



UNIVERSITÀ DEGLI STUDI DI PADOVA

Dipartimento di Fisica e Astronomia “Galileo Galilei”

Corso di Laurea in Fisica

Tesi di Laurea

Termodinamica in un gas di Bose-Einstein debolmente
interagente

Relatore

Prof. Luca Salasnich

Laureando

Andrea Pasqualotto

Anno Accademico 2021/2022

Sommario

In questo lavoro studieremo un gas di bosoni identici debolmente interagenti in 3D. Deriveremo l'equazione di Gross-Pitaevskii da cui ricaveremo le equazioni di Bogoliubov-de Gennes e lo spettro delle eccitazioni elementari. A seguire studieremo la termodinamica del sistema ricavando un'equazione per la temperatura critica e la frazione condensata. Nella seconda parte studieremo lo stesso problema introducendo un confinamento armonico. Considereremo dapprima un sistema di bosoni non interagenti in 3D e 2D e infine includeremo un'interazione tra le particelle.

Indice

1	Introduzione	1
2	Condensazione di Bose-Einstein	3
2.1	Equazione di Gross-Pitaevskii	5
2.2	Spettro delle eccitazioni elementari	7
2.3	Proprietà termodinamiche	9
3	Gas di bosoni in trappola armonica	11
3.1	Sistema non interagente tridimensionale	11
3.2	Sistema non interagente bidimensionale	15
3.3	Sistema interagente tridimensionale	17
3.4	Sistema interagente bidimensionale	18
4	Conclusioni	21

Capitolo 1

Introduzione

Il fenomeno della condensazione di Bose-Einstein (BEC) fece la sua comparsa nel 1924, come predizione teorica formulata da Einstein, il quale sviluppò la teoria a partire da un articolo del fisico indiano Satyendranath Bose. Bose aveva proposto un metodo di derivazione della formula di radiazione del corpo nero di Plank basato su considerazioni di tipo statistico che Einstein estese dai fotoni, utilizzati da Bose per trattare le onde elettromagnetiche come gas di particelle identiche, alle particelle massive di un gas ideale. Ne derivò la formulazione della statistica di Bose-Einstein e la predizione del fenomeno della BEC.

L'insieme delle particelle si divide in due famiglie: quella dei bosoni, che obbediscono alla statistica di Bose-Einstein, e quella dei fermioni obbedienti invece la statistica di Fermi-Dirac. Dal teorema di spin-statistica la caratterizzazione delle due famiglie di particelle è data dal valore del loro spin: per i bosoni lo spin è intero ($s = 0, 1, 2, \dots$) mentre per i fermioni deve essere semi-intero ($s = 1/2, 3/2, \dots$). Un'altra caratteristica peculiare di queste particelle risiede nel loro comportamento. In un sistema di fermioni identici uno stato quantistico non può essere occupato da più di una particella, ovvero due o più fermioni non possono condividere il medesimo set di numeri quantici; tale risultato è conosciuto come principio di esclusione di Pauli. Per un sistema di bosoni identici invece non vale questo principio e infatti essi possono occupare, per un numero arbitrario di particelle, il medesimo stato; proprio questo si verifica quando un gas bosonico viene raffreddato al di sotto di una certa temperatura critica T_c . Si ha che una frazione finita del numero totale di particelle condensa occupando il medesimo stato di energia minima. Se si trattano le particelle come pacchetti d'onda con una loro estensione spaziale e quindi con una determinata lunghezza d'onda dipendente dalla temperatura, nota come lunghezza d'onda termica di de Broglie, il punto di transizione lo si può interpretare come il raggiungimento di una lunghezza d'onda dello stesso ordine della separazione interatomica, ossia alla sovrapposizione dei pacchetti e alla formazione di un condensato di particelle indistinguibili tra loro. Come viene mostrato in figura 1.1 si ha un'occupazione macroscopica crescente, dello stato ad energia minima, man mano che la temperatura viene abbassata.

Da un punto di vista sperimentale la storia dei condensati di Bose-Einstein è strettamente collegata alla sfida tecnica del raggiungimento di temperature prossime allo zero assoluto e della realizzazione di sistemi di confinamento. Una soluzione efficiente consiste nella tecnica del laser-cooling basata sullo scattering tra particelle del gas e fotoni, i quali sottraggono più energia di quanta sia assorbita dai bosoni, così da raffreddarli. In aggiunta a tale metodo vi è anche la tecnica di evaporazione atomica forzata e il confinamento in trappole ottiche e magnetiche.

La predizione originale di Einstein riguardava un gas non interagente, tuttavia nel 1938 venne osservata per la prima volta una particolare transizione di fase dell'elio-4 liquido, che al di sotto della temperatura di $2.17K$ manifestava proprietà estremamente inusuali. Fritz London suggerì che le proprietà di questa nuova fase, detta superfluida, potessero essere conseguenza della BEC in un sistema fortemente interagente; questa ipotesi è ormai alla base della moderna comprensione della superfluidità. L'elio-4 superfluido è dunque il prototipo di condensato di Bose-Einstein e per molti anni è stato l'unica realizzazione sperimentale di tale fenomeno. Purtroppo l'interazione tra gli atomi di elio è

intensa e ciò influisce drasticamente sull'occupazione dello stato fondamentale di particella singola, anche a temperatura zero, di conseguenza è difficile misurare direttamente tale occupazione. Questo spinse la ricerca nella realizzazione di un BEC gassoso, con una frazione condensata più elevata con l'unico problema da superare di riuscire a mantenere tale sistema in forma di condensato prima che esso andasse in contro a transizioni di fase indesiderate.

Solo a partire dagli anni '70 ci si rese conto che un sistema gassoso estremamente diluito sarebbe potuto essere mantenuto in una fase metastabile in cui la condensazione in un liquido o solido veniva soppressa e poteva verificarsi la BEC.

Una prima realizzazione di condensato fu fatta nel 1995 da Eric Cornell e Carl Wieman presso il laboratorio JILA di Boulder, Colorado. Cornell e Wieman riuscirono a raffreddare atomi di Rubidio a $170nK$ tramite tecniche di laser cooling e confinamento magneto-ottico. L'esperimento, per il quale i fisici furono insigniti del premio Nobel per la Fisica nel 2001 (assieme a Wolfgang Ketterle), aprì la strada allo studio di molti fenomeni correlati, quali superconduttività, superfluidità, vortici quantizzati, laser atomici ecc...

Lo studio teorico di gas di bosoni interagenti ultrafreddi e intrappolati in potenziali esterni ha pertanto grande rilievo nella corretta interpretazione dei risultati sperimentali.

Lo scopo di questo lavoro è quello di dedurre dal contesto della Meccanica Quantistica tradizionale le principali equazioni che descrivono questi sistemi, per poi descriverne le principali proprietà termodinamiche di interesse pratico, quali la temperatura critica e la frazione di condensato.

La tesi è organizzata in due capitoli principali. Nel primo capitolo si discuterà la condensazione di Bose-Einstein e come essa si manifesta nel caso del gas di Bose ideale, si dimostrerà poi l'equazione di Gross-Pitaevskii (GP) che descrive lo stato fondamentale di un sistema di bosoni identici interagenti con un potenziale con la forma di un'interazione di contatto. Dalla GP si ricaveranno le equazioni di Bogoliubov-de Gennes e da esse lo spettro energetico delle eccitazioni elementari del sistema. Con l'approssimazione semiclassica e la formula per la statistica di Bose-Einstein si costruirà infine un'espressione per la densità della nube termica. Nel secondo capitolo si tratterà il gas di Bose confinato armonicamente. Studieremo dapprima un gas di Bose non interagente in 3D e 2D con confinamento armonico isotropo e ne ricaveremo le principali proprietà termodinamiche. Infine nello stesso problema sarà inclusa un'interazione tra le particelle.

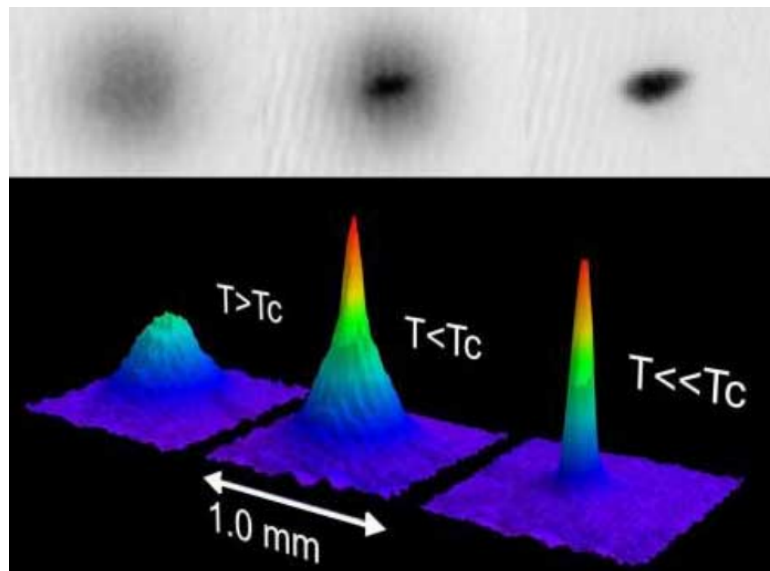


Figura 1.1: La figura rappresenta i profili di densità del gas di Bose a varie temperature. A sinistra la temperatura è superiore a quella critica: non vi è condensazione; al centro la temperatura è appena sotto a quella critica: ha inizio la condensazione, evidenziata dal picco centrale, ma permane una nube termica; a destra la temperatura è molto inferiore a quella critica e il gas è quasi tutto condensato. I colori rappresentano l'energia delle particelle (rosso corrisponde a bassa energia, violetto ad alta energia).

Capitolo 2

Condensazione di Bose-Einstein

Iniziamo introducendo come il fenomeno della condensazione di Bose-Einstein si manifesti per un gas ideale di Bose. Considereremo dunque il caso 3D dove le particelle saranno confinate in un potenziale a buca infinita (cioè nullo nel volume considerato e infinito sulle pareti). Per questo caso e per il resto della tesi considereremo particelle spinless di modo da non dover introdurre una degenerazione di spin.

Gas di Bose ideale in 3D. Partendo da un gas ideale di N bosoni di massa m confinati nel volume V (scatola cubica di lato L) scriviamo l'Hamiltoniana associata

$$\hat{H}_N = \sum_{i=1}^N \left[\frac{\hat{\mathbf{P}}_i^2}{2m} + U(\hat{\mathbf{R}}_i) \right] = \sum_{i=1}^N \hat{h}_i$$

dove riconosciamo il potenziale

$$U(\mathbf{R}_i) = \begin{cases} 0 & \text{se } \mathbf{R}_i \in V \\ +\infty & \text{altrimenti} \end{cases}$$

Le energie di singola particella saranno gli autovalori

$$\begin{aligned} \varepsilon_{\mathbf{k}} &= \hbar^2 \mathbf{k}^2 / 2m \\ \mathbf{k} &= \pi \mathbf{n} / L \quad \mathbf{n} \in \mathbf{N}^3 \end{aligned}$$

Possiamo ora, utilizzando il formalismo grancanonico e la rappresentazione in numero di occupazione degli stati, calcolare la funzione di partizione da cui ricaveremo tutte le proprietà di nostro interesse. Un risultato fondamentale per la statistica quantistica è [1]

$$\mathcal{Z} = \text{Tr}[e^{-\beta(\hat{H}_N - \mu \hat{N})}] = \prod_{\mathbf{k}} \frac{1}{1 - e^{-\beta(\varepsilon_{\mathbf{k}} - \mu)}} \quad (2.1)$$

dove $\beta = (k_B T)^{-1}$ e μ è il potenziale chimico mentre l'operatore \hat{N} è l'operatore numero totale. Ora rimane solo da calcolare il valore medio di alcune grandezze fisiche, in particolare ci interessa il numero medio di bosoni

$$\begin{aligned} \langle \hat{N} \rangle &= \frac{1}{\mathcal{Z}} \text{Tr}[\hat{N} e^{-\beta(\hat{H}_N - \mu \hat{N})}] = \frac{1}{\beta} \frac{\partial \ln(\mathcal{Z})}{\partial \mu} = \\ &= \sum_{\mathbf{k}} \frac{1}{e^{\beta(\varepsilon_{\mathbf{k}} - \mu)} - 1} = \sum_{\mathbf{k}} \langle n_{\mathbf{k}} \rangle \end{aligned} \quad (2.2)$$

dove nella prima riga abbiamo legato la funzione di partizione al potenziale grancanonico $\Omega = -k_B T \ln(\mathcal{Z})$ mentre nell'ultima riga abbiamo reso esplicito come il valore medio del numero di bosoni sia la somma dei valori medi dei numeri di occupazione $n_{\mathbf{k}}$. Per avere valori $n_{\mathbf{k}}$ positivi per ogni \mathbf{k} deve essere soddisfatta la disuguaglianza

$$\mu < \min_{\mathbf{k}} \varepsilon_{\mathbf{k}} = \varepsilon_{\mathbf{k}_0}$$

Nel limite $\mu \rightarrow \varepsilon_{\mathbf{k}_0}$ il numero di occupazione $n_{\mathbf{k}_0} = \langle n_{\mathbf{k}_0} \rangle$ è divergente e questo comportamento è alla base della condensazione di Bose-Einstein. Potremmo quindi riscrivere il numero totale di bosoni come somma di due termini:

$$\langle N \rangle = \langle n_{\mathbf{k}_0} \rangle + \sum_{\mathbf{k} \neq \mathbf{k}_0} \frac{1}{e^{\beta(\varepsilon_{\mathbf{k}} - \mu)} - 1} = N_0 + N_e$$

una parte riguardante lo stato fondamentale di singola particella $|k_0\rangle$ mentre il secondo termine comprende gli stati eccitati.

Introducendo la fugacità $z = e^{\beta\mu}$ e considerando il limite termodinamico

$$N \rightarrow +\infty \quad V \rightarrow +\infty \quad \frac{N}{V} = \text{cost.}$$

si ha che: la spaziatura dei livelli energetici diventa infinitesima (siccome $\varepsilon_{\mathbf{k}} \propto 1/L^2$), $\varepsilon_{\mathbf{k}_0} = 0$ e la sommatoria può essere sostituita da un integrale $\sum_{\mathbf{k}} \rightarrow \frac{V}{(2\pi)^3} \int d^3k$ (ove $V = L^3$). Si ottiene dunque

$$\begin{aligned} N &= \langle n_{\mathbf{k}_0} \rangle + \frac{V}{(2\pi)^3} \int \frac{1}{z^{-1}e^{\beta\varepsilon_{\mathbf{k}}} - 1} d^3k = \\ &= \frac{z}{1-z} + \frac{V}{(2\pi)^3} \int \frac{1}{z^{-1}e^{\beta\varepsilon_{\mathbf{k}}} - 1} d^3k \end{aligned} \quad (2.3)$$

In particolare la densità numerica di particelle negli stati eccitati sarà

$$\begin{aligned} \frac{N_e}{V} &= \frac{4\pi}{(2\pi)^3} \int_0^\infty \frac{k^2}{z^{-1}e^{\beta\varepsilon_{\mathbf{k}}} - 1} dk = \\ &= \frac{1}{4\pi^2} \left(\frac{2m}{\beta\hbar^2} \right)^{3/2} \int_0^\infty \frac{x^{1/2}}{z^{-1}e^x - 1} dx = \left(\frac{m}{2\pi\beta\hbar^2} \right)^{3/2} f_{3/2}^+(z) \end{aligned} \quad (2.4)$$

avendo effettuato nel secondo passaggio la sostituzione: $x = \beta\varepsilon_{\mathbf{k}}$. La funzione $f_{3/2}^+(z)$ viene chiamata funzione di Bose o funzione bosonica ed è un caso particolare di una funzione più generica [1]

$$f_m^\eta(z) = \frac{1}{\Gamma(m)} \int_0^\infty \frac{x^{m-1}}{z^{-1}e^x - \eta} dx = \sum_{n=1}^\infty \eta^{n-1} \frac{z^n}{n^m} \quad (2.5)$$

dove $\Gamma(m)$ è la funzione Gamma di Eulero e $\eta = \pm 1$ a seconda che si stia trattando un sistema bosonico ($\eta = +1$) o fermionico ($\eta = -1$) mentre l'ultima uguaglianza la si ottiene sfruttando la serie geometrica di ragione ze^{-x} . Una proprietà che tornerà utile è l'uguaglianza $f_m^+(1) = \zeta(m)$ dove ζ è la funzione di Riemann.

Notiamo dalla serie come la funzione di Bose sia monotona crescente nell'intervallo $z \in [0, 1]$. Siccome $z = e^{\beta\mu}$ con $\mu < \varepsilon_{\mathbf{k}_0} = 0$ abbiamo che $f_m^+(z)$ assume valore massimo quando $z = 1$ ovvero quando $\mu \rightarrow 0$.

Temperatura critica e frazione di condensato. Partendo dall'espressione (2.2) mantenendo costante il numero di particelle e facendo variare la temperatura accade che quando la temperatura aumenta il potenziale chimico diventa sempre più negativo e $z \rightarrow 0$ mentre se la temperatura viene abbassata $\mu \rightarrow 0$ e $z \rightarrow 1$. Dall'espressione (2.3) abbiamo quindi che a temperature sufficientemente elevate (quindi $z \rightarrow 0$) la densità numerica totale (N/V) è uguale alla densità numerica di particelle negli stati eccitati la quale è superiormente limitata dal valore

$$\frac{N}{V} = \frac{N_e}{V} \leq \left(\frac{m}{2\pi\beta\hbar^2} \right)^{3/2} f_{3/2}^+(1) = \left(\frac{m}{2\pi\beta\hbar^2} \right)^{3/2} \zeta(3/2) \quad (2.6)$$

con $f_{3/2}^+(1) = \zeta(3/2) \simeq 2.61$

Abbassando la temperatura la fugacità cresce finché $N/V = N_e/V$ non raggiunge il suo valore limite

(cioè quando $z = 1$) cosa che accade alla temperatura critica

$$T_c = \frac{2\pi\hbar^2}{mk_B} \left(\frac{N/V}{\zeta(3/2)} \right)^{2/3} \quad (2.7)$$

Al di sotto di T_c abbiamo $\mu = 0$ e la densità N_e/V è fissata al valore limite imposto da (2.6) quindi

$$\frac{N_e}{V} = \left(\frac{m}{2\pi\beta\hbar^2} \right)^{3/2} \zeta(3/2) \propto T^{3/2} \quad (T \leq T_c)$$

che risulta inferiore alla densità totale N/V e indipendente da essa. Ciò significa che una frazione macroscopica (anche nel limite termodinamico) di particelle con densità $N_0/V = N/V - N_e/V$ occupa lo stato fondamentale. Questo fenomeno di occupazione macroscopica dello stato fondamentale $|\mathbf{k}_0\rangle$ di particella singola è ciò che si chiama condensato di Bose-Einstein [1].

Possiamo ricavare una formula per la frazione di condensato per temperature inferiori a quella critica. L'andamento della frazione condensata è mostrato in figura 2.1. Poichè a $T = T_c$ si ha $N = N_e$ e di conseguenza $N_0 = 0$ possiamo scrivere

$$N = \left(\frac{m}{2\pi\hbar^2\beta_c} \right)^{3/2} \zeta(3/2) = N_0 + N_e = N_0 + \left(\frac{m}{2\pi\hbar^2\beta} \right)^{3/2} \zeta(3/2)$$

$$\frac{N_0}{N} = 1 - \left(\frac{T}{T_c} \right)^{3/2} \quad (T \leq T_c)$$

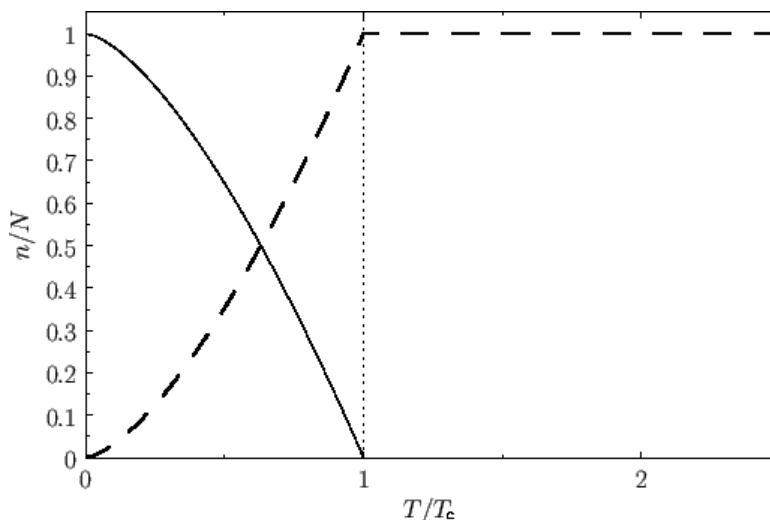


Figura 2.1: La figura rappresenta la variazione della frazione di condensato N_0/N (linea continua) e della frazione non condensata N_e/N (linea tratteggiata) in funzione del rapporto T/T_c . Si nota come a $T/T_c = 1$ nel limite termodinamico non vi sia presenza di condensato.

2.1 Equazione di Gross-Pitaevskii

Iniziamo ora a trattare il caso di un gas di Bose debolmente interagente. Prima di tutto ricaveremo un'equazione che ne descriverà la dinamica. Consideriamo quindi N bosoni identici in 3D, la funzione d'onda che ne descriverà il sistema sarà della forma: $\Psi(\mathbf{R}, t)$ dipendente dalle coordinate $\mathbf{R} = (\mathbf{r}_1, \dots, \mathbf{r}_N)$ e dal tempo. Tale funzione, dovendo descrivere un sistema di bosoni, sarà totalmente simmetrica rispetto allo scambio delle particelle e normalizzata ad uno.

Approssimazione di Hartree per un condensato puro. Considerando un sistema generico di particelle interagenti esso sarà descritto da un'Hamiltoniana

$$\hat{H} = \sum_{i=1}^N \left[-\frac{\hbar^2}{2m} \nabla_i^2 + U(\mathbf{r}_i) \right] + \frac{1}{2} \sum_{i=1}^N \sum_{j \neq i}^N V(\mathbf{r}_i, \mathbf{r}_j) = \sum_{i=1}^N \hat{h}_i + \frac{1}{2} \sum_{i=1}^N \sum_{j \neq i}^N V(\mathbf{r}_i, \mathbf{r}_j) \quad (2.8)$$

dove $U(\mathbf{r})$ è un potenziale di confinamento mentre $V(\mathbf{r})$ è il potenziale di interazione tra le particelle. Trattando un sistema di bosoni debolmente interagenti come se fosse un gas molto diluito possiamo utilizzare l'approssimazione di Hartree la quale tratta la funzione d'onda a molti corpi Ψ come un prodotto simmetrizzato di funzioni d'onda di singola particella e nel caso particolare in cui il sistema considerato formi un condensato puro allora ogni particella occuperà lo stesso stato ψ e si potrà scrivere la funzione d'onda totale nel modo seguente

$$\Psi(\mathbf{R}, t) = \prod_{i=1}^N \psi(\mathbf{r}_i, t)$$

Tale approssimazione risulta valida nel caso di gas diluiti a $T = 0K$. Possiamo fattorizzare ulteriormente la funzione d'onda separando il contributo spaziale da quello temporale considerando perciò lo stato stazionario di singola particella della forma $\psi(\mathbf{r}, t) = e^{-iEt/\hbar} \phi(\mathbf{r})$ di modo da poter scrivere un contributo per Ψ solo spaziale

$$\Phi(\mathbf{R}) = \prod_{i=1}^N \phi(\mathbf{r}_i) \quad \int |\phi(\mathbf{r})|^2 d^3r = 1 \quad (2.9)$$

La funzione d'onda incognita di singola particella la si determinerà attraverso un metodo variazionale considerando infatti lo stato ϕ come lo stato fondamentale di singola particella si andrà a minimizzare il valore di aspettazione dell'energia totale ovvero il funzionale

$$\langle \Phi | \hat{H} | \Phi \rangle = \int \Phi^*(\mathbf{r}_1, \dots, \mathbf{r}_N) \hat{H} \Phi(\mathbf{r}_1, \dots, \mathbf{r}_N) d^3r_1 \dots d^3r_N \quad (2.10)$$

rispetto alla funzione $\phi(\mathbf{r})$.

Sostituendo ora alla (2.10) i risultati (2.9) e (2.8) e separando i contributi dell'Hamiltoniana di singola particella dal contributo interagente si ottiene l'espressione

$$\langle \Phi | \hat{H} | \Phi \rangle_N = N \int \phi^*(\mathbf{r}) \hat{h} \phi(\mathbf{r}) d^3r + \frac{N(N-1)}{2} \int |\phi(\mathbf{r}')|^2 V(\mathbf{r}, \mathbf{r}') |\phi(\mathbf{r})|^2 d^3r d^3r' \quad (2.11)$$

Dove il pedice a primo membro mi indica che sto considerando un sistema di N bosoni.

Data la presenza del vincolo di normalizzazione in (2.9) è necessario applicare il metodo dei moltiplicatori di Lagrange ovvero si cerca la funzione ϕ tale che, sotto la variazione $\phi \rightarrow \delta\phi$, resti stazionario il funzionale

$$F[\phi] = \langle \phi | \hat{H} | \phi \rangle - \lambda \int |\phi(\mathbf{r})|^2 d^3r$$

Imponendo che $\delta F = F[\phi + \delta\phi] - F[\phi] = 0$ si trova l'equazione stazionaria di Hartree:

$$\left[\hat{h} + (N-1) \int |\phi(\mathbf{r}')|^2 V(\mathbf{r}, \mathbf{r}') d^3r' \right] \phi(\mathbf{r}) = \mu \phi(\mathbf{r}) \quad (2.12)$$

dove μ rappresenta l'autovalore dell'operatore a primo membro e si può dimostrare che è proprio il potenziale chimico del sistema. Infatti moltiplicando l'equazione (2.12) per $\phi^*(\mathbf{r})$ e integrando si ottiene

$$\int \phi^*(\mathbf{r}) \hat{h} \phi(\mathbf{r}) d^3r + (N-1) \int |\phi(\mathbf{r}')|^2 V(\mathbf{r}, \mathbf{r}') |\phi(\mathbf{r})|^2 d^3r d^3r' = \mu$$

mentre eseguendo l'operazione $\langle \Phi | \hat{H} | \Phi \rangle_N - \langle \Phi | \hat{H} | \Phi \rangle_{N-1}$ che corrisponde all'energia media necessaria per aggiungere un bosone al sistema (definizione di μ) si arriva allo stesso risultato precedente.

Equazione di Gross-Pitaveskii. Dall'equazione di Hartree stazionaria (2.12) considerando un gas molto diluito tale per cui la distanza media delle particelle sia maggiore del raggio caratteristico del potenziale di interazione si può assumere in prima approssimazione che $V(\mathbf{r})$ abbia la forma di un'interazione di contatto

$$V(\mathbf{r}, \mathbf{r}') = g\delta(\mathbf{r} - \mathbf{r}')$$

dove δ è la funzione delta di Dirac mentre per costruzione $g = \int V(\mathbf{r})d^3r$. In base al segno assunto da g si avrà interazione attrattiva ($g < 0$) o repulsiva ($g > 0$). Sostituendo il potenziale di contatto nella (2.12) si ottiene infine l'equazione di Gross-Pitavevskii stazionaria:

$$\left[-\frac{\hbar^2}{2m}\nabla^2 + U(\mathbf{r}) + (N-1)g|\phi(\mathbf{r})|^2 \right] \phi(\mathbf{r}) = \mu\phi(\mathbf{r}) \quad (2.13)$$

Un caso particolare che sarà esaminato nel paragrafo successivo si ha quando il sistema è contenuto in un volume V e si trova in un ambiente omogeneo ovvero

$$U(\mathbf{r}) = 0$$

In tal caso lo stato fondamentale di minima energia si può ipotizzare costante e quindi indipendente dalle coordinate spaziali: $\phi(\mathbf{r}) = \phi = \text{cost.}$ inserendo questo ansatz in (2.13) si può mostrare il risultato seguente

$$\left[-\frac{\hbar^2}{2m}\nabla^2 + (N-1)g|\phi|^2 \right] \phi = \mu\phi$$

$$\mu = (N-1)g|\phi|^2$$

e per la normalizzazione della funzione d'onda si avrà

$$\int |\phi|^2 d^3r = 1 \Rightarrow \phi = \frac{1}{\sqrt{V}}$$

Sostituendo tali risultati nel funzionale (2.11) (con la condizione per cui $U(\mathbf{r}) = 0$) si ottiene un'energia ed un potenziale chimico:

$$E_N = \langle \Phi | \hat{H} | \Phi \rangle_N = \frac{N(N-1)g}{2V} \approx \frac{N^2g}{2V} = \frac{N}{2}gn_0 \quad (2.14)$$

$$\mu = E_N - E_{N-1} = (N-1)g|\phi|^2 = \frac{(N-1)g}{V} \approx g\frac{N}{V} = gn_0$$

considerando $N \gg 1$ il numero di particelle del condensato mentre n_0 è la densità numerica.

Con un procedimento simile a quello presentato precedentemente si può ricavare l'equazione di Gross-Pitaveskii dipendente dal tempo:

$$i\hbar\frac{\partial}{\partial t}\psi(\mathbf{r}, t) = \left[-\frac{\hbar^2}{2m}\nabla^2 + U(\mathbf{r}) + (N-1)g|\psi(\mathbf{r}, t)|^2 \right] \psi(\mathbf{r}, t) \quad (2.15)$$

2.2 Spettro delle eccitazioni elementari

In questo paragrafo ci proponiamo di ricavare lo spettro di Bogoliubov, ovvero l'energia delle piccole oscillazioni elementari di un condensato rispetto ad una configurazione stazionaria di equilibrio. Consideriamo il caso in cui la funzione d'onda di singola particella ricavata precedentemente si discosti dallo stato stazionario ovvero $\psi(\mathbf{r}, t) = \phi(\mathbf{r})e^{-i\mu t/\hbar}$ per una variazione $\delta\psi(\mathbf{r}, t)$ tale per cui $|\phi(\mathbf{r})| \gg |\delta\psi(\mathbf{r}, t)|$ per ogni valore di (\mathbf{r}, t) .

Considerando lo stato stazionario fondamentale ciò che ricaveremo sarà un'equazione per $\delta\psi(\mathbf{r}, t)$ che dal punto di vista fisico potrà essere interpretata come la funzione d'onda di una particella fittizia, detta quasiparticella.

Consideriamo quindi una funzione d'onda della forma:

$$\psi(\mathbf{r}, t) = (\phi(\mathbf{r}) + \delta\psi(\mathbf{r}, t))e^{-i\mu t/\hbar}$$

Inserita nell'equazione (2.15) e trascurando i termini non lineari in $\delta\phi$ si ottiene l'equazione seguente

$$i\hbar\frac{\partial}{\partial t}\delta\psi = \left[-\frac{\hbar^2}{2m}\nabla^2 + U(\mathbf{r}) + 2(N-1)g|\phi(\mathbf{r})|^2 - \mu \right] \delta\psi + (N-1)g\phi(\mathbf{r})^2\delta\psi^* \quad (2.16)$$

Dove si è omessa la dipendenza da (\mathbf{r}, t) della $\delta\psi$. Tale equazione andrà risolta insieme alla sua complessa coniugata e con essa forma il sistema di equazioni di Bogoliubov-DeGennes.

Considerando ora il caso di ambiente omogeneo ($U(\mathbf{r}) = 0$) si può determinare agevolmente lo spettro delle eccitazioni elementari trasformando il sistema di equazioni differenziali in un sistema algebrico mediante la trasformata di Fourier $\mathcal{F}[f(x)](k)$ passando dalle variabili $(\mathbf{r}, t) \rightarrow (\mathbf{k}, \omega)$ ottenendo così il sistema:

$$\begin{cases} (\hbar\omega + \frac{\hbar^2\mathbf{k}^2}{2m} + A)\mathcal{F}[\delta\psi](\mathbf{k}, \omega) + B\mathcal{F}[\delta\psi^*](\mathbf{k}, \omega) = 0 \\ (\hbar\omega + \frac{\hbar^2\mathbf{k}^2}{2m} + A)\mathcal{F}[\delta\psi^*](\mathbf{k}, \omega) + B^*\mathcal{F}[\delta\psi](\mathbf{k}, \omega) = 0 \end{cases} \quad (2.17)$$

dove $A = 2(N-1)g|\phi|^2 - \mu$ mentre $B = (N-1)g\phi^2$. Per avere soluzioni non banali la matrice associata al sistema deve avere nullo il proprio determinante e ciò porta alla relazione di dispersione di Bogoliubov:

$$\varepsilon_{\mathbf{k}} = \hbar\omega(\mathbf{k}) = \sqrt{\left(\frac{\hbar^2\mathbf{k}^2}{2m} + 2(N-1)g|\phi|^2 - \mu\right)^2 - [(N-1)g|\phi|^2]^2} \quad (2.18)$$

In ambiente omogeneo (sempre considerando temperature prossime allo zero assoluto) valgono le relazioni (2.14) e possiamo riscrivere lo spettro di Bogoliubov nei due modi seguenti:

$$\varepsilon_{\mathbf{k}}(\mu) = \hbar\omega(k) = \sqrt{\frac{\hbar^2\mathbf{k}^2}{2m} \left(\frac{\hbar^2\mathbf{k}^2}{2m} + 2\mu\right)} \quad (2.19)$$

$$\varepsilon_{\mathbf{k}}(n_0) = \hbar\omega(k) = \sqrt{\frac{\hbar^2\mathbf{k}^2}{2m} \left(\frac{\hbar^2\mathbf{k}^2}{2m} + 2gn_0\right)} \quad (2.20)$$

Più in generale si può dimostrare una relazione di dispersione analoga anche per sistemi in cui il potenziale esterno è non nullo ([2, 3]) e in tal caso la densità numerica di particelle avrà una dipendenza dalle coordinate spaziali

$$\varepsilon_{\mathbf{k}}(\mathbf{r}) = \hbar\omega(\mathbf{k}, \mathbf{r}) = \sqrt{\left(\frac{\hbar^2\mathbf{k}^2}{2m} + U(\mathbf{r}) + 2gn_0(\mathbf{r}) - \mu\right)^2 - (gn_0(\mathbf{r}))^2} \quad (2.21)$$

Da quest'ultima espressione possiamo ricavare alcune casistiche in base al sistema considerato e alle approssimazioni utilizzate, in particolare:

1. bosoni non interagenti ($g = 0$): lo spettro delle quasiparticelle si riduce a $\varepsilon_{\mathbf{k}}(\mathbf{r}) = \frac{\hbar^2\mathbf{k}^2}{2m} + U(\mathbf{r}) - \mu$ che è uno spettro energetico di particelle classiche
2. limite di Thomas-Fermi (interazione forte e repulsiva): considerando nell'equazione stazionaria di Gross-Pitaveskii (2.13) il termine $Ng \gg 1$ possiamo trascurare il termine cinetico ($-\frac{\hbar^2}{2m}\nabla^2$) ottenendo un'espressione per $n_0(\mathbf{r}) = N|\phi(\mathbf{r})|^2$ (con $\phi(\mathbf{r})$ stato fondamentale)

$$[U(\mathbf{r}) + gn_0(\mathbf{r})]\phi(\mathbf{r}) = \mu\phi(\mathbf{r})$$

$$n_0(\mathbf{r}) = \begin{cases} \frac{1}{g}[\mu - U(\mathbf{r})] & \text{per } \mu - U(\mathbf{r}) \geq 0 \\ 0 & \text{altrimenti} \end{cases}$$

e per un potenziale centrale $U(\mathbf{r}) = U(r)$ dovrà soddisfare il vincolo

$$N = \int n_0(\mathbf{r})d^3r = \int_0^{r_0} 4\pi r^2 \left(\frac{\mu - U(r)}{g}\right) dr$$

dove r_0 è il valore per cui $\mu - U(r_0) = 0$. In questo modo si fissa il potenziale chimico che avrà una dipendenza dal numero di bosoni condensati $\mu = \mu(N)$

3. bosoni debolmente interagenti: caso in cui si ha $\varepsilon_{\mathbf{k}}(r) \gg gn_0(\mathbf{r})$ e quindi nell'espressione (2.21) si può trascurare l'ultimo termine ottenendo lo spettro di Hartree-Fock:

$$\varepsilon_{\mathbf{k}}(\mathbf{r}) = \frac{\hbar^2 \mathbf{k}^2}{2m} + U(\mathbf{r}) + 2gn_0(\mathbf{r}) - \mu$$

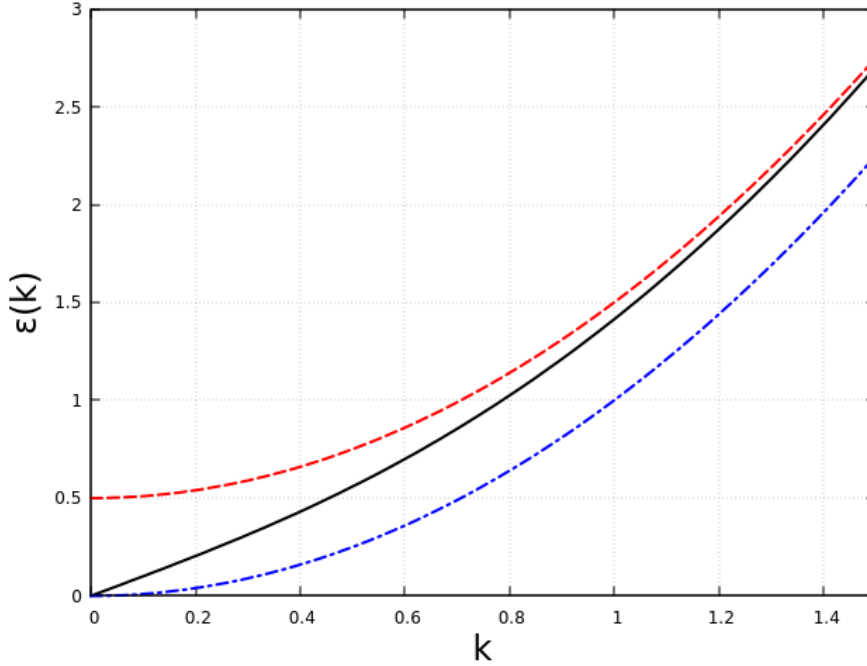


Figura 2.2: La figura rappresenta due differenti spettri per le eccitazioni elementari per un sistema omogeneo ($U(\mathbf{r}) = 0$). La linea continua nera mostra lo spettro di Bogoliubov di espressione (2.19) mentre la linea tratteggiata rossa mostra lo spettro di Hartree-Fock precedentemente introdotto. Una terza curva rappresenta invece lo spettro di una particella libera ovvero $\varepsilon(\mathbf{k}) = \hbar^2 \mathbf{k}^2 / 2m$. Entrambi sono in funzione del vettore d'onda \mathbf{k} opportunamente riscaldato. Per questo grafico sono state usate unità di misura adimensionali per ordinate e ascisse.

2.3 Proprietà termodinamiche

Approssimazione di Hartree-Fock. Usando l'approssimazione di Hartree-Fock, discussa precedentemente, la termodinamica può essere costruita ipotizzando che le quasiparticelle seguano la statistica di Bose-Einstein con un potenziale chimico μ_{QP} nullo (ovvero non vi è un vincolo sul loro numero):

$$\langle n(\mathbf{r}, \mathbf{k}) \rangle = \frac{1}{e^{\varepsilon_{\mathbf{k}}(\mathbf{r})} - 1}$$

dove $\varepsilon_{\mathbf{k}}(\mathbf{r})$ è dato dallo spettro di Hartree-Fock.

Il numero medio di quasiparticelle a temperatura T , in approssimazione semiclassica, si otterrà integrando l'espressione precedente su tutto lo spazio delle posizioni e dei momenti interpretando tale risultato come il numero medio di bosoni negli stati eccitati ovvero N_e [4]. Integrando invece solo nello spazio dei momenti o equivalentemente nello spazio dei \mathbf{k} (vale la relazione $\hbar^2 \mathbf{k}^2 / 2m = \mathbf{p}^2 / 2m$) si otterrà la densità numerica delle particelle negli stati eccitati che denoteremo con n_e .

Con una presenza significativa di bosoni non condensati l'equazione di Gross-Pitaveskii (2.15) non è più corretta poichè non vale più l'ipotesi di Hartree di funzione d'onda fattorizzabile. Un'equazione di Gross-Pitaveskii più generica che tenga conto della presenza di bosoni non condensati e che quindi possa essere usata per temperature T finite può essere derivata con il formalismo della seconda quantizzazione [5] ottenendo la seguente equazione

$$\left[-\frac{\hbar^2}{2m} \nabla^2 + U(\mathbf{r}) + g(n_0(\mathbf{r}) + 2n_e(\mathbf{r})) \right] \phi(\mathbf{r}) = \mu \phi(\mathbf{r}) \quad (2.22)$$

dove le densità che compaiono a primo membro dovranno soddisfare il vincolo $N = \int n_0(\mathbf{r}) + n_e(\mathbf{r}) d^3r = \int n(\mathbf{r}) d^3r$ con N il numero totale di bosoni e $n(\mathbf{r})$ densità numerica totale.

Da questa correzione seguiranno anche correzioni sugli spettri di Bogoliubov e di Hartree-Fock

$$\begin{aligned}\varepsilon_{\mathbf{k}}(\mathbf{r}) &= \sqrt{\left(\frac{\hbar^2 \mathbf{k}^2}{2m} + U(\mathbf{r}) + 2gn(\mathbf{r}) - \mu\right)^2 - (gn_0(\mathbf{r}))^2} \\ \varepsilon_{\mathbf{k}}(\mathbf{r}) &= \frac{\hbar^2 \mathbf{k}^2}{2m} + U(\mathbf{r}) + 2gn(\mathbf{r}) - \mu = \frac{\hbar^2 \mathbf{k}^2}{2m} + W(\mathbf{r})\end{aligned}\quad (2.23)$$

Dove riconosciamo in $W(\mathbf{r}) = U(\mathbf{r}) + 2gn(\mathbf{r}) - \mu$ un potenziale efficace.

Proprietà termodinamiche. Possiamo ora passare al calcolo effettivo di alcune proprietà del gas interagente come la frazione di condensato e la temperatura critica.

Cominciamo con la densità numerica di particelle negli stati eccitati ottenendo un risultato generale (per un sistema in 3D) [5, 6]

$$\begin{aligned}n_e(\mathbf{r}) &= \frac{1}{(2\pi)^3} \int \frac{1}{e^{\beta[\frac{\hbar^2 \mathbf{k}^2}{2m} + W(\mathbf{r})]} - 1} d^3k = \\ &= \left(\frac{m}{2\pi\hbar^2\beta}\right)^{3/2} f_{3/2}^+(e^{-\beta W(\mathbf{r})}) = \left(\frac{m}{2\pi\hbar^2\beta}\right)^{3/2} f_{3/2}^+(e^{-\beta(U(\mathbf{r}) + 2gn(\mathbf{r}) - \mu)})\end{aligned}\quad (2.24)$$

Lavorando a temperature $T \geq T_c$ la densità numerica totale $n(\mathbf{r})$ (nel limite termodinamico) coincide con la densità numerica degli stati eccitati $n_e(\mathbf{r})$.

Essendo $f_m^+(x)$ ben definita nel dominio $x \in [0, 1]$ otteniamo una relazione per il potenziale chimico che dovrà soddisfare la disuguaglianza

$$\mu \leq U(\mathbf{r}) + 2gn(\mathbf{r}) \quad \forall \mathbf{r} \quad (2.25)$$

Nel caso di gas ideale in ambiente omogeneo si ritrova il risultato (2.4) ponendo in (2.24)

$$\begin{aligned}U(\mathbf{r}) &= 0 & g &= 0 & W(\mathbf{r}) &= -\mu \\ n_e &= \left(\frac{m}{2\pi\hbar^2\beta}\right)^{3/2} f_{3/2}^+(e^{\beta\mu})\end{aligned}$$

dove scompare la dipendenza dalle coordinate spaziali da n_e poichè in ambiente omogeneo si considera la densità uniforme.

Gas debolmente interagente in approssimazione di Hartree-Fock. Trattiamo ora il caso di un gas 3D debolmente interagente contenuto in un volume V in ambiente omogeneo utilizzando sempre l'approssimazione di Hartree-Fock.

Considerando quindi l'espressione (2.24) con

$$U(\mathbf{r}) = 0 \quad g \neq 0 \quad W(\mathbf{r}) = 2gn(\mathbf{r}) - \mu$$

possiamo ipotizzare, come nel caso ideale non interagente, che in ambiente omogeneo la densità numerica $n(\mathbf{r})$ sia indipendente dalle coordinate spaziali ovvero sia una densità uniforme ottenendo un'espressione per il numero di particelle negli stati eccitati

$$N_e = n_e V = V \left(\frac{m}{2\pi\hbar^2\beta}\right)^{3/2} f_{3/2}^+(e^{-\beta(2gn - \mu)})$$

E' possibile ora ripetere l'analisi svolta nel primo paragrafo ottenendo la medesima espressione per la temperatura critica e la frazione di condensato, con la sola differenza che la condizione di criticità è raggiunta a $\mu = 2gn$. Questo risultato ci dice che l'interazione fra particelle non sembrerebbe avere effetti rilevanti sulle proprietà di un sistema di bosoni liberi.

Capitolo 3

Gas di bosoni in trappola armonica

Trattiamo ora il caso di un sistema di bosoni identici confinati da un potenziale armonico. Essi saranno in equilibrio termico con un reservoir a temperatura T e il sistema sarà studiato con il formalismo grancanonico.

Affronteremo il caso bidimensionale e tridimensionale con una trappola armonica isotropa. Inizialmente il sistema sarà costituito da particelle non interagenti e dopo averne ricavato le grandezze termodinamiche più importanti affronteremo il caso di un sistema 3D interagente.

3.1 Sistema non interagente tridimensionale

Cominciamo considerando N bosoni di massa m in una trappola armonica 3D isotropa caratterizzati dunque da un'Hamiltoniana

$$\hat{H}_N = \sum_{i=1}^N \left[\frac{\hat{\mathbf{P}}_i^2}{2m} + \frac{1}{2}m\omega^2 \hat{\mathbf{R}}_i^2 \right] = \sum_{i=1}^N \hat{h}_i$$

dove $\hat{\mathbf{R}} = (\hat{X}, \hat{Y}, \hat{Z})$.

Gli autovalori dell'Hamiltoniana di singola particella \hat{h}_i sono della forma

$$\varepsilon_{n_x, n_y, n_z} = \hbar\omega \left(\frac{3}{2} + n_x + n_y + n_z \right) \quad n_i \in \mathbf{N}$$

e con autostati di singola particella: $|n_x, n_y, n_z\rangle$.

Adottando il formalismo del numero di occupazione possiamo scrivere sinteticamente gli stati di N particelle:

$$|[n_{n_x, n_y, n_z}]\rangle = |n_{000}, n_{001}, \dots\rangle \quad \sum_{(n_x, n_y, n_z) \in \mathbf{N}^3} n_{n_x n_y n_z} = N \quad (3.1)$$

dove n_{n_x, n_y, n_z} indica la quantità di bosoni occupanti lo stato $|n_x, n_y, n_z\rangle$.

Per i nostri scopi ci interessa sapere come agiscono gli operatori su questi stati ed è semplice mostrare come l'operatore \hat{H}_N fornisca l'autovalore

$$E = \sum_{(n_x, n_y, n_z) \in \mathbf{N}^3} n_{n_x n_y n_z} \varepsilon_{n_x n_y n_z}$$

L'operatore numero totale \hat{N} invece mi fornirà il numero totale di particelle del sistema ovvero N . Ora ci è più conveniente calcolare la funzione di partizione grancanonica dalla quale ricaveremo tutte le proprietà termodinamiche del sistema.

Iniziamo quindi calcolandola in maniera esplicita [1]

$$\begin{aligned}
\mathcal{Z} &= \text{Tr}[e^{-\beta(\hat{H}_N - \mu\hat{N})}] = \\
&= \sum_{N=0}^{\infty} \sum_{\{n_{n_x n_y n_z}\}} e^{-\beta \sum_{n_x, n_y, n_z=0}^{\infty} (\varepsilon_{n_x n_y n_z} - \mu) n_{n_x n_y n_z}} = \\
&= \prod_{(n_x, n_y, n_z) \in \mathbf{N}^3} \sum_{n_{n_x n_y n_z}=0}^{\infty} [e^{-\beta(\varepsilon_{n_x n_y n_z} - \mu)}]^{n_{n_x n_y n_z}} = \\
&= \prod_{(n_x, n_y, n_z) \in \mathbf{N}^3} \frac{1}{1 - e^{-\beta(\varepsilon_{n_x n_y n_z} - \mu)}}
\end{aligned} \tag{3.2}$$

dove nella seconda riga la seconda sommatoria che somma su tutte le possibile configurazioni dei numeri di occupazione presenta il vincolo (3.1) il quale grazie al formalismo grancanonico viene rimosso dalla prima sommatoria che fa variare il numero di particelle nel sistema. Il risultato ottenuto è del tutto analogo a quello visto nell'espressione (2.1).

Adottando un approssimazione semiclassica considerando dunque un sistema con un numero N di particelle molto grande e quindi potendo considerare infinitesime le spazature energetiche si può porre l'energia dello stato fondamentale nulla e dunque un limite superiore al potenziale chimico che sarà $\mu < 0$. Un risultato simile deriva quindi anche sul numero medio di bosoni ovvero:

$$\langle N \rangle = \frac{z}{1-z} + \sum_{\substack{(n_x, n_y, n_z) \in \mathbf{N}^3 \\ (n_x, n_y, n_z) \neq (0,0,0)}}^{\infty} \frac{1}{e^{\beta(\varepsilon_{n_x n_y n_z} - \mu)} - 1} \tag{3.3}$$

Proprietà termodinamiche. Possiamo ora calcolare il potenziale grancanonico Ω e ricavarci i valori medi di alcune grandezze. In approssimazione semiclassica ($N \gg 1$ e $k_B T \gg \hbar\omega$) le sommatorie potranno essere scambiate con degli integrali dandoci la possibilità di ottenere risultati analitici.

$$\begin{aligned}
\Omega(\beta, \mu, \omega) &= -\frac{1}{\beta} \ln(\mathcal{Z}) = \frac{1}{\beta} \sum_{(n_x, n_y, n_z) \in \mathbf{N}^3} \ln[1 - e^{-\beta(\varepsilon_{n_x n_y n_z} - \mu)}] \simeq \\
&\simeq \frac{1}{\beta} \int_0^{\infty} \int_0^{\infty} \int_0^{\infty} \ln[1 - e^{-\beta[\hbar\omega(n_x + n_y + n_z) - \mu]}] dn_x dn_y dn_z = \\
&= \frac{1}{\beta} \left(\frac{1}{\hbar\omega\beta} \right)^3 \int_0^{\infty} \int_0^{\infty} \int_0^{\infty} \ln[1 - e^{\beta\mu} e^{-(x_1 + x_2 + x_3)}] dx_1 dx_2 dx_3
\end{aligned} \tag{3.4}$$

dove nella terza riga si ha la sostituzione $\beta\hbar\omega n_i = x_i$.

Risolvendo l'integrale utilizzando per il logaritmo la sua espansione in serie ed esplicitando la fugacità z si ottiene infine

$$\Omega = -\frac{1}{\beta} \left(\frac{1}{\hbar\omega\beta} \right)^3 \sum_{n=1}^{\infty} \frac{z^n}{n^4} = -\frac{1}{\beta} \left(\frac{1}{\hbar\omega\beta} \right)^3 f_4^+(z)$$

dove riprendiamo il concetto di funzione di Bose introdotto in (2.5).

Possiamo ora ricavare la termodinamica partendo dalla procedura standard di derivazione rispetto alle variabili del sistema.

$$N = -\frac{\partial\Omega}{\partial\mu} = \left(\frac{1}{\beta\hbar\omega} \right)^3 f_3^+(z) \tag{3.5}$$

$$S = -\frac{\partial\Omega}{\partial T} = k_B \left(\frac{1}{\beta\hbar\omega} \right)^3 [4f_4^+(z) + \beta\mu f_3^+(z)] \tag{3.6}$$

$$E = \Omega + \mu N + ST = \frac{3}{\beta} \left(\frac{1}{\beta\hbar\omega} \right)^3 f_4^+(z) \tag{3.7}$$

Con la termodinamica standard si ha $\Omega = E - \mu N - ST = -PV$ dove l'ultima uguaglianza indica un prodotto tra una variabile intensiva (P) ed una estensiva (V). Nel sistema affrontato nel primo paragrafo (buca di potenziale infinita) riconosciamo le due grandezze come una pressione ed un volume rispettivamente, ma nel caso di un potenziale armonico, quindi non omogeneo, la caratterizzazione delle due quantità deve essere affrontata con delicatezza dal momento che in tale sistema non vi è un volume fissato e viene a mancare anche il concetto standard di pressione. Servirà quindi ricercare delle grandezze che ne siano l'analogo.

Osserviamo che la frequenza ω della trappola è una variabile termodinamica: valutando infatti l'espressione (3.5), mantenendo fisso N e facendo variare ω si ha che il sistema subisce espansioni e compressioni adiabatiche facendo variare la sua temperatura.

Un'altra osservazione che possiamo fare sempre guardando la (3.5) è che la grandezza ω^{-3} è estensiva poichè cambiando $N \rightarrow \lambda N$ ($\lambda > 0$) a temperatura e potenziale chimico fissi deve succedere che: $\omega^{-3} \rightarrow \lambda \omega^{-3}$. Tali ragionamenti sono validi anche per le espressioni (3.7), (3.6) siccome sia l'energia interna E che l'entropia S sono grandezze estensive.

Possiamo quindi riconoscere in ω^{-3} l'analogo di un volume che chiameremo volume armonico \mathcal{V} [7]. Ne segue quindi la derivazione di una pressione armonica

$$\mathcal{P} = -\frac{\partial \Omega}{\partial \mathcal{V}} = -\frac{\Omega}{\mathcal{V}} = \frac{1}{\beta} \left(\frac{1}{\beta \hbar} \right)^3 f_4^+(z)$$

Sia \mathcal{V} che \mathcal{P} non hanno le dimensioni di un volume e di una pressione ma ciò è irrilevante poichè siamo interessati al loro prodotto che invece ha le corrette dimensioni di un'energia.

Da queste espressioni si può derivare una funzione di stato della forma $\mathcal{P} = \mathcal{P}(N, \mathcal{V}, T)$ e mostrare come nel limite di alte temperature (cioè quando $z \rightarrow 0$) si ritorni al caso di una gas ideale classico confinato armonicamente. Usando infatti le espressioni trovate per N ed E otteniamo

$$\begin{aligned} \mathcal{P} &= \frac{N}{\beta \mathcal{V}} \frac{f_4^+(z)}{f_3^+(z)} \rightarrow \frac{N k_B T}{\mathcal{V}} \quad \text{per } z \rightarrow 0 \\ E &= \frac{3N}{\beta} \frac{f_4^+(z)}{f_3^+(z)} = 3\mathcal{P}\mathcal{V} \end{aligned}$$

questo poichè le funzioni bosoniche ad alti valori di T (ovvero nel limite classico) assumono lo stesso valore $f_m^+(z) \simeq z$.

Temperatura critica e frazione di condensato. Ricaviamo ora, seguendo la procedura presentata nel primo paragrafo, la temperatura critica e la frazione di condensato del gas

$$N_e = \begin{cases} \left(\frac{1}{\beta \hbar \omega} \right)^3 f_3^+(z) = N & \text{se } T > T_c \\ \left(\frac{1}{\beta \hbar \omega} \right)^3 f_3^+(1) \leq N & \text{se } T \leq T_c \end{cases}$$

La temperature critica si ottiene dalla disuguaglianza precedente ed è

$$T_c^0 = \frac{\hbar \omega}{k_B} \left(\frac{N}{\zeta(3)} \right)^{1/3} = \frac{\hbar}{k_B} \left(\frac{N/\mathcal{V}}{\zeta(3)} \right)^{1/3} \quad (3.8)$$

con $\zeta(3) \simeq 1.202$

Al di sotto di tale valore il potenziale si fissa a $\mu = 0$ e la fugacità di conseguenza diviene unitaria e si ha occupazione macroscopica dello stato di singola particella $|n_x, n_y, n_z\rangle = |0, 0, 0\rangle$.

Per la frazione condensata siccome a $T = T_c$ abbiamo l'uguaglianza $N = N_e$ si avrà

$$\frac{\langle n_{000} \rangle}{N} = 1 - \frac{N_e}{N} = 1 - \frac{\left(\frac{1}{\beta \hbar \omega} \right)^3 f_3^+(1)}{\left(\frac{1}{\beta_c \hbar \omega} \right)^3 f_3^+(1)} = 1 - \left(\frac{T}{T_c^0} \right)^3 \quad (T \leq T_c) \quad (3.9)$$

Tale risultato è valido nell'ipotesi semiclassica e con $k_B T \gg \hbar\omega$ e $N \gg 1$.

Agli stessi risultati si può arrivare usando anche l'espressione (2.24) ricavata con lo spettro di Hartree-Fock impostando

$$U(\mathbf{r}) = \frac{1}{2}m\omega^2\mathbf{r}^2 \quad g = 0 \quad W(\mathbf{r}) = \frac{1}{2}m\omega^2\mathbf{r}^2 - \mu$$

e ottenendo per la densità numerica di particelle negli stati eccitati l'espressione

$$n_e(\mathbf{r}) = \left(\frac{m}{2\pi\hbar^2\beta}\right)^{3/2} f_{3/2}^+(e^{-\beta W(\mathbf{r})}) = \left(\frac{m}{2\pi\hbar^2\beta}\right)^{3/2} f_{3/2}^+(e^{-\beta(\frac{1}{2}m\omega^2\mathbf{r}^2 - \mu)})$$

che integrata sul volume restituisce il valore precedentemente calcolato

$$N_e = \int n_e(\mathbf{r})d^3r = \left(\frac{1}{\beta\hbar\omega}\right)^3 f_3^+(z)$$

da cui segue la derivazione della temperatura critica e della frazione di condensato.

Finite size effect. Un'analisi più dettagliata del problema consiste nella cosiddetta correzione da "finite size" ovvero considerando un numero N finito di bosoni.

Con tale considerazione si ha che a temperature inferiori a quella critica il potenziale chimico assume il valore

$$\mu = \varepsilon_{000} = \frac{3}{2}\hbar\omega$$

In approssimazione semiclassica tale valore veniva reso nullo dato il grande numero di particelle N che costituiva il sistema. Considerando quindi un valore finito per N si può sviluppare al primo ordine $z = e^{\beta\mu} \simeq 1 + \beta\mu = 1 + (3/2)\beta\hbar\omega$ e sostituendo tale valore in $f_3^+(z)$ (estendendo quindi il dominio oltre $z = 1$) si ottiene per il numero medio di particelle l'espressione

$$N = \langle n_{000} \rangle + N_e = \langle n_{000} \rangle + \left(\frac{1}{\beta_c\hbar\omega}\right)^3 (\zeta(3) + \frac{3}{2}\beta_c\hbar\omega\zeta(2))$$

con $\zeta(2) = \pi^2/6 \simeq 1.644$

Si può ricavare una frazione di condensato più corretta dipendente da $N^{-1/3}$. Rendendo esplicito nel seguente risultato la frazione T/T_c^0 con T_c^0 data da (3.8) si ottiene

$$\frac{\langle n_{000} \rangle}{N} = 1 - \left(\frac{T}{T_c^0}\right)^3 - \frac{3}{2} \frac{\zeta(2)}{\zeta(3)^{2/3}} N^{-1/3} \left(\frac{T}{T_c^0}\right)^2 \quad (T \leq T_c^0) \quad (3.10)$$

Come ci si può aspettare, ad alti valori di N la correzione diventa sempre meno significativa fino a scomparire nel limite semiclassico.

Dalla correzione della frazione segue una correzione sulla temperatura critica. Per $T = T_c^0$ si avrebbe una frazione di condensato nulla, si può quindi pensare di annullare il membro di sinistra della (3.10) e scrivere il rapporto $T/T_c^0 = 1 + \delta T_c^0/T_c^0$ (con $T_c^0 \gg \delta T_c^0$), stiamo considerando quindi una temperatura critica più corretta della forma $T_c = T_c^0 + \delta T_c^0$. Risolvendo al primo ordine l'equazione ottenuta in $\delta T_c^0/T_c^0$ si ricava la correzione per la temperatura critica ([2, 8])

$$\frac{\delta T_c^0}{T_c^0} = -\frac{1}{2} \left(\frac{1}{1 + \frac{\zeta(3)^{2/3}}{\zeta(2)} N^{1/3}} \right) \simeq -\frac{\zeta(2)}{2\zeta(3)^{2/3}} N^{-1/3} \quad (N \gg 1) \quad (3.11)$$

Notiamo come il numero finito N di bosoni porta ad un abbassamento della temperatura critica e con il ragionamento precedente si vede come tale correzione diventi sempre meno significativa man mano che N aumenta fino a scomparire nel limite semiclassico.

Il confronto delle due espressioni per la frazione di condensato (3.9) (3.10) è mostrato nella figura 3.1 mentre l'andamento della correzione alla temperatura critica in funzione del numero di particelle si può trovare in figura 3.3.

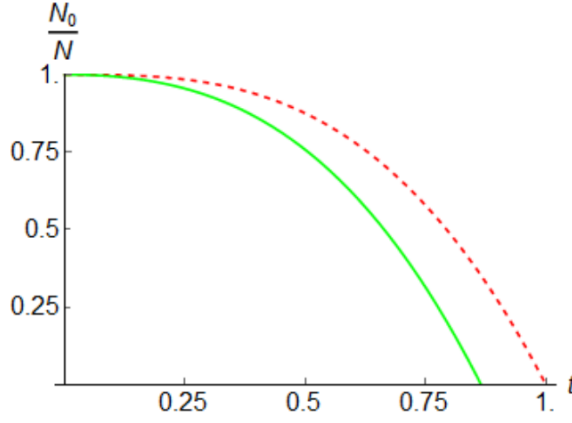


Figura 3.1: la figura mostra la frazione di condensato in funzione del rapporto $t = T/T_c^0$ nel caso di potenziale armonico isotropo. La curva tratteggiata rappresenta l'espressione (3.9); la curva continua di espressione (3.10) tiene conto della correzione di finite size con $N = 100$

3.2 Sistema non interagente bidimensionale

Trattiamo ora il sistema bidimensionale sottoposto ad un potenziale armonico della forma

$$V(\hat{X}, \hat{Y}) = 1/2m\omega^2(\hat{X}^2 + \hat{Y}^2)$$

con un'Hamiltoniana di particella singola che avrà autovalori

$$\varepsilon_{n_x, n_y} = \hbar\omega(1 + n_x + n_y) \quad n_i \in \mathbf{N}$$

I risultati che si ottengono usando il formalismo grancanonico sono del tutto analoghi a quelli ottenuti nel caso di confinamento tridimensionale. Riportiamo quindi il risultato ottenibile per la funzione di partizione

$$\mathcal{Z} = \prod_{(n_x, n_y) \in \mathbf{N}^2} \frac{1}{1 - e^{-\beta(\varepsilon_{n_x, n_y} - \mu)}} \quad (3.12)$$

Anche in questo caso in approssimazione semiclassica possiamo considerare infinitesimi i salti energetici e porre nulla l'energia dello stato fondamentale. Sostituendo sommatorie con integrali si ricava quindi il potenziale grancanonico e il numero medio di particelle

$$\Omega = -\frac{1}{\beta} \left(\frac{1}{\beta\hbar\omega} \right)^2 \sum_{n=1}^{\infty} \frac{z^n}{n^3} = -\frac{1}{\beta} \left(\frac{1}{\beta\hbar\omega} \right)^2 f_3^+(z) \quad (3.13)$$

$$N = -\frac{\partial\Omega}{\partial\mu} = \left(\frac{1}{\beta\hbar\omega} \right)^2 \sum_{n=1}^{\infty} \frac{z^n}{n^2} = \left(\frac{1}{\beta\hbar\omega} \right)^2 f_2^+(z) \quad (3.14)$$

Da cui possiamo ricavare agevolmente la temperatura critica e la frazione di condensato.

$$T_c^0 = \frac{\hbar\omega}{k_B} \sqrt{\frac{N}{\zeta(2)}} \quad (3.15)$$

$$\frac{\langle n_{00} \rangle}{N} = 1 - \left(\frac{T}{T_c^0} \right)^2 \quad (T \leq T_c^0) \quad (3.16)$$

E' importante notare come nonostante il sistema sia bidimensionale la condensazione avvenga ad una temperatura finita. Questo fenomeno non è invece osservabile nel caso bidimensionale di un gas di Bose in ambiente omogeneo (nel limite termodinamico). La temperatura finita di condensazione nel sistema bidimensionale è dovuto alla presenza di un potenziale di confinamento.

Come nel caso 3D anche nel caso bidimensionale si può arrivare agli stessi risultati applicando direttamente l'espressione (2.24) adattata al modello in 2D. L'integrazione va fatta su uno spazio dei \mathbf{k} bidimensionale e si arriva ad un'espressione analoga per la densità numerica

$$n_e(\mathbf{r}) = \frac{1}{(2\pi)^2} \int \frac{1}{e^{\beta[\frac{\hbar^2 \mathbf{k}^2}{2m} + W(\mathbf{r})]} - 1} d^2 k = \frac{m}{2\pi \hbar^2 \beta} f_1^+(e^{-\beta W(\mathbf{r})}) \quad (3.17)$$

dove il potenziale efficace è $W(\mathbf{r}) = (1/2)m\omega^2 \mathbf{r}^2 - \mu$.

L'integrazione di $n_e(\mathbf{r})$ nello spazio bidimensionale porta al risultato (3.14).

Condensazione in 2D. Per i sistemi in dimensioni inferiori a 3 il teorema di Hohenberg-Mermin-Wagner (BHMW) stabilisce l'impossibilità di formazione di ordine a lungo raggio (Long-Range-Order LRO). Dunque la condensazione di Bose-Einstein in un piano omogeneo infinito è proibita a temperature finite. Anche in sistemi 3D ciò che si osserva sperimentalmente non è mai una vera transizione di fase allo stato di Bose-Einstein poichè, i risultati sul fenomeno della condensazione sono ottenuti nel limite termodinamico, un sistema fisico reale aderente a questo limite dovrebbe essere caratterizzato da un numero di particelle e un volume infiniti, tali che la densità numerica di particelle si mantenga però finita e questo è irrealizzabile. Quello che si osserva è comunque un'occupazione macroscopica del livello inferiore di energia che aumenta al diminuire della temperatura. Ciò che afferma il teorema BHMW è che non può esserci condensazione nello stato con numero d'onda $\mathbf{k} = \mathbf{0}$, ossia con momento nullo. Allo stesso tempo un altro teorema, il teorema di Chester-Penrose-Onsager afferma che non può esserci condensazione in un qualsiasi stato di particella singola, a meno che questo si verifichi in uno stato con $\mathbf{k} = \mathbf{0}$. Tale teorema richiede che la densità sia finita ovunque nel sistema.

Tuttavia nel caso del gas bidimensionale confinato armonicamente, nel limite termodinamico, la densità numerica negli stati eccitati diventa infinita nell'origine dell'oscillatore (come mostrato in figura 3.2), da cui l'inapplicabilità del teorema stesso. Ne segue che, benchè non ci sia BEC nello spazio dei momenti, cioè nello stato con momento nullo, questa si verifica nello spazio vero e proprio, nello stato di energia minima.

In conclusione, nonostante i sistemi finiti non presentino una vera transizione di fase, in essi può verificarsi una pseudo-transizione nella quale una frazione finita delle particelle totali occupa lo stato a energia minima se la temperatura scende al di sotto di un valore. Queste transizioni possono aver luogo per qualsiasi numero di dimensioni, senza che siano violati i teoremi.

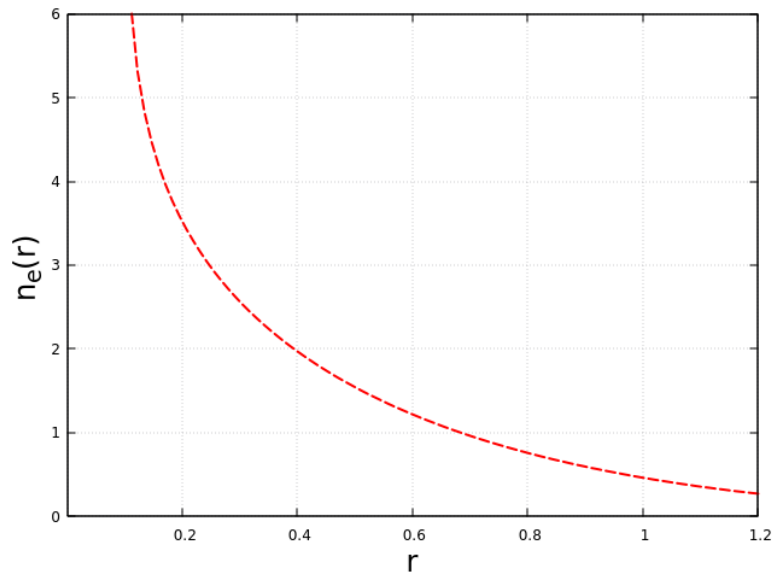


Figura 3.2: La figura rappresenta l'andamento della densità numerica degli stati eccitati di espressione (3.17) in funzione della distanza dall'origine. Possiamo notare come in corrispondenza dell'origine abbiamo una divergenza per la densità. Per questo grafico sono state usate unità adimensionali per ordinate e ascisse.

3.3 Sistema interagente tridimensionale

Cominciamo ora a trattare il caso di un sistema 3D di bosoni interagenti confinati armonicamente mediante trappola armonica isotropa, concentrandoci sul calcolo della temperatura critica e più specificamente sulla correzione da apportare a T_c^0 .

In questo caso risulta comodo calcolare il numero di particelle non condensate integrando l'espressione (2.24). L'integrazione analitica risulta impossibile data la dipendenza dalle coordinate spaziali di $n(\mathbf{r})$.

Correzione di T_c^0 in approssimazione di Hartree-Fock. Coerentemente con l'approssimazione di Hartree-Fock di gas debolmente interagente utilizzata per ricavare (2.24) è ragionevole supporre che $g \rightarrow 0$ e che quindi la temperatura critica di transizione sia prossima alla temperatura critica del caso non interagente calcolata in (3.8). In approssimazione semiclassica inoltre è possibile considerare il potenziale chimico quasi nullo. Con queste ipotesi si può pensare di espandere in serie di Taylor la densità numerica $n_e(\mathbf{r})$ attorno allo stato

$$\mathcal{S} = (g = 0, T = T_c^0, \mu = 0)$$

ottenendo un'espressione approssimata per la densità numerica che sarà possibile integrare analiticamente [6, 2]

$$n_e(\mathbf{r}) \simeq n_e(\mathbf{r}) \Big|_s + \frac{\partial n_e(\mathbf{r})}{\partial g} \Big|_s g + \frac{\partial n_e(\mathbf{r})}{\partial \mu} \Big|_s \mu + \frac{\partial n_e(\mathbf{r})}{\partial T} \Big|_s (T - T_c^0)$$

L'integrazione su tutto lo spazio tridimensionale porta all'espressione

$$N_e \simeq N - \frac{2\mathcal{A}}{\zeta(3)} \left(\frac{mk_B T_c^0}{2\pi\hbar^2} \right)^{3/2} \frac{N}{k_B T_c^0} g + \frac{\zeta(2)}{\zeta(3)} \frac{N}{k_B T_c^0} \mu + 3 \frac{N}{T_c^0} (T - T_c^0) \quad (3.18)$$

dove \mathcal{A} è una costante numerica

$$\mathcal{A} = \sum_{m=1}^{+\infty} \sum_{n=1}^{+\infty} \frac{1}{m^{1/2} (n(m+n))^{3/2}} \simeq 1.207$$

Da questa espressione possiamo ricavare lo shift della temperatura critica considerando $T = T_c^0 + \delta T_c^0$ (con $T_c^0 \gg \delta T_c^0$) e $N \approx N_e$. In maniera più accurata considerando quindi anche un numero di bosoni N finito possiamo includere una correzione da "finite size". Infatti si può mostrare come a temperature prossime a quella critica il potenziale chimico assume il valore dato dalla (2.25)

$$\mu = \frac{3}{2} \hbar\omega + 2gn(\mathbf{0})$$

la densità numerica che compare al secondo membro può essere riscritta usando l'espressione (2.24) poichè lavorando a temperature $T \geq T_c^0$ le due quantità coincidono. Alla (2.24) si deve sostituire al potenziale chimico l'espressione appena trovata che di conseguenza annulla il potenziale efficace $W(\mathbf{r})$ ottenendo l'espressione

$$n(\mathbf{0}) = \left(\frac{mk_B T_c^0}{2\pi\hbar^2} \right)^{3/2} \zeta(3/2)$$

Sostituendo le espressioni appena trovate per μ e per $n(\mathbf{0})$ in (3.18) troviamo la correzione alla temperatura critica che terrà conto sia degli effetti di "finite size" che degli effetti di interazione ([2, 6, 8])

$$\frac{T - T_c^0}{T_c^0} = \frac{\delta T_c^0}{T_c^0} = -\frac{\zeta(2)}{2\zeta(3)^{2/3}} N^{-1/3} - \frac{2|\zeta(2)\zeta(3/2) - \mathcal{A}|}{3\zeta(3)^{7/6}} \left(\frac{m\omega}{2\pi\hbar} \right)^{3/2} \frac{g}{\hbar\omega} N^{1/6} \quad (3.19)$$

Dall'espressione appena ricavata si vede che se $g > 0$ (interazione repulsiva) la temperatura critica si abbassa e viceversa: risultato ragionevole pensando al fatto che se i bosoni si respingono tenderanno ad espandersi maggiormente e dunque per condensarli sarà richiesta una temperatura più bassa. Se invece $g = 0$ (assenza di interazione) ritroviamo il risultato (3.11) che è il contributo correttivo di "finite size". I risultati sono riportati in figura 3.3 dove si possono notare i diversi andamenti nelle diverse casistiche di interazione repulsiva, attrattiva e nulla.

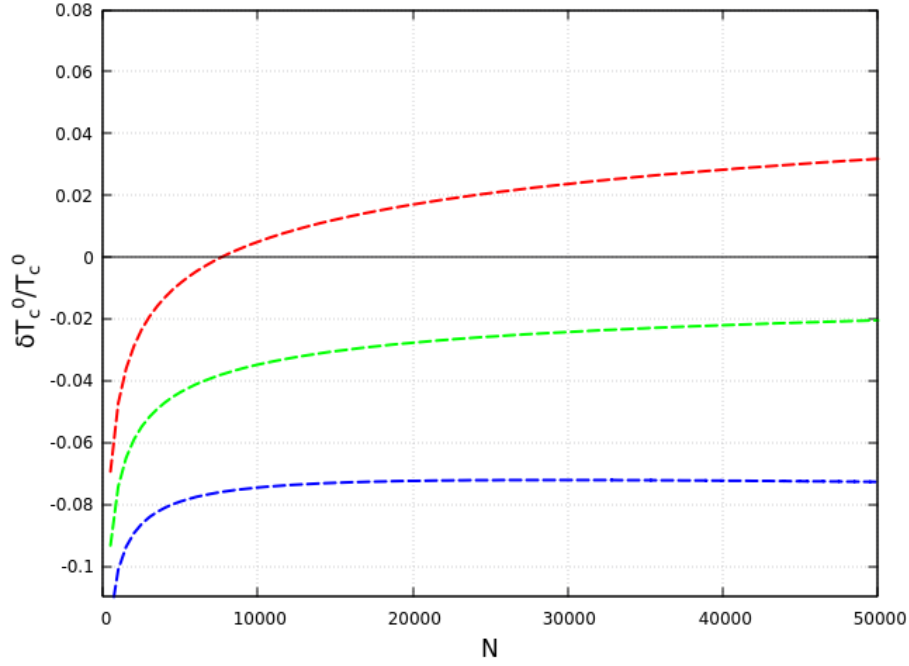


Figura 3.3: Il grafico mostra l'andamento di $\delta T_c^0 / T_c^0$ in funzione del numero di particelle N in tre casi: $g > 0$ (linea blu), $g = 0$ (linea verde) e $g < 0$ (linea rossa).

3.4 Sistema interagente bidimensionale

Trattiamo ora il caso di un sistema 2D di bosoni interagenti confinati armonicamente mediante trappola armonica isotropa. Analogamente al problema precedente ci soffermeremo sulla temperatura critica.

La peculiarità dei sistemi bidimensionali, soggetti al teorema BHMW, li rende un interessante oggetto di indagine teorica e sperimentale. La trattazione di questo argomento in questa tesi sarà affrontato nei limiti offerti dalla meccanica quantistica tradizionale e, in particolar modo, nei limiti del modello utilizzato per trattare i sistemi finora affrontati.

Sempre lavorando in approssimazione di Hartree-Fock Diversamente dal caso tridimensionale non possiamo seguire la medesima strada espandendo in serie di Taylor la densità numerica $n_e(\mathbf{r})$ attorno allo stato $\mathcal{S} = (g = 0, T = T_c^0, \mu = 0)$ poichè l'integrazione sullo spazio bidimensionale comporterebbe termini divergenti difficilmente trattabili; dobbiamo quindi seguire un'altra strada.

Approssimazione di Thomas-Fermi e metodi iterativi. La trattazione di questo argomento seguirà i ragionamenti proposti in [9, 10]. Consideriamo un sistema di N bosoni a temperatura finita T . A descriverne la dinamica è l'equazione corretta di Gross-Pitaveskii (2.22)

$$\left[-\frac{\hbar^2}{2m} \nabla^2 + U(\mathbf{r}) + g(n_0(\mathbf{r}) + 2n_e(\mathbf{r})) \right] \phi(\mathbf{r}) = \mu \phi(\mathbf{r})$$

dove n_e rappresenta la densità numerica della parte non condensata mentre n_0 di quella condensata. La parte non condensata viene trattata come parte non interagente sottoposta ad un potenziale efficace

$$W(\mathbf{r}) = U(\mathbf{r}) + g(2n_0(\mathbf{r}) + 2n_e(\mathbf{r})) \quad (3.20)$$

e come avevamo visto nei paragrafi precedenti la densità numerica non condensata sarà

$$n_e(\mathbf{r}) = \frac{1}{(2\pi)^2} \int \frac{1}{e^{\beta[\frac{\hbar^2 \mathbf{k}^2}{2m} + W(\mathbf{r}) - \mu]} - 1} d^2 k \quad (3.21)$$

mentre il potenziale chimico sarà fissato dal numero totale di particelle

$$N = \int n_0(\mathbf{r}) + n_e(\mathbf{r}) d^2 r = N_0 + \int n_e(\mathbf{r}) d^2 r = N_0 + \int_0^\infty \frac{\rho(E)}{e^{\beta(E-\mu)} - 1} dE \quad (3.22)$$

dove nell'ultimo passaggio abbiamo sfruttato il fatto di poter scrivere il numero di particelle come un integrale sulla densità degli stati $\rho(E)$ pesata dalla distribuzione di Bose-Einstein. La temperatura critica sarà la soluzione di questa equazione ponendo N_0 e μ nulli.

La densità degli stati che conta il numero di stati in funzione dell'energia E nel limite semiclassico può essere scritta come [9]

$$\rho(E) = \frac{m}{2\pi\hbar^2} \int_{W(\mathbf{r}) < E} d^2r \quad (3.23)$$

Per questa trattazione considereremo un'interazione repulsiva ($g > 0$) e il potenziale di confinamento avrà la forma di un potenziale armonico isotropo $U(\mathbf{r}) = (1/2)m\omega^2\mathbf{r}^2$.

Come già descritto in precedenza, nell'approssimazione di Thomas-Fermi si trascura nell'equazione il termine cinetico riducendo l'equazione differenziale in una algebrica da cui si potrà ottenere un'espressione immediata per la densità $n_0(\mathbf{r})$

$$\begin{aligned} [U(\mathbf{r}) + g(n_0(\mathbf{r}) + 2n_e(\mathbf{r}))] \phi(\mathbf{r}) &= \mu\phi(\mathbf{r}) \\ n_0(\mathbf{r}) &= \frac{\mu - U(\mathbf{r}) - 2gn_e(\mathbf{r})}{g} \Theta(\mu - U(\mathbf{r}) - 2gn_e(\mathbf{r})) \end{aligned} \quad (3.24)$$

dove $\Theta(x)$ è la funzione di Heaviside per cui $\Theta(x) = 1$ per $x > 0$ e zero altrimenti poichè la densità numerica deve essere una quantità positiva.

Le equazioni (3.20), (3.21), (3.23) e (3.24) andranno risolte con un processo iterativo di tipo perturbativo data la difficoltà di integrare direttamente l'espressione (3.21) per il termine $n_e(\mathbf{r})$.

In particolare all'ordine zero si porrà $n_e(\mathbf{r}) = 0$ e si calcolerà il potenziale chimico attraverso (3.24)

$$\begin{aligned} N_0 &= \int \frac{\mu - U(\mathbf{r})}{g} \Theta(\mu - U(\mathbf{r})) d^2r \\ N_0 &= \frac{\pi\mu^2}{gm\omega^2} \end{aligned}$$

da questi risultati si calcolerà la nuova densità numerica $n_e(\mathbf{r})$ con l'espressione (3.21) e si ricalcoleranno il potenziale efficace $W(\mathbf{r})$ e la densità del condensato $n_0(\mathbf{r})$. Con i nuovi valori per il potenziale e la densità si calcolerà una densità degli stati $\rho(E)$ dall'espressione (3.23) che poi si andrà ad inserire in (3.22).

Come viene mostrato in [9] già all'ordine zero si ottiene l'equazione

$$N = N_0 + \left(\frac{1}{\beta\hbar\omega} \right)^2 \left[\frac{\pi^2}{3} - f_2^+ (1 - e^{-\beta\mu}) \right]$$

che servirà per ricavare un nuovo valore di $\mu = \mu(N, T)$ per far ripartire l'iterazione. Una trattazione più approfondita degli argomenti, con uno studio sul sistema interagente 3D e 2D confinato armonicamente viene fatta in [9, 10, 11].

Capitolo 4

Conclusioni

Nel primo capitolo dopo aver presentato la condensazione di Bose-Einstein per un gas ideale in ambiente omogeneo ho ricavato le principali equazioni che regolano il comportamento dei sistemi bosonici interagenti. L'aspetto interessante dell'analisi svolta è che la deduzione di tali equazioni prescinde dall'introduzione del formalismo della seconda quantizzazione, frequentemente invocato in letteratura. Si può concludere che, a patto di accettare qualche ipotesi di semplificazione, i fenomeni trattati sono ben descrivibili anche all'interno della meccanica quantistica tradizionale, fatta eccezione per due importanti aspetti. Il primo è l'impossibilità di derivare l'equazione di Gross-Pitaevskii a temperatura non nulla, mentre il secondo è l'impossibilità di descrivere il fenomeno della quantum depletion, ovvero della presenza di particelle non condensate anche a temperatura nulla.

Mentre il secondo punto è poco rilevante ai fini della trattazione, dal momento che per gas diluiti e debolmente interagenti la quantum depletion risulta trascurabile (e infatti l'argomento non è stato accennato), il primo punto costituisce un limite molto significativo della prima quantizzazione, in quanto l'estensione dell'equazione di Gross-Pitaevskii a temperatura non nulla è fondamentale per lo studio termodinamico dei sistemi considerati.

Il capitolo 3 si configura come una presentazione degli importanti lavori teorici che hanno trovato svariate conferme nei numerosi esperimenti condotti. Nello specifico, si è mostrata la condensazione di Bose-Einstein per sistemi confinati in trappole armoniche mettendo in risalto l'importanza e il ruolo dei potenziali di confinamento, degli effetti del numero finito di particelle ("finite size effect") e dell'interazione tra esse. In particolare per il sistema tridimensionale interagente e confinato si è mostrato come la temperatura critica aumentasse nel caso di interazione attrattiva e diminuisse nel caso di interazione repulsiva rispetto al valore assunto in assenza di interazione.

L'obiettivo della tesi era inoltre quello di porre l'attenzione sui problemi ampiamente studiati nei tempi recenti: quello del ruolo dell'interazione nella dinamica dei gas di bosoni e quello del ruolo della dimensionalità.

Bibliografia

- [1] M. Kardar. *Statistical Mechanics of Particles*. (Cambridge University Press 2007).
- [2] S. Giorgini, L. P. Pitaevskii e S. Stringari. “Condensate fraction and critical temperature of a trapped interacting Bose gas”. In: *Physical Review A* 54 (dic. 1996).
- [3] S. Giorgini, L. P. Pitaevskii e S. Stringari. “Scaling and Thermodynamics of a Trapped Bose-Condensed Gas”. In: *Physical Review Letters* 78 (mag. 1997).
- [4] Sadhan K Adhikari. “Bose–Einstein condensation thermodynamics of a trapped gas with attractive interaction”. In: *Physica A: Statistical Mechanics and its Applications* 284 (set. 2000).
- [5] B. Pozzi et al. “Thermodynamics of Bose-condensed atomic hydrogen”. In: *The European Physical Journal D* 11 (ago. 2000).
- [6] Luca Salasnich. “Critical Temperature of an Interacting Bose Gas in a Generic Power-Law Potential”. In: 16 (giu. 2002).
- [7] Victor Romero-Rochin e V. Bagnato. “Thermodynamics of an Ideal Gas of Bosons Harmonically Trapped: Equation of State and Susceptibilities”. In: *Brazilian Journal of Physics* 35 (set. 2005).
- [8] Franco Dalfovo et al. “Theory of Bose-Einstein condensation in trapped gases”. In: *Reviews of Modern Physics* 71 (apr. 1999).
- [9] M. Bayindir e B. Tanatar. “Bose-Einstein condensation in a two-dimensional, trapped, interacting gas”. In: *Physical Review A* 58 (ott. 1998).
- [10] Sadhan K Adhikari e A Gammal. “Limits of validity for a semiclassical mean-field two-fluid model for Bose–Einstein condensation thermodynamics”. In: *Physica A: Statistical Mechanics and its Applications* 286 (ott. 2000).
- [11] A Minguzzi, S Conti e M P Tosi. “The internal energy and condensate fraction of a trapped interacting Bose gas”. In: *Journal of Physics: Condensed Matter* 9 (feb. 1997).