$

una sequenza di morfismi in $\mathscr{T}$ tale che f è nucleo di g in $\mathscr{T}$ e g è co-nucleo di f in $\mathscr{T}$. Essendo $I^{\mathscr{T}} \dashv \tau$, si ottiene l'esattezza della sequenza

$$\theta_0 :\ A \xrightarrow{f} B \xrightarrow{g} C \longrightarrow 0$$

in $\mathscr{C}$.

Sia $k : R \to B$ un nucleo di g in $\mathscr{C}$. L'aggiunzione $I^{\mathscr{T}} \dashv \tau$ permette di dedurre che

$$\tau(k) : \tau(R) \to B$$

è nucleo di $\tau(g) = g$ in $\mathscr{T}$. Allora esiste un unico isomorfismo $h : \tau(R) \to A$ di $\mathscr{T}$, che rende il diagramma

$$
\begin{tikzcd}
\Delta : \tau(R) \arrow[rr, "\tau(k)"] \arrow[dr, dotted, "h"'] & & B \\
& A \arrow[ur, "f"'] &
\end{tikzcd}
$$

commutativo in $\mathscr{T}$. Essendo k un mono di $\mathscr{C}$, si trova che $\tau(k)$ è mono di $\mathscr{C}$, per la trattazione che precede questa Proposizione. La commutatività di Δ permette di dedurre che f è monomorfismo di $\mathscr{C}$. Allora la sequenza

$$ {}_0\theta_0 : \ 0 \longrightarrow A \xrightarrow{\ f\ } B \xrightarrow{\ g\ } C \longrightarrow 0 $$

è esatta in $\mathscr{C}$, per l'abelianità di quest'ultima.

$\supseteq$: chiaramente tutte le costruzioni limite/co-limite in $\mathscr{C}$ aventi tutte le frecce in $\mathscr{T}$, sono anche costruzioni limite/co-limite in $\mathscr{T}$, della stessa tipologia. $\square$

Dualizzando la dimostrazione si ottiene

Proposizione 8.14. Si mantengano tutte le notazioni di questa sezione. Si indichi con $\mathcal{E}$ la totalità di tutte le coppie nucleo-conucleo di $\mathscr{C}$. Allora $\mathcal{M}(\mathscr{F}) = \mathcal{E}_{|\mathscr{F}}$.

Proposizione 8.15. Siano $\mathscr{C}$ una categoria abeliana e $(\mathscr{T}, \mathscr{F})$ una coppia di torsione in $\mathscr{C}$. Allora:

(a) ogni elemento di $\mathrm{Ar}(\mathscr{F})$ ammette un nucleo ed un co-nucleo in $\mathscr{F}$;

(b) ogni elemento di $\mathrm{Ar}(\mathscr{T})$ ammette un nucleo ed un co-nucleo in $\mathscr{T}$.

Dimostrazione.

(a):

- Esistenza dei nuclei in $\mathscr{F}$: sia $f : A \to B$ un morfismo di $\mathscr{F}$. L'abelianità di $\mathscr{C}$ implica l'esistenza di un nucleo $\varepsilon : K \to A$ di f in $\mathscr{C}$. Ora si prova che K è oggetto di $\mathscr{F}$. Sia T un oggetto di $\mathscr{T}$. Il carattere mono di ε in $\mathscr{C}$ e gli assiomi delle coppie di torsione implicano che

  $$ \mathrm{Hom}_{\mathscr{C}}(T, \varepsilon) : \mathrm{Hom}_{\mathscr{C}}(T, K) \to \mathrm{Hom}_{\mathscr{C}}(T, A) \cong 0 $$

  è un morfismo iniettivo di gruppi abeliani. Allora

  $$ \mathrm{Hom}_{\mathscr{C}}(T, K) \cong 0\,. $$

L'arbitrarietà di T in $\mathrm{Ob}(\mathscr{T})$ implica $K \in \mathrm{Ob}(\mathscr{F})$. E pertanto si deduce che ε è nucleo di f in $\mathscr{F}$, dalla pienezza di $\mathscr{F}$ in $\mathscr{C}$.

- Esistenza dei co-nuclei in $\mathscr{F}$: sia $g : B \to C$ un morfismo di $\mathscr{F}$. L'abelianità di $\mathscr{C}$ implica l'esistenza di un co-nucleo $h : C \to D$ di f in $\mathscr{C}$. L'aggiunzione $\phi \dashv I^{\mathscr{F}}$ implica che $\phi(h)$ è co-nucleo di $\phi(g) = g$ in $\mathscr{F}$.

(b): si dualizza quanto svolto nel punto precedente.

□

Lemma 8.16. Siano:

- $\mathscr{C}$ una categoria abeliana;
- $(\mathscr{T}, \mathscr{F})$ una coppia di torsione in $\mathscr{C}$;
- $\mathcal{E}$ la classe delle coppie nucleo-conucleo (f, g) di $\mathscr{C}$.

Allora:

(1) le inflazioni di $(\mathscr{T}, \mathcal{E}_{|\mathscr{T}})$ sono tutte e sole i mono stretti di $\mathscr{T}$;

(2) le deflazioni di $(\mathscr{T}, \mathcal{E}_{|\mathscr{T}})$ sono tutte e sole gli epi stretti di $\mathscr{T}$;

(3) le inflazioni di $(\mathscr{F}, \mathcal{E}_{|\mathscr{F}})$ sono tutte e sole i mono stretti di $\mathscr{F}$;

(4) le deflazioni di $(\mathscr{F}, \mathcal{E}_{|\mathscr{F}})$ sono tutte e sole gli epi stretti di $\mathscr{F}$.

Dimostrazione.

(1): sia $i : A \to B$ un morfismo di $\mathscr{T}$. Allora i è inflazione di $(\mathscr{T}, \mathcal{E}_{|\mathscr{T}})$ se e solo se esiste una freccia $d : B \to C$ in $\mathscr{T}$ tale che $(i, d) \in \mathcal{E}_{|\mathscr{T}}$. La Proposizione 8.13 implica che questa ultima affermazione è equivalente a richiedere l'esistenza di una freccia d in $\mathscr{T}$ tale che i è nucleo di d in $\mathscr{T}$ e d è co-nucleo di i in $\mathscr{T}$. Il Lemma 1.33 e la Proposizione 8.15 implicano che questo è equivalente a dire che i è mono stretto di $\mathscr{T}$.

(2): si dualizza la prova di (1).

(3): simile al punto (1).

(4): si dualizza la prova di (3).

□

Proposizione 8.17. Siano:

- $\mathscr{C}$ una categoria abeliana;

- $(\mathscr{T}, \mathscr{F})$ una coppia di torsione in $\mathscr{C}$.

Allora le categorie $\mathscr{T}$ ed $\mathscr{F}$ sono quasi-abeliane.

Dimostrazione. Si svolge la prova per la categoria $\mathscr{F}$, per la parte di torsione si dualizza la dimostrazione.

- $0_{\mathscr{C}} \in \mathrm{Ob}(\mathscr{F})$: discende dal Lemma 8.7.
- $\mathscr{F}$ è additiva: discende dalla Proposizione 8.9.
- Esistenza dei nuclei in $\mathscr{F}$: si ottiene direttamente dalla Proposizione 8.15.
- Esistenza dei co-nuclei in $\mathscr{F}$: deriva dalla Proposizione 8.15.
- Stabilità degli epi stretti: siano $\mathcal{E}$ la classe di tutte le coppie nucleo-conucleo di $\mathscr{C}$ e

$$\Delta : \begin{array}{ccc} A' & \xrightarrow{g'} & A \\ \downarrow{\scriptstyle f'} & & \downarrow{\scriptstyle f} \\ B' & \xrightarrow[g]{} & B \end{array}$$

  un pullback di (g, f) in $\mathscr{F}$, tale che f è epi stretto di $\mathscr{F}$.

  La Proposizione 8.10 implica che $(\mathscr{F}, \mathcal{E}_{|\mathscr{F}})$ è una categoria esatta. Il Lemma 8.16 implica che f è deflazione di $(\mathscr{F}, \mathcal{E}_{|\mathscr{F}})$. E pertanto il diagramma Δ e l'assioma (EX2) implicano che f' è deflazione di $(\mathscr{F}, \mathcal{E}_{|\mathscr{F}})$. Il Lemma 8.16 implica che f' è epi stretto di $\mathscr{F}$. L'arbitrarietà di f e Δ implicano l'asserto.
- Stabilità dei mono stretti: si dimostra questa proprietà dualizzando il punto precedente.

□

8.5 Ereditarietà

Definizione 8.18 (Coppia di torsione ereditaria). Una coppia di torsione $(\mathscr{T}, \mathscr{F})$ in una categoria abeliana $\mathscr{C}$, si dice *ereditaria* se e solo se la sottocategoria $\mathscr{T}$ è chiusa per sotto-oggetti in $\mathscr{C}$.

Proposizione 8.19. Sia $(\mathscr{T}, \mathscr{F})$ una coppia di torsione ereditaria in una categoria abeliana $\mathscr{C}$. Allora $\mathscr{T}$ è sottocategoria abeliana di $\mathscr{C}$.

Dimostrazione.

(1) $\mathscr{T}$ è sottocategoria additiva di $\mathscr{C}$: discende dalla Proposizione 8.17.

(2) Esistenza dei nuclei: direttamente dalla Proposizione 8.17.

(3) Preservazione dei nuclei: siano $f : A \to B$ un morfismo in $\mathscr{T}$ e $k : C \to A$ un nucleo di f in $\mathscr{T}$. L'abelianità di $\mathscr{C}$ implica l'esistenza di $h : D \to A$ nucleo di f in $\mathscr{C}$. L'ereditarietà di $(\mathscr{T}, \mathscr{F})$ in $\mathscr{C}$ ed il carattere mono di h in $\mathscr{C}$, implicano $D \in \mathrm{Ob}(\mathscr{T})$. E pertanto la pienezza di $\mathscr{T}$ in $\mathscr{C}$, implica che h è nucleo di f in $\mathscr{T}$.

Essendo i nuclei unici a meno di unico isomorfismo, esiste un unico $g : C \to D$ isomorfismo in $\mathscr{T}$ che rende il diagramma

$$\begin{tikzcd}
\Delta_1 : C \arrow[rr, "k"] \arrow[dr, dotted, "g"'] & & A \\
& D \arrow[ur, "h"'] &
\end{tikzcd}$$

commutativo. Allora k è nucleo di f in $\mathscr{C}$.

(4) Esistenza dei co-nuclei: deriva dalla Proposizione 8.17.

(5) Preservazione dei co-nuclei: siano $f : A \to B$ un morfismo in $\mathscr{T}$ e $\beta : B \to E$ un co-nucleo di f in $\mathscr{T}$. L'aggiunzione $I^{\mathscr{T}} \dashv \tau$ implica che β è co-nucleo di f in $\mathscr{C}$.

(6) Ogni morfismo di $\mathscr{T}$ è stretto in $\mathscr{T}$: quanto dimostrato fino ad ora, implica che i morfismi paralleli di $\mathscr{T}$ si calcolano in $\mathscr{C}$. Si ottiene l'asserto, grazie all'abelianità di $\mathscr{C}$.

(7) Conclusione: i punti precedenti implicano l'abelianità di $\mathscr{T}$ e l'esattezza del funtore $I^{\mathscr{T}}$. Questa è esattamente la tesi della Proposizione.

□

Definizione 8.20 (Coppia di torsione co-ereditaria). Una coppia di torsione $(\mathscr{T}, \mathscr{F})$ in una categoria abeliana $\mathscr{C}$, si dice *co-ereditaria* se e solo se la sottocategoria $\mathscr{F}$ è chiusa per quozienti in $\mathscr{C}$.

Dualizzando la dimostrazione della Proposizione 8.19 si ottiene

Proposizione 8.21. Sia $(\mathscr{T}, \mathscr{F})$ una coppia di torsione co-ereditaria in una categoria abeliana $\mathscr{C}$. Allora $\mathscr{F}$ è sottocategoria abeliana di $\mathscr{C}$.

Capitolo 9

Il Teorema di Caratterizzazione

Questa è la parte finale dello scritto. Si spiegano i lemmi e le proposizioni necessarie per arrivare ad enunciare il *Teorema di Caratterizzazione delle Categorie Quasi-Abeliane*. Infine si dimostra il risultato voluto.

Lemma 9.1. Siano $\mathscr{C}$ una categoria quasi-abeliana e $J : \mathscr{C} \to \mathscr{LH}(\mathscr{C})$ l'inclusione canonica. Allora:

(a) la categoria $\mathscr{LH}(\mathscr{C})$ è abeliana;

(b) la sottocategoria $\mathrm{Imm}(J)$ è generante in $\mathscr{LH}(\mathscr{C})$;

(c) la sottocategoria $\mathrm{Ess}(J)$ è chiusa per sotto-oggetti in $\mathscr{LH}(\mathscr{C})$.

Dimostrazione.

(a): Sia $Q : \mathcal{K}(\mathscr{C}) \to \mathcal{K}(\mathscr{C})/\mathcal{N}(\mathscr{C})$ il funtore della localizzazione canonica destra. La conclusione discende direttamente dal Corollario 6.38, essendo $\mathscr{LH}(\mathscr{C})$ il cuore della t-struttura $(\mathrm{Ess}(Q_{|\mathcal{K}_{\leq 0}(\mathscr{C})}), \mathrm{Ess}(Q_{|\mathcal{K}_{\geq 0}(\mathscr{C})}))$ in $\mathrm{D}(\mathscr{C})$.

(b): omessa. Vedere la prova del punto (2) della Proposizione 3.11. in [HRN2], ad esempio.

(c): omessa. Vedere la prova del punto (3) della Proposizione 3.11. in [HRN2], ad esempio.

□

Lemma 9.2. Siano $\mathscr{C}$ una categoria abeliana e $\mathscr{D}$ una sottocategoria piena di $\mathscr{C}$. Assumo che per ogni mono $m : C \to D$ con D in $\mathscr{D}$ esista D' in $\mathrm{Ob}(\mathscr{D})$ tale che $C \cong D'$. Allora:

(a) ogni morfismo f in $\mathscr{D}$ ha nucleo e co-immagine in $\mathscr{D}$ ed essi si riescono a determinare nella categoria $\mathscr{C}$;

(b) Una sequenza

$$A \xrightarrow{f} B \xrightarrow{g} C$$

di $\mathscr{D}$ è esatta in $\mathscr{C}$ se e solo se $\mathrm{Coim}_{\mathscr{C}}(f) \cong \mathrm{Ker}_{\mathscr{C}}(g)$ in $\mathscr{D}$;

(c) per ogni pullback

$$\begin{tikzcd} A \arrow[r, "f"] \arrow[d, "h"'] & B \arrow[d, "\theta"] \\ C \arrow[r, "g"'] & D \end{tikzcd}$$

in $\mathscr{D}$ tale che g è epimorfismo stretto di $\mathscr{C}$ allora lo è anche f.

Dimostrazione. Si indichi con $I : \mathscr{D} \to \mathscr{C}$ il funtore inclusione di $\mathscr{D}$ in $\mathscr{C}$.

(a): Sia $u : E \to F$ un morfismo in $\mathscr{D}$. Essendo $\ker(I(u)) : \mathrm{Ker}(I(u)) \to I(E)$ un mono di $\mathscr{C}$ ed $I(E)$ in $\mathscr{D}$, le ipotesi implicano l'esistenza di un oggetto K in $\mathscr{D}$ e di un isomorfismo $\gamma : I(K) \to \mathrm{Ker}(I(u))$ in $\mathscr{C}$. Allora $\ker(I(u)) \circ \gamma$ è un nucleo di $I(u)$ in $\mathscr{C}$. La pienezza di $\mathscr{D}$ implica l'esistenza di σ in $\mathrm{Hom}_{\mathscr{D}}(K, E)$ tale che $I(\sigma) = \ker(I(u)) \circ \gamma$. Essendo $\mathscr{D}$ sottocategoria di $\mathscr{C}$, si trova che σ è nucleo di u in $\mathscr{D}$. Fino ad ora si ha dimostrato che ogni morfismo di $\mathscr{D}$ ha nucleo in $\mathscr{D}$ e che I commuta rispetto ai nuclei.

Si consideri la fattorizzazione canonica di $I(u)$

$$\begin{tikzcd} I(E) \arrow[r, "I(u)"] \arrow[d, two heads, "\nu_{I(u)}"'] & I(F) \\ \mathrm{Coim}(I(u)) \arrow[r, "\overline{I(u)}"'] & \mathrm{Im}(I(u)) \arrow[u, hook, "\mu_{I(u)}"'] \end{tikzcd}$$

in $\mathscr{C}$. Essendo $\mathscr{C}$ una categoria abeliana, il morfismo $\mu_{I(u)} \circ \overline{I(u)}$ è mono in $\mathscr{C}$. Le ipotesi implicano l'esistenza di un elemento C in $\mathscr{D}$ e di un isomorfismo $\delta : \mathrm{Coim}(I(u)) \to I(C)$ in $\mathscr{C}$. Essendo $\mathscr{D}$ una sottocategoria piena di $\mathscr{C}$, esiste λ in $\mathrm{Hom}_{\mathscr{D}}(E, C)$ tale che $\delta \circ \nu_{I(u)} = I(\lambda)$. Tramite tutto quello che si ha dimostrato fino a questo punto, si trova che $I(\lambda)$ è co-nucleo di σ in $\mathscr{C}$. Un calcolo diretto mostra che λ è co-nucleo di σ in $\mathscr{D}$. Si ottiene che $\mathscr{D}$ ha tutti i nuclei e le co-immagini e che I commuta con entrambi.

(b): discende dal punto (a).

(c): discende dal punto (a).

L'argomentazione svolta è presa da [SCH1]. □

Teorema 9.3 (di Caratterizzazione). Sia $\mathscr{C}$ una categoria. Le seguenti affermazioni sono equivalenti:

(a) la categoria $\mathscr{C}$ è quasi-abeliana;

(b) esistono una categoria abeliana $\mathscr{D}$ ed una coppia di torsione cotilting $(\mathscr{T}, \mathscr{F})$ in $\mathscr{D}$ tali che la categoria $\mathscr{F}$ è equivalente a $\mathscr{C}$;

(c) esistono una categoria abeliana $\mathscr{D}$ ed una coppia di torsione tilting $(\mathscr{T}, \mathscr{F})$ in $\mathscr{D}$ tali che la categoria $\mathscr{T}$ è equivalente a $\mathscr{C}$.

Dimostrazione. (a) $\Rightarrow$ (b): Si definisce

- $\mathscr{D} := \mathscr{L}\mathscr{H}(\mathscr{C})$;
- $\mathrm{I} : \mathscr{C} \to \mathscr{D}$ come l'inclusione canonica;
- $\mathscr{F} := \mathrm{Ess}(\mathrm{I})$;
- $\mathscr{T}$ come la sottocategoria piena di $\mathscr{D}$ che soddisfa

$$\mathrm{Ob}(\mathscr{T}) = \Big\{ D \in \mathrm{Ob}(\mathscr{D}) \;\Big|\; \text{esistono} \quad g \in \mathrm{Ar}(\mathscr{D}) \text{ ed } \quad f \in \mathrm{Ar}(\mathscr{C})$$

$$\text{t.c. } D = \partial^1_{\mathscr{D}}(g), \;\; g \text{ è co-nucleo di } \mathrm{I}(f) \text{ in } \mathscr{D} \text{ ed } \;\; f \text{ è epi in } \mathscr{C} \Big\} \;.$$

Ora si dimostra che $(\mathscr{T}, \mathscr{F})$ è una coppia di torsione cotilting in $\mathscr{D}$.

(TORS1): la sottocategoria $\mathscr{T}$ è piena in $\mathscr{D}$ per definizione. Un calcolo diretto mostra che $\mathscr{T}$ è sottocategoria saturata di $\mathscr{D}$. Per definizione $\mathscr{F}$ è sottocategoria piena di $\mathscr{D}$. Il Lemma 1.8 implica che $\mathscr{F}$ è sottocategoria saturata di $\mathscr{D}$.

(TORS2): siano (T, F) in $\mathrm{Ob}(\mathscr{T}) \times \mathrm{Ob}(\mathscr{F})$ e γ in $\mathrm{Hom}_{\mathscr{D}}(T, F)$. Allora esistono un oggetto C di $\mathscr{C}$ ed un isomorfismo $\psi : F \to \mathrm{I}(C)$ in $\mathscr{D}$. Si indichi con h il morfismo $\psi \circ \gamma$. Per definizione di $\mathscr{T}$ esistono $f : A \to B$ epi in $\mathscr{C}$ e $g : \mathrm{I}(B) \to T$ in $\mathrm{Ar}(\mathscr{D})$ tale che g è co-nucleo di $\mathrm{I}(f)$ in $\mathscr{D}$.

Il Corollario 7.23 implica che I è funtore pieno e fedele. E pertanto la relazione $h \circ g \in \mathrm{Hom}_{\mathscr{D}}(\mathrm{I}(B), \mathrm{I}(C))$ implica l'esistenza di una unica freccia r in $\mathrm{Hom}_{\mathscr{C}}(B, C)$ tale che $\mathrm{I}(r) = h \circ g$.

Allora

$$\mathrm{I}(r \circ f) = \mathrm{I}(r) \circ \mathrm{I}(f) =$$

$$= h \circ g \circ \mathrm{I}(f) = 0$$

essendo g co-nucleo di $\mathrm{I}(f)$ in $\mathscr{D}$. Allora $r \circ f = 0$, dal carattere fedele di I. Quindi $r = 0$, essendo f epi in $\mathscr{C}$. Si ottiene

$$h \circ g = \mathrm{I}(r) = 0\,.$$

Il carattere epi di g in $\mathscr{D}$ implica $h = 0$. Quindi

$$\gamma = \psi^{-1} \circ h = 0\,.$$

($\mathscr{F}$ GEN $\mathscr{D}$): dal Lemma 9.1 si ottiene che $\mathscr{F}$ è sottocategoria generante di $\mathscr{D}$.

(TORS3): sia C un oggetto di $\mathscr{D}$. Esiste una sequenza esatta

$$\sigma: \ \mathrm{I}(F) \xrightarrow{\mathrm{I}(f)} \mathrm{I}(F') \xrightarrow{g} C \longrightarrow 0$$

in $\mathscr{D}$, tale che $f \in \mathrm{Ar}(\mathscr{C})$, per il Lemma 9.1 ed il Corollario 7.23. Siano $g' : F' \to C'$ un co-nucleo di f in $\mathscr{C}$ ed $f' : K \to F'$ un nucleo di g' in $\mathscr{C}$. Allora $g' \circ f = 0$. E pertanto la proprietà universale di f' implica l'esistenza di un unico α in $\mathrm{Hom}_{\mathscr{C}}(F, K)$ che rende il diagramma

$$\Delta_1: \quad \begin{tikzcd} F \arrow[r, "f"] \arrow[d, "\alpha"'] & F' \arrow[r, "g'"] \arrow[d, equal, "\mathrm{id}_{F'}"'] & C' \arrow[d, equal, "\mathrm{id}_{C'}"] \\ K \arrow[r, "f'"'] & F' \arrow[r, "g'"'] & C' \end{tikzcd}$$

commutativo in $\mathscr{C}$.

Ora si dimostra che α è un epi di $\mathscr{C}$. Sia β in $\mathrm{Hom}_{\mathscr{C}}(K, Z)$ tale che $\beta \circ \alpha = 0$. È possibile trovare un pushout in $\mathscr{C}$ della forma

$$\begin{tikzcd} \Delta_2 : & K \arrow[r, "f'"] \arrow[d, "\beta"'] & F' \arrow[d, "\varphi"] \\ & Z \arrow[r, "f''"'] & Z' \end{tikzcd}$$

per la quasi-abelianità di $\mathscr{C}$.

Allora

$$\varphi \circ f = \varphi \circ f' \circ \alpha =$$

$$= f'' \circ \beta \circ \alpha = 0\,.$$

Dalla proprietà universale di g' si deduce l'esistenza di un unico morfismo ε tale che $\varphi = \varepsilon \circ g'$. Da questa uguaglianza si ottiene

$$(\star_0) \quad f'' \circ \beta = \varphi \circ f' = \varepsilon \circ g' \circ f' = 0\,.$$

Dalle ipotesi assunte e dalla quasi-abelianità di $\mathscr{C}$ si deduce che f'' è un mono stretto, quindi un mono. E pertanto $(\star_0)$ implica $\beta = 0$. L'arbitrarietà di β implica il carattere epi di α.

Essendo α epi in $\mathscr{C}$, $f = f' \circ \alpha$ e g' co-nucleo di f in $\mathscr{C}$ si deduce che g' è co-nucleo di f' in $\mathscr{C}$. E pertanto la successione

$$\theta :\ 0 \longrightarrow K \xrightarrow{f'} F' \xrightarrow{g'} C' \longrightarrow 0$$

è strettamente esatta in $\mathscr{C}$. Il Corollario 7.23 implica l'esattezza della successione

$$\mathrm{I}(\theta) :\ 0 \longrightarrow \mathrm{I}(K) \xrightarrow{\mathrm{I}(f')} \mathrm{I}(F') \xrightarrow{\mathrm{I}(g')} \mathrm{I}(C') \longrightarrow 0$$

in $\mathscr{D}$. Si ha $\mathrm{I}(C') \in \mathrm{Ob}(\mathscr{F})$, per definizione di $\mathscr{F}$.

La sequenza di morfismi

$$\mathrm{I}(A) \xrightarrow{\mathrm{I}(\alpha)} \mathrm{I}(K) \xrightarrow{\mathrm{I}(f')} \mathrm{I}(F')$$

è tale che $\mathrm{I}(f')$ è mono in $\mathscr{D}$. Allora il Lemma 1.38 implica l'esistenza di un diagramma commutativo

$$\Delta_3 : \quad \begin{tikzcd} & \mathrm{I}(K) \arrow[r, "\mathrm{I}(f')"] \arrow[d, "\mathrm{coker}_{\mathscr{D}}(\mathrm{I}(\alpha))"'] & \mathrm{I}(F') \arrow[r, equal, "\mathrm{id}_{\mathrm{I}(F')}"] \arrow[d, "g"'] & \mathrm{I}(F') \arrow[d, "\mathrm{I}(g')"] & \\ 0 \arrow[r] & \mathrm{CoKer}_{\mathscr{D}}(\mathrm{I}(\alpha)) \arrow[r, dotted, "u"'] & C \arrow[r, dotted, "v"'] & \mathrm{I}(C') \arrow[r] & 0 \end{tikzcd}$$

con la riga inferiore esatta in $\mathscr{D}$. Il carattere epi di α in $\mathscr{C}$ implica

$$\mathrm{CoKer}_{\mathscr{D}}(\mathrm{I}(\alpha)) \in \mathrm{Ob}(\mathscr{T})\,.$$

$(\mathscr{C} \sim \mathscr{F})$: il funtore I è una immersione, allora la definizione di $\mathscr{F}$ implica che $\mathrm{I}^{|\mathscr{F}}$ è una equivalenza di categorie di $\mathscr{C}$ in $\mathscr{F}$.

(b) $\Rightarrow$ (a): la Proposizione 8.17 implica che $\mathscr{F}$ è una categoria quasi-abeliana. Dalla relazione $\mathscr{C} \sim \mathscr{F}$ si deduce la quasi-abelianità di $\mathscr{C}$, tramite il Lemma 2.2.

(a) $\Leftrightarrow$ (c): è sufficiente utilizzare le t-strutture destre, nell'equivalenza (a) $\Leftrightarrow$ (b).

Questa prova si poggia sul lavoro di [BVD1]. □

Bibliografia

[HANS1] E. Arentz-Hansen, *Classifying Subcategories in Quotients of Exact Categories*, 2017, arXiv: 1712.05389

`https://arxiv.org/pdf/1712.05389v1.pdf`

[SB21] S. Bazzoni, *Lectures of Rings and Modules*, Materiale Didattico distribuito dalla Docente tramite la piattaforma Moodle di Unipd, Anno Accademico 2020-2021

`https://elearning.unipd.it/math/?time=1370037600`

[BBD1] A.A. Beilinson - J. Bernstein - P. Deligne, *Faisceaux pervers*, Analysis and topology on singular spaces, I (Luminy, 1981), Astérisque, vol. 100, Soc. Math. France, Paris, 1982, pg. 5-171. MR 751966 (86g:32015)

[BVD1] A. Bondal - M. Van Den Bergh, *Generators and representability of functors in commutative and noncommutative geometry*, 2002, arXiv:math/0204218 [math.AG]

`https://arxiv.org/pdf/math/0204218v2.pdf`

[BOR94A] F. Borceux, *Handbook of categorical algebra.* 1, volume 51 of Encyclopedia of Mathematics and its Applications, Cambridge University Press, Cambridge, 1994, Basic category theory

[BOR94B] F. Borceux, *Handbook of categorical algebra.* 2, volume 51 of Encyclopedia of Mathematics and its Applications, Cambridge University Press, Cambridge, 1994, Categories and structures

[BOR94C] F. Borceux, *Handbook of categorical algebra.* 3, volume 51 of Encyclopedia of Mathematics and its Applications, Cambridge University Press, Cambridge, 1994, Categories of sheaves

[TB1] T. Bühler, *Exact Categories*, Expo. Math. 28 (2010), no. 1, 1-69

`https://www.sciencedirect.com/science/article/pii/S0723086909000395`

[CF1] R. Colpi - K.R. Fuller, *Tilting objects in abelian categories and quasitilted rings*, Trans. Amer. Math. Soc. 359 (2007), no. 2, 741-765 (electronic). MR 2255195 (2007j:18012)

https://www.ams.org/journals/tran/2007-359-02/S0002-9947-06-03909-2/S0002-9947-06-03909-2.pdf

[ATFRC1] R. Colpi - F. Mantese - A. Tonolo, *When an abelian category with a tilting object is a module category*, 2010, arXiv: 1011.5345

https://arxiv.org/pdf/1011.5345.pdf

[DKS1] S.E. Dickson, *A torsion theory for Abelian categories*, Trans. Amer. Math. Soc. 121 (1966), 223-235. MR 0191935 (33#162)

[FRD1] P.J. Freyd, *Representations in Abelian Categories*, Proc. Conf. Categorical Algebra, La Jolla 1965, pg. 95-120

[FRD2] P.J. Freyd, *ABELIAN CATEGORIES - An Introduction to the Theory of Functors*, Harper's Series in Modern Mathematics, 1966

[GABZIS] P. Gabriel - M. Zisman, *Calculus of Fractions and Homotopy Theory*, Ergebnisse der Math., Springer, 1967

[GM1] S.I. Gelfand - Y.I. Manin, *Methods of Homological Algebra*, Springer-Verlag, Berlin, 1996

[GR1] M. Grandis, *Category Theory and Applications - A Textbook for Beginners*, World Scientific Publishing Co. Pte. Ltd., 2018

[HRN1] R. Henrard - A.C. Van Roosmalen, *Derived categories of (one sided) exact categories and their localizations*, 2019, arXiv: 1903.12647

https://arxiv.org/pdf/1903.12647.pdf

[HRN2] R. Henrard - S. Kvamme - A.C. Van Roosmalen - S. Wegner, *The left heart and exact hull of an additive regular category*, 2021, arXiv: 2105.11483

https://arxiv.org/pdf/2105.11483.pdf

[PHF1] P. Hofstra, *1. ABELIAN CATEGORIES*, Materiale disponibile gratuitamente in rete

https://mysite.science.uottawa.ca/phofstra/MAT5147/homology.pdf

[HOTN] R. Hotta - K. Takeuchi - T. Tanisaki, *D-Modules, Perverse Sheaves and Representation Theory*, Birkäuser-2006

[KS1] M. Kashiwara - P. Schapira, *Sheaves on Manifolds*, Grundlehren der Math., vol. 292, Springer, Berlin, 1990

[KS2] M. Kashiwara - P. Schapira, *Categories and Sheaves*, Grundlehren der Math., vol. 332, Springer-Verlag, Berlin, 2006

[BK1] B. Keller, *Chain complexes and stable categories*, Manuscripta Math. 67 (1990), no. 4, 379-417. MR 1052551 (91h:18006)

`https://webusers.imj-prg.fr/~bernhard.keller/publ/csc.pdf`

[BK2] B. Keller, *Derived categories and their uses*, Handbook of algebra, Vol. 1, North-Holland, Amsterdam, 1996, pp. 671-701. MR 1421815 (98h:18013)

`https://webusers.imj-prg.fr/~bernhard.keller/publ/dcu.pdf`

[BK3] B. Keller, *DERIVED CATEGORIES AND TILTING*

`https://webusers.imj-prg.fr/~bernhard.keller/ictp2006/lecturenotes/keller.pdf`

[BK4] B. Keller, *INTRODUCTION TO ABELIAN AND DERIVED CATEGORIES*

`https://webusers.imj-prg.fr/~bernhard.keller/publ/cam.pdf`

[GMK1] G.M. Kelly, *Monomorphisms, epimorphisms and pull-backs*, J. Austral. Math. Soc. 9 (1969), pg. 124-142

[PDL1] P.D. Lamberti, *Lezioni di Analisi Funzionale*, Materiale Didattico distribuito dal Docente tramite la piattaforma Moodle di Unipd, Anno Accademico 2019-2020

[ML98] S. Mac Lane, *Categories for the working mathematician*, volume 5 of Graduate Texts in Mathematics, Springer-Verlag, New York, second edition, 1998

[LM122] M.E. Maietti, *NOTE di Logica Matematica -2021/22*, Materiale Didattico distribuito dalla Docente tramite la pagina web personale, Anno Accademico 2021-2022

`https://www.math.unipd.it/~maietti/lm21/lm21.pdf`

[MK1] A. Makhlouf, *Encyclopedia in Algebra and Applications*, Materiale disponibile gratuitamente in rete, Agosto 2018

`https://webusers.imj-prg.fr/~bernhard.keller/publ/EncycloKeller.pdf`

[LOM221] S. Maschio, *Ventiquattro lezioni di teoria delle categorie e logica categoriale*, Materiale Didattico distribuito dal Docente tramite la piattaforma Moodle di Unipd, Anno Accademico 2020-2021

`https://elearning.unipd.it/math/?time=1370037600`

[LOM222] S. Maschio, *The categorical eyeglasses - Un corso di teoria delle categorie e logica categoriale*, Materiale Didattico distribuito dal Docente tramite la piattaforma Moodle di Unipd, Anno Accademico 2021-2022

`https://elearning.unipd.it/math/?time=1370037600`

[STMG] S. Mengato, *On Logical Connectives and Quantifiers as Adjoint Functors*, Tesi di Laurea Magistrale in Matematica a Padova, Anno Accademico 2016-2017

`http://tesi.cab.unipd.it/56555/1/tesi_Mengato_def.pdf`

[BM1] B. Mitchell, *Theory of Categories*, Academic Press, 1965

[NEE1] A. Neeman, *Triangulated Categories*, Princeton University Press, 2001

[PTH1] K.L. Pothoven, *A Category of Banach Spaces* (1968). Master's Theses. 3183.

`https://scholarworks.wmich.edu/cgi/viewcontent.cgi?article=4202&context=masters_theses`

[PROS1] F. Prosmans, *Algèbre Homologique Quasi-Abélienne*, Mémoire de DEA, Université Paris 13, Villetaneuse (France), June 1995

`http://www.anmath.ulg.ac.be/fp/rec/dea.pdf`

[QUI1] D. Quillen, *Higher algebraic K-theory I*, in *Higher K-theories*, Lecture Notes in Mathematics 341, Springer, 1973, pg. 85-147

[RO1] F. Roana, *La dualità di Pontryagin-van Kampen nella categoria dei gruppi abeliani localmente compatti*, Tesi di Laurea Triennale in Matematica a Padova, Anno Accademico 2020-2021

[JR1] J.J. Rotman, *An Introduction to Homological Algebra*, Universitext, Springer, New York, second edition, 2009

[WR1] W. Rump, *Almost abelian categories*, Cahiers Topologie Géom. Différentielle Catég. 42 (2001), no. 3, 163-225. MR 1856638 (2002m:18008)

`http://www.numdam.org/item/CTGDC_2001__42_3_163_0.pdf`

[S1] P. Schapira, *Categories and Homological Algebra*, Materiale Didattico distribuito dal Docente tramite la pagina web personale

`https://perso.imj-prg.fr/pierre-schapira/wp-content/uploads/schapira-pub/lectnotes/HomAl.pdf`

[SCH1] J.P. Schneiders, *Quasi-abelian categories and sheaves*, Mém. Soc. Math. Fr. (N.S.) (1999), no. 76, vi+134. MR 1779315 (2001i:18023)

http://www.numdam.org/issue/MSMF_1999_2_76__R3_0.pdf

[STP1] The Stacks project, *CATEGORIES*, Materiale disponibile gratuitamente in rete

https://stacks.math.columbia.edu/download/categories.pdf

[STP2] The Stacks project, *DERIVED CATEGORIES*, Materiale disponibile gratuitamente in rete

https://stacks.math.columbia.edu/download/derived.pdf

[STP3] The Stacks project, *HOMOLOGICAL ALGEBRA*, Materiale disponibile gratuitamente in rete

https://stacks.math.columbia.edu/download/homology.pdf

[ATT1] A. Tattar, *Torsion Pairs and Quasi-abelian Categories*, 2020, arXiv: 1907.10025

https://arxiv.org/pdf/1907.10025v1.pdf

[VENK1] S. Venkatesh, *PERVERSE SHEAVES*, Materiale Didattico distribuito dal Docente tramite la pagina web personale, Seminario, Autunno 2015

https://math.mit.edu/~sidnv/Introduction_to_Perverse_Sheaves.pdf

[CW1] C.A. Weibel, *An Introduction to Homological Algebra*, Cambridge Studies in Advanced Mathematics 38, 1994

[WIKI1] Wikipedia, *Exact category*

https://en.wikipedia.org/wiki/Exact_category

[WRTH1] Wrathofrog Blog - Mathematics and the things I like, *Quasi-abelian categories*

https://wrathofrog.wordpress.com/2011/05/10/quasi-abelian-categories/

[WRTH2] Wrathofrog Blog - Mathematics and the things I like, *Tilting in abelian categories*

https://wrathofrog.wordpress.com/2011/05/08/tilting-in-abelian-categories/

[AY1] A. Yekutieli, *Derived Categories*, Cambridge University Press, 2019

Ringraziamenti

Devo una particolare riconoscenza al professor Colpi, per la pazienza e l'attenzione impiegate nel seguirmi in questo percorso.

Un ringraziamento anche a mia mamma e Daniele Cardin, per aver creduto in me ed aiutato concretamente nei momenti di difficoltà.