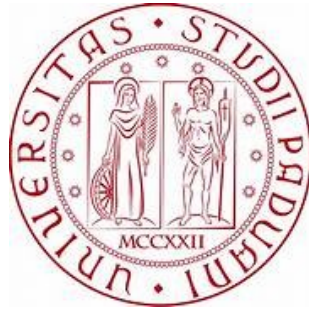


UNIVERSITÀ DEGLI STUDI DI PADOVA
DIPARTIMENTO DI SCIENZE STATISTICHE
CORSO DI LAUREA TRIENNALE IN
STATISTICA PER L'ECONOMIA E L'IMPRESA



RELAZIONE FINALE

Impatto degli eventi macroeconomici sulla struttura della correlazione tra asset

Relatore: Prof. Mazzonetto Simone
Dipartimento di Economia

Laureando: Diallo Thierno Abdourahim
Matricola: 2042558

Anno Accademico 2025/2026

Indice

Introduzione	5
1 Contesto e motivazione dello studio	7
1.1 perché gli shock macroeconomici cambiano la correlazione tra asset	7
1.2 Obiettivo della tesi	7
1.3 metodologie usate:breve anticipazione	8
1.4 Mercati finanziari come sistema complessi	9
1.5 attraverso quali canali questa complessità si manifesta	9
1.6 rischio sistematico e contagio	10
1.7 eventi macroeconomici: pandemia, guerre	12
2 Modelli quantitativi per studiare la correlazione	14
2.1 Modelli di correlazione statica e dinamica	14
2.1.1 Correlazione e diversificazione del portafoglio	14
2.1.2 Correlazione e rischio sistematico	15
2.2 Modelli GARCH e DCC-GARCH-mvt	16
2.3 DCC-GARCH con innovazioni a salti	21
3 Strumenti econometrici e implementazione	23
3.1 Dati: serie storiche, frequenza	23
3.2 Costruzione del dataset e trattamento dei giorni non sincroni	24
3.3 Analisi delle serie storiche	24
3.3.1 prezzi di chiusura mensili	30
3.4 Tecniche di stima di correlazioni dinamiche (DCC, DDC-jump)	34
3.5 modello di previsione	36
3.6 interpretazione dei risultati	37
4 conclusione	39

Indice

Introduzione

Negli ultimi anni, i mercati finanziari globali hanno subito una trasformazione profonda, determinata da fattori tecnologici, comportamentali e macroeconomici. La digitalizzazione e l'innovazione tecnologica hanno modificato in maniera sostanziale la struttura dei mercati. Sono emersi nuovi operatori di mercato e nuove modalità di investimento. L'introduzione di piattaforme di trading online "commission-free", come Robinhood ed eToro, e i servizi digitali offerti dagli istituti bancari tradizionali, hanno reso l'accesso ai mercati più semplice e diffuso (Foucault e Frèsard, 2021). Questo processo ha reso i mercati più sensibili al comportamento dei nuovi investitori retail, modificando i flussi di capitale in maniera significativa.

Parallelamente, la diffusione del trading algoritmico ad alta frequenza (High-Frequency Trading, HFT) e l'integrazione di tecnologie basate su Big Data, Intelligenza Artificiale e Machine Learning hanno rivoluzionato i processi decisionali. Questo cambiamento si è concretizzato nell'adozione di modelli quantitativi capaci di elaborare enormi volumi di informazione e di ottimizzazione della gestione del rischio (Brynjolfsson e McAfee, 2017). Ciò evidenzia come la tecnologia abbia profondamente trasformato l'approccio ai mercati finanziari.

A questa trasformazione si è aggiunto un contesto macroeconomico caratterizzato da politiche monetarie ultra-espansive, adottate dalle principali banche centrali a seguito della crisi finanziaria del 2008 e successivamente, della pandemia di Covid-19 (Borio, 2021). Il lungo periodo di tassi d'interesse prossimi allo zero, ha incentivato la ricerca di rendimenti più elevati, favorendo l'allocazione verso asset più rischiosi, come azione e cripto-valute. Tuttavia, la fase successiva di rialzo dei tassi, avviata nel 2022 per contrastare l'inflazione, ha comportato una significativa ricalibrazione dei portafogli, con un ritorno d'interesse verso strumenti meno rischiosi.

Tali dinamiche rendono cruciale comprendere l'evoluzione delle correlazioni tra asset in contesti di shock globale, evidenziando la crescente interconnessione sistematica tra le diverse classi di attività e la rapidità con cui gli shock globali si trasmettono attraverso i canali finanziari.

1 Contesto e motivazione dello studio

1.1 perché gli shock macroeconomici cambiano la correlazione tra asset

In condizioni di normalità economica, la diversificazione del portafoglio si fonda sull'assunto che le diverse classi di attività presentino correlazioni relativamente basse o negative. Tuttavia, durante fasi d'instabilità macroeconomica o crisi finanziaria, tali correlazioni tendono ad aumentare, riducendo l'efficacia della diversificazione (Longin e Solnik, 2001).

Questo fenomeno, noto come correlation breakdown, si manifesta quando eventi esterni alterano simultaneamente le aspettative su crescita, inflazione, politica monetaria e liquidità dei mercati. In tali contesti, gli investitori adottano spesso il comportamento di flight to quality, orientandosi verso asset percepiti come più sicuri, quali l'oro e le obbligazioni.

Il caso emblematico di come gli shock macroeconomici possano modificare le correlazioni è rappresentato dal portafoglio 60/40 (0,6 azioni e 0,4 obbligazioni). Tale struttura si è basata per decenni sulla storica correlazione negativa tra mercato azionario e obbligazionario, che garantiva un effetto compensativo nei periodi di volatilità. Tuttavia, nel 2022, l'aumento dell'inflazione e il conseguente rialzo dei tassi d'interesse hanno determinato una variazione strutturale di questa relazione: entrambe le asset class hanno registrato rendimenti negativi simultanei, segnalando un passaggio da una correlazione negativa a una positiva. Questo episodio dimostra che la correlazione non è un parametro statico, ma una variabile dinamica che evolve in funzione delle condizioni macroeconomiche, delle politiche monetarie e del sentimento di mercato.

1.2 Obiettivo della tesi

L'obiettivo principale di questa tesi è analizzare in che modo gli shock macroeconomici, quali variazioni dei tassi d'interesse, livelli d'inflazione, crisi geopolitiche e pandemie, influenzano la struttura dinamica della correlazione tra diverse classi di asset finanziari, quali azioni, obbligazioni e materie prime. A tal fine, il lavoro si propone di :

- **Esaminare la dinamica temporale delle correlazioni tra strumenti finanziari in differenti regimi economici**, al fine di individuare eventuali variazioni strutturali in corrispondenza di fasi di stress del mercato.
- **Identificare le variabili macroeconomiche più rilevanti** nel determinare tali variazioni di correlazione, analizzando come gli shock macroeconomici influenzino le relazioni tra asset nel breve e nel lungo periodo
- **Valutare le implicazioni di tali cambiamenti** sulla diversificazione, sulla gestione del rischio e sulla costruzione dei portafogli d'investimento

Attraverso l'analisi quantitativa e l'impiego di modelli econometrici, la ricerca mira a fornire una comprensione più profonda delle relazioni dinamiche tra asset e a contribuire al dibattito sulla gestione efficiente del rischio in un contesto finanziario sempre più complesso e interconnesso.

1.3 metodologie usate:breve anticipazione

In questo lavoro l'analisi empirica è condotta su rendimenti finanziari giornalieri e mensili di 4 asset appartenenti a classi diverse. L'obiettivo è studiare la dinamica della volatilità e l'evoluzione delle correlazioni nel tempo e in particolare durante periodi di shock macroeconomico.

In una prima fase i dati vengono analizzati attraverso statistiche descrittive e strumenti grafici. Lo scopo è di verificare se rispettino le principali caratteristiche dei rendimenti, quali asimmetria, leptocurtosi e clustering della volatilità. Vengono inoltre esaminate le funzioni di autocorrelazione dei rendimenti e della volatilità, allo scopo di verificare la dipendenza seriale in media e la presenza di persistenza nella varianza.

Successivamente, la volatilità di ciascun asset viene modellata mediante modelli GARCH univariati. Il modello assume innovazioni t-Student al fine di catturare presenza di code pesanti tipiche dei rendimenti finanziari. Su questa base, viene poi stimato un modello DCC-GARCH multivariato che consente di analizzare l'evoluzione dinamica delle correlazioni tra gli asset. Dal DCC-GARCH viene infine affiancato un'estensione che incorpora un processo a salto. Così da poter catturare gli spike improvvisi nei rendimenti e possibili cambiamenti di regime. Tale modello viene utilizzato per valutare la capacità previsiva delle correlazioni dinamiche in presenza di shock di mercato.

1.4 Mercati finanziari come sistema complessi

I mercati finanziari possono essere interpretati come sistemi complessi. Sono caratterizzati dall'interazione di un elevato numero di agenti eterogenei che operano in base a informazioni incomplete. Tali interazioni generano dinamiche aggregate non lineari.

Una delle principali conseguenze della natura complessa dei mercati è la variabilità nel tempo delle loro proprietà statistiche. Volatilità, correlazione e la distribuzione dei rendimenti non risultano costanti. Evolvono in rispetto ai cambiamenti del contesto macroeconomico, shock esogeni e fenomeni di contagio finanziario. Durante le crisi le interdipendenze tra i mercati tendono a rafforzarsi, dando luogo a improvvisi aumenti delle correlazioni e alla sincronizzazione di asset diversi. Gli shock macroeconomici possono quindi propagarsi rapidamente attraverso il sistema finanziario, producendo rotture strutturali e cambiamenti di regime. Esempi come la crisi finanziaria globale del 2008 e la pandemia del Covid-19, rappresentano esempi emblematici di tali dinamiche. Chiaramente l'ipotesi di correlazione costante e volatilità omoschedastica decade.

1.5 attraverso quali canali questa complessità si manifesta

I mercati finanziari rappresentano un meccanismo fondamentale per il trasferimento delle risorse degli operatori in surplus a quelli in deficit, fungendo da punto d'incontro tra soggetti che offrono strumenti finanziari e soggetti che ne richiedono l'utilizzo. All'interno di tali mercati si formano i prezzi degli asset, si perfezionano i contratti e si determinano le condizioni di consegna e pagamento. Tuttavia, oltre alla loro funzione allocativa, i mercati devono essere considerati come **un sistema complesso e fortemente interconnesso**, in cui informazioni, flussi di capitale e shock economici si propagano rapidamente tra strumenti, settori e paesi.

Una prima classificazione dei mercati riguarda il grado di organizzazione. I mercati regolamentati si caratterizzano per un'elevata trasparenza dei prezzi, regole codificate, garanzie sulla qualità e quantità degli scambi e ridotti costi di transazione; tali caratteristiche favoriscono una rapida diffusione delle informazioni e, di conseguenza, una maggiore sincronizzazione dei movimenti di prezzo. Al contrario, nei mercati **over-the-counter (OTC)** gli scambi avvengono su base bilaterale, con contratti personalizzati e minore trasparenza. La natura decentralizzata e meno standardizzata di questi mercati tende a rallentare la propagazione delle informazioni e può

amplificare le asimmetrie informative, con effetti sulle correlazioni tra strumenti.

I mercati possono essere distinti anche in base alla **dimensione geografica**. I mercati **nazionali** riflettono principalmente le condizioni economiche, politiche e normative interne, mentre i mercati **internazionali**, come il mercato valutario, sono influenzati da fattori globali quali politiche monetarie, flussi commerciali ed eventi geopolitici. La crescente integrazione finanziaria ha accresciuto la connettività tra questi sistemi, I movimenti nei mercati di un Paese si trasmettono rapidamente agli altri, generando fenomeni di co-movimento e, nei momenti di tensione, episodi di contagio.

Un'ulteriore classificazione riguarda la **funzione finanziaria**. I **mercati monetari**, che trattano strumenti di debito a breve termine e ad alta liquidità, costituiscono il primo livello di reazione agli shock macroeconomici, soprattutto quelli legati ai tassi d'interesse e alle politiche delle banche centrali. Il **mercato valutario (Forex)**, decentralizzato e altamente liquido, riflette immediatamente cambiamenti economici e geopolitici, trasmettendo volatilità alle altre aree dei mercati finanziari. I **mercati mobiliari**, nei quali si negoziano strumenti di medio-lungo periodo come azioni e obbligazioni, svolgono un ruolo cruciale nella formazione delle aspettative di crescita e rischio. Infine, il mercato dei derivati, basato su strumenti il cui valore dipende da un'attività sottostante, ha una natura duale. Funge principalmente da canale di copertura, permettendo il trasferimento dei rischi finanziari. Tuttavia, la sua complessa architettura di contratti e controparti lo trasforma, in periodi di crisi, in un canale di amplificazione del rischio. Questa ambivalenza deriva dalla sua capacità unica di interconnettere asset eterogenei e operatori finanziari diversi, creando una fitta rete di interdipendenza.

Nel complesso, i mercati finanziari non operano come entità isolate ma come **una rete integrata**, nella quale decisioni, informazioni e shock possono diffondersi con velocità e intensità differenti a seconda della struttura del mercato coinvolto. La **connettività**, intesa come correlazione tra strumenti e segmenti (diverse classi di attività), tende ad aumentare nei periodi di stress, rendendo più probabile la trasmissione delle turbolenze e ponendo così le basi per fenomeni sistemici.

1.6 rischio sistematico e contagio

Il rischio sistematico rappresenta uno dei temi centrali nella moderna analisi della stabilità finanziaria. Esso viene generalmente definito come il rischio che l'insolvenza

o il fallimento di uno o più intermediari possa generare insolvenze a catena e destabilizzare l'intero sistema finanziario. Questa caratteristica lo distingue profondamente dal rischio specifico, che può essere mitigato tramite diversificazione, mentre il rischio sistematico deriva da fattori che influenzano l'andamento complessivo dei mercati e per questo motivo, non è eliminabile attraverso strategie tradizionali di portafoglio. Una caratteristica essenziale del rischio sistemico è la propagazione del contagio. Le definizioni presenti in letteratura convergono sull'idea che un singolo shock negativo, isolato o circoscritto, possa diffondersi rapidamente ad altri intermediari e mercati attraverso una serie di meccanismi interdipendenti. L'evento iniziale genera instabilità complessiva e può trasformare una perturbazione localizzata in una crisi di ampia portata di rischio sistemico. Studi classici come quelli di Reinhart e Rogoff (2009) hanno mostrato come la caduta del valore degli immobili sia spesso la causa primaria dei fallimenti finanziari su larga scala, mentre ricerche di Allen e Gale (2000) o Freixas e Tal (2000) hanno evidenziato come il fallimento di un'istituzione finanziaria possa diffondersi a cascata attraverso un vero e proprio effetto domino.

Il sistema finanziario moderno è caratterizzato da una fitta rete di relazioni reciproche. La crescente integrazione tra gli operatori finanziari fa sì che il rischio sistemico non dipenda soltanto dalla dimensione di una singola istituzione, ma soprattutto dal suo **grado di correlazione** con gli altri soggetti del mercato. Vitto Gnazzo sottolinea nel suo paper (Systemic Risk. Bailed-In) che, infatti, l'importanza sistemica non è determinata dalla grandezza dell'intermediario, bensì dalla sua posizione nella rete delle transazioni e dal livello di interconnessione con il resto del sistema. Ciò implica che anche soggetti di dimensioni relativamente ridotte, se fortemente interconnessi, possono generare crisi sistemiche. L'evento negativo originario può propagarsi sia in modo **diretto**, attraverso esposizioni finanziarie incrociate, sia in modo **indiretto**, tramite interazioni tra variabili finanziarie e reali, come salari, PIL, tassi di interesse e inflazione. Questa complessità introduce un livello di vulnerabilità che può trasformare shock circoscritti in crisi macroeconomiche.

Il contagio finanziario opera attraverso diversi canali. Un ruolo cruciale è svolto dal deterioramento della **fiducia** degli investitori e del pubblico nei confronti degli intermediari. La propagazione di uno shock avviene proprio attraverso il venir meno della fiducia. Quando essa viene meno, l'incertezza aumenta, la volatilità cresce e la crisi può estendersi anche ai mercati non direttamente colpiti dallo shock originario. Un ulteriore fattore che alimenta il contagio è l'**asimmetria informativa**, accentuata dall'introduzione di strumenti finanziari complessi che rendono più difficile valutare correttamente la robustezza dei bilanci degli intermediari.

Tra i meccanismi di amplificazione più significativi emerge l'**effetto leva**. Un al-

to livello di leverage, cioè un rapporto elevato tra attività e capitale proprio, può generare situazioni di grave vulnerabilità: in fasi espansive i rendimenti vengono amplificati, ma nella fase recessiva le perdite crescono altrettanto rapidamente. Il ricorso eccessivo al debito è stato uno dei principali motori di contagio nella crisi finanziaria, alimentando effetti moltiplicatori e indebolendo il sistema finanziario complessivo. La letteratura mostra inoltre una forte correlazione tra crisi bancaria e crisi sovrana. L'accumulo eccessivo di debito, sia pubblico che privato, rende l'economia vulnerabile alle crisi di fiducia e amplifica la probabilità di default. Storicamente, un'elevata incidenza di crisi bancarie globali è stata frequentemente associata al default del debito sovrano estero

La gravità delle crisi finanziarie degli ultimi decenni ha portato alla nascita di un impianto normativo specificamente orientato a mitigare il rischio sistemico. Si richiama in particolare la **Direttiva 2013/36/UE (CRD IV)**, secondo cui il rischio sistemico è definito come un rischio di perturbazione dell'intero sistema finanziario con potenziali gravi ripercussioni sull'economia reale. La normativa introduce elementi quali:

- **riserve di capitale anticicliche**, destinate a mitigare le dinamiche procicliche del credito;
- **riserve di capitale per rischio sistemico**, volte a prevenire rischi non ciclici di lungo periodo;
- **vigilanza macroprudenziale**, centralizzata tramite il **Comitato Europeo per il Rischio Sistemico (CERS)**, istituito con il Regolamento UE 1092/2010, che ha il compito di identificare, monitorare e classificare i rischi sistemici nell'Unione Europea.

1.7 eventi macroeconomici: pandemia, guerre

Eventi macroeconomici causati da una pandemia o da conflitti geopolitici hanno prodotto ripercussioni significative sui mercati finanziari, causando shock sistemici. L'impatto può essere di breve o di lungo periodo. La reazione che gli investitori, ad esempio in seguito a un evento fuori dalla norma come il conflitto tra Israele e Palestina, porta a un aumento dell'incertezza nei mercati azionari e al ritiro degli investimenti per optare per asset considerati più sicuri, come commodities e obbligazioni. Questo movimento causa un calo significativo nei prezzi nel breve periodo. Ad esempio, l'*S&P 500*, nel momento in cui la Russia ha invaso l'Ucraina il 24/02/2022,

è sceso oltre il 7% nei giorni successivi. Questo calo è stato causato dalla paura delle sanzioni economiche imposte dall'Europa alla Russia sulle materie prime, come il gas naturale. Tuttavia, dopo un mese, l'*S&P* 500 è tornato a valori più alti rispetto a quelli precedenti all'invasione. Mentre il costo del petrolio è rimasto alto e invariato.

La pandemia del COVID-19 ha causato notevoli turbolenze, portando a cambiamenti nei modi e nei comportamenti delle singole persone. Uno shock macroeconomico senza precedenti per il sistema economico-finanziario globale. Già a partire da aprile 2020, con oltre un milione e mezzo di contagi nel mondo, la crisi sanitaria aveva prodotto impatti profondi sul PIL globale, causando perdite strutturali stimate intorno al 3%, con effetti irreversibili su capitale umano, competenze e attività produttive. La contrazione economica ha avuto ripercussioni immediate sui mercati finanziari: l'aumento della volatilità, la fluttuazione dei rendimenti azionari e obbligazionari, e il rafforzamento dei beni rifugio come l'oro hanno evidenziato come le correlazioni tra asset possano modificarsi in contesti di stress sistemico. I mercati emergenti, privi di margini di manovra sufficienti per contrastare lo shock, hanno subito la crisi rispetto in modo più pesante rispetto a quelli più sviluppati. Che in parte hanno nazionalizzato il rischio di credito al settore privato, permettendo alle imprese di sopravvivere. Questa asimmetria nella capacità di risposta delle economie ha avuto riflessi diretti anche sui mercati finanziari internazionali.

Nei periodi di maggiore incertezza, gli investitori tendono a ridurre l'esposizione verso i mercati percepiti come più rischiosi, favorendo flussi di capitale verso economie e strumenti considerate più sicuri. Tali dinamiche contribuiscono a rafforzare i fenomeni di contagio finanziario e ad aumentare la correlazione tra mercati, soprattutto durante le fasi di stress globale. Oltre alla contrazione economica, la pandemia ha accelerato fenomeni già presenti nei mercati, quali la rotazione settoriale e la digitalizzazione, che hanno favorito il consolidamento delle big tech e l'espansione dell'intelligenza artificiale, generando nuove leadership azionarie. L'aumento dell'inflazione e dei tassi di default, soprattutto in settori vulnerabili, ha riportato in primo piano l'importanza della selezione attiva dei portafogli e della valutazione della resilienza delle filiere produttive. Nel complesso, questi elementi evidenziano come eventi macroeconomici estremi, quali la pandemia del COVID-19, non influenzino esclusivamente il livello dei rendimenti o della volatilità, ma incidano in modo significativo anche sulla dinamica delle correlazioni tra asset finanziari. In tali contesti, le relazioni tra mercati risultano instabili e dipendenti dallo stato del sistema, rendendo necessario l'utilizzo di strumenti di analisi in grado di catturare l'evoluzione temporale delle interdipendenze, come i modelli di correlazione dinamica adottati nel presente lavoro.

2 Modelli quantitativi per studiare la correlazione

2.1 Modelli di correlazione statica e dinamica

La correlazione è uno degli strumenti utilizzati in finanza per analizzare il grado di dipendenza tra i rendimenti di diversi asset finanziari. Essa riveste un ruolo centrale nello studio della diversificazione del portafoglio, nella misurazione del rischio sistematico e nell'interconnessione dei mercati.

2.1.1 Correlazione e diversificazione del portafoglio

Nel contesto della teoria di portafoglio di Markowitz, il rischio di un portafoglio non dipende solo dal rischio dei singoli asset, ma anche dal grado di correlazione tra i loro rendimenti.

$$\sigma_p^2 = \sum_{i=1}^N \sum_{j=1}^N w_i w_j \sigma_i \sigma_j \rho_{ij} \quad (1)$$

dove :

- w_i è il peso dell'asset i nel portafoglio,
- σ_i è la deviazione standard del rendimento dell'asset i ,
- ρ_{ij} è il coefficiente di correlazione tra i rendimenti degli asset i e j .

La correlazione influisce direttamente sul rischio del portafoglio attraverso i termini incrociati (con i diverso da j). Quando la correlazione tra gli asset è bassa o negativa, tali termini riducono la varianza complessiva del portafoglio, generando benefici nella diversificazione. Se la correlazione è alta, implica un maggiore co-movimento dei rendimenti e una riduzione dell'efficacia della diversificazione.

2.1.2 Correlazione e rischio sistematico

La correlazione gioca un ruolo fondamentale nella misurazione del rischio sistematico. Consente di valutare il grado d'interdipendenza tra le istituzioni finanziarie e i mercati. Un aumento generalizzato delle correlazioni segnala una maggiore probabilità che shock negativi si propaghino all'intero sistema finanziario.

Un esempio rilevante è il Conditional Value at Risk (CoVaR), che misura quanto aumenta il rischio dell'intero sistema finanziario quando una singola istituzione è in crisi. In forma semplice, il CoVaR dipende dalla correlazione tra i rendimenti.

$$\text{CoVaR}_{j|i}^\alpha = \mu_j + \sigma_j \left(\rho_{ij} z_\alpha + \sqrt{1 - \rho_{ij}^2} z_\alpha \right) \quad (2)$$

- ρ_{ij} rappresenta la correlazione tra due istituzioni o mercati
- z_α è il quantile della distribuzione dei rendimenti di livello α

In presenza di elevata correlazione, uno shock negativo che colpisce un singolo mercato o un'istituzione ha un impatto più ampio sul sistema nel suo complesso, aumentando il rischio sistematico.

L'approccio più semplice allo studio della dipendenza tra asset è rappresentato dalla correlazione statica, generalmente misurata con il coefficiente di correlazione di Pearson. Questo indice fornisce una misura media della relazione lineare tra due serie di rendimenti sull'intero periodo campionario. Le relazioni lineari tra i rendimenti sono considerate costanti secondo questo indicatore. Sebbene sia di facile interpretazione, si basa sull'ipotesi di stabilità delle correlazioni nel tempo e non tiene conto di shock macroeconomici, crisi finanziarie o cambiamenti strutturali che possono modificare in modo significativo la relazione tra asset. L'evidenza empirica, infatti, mostra che le correlazioni tra i rendimenti finanziari sono soggette a variazioni nel tempo. Nei periodi di crisi tende ad aumentare e quelli di normale andamento del mercato si riduce e rimane su valori minori e stabili. Alla luce di questi limiti è necessario adottare modelli di correlazione dinamica, in grado di descrivere l'evoluzione temporale della dipendenza tra le serie finanziarie, offrendo una visione più realistica. In questo contesto si collocano i modelli multivariati basati su processi GARCH, che consentono di modellare congiuntamente la volatilità e la correlazione condizionale dei rendimenti.

2.2 Modelli GARCH e DCC-GARCH-mvt

Sappiamo che le serie storiche finanziarie sono caratterizzate da una varianza condizionata dipendente dal tempo quindi modelli classici come gli SARIMA non sono molto utili. Nel 1982 Engle introduce un primo approccio per l'analisi della volatilità con il ARCH(q), che descrive l'evoluzione della varianza condizionata σ_t^2 nel tempo, ottenendo così modelli eteroschedastici capaci di modellare la varianza delle serie storiche finanziarie. Negli ARCH l'equazione che descrive la volatilità condizionata è nota, data l'informazione al tempo $t-1$ (\mathcal{I}_{t-1}).

$$\varepsilon_t \mid \mathcal{I}_{t-1} \sim \mathcal{N}(0, \sigma_t^2)$$

$$\sigma_t^2 = \gamma + \sum_{j=1}^q \alpha_j \varepsilon_{t-j}^2$$

Con i vincoli:

$$\gamma > 0, \quad \alpha_j \geq 0 \quad (j = 1, \dots, q)$$

Assumiamo che per $t \geq q + 1$ i valori iniziali:

$$\varepsilon_1, \varepsilon_2, \dots, \varepsilon_q$$

siano osservati, costanti e noti.

Il processo è Markoviano di ordine q : la varianza condizionata σ_t^2 dipende solo dai q valori precedenti $\varepsilon_{t-1}, \dots, \varepsilon_{t-q}$.

Il modello ARCH richiede spesso molti lag temporali per catturare la volatilità tipica dei mercati e spesso porta a più parametri da stimare, questo può condurre ad un maggiore overfitting del modello e a una minore efficienza. La soluzione è stata proposta da Bollerslev nel 1986. Ha esteso il modello ARCH a Generalized ARCH (GARCH) aggiungendo la volatilità condizionata passata non nota in t data l'informazione al tempo $t - 1$. Questo processo con pochi parametri riesce a cogliere la volatilità dinamica dei mercati, l'alta persistenza della varianza e la volatility clustering.

$$\varepsilon_t \mid \mathcal{I}_{t-1} \sim \mathcal{N}(0, \sigma_t^2)$$

$$\sigma_t^2 = \gamma + \sum_{j=1}^q \alpha_j \varepsilon_{t-j}^2 + \sum_{l=i}^p \beta_l \sigma_{t-1}^2$$

con i vincoli:

$$\gamma > 0, \quad \alpha_j \geq 0 \ (j = 1, \dots, q), \quad \beta_l \geq 0 \ (i = 1, \dots, p)$$

Assumiamo che per $t \geq q + 1$:

i valori iniziali degli shock $\varepsilon_1, \dots, \varepsilon_q$ siano ****costanti, osservati e noti****, come anche i valori iniziali della varianza condizionale $\sigma_{q+1-p}^2, \dots, \sigma_q^2$.

*Il processo è ****Markoviano di ordine q****: lo stato futuro della varianza dipende solo dai valori passati degli shock e delle varianze fino a ordine q, p .*

Questo modello è parsimonioso, più stabile nelle stime e più accurato nella maggior parte dei casi di modellazione. Ha la caratteristica di poter applicare delle estensioni per catturare eccessi di curtosi e asimmetrie. Nonostante ciò, non è in grado di analizzare l'interdipendenza degli effetti tra diversi mercati o rendimenti. Soprattutto dal fatto che oggi l'interrelazione tra i mercati è fortemente accelerata dalla globalizzazione economica, dalla comunicazione via Internet, dalla crescita degli investitori retail e anche dallo sviluppo tecnologico come machine learning e computer quantistici. Nel 2002 viene proposto un modello da Engle e Tse & Tsui denominato Dynamic Conditional Correlation model (DCC-GARCH). Questa classe di modelli GARCH multivariati differisce dalle altre in quanto il modello univariato è stimato per ogni serie finanziaria, e poi usando i residui standardizzati risultanti della prima stima, si calcola la matrice di correlazione dinamica usando una semplice specificazione.

Analizziamo nel dettaglio il modello proposto da Engle (DCCE) che si affida alla decomposizione della matrice di varianza e covarianza come nel modello CCC, però la differenza sta che la correlazione dipende dal tempo (dinamica), Per questo posso definire la matrice di varianza-covarianza condizionata H_t come:

$$H_t = D_t R_t D_t = \left(\rho_{ij} \sqrt{h_{ii,t} h_{jj,t}} \right) \quad (3)$$

dove D_t è una matrice diagonale della deviazione standard dove ogni ($h_{ii,t}$ e $h_{jj,t}$, $i, j=1, \dots, m$) è stimato da modello GARCH(p,q) univariato, esso contiene solo le

volatilità di ogni serie temporale.

$$D_t = \begin{pmatrix} h_{11,t}^{1/2} & 0 & \cdots & 0 \\ 0 & h_{22,t}^{1/2} & \cdots & 0 \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ 0 & 0 & \cdots & h_{mm,t}^{1/2} \end{pmatrix}$$

R_t è la matrice di correlazione dipendente dal tempo, R_t misura come gli asset si muovono insieme, ma senza includere la loro volatilità.

$$R_t = \text{diag}(q_{11,t}^{-1/2}, q_{22,t}^{-1/2}, \dots, q_{mm,t}^{-1/2}) Q_t \text{diag}(q_{11,t}^{-1/2}, q_{22,t}^{-1/2}, \dots, q_{mm,t}^{-1/2}) \quad (4)$$

gli elementi della matrice Q_t seguono un modello GARCH univariato,

$$Q_t = V_{ij} + \lambda_1 \frac{\epsilon_{t-1}}{\sqrt{h_{t_1}}} \left(\frac{\epsilon_{t-1}}{\sqrt{h_{t_1}}} \right)' + \lambda_2 Q_t - 1 \quad (5)$$

dove V_{ij} è la matrice di correlazione incondizionata o di lunga durata. λ_1 e λ_2 sono parametri invarianti nel tempo, dove λ_1 descrive quanto le correlazioni reagiscono agli shock nuovi e λ_2 descrive quanto le correlazioni sono persistenti nel tempo. La matrice di covarianze che si ottiene è semidefinita positiva e l'unico vincolo che dobbiamo mettere è che $\lambda_1 + \lambda_2 < 1$. Si può aggiungere un'ulteriore semplificazione sostituendo V_{ij} con $(1 - \lambda_1 - \lambda_2)\bar{Q}$ dove \bar{Q} è la controparte della matrice Q . Questo ci aiuta a evitare di stimare $m(m-1)/2$ elementi della matrice V_{ij} .

$$Q_t = (1 - \lambda_1 - \lambda_2)\bar{Q} + \lambda_1 \frac{\epsilon_{t-1}}{\sqrt{h_{t_1}}} \left(\frac{\epsilon_{t-1}}{\sqrt{h_{t_1}}} \right)' + \lambda_2 Q_t - 1 \quad (6)$$

Per la stima si utilizza il metodo a due fasi, che suddivide la stima dei parametri in due parti. La prima parte consiste di stimare le deviazioni standard di m asset ($h_{11,t}, \dots, h_{mm,t}$) con il modello GARCH(1,1) univariato questi valori andranno a comporre la matrice diagonale D_t .

l'output dal modello stimato è:

$$\hat{\mu}_i, \hat{\omega}_i, \hat{\alpha}_i, \hat{\beta}_i, \hat{\eta}_{i,t} = \frac{\hat{\epsilon}_{i,t}}{\hat{\sigma}_{i,t}} \quad \text{per ogni asset}$$

$$r_{i,t} = \mu_i + \varepsilon_{i,t} \quad (7)$$

$$\varepsilon_{i,t} = \sigma_{i,t} z_{i,t}, \quad z_{i,t} \sim N(0, 1) \quad (8)$$

$$\sigma_{i,t}^2 = \omega_i + \alpha_i \varepsilon_{i,t-1}^2 + \beta_i \sigma_{i,t-1}^2 \quad (9)$$

La seconda parte consiste nella stima delle correlazioni dinamiche R_t utilizzando i residui standardizzati (η_t)

L'output che otterremo sarà:

- Parametri di correlazione: $\hat{\lambda}_1, \hat{\lambda}_2$
- Matrici di correlazione dinamiche: \hat{R}_t per ogni t

malgrado l'ottima prestazione, il DCC-GARCH hanno determinate limitazioni, le quali:

- poiché \bar{Q} è costante: nonostante le fluttuazioni giornaliere λ_1 e la persistenza λ_2 , le correlazioni sono mean-reverting verso un'unica media di lungo periodo \bar{Q} e se questa media cambia permanentemente a causa di un structural break, il DCC-GARCH non riuscirà a cogliere il cambiamento
- il peso della storia lontana: $\hat{\lambda}_1 + \hat{\lambda}_2$ tipicamente minori di uno ma molto vicini ad esso, questo implica una persistenza elevatissima, uno shock oggi influenzerà le stime di correlazioni in un tempo lunghissimo impedendo l'adattamento rapido della nuova realtà.

Oltre alla procedura di stima in due fasi proposta originariamente da Engle, è possibile stimare il modello DCC-GARCH mediante una stima in un'unica fase. Massimizzando la funzione di log-verosimiglianza che dipende simultaneamente da tutti i parametri del modello. Assumiamo che il vettore dei rendimenti condizionati segue una distribuzione normale multivariata. La log-verosimiglianza sarà espressa nel seguente modo:

$$\text{LogL} = -0.5Tm \log(2\pi) - 0.5T \log\{\det(R_t)\} - \sum_{t=1}^T \left[\log\{\det(D_t^{1/2})\} + 0.5\zeta_t R_t^{-1} \zeta_t' \right] \quad (10)$$

dove:

- R_t matrice di correlazione dinamica dove $i=1,\dots,T$,
- D_t matrice diagonale delle deviazioni standard condizionate ,
- $\zeta_T = D_t^{-1}\epsilon_t$ residui standardizzati
- T indica il numero totale di osservazioni temporali (giorni o mesi nel nostro caso)

Tuttavia, l'ipotesi di normalità risulta spesso troppo restrittiva nel contesto dei mercati finanziari. Sappiamo che i rendimenti sono caratterizzati da code pesanti e una maggior probabilità di eventi estremi rispetto a quanto prevista dalla distribuzione Gaussiana. Per questo motivo è frequente adottare una distribuzione t di Student multivariata che è più flessibile nel modellare il comportamento delle code. La funzione log-verosimiglianza di t di Student viene riportata qui sotto:

$$\begin{aligned} \text{LogL} = & T \log \Gamma \left(\frac{\nu + m}{2} \right) - T \log \Gamma \left(\frac{\nu}{2} \right) - T \frac{m}{2} \log \{ (\nu - 2)\pi \} - 0.5T \log \{ \det(R_t) \} \\ & - \sum_{t=1}^T \left[\log \{ \det(D_t^{1/2}) \} + \frac{\nu + m}{2} \log \left(1 + \frac{\zeta_t R_t^{-1} \zeta_t'}{\nu - 2} \right) \right] \end{aligned} \quad (11)$$

dove:

- m è la dimensione del sistema (numero di asset ad esempio)
- ν sono i gradi di libertà della distribuzione t di Student.

I limiti dei modelli basati su innovazioni continue rendono necessario introdurre strutture capaci di rappresentare i movimenti improvvisi osservati nei rendimenti durante shock macroeconomici. Per costruire matematicamente tali discontinuità, il punto di partenza è lo studio dei processi a salti, i quali forniscono un quadro rigoroso per modellare variazioni improvvise tramite misure di Poisson di Lévy. Prima di applicarle al DCC-GARCH, è quindi utile presentare brevemente le principali caratteristiche dei processi a salti. Il processo di Poisson è un processo stocastico con una traiettoria discontinua ed viene usata come "building block" per costruire processi a salti più complessi.

Definiamo il processo di Poisson nel seguente modo

$$N_t = \sum_{n \geq 1} \mathbf{1}_{t \geq T_n} = \#\{n \geq 1 : T_n \in [0, t]\}.$$

dove T_n è la somma di $\sum_{i=1}^n \tau_i$ che è una sequenza di variabili casuali esponenziali con parametro di intensità λ . Viene definito come un processo di conteggio poiché se T_1, T_2, \dots è la sequenza di salti in \mathbb{N} , allora N_t è semplicemente il numero di salti tra 0 e t .

2.3 DCC-GARCH con innovazioni a salti

Il processo di Poisson fornisce la struttura temporale degli eventi rari, ma per modellare l'impatto finanziario di tali eventi è necessario specificare anche la dimensione dei salti. Questo porta naturalmente al processo di Poisson composto

$$J_t = \sum_{i=1}^{N_t} Y_i$$

dove Y_i sono variabili i.i.d. che rappresentano l'ampiezza dei salti. Nel contesto finanziario, J_t modella l'effetto cumulato degli shock improvvisi sul log-prezzo.

Nel 1976 Merton combina una componente di diffusione continua (moto browniano) con i salti discontinui. Il modello è definito come:

$$X_t = \mu t + \sigma W_t + \sum_{i=1}^{N_t} Y_i$$

dove:

- W_t è un moto browniano standard (componente continua)
- N_t è un processo di Poisson con intensità λ
- $Y_i \sim N(\mu_J, \delta^2)$ rappresenta i salti normalmente distribuiti
- μ è il drift (oppure termine di drift).

Il modello in esame cattura sia la normale fluttuazione dei mercati (tramite W_t) sia gli eventi estremi (tramite J_t). La probabilità di avere k salti è dato da:

$$P(N_t = k) = e^{-\lambda t} \frac{(\lambda t)^k}{k!}.$$

Condizionata a:

$$X_t | N_t = k \sim N(\gamma t + k\mu, \sigma^2 t + k\delta^2).$$

in più crea code più pesanti rispetto alla gaussiana, genera movimenti improvvisi e realistici ed è semplice da simulare.

Tuttavia, il modello di Merton presenta delle limitazione rilevanti per l'analisi finanziaria, quali:

- Volatilità costante
- indipendenza dei salti: l'intensità λ non varia con le condizioni di mercato

Queste vanno contro le caratteristiche di volatilità variabile e i cluster di volatilità tipici dei mercati finanziari. Tuttavia, è molto utile per modellare cambi di regime dovuti a shock.

L'elevata persistenza ($\lambda_1 + \lambda_2 \approx 1$) implica un lento adattamento della matrice di correlazione a nuovi regimi di mercato. L'introduzione di una componente a salti consente di catturare variazioni improvvise non spiegate dalla dinamica GARCH.

L'idea di base è tenere il modello DCC-GARCH grazie alla capacità di descrizione della correlazioni dinamiche e di sostituire le innovazioni, che sono distribuite come gaussiane con delle innovazioni a salti generate da un processo di Merton.

In un modello DCC-GARCH standard gli errori sono $\epsilon_t = \mathbf{D}_t \mathbf{z}_t$ con $\mathbf{z}_t \sim N(\mathbf{0}, \mathbf{I})$, dove \mathbf{D}_t è matrice diagonale delle deviazioni standard condizionali e \mathbf{z}_t è il vettore delle innovazioni i.i.d. Per passare alle estensioni con salti aggiungiamo al nostro modello la componente salti e diventa $\mathbf{z}_t = \mathbf{u}_t + \mathbf{J}_t$, dove $\mathbf{u}_t \sim N(\mathbf{0}, \mathbf{I})$ è la componente normale e \mathbf{J}_t è la componente di salto. Per ogni asset i avrò che $\epsilon_{i,t} = \sigma_{i,t}(u_{i,t} + J_{i,t})$, dove $\sigma_{i,t}$ è la volatilità condizionale GARCH dell'asset i al tempo t . Ricordiamo che il modello DCC utilizza i residui standardizzati $\eta_{i,t} = \frac{\sigma}{\epsilon_{i,t}} = u_{i,t} + J_{i,t}$ e la matrice Q_t diventa

$$Q_t = (1 - \lambda_1 - \lambda_2)\bar{Q} + \lambda_1(\eta_{t-1}\eta_{t-1}^\top) + \lambda_2 Q_{t-1} \quad (12)$$

dove $\eta_{t-1}\eta_{t-1}^\top = \mathbb{E}[\eta_t\eta_t^\top] = \mathbb{E}[u_t u_t^\top] + \mathbb{E}[J_t J_t^\top] + \mathbb{E}[u_t J_t^\top] + \mathbb{E}[J_t u_t^\top]$

Il termine $J_t J_t^\top$ è fondamentale quando si verifica un salto poiché cattura correlation spikes che si osservano in periodi di crisi.

3 Strumenti econometrici e implementazione

3.1 Dati: serie storiche, frequenza

La fonte di dati usata per l'analisi è Refinitiv e le 4 principali asset estratti sono:

L'EURO Stoxx 50 è un indice chiave del mercato azionario europeo che tiene conto di 50 società blue chip di diversi settori. Ossia società leader nel proprio settore, finanziariamente stabili e con una storia di rendimenti affidabili. Nato con il compito da fungere da riferimento per la performance del mercato azionario Europeo. L'indice include azioni di 7 paesi dove La Francia e la Germania compongono il 66% dell'indice.

Viene usato l'HSBC Enduring Quality US TR Index (USD) come proxy per i US Treasury Bonds (obbligazioni Americane). Questo è un indice di tipo Total Return (TR). Esso tiene conto non solo delle variazioni di prezzo delle obbligazioni ma anche dei dividendi reinvestiti, fornendo così una visione più completa del rendimento effettivo per gli investitori. Questo indice riduce il rumore idiosincratico (rischio specifico) collegato all'andamento dell'emittente che ha emesso il titolo e non è correlato al movimento dei mercati o del settore in cui opera l'azienda in questione. Per qui la correlazione rifletterà solo shock sistematici e non dettagli microeconomici.

La GCc2 è il future continuo dell'oro, ottenuto concatenando contratti futures successivi in modo da ottenere una serie storica priva di interruzioni. I contratti futures sono contratti a termine standardizzato negoziato su un mercato regolamentato. Con questo particolare accordo le parti coinvolte s'impegnano ad acquistare o vendere un determinato bene finanziario o sottostante in una data futura prestabilita e ad un prezzo concordato in anticipo. Sono utilizzati come strumenti di copertura (hedging) per proteggere gli investitori da fluttuazioni dei prezzi o come strumenti speculativi. Nel nostro caso scegliamo la future dell'oro perché cattura i movimenti dei mercati dei future in modo coerente e continuo nel tempo. Così evitando le discontinuità artificiali dovute alla scadenza dei singoli contratti, un aspetto cruciale per le analisi delle correlazioni dinamiche.

Il mercato del petrolio è una componente cruciale dell'industria energetica globale,

e il petrolio Brent rappresenta uno dei principali benchmark di riferimento a livello internazionale. Il suo prezzo del Brent è fortemente sensibile a fattori macroeconomici e in particolare a tensioni geopolitiche. Come l'oro analizziamo i contratti futures continui di Brent (LCOc1), per le stesse ragioni dell'oro.

Gli asset vengono analizzate in due scale temporali diverse non arbitrariamente. Usando i prezzi giornalieri nel breve periodo si riesce a cogliere la reazione istantanea dei mercati, shock, correlation spike. Invece con i prezzi mensile vengono usati per analizzare gli aggiustamenti graduali e nuove strutture di correlazione.

3.2 Costruzione del dataset e trattamento dei giorni non sincroni

Sia r_t il rendimento a composizione continua di un titolo all'istante t . Per semplicità, si assume che r_t sia una sequenza di variabili casuali i.i.d. con media $E(r_t)=\mu$ e varianza $Var(r_t)=\sigma^2$. Il rendimento osservato è descritto come r_t^0 . Quando non avviene alcun scambio all'istante t , si impone che r_t^0 sia nulla come descritto nel seguente libro (pag 233, Ruey S. Tsay-analysis of financial times series). Facendo così si riesce a confrontare asset che hanno date di festività diverse tra loro.

3.3 Analisi delle serie storiche

Analizzo la frequenza giornaliera dei 4 asset in esame, che varia tra il 04-02-2019 al 08-02-2021, con l'obiettivo di rilevare eventuali shock macroeconomici e finanziari nella loro fase acuta. Tramite i dati giornalieri è più facile osservare salti nei rendimenti, esplosività di volatilità e improvvisi aumenti di correlazione.

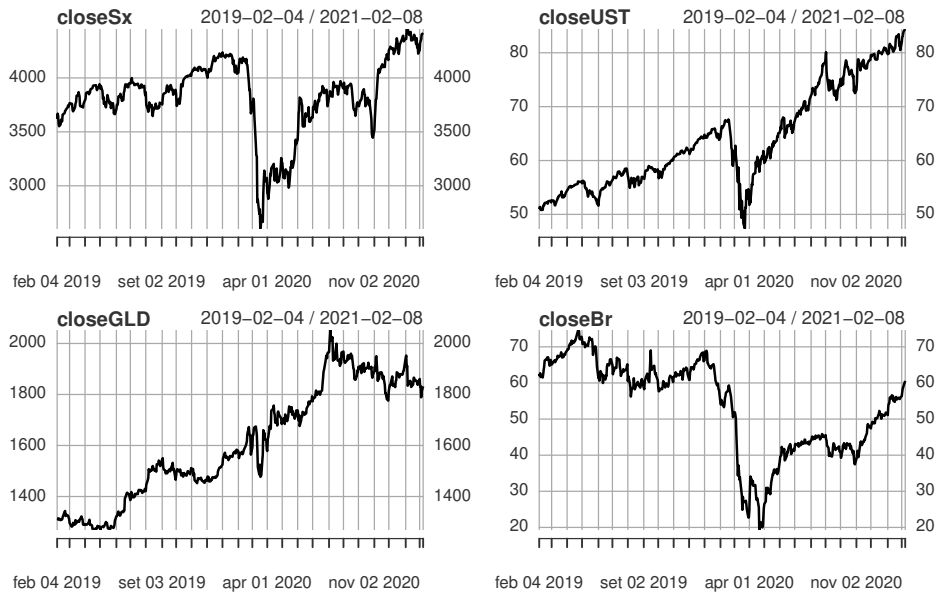


Figura 1: Dal punto di vista teorico, i prezzi di chiusura degli asset finanziari sono non stazionari, sia in media che in varianza. Mostrando trend, cambiamenti strutturali e break improvvisi. Incorporano informazioni macroeconomiche e finanziarie in modo cumulativo. Osservando i grafici noto che l'indice Euro Stoxx 50, oro e i treasury hanno trend crescenti. Invece il petrolio mostra cambiamenti strutturali evidenziato da un crollo improvviso nel 2020 rispetto agli altri asset, un cambio netto di livello ,che segue un recupero lento sul regime (livello solito).

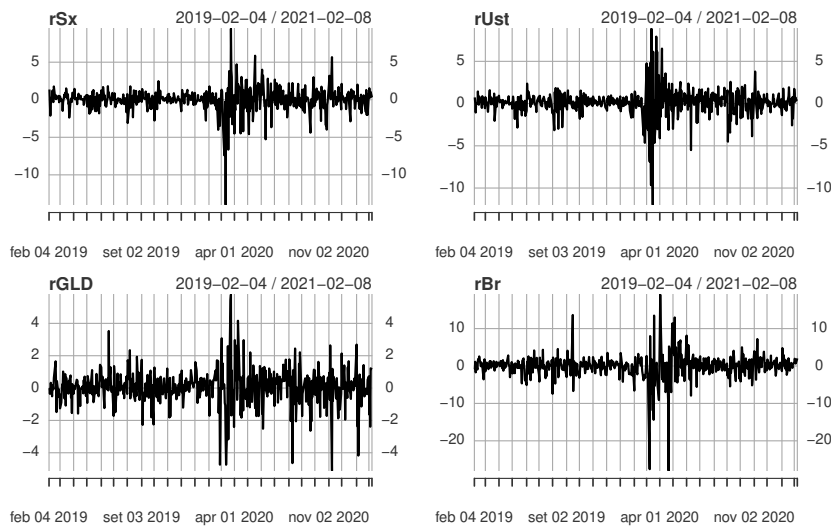


Figura 2: Non possiamo fare a meno che notare che i rendimenti giornalieri sono stazionari in media, ossia che la media è costante e non dipende dalla variazione del tempo. Si vedono oscillazioni della varianza . Che in periodi crisi come nel aprile del 2020, la volatilità è molto più elevata su tutti i 4 gli asset. Emerge chiaramente il fenomeno di volatility clustering, dove periodi di elevata volatilità tendono a concentrarsi nel tempo e ad alternarsi a fasi di relativa tranquillità. Per modellare tali rendimenti serve un modello in grado di catturare la volatilità dinamica. Per questo applicheremo i modelli GARCH per modellare tale fenomeno.

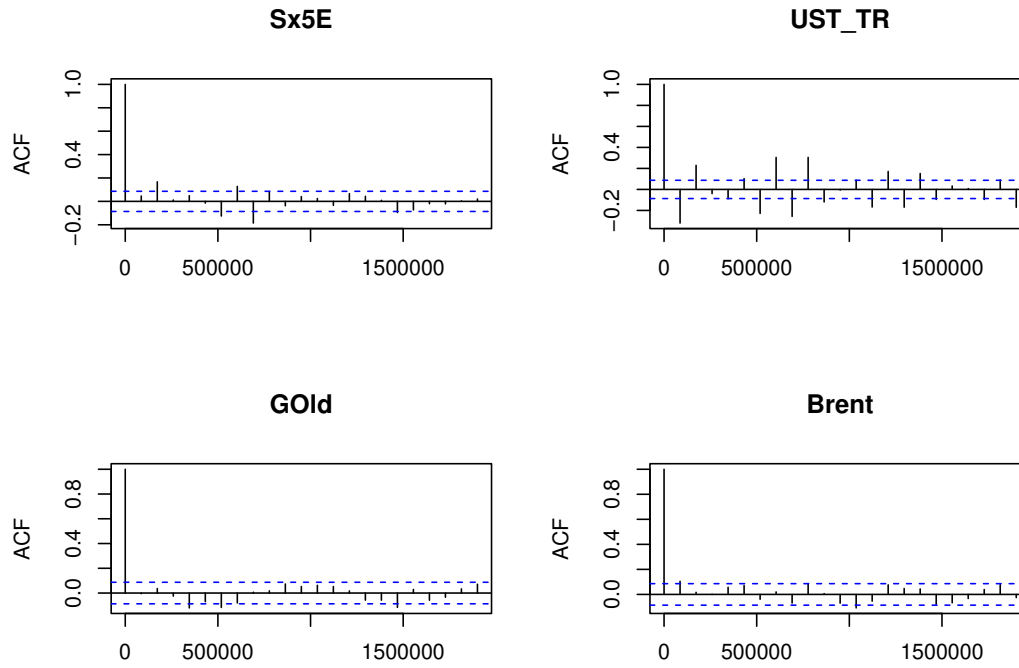


Figura 3: Sappiamo che in mercati efficienti i rendimenti non devono essere autocorrelati. l'ACF deve stare dentro le bande di confidenza (le linee tratteggiate in blu). Sui nostri quattro asset notiamo che quasi tutte le barre dell'ACF rientro nelle bande di confidenza, eventuali spike sono piccoli e non persistenti. Posso tranquillamente dire che i rendimenti non evidenziano autocorrelazioni statisticamente significative ai lag considerati.

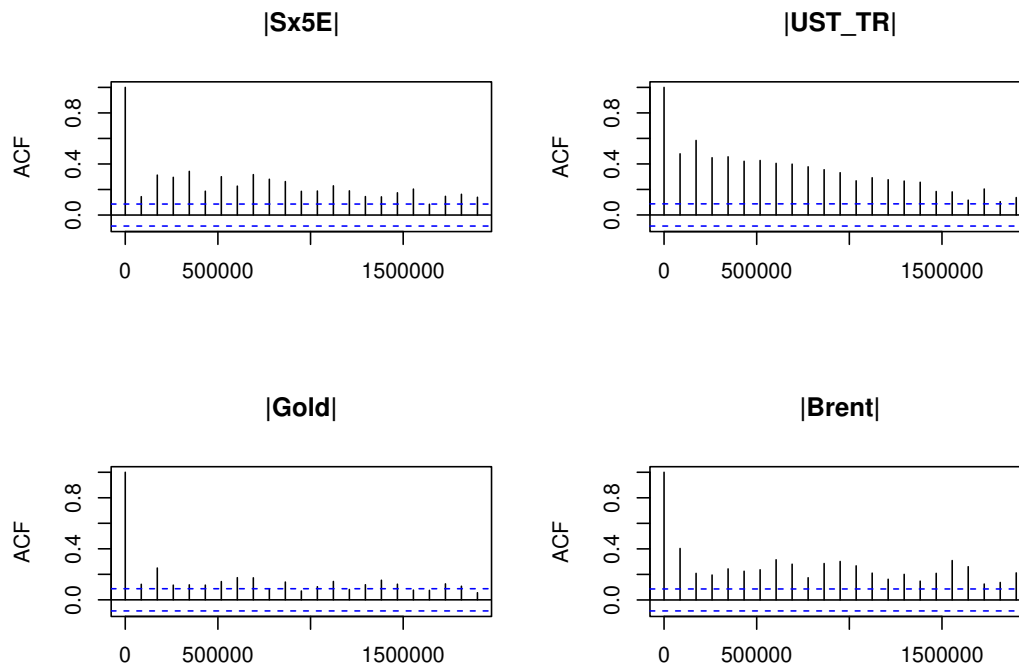


Figura 4: Vediamo come la funzione di autocorrelazione si comporta quando viene applicata al valore assoluto dei rendimenti degli asset che esso sono una proxy della volatilità. I grafici confermano che periodi di alta volatilità tendono a essere seguiti da alta volatilità, e periodi di bassa volatilità da bassa volatilità. Questo lo noto dalle barre che superano l'intervallo di confidenza. Questo significa che la volatilità passata influenza quella futura. C'è anche persistenza a lungo termine come vediamo nelle barre che rimangono in alto per moltissimi periodi. Questo indica che gli shock di mercato non vengono assorbiti immediatamente.

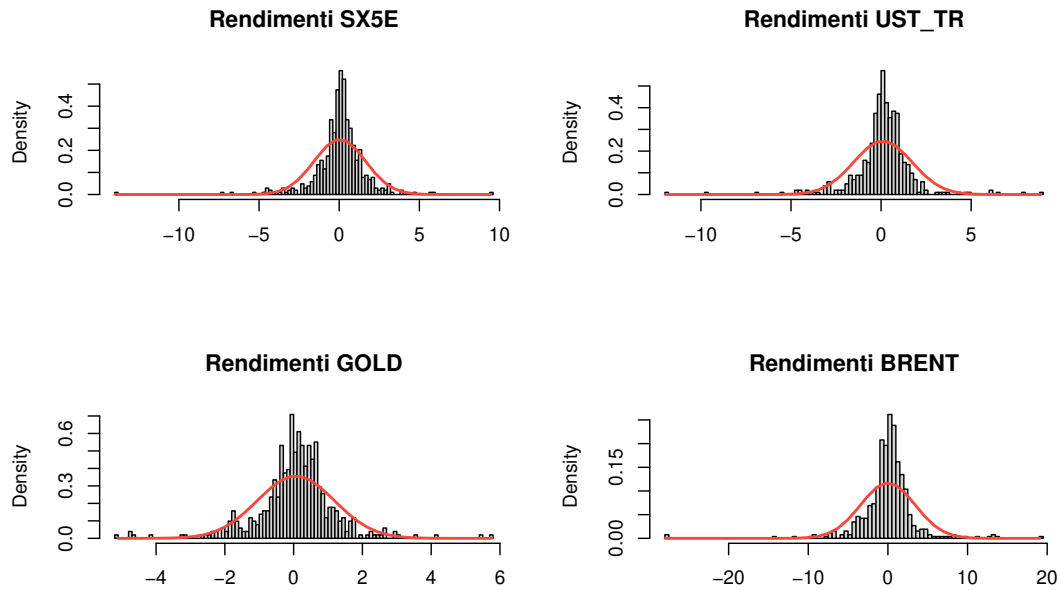


Figura 5: la linea rossa indica la distribuzione teorica della Normale mentre le barre affiancate rappresentano la distribuzione dei rendimenti. Come si vede chiaramente la distribuzione dei rendimenti è caratterizzata da picchi più elevati (Leptocurtosi) e code più grosse negli estremi rispetto alla normale. Questo è dato dal fatto che piccole variazioni e eventi estremi sono molto più frequenti di quanto è previsto dalla teoria (Normale).

Mettendo insieme la Figura 4 e 5, otteniamo il ritratto perfetto dei cosiddetti fatti stilizzati della finanza. Dove i rendimenti hanno picchi elevati e code pesanti.

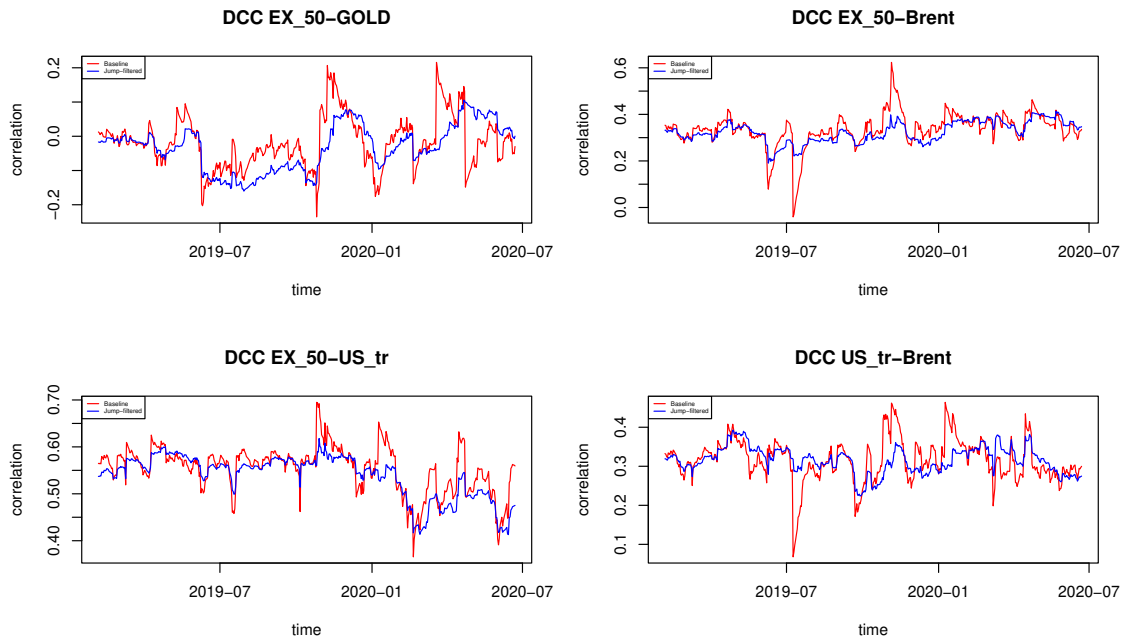


Figura 6: il grafico delle correlazioni dinamiche evidenzia chiaramente le differenze tra le stime ottenute sui rendimenti originali e quelle basate sui dati filtrati dai salti (jump-filtred). Nei dati non filtrati si osservano picchi di correlazione più marcati e improvvisi, che risultano invece sensibilmente attenuati nel modello che esclude gli shock estremi. In particolare la linea blu, relativa alla correlazione stimate sui rendimenti filtrati, mostra che un livello medio di correlazione leggermente inferiore rispetto alla linea rossa. Questo risultato suggerisce che gli eventi estremi nei rendimenti originali tendono ad amplificare temporaneamente il grado di co-movimento tra gli asset, generando aumenti transitori della correlazione. Con il riferimento alla coppia Euro Stoxx-50-Gold, nel periodo compreso tra marzo e luglio 2020 emergono spike di correlazione particolarmente rilevanti. Tali dinamiche coincidono con la fase più acuta della crisi pandemica del COVID-19. Riflettono un forte incremento del rischio sistematico e dei fenomeni di contagio finanziario.

3.3.1 prezzi di chiusura mensili

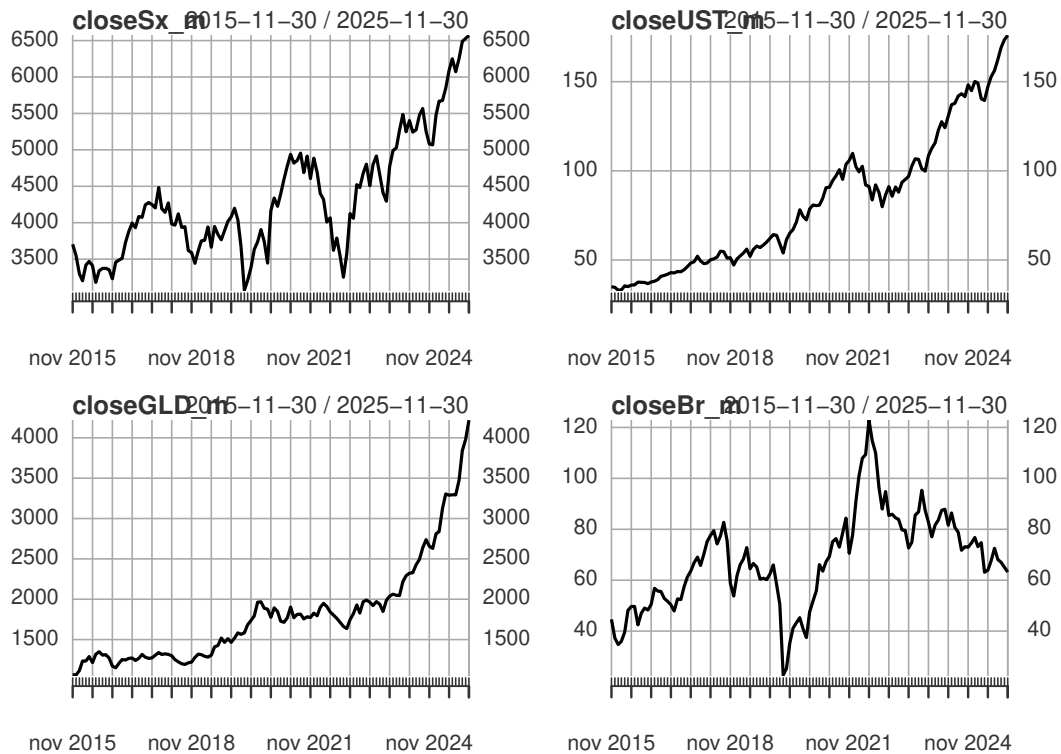


Figura 7: Sono riportati l'andamento dei prezzi di chiusura mensili nel periodo tra 2015-2025. I grafici mostrano come tutte le serie presentano un trend di lungo periodo, evidenziando la non stazionarietà ai livelli di prezzo. L'indice azionario (Erostoxxx 50) e il Brent oil mostrano una dinamica crescente interrotta da una significativa contrazione nel 2020, riconducibile allo shock pandemico. L'oro e il US treasury bond invece evidenzia un andamento progressivamente crescente, con un'accelerazione particolarmente marcata negli anni più recenti. I Treasury statunitensi presentano una dinamica di crescita più regolare.

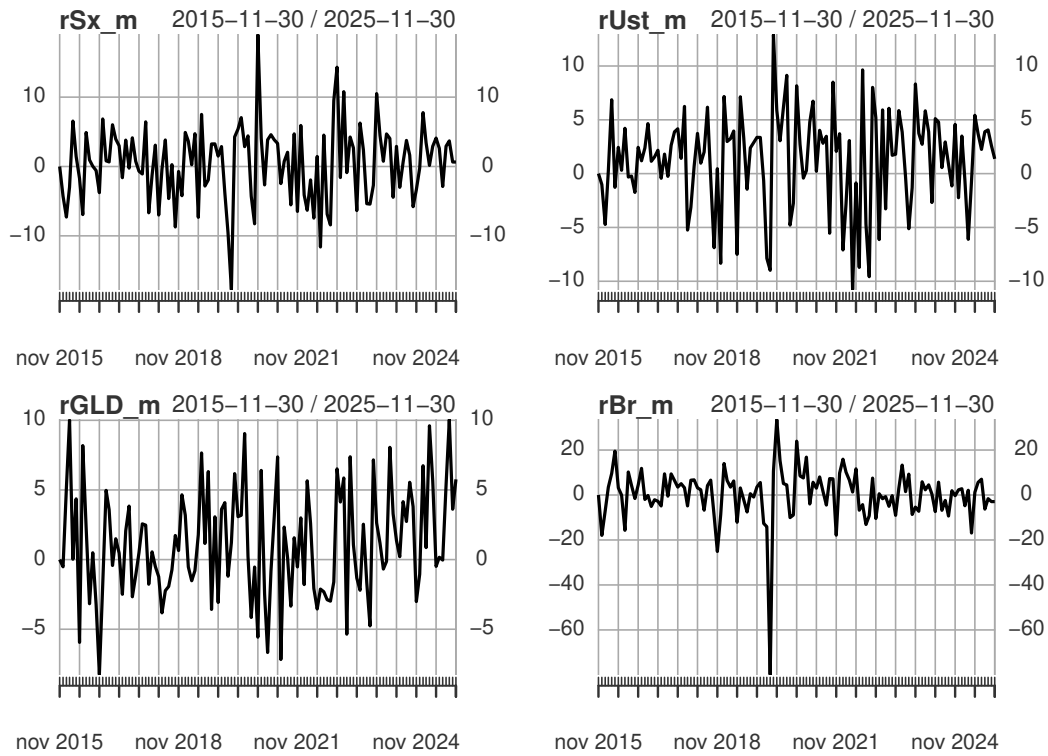


Figura 8: La figura 8 rappresenta i rendimenti mensili degli asset nel periodo novembre 2015 a novembre 2025. Le serie oscillano attorno allo zero e non mostrano trend sistematici, evidenziano una dinamica coerente con l'ipotesi di stazionarietà. Dal grafico emerge chiaramente la presenza di volatility clustering, con alternanza periodi di bassa variabilità e fasi caratterizzati da forti oscillazioni, in particolare nel 2020. Il Brent risulta l'asset più volatile, mentre i Treasury mostrano variazioni contenute.

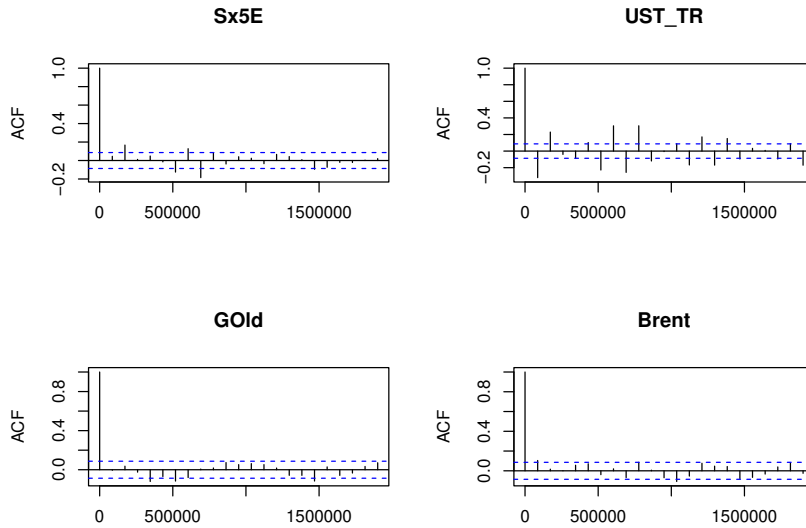


Figura 9: per i rendimenti le autocorrelazioni risultano per lo più non significative comprese nelle bande di confidenza suggerendo assenza di correlazione seriale e coerenza con l'ipotesi di white noise.

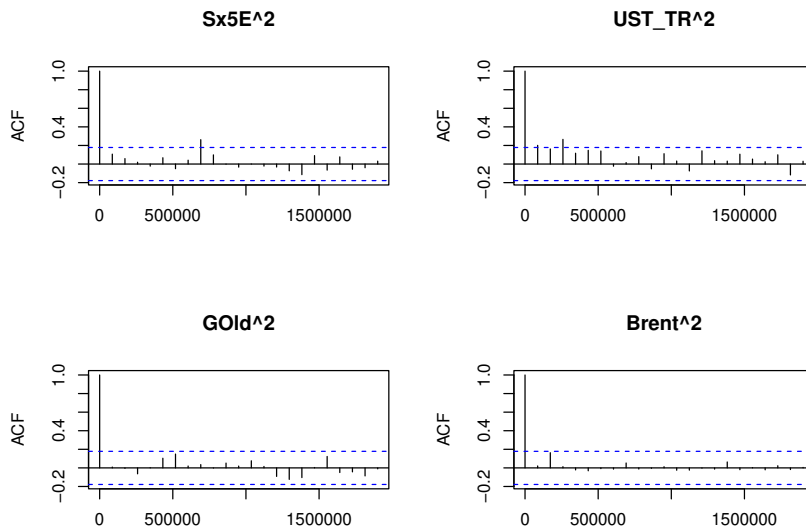


Figura 10: Sebbene l'analisi grafica dell'ACF dei rendimenti al quadrato non evidenzia autocorrelazioni marcate, si adotta una specificazione GARCH(1,1) in quanto modello standard per la volatilità finanziarie. Inoltre è coerente con l'evidenza empirica di eteroschedasticità condizionata nei mercati. Tali scelte consente inoltre una corretta implementazione del modello DCC multivariato.

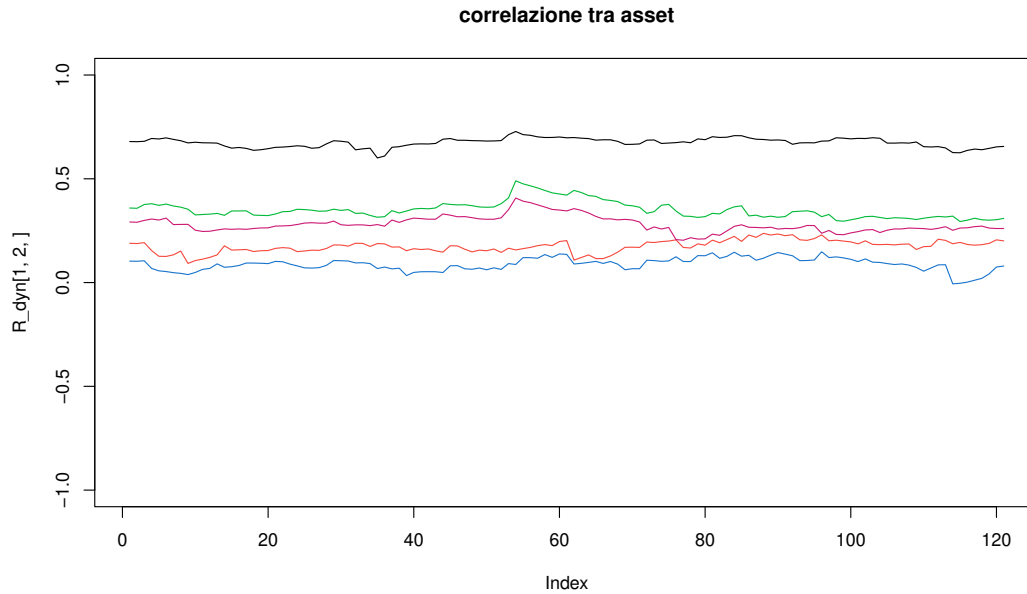


Figura 11: I risultati confermano che le correlazioni tra asset class non sono statiche, validando l'ipotesi di correlazione dinamica. Sebbene le serie mostrino stabilità nel lungo periodo, si osservano fluttuazioni significative in risposta a shock esogeni. Tale dinamismo suggerisce che un approccio di portafoglio statico risulterebbe inefficiente nella gestione del rischio sistematico. Poiché i legami tra i mercati mutano in base alle condizioni macroeconomiche. La dinamica tra l'asset Euro Stoxx 50 e US treasury bond (linea nera) riflette i classici flight-to-quality. La stabilità delle correlazioni su livelli contenuti evidenziano il ruolo di Treasury Bond come efficace strumento di copertura e diversificazione rispetto alla volatilità del mercato azionario europeo. Invece le correlazioni che coinvolgono Oro e il petrolio mostrano comportamenti asimmetrici. L'Oro, in particolare, mantiene de-correlazione strutturale con gli asset rischiosi, mentre il Brent presenta una sensibilità specifica ai cicli della domanda globale e alle tensioni geopolitiche.

Si rileva una tendenza al co-movimento positivo tra le diverse coppie di asset in corrispondenza a fasi di forte stress finanziario. Questo è visibile nei picchi sincronizzati nel grafico. Tale contagio riduce temporaneamente i benefici della diversificazione. In ottica di Asset Allocation, questi risultati implicano la necessità di adottare strategie di ribilanciamento dinamica e utilizzare modelli di Value-at Risk (VaR) basati su modelli matrice di varianza-covarianza dinamica per una stima accurata del rischio di portafoglio.

3.4 Tecniche di stima di correlazioni dinamiche (DCC, DDC-jump)

Il modello DCC-GARCH(1,1) con distribuzione t-Student è stato stimato su quattro serie di rendimenti: Euro Stoxx 50, US Treasury Total Return, Gold e Brent.

Nella Tabella si riporta i parametri stimati.

Tabella 1: Parametri GARCH(1,1) - Dati Giornalieri

	ω	α	β	ν
Euro Stoxx 50	0.0411	0.1377	0.8613	3.64
US Treasury	0.0453	0.2291	0.7699	4.66
Gold	0.0332	0.0795	0.9195	3.01
Brent	0.2167	0.1579	0.8411	3.36

La stima del DCC-GARCH(1,1) mostra una forte persistenza nella volatilità in tutti gli asset, coerente con il fenomeno del volatility clustering. I parametri di correlazione dinamica soddisfanno la condizione di stazionarietà ($\alpha + \beta < 1$). Quest'ultimo conferma la presenza di correlazione dinamica (varia nel tempo). In particolare poiché ha un'elevata persistenza (molto vicina ad 1), ci suggerisce che periodi di elevata co-movimentazione tendono a protrarsi nel tempo, soprattutto in fasi di stress dei mercati.

Tabella 2: Parametri DCC - Dati Giornalieri

Parametro	Stima	p-value
α_{DCC}	0.0246	0.0456
β_{DCC}	0.8859	0.0000
ν (multivariato)	4.094	0.0000

Il parametro α_{DCC} misura la reattività delle correlazioni agli shock recenti, mentre β_{DCC} cattura la persistenza dinamica. Il valore elevato di β_{DCC} (0.886) indica un'elevata persistenza delle correlazioni condizionali, coerente con la letteratura finanziaria. La somma di $\alpha_{DCC} + \beta_{DCC} < 1$ garantisce la stazionarietà del processo.

Poiché non esiste un pacchetto R che consenta di stimare direttamente un vero modello DCC-GARCH multivariato con salti di Poisson, adotto la seguente **strategia metodologica** articolata in due fasi.

ho preso spunto da Sébastien Laurent, Jeron V.K e Francesco Violante dal loro papers On Loss Function and Ranking Forecasting Performances of Multivariate Volatility Models

- Fase 1: Modellazione delle innovazioni senza specificare esplicitamente il processo di salto. In primo luogo, non modello esplicitamente il processo dei salti N_t . Lascio invece che la distribuzione delle innovazioni catturi gli eventi estremi. A tal fine utilizzo una distribuzione t-Student multivariata, caratterizzata da code più pesanti rispetto alla normale, che consente di intercettare shock di grande ampiezza, co-movimenti persistenti e dinamiche di correlazione più realistiche. In questo modo il modello DCC-GARCH riesce a incorporare, almeno in parte, l'effetto degli eventi rari attraverso la struttura delle innovazioni.
- Fase 2: Estensione tramite identificazione ex-post dei salti. Successivamente introduco un'estensione basata su un jump filtering applicato ai residui standardizzati del modello stimato nella prima fase. Preciso che non sto stimando un vero processo di Poisson né un modello strutturale con salti espliciti; piuttosto, identifico empiricamente gli shock estremi per analizzarne l'impatto sulla dinamica delle correlazioni condizionali (DCC).

Questa procedura consente di distinguere tra volatilità “ordinaria” e shock eccezionali, offrendo un'analisi più mirata del contributo degli eventi estremi alla struttura dinamica della dipendenza tra le variabili.

Tabella 3: Confronto Modelli

Modello	Log-Likelihood	AIC
DCC-GARCH (originale)	-3195.54	12.770
DCC-GARCH(clean)	-3142.57	12.561

Confrontando la log-likelihood che misura quanto bene il modello spiega i dati, osservo che il modello depurato dagli spike è migliore (più alto è il valore). Confrontando gli AIC e BIC tra i due modelli la scelta ideale sarebbe quello depurato. La rimozione degli spike migliora la capacità esplicativa del modello.

Il confronto tra il modello stimato sui rendimenti originali e quello depurato dagli spike evidenzia un miglioramento dei criteri informativi e un incremento della persistenza della correlazione condizionale. La riduzione del parametro α_{DCC} e l'aumento

di β_{DCC} suggeriscono che gli shock estremi influenzano principalmente la componente reattiva di breve periodo della correlazione, mentre la dinamica sottostante risulta più stabile una volta rimossi gli eventi eccezionali.

Dati mensili:

Tabella 4: DCC(1,1) Parameters

Parameter	Estimate	Std. Error	t-value	p-value
<i>dcc_a1</i>	0.018	0.016	1.095	0.273
<i>dcc_b1</i>	0.849	0.064	13.175	0.000
<i>mshape</i>	9.966	3.653	2.728	0.006

Il modello DCC(1,1) stimato evidenzia un'elevata persistenza nelle correlazioni condizionali, come indicato dal coefficiente statisticamente significativo $dcc_b1 = 0.849$ ($p < 0.01$). Il parametro dcc_a1 non risulta statisticamente significativo, suggerendo che gli shock di breve periodo nelle correlazioni sono limitati, mentre la dinamica è principalmente guidata dalla componente di persistenza.

3.5 modello di previsione

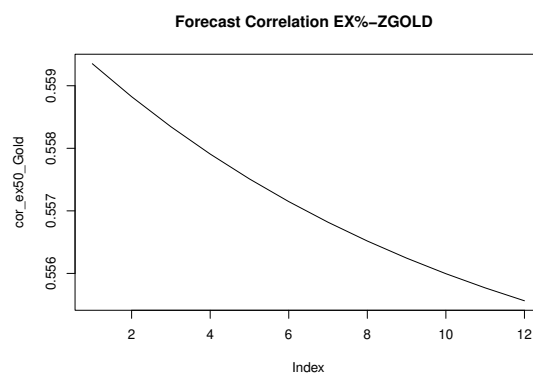


Figura 12: Il forecast delle correlazioni dinamiche DCC-GARCH serve a mostrare la dinamica condizionale stimata e la tendenza verso la correlazione media, ma non ha valore predittivo assoluto perché i veri shock futuri sono imprevedibili. Quindi ci limitiamo a questo unico confronto tra Euro stoxx 50 e Gold e non andiamo oltre.

3.6 interpretazione dei risultati

L'analisi condotta su dati giornalieri e mensili evidenzia come la dinamica delle correlazioni dipenda in modo significativo dall'orizzonte temporale considerato. In particolare, le correlazioni stimate a frequenza giornaliera (figura 6) mostrano reazioni rapide e pronunciate agli shock, con picchi marcati durante le fasi di stress finanziario. Soprattutto nel periodo marzo-luglio del 2020 in corrispondenza della crisi pandemica. A frequenza mensile (Figura 11), invece, la dinamica appare più regolare e smussata, riflettendo una componente strutturale di lungo periodo meno influenzata da fluttuazioni transitorie.

Dal punto di vista econometrico, tale evidenza suggerisce che la componente reattiva della dinamica delle correlazioni, misurata dal parametro α_{DCC} , assume un ruolo relativamente più rilevante nel breve periodo, mentre la componente persistente β_{DCC} , riportata nella Tabella 2 con un valore pari a 0.8859, domina la dinamica di medio-lungo termine. L'elevata persistenza conferma che le correlazioni condizionali sono caratterizzate da memoria lunga, in linea con la letteratura sul contagio finanziario e sulle dipendenze dinamiche tra mercati (Engle, 2002). La coerenza dei risultati tra le due frequenze rafforza la robustezza del modello DCC-GARCH nell'identificare una struttura di dipendenza non statica ma temporalmente variabile.

Un ulteriore elemento interpretativo riguarda il ruolo del contesto macroeconomico e, in particolare, delle politiche monetarie. Le correlazioni tra asset class non sono determinate esclusivamente da shock di mercato, ma risultano influenzate anche dalle condizioni finanziarie aggregate e dalle decisioni delle banche centrali. Interventi quali programmi di quantitative easing, variazioni dei tassi di interesse e misure straordinarie di liquidità tendono ad agire simultaneamente su più mercati, modificando il grado di co-movimento tra asset rischiosi e strumenti rifugio.

Le dinamiche osservate nelle correlazioni condizionali possono essere interpretate anche alla luce del contesto macro-finanziario. In particolare, come evidenziato nella Figura 6, il marcato incremento delle correlazioni nel 2020 coincide con la fase più acuta della crisi pandemica, caratterizzata da elevata incertezza e interventi straordinari di politica economica e monetaria. In tali condizioni, i mercati tendono a reagire in modo sincronizzato agli shock sistemici, determinando un temporaneo rafforzamento del co-movimento tra asset. Successivamente, con la progressiva stabilizzazione delle condizioni finanziarie, le correlazioni mostrano una graduale normalizzazione, suggerendo che l'aumento osservato sia riconducibile principalmente a una fase di stress sistemico piuttosto che a un cambiamento permanente nella

struttura di dipendenza tra mercati.

In questo senso, la dinamica delle correlazioni condizionali stimata dal modello DCC può essere interpretata come riflesso delle condizioni macro-finanziarie prevalenti. Nei periodi di elevata incertezza e shock globali si osserva un rafforzamento del co-movimento, mentre in fasi più stabili riemerge una maggiore differenziazione tra asset class. Tale evidenza è coerente con l'idea dei mercati finanziari come sistemi complessi interconnessi, in cui le interdipendenze si intensificano durante gli episodi di stress sistemico.

le implicazioni risultano particolarmente rilevanti in termini di misurazione del rischio sistemico. Poiché il CoVaR dipende dalla volatilità condizionale (stimata tramite le equazioni GARCH (Tabella 1) e dalla correlazione dinamica tra asset (Tabella 2 e Figura 6). L'utilizzo di un modello DCC-GARCH consente di ottenere una misura del rischio sistemico coerente con l'evoluzione temporale delle interdipendenze finanziarie. Nei periodi di crisi, l'aumento simultaneo di volatilità e correlazione genera un'amplificazione non lineare del CoVaR, riducendo significativamente i benefici della diversificazione, come già evidenziato nella letteratura sul rischio sistemico (Adrian e Brunnermeier, 2016).

Il confronto tra modello originale e modello depurato dagli spike (Tabella 3) fornisce ulteriori indicazioni. Il miglioramento della log-likelihood e la riduzione dell'AIC nel modello filtrato suggeriscono una migliore capacità di rappresentare la struttura sottostante delle dipendenze. La riduzione della componente reattiva di breve periodo (DCC) e il rafforzamento della persistenza (β_{DCC}) indicano che gli shock estremi influenzano principalmente la dinamica transitoria delle correlazioni, amplificando temporaneamente il co-movimento tra mercati. Il modello depurato consente invece di isolare la componente strutturale della dipendenza, fornendo una misura più stabile del contributo sistemico degli asset e distinguendo tra effetti transitori e dinamiche persistenti legate al contesto macroeconomico.

Nel complesso, l'evidenza empirica suggerisce che le correlazioni tra asset class non sono esogene né costanti, ma risultano endogenamente determinate dall'interazione tra shock di mercato, regime macroeconomico e interventi di policy. Tale dinamica rafforza la necessità di adottare modelli di rischio basati su matrici varianza-covarianza condizionali e approcci di asset allocation dinamica, in quanto un framework statico risulterebbe inadeguato nel cogliere le variazioni del rischio sistemico nel tempo.

4 conclusione

Si è analizzata la dinamica delle correlazioni tra Euro Stoxx 50, US Treasury, Gold e Brent utilizzando un modello DCC-GARCH con innovazioni t-Student, al fine di studiare come shock macroeconomici influenzino l'interdipendenza tra asset e il rischio sistemico.

L'evidenza empirica conferma i principali fatti stilizzati della finanza: leptocurtosi, volatilità persistente e correlazioni dinamiche. I risultati mostrano che le correlazioni non sono statiche, ma variano nel tempo, con picchi significativi durante periodi di stress sistemico come la crisi pandemica del 2020 (Figura 6). L'elevata persistenza stimata nelle equazioni DCC ($\beta_{DCC} = 0.886$, Tabella 2) indica che gli effetti degli shock si propagano nel tempo, rafforzando la natura interconnessa dei mercati finanziari.

Il confronto tra modello originale e modello depurato dagli spike (Tabella 3) evidenzia che gli shock estremi amplificano temporaneamente le correlazioni, mentre la struttura sottostante delle interdipendenze risulta più stabile una volta rimossi gli outlier. Questo permette di distinguere tra contagio transitorio e dipendenza strutturale, fornendo una misura più affidabile del rischio sistemico.

Le implicazioni operative sono significative, poiché il CoVaR dipende dalla volatilità e dalla correlazione condizionale. L'adozione di un modello DCC-GARCH consente di stimare un rischio sistemico dinamico, catturando l'amplificazione congiunta di volatilità e correlazioni nei periodi di crisi e sottolineando l'importanza di strategie di asset allocation adattive.

In conclusione, i risultati confermano che le correlazioni tra asset class non possono essere considerate parametri statici, ma devono essere modellate come grandezze condizionali e dipendenti dallo stato del sistema economico-finanziario. L'utilizzo del modello DCC-GARCH, integrato con una procedura di identificazione degli shock estremi, consente di cogliere in modo più accurato le dinamiche di contagio e di rischio sistemico, offrendo implicazioni rilevanti per la gestione del portafoglio e la misurazione del rischio in contesti di elevata incertezza macroeconomica. Possibili sviluppi futuri includono l'utilizzo di modelli asimmetrici, approcci copula-based o analisi del $\delta CoVaR$ per approfondire la misurazione del rischio sistemico e le dinamiche di contagio tra asset class. In aggiunta l'utilizzo di modelli di Deep-Learning come le Reti Neurali, che possono apprendere relazioni complesse tra volatilità, shock e sono particolarmente utili in caso di correlazione non lineare agli shock.

Riferimenti bibliografici

- [1] Baggio, M. (2023). *Analisi dei rendimenti e correlazioni nei mercati finanziari durante eventi estremi*. Tesi di Laurea Magistrale, Università degli Studi di Padova.
url<https://thesis.unipd.it/bitstream/20.500.12608/12126/1/Baggio.pdf>
- [2] Systemic Risk. Bailed-In di Vito Gnazzo
- [3] Bollerslev, T. (1986). Generalized autoregressive conditional heteroskedasticity. *Journal of Econometrics*, 3
- [4] Financial Econometrics Using Satata (Boffelli, Simona, author, Urga, Giovanni..)
- [5] Engle- Dynamic Conditional Correlation
- [6] Financial Modelling with Jum Processes (Peter Tankov)
- [7] Ruey S. Tsay- Analysis of Financial Time Series, Third Edition
- [8] Longin, F., & Solnik, B. (2001). Extreme correlation of international equity markets. *Journal of Finance*
- [9] Forbes, K. J., & Rigobon, R. (2002). No contagion, only interdependence: Measuring stock market comovements. *Journal of Finance*
- [10] Merton, R. C. (1976). Option pricing when underlying stock returns are discontinuous.
- [11] url<https://quifinanza.it/glossario/euribor/>
- [12] Plus500. (2024). *Euro Stoxx 50 Trading Guide*.
url<https://www.plus500.com/it/instruments/fesx/euro-stoxx-50-trading-guide-1>
- [13] Prezzo del Petrolio. (2024). *Petrolio Brent: prezzo, analisi e trading*.
url<https://www.prezzodelpetrolio.com/finanza/petrolio-brent/>
- [14] url<https://am.pictet.com/pictetperte/guida-alla-finanza/2024/le-differenze-trarischio-idiosincratico-ed-esogeno>
- [15] Allen, F., & Gale, D. (2000). Financial contagion.
- [16] Freixas, X., Parigi, B. M., & Rochet, J. C. (2000). Systemic risk, interbank relations, and liquidity provision by the central bank. *Journal of Money, Credit and Banking*

- [17] Reinhart, C. M., & Rogoff, K. S. (2009). *This time is different: Eight centuries of financial folly*. Princeton University Press.
- [18] Borio, C. (2021). Secular stagnation or financial cycle drag? *Business Economics*, 56, 15–29.
- [19] Brynjolfsson, E., & McAfee, A. (2017). *Machine, platform, crowd: Harnessing our digital future*. W. W. Norton Company.