

UNIVERSITÀ DEGLI STUDI DI PADOVA
FACOLTÀ DI INGEGNERIA



Tesi di Laurea Specialistica in
INGEGNERIA CIVILE - IDRAULICA

**Sviluppo delle Optimal Channel Networks
con eterogeneità di precipitazione**

Relatore

Ch.mo Prof. Andrea Rinaldo

Laureando

Matteo Convertino

Correlatore

Ch.mo Prof. Amos Maritan

Controrelatore

Ch.mo Prof. Riccardo Rigon (UniTn)

Primo Appello Sessione Autunnale - Anno Accademico 2005/2006

UNIVERSITÀ DEGLI STUDI DI PADOVA
FACOLTÀ DI INGEGNERIA



Tesi di Laurea Specialistica in
INGEGNERIA CIVILE - IDRAULICA

**Sviluppo delle Optimal Channel Networks
con eterogeneità di precipitazione**

Relatore

Ch.mo Prof. Andrea Rinaldo

Laureando

Matteo Convertino

Correlatore

Ch.mo Prof. Amos Maritan

Controrelatore

Ch.mo Prof. Riccardo Rigon (UniTn)

Primo Appello Sessione Autunnale - Anno Accademico 2005/2006

"They are beautiful laws, laws that are fulfilling in a wonderful manner. The beauty of finding unity in an infinite variety of things is what science is all about"

Ignacio Rodriguez-Iturbe,
EQuadNews, Princeton University

Prefazione.

Questa tesi riguarda lo studio dell'evoluzione delle Reti Fluviali Ottime, meglio note in ambito scientifico come *Optimal Channel Networks*, con eterogeneità non smorzata di precipitazione, per verificare l'universalità degli esponenti caratterizzanti la geomorfologia dei bacini fluviali reali.

Ricordiamo che le configurazioni delle OCNs, collegate al principio variazionale di minimizzazione dell'energia totale dissipata, sono soluzioni stazionarie dell'equazione generale di "*landscape evolution*", e sintetizzano nella loro forma distribuita nello spazio ed invariante, senza cicli chiusi e dendritica, la casualità, la necessità, e la selezione naturale [Rinaldo, 2006].

E' di tutta evidenza come i vincoli artificiali contribuiscano al raggiungimento dello stato di "ottimo imperfetto".

Studi precedenti avevano trattato il problema introducendo nel modello originale di Rinaldo e Rodriguez-Iturbe [Rodriguez-Iturbe e Rinaldo, 1997] dei disturbi attenuati ("*quenched randomness*"), come l'eterogeneità dei suoli e la variabilità della precipitazione [Colaioni et al., 1997].

Precedentemente altre ricerche erano state mirate allo studio dell'evoluzione del territorio, legato alle reti ottime tramite la relazione "flusso cumulato-gradiente", con eterogeneità geologiche, imponendo una percentuale di aree non erodibili [Caldarelli et al., 1997].

Inoltre ulteriori studi hanno chiarito l'influenza delle variazioni del clima e del suo cambiamento sul territorio [Rinaldo et al., 1995; Dietrich et al., 1994].

Queste forme di disturbo attenuate introdotte, non erano state capaci di produrre una variazione negli esponenti delle leggi a potenza; si era osservata unicamente una alterazione nella relazione "flusso-gradiente" dal valore "ottimo" $\gamma = 0.5$, anche per topografie con basse pendenze, la cui causa è stata

ipotizzata essere la miopia del modello alla realtà con la semplificazione di iniezione costante ed unitaria.

Altre ricerche avevano trovato ulteriori esponenti, non comunque molto dissimili da quelli delle OCNs, presumibilmente appartenenti ad altre classi di universalità; una ricerca aveva approfondito i concetti della Self Organized Criticality nell'evoluzione del territorio [*Caldarelli et al.*, 2004; *Stepinski et al.*, 2005], altre avevano determinato le statistiche sulla superficie di Marte con le stesse tecniche adottate per lo studio dei bacini fluviali terrestri [*Gregoire-Mazzocco et al.*, 2004], provando inoltre la presenza in passato di fluidi (non necessariamente acqua) sulla superficie marziana. Quindi sia le reti SOC sia quelle marziane presentano similarità alle OCNs ossia forme frattali.

Si è dimostrato come, anche le OCNs prodotte con campi di pioggia variamente correlata, quindi fortemente "perturbativi", mantengono valide le conclusioni ricavate dal modello uniforme; si è notata invece una forte variazione nella geomorfologia delle OCNs eterogenee rispetto le omogenee, e sono state anche condotte rilevanti analisi riguardo la termodinamica del processo che porta al loro ottenimento.

La tesi è stata organizzata in modo che ogni sua parte possa essere letta quasi indipendentemente dalle altre; si fornisce, tralasciando la presente Prefazione ed i Ringraziamenti, una breve descrizione del contenuto dei capitoli:

- **Capitolo 1:** introduzione e sintesi dei risultati ottenuti riguardo gli esponenti di scala, la geomorfologia, e la termodinamica delle OCNs eterogenee, con prime formulazioni analitiche. Si ha quindi un breve riassunto dei capitoli chiave, 4, 5, e 6, della ricerca svolta;
- **Capitolo 2:** riepilogo della teoria originaria delle OCNs, implicazioni dei principi di ottimo, cenni alla termodinamica dei processi di ottimo, all'allometria idrologica, e alle altre reti in natura;
- **Capitolo 3:** definizione e derivazione delle leggi di scala, proprietà del bacino di Peano, risultato analitico delle OCNs omogenee ed eterogenee, queste ultime dapprima considerate con variabilità attenuata nei suoli, poi con variabilità attenuata nella nell'iniezione nodale. Infine si sono riportati brevemente i risultati numerici di ricerche precedenti, riguardo il minimo locale e globale delle OCNs omogenee;

-
- **Capitolo 4:** riepilogo delle leggi di scala dei bacini fluviali, risultati numerici per i campi isotropi a covarianza esponenziale a $\langle r_i \rangle = 1$, con $\sigma^2 = 0.5$, e $\sigma^2 = 1.0$, al variare di della scala di correlazione I della pioggia, analisi delle *gsOCNs* e *hotOCNs* eterogenee, nonché delle OCNs eterogenee su bacini reali e con campi di pioggia a diversa funzione di covarianza, deterministici, e completamente casuali. Grafici di sintesi per gli esponenti, τ delle aree cumulate e ψ delle lunghezze upstream, conclusioni e test "di collasso";
 - **Capitolo 5:** riepilogo della termodinamica delle OCNs omogenee, risultati ottenuti riguardo la termodinamica delle reti eterogenee, in merito alla dissipazione di energia e all'entropia nel Simulated Annealing. E' stato verificato lo scaling dell'energia dissipata, chiarito il ruolo reciproco della velocità di "raffreddamento" con il numero di cambiamenti consentiti, al fine di scegliere opportunamente le temperature, e analizzata "l'attività" della rete nel processo di ottimizzazione monitorando i siti attivi ad ogni step;
 - **Capitolo 6:** analisi in funzione della scala I/L per quanto riguarda la densità di drenaggio media, il suo scaling, e J_{min} , per diversi valori del flusso cumulado di soglia J_{th} . Sono state anche condotte analisi della densità di drenaggio media e di J_{min} , in funzione di J_{th} per vari valori di I ; tutte gli studi sono stati effettuati per le OCNs simulate sia con campi a $\sigma^2 = 0.5$ sia con $\sigma^2 = 1.0$. E' stata inoltre studiata la funzione di ampiezza, ed il relativo spettro, la distribuzione dei flussi nel bacino, proposte ulteriori possibili analisi, ad es. relative all'analisi frattale dei transects, e qualche visualizzazione 3D;
 - **Capitolo 7:** conclusioni alla ricerca svolta e prospettive di ricerche future su temi correlati, in Idrologia, Geofisica e Fisica delle Reti Complesse;
 - **Capitolo 8:** bibliografia; si ringraziano tutti gli autori che, seppur citati nella tesi con loro pubblicazioni, inavvertitamente non sono stati riportati;
 - **Allegato 1:** introduzione ai concetti di universalità, leggi a potenza e distribuzioni a scala libera, effetti di scala finita, inerenti la Fisica delle

Reti Complesse. Accenni alle reti biologiche riguardanti il metabolismo, il fenomeno "small-world" e ad altre reti ricavate da differenti principi di selezione;

- **Allegato 2:** introduzione al programma HydroGen utilizzato per la generazione di campi di pioggia random a diversa struttura di correlazione, e loro rappresentazione 3D;
- **Allegato 3:** presentazione sommaria delle routines FluidTurtle utilizzate per lo studio delle OCNs omogenee ed eterogenee, basi teoriche per ricavare le reti casuali tipo Eden e Scheidegger, descrizione dell'algoritmo di Metropolis. Elenco dei software utilizzati per la tesi, dei codici sviluppati e modificati.

Nella tesi si parlerà spesso di "alberi", intendendo le reti ad albero, e di reti eterogenee, intendendo le reti ottenute con campi di pioggia variamente correlata, quindi non "quenched".

Nonostante la forte specificità del tema investigato, si vogliono, perlomeno in questa premessa, tracciare le implicazioni interdisciplinari ed i principi fisici comuni ad altri vasti ambiti scientifici, di questa ricerca.

Si sta sempre più diffondendo in ambito scientifico l'idea della collaborazione e con essa lo studio delle reti, sia naturali sia artificiali, che si manifestano a tutte le scale. Ormai è ben definita la Scienza della Complessità o Fisica dei Sistemi Complessi, la quale basandosi solidamente sulla Meccanica Statistica, tende a studiare le proprietà d'insieme degli "oggetti" e non le proprietà microscopiche e peculiari dei singoli.

La cosa interessante è che lo studio della fisica reti ha ormai invaso anche campi tradizionalmente distanti dalla scienza, quali la sociologia e l'economia.

Da una parte vi è lo studio delle forme che la natura "detta" alle reti, descrivibili attraverso delle regole dinamiche, delle condizioni al contorno ed eventualmente delle forzanti, dall'altro vi è lo studio della topologia di queste reti. Forma delle reti e loro funzionalità sono fortemente legati, pertanto se si conoscono le proprietà topologiche si può agire sul sistema (si veda per le prospettive in idrologia [*Sivapalan, 2005*]).

Da notare che non tutte le reti sono "visibili" come le reti fluviali, in quanto esse sono principalmente delle interazioni mutue degli elementi che le costituiscono.

Nelle reti esistono delle proprietà di scala invarianti, non sempre però queste implicano automaticamente "complessità" e/o "criticalità".

Non sempre le forme delle reti sono senza cicli chiusi, ad esempio nei delta fluviali è comune la presenza di "loops", o più in generale nelle reti a scala libera o in quelle random.

Tuttavia lo stesso principio base di ottimalità e più in generale la medesima termodinamica dei processi (es. il Principio di Produzione Massima di Entropia (MEP) [Kleidon et al., 2004]), utilizzato per le OCNs sia omogenee sia eterogenee, sembra valere in disparati contesti, alcuni dei quali di straordinario interesse per l'idrologia,

– nell'assemblamento delle proteine ("protein folding") guidate dalle informazioni date dal DNA, attraverso la minimizzazione di un funzionale [Flammini et al., 2004; Vensdruscolo et al., 2000; Rosen et al., 2000];

– nelle reti di interazione proteina-proteina (PIN) [Colizza, 2004; Vazquez et al., 2003; Hoang et al., 2004];

– nel comportamento dei polimeri diretti in mezzi random [De Los Rios et al., 1996; Banavar et al., 2003], nella crescita delle interfaccie e nella percolazione diretta [Kardar et al., 1986; Cieplak et al. 1996; Maritan et al., 1992];

– nel sistema cardiocircolatorio umano e dei mammiferi alla cui forma corrisponde una legge di scala del metabolismo, ma anche altre leggi a potenza di numerose quantità biologiche (es. la frequenza del battito cardiaco e la durata della vita) [Banavar et al., 1999, 2000, 2002; West et al., 1997];

– nel sistema vascolare delle piante nella loro interezza, e nelle loro componenti, ad esempio nelle foglie [West et al., 1999b; Runions et al., 2005, Bohn et al. 2005; Cho, 2004];

– nelle reti respiratorie, in quelle nervose [Bak, 1996], nonché nel sistema vascolare del cuore, dei tumori e nella loro stessa crescita [Craciunescu, 1998];

– nella distribuzione delle dimensioni del plankton e dei microorganismi in ecosistemi marini, ad esempio dell'Atlantico [Rinaldo et al., 2002] ma più in generale in tutti i sistemi acquatici, la quale porta ad una loro auto-organizzazione;

– nelle reti alimentari degli ecosistemi [Garlaschelli *et al.*, 2003; Montoya *et al.*, 2002], le quali possono essere correlate alla distribuzione delle specie vegetali e animali nel territorio, e al loro tempo di vita nella dinamica predatore-predatore [Zillio, 2005; Pigolotti *et al.*, 2005; Volkov *et al.*, 2005, 2003];

– nelle reti elettriche soggette a forzanti, condizioni al contorno e iniziali di diverso tipo [Bohn *et al.*, 2006; Marani *et al.*, 1998], nella rottura dei resistori [Takayasu, 1984], nei flussi intermittenti dei vortici magnetici all'interno di superconduttori [Bassler *et al.*, 1999; Nori *et al.*, 1998], alle forme ottenute nelle celle di Hele-Shaw a differenti rapporti di viscosità [Roy *et al.*, 1996];

– nelle reti di frattura di materiali artificiali, geologici, e biologici [Carpinteri, 1993];

– nelle reti generate da altri principi di selezione [Colizza *et al.*, 2004] le quali permettono di descrivere altre tipiche strutture, quelle legate al fenomeno "small-world" ad esempio in ambito sociale [Watts e Strogatz, 1998], Internet e il World Wide Web [Barabasi e Albert, 1999], o la trasmissione di infezioni per via aerea [Colizza *et al.*, 2005].

Il motore alla base di tutte queste reti ottime, o meglio pseudo-ottime dato che l'efficienza totale non è mai o quasi mai raggiunta (corrispondente al minimo dell'energia dissipata), sembra essere una qualche forma di selezione (derivante dalla fisica dei fenomeni o puramente speculativa), la quale spesso produce in esse delle forme che si ripetono a tutte le scale [Rinaldo *et al.*, 2006; Strogatz, 2005].

Il *caso* e la *necessità* nell'evoluzione delle reti sembrano pertanto essere delle costanti reciprocamente "in conflitto", e particolarmente evidenti nel caso delle reti fluviali ma anche in quelle biologiche.

Le forme di eterogeneità forzata nel territorio, non perturbano quindi l'auto-organizzazione globale delle reti fluviali, così come nelle reti ecologiche ad esempio, la morte di tutti i topi non farebbe estinguere i gatti perchè questi ultimi si ciberebbero delle lucertole, e la rete manterrebbe la propria forma [Garlaschelli, 2006].

Le eterogeneità sembrano invece influenzare la *competizione* dei singoli rami di drenaggio, ovvero lì dove le proprietà geologiche dei suoli sono più scarse un canale ha più probabilità di formarsi rispetto ad un'altro che "con casualità" prova ad incidere il territorio in una zona rocciosa; allo stesso modo un canale si forma con più probabilità dove piove mediamente di più nel corso del tempo.

Nonostante questo gli esponenti universali tengono perchè riguardano le proprietà globali della rete, influenzate esclusivamente dalla forma geometrica del bacino nel piano. Le aree occupate da canali sono evidentemente quelle più efficienti con produzione e trasporto di sedimenti.

In definitiva le OCNs uniformi sono un ottimo modello per catturare le proprietà globali delle reti fluviali.

Indice.

Prefazione. iii-ix

Indice. x-xii

Capitolo 1: Introduzione e sintesi dei risultati ottenuti. 1

Capitolo 2: Le Reti Fluviali Ottime. 9

2.1 Sommario. 9

2.2 Formulazione originaria dei principi di ottimalità. 15

—2.2.1 Implicazioni dei principi di ottimalità locale. 16

—2.2.2 Implicazioni del primo principio. 17

—2.2.3 Implicazioni del secondo principio. 17

—2.2.4 Implicazioni dei principi locali assieme. 18

—2.2.5 Implicazioni del principio globale di ottimalità. 18

2.3 OCNs, evoluzione del territorio, e fisica delle reti. 24

Capitolo 3: Studio analitico e numerico delle Reti Ottime. . . 36

3.1 Sommario. 36

3.2 Definizione e derivazione delle leggi di scala. 37

3.3 Un frattale esattamente autosimile: il bacino di Peano. 55

3.4 Risultati analitici. 58

—3.4.1 Il caso omogeneo: omogeneità dei suoli e pioggia uniforme. 58

—3.4.2 Il caso eterogeneo "attenuato". 59

—3.4.2.1 *ETEROGENEITA' DEI SUOLI: COLLEGAMENTI RANDOM NELLA RETE.*

. 59

—3.4.2.2 *ETEROGENEITA' DI PIOGGIA: INIEZIONI RANDOM NEI NODI.* . . 60

3.5 Risultati numerici.62
—3.5.1 Minimo Globale.	63
—3.5.2 Minimo Locale.	65
3.6 Sintesi dei risultati.66
3.7 Risultati di altre ricerche.67
Capitolo 4: Analisi delle OCNs con eterogeneità di precipitazione.	
.	68
4.1 Sommario.68
4.2 Riepilogo delle principali leggi di scala dei bacini fluviali.69
4.3 Analisi per campi di precipitazione a covarianza esponenziale con $\langle r_i \rangle = 1$ e $\sigma^2 = 0.5$	81
4.4 Analisi per campi di precipitazione a covarianza esponenziale con $\langle r_i \rangle = 1$ e $\sigma^2 = 1.0$101
4.5 Analisi per altri campi di precipitazione.	113
4.6 Alcune analisi delle <i>ground-state</i> OCNs e <i>hot</i> OCNs eterogenee.	123
4.7 Analisi con condizioni al contorno pari a quelle dei bacini reali.127
4.8 Conclusioni riguardo le leggi a potenza delle reti eterogenee.	136
Capitolo 5: Termodinamica delle OCNs omogenee ed eterogenee.	
.150
6.1 Sommario.	150
6.2 Termodinamica delle OCNs omogenee ($r_i = cost = 1$).150
6.3 Termodinamica delle OCNs eterogenee (r_i random).172
—5.3.1 Dissipazione di energia nel Simulated Annealing delle reti eterogenee.173
—5.3.2 Entropia nel Simulated Annealing delle reti eterogenee.182
Capitolo 6: Geomorfologia delle OCNs eterogenee.	191
6.1 Sommario.191
6.2 Analisi in funzione della scala di correlazione adimensionalizzata I/L191

6.3	Analisi in funzione della soglia sul flusso cumulato J_{th}	200
6.4	Ulteriori analisi geomorfologiche.	203
 Capitolo 7: Prospettive future di ricerca e conclusioni.		218
 Allegato 1: Alcuni concetti di Fisica delle Reti Complesse.		224
a1.1	Universalità.	224
a1.2	Leggi di potenza e distribuzioni a scala libera.	227
a1.3	Effetti di scala finita (<i>Finite Size Effects</i>).	231
 Allegato 2: Introduzione ad HydroGen per la generazione di campi random variamente correlati.		233
 Allegato 3: Le routines FluidTurtle per lo studio delle OCNs, basi teoriche, e ulteriori software utilizzati.		251
a3.1	Teoria di base delle routine FluidTurtle.	252
—a3.1.1	Eden.	252
—a3.1.2	Scheidegger.	254
—a3.1.3	Metropolis.	258
a3.2	Codici delle routines FluidTurtle per lo studio delle OCNs eterogenee.	259
—a3.1.1	Rtca.c. (<i>vedi pagina web indicata</i>)	
—a3.1.2	R-Metropoli.c. (<i>vedi pagina web</i>)	
—a3.1.3	RextractOCN.c. (<i>vedi pagina web</i>)	
 Bibliografia.		261
 Ringraziamenti.		266

Introduzione e sintesi dei risultati ottenuti.

La tesi ha portato alla creazione di un modello originale di sviluppo ed analisi delle Reti Fluviali Ottime, note alla letteratura internazionale come "Optimal Channel Networks", con eterogeneità di precipitazione e sulla base di modelli precedenti [e.g., *Rigon et al.*, 1998, 1996, 1994, 1993; *Rinaldo et al.*, 1998, 1996, 1995, 1993, 1992; *Rodriguez-Iturbe et al.*, 1994, 1992a-b; *Maritan et al.*, 2002; *Colaioni et al.*, 1997].

I modelli di base sono implementati in routine denominate "FluidTurtle" (vedi <http://www.ing.unitn.it/rigon/indexo.html>) originariamente realizzate in Mathematica, poi in linguaggio C.

Parte di tali routine sono state modificate per poter essere utilizzate nel caso di precipitazione pseudorandom, ossia con iniezione nodale r_i non pari ad un numero intero.

Le routine FluidTurtle costituiscono la base anche di modelli idrologici sviluppati nel tempo come HortonMachine e PeakFlow, entrambi incorporati in JGrass, il primo per analisi geomorfologiche, il secondo per analisi afflussi-deflussi basato sulla teoria GIUH con funzione di ampiezza; citiamo anche il modello GEOtop del ciclo idrologico e Trento-p per la progettazione delle fognature bianche basato sul modello geomorfologico.

Si è cercato anche a partire dal lavoro di tesi di dare una unitarietà a tutte le routine necessarie per lo studio delle OCNs, in modo da realizzare un pacchetto unitario e un manuale corredato come per i modelli "FluidTurtle-basati" di cui sopra si è accennato.

In particolare le integrazioni e/o modifiche più significative sono state effettuate nella routine per il calcolo del flusso cumulato a partire dalle condizioni iniziali delle direzioni di drenaggio (vedi in Allegato 3 *Rtca.c*), in quella implementante l'algoritmo di Metropolis fondamentale nell'ottenere le reti ottime tramite "Simulated Annealing" anche nel caso eterogeneo (vedi in Allegato 3

$R - Metropolis.c$) e per la determinazione dei siti attivi ad ogni temperatura ($Ras - Metropolis.c$), infine nella routine per l'estrazione delle reti fissato un valore di soglia sul flusso cumulato (vedi in Allegato 3 $RextractOCN.c$).

Sono stati creati anche dei programmi in Matlab per la determinazione della funzione di ampiezza $W(x)$, del suo spettro di potenza, e della relativa rappresentazione grafica; inoltre Matlab è stato utilizzato anche per la creazione dei campi di precipitazione deterministici (campi di pioggia suddivisi a metà, nei quali da una parte si impone $r_i = 1.001\forall i$, nell'altra $r_i = 0.001\forall i$; i valori di r_i delle due parti non sono stati appositamente assunti interi, poichè ogni sito i deve avere flusso cumulato differente da quello degli otto siti circostanti, per il funzionamento dell'algoritmo di Metropolis implementato) e per la manipolazione delle matrici esportate da JGrass [Rigon et al., 2006] e TauDEM-MapWindow [Tarboton et al., 2005] affinché fossero importabili dalle routine FluidTurtle.

I campi di pioggia deterministici di cui prima si è parlato sono sostanzialmente campi quasi mai aderenti alla realtà, tranne in rari casi ad esempio nella parte alta del bacino del Colorado (Utah) la precipitazione sia estiva sia invernale è molto significativa, nella parte attraversante le Rocky Mountains è sostanzialmente nulla durante tutto l'anno, e questo porta alla creazione di ecosistemi completamente differenti uno dall'altro [Bell, 1869].

I campi di pioggia random a diversa lunghezza di correlazione e funzione di covarianza sono stati creati con il programma HydroGen [Bellin e Rubin, 1996] sviluppato in linguaggio Fortran.

Primario obiettivo della tesi è stato quello di verificare quando gli esponenti nelle leggi a potenza dei bacini fluviali presentano variazioni oltre i limiti stabiliti dagli studi precedenti sulle Optimal Chanel Networks [Maritan et al., 1996, Rodriguez-Iturbe e Rinaldo, 1997].

Più specificamente si è voluto analizzare quando la relazione di scala delle aree cumulate A_i diverge dalla relazione di scala dei flussi cumulati J_i , quindi a quale valore di correlazione della precipitazione, la differenza tra i due esponenti è maggiore in modulo della massima fluttuazione, pari a 0.02, statisticamente accettata per i bacini fluviali.

Gli esponenti delle leggi a potenza indipendenti, così come dimostrato ad esempio in [Colaiori et al., 1997], sono tre, e precisamente l'esponente τ dello scaling delle aree cumulate A_i , ψ della legge a potenza delle lunghezze upstream L_{up} (o lunghezze di Hack) e l'esponente di Hurst H della legge a

potenza dei diametri $L_{||}$ [Rigon *et al.*, 1996].

In realtà l'esponente di Hurst può essere ricavato in maniera indiretta, una volta ricavati l'esponente h della legge di Hack "lunghezze upstream-aree cumulate", e l'esponente d_l relativo alla sinuosità frattale dei rivoli tributari ricavabile interpolando la distribuzione dei punti "lunghezze upstream-diametri"; la relazione analitica tra questi tre esponenti è la sottostante:

$$h = \frac{d_l}{1 + H} \quad (1.1)$$

Tra d_l e H vi è inoltre una relazione reciproca che vede il primo essere unitario quando il secondo è minore di uno (*bacini autoaffini* o *frattali*), e il secondo pari ad uno quando il secondo è maggiore di uno (*bacini autosimili*).

Nell'uno o nell'altro caso si hanno relazioni differenti per la determinazione di τ e ψ [Colaïori *et al.*, 1997].

Lo studio si è quindi concentrato attorno a τ e ψ dato che tutti gli altri esponenti si derivano in cascata, noti i primi due citati.

L'argomento trattato presenta ampi contenuti teorici nell'ambito della fisica e delle scienze computazionali, ma ha forti ricadute pratiche nell'ambito della geofisica e dell'ingegneria civile e ambientale; per fare alcuni esempi, nel campo dell'idrologia per la previsione delle piene e l'analisi degli altri fenomeni di trasporto a scala di bacino (ad esempio la dispersione di inquinanti o altri agenti patogeni, e dei sedimenti), della geomorfologia applicata per la sicurezza e la salvaguardia del territorio, della biologia per lo studio della diffusione di infezioni, dell'eco-zoologia per chiarire le complesse dinamiche degli ecosistemi e i loro rapporti con il ciclo dell'acqua, ed in generale nell'ingegneria agraria e forestale.

La ricerca effettuata va a completare una serie di lavori riguardo la formazione delle Optimal Channel Networks con introdotta la presenza di qualche eterogeneità attenuata (*quenched*), ad esempio eterogeneità attenuata nella precipitazione e nelle proprietà locali del suolo [Colaïori *et al.*, 1997], eterogeneità attenuata nella non erodibilità del paesaggio in determinate zone (*pinned landscape evolution*) [Caldarelli *et al.*, 1997].

I risultati ricavati dallo studio presentato rilevano una sostanziale bontà degli esponenti anche in presenza di forte eterogeneità di precipitazione, si sono notate le fluttuazioni maggiori nel range $L/5 \leq I \leq L/3$, dove I è la scala

di correlazione-integrale della pioggia generata e L la dimensione del bacino sintetico quadrato studiato.

Solo con i campi di pioggia deterministici si è notata una notevole variazione degli esponenti al di fuori dei range definiti per essi, e una sostanziale differenza nella rete di drenaggio portandola verso schemi non comuni a quelli dei bacini naturali montani, invece piuttosto simili alle strutture globali, con zona di produzione e zona di trasferimento alla Shumm [Shumm, 1977], tipiche di un corso d'acqua.

La variazione degli esponenti è stata considerata con campi di pioggia a covarianza esponenziale ed isotropi, ossia $C_Z(r_x, r_y) = e^{-r'}$ e $I_x = I_y = I$, anche se altri campi anisotropi o a diversa funzione di covarianza (es. con covarianza isotropica di Whittle, isotropica di Mizell, Gaussiana, o frattale con semivariogramma a legge di potenza) sono stati utilizzati per confermare le analisi fatte, oltre ai campi deterministici già citati precedentemente e dei campi con pioggia casuale completamente scorrelata.

Inoltre sono state analizzate molte proprietà geomorfologiche delle Optimal Channel Networks "eterogenee" (d'ora in poi si userà spesso questo aggettivo indicando con esso le reti ottime ottenute con pioggia random non attenuata), di particolare importanza la funzione di ampiezza $W(x)$ la quale subisce notevoli cambiamenti rispetto quella della corrispondente rete omogenea (con condizioni iniziali delle direzioni di drenaggio, e condizioni al contorno di barriere riflettenti identiche), e la densità di drenaggio.

Si è posta poi particolare attenzione all'analisi della termodinamica dei processi che portano alle reti ottime, in termini di dissipazione di energia, siti attivi (ossia i siti che cambiano configurazione, in termini di area cumulata e quindi direzione di drenaggio) quindi entropia, sempre confrontando i risultati delle reti omogenee e non.

Oltre ai bacini sintetici, più facili da "manipolare" per questioni computazionali (essenzialmente i tempi di calcolo si riducono notevolmente vista la dimensione prevalente dei sistemi studiati con $L = 128$ o suoi multipli secondo un fattore $n = 2, 1/2, 1/4$, valori sufficienti per assicurare la dominanza dell'energia sull'entropia delle OCNs derivate), si sono anche studiati i bacini del Tanaro e del Taloro.

Per dare un ordine di grandezza il DEM del Tanaro (e non il bacino il quale occupa un'area minore data la natura frattale dei suoi contorni¹) ha

¹I pixel esterni al bacino ma appartenenti al DEM in studio vengono contraddistinti in

un'estensione in pixel di $L_{\parallel} \times L_{\perp} = 296 \times 178$, mentre quello del Taloro ha un'estensione di $L_{\parallel} \times L_{\perp} = 898 \times 1156$ molto elevata il che comporta per un normale *pc* tempi di calcolo molto elevati (per il solo Simulated Annealing circa 12 ore).

Più precisamente si è voluta studiare la formazione delle OCNs eterogenee, con condizioni al contorno pari a quelle del bacino reale, per verificare quanto le reti ottime così ottenute rispecchino le reti reali rispetto le reti ottime omogenee.

Tale analisi non ha in realtà prodotto delle conclusioni definitive, in primo luogo per il fatto che i campi di pioggia generati non rispecchiano quelli reali (nessuna analisi climatologica è stata compiuta), poi per il basso numero di simulazioni effettuate e per il ridotto numero di bacini considerati.

Da sottolineare però che dalle prime analisi sembra più difficile indurre una variazione negli esponenti delle leggi di scala nei bacini reali rispetto i bacini sintetici; questo potrebbe avere anche una spiegazione geomorfologica nella struttura elongata caratteristica della maggior parte dei bacini reali, a prescindere dalla isotropia o anisotropia della precipitazione.

Il carattere autoaffine dei bacini, specialmente per bassi valori dell'esponente di Hurst (quindi con $L_{\parallel} \gg L_{\perp}$), potrebbe infatti far considerare un campo di precipitazione come "smorzato" (*quenched*) anche uno che non lo è, come quelli realizzati nel presente studio.

Ricordando la relazione che intercorre tra i diametri misurati lungo i due principali assi di inerzia, longitudinale e trasversale, dei bacini fluviali,

$$L_{\perp} = L_{\parallel}^H \quad (1.2)$$

si ha che nei bacini sintetici quadrati generati l'esponente di Hurst è unitario (quindi $L_{\perp} \times L_{\parallel} = L \times L$ dall'uguaglianza $L_{\perp} = L_{\parallel} = L$), mentre per i bacini naturali l'esponente di Hurst lo si è verificato compreso tra 0.75 e 0.96 , anche se esistono casi es. come per il Tug Dry Fork (Virginia, USA) con $H = 1$.

Nei bacini naturali quindi l'estensione del DEM $L_{\perp} \times L_{\parallel}$, data dal prodotto dei diametri, è sempre maggiore della superficie totale del bacino (non esistono

JGrass (formato FluidTurtle) con un *9* nel file delle direzioni di drenaggio secondo il metodo "delle otto direzioni" (il *9* implica barriere riflettenti, il *10* condizioni al contorno cilindriche quindi barriere assorbenti), con uno *0* nel file delle aree/flussi cumulati; in TauDEM si usa -32767 per le direzioni di drenaggio, -1 per le aree/flussi.

bacini rettangolari o quadrati in natura) che coincide con l'area cumulata dell'outlet A_{out} , e a sua volta con il flusso cumulato J_{out} nel modello ad iniezione nodale unitaria e uniforme ($r_i = cost = 1 \forall i$).

Utilizzare i contorni dei bacini reali serve quindi più che altro per verificare la similarità dei *patterns* di drenaggio ottimi con quelli reali, non per gli esponenti, dato che prima del Simulated Annealing per rivavare le OCNs si effettua il cosiddetto "bagno caldo" (*hot bath*²) per cancellare le condizioni iniziali.

Quindi solo nel caso di scala di correlazione molto grande nella direzione di sviluppo della rete (la direzione del diametro $L_{||}$) si nota una variazione degli esponenti oltre i range statisticamente accettati come naturali; in sostanza solamente tendendo verso i campi deterministici di pioggia sembra ci sia una consistente deviazione dalle leggi a potenza.

Per le reti generate su bacini reali, nell'analisi della variazione degli esponenti sembra ragionevole riferire la scala di correlazione I alla lunghezza del *mainstream* (indicata spesso con L , da non confondere con la *size* dei bacini artificiali), ossia il ramo della rete di drenaggio a lunghezza maggiore, così come fatto in precedenti analisi sulle OCNs [Rodriguez-Iturbe e Rinaldo, 1997].

Tali lavori avevano confermato la invariabilità degli esponenti di scala anche in presenza di eterogeneità random ed attenuata, e la forte comparsa di forme di aggregazione in accordo ai bacini reali.

Lo studio svolto, in sostanza, conferma l'ottima fedeltà delle forme fluviali naturali alle leggi a potenza che le caratterizzano, anche in presenza di forte variabilità nella pioggia che determina la loro struttura.

Si è ricavato un ipotetico andamento degli esponenti al variare di I/L intravedendo una sorta di funzione ad andamento tipo "onda di piena", con massimo, compreso nella regione $\frac{1}{5} \leq I/L \leq \frac{1}{3}$, che aumenta al crescere della varianza locale σ^2 imposta al campo di precipitazione.

Le funzioni di cui si parla sono ad esempio $\frac{\tau}{\tau^*}$ per le aree cumulate con $\tau^* = 1.43$ (il valore ottimo), o $\frac{\psi}{\psi^*}$ per le lunghezze upstream.

²Il "bagno caldo" consiste nel portare ad elevate temperature la rete reale iniziale, tipicamente $T = 10,000$ e/o $T = 1000$, con un elevato numero di cambiamenti per ognuna, in genere sono sufficienti 1×10^6 iterazioni, per poi applicare l'algoritmo di Metropolis e ottenere la OCN a basse T (quasi sempre a $T = 0.000$) che in tal modo risulta dipendente solo dalle condizioni al contorno di flusso nullo, ad eccezione dell'outlet con posizione fissa.

L'andamento di tali funzioni adimensionali in funzione del parametro adimensionale I/L , perchè la variabilità della pioggia è funzione della scala del bacino, è quindi solamente ipotizzata, principalmente per due motivi; il primo è la mancanza di un elevato numero di simulazioni sistematiche, il secondo per l'elevata varianza degli esponenti nelle 15 prove eseguite su differenti bacini (a condizioni iniziali diverse ma uguali condizioni al contorno) per ogni I , quindi l'elevata varianza della media $m(I)\forall I$.

Le reti di drenaggio formate da campi di pioggia random presentano zone a densità di drenaggio (definita Hortonianamente come $\mathcal{D} = L_T/A$, con L_T la lunghezza totale dei canali "upstream" il pixel considerato, e A l'area cumulata sottesa dallo stesso pixel) maggiore, anche di molto, rispetto quella dell'intero bacino generato con $r_i = cost = 1$, mentre vi sono altre zone in cui $\mathcal{D}(r_i \neq cost) \sim \theta$ quindi con valore molto minore di $\mathcal{D}(r_i = cost)$.

La densità di drenaggio è stata anche studiata in merito alla sua variabilità in funzione di I , e in funzione della soglia sul flusso cumulato J_{th} ossia in base a quali pixel vengono considerati nello "stato canale".

Per fare questo è stata definita la densità di drenaggio come

$$D_d(I/L, J_{th}) = \frac{[N_{siti}(J_i > J_{th}(r_i \neq cost))]}{L \times L} \quad (1.3)$$

e a seconda dell'analisi è stato tenuto fermo il parametro I o il parametro J_{th} , dove $L \times L$ è l'area cumulata A_{out} dell'outlet, che coincide con il flusso cumulato J_{out} solo nel caso di $r_i = cost = 1$.

Nella realtà fisica i bacini sono caratterizzati anche da anisotropia, sempre presente, dovuta alla pendenza mediamente non nulla del territorio e alla variabilità della forza di gravità, tenute ferme le forme di *randomness* di cui prima si è parlato ossia stato dei suoli (es. modellabile con modelli frattali del contenuto di umidità del suolo), eterogeneità geologiche e eterogeneità nella precipitazione che funge da agente modellante il territorio [*Dietrich et al.*,].

Il modello presentato, così come quello di base delle Optimal Channel Networks [*Rodriguez-Iturbe e Rinaldo, 1997*], è un modello stazionario quindi non fornisce una evoluzione dinamica della rete con variabilità delle condizioni al contorno e/o di precipitazione.

La variabilità puramente spaziale e non temporale fornisce però il caso più "gravoso" per testare i valori degli esponenti ottimi di scaling, infatti in tal modo la randomness è forzata ad agire sempre allo stesso modo e con la stessa

ditribuzione, annullando quindi la funzione di smorzamento del tempo che la trasformerebbe in "quenched randomness", per la quale si è già verificata la buona tenuta degli esponenti.

Per "OCNs eterogenee", a cui spesso si fa riferimento all'interno della tesi, si intendono, quindi, le reti fluviali ottime sviluppate con campi random "non attenuati" di precipitazione.

Nella tesi verranno presentati i risultati di maggior rilievo fin qui ottenuti e le simulazioni più significative a loro supporto; si è creata una pagina web, vedi

<http://digilander.libero.it/matconv/ThesisMaterials.html>,

la cui responsabilità è unicamente dello scrivente (per contatti scrivere a

`matconv.uni@gmail.com`),

nella quale verranno pubblicate tutte le altre simulazioni, i materiali aggiuntivi come figure e dati, e i collegamenti ai software utilizzati (con FSF-GNU public licence) debitamente commentati, che sostanzialmente per motivi di spazio non sono stati allegati alla presente.

Presumibilmente verranno anche pubblicati in seguito degli stralci relativi a sviluppi futuri di questo e/o altri argomenti correlati.

Le Reti Fluviali Ottime.

2.1 Sommario.

Nel presente capitolo si è tentato di riassumere il più possibile i risultati delle ricerche sulle Optimal Channel Networks, partendo dalle origini della teoria e giungendo fino agli attuali sviluppi, estendendo brevemente i concetti anche alle reti biologiche e alle altre reti in natura, ad esempio quelle ecologiche.

Il materiale presentato è pertanto, per la maggior parte, frutto di precedenti lavori, i risultati propri della ricerca di questa tesi si trovano invece nei capitoli seguenti, principalmente nei Capitoli 4, 5, 6, e nelle Conclusioni (Cap. 7). Una sintesi di essi è nella Premessa e al Capitolo 1.

Le caratteristiche planari delle reti fluviali e la "bellezza" dei paesaggi in cui esse sono inserite, sono descritte da un'insieme di leggi a potenza di quantità come le aree contribuenti in un punto, la lunghezza dell'asta principale del bacino, la legge di Hack [*Rodriguez-Iturbe e Rinaldo, 1997*].

Queste relazioni hanno validità a parecchi ordini di grandezza, e trovano una possibile spiegazione nella validità di alcune leggi di minima energia.

Notoriamente la costruzione della teoria delle *reti fluviali ottime* [*Rodriguez-Iturbe et al., 1992*], che da ora in poi chiameremo per brevità e consuetudine OCNs (da *Optimal Channel Networks*), basata su queste leggi, ricava dall'idrodinamica un funzionale da minimizzare che da esse dipende esclusivamente attraverso l'esponente della legge a potenza [*Rigon et al., 1996*].

Pertanto, la configurazione finale dipende solamente dal riarrangiamento della topologia della rete e dalla fattibilità delle configurazioni ottime [*Rinaldo et al., 1998*].

La quantità che si pensa ottimizzata è la potenza dissipata lungo i canali. Esistono dei principi di ottimo che permettono di riprodurre in reti simulate tutte

le caratteristiche morfologiche 2D delle reti naturali, mentre le caratteristiche 3D rimangono descritte implicitamente.

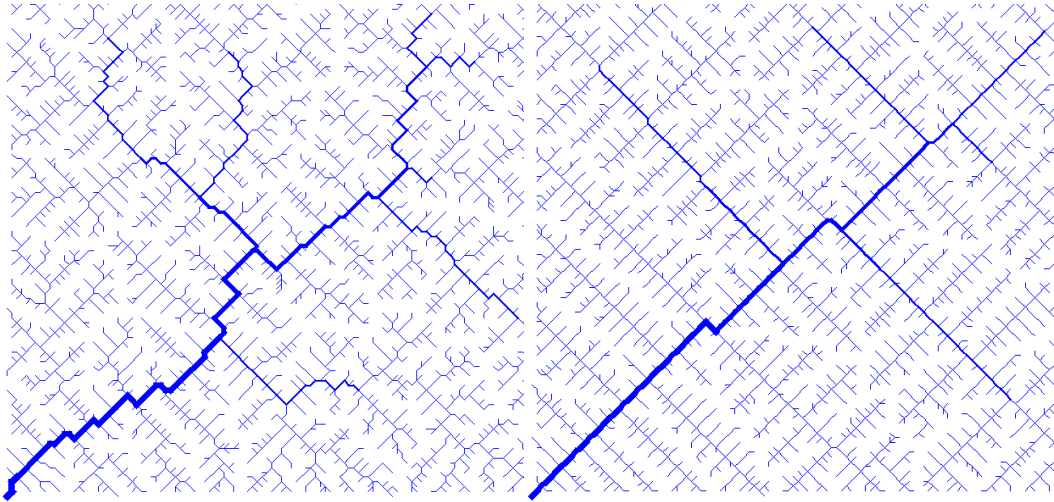


Figura 2.1: due tipi di ottimizzazione, sulla sinistra una fattibile configurazione ottima di minimo locale ossia una OCN "normale", sulla destra una rete, corrispondente al minimo assoluto della dissipazione di energia gravitazionale totale chiamata OCN "di base" (o *ground-state* OCN); nel corso della tesi si esamineranno altre reti, come quelle di Scheidegger, Eden, e di Peano, oltre evidentemente le OCNs eterogenee sulle quali il lavoro si è concentrato.

Il materiale presentato è stato pubblicato in svariati articoli da A. Rinaldo, I.R. Iturbe, R. Rigon e A. Maritan principalmente, e la pubblicazione che raccoglie esaurientemente i risultati ottenuti in questo filone di ricerca, ma anche in altri temi correlati, è "*Fractal River Basins, Chance and Self Organizations*" [Rodriguez Iturbe, I., Rinaldo, A., 2001].

Da sottolineare subito il fatto che le strutture di drenaggio formatesi in ecosistemi a marea sono molto differenti dalle OCN secondo condizioni locali e di sviluppo a diversi rapporti di scala; inoltre in tali ambienti possono formarsi strutture chiuse (*loops*) che nelle OCNs non si hanno..

Ricordiamo che la validità della teoria delle *reti fluviali ottime* la si ha per bacini montani, o meglio nella prima *zona di produzione-drenaggio* dei deflussi di un corso d'acqua, caratterizzata da ramificazioni e pendenze elevate e variabili.

Numerosi studi sono stati anche condotti per l'analisi della formazione ed evoluzione delle zone di deposizione terminali di corsi d'acqua, ossia i delta e gli ambienti lagunari. Si propone una immagine N.A.S.A. del delta a rete del Brahmaputra-Gange processata con software di rilevamento della firma spettrale (eg. MultiSpec), ed una seconda acquisita da satellite Landsat7 dell'intricato delta del fiume Lena in Siberia.

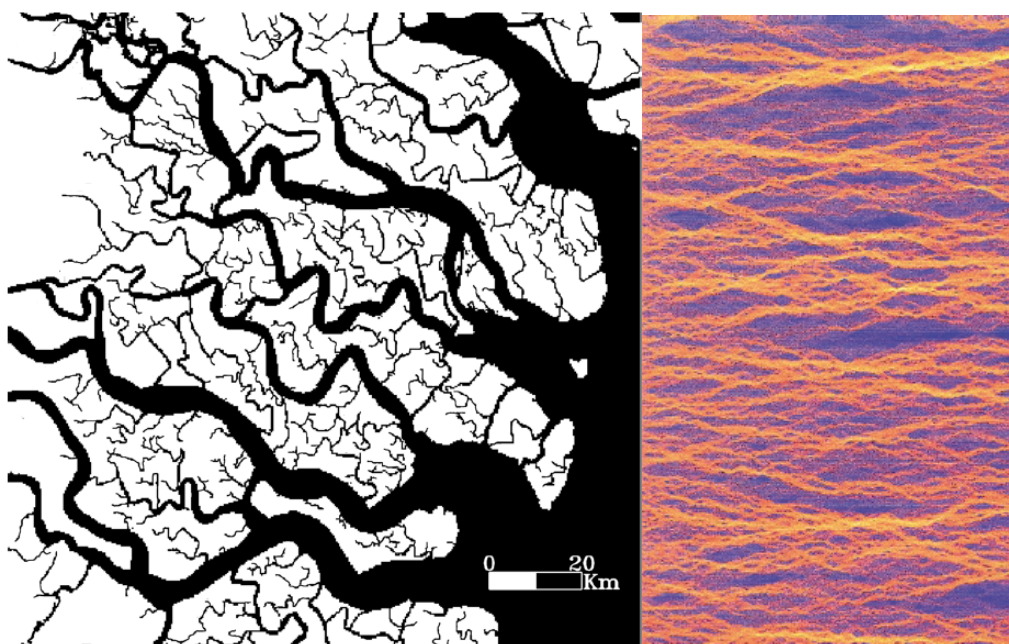
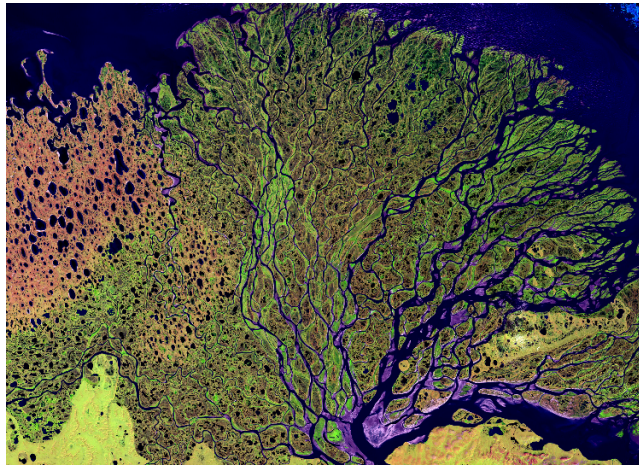
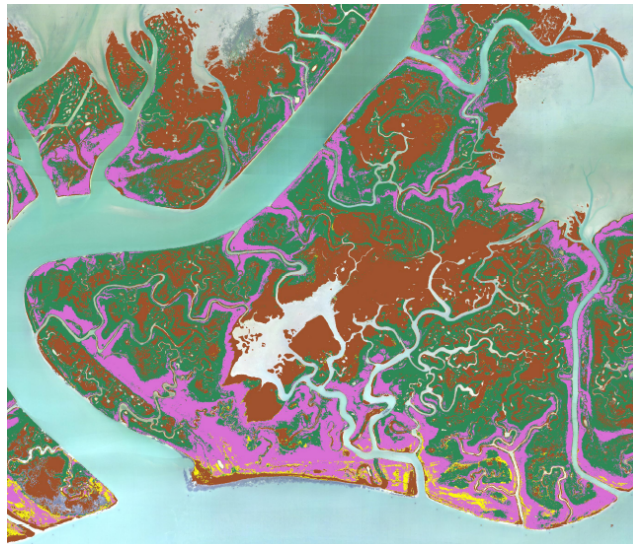


Figura 2.2: a *sx*, immagine dallo spazio del delta del Brahmaputra-Gange, (Golfo del Bengala), processata con tecniche che riconoscono la firma spettrale dell'acqua [Fagherazzi *et al.*, 1999; Rinaldo *et al.*, 1999a-b]: l'interconnessione complessa dei fenomeni tipici dei delta e di quelli delle strutture di drenaggio soggette a macro-maree (con forti gradienti nella profondità dei canali), producono loops a tutte le scale; a *dx*, "valanghe" di vortici in un semiconduttore [Bassler *et al.*, 1999; Metha *et al.*, 2006], i quali sono stati comparati al delta del Brahmaputra-Gange e studiati attraverso le stesse tecniche di analisi dei fiumi reali (es. le leggi Horton); è stupefacente come l'autoaffinità dei multifrattali, e le relative leggi, valga sia a scale pari a 10^3 km tipiche dei bacini reali, sia a scale 10^9 volte più piccole; è stata suggerita, per entrambi i fenomeni, la teoria della dinamica delle valanghe (SOC) per spiegare il carattere meandriforme.



(a)



(b)

Figura 2.3: esempi di reti chiaramente non "spanning, directed and loopness", (a) delta del Lena, Siberia: si notano zone caratterizzate dalla presenza di canali intersecantesi e altre con specchi d'acqua di varia ampiezza, entrambe in continua modificazione; (b) [Zillio, 2005] rete a marea della palude S. Felice ad acqua salmastra, nella laguna di Venezia, propriamente estratta tramite tecniche di *remote sensing* [Feola et al., 1995] e con sovrainposta la classificazione della vegetazione; le reti a marea sono osservabili a parecchi chilometri dalla superficie terrestre e "rozzamente" presentano per lo stesso intervallo di micromarea, scale simili ma diversa aggregazione.

La sinuosità dei meandri a marea è stata studiata ampiamente per la laguna di Venezia da *Marani M.* ed altri ricercatori nell'ambito del progetto europeo di ricerca *T.I.D.E.*, e si è visto come essa varia grandemente da sito a sito, riflettendo generalmente l'età locale dell'ecosistema ad acqua salata, e la *densità di drenaggio* è anch'essa altamente variabile [*Marani et al.*, 2002, 2003].

Da evidenziare inoltre che le reti fluviali ottime non rappresentano i processi di versante (*hillslope processes*) e quindi colgono esclusivamente l'analisi di scala del paesaggio, tra l'altro, come nella presente tesi, si possono esaminare esclusivamente le OCNs come reti piatte ossia tralasciando la coordinata di elevazione $z(x, y)$, quindi non trattando il tema dell'evoluzione del territorio noto nella letteratura internazionale come *landscape evolution*.

Le strutture ad albero rappresentano la configurazione ottimale per qualsiasi rete di trasporto naturale o artificiale [*Banavar et al.*, 1999, 2000, 2002].

L'esempio di rete ottima dal punto di vista della costruzione, operatività e manutenzione è la cosiddetta rete " *spanning and loopness*" ossia distribuita nello spazio e senza cicli chiusi.

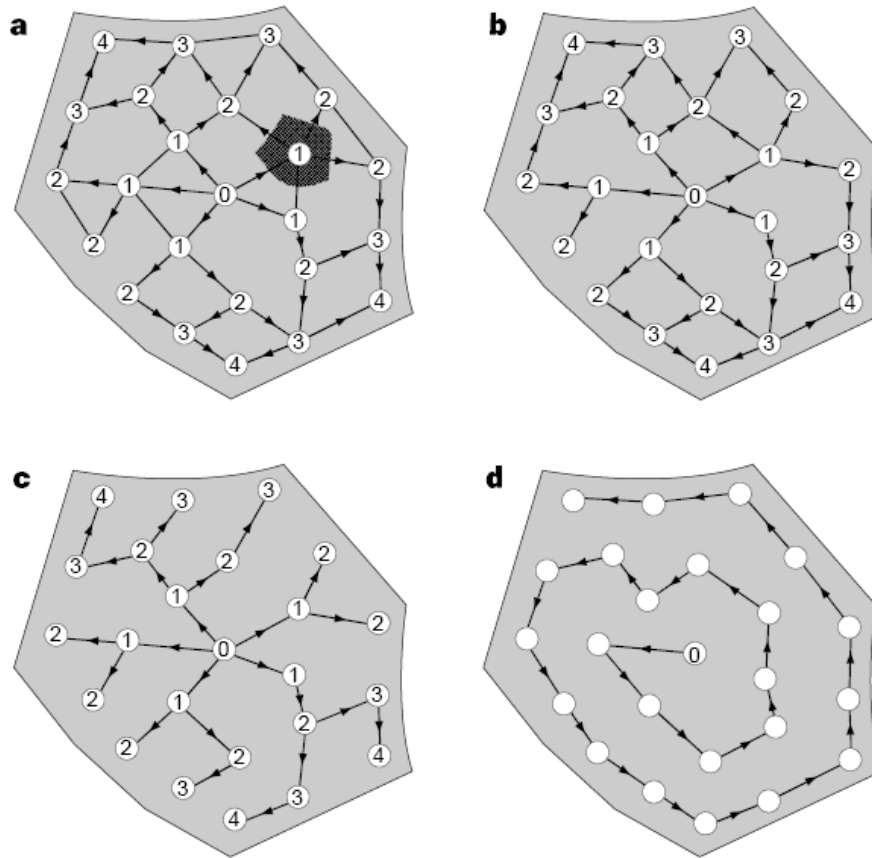


Figura 2.4: schemi di reti di trasporto possibili utilizzati anche per studiare le analogie biologiche alle reti fluviali [Banavar et al., 1999], con L_T si indica la lunghezza totale dei percorsi, con L_x la distanza dall'origine 0 (definita come il minimo numero di siti incontrati tra tutte le strade possibili) indicata dal numero riportato in ogni nodo, con \bar{L} la lunghezza media dei percorsi dall'origine 0 all'uscita; (a) *rete completamente connessa*, con L_T massimo e \bar{L} minimo, quindi è la più diretta e a favore dei singoli; (b) *rete massimamente diretta* in cui solo i collegamenti orientati sono stati mantenuti, ossia quelli con valore L_x ai nodi differente; (c) *rete diretta e distribuita*, o rete "ad albero", in cui ogni sito è connesso alla sorgente 0 da un singolo percorso, il più breve, appartenente alla rete (b), $L_T = \min(L_T)$ pari a quella della rete (d) mentre $\bar{L} = \min(\bar{L})$ pari a quello della rete (a); (d) rete a spirale o "comunista" per la quale si ha L_T minimo e \bar{L} massimo, quindi i gradi di libertà individuali sono congelati; Da notare che il vincolo di connettività locale impedisce di fatto un pattern "esplos" o della rete in cui ogni sito *è* collegato autonomamente all'origine 0.

Si riportano nella Figura 2.5 sottostante due modelli computazionali di sistemi vascolari, il primo nel piano, l'altro nello spazio, realizzati con gli stessi principi di ottimo delle reti fluviali, i quali implicano il carattere ad albero distribuito e l'assenza di *loops* [Banavar *et al.*, 2000].

E' quindi il metabolismo, o meglio la *necessità* di consegnare i nutrienti alle cellule nel modo più efficiente possibile, a determinare la forma di tali reti biologiche.

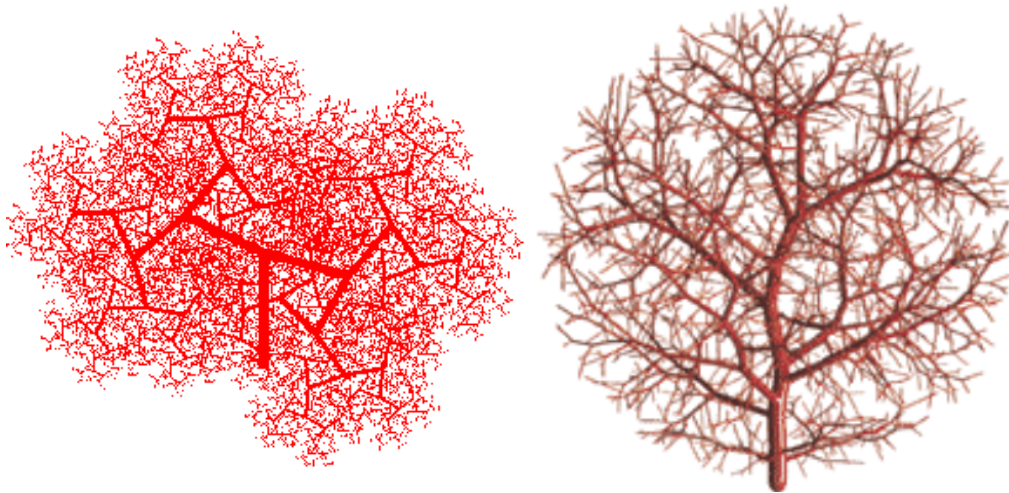


Figura 2.5: a *sx* (si veda <http://ioc.ee/res/fractal.html>), rete vascolare ottima con dimensione di similarità $D_S \approx 3.4$, sviluppata su contorno frattale, e ottenuta con i medesimi principi di quelli utilizzati per le OCNs nei bacini fluviali; a *dx*, modello tridimensionale del sistema circolatorio di un vertebrato [Caldarelli, 2005].

2.2 Formulazione originaria dei principi di ottimalità.

I principi che portano alla formazione delle reti ottime sono:

1) Principio locale di minima energia dissipata per una data portata trasportata, in ogni collegamento della rete;

2) Principio locale di modificazione delle proprietà dei canali verso uno stato ottimo, in cui il tasso di energia dissipata per unità di area di canale è costante dall'inizio alla fine della rete;

3) Principio globale di organizzazione della rete al fine di ottenere un minimo possibile dell'energia totale dissipata.

2.2.1 Implicazioni dei principi di ottimalità locale.

Si definisce:

- P_i la potenza totale (energia dissipata per unità di tempo in un collegamento $i \rightarrow j$);
- y la profondità media del canale, ossia del collegamento $i \rightarrow j$;
- C_f il coefficiente di resistenza, o frizione, adimensionale;
- ρ la densità dell'acqua;
- τ lo sforzo tangenziale sul fondo;
- S la pendenza adimensionale del canale;
- R_H il raggio idraulico definito come rapporto tra l'area liquida ed il perimetro bagnato;
- γ il peso di volume dell'acqua;
- γ_s il peso di volume dei sedimenti;
- D il diametro medio dei grani;
- P_w il perimetro bagnato.

Si assume che gli sforzi tangenziali sul fondo e sulle pareti dei canali della rete sia gli stessi, il gradiente orizzontale della velocità sia trascurabile rispetto quello verticale, la dissipazione di energia avviene in uno strato di spessore l che può essere considerato invariabile, sezione trasversale rettangolare.

La potenza totale è quindi approssimata come:

$$P \sim \frac{QL}{yv} [C_f v^3] + 2yL\rho [C_f v^3] = \tau^2 LP_w v \quad (2.1)$$

dove:

$$\tau = \gamma R_H S = C_f \rho v^2 \quad (2.2)$$

e in corsi d'acqua con letto di pietrame, anche:

$$\tau = \frac{yS}{D(\gamma_s - \gamma)/\gamma} \quad (2.3)$$

L'inclusione degli effetti dovuti al trasporto dei sedimenti sulla dissipazione di energia può essere fatto come descritto in [Molnar *et al.*, 1998].

2.2.2 Implicazioni del primo principio.

Fino ad ora per ogni condizione di flusso la potenza P è risultata dipendente solo dalla geometria del canale (ad esempio da y). Applicando il primo principio questa dipendenza è eliminata, mentre, la larghezza del canale w e la profondità del flusso y diventano funzione della portata.

$$y \propto w \propto Q^{-\frac{0.5m}{2}} \quad (2.4)$$

Rimuovendo l'assunzione di sezione trasversale rettangolare si ha che la legge di scala della profondità e della larghezza hanno diverso esponente.

2.2.3 Implicazioni del secondo principio.

Le principali conseguenze sono che

$$C_f v^3 \sim \text{costante nello spazio} \quad (2.5)$$

e

$$R_H S v = \text{costante}. \quad (2.6)$$

Come discusso in [Molnar et al., 1998], $C_f v^3$ varia se la velocità media e la resistenza al moto variano lungo la rete secondo la relazione sottostante [Bathurst, 1993],

$$v \propto Q^m \quad (2.7)$$

dove $0 \leq m \leq 0.3$, il quale implica una relativa variazione di C_f verso valle.

2.2.4 Implicazioni dei principi locali assieme.

L'applicazione contemporanea dei due principi locali di ottimalità rende consistentemente la dissipazione di energia dipendente solamente dalla portata.

I dettagli della dinamica nei canali sono insiti negli esponenti e nella costante di proporzionalità delle leggi a potenza.

Inoltre anche la pendenza S diventa dipendente dalla portata:

$$S \propto Q^s \quad (2.8)$$

in cui sè:

$$s = -0.5 \left(\frac{1+m}{2} \right) \quad (2.9)$$

Quest'ultima equazione sembra far apparire m dipendente dalla produzione del terreno, come la relazione pendenza-portata può essere derivata dato un meccanismo di erosione [Seidl et al., 1992].

2.2.5 Implicazioni del principio globale di ottimalità.

La legge globale di ottimalità è una concettualizzazione delle interazioni "a lunga distanza" della rete, stabilite tra un punto e il proprio bacino verso monte e verso valle. L'effettività di tali interazioni dipende da molti fattori che determinano la disponibilità di energia dissipabile in cambiamenti [Rigon *et al.*, 1998].

Come conseguenza dei principi locali l'energia totale dissipata per una rete fluviale è stato dimostrato essere:

$$P = \sum Q^\eta \quad (2.10)$$

dove la somma è condotta su tutti i siti della rete con η pari a:

$$\eta = 1 + s \quad (2.11)$$

Può essere dimostrato che minimizzando il funzionale P di cui sopra, si ottiene, mantenendo le stesse ipotesi generali iniziali, il risultato che l'energia potenziale totale dell'acqua è dissipata. Si discuteranno più avanti le configurazioni possibili delle reti al variare di η .

Come riportato in [Rinaldo *et al.*, 1998] e [Rodriguez-Iturbe e Rinaldo, 1997], la configurazione di minimo locale di una rete globalmente ottimizzata, obbedisce a delle leggi di scala nell'aggregazione delle aree cumulate, delle lunghezze, e a una forma generalizzata della legge di Hack.

Le reti fluviali reali esibiscono consistentemente le stesse statistiche, mentre le reti casuali come quelle prodotte da una crescita tipo Eden, *percolation networks* [Manna *et al.*, 1996], reti tipo Scheidegger e reti topologicamente casuali alla Shreve non manifestano questa universalità.

Le analisi effettuate mostrano che la combinazione dei tre principi di dissipazione di energia porta a una rappresentazione unificata delle più importanti caratteristiche delle strutture di drenaggio tridimensionali. Tra di esse vi sono:

1. la velocità del flusso \bar{v} per una portata rappresentativa Q tende ad essere costante attraverso tutta la rete;

2. la profondità nei canali è proporzionale alla radice quadrata della portata ($d \propto a \cdot Q^{0.5}$), con la costante di proporzionalità che è la stessa in ogni punto della rete;

3. verso valle la larghezza del canale varia proporzionalmente alla radice quadrata della portata ($B \propto Q^{0.5}$);

4. il valore medio delle pendenze dei collegamenti di ordine n scala proporzionalmente a $(2n - 1)^{-0.5}$.

Ulteriori conseguenze geomorfologiche di questi tre principi (includendo le leggi di Horton e di Hack) saranno investigate successivamente. La più importante è che il carattere frattale osservato in natura nelle forme di aggregazione delle reti di drenaggio, può essere una conseguenza dei principi di minima dissipazione di energia.

Si è dimostrato che la *legge di Hack*, una delle relazioni empiriche più comunemente verificata nei bacini fluviali, deriva in modo naturale da principi di ottimalità accessibili dinamicamente e trovati con procedure di ricerca non completamente esatte. I principi di ottimalità pertanto riproducono bene le proprietà delle reti naturali; si è parlato di imperfezione nella ricerca della rete ottima perchè le configurazioni che si possono esplorare sono necessariamente limitate.

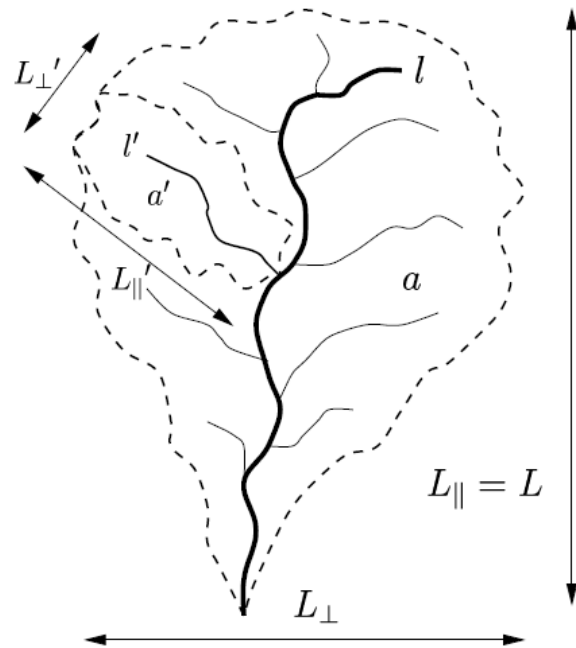


Figura 2.5 [Dodds *et al*, 1999]: rappresentazione della legge di Hack e autosimilarità globale del bacino e locale dei sottobacini; i parametri principali definenti un bacino sono l'area cumulata a , la lunghezza del corso d'acqua principale l , $L_{||}$ e L_{\perp} le dimensioni euclidee.

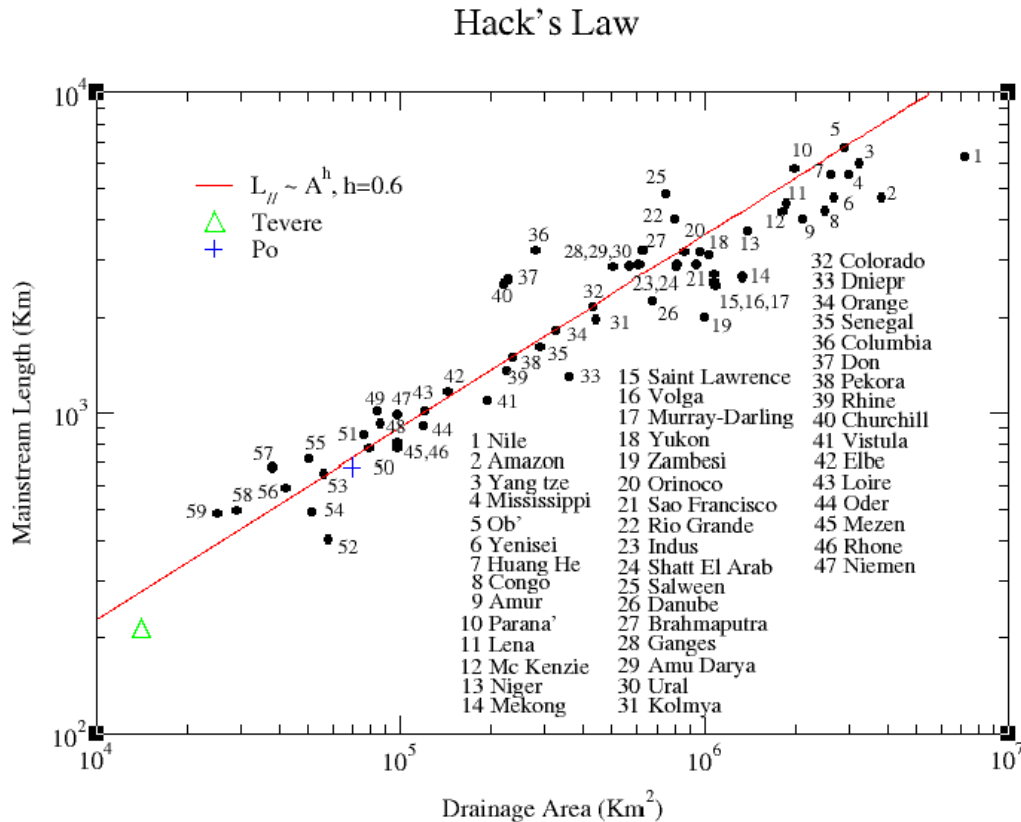


Figura 2.6: relazione tra la lunghezza del canale principale e l'area del bacino di differenti fiumi nel mondo; si nota la bontà della legge di Hack $L_{||} \propto A^h$, con $h \simeq 0.6$.

Le reti ottenute con ottimizzazione non tenendo conto delle limitazioni della natura, e cioè permettendo degli stati intermedi in cui la potenza dissipata è arbitrariamente grande, presentano invece caratteristiche morfologiche innaturali.

Si suggerisce quindi che gli stati osservati dei sistemi naturali dissipativi e con molti gradi di libertà, possa essere spiegato dall'evoluzione verso configurazioni di minima potenza dissipata ma dinamicamente raggiungibili, e che questa sia una delle ragioni dell'esistenza e della crescita delle forme frattali rilevate in natura.

Un problema chiave è la verifica della robustezza delle configurazioni delle OCNs derivate da ogni procedura. Questo è stato studiato da Rinaldo e altri [Rinaldo *et al.*, 1992] rispetto a:

- la strategia della ricerca del minimo;
- il ruolo delle condizioni iniziali;
- la robustezza delle dipendenze funzionali nella potenza dissipata complessiva $\sum_i P_i$;
- il ruolo delle possibili anisotropie nel reticolo;
- gli effetti di disordini smorzati (*quenched randomness*).

Le strategie di ottimizzazione di base implementate sono simili agli algoritmi sviluppati nel contesto del problema del commesso viaggiatore³. Il numero di soluzioni possibili in esso, ciascuna con valore diverso della funzione obiettivo, cresce esponenzialmente con il numero N dei percorsi possibili, e risulta impossibile risolvere il problema costruendo e valutando tutte le possibili soluzioni. Tale tipo di problema viene detto a crescita polinomiale (*NP completo*).

E' stato dimostrato che le soluzioni approssimate basate sulla ricerca random dei miglioramenti forniscono le migliori strategie.

Vari sono gli algoritmi implementati per verificare le OCNs, tra cui si accennano il *meccanismo di Lin-Kernighan* e le strategie di *simulated annealing* come quella di *Metropolis*.

Molte reti potrebbero sembrare ottime, e non solo a prima vista, ad esempio le reti Eden hanno la stessa numerazione di Horton e la matrice di Tokuga delle OCNs, così come anche il bacino di Peano; tuttavia le statistiche delle grandezze geomorfologiche, es. aree e lunghezze, di queste "reti ottime spurie" differiscono notevolmente da quelle delle OCNs quindi dei bacini reali.

Si è parlato di "inevitabilità statistica" delle leggi di Horton [Kirchner, 1993], infatti esse risultano valide per qualsiasi rete distribuita e senza loops, tuttavia le OCNs hanno i vincoli stringenti di aggregazione ed elongazione, ai quali solo esse ubbidiscono.

In conclusione solo un'attenta analisi può portare alla definizione di una rete come ottima, a meno di conoscere il processo con cui è stata ottenuta.

Le OCNs sono state successivamente utilizzate anche per studiare l'evoluzione del territorio assegnando ad esse un campo di elevazioni e facendolo evolvere secondo determinate regole, tenendo conto ad esempio delle variazioni climatiche e di vincoli geologici, ed introducendo anche concetti di *Self Organized Criticality*.

2.3 OCNs, evoluzione del territorio, e fisica delle reti.

In questo paragrafo, si riassumeranno e discuteranno i più recenti sviluppi della teoria delle OCNs, sintetizzati nella recente pubblicazione "Trees, Networks, and Hydrology" [Rinaldo et al., 2006].

Si accentuerà l'attenzione nelle questioni che riguardano la ricerca affrontata per il lavoro di tesi, ossia le OCNs con eterogeneità forzata di precipitazione.

Le reti fluviali meandriche e dendritiche sono chiari esempi di forme frattali naturali che si auto-organizzano, mostrando profonde similarità tra le loro parti e la loro globalità fino a sei ordini di grandezza, con patterns ricorrenti dappertutto [Rodriguez-Iturbe e Rinaldo, 1997].

L'area contribuyente a_i in ogni punto è relazionata al gradiente dell'elevazione (la pendenza topografica) del territorio nel medesimo punto.

La relazione fondamentale che esprime questo è

$$|\vec{\nabla} z_i| \propto a_i^{\gamma-1} \quad (2.12)$$

con un valore numerico di γ attorno a 0.5 [Tarboton et al., 1989; Montgomery e Dietrich, 1992]. La relazione "pendenza-portata", assumendo l'area cumulata coincidere con il flusso cumulato quindi nel modello di OCN uniforme, fornisce una sintesi importante della fisica dei processi che portano all'evoluzione del territorio.

Si osserva che i bacini reali non sono statici, bensì si modificano su lunghe scale temporali.

Poiché le statistiche di molte quantità geomorfologiche, come la distribuzione delle aree e delle lunghezze upstream, dipendono solamente dalla "mappa" bidimensionale, l'esistenza di un *tempo di "freezing"* (con l'albero delle direzioni di drenaggio che non cambia dopo l'erosione iniziale) molto più piccolo

del tempo di rilassamento (con profilo ottenuto stabile), potrebbe fornire una spiegazione dell' invarianza degli esponenti per moltissimi bacini fluviali, a prescindere dalla loro "età" [Rinaldo et al., 1995].

Inoltre anche alcuni segni geomorfologici dei cambiamenti del clima, come la densità delle valli, misurata dall'estensione delle aree concave non canalizzate, non portano ad un'apprezzabile variazione delle statistiche, nella fattispecie τ varia nell'intervallo $1.40 \div 1.46$ mentre ψ nell'intervallo $1.67 \div 1.85$ [Rinaldo et al., 1995].

La variazione è maggiore di quella trovata dagli studi precedenti sui bacini reali [Maritan et al., 1996], ± 0.02 per le aree dal valore ottimo $\tau^* = 1.43$, ± 0.1 per le lunghezze upstream dal valore ottimo $\psi^* = 1.80$, comunque non significativa.

Si propone un versione semplificata dell'equazione di *landscape evolution*, la quale deriva dall'originale equazione di Kardar-Parisi-Zhang (o KPZ, inizialmente adottata per descrivere la crescita di interfacce per deposizione ionica), e che risulta essere la più utilizzata,

$$\dot{z}(t, \underline{x}) = -\alpha J(t, \underline{x}) |\vec{\nabla} z_i(t, \underline{x})|^2 + U. \quad (2.13)$$

Da una parte non sono stati introdotti gli effetti della diffusione perchè a larga scala sono secondari [Rinaldo et al., 2006; Passalacqua et al., 2006], dato anche il "coarse grained" delle elevazioni, ossia la sparsità con cui tale campo è discretizzato.

Inoltre i processi fluviali sono comandati dal termine $\alpha J(t, \underline{x}) |\vec{\nabla} z_i(t, \underline{x})|^2$ (è da notare che $|\vec{J}| = J$, quindi il vettore bidimensionale flusso diventa uno scalare, a seguito dell'assunzione di essere parallelo a $\vec{\nabla} z$ [Banavar et al., 2001]) e sono responsabili della creazione della rete, incidendo il territorio attraverso eventi casuali ed imprevedibili; viceversa i processi di versante sono regolati dal termine diffusivo $D \nabla^2 z_i(t, \underline{x})$ (processi SD, da "slope-dependent"), presente nell'equazione KPZ, ma non sono in grado di influenzare la rete già impressa nel bacino [Rinaldo et al., 1995] in quanto la divergenza del flusso agisce su scale temporali differenti e esclusivamente "addolcisce" il territorio.

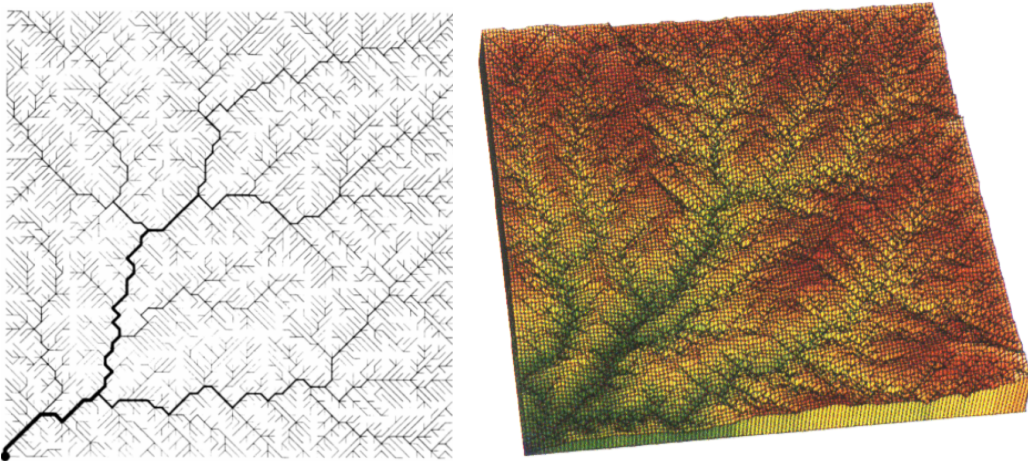


Figura 2.7 [Rodríguez-Iturbe e Rinaldo, 1997]: a sx , esempio di rete SOC ottenuta tenendo conto anche dei processi SD, si noti la forte similarità con una OCN; a dx , esempio di territorio SOC, di dimensioni 128×128 , i cui siti canalizzati sono definiti in aree a topografia convergente ($\nabla^2 z \geq 0$).

Nel modello di OCN uniforme l'area contribuyente minima è pari ad uno e questo porta a "lisciare" il territorio anche per $D = 0$, invece nel modello di OCN eterogenea (per il quale non si confonde più il flusso con l'area cumulata) è realisticamente possibile che vi siano pixel con flusso nullo, pertanto in essi e con $D = 0$ si ha il cosiddetto *pinning* ossia zone non erose "appuntite".

Nell'equazione (2.13) manca anche il termine $\eta(t, \underline{x})$ il quale rappresenta il rumore, con media zero, dovuto agli effetti combinati endogeni (elevazione del terreno) ed esogeni (degradazione atmosferica), che nello stato stazionario, la cui soluzione è l'OCN, sono in esatto bilancio.

La grandezza U è una forzante geologica, ad esempio l'innalzamento tettonico.

La soluzione stazionaria dell'equazione (2.13), quindi ricavata ponendo $\dot{z} = 0$ e assumendo $J(t, \underline{x}) \sim J(\underline{x})$, è

$$|\vec{\nabla} z| \propto J^{-1/2}, \quad (2.14)$$

la quale implica la (2.12) con $\gamma = 1/2$, quindi $|\vec{\nabla} z| \propto a^{-1/2}$ se $J \propto a$.

La relazione pendenza-portata rappresenta un fatto ben noto empiricamente in idrologia e una consistente parte della ricerca in geomorfologia, vede nella (2.14) la migliore descrizione dei processi di transizione versante-canale.

Più generalmente la (2.12) la si trova scritta nella forma

$$|\vec{\nabla}z| \propto a^{-m/n} \quad (2.15)$$

per la quale, con pendenza medio-piccola, e nell'ipotesi $J \sim a$, gli esponenti sono, $m = 1$ e $n = 2$;

Tuttavia più generalmente le portate che incidono il territorio, soddisfano alla relazione

$$J \propto a^{m'}, \quad (2.16)$$

con $m' < 1$, fatto spesso associato con il periodo di ritorno della "bankfull discharge" (la portata più efficace, vedi [Leopold et al., 1964]), tipicamente variabile da uno a due anni.

La relazione empirica pendenza-portata si discosta quindi da quella con esponente $1/2$, questo potrebbe essere un segno degli effetti della variazione del clima, ma manca ancora un'approfondita ricerca in merito. Il modello delle OCNs eterogenee potrebbe proprio servire a questo.

In definitiva, *ogni configurazione che minimizza l'energia totale dissipata, soddisfacendo alle regole dinamiche imposte (presenti nell'algoritmo di Metropolis), corrisponde, attraverso la relazione pendenza-portata, a un campo di elevazioni che è una soluzione stazionaria dell'equazione di base di evoluzione del territorio [Banavar et al., 2001].*

Il problema non è triviale: ogni soluzione stazionaria della (2.13) deve localmente soddisfare la relazione (2.14) in ogni punto.

L'energia da minimizzare, per ogni configurazione s , è

$$E(s) = \sum_i a_i^\gamma \quad (2.17)$$

scrivibile anche come $E(s) = \sum_i k_i J_i \Delta z_i$, con k_i che tiene conto delle eterogeneità dei suoli, e $J_i \Delta z_i$ come potenza in ogni collegamento i ; infatti nell'ipotesi di $k_i = \text{cost} = 1$ e con $\Delta z_i \propto J^{-1/2}$ (un corollario dell'equazione (2.14) e (2.13)) si riottiene la (2.17).

Confondendo il flusso con l'area la (2.17) è possibile scrivere

$$E(s) = \sum_i J_i^\gamma(s) \sim \sum_i a_i^\gamma \quad (2.18)$$

dove $J_i(s)$ è l'insieme dei flussi definiti nella configurazione s , associato alla topografia del territorio z , attraverso il relativo gradiente ∇z .

La relazione portata-pendenza da sola non implica stazionarietà, perchè il flusso può essere, e in generale non è, nella direzione della "discesa più ripida" (*steepest descent*) nel territorio ricostruito.

Una configurazione s è detta essere di minimo locale del funzionale (2.18), se una delle configurazioni s' vicine ad essa (con un'unico collegamento cambiato) corrisponde ad una maggiore energia spesa. Il minimo locale è quindi stabile nella dinamica di un singolo cambiamento nei collegamenti; quindi l'insieme dei collegamenti $s \cup s'$ è un grafo con un singolo loop.

Un territorio ricostruito da una OCN è quindi consistente con il fatto che il flusso segue la direzione a massima pendenza [*Rinaldo et al.*, 2006].

Le condizioni di minimo locale sono,

$$(\Delta E)_{k \rightarrow j} > 0, \quad (2.19)$$

la quale implica,

$$z(j) > z(k). \quad (2.20)$$

L'implicazione inversa invece non è valida, infatti una soluzione stazionaria dell'equazione (2.13) non è necessariamente un minimo locale per E , nella dinamica del cambiamento possibile di un solo collegamento.

Si riporteranno ora in breve i principi che dimostrano i vantaggi selettivi degli alberi (intendendo configurazioni ad albero) nella fisica fluviale.

Indicando più correttamente con J_b (anzichè con J_i per ogni pixel-nodo i) il flusso ad ogni collegamento b , l'iniezione uniforme è equivalente all'insieme di vincoli per ogni nodo x ,

$$(\partial J)_x = \sum_{b \in x} J_b \theta(b, x) = 1 \quad (2.21)$$

dove $\theta(b, x) = \pm 1$ se b è orientato verso l'esterno (segno positivo) o verso interno (segno negativo) del nodo x , rispettivamente.

Ogni minimo locale della funzione

$$E = \sum_b |J_b|^\gamma \quad (2.22)$$

quando $0 < \gamma < 1$, corrisponde a $J_b \neq 0$ solo sui collegamenti di un'albero distribuito.

Il punto principale è nell'affermazione che le reti corrispondenti ad un minimo locale dell'energia dissipata, sono senza percorsi chiusi e ad albero [Banavar et al., 2000].

La rete è ad albero in seguito ai seguenti vincoli:

- non è possibile avere $J_b = 0$ su tutti i collegamenti b connessi ad un sito, quindi deve esserci almeno "un outlet" da ogni sito (2.23);
- un sito (o più siti) deve essere dichiarato come outlet globale (2.24);

Le strutture senza loops emergono come soluzioni ottime dell'equazione (2.22), con i vincoli (2.23) e (2.24), ed è precisamente il caso delle reti fluviali.

Si propone ora un esempio, rimandando per le dimostrazioni a [Rinaldo et al., 2006] e agli articoli in esso citati in merito al problema, il quale illustra il caso di un reticolo quadrato con valori interi dell'area a , per il quale l'energia dissipata da minimizzare è data da,

$$E = |a|^\gamma + |a + 1|^\gamma + |1 - a|^\gamma + |2 - a|^\gamma. \quad (2.25)$$

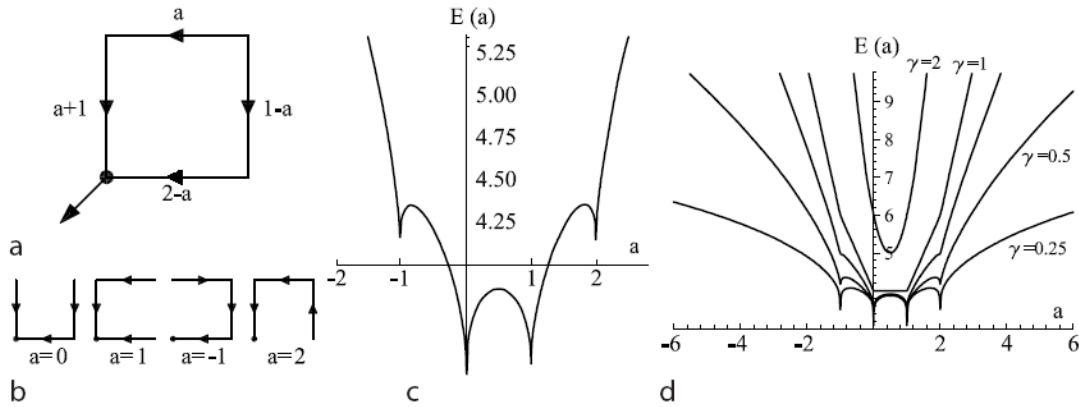


Figura 2.8 [Rinaldo et al., 2006]: (a) reticolo a quattro collegamenti, con l'indicazione delle correnti che rispettano la continuità ai nodi nei quali vi è un'iniezione pari a $r_i = 1$; (b) gli unici possibili alberi corrispondenti ai casi $a = 0, -1, 1, 2$; (c) dissipazione di energia $E(a)$ dell'equazione (2.25) in relazione ad a ; (d) $E(a)$ vs a per i casi $\gamma = 0.5, 0.75, 1, 2$ [Banavar et al., 2002];

Da notare il caso per $\gamma = 2$ il quale corrisponde al caso della rete di resistori con un solo minimo per $a = 1/2$ [Doyle e Snell, 1989]. La semplice configurazione scelta, porta a dire che il numero di loop è dato dal numero di collegamenti meno il numero di nodi escluso l'outlet, quindi $n_b - n_{x-1} = n_l$, che corrisponde ad un particolare caso del teorema di Eulero.

Le condizioni al contorno e le condizioni iniziali si è visto influenzano lo stato ottimo fattibile [Rigon et al., 1998], e dinamicamente accessibile, a differenti gradi a seconda del loro potere di vincolamento.

In generale l'influenza è forte, basti vedere come l'OCN (ma anche una *gsOCN*) porti "la firma" delle condizioni iniziali e al contorno della rete Eden dalla quale ha tratto origine (supponiamo ad esempio condizioni al contorno cilindriche, quindi outlets posizionati casualmente sui lati); per un esempio si veda la Figura 5.6 al Capitolo 5.

Certo in più l'OCN ha l'aggregazione e l'elongazione dei bacini reali.

Quindi sia la rete ottima con la peggior "performance" energetica, sia quella che descrive al meglio i pattern reali, sono pensate come manifestazioni della ricerca miope della natura nel processo di evoluzione [Rinaldo et al., 2006].

Si riportano ora molto brevemente alcune implicazioni della teoria delle OCNs in campo biologico, e a riguardo di altre reti complesse, ottenibili tramite ottimizzazione, ma derivanti da altri principi di selezione.

Per gli ulteriori chiarimenti si rimanda all'Allegato 1, invece per la trattazione completa a [Rinaldo *et al.*, 2006] e alle relative pubblicazioni in esso citate.

L'*allometria* strettamente è la scienza che studia i rapporti differenziali di crescita delle parti di un organismo vivente nella sua interezza, o di una sua parte, oppure in relazione ad un processo. In idrologia è possibile fare uno studio analogo considerando i sottobacini come le parti fondamentali costituenti il bacino stesso. Le analogie del modello delle OCNs con il modello biologico degli esseri viventi ed il metabolismo, derivano dagli studi di Banavar, Maritan e Rinaldo [Banavar *et al.*, 1999, 2002, 2003; Maritan *et al.* 2002].

In particolare l'area cumulata a_x assume il ruolo del tasso metabolico del bacino B , quindi

$$B \propto a_x \sim \sum_{j \in nn(x)} a_j + 1, \quad (2.26)$$

mentre l'analogo della massa corporea M è la somma delle aree di tutti i siti y connessi a x ,

$$M \propto \sum_{y(x)} a_y \quad (2.27)$$

da cui si può ricavare la dibattuta [Dodds *et al.*, 2001] "quarter power law" che richiede esclusivamente il carattere diretto della rete, non per forza frattale,

$$M \propto B^{\gamma = \frac{D+1}{D}}, \quad (2.28)$$

nella quale D vale due per i bacini fluviali, tre per gli organismi viventi, animali e vegetali.

Attraverso delle considerazioni inerenti la legge di Hack, da sempre molto discussa in ambito scientifico [Mandelbrot, 1983], si ricava la relazione tra l'esponente γ (attenzione che non è l'esponente della relazione (2.18) e (2.22), ossia quello pari a ~ 0.5 nell'espressione dell'energia dissipata) e quello di Hack h ,

$$\gamma = 1 + h \quad (2.29)$$

Le OCNs e i bacini reali hanno γ nell'intervallo $[1.50, 1.59]$, le hotOCNs portano a $\gamma = 1.68$, la rete di Scheidegger a $\gamma = 1.67$, il bacino di Peano a $\gamma = 1.5$.

La proprietà allometrica è quindi distintiva della struttura della rete (anche se eseguendo un test allometrico d'insieme, vedi Figura 2.9 *dx*, si ricava $\gamma = 1.5$), diversamente dalle misure topologiche le quali sono necessarie, piuttosto che sufficienti, quando si comparano due reti (ad es. si ricorda come i rapporti di Horton e la matrice di Tokunaga del bacino di Peano, risultino indistinguibili da quelli delle OCNs).

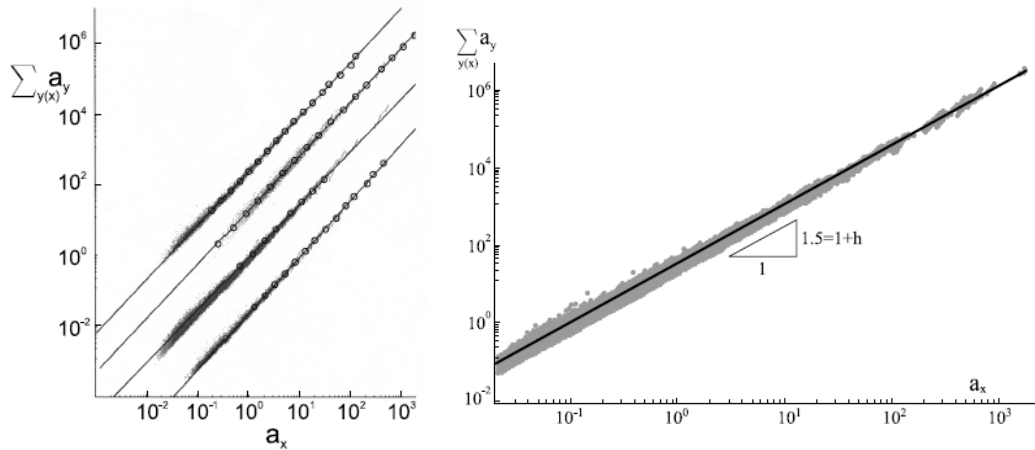


Figura 2.9: a *sx*, allometria delle reti (*allometria "intraspecie"* perchè ogni bacino è relazionato con i propri sottobacini) per quattro diversi bacini (i dati sono stati shiftati), si noti l'analogia con i grafici allometrici che relazionano la massa corporea M con il metabolismo B attraverso la legge $M \propto B^\gamma$; a *dx*, allometria d'insieme (o *allometria "interspecie"*) di una rete di Scheidegger, il bacino reale Dry Tug Fork (California), una OCN e la corrispondente hotOCN, e il bacino di Peano; si nota la variazione limitata dalla retta di interpolazione con pendenza $\gamma = 1 + h = 3/2$ ($\gamma = 4/3$ nelle piante e negli organismi viventi), con h l'esponente di Hack [Maritan *et al.*, 2002]

La concavità dell'energia dissipata E nel caso dei bacini fluviali, è dettata direttamente dalla fisica del problema di evoluzione del territorio.

Esistono altre reti ottime in natura, es. ecologiche, ma anche reti artificiali come Internet, le quali hanno possono presentare la funzione E convessa, manifestano loops a tutte le scale, ed in genere non sono ad albero.

Si citano le *reti casuali* le quali favoriscono la *connettività* e le reti a scala libera le quali favoriscono la *direttività*; entrambe quindi nascono da pressioni selettive, contrapposte, e diverse da quelle delle OCNs.

L'entropia che caratterizza tale reti, è calcolata attraverso una relazione avente la stessa forma di quella che fornisce l'entropia delle reti fluviali nel processo di ottimizzazione (vedi (5.8) Capitolo 5); tuttavia tale entropia non è funzione di T , perchè tutte queste reti sono ottime.

La variabile indipendente è λ , parametro che tiene conto della densità di rete e della sua direttività (si veda [Colizza, 2004]), quindi

$$H(\lambda) = - \sum_{k=1}^{n-1} P_{k_p} \ln P_{k_p}, \quad (2.30)$$

con P_{k_p} la frazione di nodi aventi grado k_p (si veda più avanti cosa si può intendere per grado di un nodo).

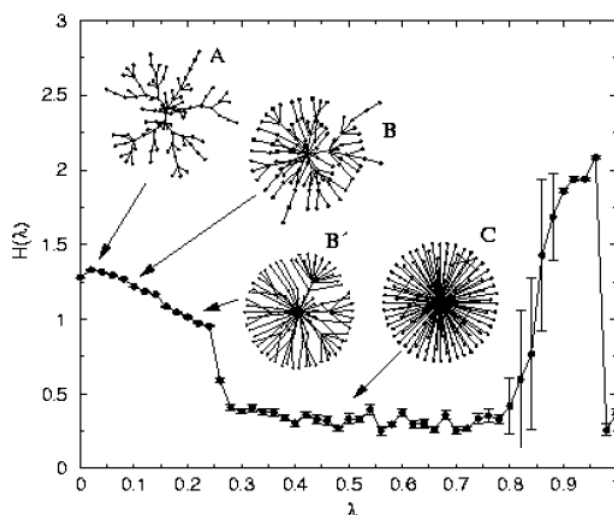


Figura 2.10 [Colaioni, 2004]: grado di entropia $H(\lambda)$, mediato su 50 repliche, di reti ottime; A: rete "exponential-like", B: rete con una distribuzione dei gradi k a legge di potenza trocata, B': rete intermedia tra B e C, C: rete a stella; si vede come per $H(\lambda)$ maggiore si abbia un carattere maggiormente random della rete.

L'energia E da minimizzare, attraverso il medesimo algoritmo di Metropolis utilizzato per le OCNs, è riformulata in quanto tiene conto di distanze pesate (si ha quindi un grafo pesato o *weighted graph*).

Si considerano come distanze non solo i percorsi più brevi tra due nodi, ma anche i gradi k_p dei nodi p incontrati lungo tali percorsi, ad esempio il numero di nodi a cui il generico nodo p è connesso.

Quindi la funzione da minimizzare è

$$E = \sum_{i < j} d_{ij} \quad (2.31)$$

dove i e j sono due generici nodi del sistema e la distanza pesata è così definita,

$$d_{ij} = \min_P \sum_{p \in P: i \rightarrow j} k_p^\alpha. \quad (2.32)$$

Nel particolare caso di rete ad albero e senza loops il percorso P è unico, quindi

$$d_{ij} = \sum_{p \in P: i \rightarrow j} k_p^\alpha.$$

Il parametro α stabilisce la convessità o concavità della funzione E , e riproduce il conflitto tra due obiettivi opposti e in competizione tra loro: per $\alpha \rightarrow 0$ si tende alla più alta connettività del sistema a prescindere dal "traffico" generato (grafo capitalista), dall'altro lato si tende alla necessità di evitare (o favorire per $\alpha < 0$) i problemi derivanti un'alta connettività, ad esempio gli "imbottigliamenti".

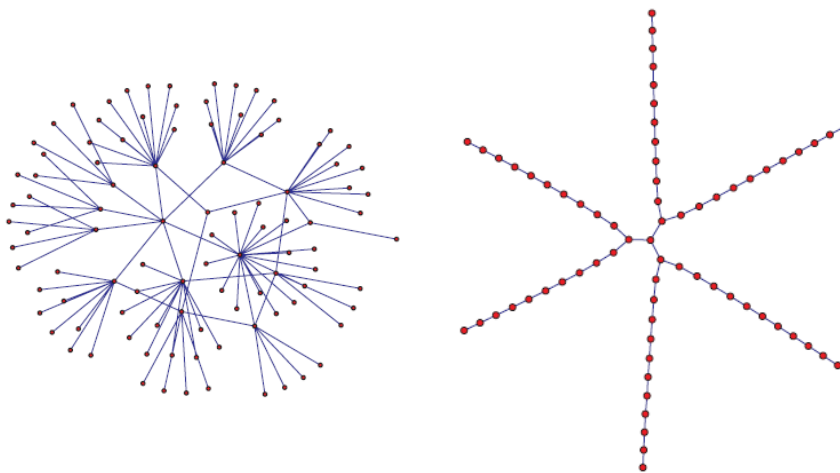


Figura 2.11 [Colizza, 2004]: esempi di reti ottime, le quali possono subire delle transizioni, l è il numero di links, n il numero di nodi; a sx , rete random o *scale-free* con alcuni nodi altamente connessi ad altri periferici e relativamente non connessi, con $\alpha = 0.4$, $l/n = 1.05$, $n = 100$; a dx , rete in cui quasi tutti i nodi hanno lo stesso grado $k_p = \langle k_p \rangle$ che favorisce la direttività, e con $\alpha = 2$, $l/n = 1.05$, $n = 100$.

Sono state utilizzate tecniche di clustering e dei gruppi di rinormalizzazione per investigare le transizioni di fase di queste reti, qui però si citano solamente.

L'idea finale è l'esistenza di un qualche principio di selezione delle forme delle reti che si hanno in natura, poichè esse spesso consistono in patterns auto-ripetenti a tutte le scale [Song et al., 2005]. Le reti fluviali, dal delta alla zona di produzione della portata, possono essere quindi spiegate attraverso la combinazione di meccanismi dinamici e la selezione naturale [Rinaldo et al., 2006].

Una caratteristica importante delle OCNs è quella di essere originate da un campo di elevazione, tale che localmente la relazione pendenza-portata vale in ogni punto, e l'insieme delle direzioni di drenaggio corrispondono a una data rete senza *loops*.

Ogni albero distribuito e senza percorsi chiusi, infatti, testimonia un minimo locale dell'energia totale dissipata.

Studio analitico e numerico delle Reti Ottime.

3.1 Sommario.

E' stato analizzato il modello OCN per le reti fluviali sia analiticamente sia numericamente. In un modello a reticolo (*lattice model*) è stato introdotto un funzionale descrivente la dissipazione di energia ed è stato minimizzato per trovare la configurazione ottimale della rete.

Il carattere frattale delle reti fluviali si riflette nel comportamento a legge di potenza di varie quantità caratteristiche della morfologia del bacino.

Nell'ipotesi di leggi di scala dimensionalmente finite (*finite size scaling*) gli esponenti descriventi il comportamento a legge di potenza sono stati calcolati esattamente [Colaïori et al., 1997] e mostrano aderenza al comportamento "di campo medio", ad eccezione di due valori limitanti del parametro caratterizzante la dissipazione di energia per il quale il sistema appartiene a differenti classi di universalità.

Due versioni modificate del modello OCN, incorporanti un "disordine smorzato" (*quenched disorder*) sono state considerate:

- il primo simulante le eterogeneità nelle proprietà locali del suolo;
- il secondo considerante gli effetti di pioggia non uniforme nel bacino.

Nella regione di comportamento a campo medio il modello si è dimostrato robusto ad entrambe le fonti di perturbazione.

Nei due casi limitanti la precipitazione random è ancora irrilevante quando l'eterogeneità nelle proprietà dei suoli porta a nuove classi di universalità.

Vengono ora riportati i risultati di analisi numeriche sul modello che confermano e complementano le analisi teoriche del minimo globale.

Le statistiche sul minimo locale sembrano rispecchiare fortemente i dati osservazionali dei fiumi reali.

3.2 Definizione e derivazione delle leggi di scala.

Un bacino fluviale è descritto come un campo scalare delle elevazioni.

Le direzioni di drenaggio sono identificate dalla discesa più ripida (*steepest descent*), ossia dal maggiore locale decremento del campo di elevazione.

L'estrazione dei bacini fluviali viene fatta attraverso le *Digital Terrain Maps* (*DTMs*) con tecniche che permettono di valutare la rete di drenaggio analizzando ogni *pixel* (es. valutandone la curvatura) del campo di elevazione in analisi; un *DTM*, ma anche una *Digital Elevation Map* (*DEM*), consiste infatti in una matrice delle altitudini di porzioni di territorio, tipicamente quadrate di lato variabile da 10 a 30 metri, rilevate da satellite geostazionario. Ogni porzione è quindi rappresentata da un pixel al cui baricentro viene attribuita la quota media del territorio che sottende.

[*Bras et al.*, 2005; *Rinaldo et al.*, 1999a-b-c; *Helmlinger et al.*, 1993]

Le direzioni di drenaggio vengono individuate con due possibili metodi, il primo detto "delle otto direzioni di drenaggio", il secondo più recente "delle infinite direzioni di drenaggio" (vedi <http://hydrology.neng.usu.edu/taudem/>).

□

Le reti idrografiche si assomigliano in senso statistico (es. le leggi di Horton manifestano questa similarità) però senza un riferimento esterno è impossibile distinguere le dimensioni reali di ciò che si sta osservando.

Poichè i bacini fluviali sono autosimili sino alla scala dei versanti tutte le misure che riguardano le reti di canali, e in particolare le pendenze e le aree contribuenti, andrebbero riferite a tale scala fondamentale.

Il *coarse graining* (indicato spesso con l'acronimo *CG*) rappresenta l'insieme delle operazioni, descrivibili anche analiticamente in modo rigoroso, che si compiono quando si passa da una scala di osservazione più dettagliata a una più grossolana.

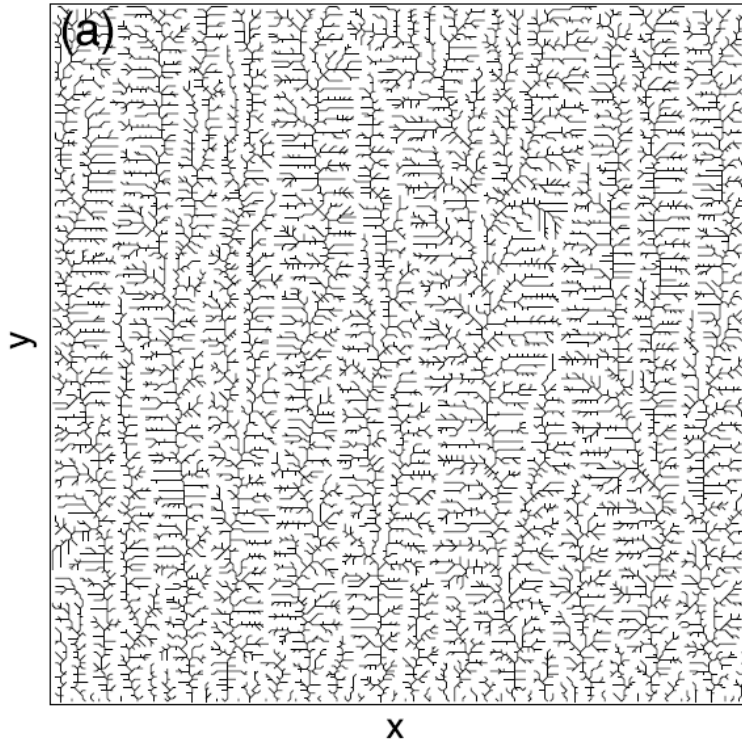
Si introducono le seguenti grandezze, $N = \frac{A}{l^2}$, $a = l^2$, e $A_i = N_i a$, dove N è il numero totale di pixels che compongono il bacino \mathcal{B} , $A = L \cdot L$ è l'area totale del

bacino, a è l'area relativa a ciascun pixel di lunghezza unitaria l , e A_i è l'area cumulata relativa al pixel i -esimo. Tutte queste quantità sono pensate riferite alla scala fondamentale Λ . Il *coarse graining* consiste nel creare nuovi pixels raggruppando quelli originari e mantenendo l'area del bacino A inalterata; i nuovi pixel generati hanno lato pari a λl dove λ è l'*indice di coarse graining* e rappresenta il numero di pixels raggruppati per unità di lunghezza.

Il nuovo "regolo" di base delle aree è quindi $a^{(\lambda)} = \lambda^2 a = \lambda^2 l^2$ e il nuovo numero totale di pixels è $N^{(\lambda)} = N/(\lambda^2 l^2)$.

Il valore medio di elevazione del nuovo pixel di lato λl , è calcolato come l'elevazione media dei λ^2 pixels costituenti di lato l , e la nuova rete di drenaggio è ricavata secondo le linee di massima pendenza dal nuovo campo di elevazioni aggregato.

La *densità di drenaggio* Hortoniana, definita come $\mathcal{D} = \frac{L_T}{A}$ con L_T la lunghezza totale della rete drenante ed A l'area totale del bacino, effettuando il CG diminuisce.



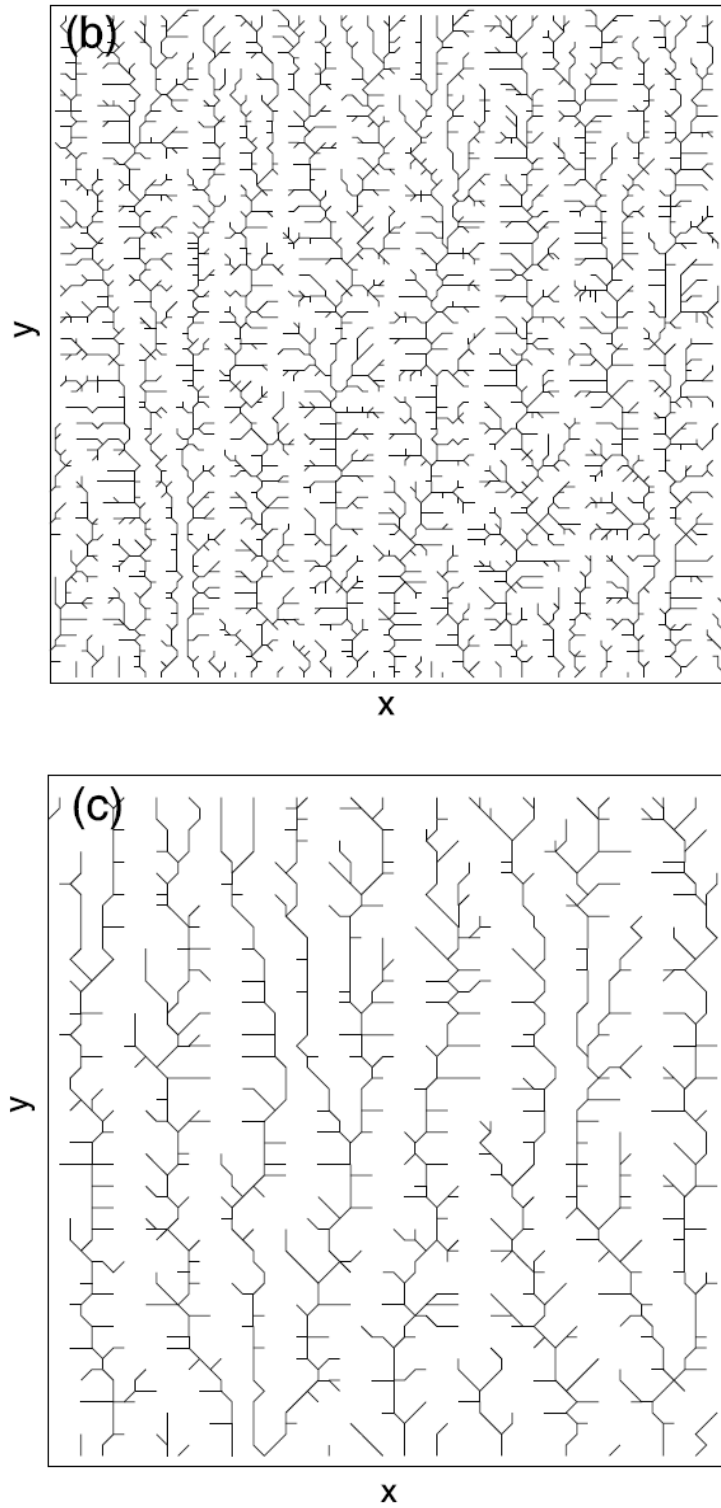


Figura 3.1 [Passalacqua et al., 2006]: (a), (b), (c), estrazione di reti con

$A = L \times L = 256 \times 256$ da campi di elevazione in stato stazionario, diversi per *risoluzione di griglia*, ed ottenuti dall'equazione semplificata di "landscape evolution" del modello KPZ con crescita costante; al diminuire della risoluzione (per $L = cost$) l'indice di coarse graining λ aumenta, pertanto diminuisce la precisione nella soluzione numerica delle simulazioni idro-geomorfologiche; la rete (a) ha risoluzione 256×256 ossia $\lambda = 1$, la rete (b) ha risoluzione 128×128 quindi $\lambda = 2$, la rete (c) ha risoluzione 64×64 quindi $\lambda = 4$.

L'operazione di *coarse graining* inoltre preserva l'elevazione media se viene eseguito il *pits eating* (o *pits filling*), ossia la correzione della quota dei pixel circondati da altri a maggiore elevazione, che altrimenti comporterebbe una individuazione delle direzioni di drenaggio errata.

La trasformazione dovuta al *coarse graining* dello stato di un dato sistema è chiamata in fisica *rinormalizzazione*, e l'obiettivo del così chiamato *gruppo di rinormalizzazione*, è studiare quantitativamente il cambiamento che una quantità fisica manifesta, quando le osservazioni sono compiute a differenti gradi di *coarse graining*.

I frattali e le procedure di rinormalizzazione sono intimamente connessi; infatti un frattale può essere definito come un oggetto che è invariante alla trasformazione di un gruppo di rinormalizzazione [Takayasu, 1990].

Il metodo del gruppo di rinormalizzazione usa quindi esplicitamente le proprietà di invarianza di scala, ed è risultato in passato la chiave di molti fondamentali sviluppi in fisica, geofisica compresa, ad esempio si veda [Turcotte, 1992] nello studio del flusso nei mezzi porosi.

Non bisogna ricorrere nell'errore di confondere il *coarse graining* con l'estrazione automatica di un bacino fissando valori di soglia sull'area cumulata via via crescenti. Le due operazioni sono nettamente differenti, sia a livello teorico sia a livello pratico.

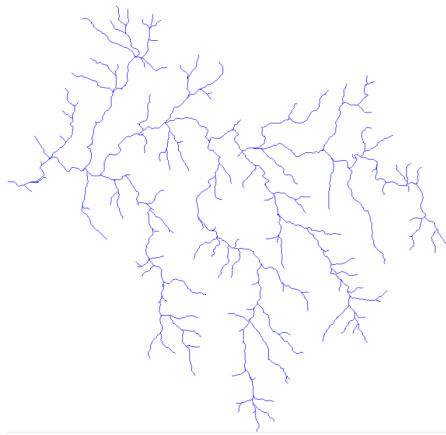
Stabilire una soglia A^* sull'area cumulata (è uno dei possibili metodi di estrazione della rete) significa infatti considerare come pixel-canale esclusivamente quei pixels con $A_i > A^*$, non vengono quindi creati nuovi pixels e ricalcolata la rete su di essi.

In sostanza spostare la soglia è equivalente ad ingrandire o rimpicciolire un'immagine, quindi vedere più o meno dettagli.

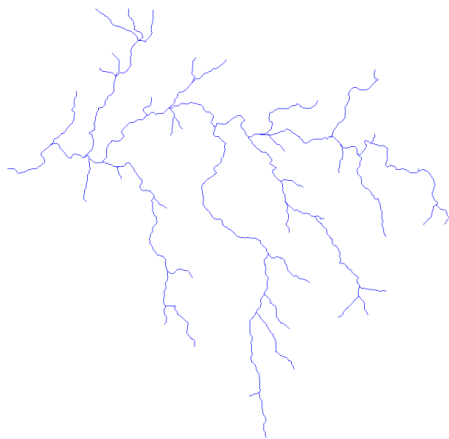
Si ricordano altri due possibili tecniche di estrazione delle reti idrografiche, quali il metodo sulla pendenza e sull'area cumulata ed il metodo della soglia sull'area cumulata delle celle concave, entrambi implementati nel programma TauDEM [Tarboton et al., <http://hydrology.neng.usu.edu/taudem/>].

Il metodo della soglia sull'area cumulata e quello della soglia sull'area cumulata delle celle concave, forniscono sostanzialmente lo stesso risultato, mentre il metodo

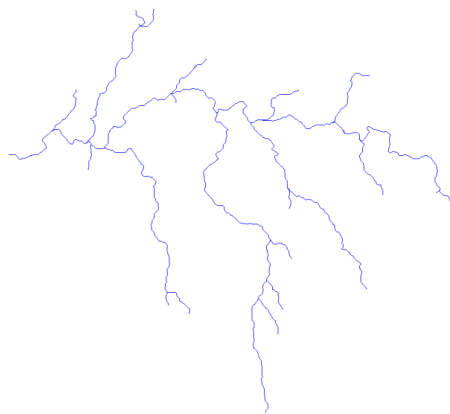
della pendenza e dell'area cumulata differisce apprezzabilmente dai primi a parità di numero di sottobacini estratti.



(a)



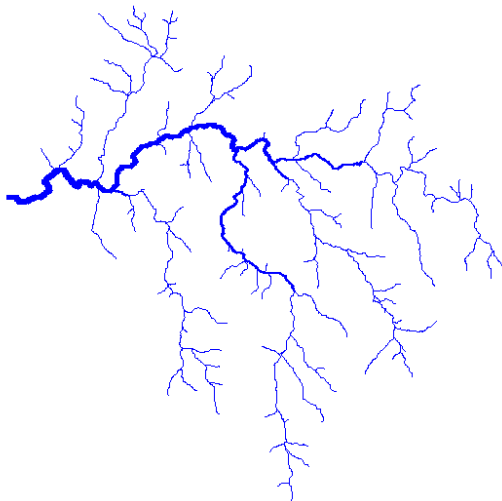
(b)



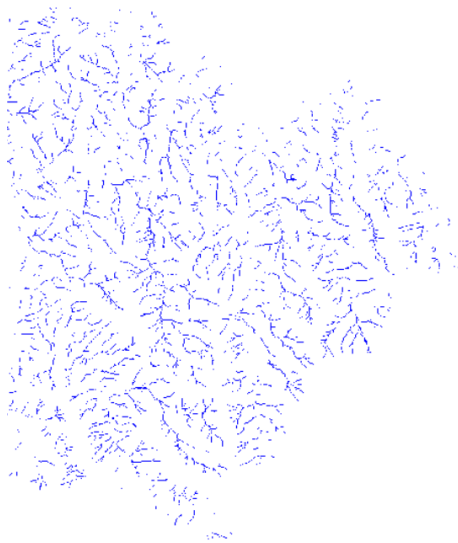
(c)

Figura 3.2: (a) (b) (c) estrazione bacino del Taloro con il metodo della soglia sull'area cumulata (*Contributing Area Threshol Method*) utilizzando il programma

TauDEM [Tarboton, 2005] per $A^* = 700 \Rightarrow 306$ sottobacini, $A^* = 2500 \Rightarrow 80$ sottobacini, e $A^* = 5000 \Rightarrow 43$ sottobacini rispettivamente; all'aumentare di A_{lim} il numero di sottobacini diminuisce perchè si riduce il numero di pixel-canale con $A_i > A^*$.



(a)



(b)

Figura 3.3: (a) bacino del fiume Taloro estratto con "extract-ocn" della Libreria FluidTurtle, in seguito implementata nella HortonMachine di JGrass [Rigon *et al.* 2002, 2006a, 2006b; Convertino *et al.*, 2006] con soglia $A^* = 1000$, nel quale la larghezza dei canali è posta proporzionale a \sqrt{A} ; si nota la similarità alla rete estratta di Figura 3.2 (a), la quale è relativa ad un valore di soglia $A^* = 700$, quindi presenta più pixel canalizzati; (b) estrazione rete bacino del Taloro con $A^* = 100 \Rightarrow$ rete piumata; l'assunzione di valori di soglia troppo bassi per tutti i possibili metodi di estrazione porta al piumaggio della rete con la creazione di *pixel-canale* inesistenti, quindi una struttura di drenaggio completamente inesatta, si preferisce pertanto una rete semplificata ma aderente alla realtà.

┘

La presenza dei laghi nel modello OCNs non è stata considerata, quindi l'acqua passa per forza da un pixel all'altro, condizione equivalente ad avere tutti i laghi saturi.

Una rete fluviale può essere rappresentata come un albero orientato distribuito (oriented spanning tree) in un reticolo bidimensionale di dimensione e forma arbitraria, nel quale i collegamenti orientati, fuoriuscenti dai nodi, corrispondono alle direzioni di drenaggio.

Si considera un albero distribuito con outlet in un angolo su di un reticolo di dimensione $L \times L$.

Il sito i è a monte del sito j se esiste un percorso orientato da i a j . Associato ad ogni sito c è un'iniezione locale di massa r_i corrispondente alla media annuale di pioggia al sito i .

Il flusso A_i , a cui ci si riferisce come area cumulata, può essere definito come la somma delle iniezioni su tutti i punti a monte del sito i ed includendolo. La variabile A_i è quindi espressa come:

$$A_i = \sum_j w_{i,j} A_j + r_i, \quad (3.1)$$

dove $w_{i,j}$ è 1 se j è a monte rispetto il sito i e il più vicino ad esso, altrimenti è 0. L'iniezione locale è comunemente assunta essere omogenea e identicamente uguale ad 1.

La distanza *upstream* relativa a un sito è definita come la lunghezza di un corso d'acqua ottenuta partendo dal sito scelto e muovendosi ripetutamente nella direzione a monte verso il più vicino sito con area cumulata A_i maggiore (l'outlet è escluso in quanto è un sito a valle), fino a quando viene raggiunta una sorgente, ad esempio un nodo senza collegamenti [vedi Figura 3.4 (b)].

Se si incontrano due o più nodi con area cumulata uguale, uno è scelto a caso.

Per un dato albero si può considerare la distribuzione di probabilità delle seguenti quantità: in un reticolo di dimensione lineare L data chiamiamo $p(a, L)$ la densità di probabilità delle aree cumulate a , e $\pi(l, L)$ la densità di probabilità delle distanze *upstream* l .

Queste rappresentano la frazione di siti con area cumulata a e lunghezza principale l , rispettivamente.

Si considerano anche le distribuzioni di probabilità cumulata di superamento, $P(a, L)$ la probabilità di trovare un'area cumulata maggiore di a , $\Pi(l, L)$ la probabilità di avere un sito con lunghezza principale maggiore di l .

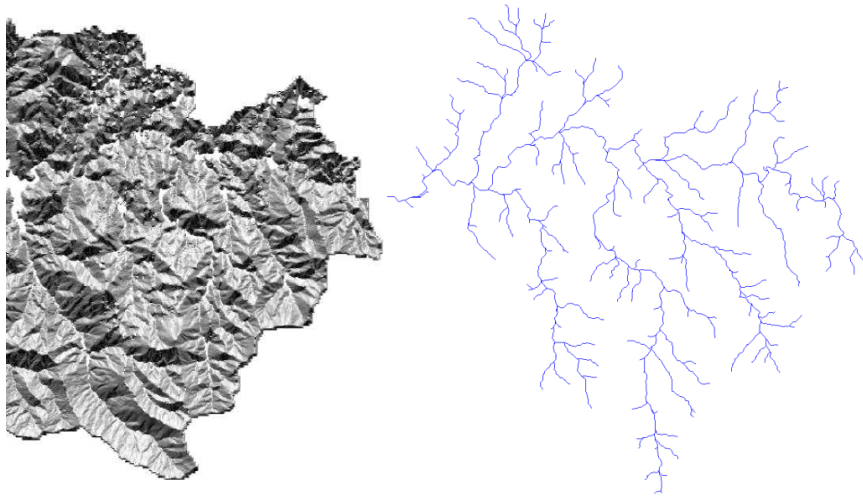
Entrambe queste distribuzioni di probabilità, qui definite nel semplice caso di un modello a reticolo, furono originariamente introdotte per descrivere i fiumi reali, e sperimentalmente è stato trovato che scalano come leggi a potenza portando alla congettura di *finite-size scaling*, ossia leggi di potenza valide per sistemi a taglia fine (vedi Allegato 1).

Le relazioni analitiche sono le seguenti:

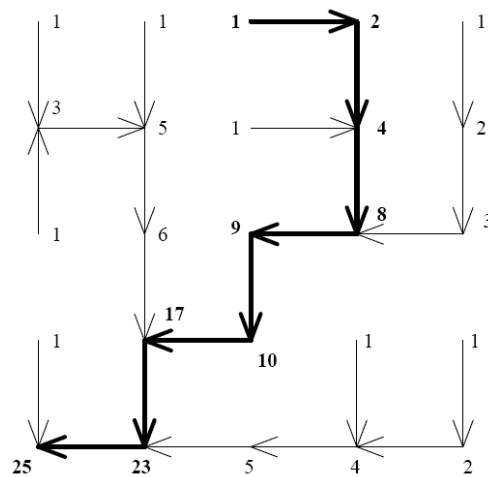
$$p(a, L) = a^{-\tau} f\left(\frac{a}{a_C}\right), \quad (3.2)$$

$$\pi(l, L) = l^{-\psi} g\left(\frac{l}{l_C}\right), \quad (3.3)$$

dove $f(x)$ e $g(x)$ sono *funzioni di scala* o *funzioni di omogeneità* che tengono conto degli effetti di scala finita, mentre a_C e l_C sono l'area e la lunghezza caratteristica del bacino, rispettivamente.



(a)



(b)

Figura 3.4: (a) bacino del fiume Taloro chiuso a Gavoi, Sardegna centro orientale, Italia, estratto da un DTM (pixel $20 \cdot 20m^2$) tramite TauDEM e JGrass con il metodo sull'area cumulata, $A_{lim} = 700 \Rightarrow 306$ sottobacini; (b) modello di bacino a reticolo (*lattice*) di dimensione $L = 5$, in cui in ogni sito i il valore dell'area cumulata A_i è visualizzato, e la linea più scura rappresenta il corso d'acqua principale.

Le funzioni $f(x)$ e $g(x)$ postulate hanno le seguenti proprietà: quando $x \rightarrow \infty$ vanno a zero velocemente a sufficienza per assicurare la normalizzazione, quando $x \rightarrow 0$ tendono a una costante in modo da fornire un semplice comportamento a legge di potenza (*scale-free behaviour*) delle distribuzioni di probabilità nel limite di un'ampia dimensione.

Questo implica anche che τ e ψ siano maggiori di uno.

L'area e la lunghezza caratteristica si postula che scalino come

$$a_C \sim L^\varphi, \quad (3.4)$$

$$l_C \sim L^{d_l} \quad (3.5)$$

dove con L intendiamo per comodità $L_{||}$ da qui in avanti.

Nei bacini reali le anisotropie sono sempre presenti dovute alla pendenza media non nulla del territorio e alla presenza di gravità.

La relazione tra le due lunghezze caratteristiche del bacino, longitudinale e trasversale, misurate lungo i due principali assi di inerzia, è

$$L_{\perp} = L^H, \quad (3.6)$$

da cui l'area del bacino scala come $A = LL_{\perp} = L^{1+H}$, quindi $a_C \sim L^{1+H} \rightarrow \varphi = 1 + H$; H è noto come l'esponente di *Hurst* e soddisfa alla disequaglianza $0 \leq H \leq 1$.

In [Colaïori *et al.*, 1997] è stato considerato un bacino quadrato, ma questo non fa venire meno le relazioni sopra riportate dato che esse valgono anche per i sottobacini.

L'esponente d_l caratterizzante la lunghezza caratteristica l_C *upstream*, può essere assunto come la *dimensione frattale* di un rivolo del bacino (per reti fluviali frattali \Leftrightarrow autosimilari, ogni torrente che diparte da un sito e arriva

all'outlet è un frattale con la stessa dimensione frattale), ed è tale che $1 \leq d_l \leq 1 + H$. I confini del bacino corrispondono a linee dritte e coprono ogni spazio.

Per *bacini auto-affini* così come sono la maggior parte di quelli reali (si parla alle volte equivalentemente di *bacini "elongati"*, vedi []) ci si aspetta $d_l = 1$ e $H < 1$, mentre, quando $H = 1$ e $d_l > 1$ si è nel caso di *bacini auto-similari*.

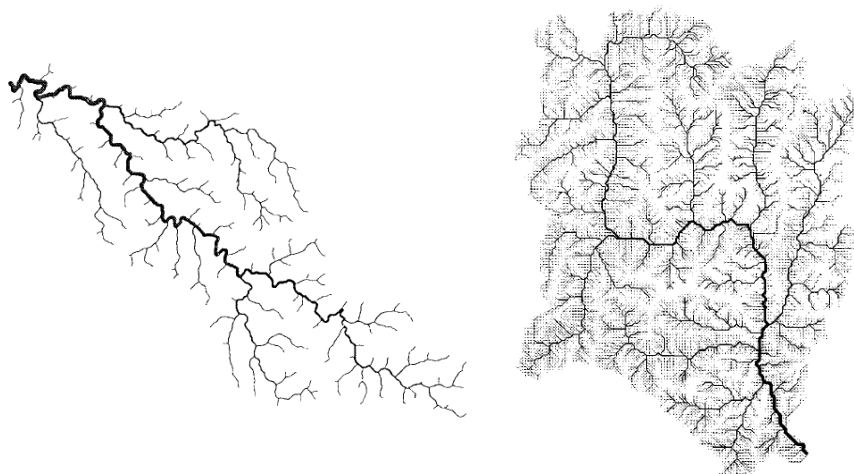


Figura 3.5: a *sx* il bacino *auto-affine* del fiume Johns, Kentucky, USA; a *dx* il bacino *auto-similare* del fiume Fella, Friuli V.G., Italia; citiamo inoltre il bacino *frattale* per eccellenza, quello di Peano, realizzato da un processo moltiplicativo binomiale che porta alla multifrattalità.

Le funzioni di probabilità cumulata di a e l sono analogamente scritte in forma di prodotto tra una legge di potenza e una legge di scala, ossia

$$P(a, L) = a^{1-\tau} F\left(\frac{a}{L^{1+H}}\right), \quad (3.7)$$

$$\Pi(l, L) = l^{1-\psi} G\left(\frac{l}{L^{d_l}}\right), \quad (3.8)$$

le quali seguono dall'equazione (2) e (3) con

$$F(x) = x^{\tau-1} \int_x^{+\infty} dy y^{-\tau} f(y), \quad (3.9)$$

$$G(x) = x^{\psi-1} \int_x^{+\infty} dy y^{-\psi} g(y), \quad (3.10)$$

dove le somme sulla variabile y sono state sostituite dagli integrali nel limite di L grande.

Dalle definizioni sopra riportate e le proprietà di f , segue semplicemente che

$$\langle a^n \rangle \sim L^{(1+H)(n-\tau+1)}, \quad (3.11)$$

per qualsiasi $n > \tau - 1$, mentre $\langle a^n \rangle \sim \text{cost}$ se $n < \tau - 1$; da notare che sia a sia l hanno un cutoff inferiore che è uno. L'equazione (11), valutata per $n = 1$, dà per l'area media,

$$\langle a \rangle \sim L^{(1+H)(2-\tau)}. \quad (3.12)$$

L'area media cumulata $\langle a \rangle$ può essere facilmente dimostrato risultare uguale alla distanza da un sito arbitrario all'outlet, mediata su tutti i siti. In effetti nella somma su tutte le distanze *downstream* (da monte verso valle, ossia con i rivoli da ogni sito all'otlet), il numero di volte che ogni collegamento appare per unità di lunghezza, uguaglia esattamente l'area cumulata del sito associato. Quindi sommando su tutte le A_i è equivalente a sommare su tutte le lunghezze *downstream*, si può pertanto scrivere

$$\langle a \rangle = \langle l_{\text{downstream}} \rangle, \quad (3.13)$$

dove $\langle l_{\text{downstream}} \rangle$ può essere valutato sostituendo nella somma che fornisce il momento primo, la distanza di ogni punto dall'outlet misurata lungo il canale, con la corrispondente distanza Euclidea $d(x)$ alla potenza d_l .

$$\langle l_{\text{downstream}} \rangle = \frac{1}{L^2} \sum_x l_{\text{downstream}}(x) = \frac{1}{L^2} \sum_x d(x)^{d_l} \sim L^{d_l} \quad (3.14)$$

Questo fatto è generale e le argomentazioni usate non necessitano della conoscenza della distribuzione delle distanze downstream. Questa distribuzione può, tuttavia, essere esplicitamente derivata almeno nel caso delle *reti dirette*.

Chiamiamo *dirette* quelle reti tali che, ogni collegamento orientato ha una proiezione positiva lungo la diagonale orientata verso l'outlet.

La ragione per introdurre questa classe di reti è che i bacini fluviali, spesso hanno un caratterizzazione a rete quasi-diretta, dovuta al fatto che essi si evolvono tipicamente su una porzione di territorio in pendenza che dà una direzione di flusso preferenziale. Inoltre le reti ad albero dirette sono molto più semplici da trattare analiticamente rispetto quelle non dirette.

Per tali "alberi" si consideri l'insieme delle $2L$ diagonali, ortogonali a quella passante per l'outlet, i cui punti ad esse appartenenti hanno la stessa lunghezza downstream. Così il numero di punti \mathcal{N}_l a una data distanza l dall'outlet può essere semplicemente espressa come

$$\mathcal{N}_l = \begin{cases} l + 1, l = 1, \dots, L \\ 2L + 1 - l, l = L + 1, \dots, 2L. \end{cases} \quad (3.15)$$

La densità di probabilità per le lunghezze downstream è quindi una legge a potenza con esponente -1 , e una funzione di scala di argomento l/L :

$$\pi_{\text{downstream}}(l, L) = l^{-1} f_{\text{downstream}}\left(\frac{l}{L}\right) \quad (3.16)$$

con

$$f_{\text{downstream}}(x) = \min(x^2, 2x - x^2) \text{ e } 0 \leq x \leq 2. \quad (3.17)$$

Il momento primo di tale distribuzione fornisce nuovamente l'equazione (3.14) con $d_l = 1$, il quale è il risultato atteso per la dimensione frattale di un albero diretto. Questo risultato assieme all'equazione (3.14), suggerisce che verso valle, la distribuzione delle lunghezze possa avere la seguente forma a legge di scala

$$\pi_{downstream}(l, L) = l^{-1} f_{downstream}\left(\frac{l}{L^{d_l}}\right) \quad (3.18)$$

per il caso generale.

Le equazioni (3.13) e (3.14) portano alla seguente espressione per l'area cumulata media

$$\langle a \rangle \sim L^{d_l}. \quad (3.19)$$

Dalle equazioni (12) e (19) si ha inoltre la relazione di scala

$$1 + H = \frac{d_l}{(2 - \tau)}. \quad (3.20)$$

Ricordiamo una ben conosciuta legge idrologica, la legge di Hack [*Hack*, 1957], che relaziona la lunghezza del più lungo canale l all'area drenata a del bacino, ossia

$$l \sim a^h. \quad (3.21)$$

Il valore accettato di h è $h = 0.57 \pm 0.06$ [*Gray*, 1961, *Langbein*, 1967, *Muller*, 1973], la cui differenza dal valore Euclideo 0.5 porta alla prima supposizione della natura frattale dei fiumi [*Mandelbrot*, 1983].

Dalle equazioni (3.4) e (3.5) segue che

$$h = \frac{d_l}{1 + H}. \quad (3.22)$$

Assieme con π e p si può definire la probabilità condizionata $\tilde{\pi}(l|a)$ di trovare il corso d'acqua principale (*mainstream*) di lunghezza l , in un bacino con area cumulata a . Il caso più semplice è quando l'equazione (21) rimane ancora valida e $\tilde{\pi}(l|a)$ è una funzione molto "appuntita" di l rispetto ad a , per esempio se esiste un ben definito vincolo tra le lunghezze e le aree [*Maritan et al.*, 1996] come

$$\tilde{\pi}(l|a) = \delta(l - a^h), \quad (3.23)$$

o più genericamente [Rigon *et al.*, 1996]

$$\tilde{\pi}(l|a) = l^{-1} \tilde{g}\left(\frac{l}{a^h}\right). \quad (3.24)$$

Per le densità di probabilità π , p , e $\tilde{\pi}$, la seguente equazione di consistenza deve tenere

$$\pi(l, L) = \int_1^{L^{(1+H)}} da \tilde{\pi}(l|a) p(a, L) \quad (3.25)$$

la quale fornisce, nel limite di L grande a sufficienza,

$$(\psi - 1)d_l = (\tau - 1)(1 + H) \quad (3.26)$$

relazionando li esponenti della distribuzione delle lunghezze e della distribuzione delle aree cumulate.

Le relazioni di scala (3.20) e (3.26) possono essere espresse in una forma più semplice, osservando che sia τ sia ψ dipendono da d_l e H solo nella combinazione $d_l/(1 + H) = h$, dove h è il parametro che appare nella legge di Hack (3.21).

Quindi,

$$\tau = 2 - h, \quad (3.27)$$

e

$$\psi = \frac{1}{h}. \quad (3.28)$$

Gli esponenti caratterizzanti le distribuzioni delle aree cumulate e delle lunghezze *upstream* (da valle a monte), sono dunque relazionati dalla semplice espressione

$$\tau = 2 - \frac{1}{\psi}. \quad (3.29)$$

Per bacini auto-affini si ha

$$H < 1, \quad d_l = 1, \quad (3.30)$$

e tutti li esponenti possono essere espressi in termini dell'esponente di Hurst H , ottenendo

$$\tau = \frac{1 + 2H}{1 + H} \quad (3.31)$$

e

$$\psi = 1 + H, \quad (3.32)$$

mentre nel caso di bacini auto-simili si ha

$$H = 1, \quad d_l > 1, \quad (3.33)$$

ed esprimendo li esponenti in funzione della dimensione frattale dei rivoli d_l , si ha

$$\tau = 2 - \frac{d_l}{2}, \quad (3.34)$$

e

$$\psi = \frac{2}{d_l} \quad (3.35)$$

Da notare che in entrambi i casi si ha $\tau \leq \frac{3}{2}$, similmente è $h \geq \frac{1}{2}$. L'eguaglianza dei due casi invece si ha solo quando $H = d_l = 1$, la quale corrisponde alla situazione di campo medio.

In conclusione si riportano delle tabelle riassuntive, la prima con i risultati numerici ottenuti analizzando svariate OCNs e bacini reali, la seconda con un riepilogo delle relazioni tra gli esponenti di scala nel caso di *autoaffinità* e in quello di *autosimilarità*.

esponente	minimo assoluto	OCN	bacino reale	media nel bacino reale
β	0.50	0.43 ± 0.02	$0.41 \div 0.46$	0.43
H	1.00	0.75 ± 0.01	$0.70 \div 1.00$	0.75
h	0.50	0.57 ± 0.02	$0.52 \div 0.60$	0.57
Φ_L	1.00	1.10 ± 0.05	$1.02 \div 1.12$	1.05
ϕ	1.00	1.05 ± 0.05	$1.02 \div 1.10$	1.05
ξ	1.00	0.80 ± 0.05	$0.65 \div 0.95$	0.75

Tabella 3.1: tabella riassuntiva delle analisi delle precedenti ricerche [es. *Maritan et al.*, 1996]; si è riportata l'originaria notazione di alcuni esponenti, che alle volte capita di incontrare, nello specifico $\Phi_L = d_l$, $\phi = 1 + H = d_l/h$, e $\xi = \psi$

esponente	bacino autosimile	bacino autoaffine
τ	$2 - d_l$	$(1 + 2H)/(1 + H)$
γ	$2/d_l$	$1 + H$
h	$d_l/2$	$1/(1 + H)$

Tabella 3.2: tabella riassuntiva degli esponenti di scala più significativi (attenzione che l'esponente ψ delle lunghezze upstream è indicato con γ , come alcune volte si trova nelle pubblicazioni, es. in [*Caldarelli*, 1996]); gli esponenti sono tutti in funzione di d_l nel caso dei bacini frattali, invece in funzione di H nel caso di bacini autoaffini.

Un recente modello a reticolo formulato [*Rodriguez-Iturbe et al.*, 1992 a-b, *Rinaldo et al.*, 1992], basato su un principio di minimizzazione sembra riprodurre piuttosto bene le caratteristiche principali delle reti fluviali.

Le giuste configurazioni, di cui si è già parlato e chiamate *Optimal Channel Networks* (OCNs), sono ottenute dalla minimizzazione di una energia dissipata, scritta come

$$E = \sum_i k_i \Delta z(i) Q_i \quad (3.36)$$

dove Q_i è il flusso (la portata media annua) nel collegamento uscente dal sito i , $\Delta z(i)$ è il salto di elevazione lungo la direzione di drenaggio, e k_i caratterizza le locali proprietà del terreno come l'erosibilità.

Quest'ultimo parametro sarà preso pari ad un nel caso di reti fluviali "omogenee".

Dato un campo di elevazioni, le direzioni di drenaggio sono usualmente identificate dalla "discesa più ripida", ossia dal maggiore gradiente $\nabla z(i)$ verso valle del campo scalare $z(i)$.

Questo porta ad ottenere un'altra espressione per l'energia dissipata aggiungendo le seguenti ipotesi:

(i) nel caso di pioggia uniforme nello spazio e nel tempo, quindi con

$$Q_i \sim A_i, \quad (3.37)$$

(ii) le osservazioni sperimentali sui fiumi suggeriscono la relazione empirica tra la portata ed il salto di elevazione,

$$\Delta z(i) \sim Q_i^{\gamma-1} \quad (3.38)$$

con un valore numerico attorno a 0.5 per γ .

Così si ottiene, a parte la costante moltiplicativa, l'espressione alternativa all'equazione (3.36), la relazione

$$E = \sum_i k_i A_i^\gamma, \quad (3.39)$$

la quale è stata proposta da Rinaldo e da suoi collaboratori [*Rodriguez-Iturbe et al.*, 1992 a-b, *Rinaldo et al.*, 1992], e che verrà analizzata ulteriormente in seguito.

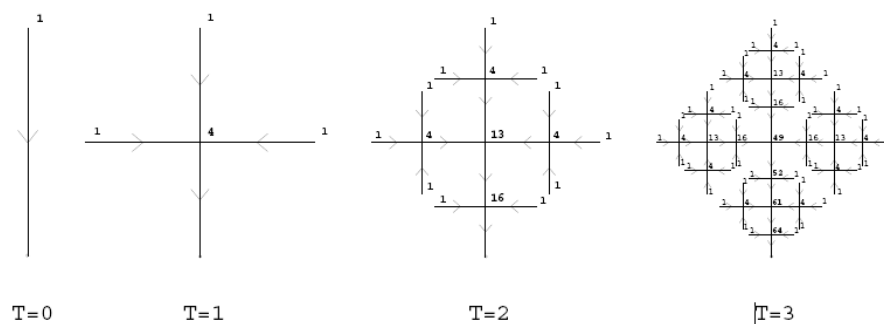
3.3 Un frattale esattamente autosimile: il bacino di Peano.

Il bacino di Peano è un frattale deterministico "a riempimento dei spazio" (*space-filling*) sul quale possono essere condotti calcoli esatti [*Flammini et al.*, 1996].

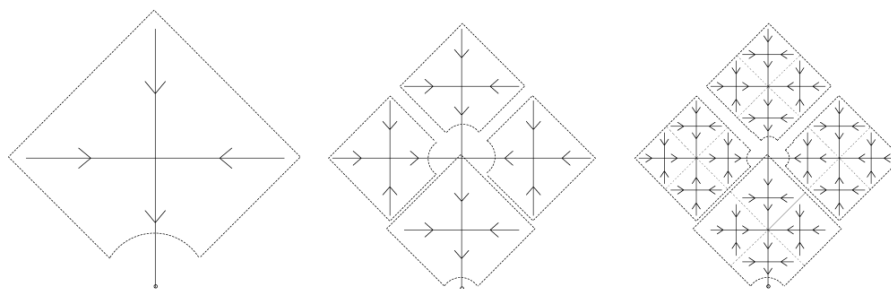
Ha una struttura ad albero distribuito non troppo dissimile da quella dei bacini reali. Le leggi di scala per tale bacino possono essere ottenute esattamente e l'energia dissipata (337) può essere stimata.

La stima dell'energia spesa nel bacino di Peano fornisce un limite superiore per l'energia minima dissipata da una OCN, e sarà un'ingrediente cruciale per i calcoli che seguiranno.

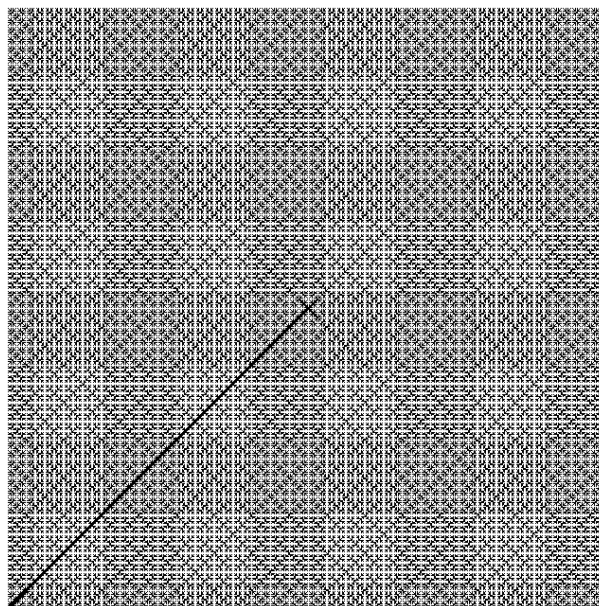
La regola per ottenere il bacino di Peano è molto semplice e non verrà trattata nel dettaglio, così come saranno solo riportati i risultati principali, senza dimostrazioni esplicitamente, delle distribuzioni delle aree e delle lunghezze.



(a)



(b)



(c)

Figura 3.6: (a) bacino di Peano a iterazioni T successive, ad ogni $stepT + 1$ vengono generati 4 nuovi collegamenti (*bonds*), due risultanti dalla suddivisione a metà del collegamento al passo T e preservando la sua orientazione, gli altri due aventi come comune estremo il punto a metà del bond allo step T e orientati verso di esso, il valore nodale è l'area cumulata A_i che nel caso di pioggia uniforme coincide con il flusso J_i ($ri = 1\forall i$); (b) evidenza della auto-similarità del bacino di Peano, per ottenerlo al tempo $T + 1$ tramite procedura ricorsiva, si prende il bacino al tempo T , si "taglia" l'outlet e si uniscono quattro copie del nuovo "sottobacino" elementare ottenuto dalla generazione dei nuovi rami, quindi in (b) se il bacino a destra ha *indice di coarse graining* $\lambda = 1$, il bacino centrale ha $\lambda = 2$, quello a sinistra $\lambda = 4$; (c) bacino di Peano dopo 10 iterazioni del processo binomiale moltiplicativo, il quale porta all'eponeute esatto $\gamma = 1 + h = 1.5$, con

l'esponente di Hack (vedi Capitolo 2 e [Rinaldo et al., 2006]).

Dopo T iterazioni il frattale ha $N_T = 4^T$ punti, escluso l'outlet, e può essere mappato su un reticolo quadrato di dimensione $L = 2^T$, con collegamenti che connettono il primo e il secondo punto vicino a formare un albero distribuito.

La struttura auto-simile del bacino di Peano suggerisce una "naturale" procedura di decimazione, sono stati infatti ricavati gli esponenti τ e ψ delle leggi di scala tramite il metodo del gruppo di rinormalizzazione [Colaïori et al., 1997].

La distribuzione di probabilità cumulata delle aree $P(A_i > a_n, L = 2^T)$, assume una espressione molto semplice per a_n di forma pari a 4^t (si può facilmente controllare dall'espansione binaria di a_n , rappresentante i distinti valori di A_i che vengono generati iterando la costruzione del bacino di Peano, che $a_{2^t-1} = 4^t$), e risulta nello specifico

$$P(A_i > a = 4^t, L = 2^T) = a^{1-\tau} F\left(\frac{a}{L^{1+H}}\right) \quad (3.40)$$

avendo la forma (3.7) con

$$\tau = 3/2, \quad H = 1, \quad (3.41)$$

e

$$F(x) = \frac{1}{3}(1-x) \text{ per } 0 < x < 1, \quad (3.42)$$

e $F(x) = 0$ quando $x > 1$.

Similmente scegliendo l di forma $l = 2^t$ e osservando che al passo T i siti con lunghezza upstream maggiore o uguale a 2^t sono quelli in cui l'area cumulata supera il valore 4^t , si trova che

$$\Pi(l \geq 2^t, L = 2^T) = l^{1-\psi} G\left(\frac{l}{L^{d_i}}\right) \quad (3.43)$$

la quale è della forma (8) con

$$\psi = 2, \quad d_l = 1, \quad (3.44)$$

e

$$G(x) = \frac{1}{3}(1 - x^2). \quad (3.45)$$

Se lo sguardo e la sensibilità comune non fossero sufficienti, sono disponibili dimostrazioni esatte per il bacino di Peano [Colaïori *et al.*, 1997, Marani *et al.*, 1991] nel quale le grandezze topologiche incontrano perfettamente quelle dei bacini reali e delle OCNs, ma non soddisfa i vincoli stringenti di aggregazione ed elongazione.

3.4 Risultati analitici.

3.4.1 Il caso omogeneo: omogeneità dei suoli e pioggia uniforme.

Si è proceduto alla analisi delle caratteristiche del minimo globale del funzionale E per γ variabile nell'intervallo $[0, 1]$ [Colaïori *et al.*, 1997].

Si sono considerati dapprima i casi limitanti per $\gamma = 0$ e 1 .

Se si chiamano l_i le lunghezze pesate dei canali che connettono il sito i all'outlet, calcolate assegnando a ogni collegamento il parametro k_i , è chiaro dimostrare che

$$\sum_i k_i A_i = \sum_i l_i. \quad (3.46)$$

Ricordiamo la premessa fatta alla relazione (3.13), in effetti denotando con $\mathfrak{D}(i)[\mathfrak{U}(i)]$ l'insieme di punti a monte o a valle rispetto il punto i , e osservando che $A(i)$ eguaglia il numero di punti nell'insieme $\mathfrak{U}(i)$ si ha $\sum_i l_i = \sum_i \sum_{j \in \mathfrak{D}(i)} k_j = \sum_j \sum_{j \in \mathfrak{U}(i)} k_j = \sum_i k_i A_i$.

La minimizzazione della dissipazione dell'energia per $\gamma = 1$ quindi, corrisponde, alla minimizzazione dei percorsi pesati che connettono ogni sito all'outlet, indipendentemente uno dall'altro.

Il caso per $\gamma = 0$ invece corrisponde alla minimizzazione della lunghezza totale pesata dell'albero distribuito, espressa dalla formula

$$E = \sum_i k_i. \quad (3.47)$$

Nel caso omogeneo il fatto di avere $k_i = 1 \forall i$ porta ad un'elevata degenerazione sia per $\gamma = 1$ sia per $\gamma = 0$.

3.4.2 Il caso eterogeneo "attenuato".

E' stato valutato l'effetto di qualche disordine "smorzato" considerando due tipi di eterogeneità:

(i) collegamenti random tra i nodi rappresentanti le locali proprietà dei suoli;

(ii) iniezione nodale random modellando la non uniformità della precipitazione.

Nel primo caso è stato dimostrato che l'energia può essere limitata dall'alto con la corrispondente energia in assenza di disordine. Questo fornisce, nel limite per L grande, un valore massimo per l'esponente τ , specificamente realizzato per $\gamma \in (\frac{1}{2}, 1)$ [Colaïori et al., 1997].

Nel caso di precipitazione casuale, è stato dimostrato che tale tipo di disordine non comporta cambiamenti nel comportamento di scala dell'energia dissipata, sempre nel limite di L grande.

Tutti i risultati analitici validi per il caso omogeneo, essendo basati sulla stima dell'energia nel limite termodinamico, possono essere quindi estesi a tale ultimo caso e forniscono gli stessi valori degli esponenti delle leggi a potenza.

Si accenna ora alla risoluzione analitica dei due casi presentata in [Colaïori et al., 1997]

3.4.2.1 ETEROGENEITA' DEI SUOLI: COLLEGAMENTI RANDOM NELLA RETE.

Nel caso di collegamenti random si è associato ad ogni collegamento del reticolo-bacino $L \times L$ con $[2L(L-1)$ collegamenti], una variabile casuale attenuata k_b , arbitrariamente distribuita in modo tale che sia $\langle k_b \rangle = 1$.

Il pedice b spazia su tutti i collegamenti del bacino, e le $2L(L-1)$ variabili-collegamento sono scelte indipendenti tra loro ed identicamente distribuite.

Per la trattazione completa si rimanda a [Colaioni *et al.*, 1997], si riporta invece il caso per $\gamma = 1$ il quale è stato esattamente risolto [Maritan *et al.*, 1996] e corrisponde al problema di un polimero diretto in un mezzo non definito, o equivalentemente, ad una parete di dominio in un ferromagnete bidimensionale disordinato.

I valori degli esponenti corrispondenti sono

$$\tau = \frac{4}{3}, \psi = \frac{5}{3}, H = \frac{2}{3}, d_l = 1, h = \frac{3}{5}.$$

3.4.2.2 ETEROGENEITA' DI PIOGGIA: INIEZIONI RANDOM NEI NODI.

Il disordine può essere introdotto nel sistema in altro modo rispetto il caso precedente, sostituendo all'iniezione costante in ogni sito del reticolo, una iniezione locale casuale e smorzata, ad esempio una eterogeneità spaziale nella precipitazione r_i nell'equazione (1). Per fare questo è possibile associare ad ogni sito i del reticolo una variabile aleatoria r_i , inoltre le variabili sono scelte in modo da essere indipendenti le une dalle altre, identicamente distribuite e con media $\langle r_i \rangle = 1$.

Si vuole quindi provare ad estendere il risultato delle OCNs a bacini "grandi", facendo attenzione al significato dell'aggettivo "grandi" nel senso che bisogna valutare rispetto a quale criterio si effettua tale classificazione; esistono infatti bacini di estensione relativamente limitata nei quali a causa dell'orografia del territorio il *pattern* di precipitazione è molto differente (es. i bacini di alcuni affluenti del Colorado e di altri fiumi tra cui il Sevier nello stato dello Utah, U.S.A., hanno nella parte alta elevata precipitazione annuale con ecosistemi alpini, e nella parte meridionale una molto ridotta precipitazione annuale con ecosistema di tipo desertico).

In genere, nell'Italia settentrionale ed Europa centrale (clima continentale), i bacini la cui dimensione $L_{||}$ e/o L_{\perp} è maggiore della dimensione caratteristica dell'evento di pioggia, sono quelli di estensione maggiore di $1000 \div 2000 \text{ km}^2$; in

tal caso è necessaria la conoscenza della struttura spaziale e temporale dell'intensità di precipitazione $j(\bar{x}, t)$, la quale generabile tramite modelli stocastici geostatistici o di *kriging*.

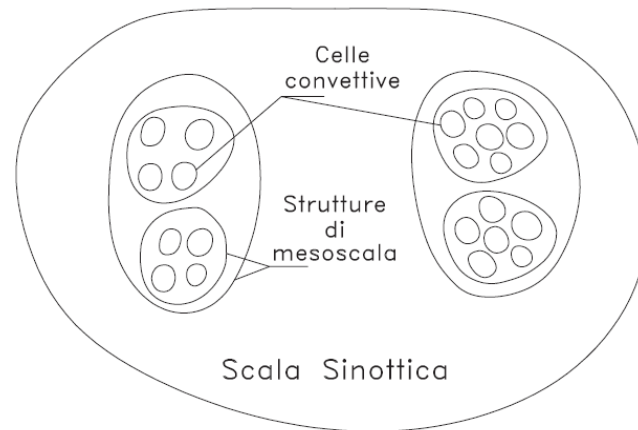


Figura 3.7 [Marani, 2005]: microscala o scala convettiva di $1 \div 5$ km, mesoscala o scala "di temporale" di $1 \div 5$ km, macroscale o scala sinottica > 100 km; dalla microscala alla macroscale j diminuisce e $t(j)$ aumenta secondo il secondo principio base dell'idrologia.

L'area cumulata deve soddisfare l'equazione (1), ossia richiamandola:

$$A_i = \sum_j w_{i,j} A_j + r_i, \quad (3.48)$$

in modo tale che

$$A_i = \sum_j \lambda_{i,j} r_j, \quad \text{con}$$

$$\lambda_{i,j} = \begin{cases} 1 & \text{se } i \text{ è connesso a } j \text{ attraverso le direzioni di drenaggio "upstream" o se } i=j \\ 0 & \text{altrimenti.} \end{cases}$$

$$(3.49)$$

Il minimo dell'energia mediata su una precipitazione random sarà indicata come $E_{rr}(\gamma)$, e per un dato valore di γ è data da:

$$E_{rr}(\gamma) = \langle \min_{\mathcal{T} \in \mathcal{S}} \sum_i A_i(\{r_j\}, \mathcal{T})^\gamma \rangle \quad (3.50)$$

dove \mathcal{S} denota l'insieme di tutti li *spanning trees* (alberi distribuiti nello spazio) \mathcal{T} e $\{r_j\}$ indica l'intero insieme delle variabili casuali.

Come in (85) \mathcal{T}^* è uno degli alberi per cui il minimo dell'energia è realizzato in assenza di casualità nella precipitazione e per un dato valore di γ .

Poi:

$$\begin{aligned} E_{rr}(\gamma) &= \langle \min_{\mathcal{T} \in \mathcal{S}} \sum_i A_i(\{r_i\}, \mathcal{T})^\gamma \rangle \leq \langle \sum_i A_i(\{r_i\}, \mathcal{T}^*(\gamma))^\gamma \rangle \quad (3.51) \\ &= \langle \sum_i \left(\sum_j \lambda_{i,j}(\mathcal{T}^*(\gamma)) r_j \right)^\gamma \rangle \leq \sum_i \sum_j \lambda_{i,j}(\mathcal{T}^*(\gamma)) \langle r_j \rangle^\gamma \\ &= \sum_i A_i(\mathcal{T}^*)^\gamma = E(\gamma). \quad (3.52) \end{aligned}$$

Quindi:

$$E_{rr}(\gamma) \leq E(\gamma) \sim \min(L^2, L^{1+2\gamma}). \quad (3.53)$$

In questo caso è anche possibile limitare l'energia dal basso con una procedura analoga a quella usata per il caso omogeneo. La trattazione dettagliata è fornita in Appendice.

Così si può concludere che:

$$E_{rr}(\gamma) \sim \min(L^2, L^{1+2\gamma}), \quad (3.54)$$

e tutti i risultati analitici del caso omogeneo sono confermati.

3.5 Risultati numerici.

3.5.1 Minimo Globale.

Sono state realizzate numerose investigazioni numeriche sulle OCNs [Colaiori et al., 1997] principalmente lungo due fronti:

- la ricerca del minimo globale con un algoritmo di Metropolis per $\gamma = 1/2$;
- le statistiche sul minimo locale per $\gamma = 1/2$.

Per minimo locale si intende una configurazione (un'albero distribuito) della rete caratterizzata dal fatto che nessun collegamento può essere cambiato senza un'aumento dell'energia.

Il minimo globale è certamente anche un minimo locale, ma nei due casi sopra enunciati si sono trovate differenti statistiche, la qual cosa suggerisce una struttura molto varia della funzione energia.

Nelle simulazioni numeriche è stato considerato un reticolo quadrato con tutti i siti su di un lato come possibili *outlet* (sezione di chiusura) per la rete, mentre condizioni al contorno periodiche sono state imposte sugli altri lati.

La scelta di adottare outlets multipli è dovuta al fatto di minimizzare gli effetti di scala finita (*finite-size effects*). La precipitazione è pensata uniforme nel bacino, visto che i risultati analitici del caso eterogeneo con precipitazione random portano a quelli del caso omogeneo (vedi Sezione 3.4.B).

Il metodo di ottimizzazione usato è stato il *simulated annealing*, nel quale un parametro T analogo alla temperatura è introdotto e diminuito progressivamente durante la simulazione. Per ogni T il sistema cambia solamente in un nuovo collegamento, scelto casualmente, tra un nodo e l'altro della rete.

La nuova configurazione è accettata con probabilità 1 se ΔE è negativo, ossia se l'energia del sistema diminuisce, e con probabilità $\exp(-\Delta E/T)$ altrimenti; nel secondo caso viene generata una probabilità casuale p compresa nell'intervallo $[0, 1]$, poi se $\exp(-\Delta E/T) \leq p$ la nuova rete è adottata, altrimenti si realizza una nuova configurazione random.

In breve l'algoritmo adottato da Colaiori e altri consiste nei seguenti passi:

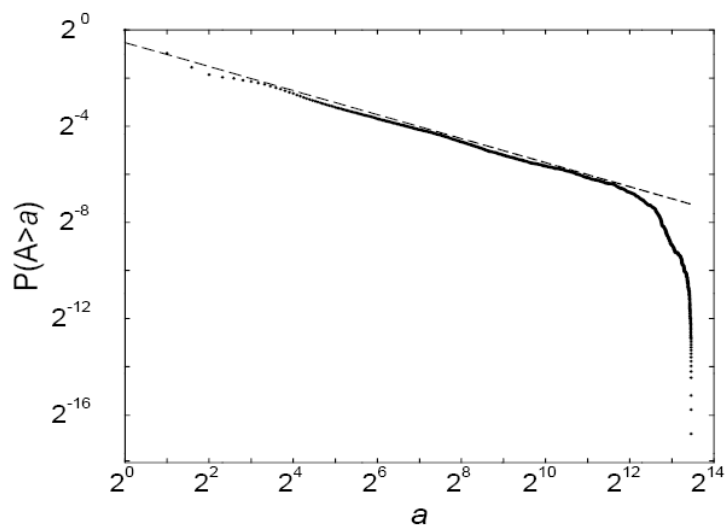
1. *Generazione di una configurazione random* della rete eseguendo, i passi (2) e (3) successivi, parecchie volte;
2. *Cambiamento casuale della configurazione* scegliendo un sito libero, non ancora appartenente alla rete, da connettere al nodo i in cui ci si trova;
3. *Controllo geometrico* verificando l'assenza di percorsi chiusi (*loops*), nel qual caso si ritorna al punto (2);
4. *Controllo energetico* come descritto in precedenza;
5. *Diminuzione del parametro T* secondo la relazione $T(n) = \alpha^n T(0)$, dove n è l' n -esimo step, $\alpha = 0.986$ e $T(0)$ è una opportuna costante.

Il processo di annealing viene fermato quando il parametro T raggiunge valori molto bassi, tipicamente $\approx 10^{-4}$.

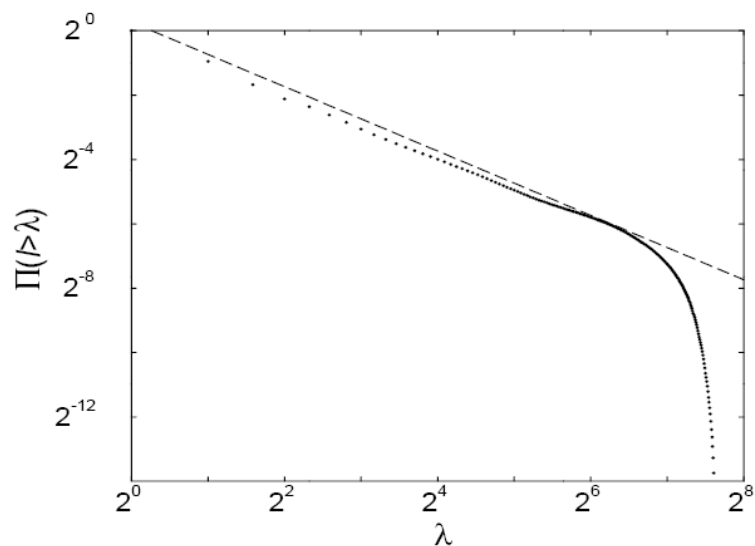
La simulazione è stata ripetuta variando le condizioni iniziali ($L = 128$) ed è stato visto che tali non influenzano le quantità statistiche.

Le distribuzioni di probabilità cumulata delle aree cumulate e delle lunghezze dell'asta principale, mediate su dieci prove sono mostrate nella Figura sottostante, e forniscono $\tau = 1.50 \pm 0.02$ e $\psi = 2.00 \pm 0.02$, dove l'errore è fornito dalla radice quadratica media sulle dieci prove.

I risultati sono in perfetto accordo con l'equazione (3.29) e confermano i risultati analitici ottenuti con $\gamma = 1/2$.



(a)



(b)

Figura 3.8 [Colaioni et al., 1997]: (a) Distribuzione $P(A > a)$ vs a , per un bacino simulato di dimensione $L = 128$, con pendenza $1 - \tau = -0.50$; (b) Distribuzione $\Pi(l > \lambda)$ vs λ con pendenza $1 - \psi = -1.00$; le aree cumulate e le lunghezze *upstream* sono in unità del parametro di reticolo quadrato scelto pari ad 1.

3.5.2 Minimo Locale.

Le reti fluviali ottimali "omogenee", ossia senza grandezze aleatorie nello spazio e nel tempo, risultano in buon accordo con i dati sperimentali sui fiumi quando si calcolano le statistiche basate sul minimo locale.

Questo suggerisce il concetto di *ottimalità fattibile* [Rinaldo et al., 1996] secondo cui la natura è incapace di raggiungere il vero stato inferiore quando sistemi complessi sono insiti nei problemi di ottimizzazione.

L'ottimizzazione si arresta non appena si è raggiunto un minimo locale e tale risultato si pensa abbia validità generale e possa spiegare alcune forme frattali naturali.

3.6 Sintesi dei risultati.

Nell'ipotesi di base di leggi di scala finita (*finite-size scaling*) per la distribuzione delle aree cumulate e delle lunghezze dell'asta principale dei bacini, è stato dedotto l'esatto comportamento di scala di una rete di drenaggio ad albero, per la quale il minimo assoluto dell'energia dissipata si realizza sia nel caso omogeneo sia in presenza di aleatorietà.

Gli esponenti di scala nel caso omogeneo sono risultati quelli del campo medio e differiscono da quelli misurati nei corsi d'acqua reali.

I risultati numerici sono stati ottenuti sia per le statistiche sul minimo globale (confermando le previsioni analitiche) sia per il minimo locale.

Gli esponenti statistici, ossia quelli derivanti da simulazioni, caratterizzanti il minimo locale differiscono chiaramente da quelli di campo medio.

Essi sembrano appartenere a una diversa *classe di universalità* e in accordo ai dati dei fiumi reali.

Questo suggerisce che i fiumi reali, durante la loro evoluzione, non visitano tutto lo spazio delle configurazioni, ma sono presto intrappolati in uno *stato metastabile*, per esempio quello relativo ad un minimo locale dell'energia dissipata [Rinaldo et al., 1996].

Nonostante la teoria delle OCNs sia stata estensivamente verificata sia nei suoi risultati numerici sia nelle sue conclusioni analitico-teoriche, esistono alcune opinioni discordanti riguardo certe sue implicazioni, principalmente la visione dell'evoluzione del territorio come processo di SOC (Self Organized Criticality) e alcune analisi multifrattali [Sapozhnicov et al., 1996].

3.7 Risultati di altre ricerche.

In [Tucker *et al.*, 1999] è stato sviluppato un modello stocastico, poi seguito dalla realizzazione del programma CHILD, di modellazione dell'evoluzione del bacino di drenaggio fluviali con precipitazione random nello spazio e nel tempo.

Sebbene infatti l'evoluzione del territorio è modellata come un processo continuo, essa è guidata da eventi discreti.

La topografia di una montagna, per esempio, è formata da una sequenza *quasi random* di allagamenti, terremoti, e scivolamenti di pendii, ogni processo con la sua caratteristica distribuzione di frequenza la quale varia anch'essa nello spazio e nel tempo al pari della forma della montagna che ne è il suo effetto.

Il modello stocastico implementato in CHILD è basato sul modello di precipitazione di Eagleson [Eagleson, 1978] e descrive la distribuzione di probabilità dell'intensità di pioggia, della sua durata e della sua frequenza.

La domanda principale è quindi stata quella di vedere le conseguenze geomorfologiche della variabilità di precipitazione.

Analisi delle OCNs con eterogeneità di precipitazione.

4.1 Sommario.

Si propongono di seguito i risultati ottenuti nelle simulazioni numeriche effettuate nel tentativo di rispondere alla principale domanda della tesi, ossia quando non è più possibile confondere l'area cumulata con il flusso cumulato, di conseguenza a quale, o quali, valori di I/L si ha una deviazione degli esponenti di scala, in primis l'esponente τ della distribuzione di probabilità cumulata delle aree contribuenti.

Dato il numero considerevole di bacini simulati si riportano in tale capitolo quelli più significativi, e si rimanda agli allegati per la maggior parte degli altri bacini sintetici analizzati.

La variazione degli esponenti al variare di I/L è stata analizzata per due differenti valori della varianza σ^2 del campo di precipitazione generato (varianza relativa alla variabilità dalla media m dei singoli valori $r_i \forall$ pixel i -esimo).

La media della precipitazione è stata sempre assunta unitaria ad eccezione della simulazione del caso "siccità" per il quale si è posto $m(r_i) = 0$, analogo al caso di ricadere per $I/L \rightarrow \infty$ nella zona a pioggia mediamente nulla.

L'analisi degli esponenti per I/L come parametro variabile, è stata condotta per due valori di varianza, dapprima $\sigma^2 = 0.5$, poi $\sigma^2 = 1$.

Per ogni valore fissato di I sono state effettuate quindici simulazioni su quindici bacini aventi condizioni iniziali di drenaggio differenti.

La rete iniziale è stata scelta come una rete tipo Eden (vedi allegato per la spiegazione riguardo la sua generazione) con flusso cumulato J_i calcolato in base al campo di pioggia random utilizzato.

E' possibile partire da condizioni iniziali diverse ma pur sempre random, ad esempio partire da una *hotOCN* etrogenea, tuttavia le statistiche delle OCNs (uniformi e non) ricavate partendo da *hotOCN* (uniformi e non) differiscono da quelle delle OCNs ottenute partendo da reti completamente casuali come le reti Eden.

I valori di I scelti sono, $I = 1, 10, 15, 20, 30, 40, 50, 80, 100, 130, 150$, abbastanza ben distribuiti da zero a un valore maggiore della size $L = 128$ del bacino prevalentemente studiato.

Nella trattazione di questo capitolo si riporta per il caso di pioggia uniforme una rete $L \times L = 128 \times 128$, poi per i casi a pioggia random si riportano le reti ottenute a partire dalle stesse condizioni iniziali di drenaggio di quella con $r_i = cost = 1$.

Saranno comunque portate all'evidenza anche altre OCNs significative ottenute con campi di pioggia "casuali", per le altre si rimanda, come già ricordato, agli allegati.

Le statistiche geomorfologiche di scala delle simulazioni effettuate si riferiscono sempre a tutto il bacino, quindi per tutti gli $L \times L$ pixel, non solamente per quelli in stato canale.

Lo studio principale è stato rivolto alle Optimal Channel Networks eterogenee, tuttavia si sono anche analizzate le *hotOCNs*, le quali sembrano ripecchiare le strutture dei delta fluviali [Rodriguez-Iturbe e Rinaldo, 1997], e le *ground-stateOCNs* specie per quanto riguarda il processo termodinamico che porta al loro ottenimento.

Le *hotOCNs* sono risultate molto meno influenzate dalla precipitazione random non attenuata, sia nelle leggi a potenza sia nelle strutture di drenaggio (es. in termini di densità di drenaggio), rispetto le OCNs.

4.2 Riepilogo delle principali leggi di scala dei bacini fluviali.

Si riportano le principali leggi di scala delle grandezze geomorfologiche dei bacini fluviali; si ricorda che le Optimal Channel Networks sono reti piatte ossia il loro concetto deriva dallo studio di come planimetricamente le reti fluviali si auto-organizzano.

E' possibile poi assegnare un campo di elevazioni ad una OCN, anche introducendo concetti di *Self Organized Criticality*, per studiare l'evoluzione del territorio ma per questo si rimanda a [Rodriguez-Iturbe e Rinaldo, 1997], o ad eventuali lavori successivi a questa tesi considerando campi random "forzati" di pioggia.

Lo studio fatto pertanto si riferisce a reti piatte.

Si propone la rete $L \times L = 128 \times 128$ con outlet casuale lungo un lato, con vista planimetrica, plot delle direzioni di drenaggio, grafico di distribuzione delle aree, e vista tridimensionale ottenuta ponendo la variabile "elevazione" $z(i) = A_i$, quindi il punto più "profondo" risulta essere l'outlet.

Si noti come le OCNs con outlet lungo un lato abbiano un loro modo molto particolare di tendere al minimo globale, rispetto quelle con outlet su uno dei quattro angoli, esibendo delle strutture di drenaggio molto particolari ed esteticamente belle³.

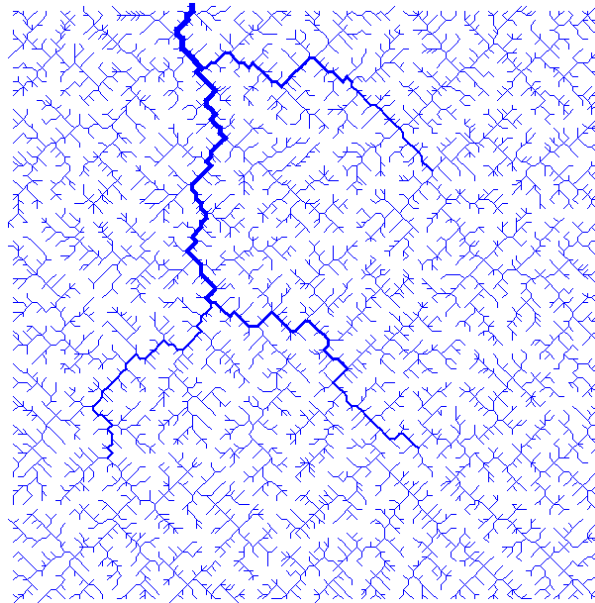


Figura 4.1: Optimal Channel Network a $T = 0.000$, di dimensioni $L \times L = 128 \times 128$, ottenuta con Simulated Annealing con sette salti di

³Potrebbe apparire atipico parlare di bellezza in una pubblicazione scientifica, ma la teoria dei frattali in generale, ed in particolare applicata alle forme naturali si "scontra" inevitabilmente anche con la comune osservazione umana, la quale oggettivamente porta a confermare "the fractal beauty of landscape" [vedi ad esempio Rodriguez-Iturbe's course CEE 368, Princeton University; Flake, 1998; Frame, 2000].

temperatura partendo da $T = 10,000$, per ognuna delle quali è stato fissato un numero possibile di cambiamenti pari a $its = 100,000$.

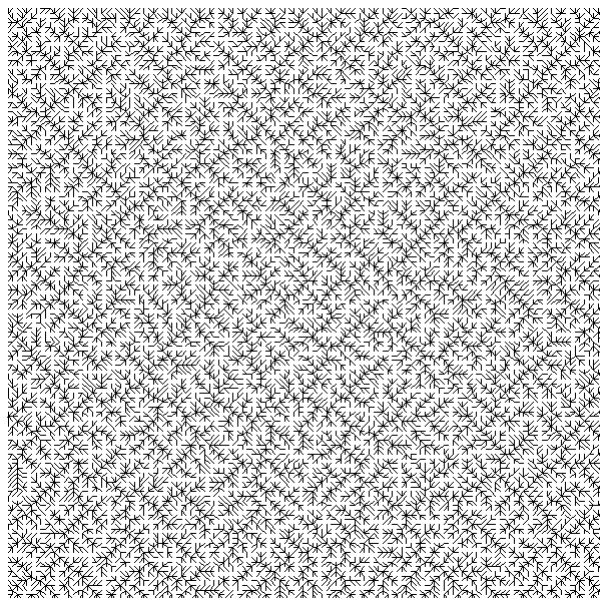


Figura 4.2: direzioni di drenaggio dell'Optimal Channel Network di Figura 4.1 precedente; le direzioni sono determinate assumendo lo schema semplice detto "delle otto direzioni di drenaggio" implementato sia in JGrass, sia in TauDEM.

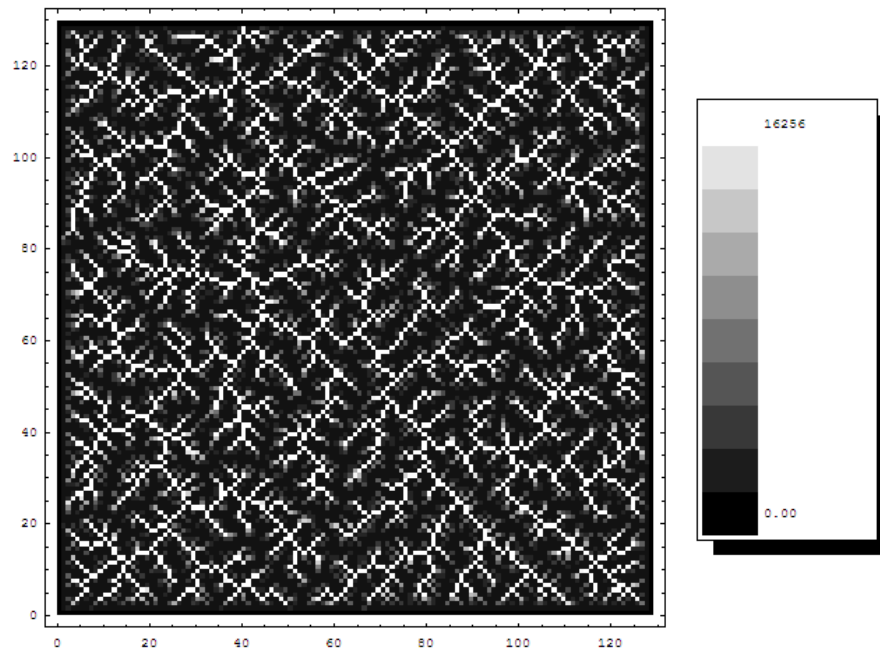


Figura 4.3: density plot delle aree cumulate dell'OCN di Figura 4.1; le aree più chiare sono quelle con valore maggiore, ossia quelle corrispondenti ai pixel canale, le aree più scure quelle minori corrispondenti ai pixel versante, l'area massima è quella dell'outlet e pari a 16265. Si nota come l'OCN con $r_i = cost = 1$ abbia una distribuzione delle aree cumulate molto uniforme nel bacino.

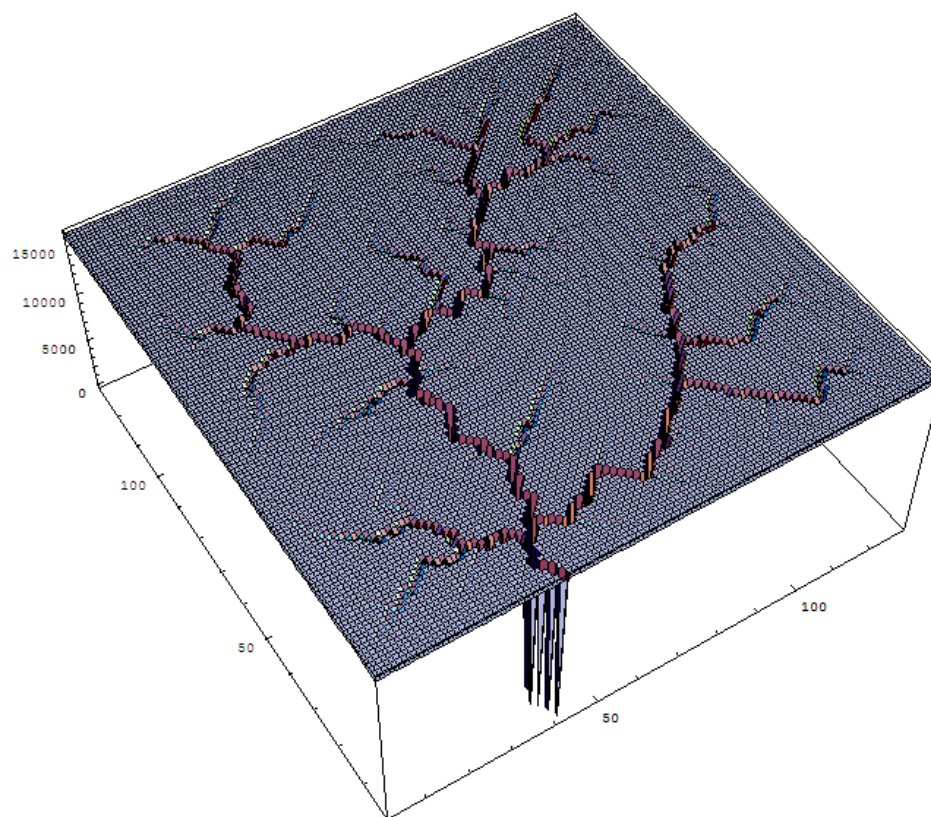


Figura 4.4: rappresentazione 3D delle aree cumulate nella quale l' "elevazione" z_i del pixel i -esimo è stata assunta pari al corrispondente valore dell'area cumulata A_i ; non è stato affrontato lo studio dell'evoluzione del territorio assegnando alla OCN un campo di elevazioni.

Il primo grafico si riferisce alla distribuzione della probabilità di superamento delle aree cumulate, non in forma logaritmica; tale istogramma ha l'anadamento tipico delle grandezze che obbediscono ad una legge di potenza, anche se non è condizione necessaria e sufficiente affinché si possa dire con certezza questo [*Newman, 2005*].

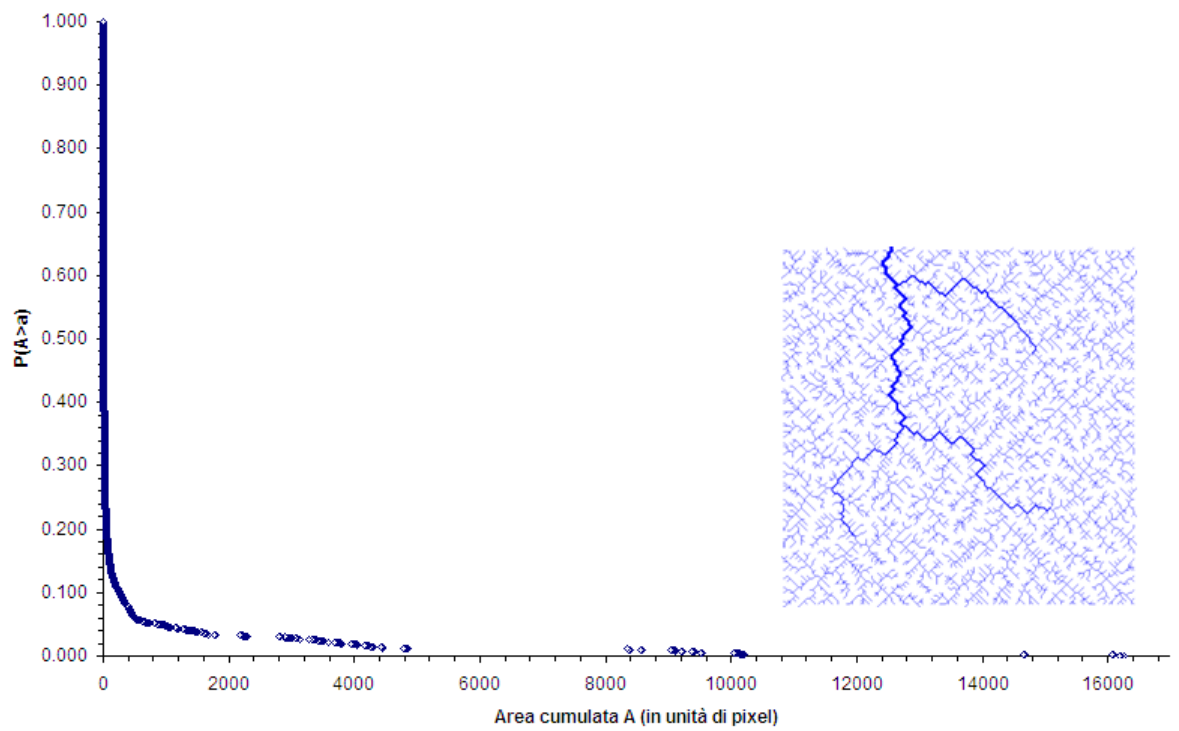


Figura 4.5: istogramma della probabilità cumulata di superamento $P[A > a]$ in funzione di A , non in scala logaritmica; l'andamento è tipico delle grandezze fisiche che obbediscono ad una legge di potenza.

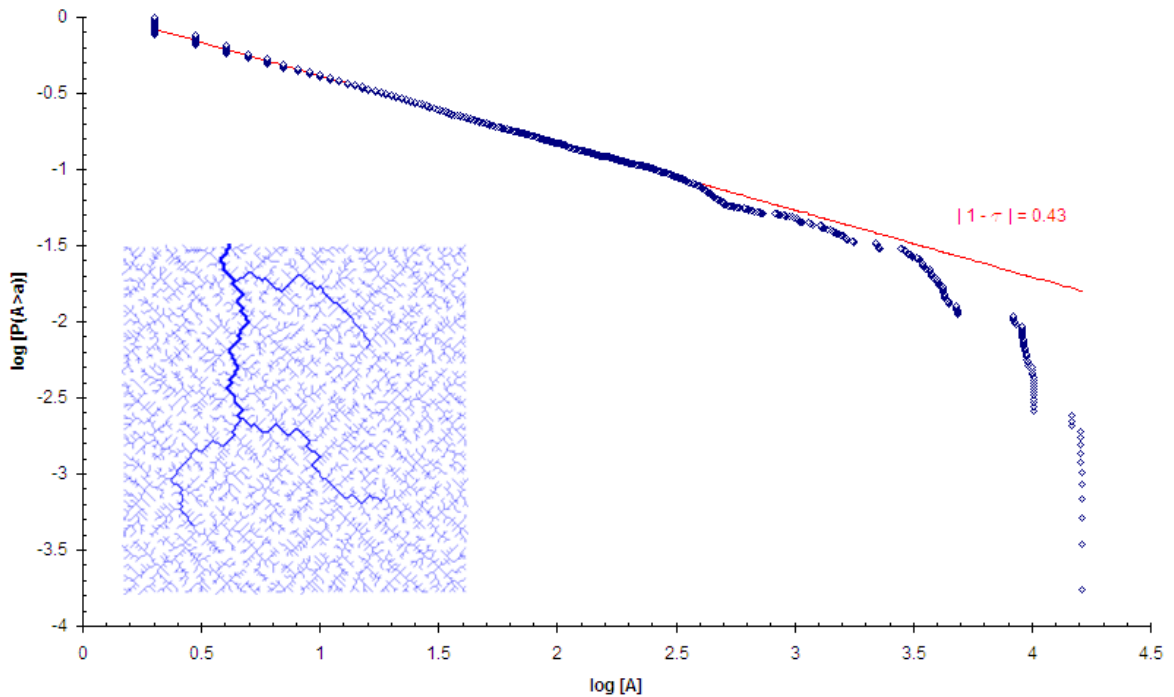


Figura 4.6: distribuzione a legge di potenza del logaritmo della probabilità cumulata di superamento $P[A > a]$ in funzione di $\log[A]$; l'esponente $\tau = 1.43$ risulta essere l'esponente ottimo τ^* individuato per le OCNs, quindi per i bacini reali.

Si riporta ora la legge di scala per le distanze upstream indicate come L_{up} o più semplicemente con L , ossia le distanze calcolate per ogni pixel i ricavate risalendo verso monte dal pixel i -esimo alla sorgente con $A_i = 1$, seguendo il percorso-canale verso monte con area cumulata massima per ogni pixel j .

Per il caso con r_i random si segue il percorso upstream con flusso cumulato massimo.

In generale si è visto che l'esponente ψ delle lunghezze upstream ha una variabilità maggiore dell'esponente τ , sia per le reti uniformi sia per quelle non uniformi, infatti per le prime il range di variabilità consentito per ψ è stato fissato a $\psi^* \pm 0.1$, per τ a $\tau^* \pm 0.02$ [Maritan et al., 1996], con ψ^* e τ^* i valori medi delle statistiche sui bacini fluviali.

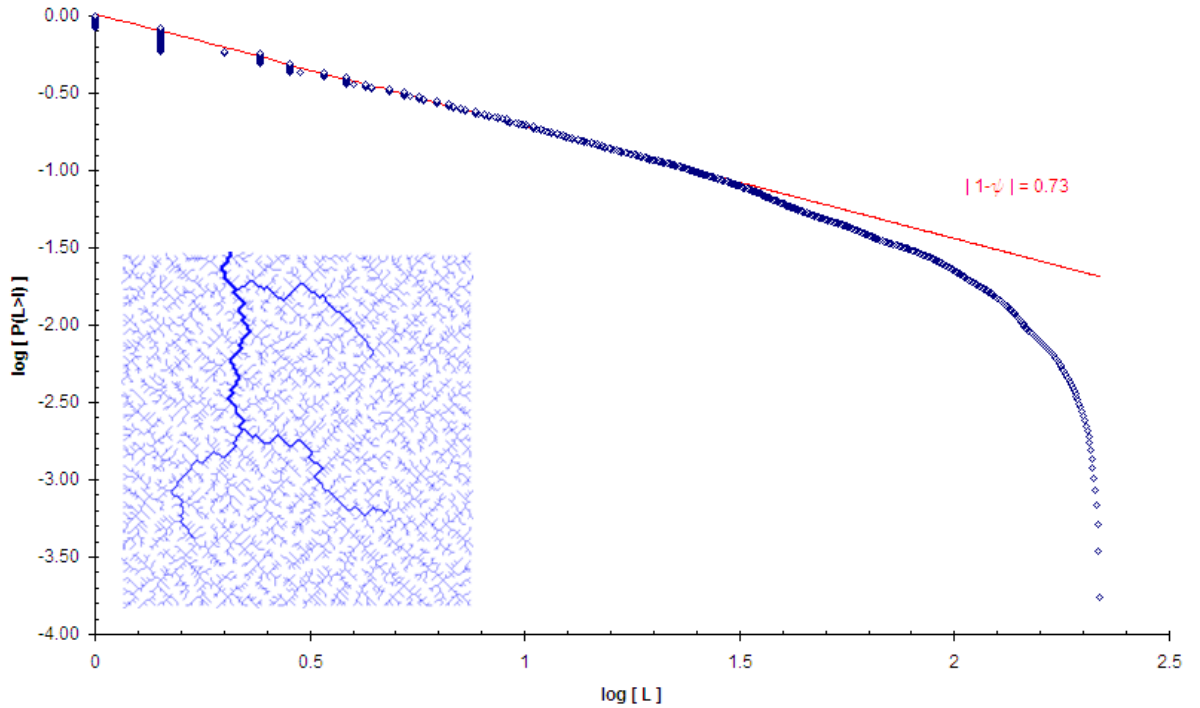


Figura 4.7: distribuzione a legge di potenza del logaritmo della probabilità cumulata di superamento $P[L_{up} > l_{up}]$ in funzione di $\log[L_{up}]$; l'esponente $\psi = 1.73$ (a volte indicato anche come ϕ) differisce dall'esponente ottimo $\psi^* = 1.80$ delle OCNs, tuttavia lo scostamento dal valore ottimo è minore della variabilità massima statisticamente consentita pari a ± 0.1 .

La distribuzione delle distanze downstream misurate per ogni pixel i , da esso fino all'outlet, presenta esponente zero; valutando il numero di pixel aventi la medesima distanza L_{down} si ricava la funzione di ampiezza che è definita dalla seguente uguaglianza:

$$N(L_{down}) = W(x). \quad (4.1)$$

La funzione di ampiezza è calcolabile su tutti i pixel del bacino (in tal caso sarebbe più corretto introdurre la cosiddetta *funzione di ampiezza riscalata* [D'Odorico et al., 2003], con celerità dell'acqua differente a seconda che essa si trovi nello stato canale o nello stato versante), oppure solo per i pixel canalizzati, quindi $W(x)$ è anche funzione della soglia sul flusso cumulato J_{th} fissata, che determina la nascita dei pixel canale.

E' facile intuire che eseguendo il density plot (grafico bidimensionale che mostra la distribuzione di una grandezza fisica) delle distanze downstream, si ottiene l'esatto opposto di quello delle distanze upstream, ossia dove $L_{down}(i)$ è elevato $L_{up}(i)$ è piccolo per lo stesso pixel i -esimo, e viceversa.

Vedremo che nello studio condotto $W(x)$ è stata calcolata su tutto il bacino.

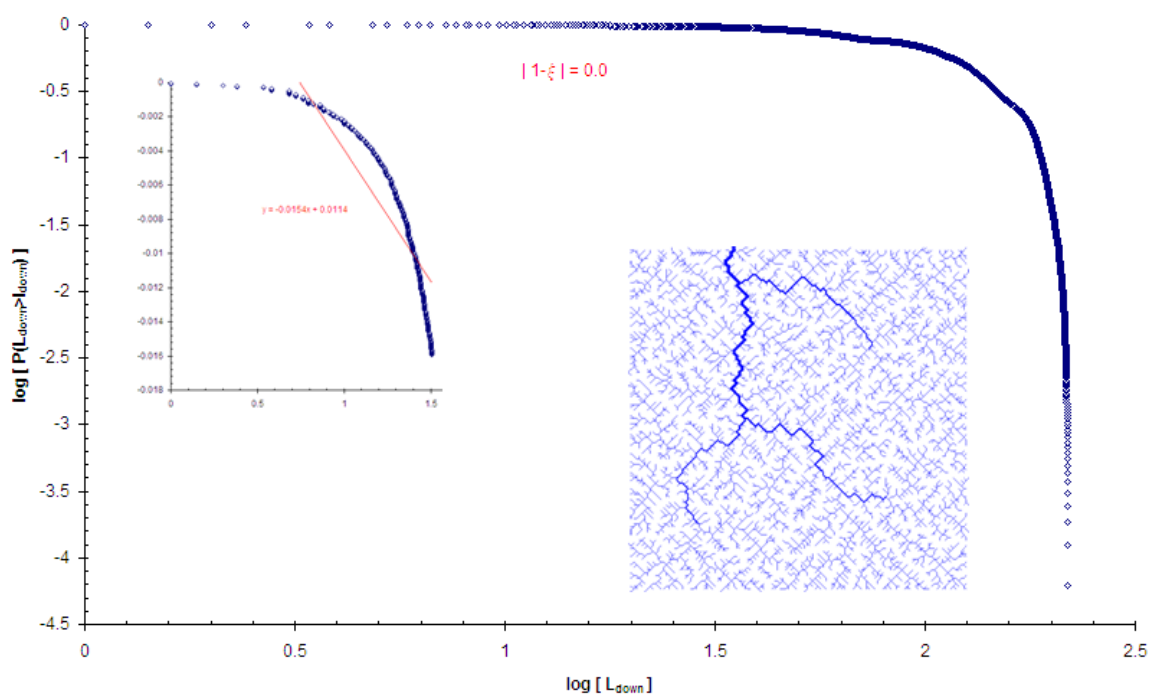


Figura 4.8: distribuzione a legge di potenza del logaritmo della probabilità cumulata di superamento $P[L_{down} > l_{down}]$ in funzione di $\log[L_{down}]$; l'esponente $\xi = 0.00$ così come ragionevolmente dev'essere.

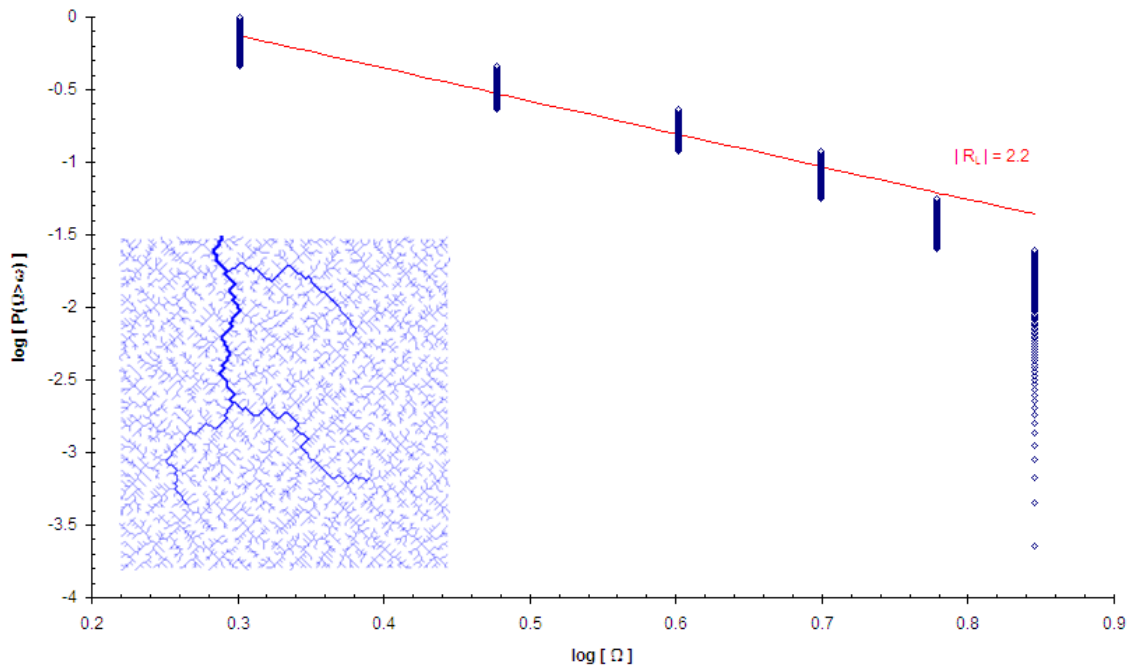


Figura 4.9: legge di potenza della distribuzione di probabilità cumulata $P[\Omega > \omega]$, di avere un certo numero d'ordine di Horton-Strahler nei canali, in funzione di $\log[\Omega]$; $R_L = 2.2$ è il rapporto tra le lunghezze di Horton e rispecchia i valori dei bacini reali [Tarboton et al., 1998; Rodriguez-Iturbe e Rinaldo, 1997; Strahler, 1952, 1957]. Il density plot dell'importanza di un collegamento (*link magnitude*) è sostanzialmente uguale a quelle delle aree cumulate.

Il grafico sottostante rappresenta la relazione di Hack, la quale può essere anche modificata utilizzando al posto delle distanze upstream i diametri $L_{||}$ [Rigon et al., 1996], evidentemente fornendo un'esponente h' differente da quello di Hack h .

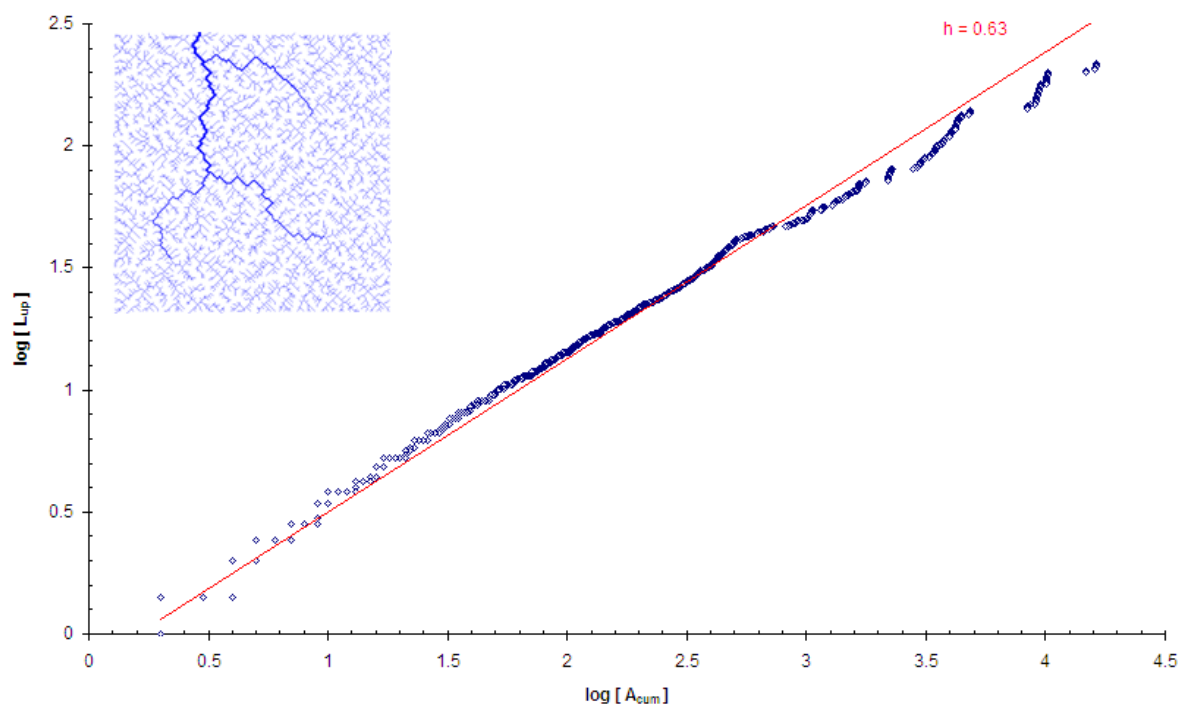


Figura 4.10: relazione tra le lunghezze upstream L_{up} e le aree cumulate A_i nota anche come relazione di Hack; $h = 0.63$ è l'esponente di Hack la cui variabilità statisticamente consentita dal valore ottimo è $h = (h^* = 0.57) \pm 0.06$ [Langbein, 1947]. La differenza dal valore Euclideo $h = 0.5$ è una prima conferma della natura frattale dei fiumi [Mandelbrot, 1983].

Il grafico sottostante che relaziona le distanze upstream L_{up} con i diametri $L_{||}$, fornisce l'esponente d_l il quale esprime la tortuosità frattale dei canali del bacino; è stato visto che se $H = 1$, $d_l > 1$ (bacini frattali o autosimili), mentre per $H < 1$, $d_l = 1$ (bacini autoaffini o elongati) [Colaiori et al., 1997], quindi maggiore è l'elongazione dei bacini minore è la frattalità del corso d'acqua e dei suoi affluenti come osservabile facilmente in natura.

I diametri topologici $L_{||}(i)$ sono in realtà misurati come distanze Manhattan (vedi "Taxicab geometry"), al posto delle distanze Euclidee, con le coordinate x (lungo l'asse d'inerzia longitudinale) e y (lungo l'asse d'inerzia trasversale) dei punti, genericamente tra il pixel i -esimo e l'outlet.

Risulta quindi $L_{||} = |x_i - x_o|$, e $L_{\perp} = |y_i - y_o|$.

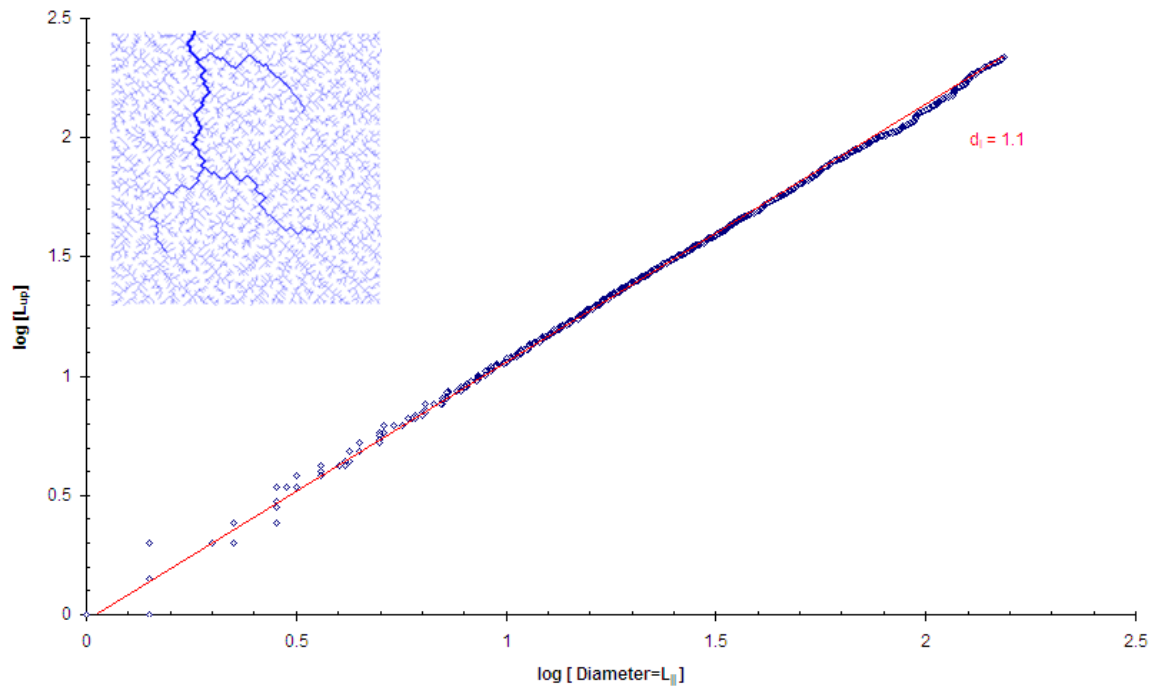


Figura 4.11: grafico della relazione tra lunghezze upstream e diametri indicata come $L \propto L_{||}^{d_l}$; l'esponente d_l è chiaramente legato alla frattalità dei canali costituenti la rete di drenaggio e la sua variabilità è fissata in $d_l = d_l^* \pm 0.01$.

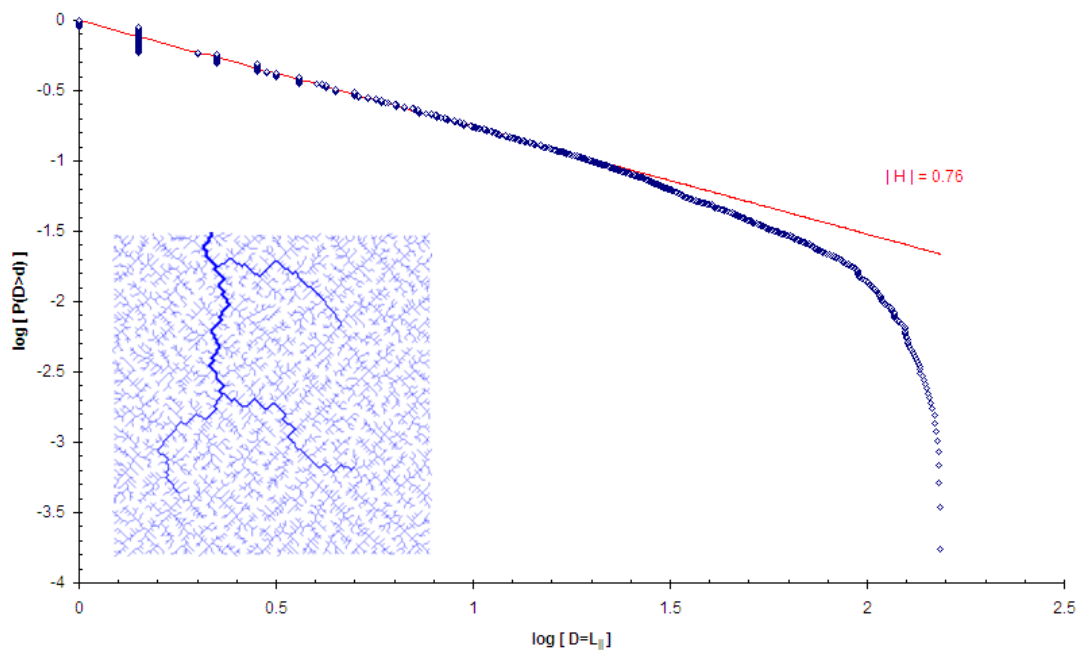


Figura 4.12: legge a potenza della distribuzione dei diametri in termini di probabilità $P[L_{||} > l_{||}]$, misurati lungo l'asse d'inertia longitudinale (nella direzione di elongazione della rete) da ogni pixel i all'outlet; l'esponente è molto simile a quello della distribuzione delle lunghezze upstream

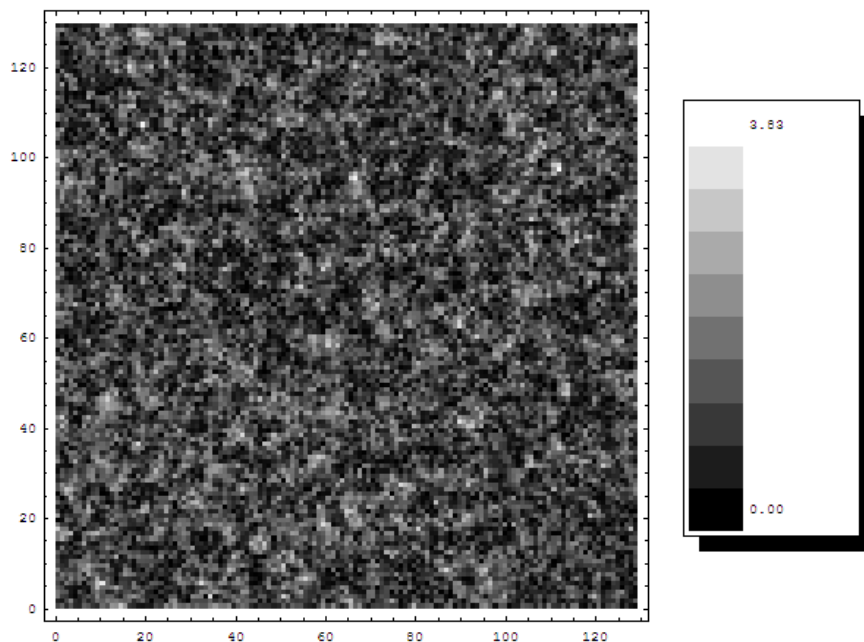
Esistono ulteriori leggi di scala, relazioni lineari, e misure frattali per i bacini fluviali, ad esempio la relazione tra il "link magnitude" e l'area cumulata, lo scaling delle pendenze contro le aree, la legge di potenza dell'energia dissipata, l'autosimilarità dei contorni dei bacini reali e delle linee di livello, ai quali però si rimanda agli altri capitoli o per approfondimenti ulteriori a [Rodriguez-Iturbe e Rinaldo, 1997; Rigon, 1994].

4.3 Analisi per campi di precipitazione a covarianza esponenziale con $\langle r_i \rangle = 1$ e $\sigma^2 = 0.5$.

Si propongono le OCNs, aventi le stesse condizioni iniziali di drenaggio della rete uniforme al paragrafo precedente, ottenute con campi di pioggia a covarianza esponenziale per I crescente, $\langle r_i \rangle = 1$, e $\sigma^2 = 0.5$. Per ognuna si allega la distribuzione delle aree cumulate con la stima dell'esponente τ .

Sono state eseguite altre quattordici simulazioni di reti aventi differenti condizioni iniziali (anche in termini di outlet), stesse condizioni al contorno e forzanti (campi di precipitazione), la maggior parte di dimensione 128×128 , ma alcune anche 256×256 , 64×64 , e 32×32 .

Ad esse si rimanda agli allegati o al già citato sito (vedi Allegato 3).



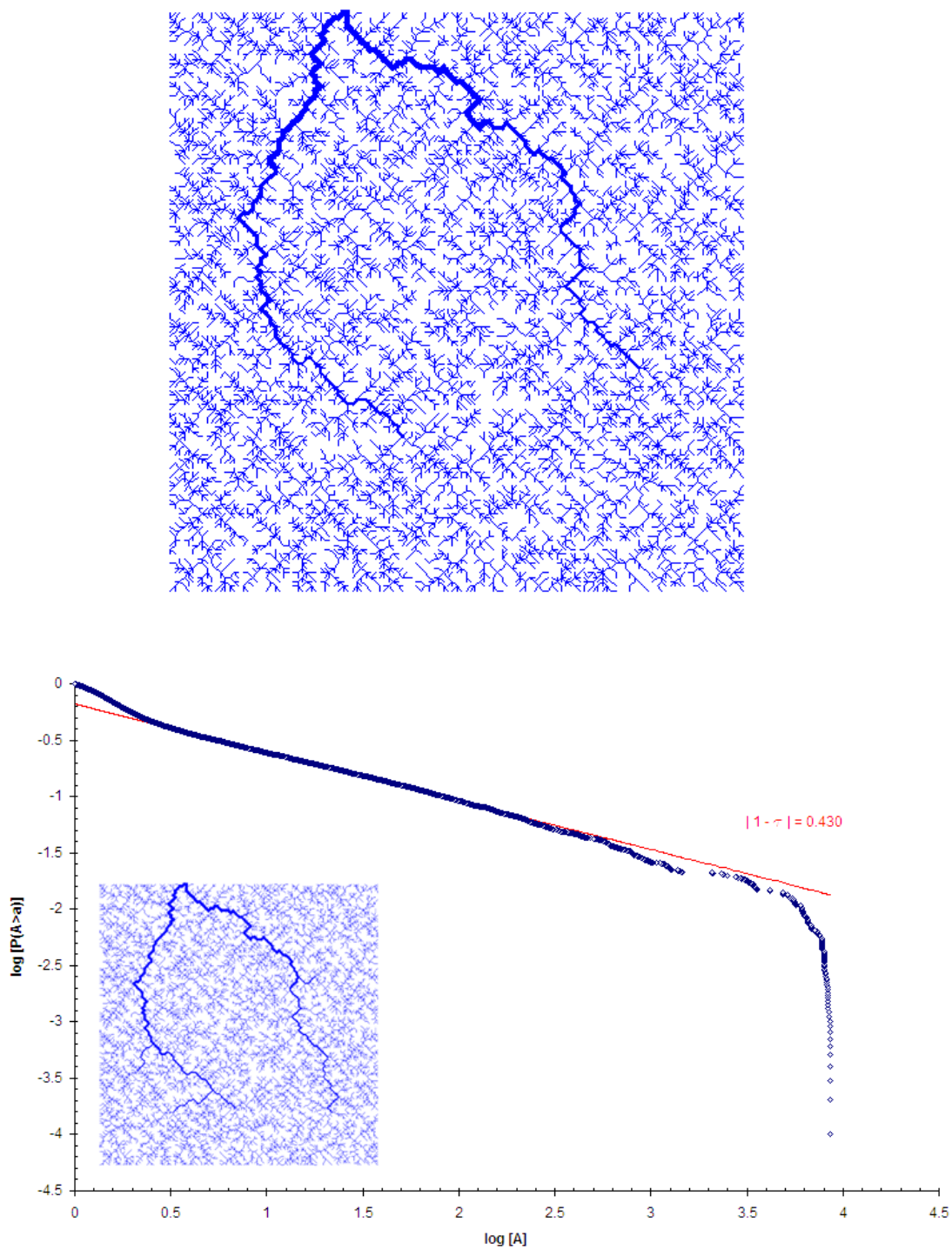
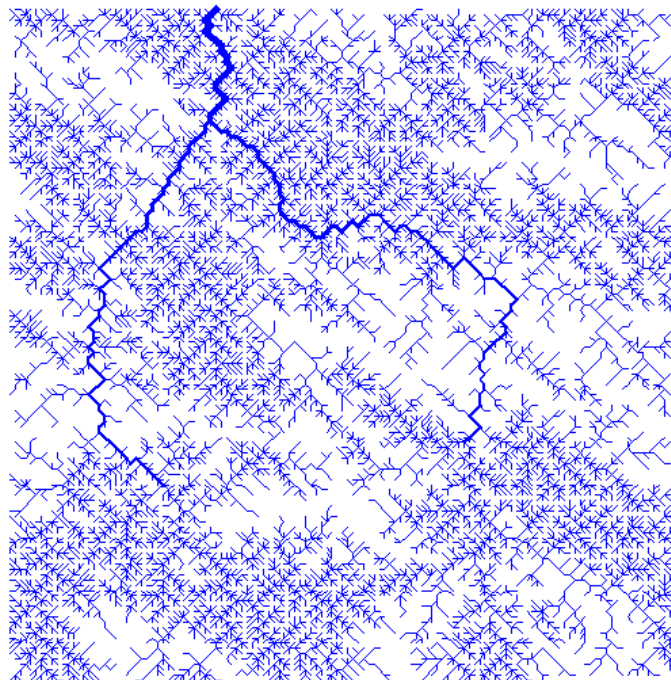
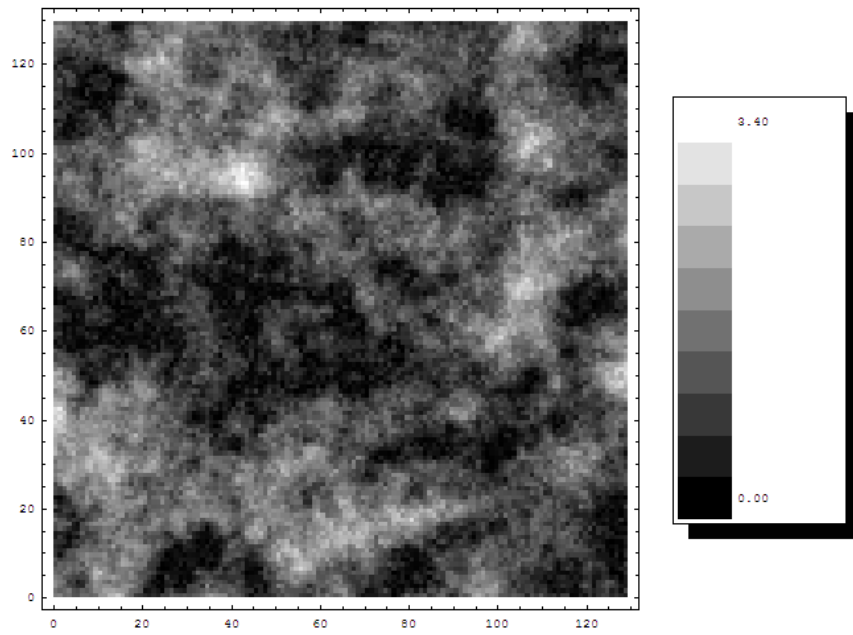


Figura 4.13: campo di pioggia random $I = 1$, $\sigma^2 = 0.5$, relativa OCN e scaling delle aree cumulate con $\tau(I = 1, \sigma^2 = 0.5) = 0.43$.



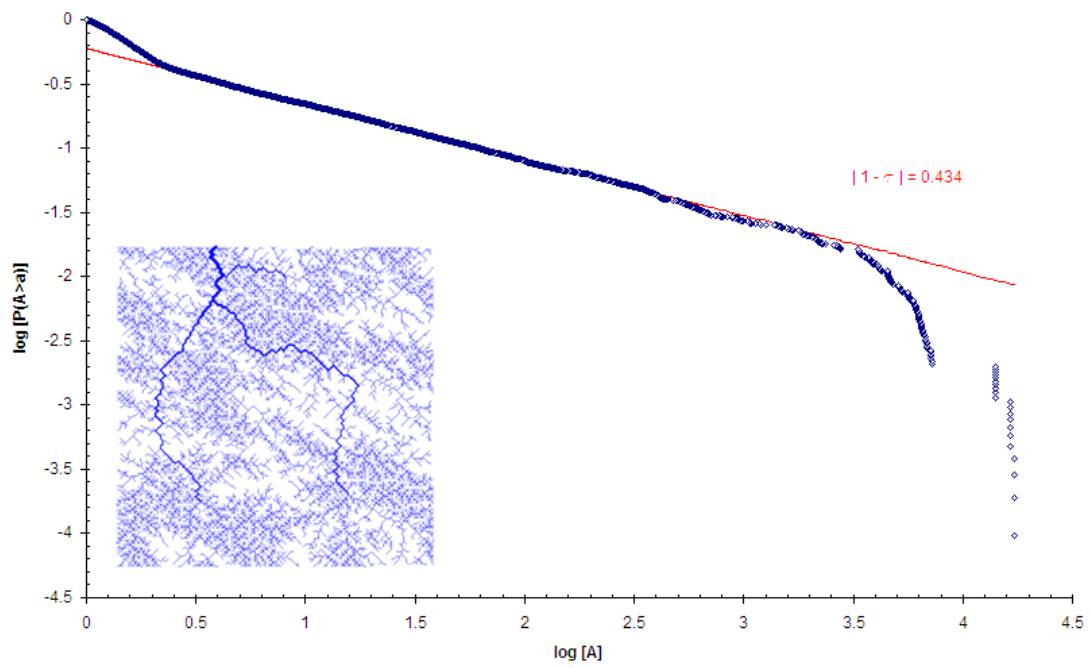
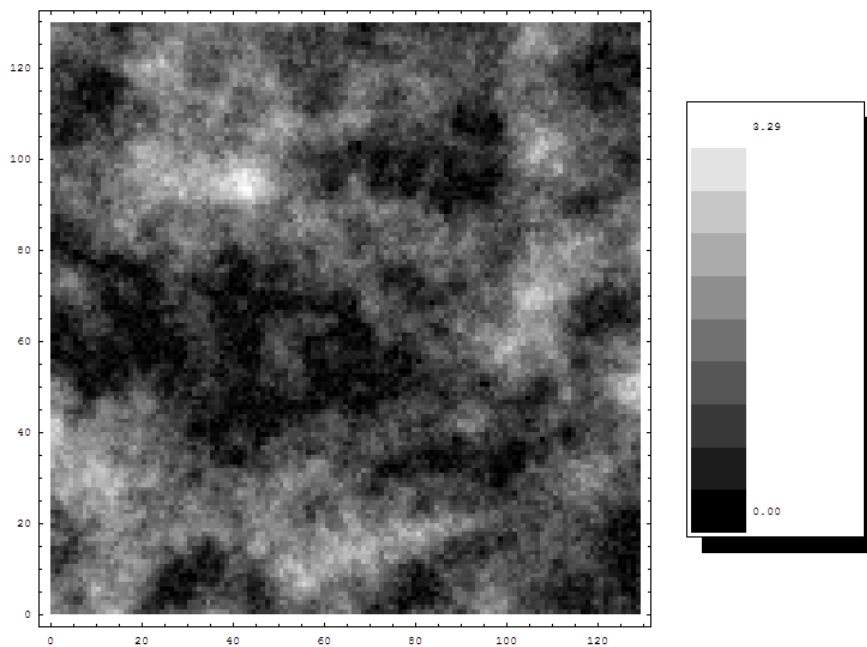


Figura 4.14: campo di pioggia random $I = 10$, $\sigma^2 = 0.5$, relativa OCN e scaling delle aree cumulate con $\tau(10, 0.5) = 0.434$.



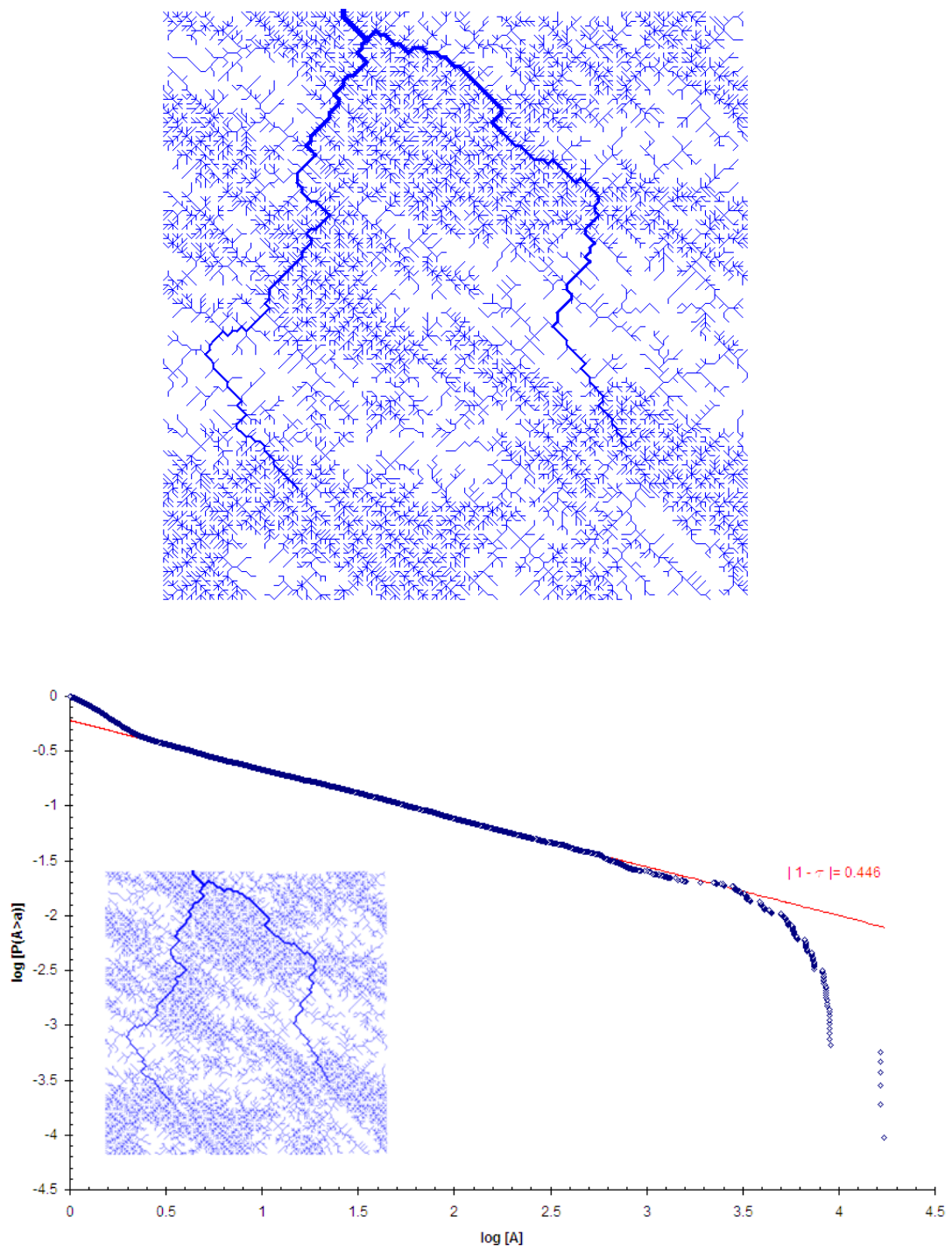
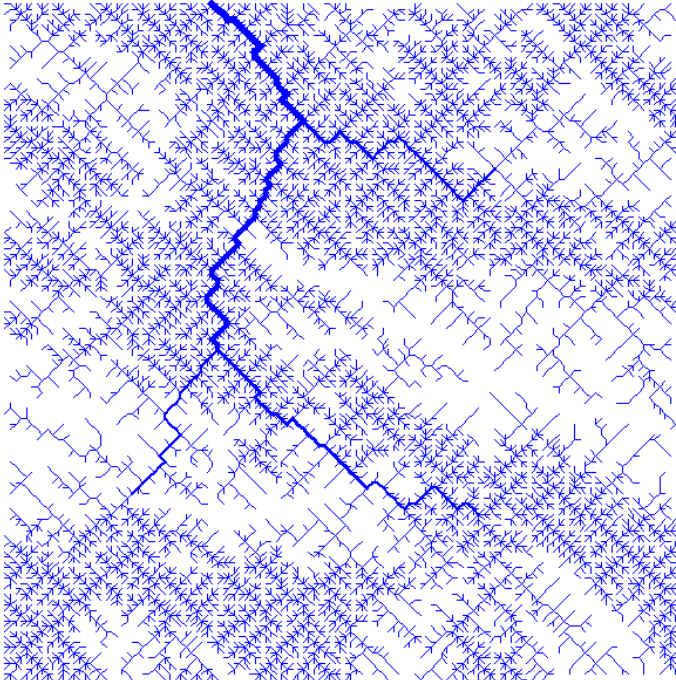
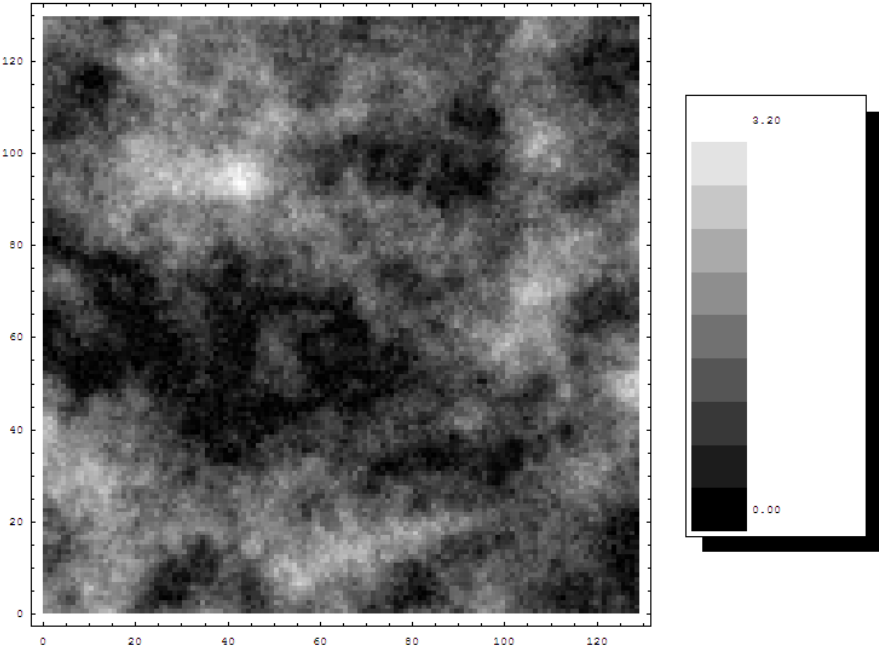


Figura 4.15: campo di pioggia random $I = 15$, $\sigma^2 = 0.5$, relativa OCN e scaling delle aree cumulate con $\tau(15, 0.5) = 0.446$.



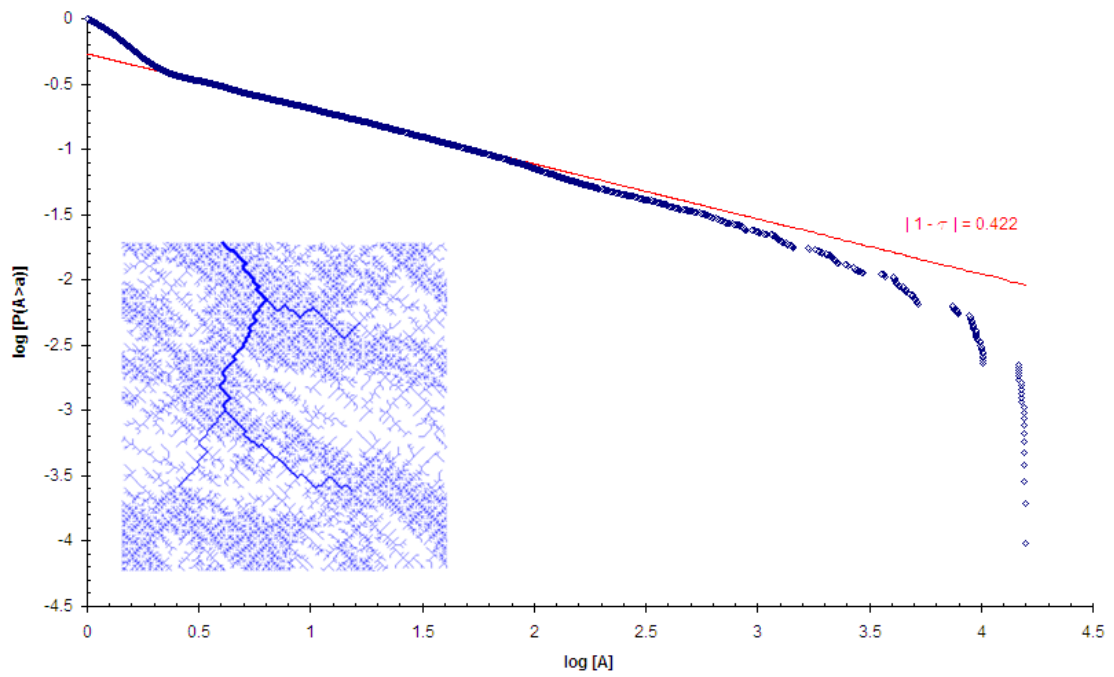
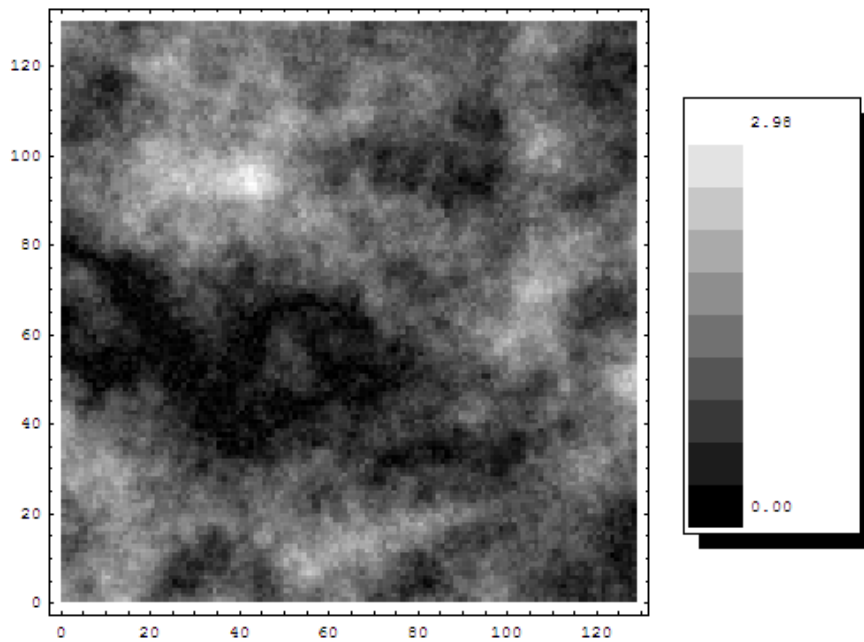


Figura 4.16: campo di pioggia random $I = 20$, $\sigma^2 = 0.5$, relativa OCN e scaling delle aree cumulate con $\tau(20, 0.5) = 0.422$.



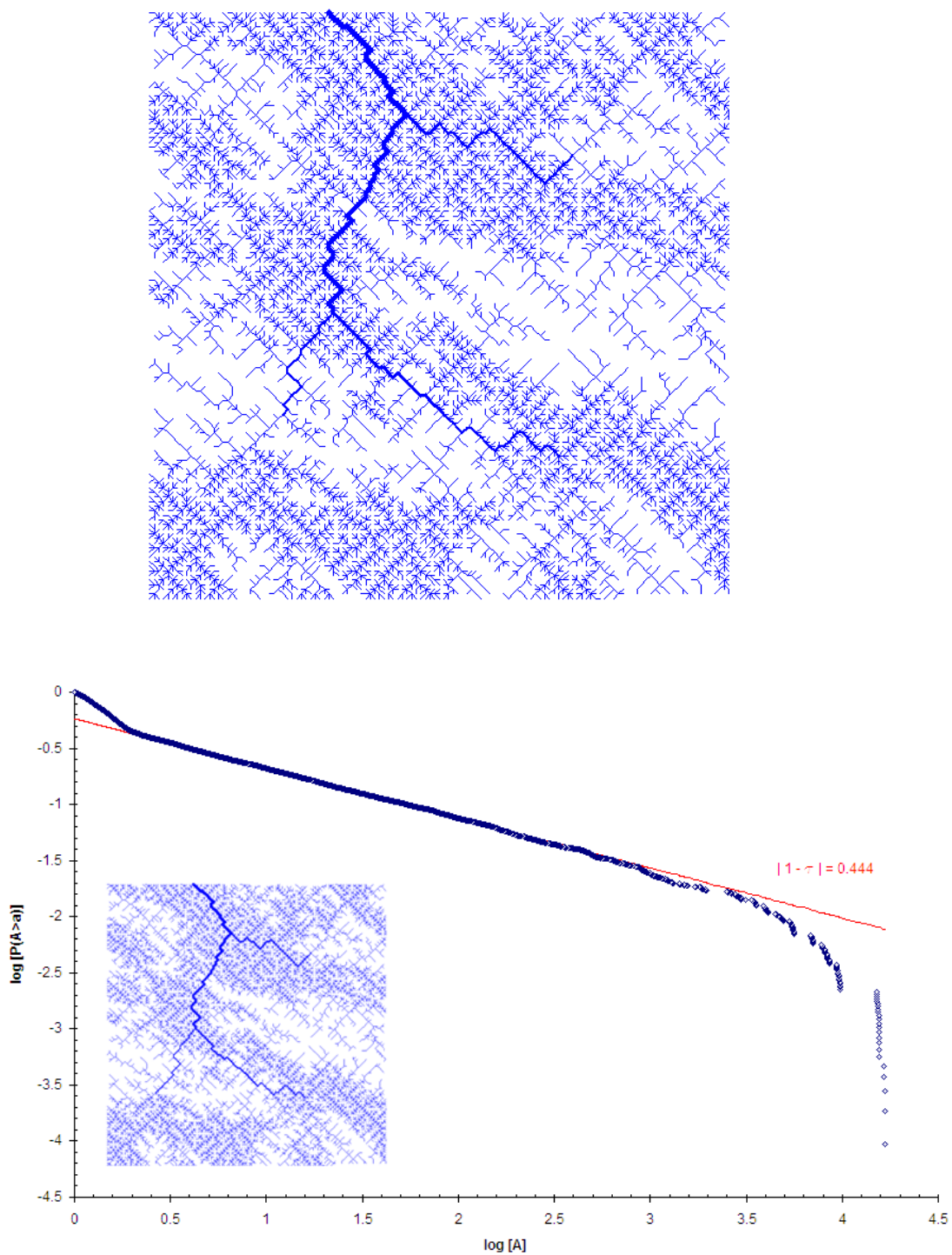
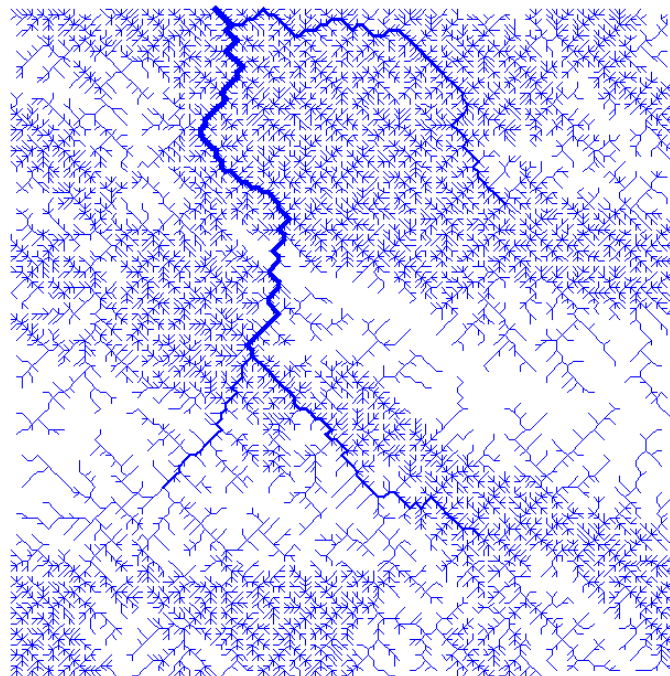
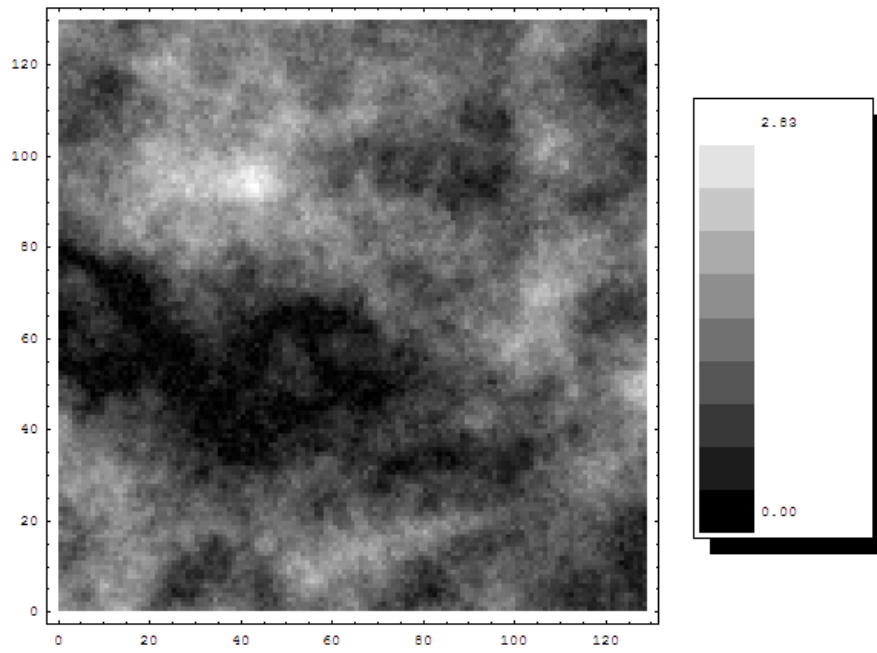


Figura 4.17: campo di pioggia random $I = 30$, $\sigma^2 = 0.5$, relativa OCN e scaling delle aree cumulate con $\tau(30, 0.5) = 0.444$.



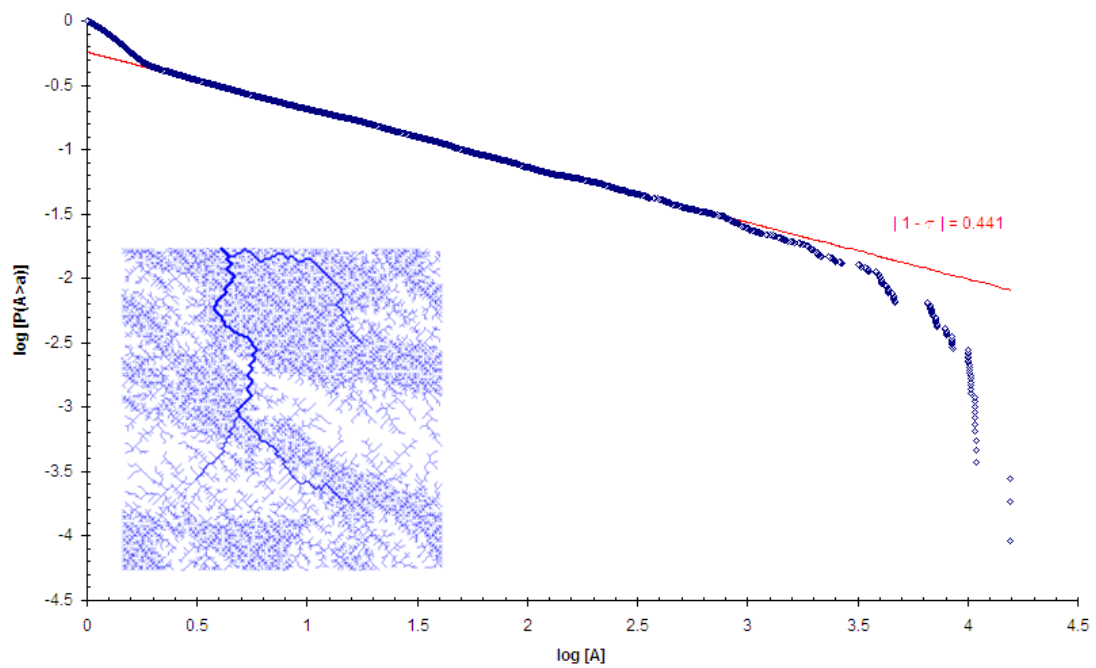
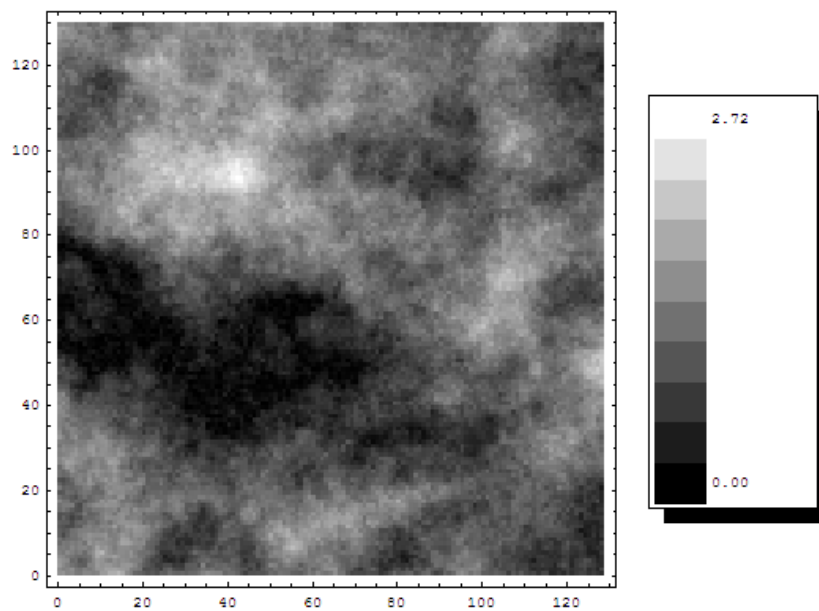


Figura 4.18: campo di pioggia random $I = 40$, $\sigma^2 = 0.5$, relativa OCN e scaling delle aree cumulate con $\tau(40, 0.5) = 0.441$.



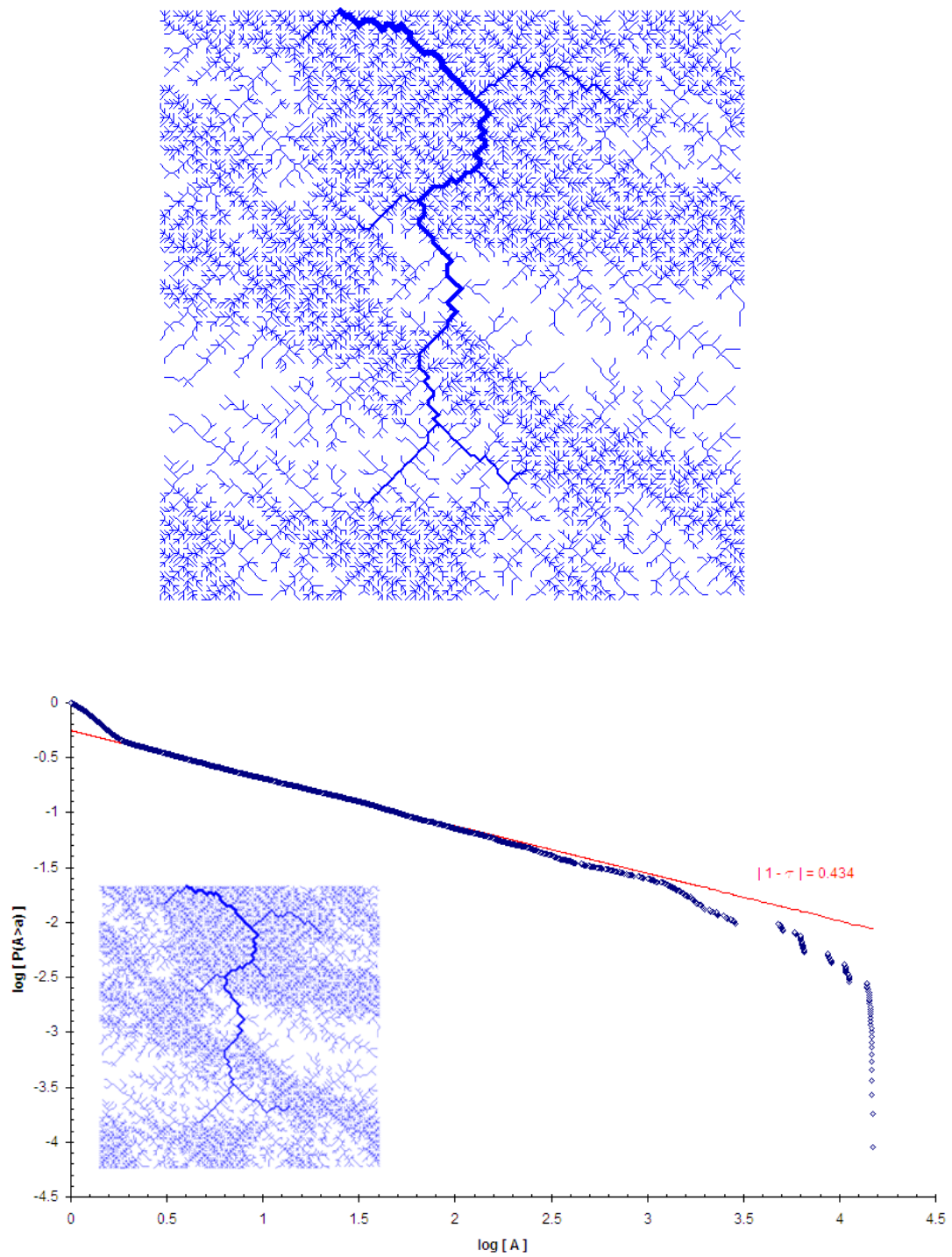
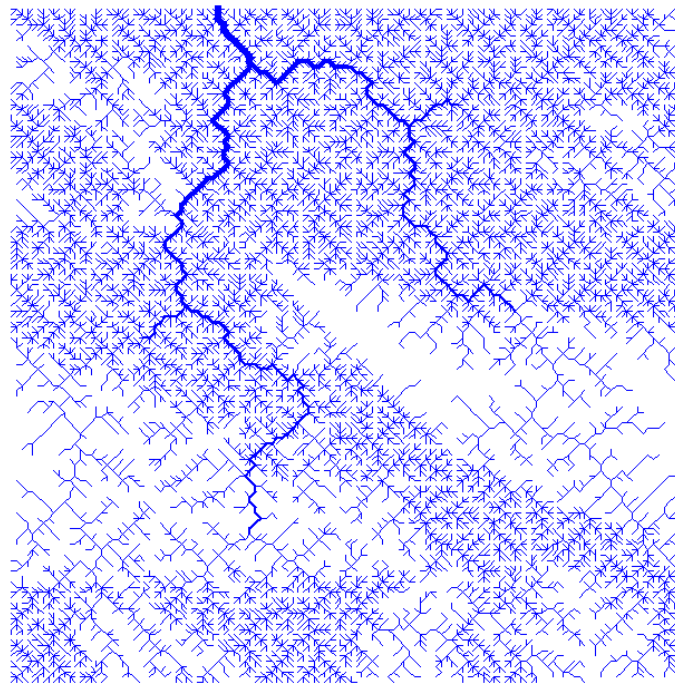
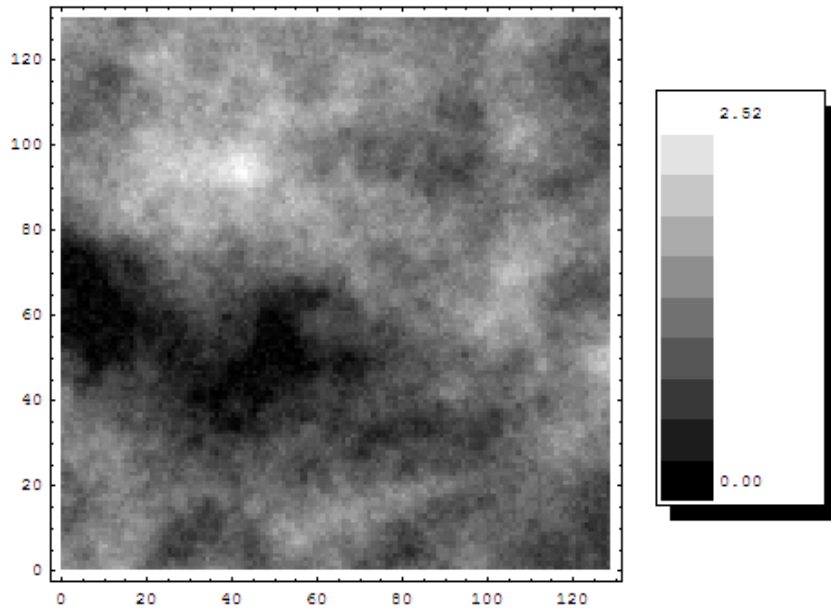


Figura 4.19: campo di pioggia random $I = 50$, $\sigma^2 = 0.5$, relativa OCN e scaling delle aree cumulate con $\tau(50, 0.5) = 0.434$.



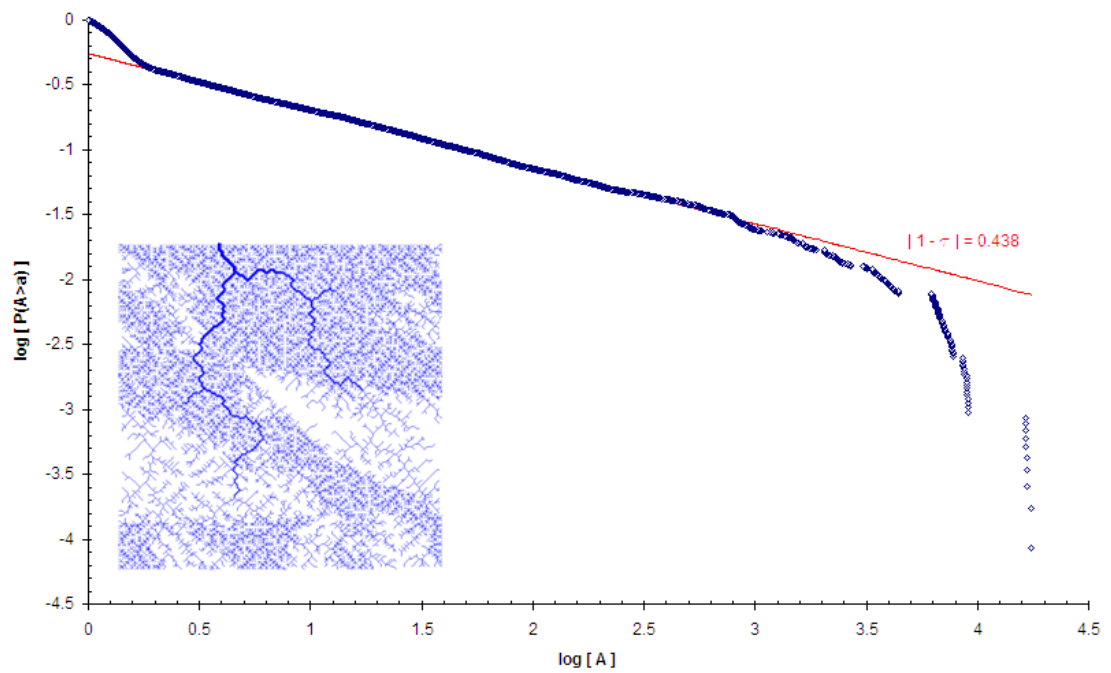
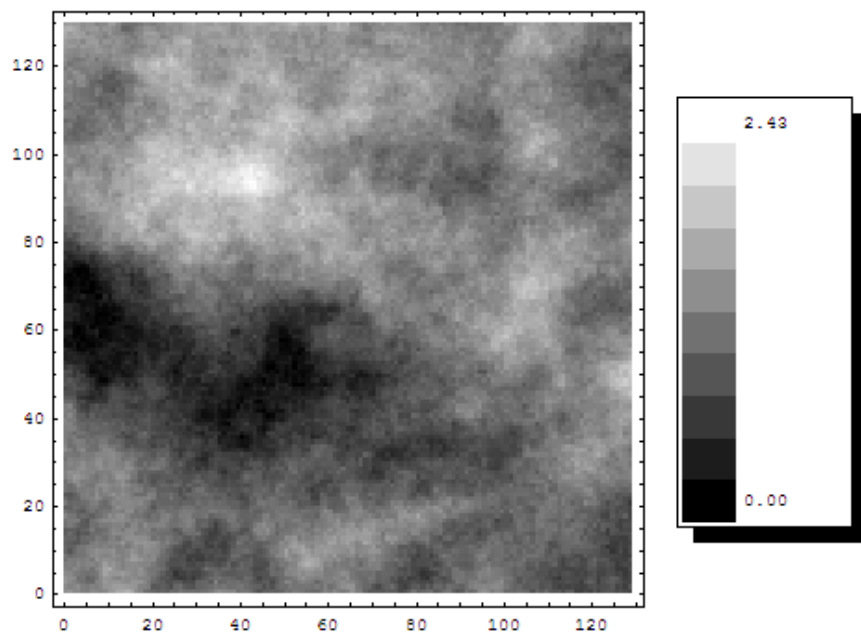


Figura 4.20: campo di pioggia random $I = 80$, $\sigma^2 = 0.5$, relativa OCN e scaling delle aree cumulate con $\tau(80, 0.5) = 0.438$.



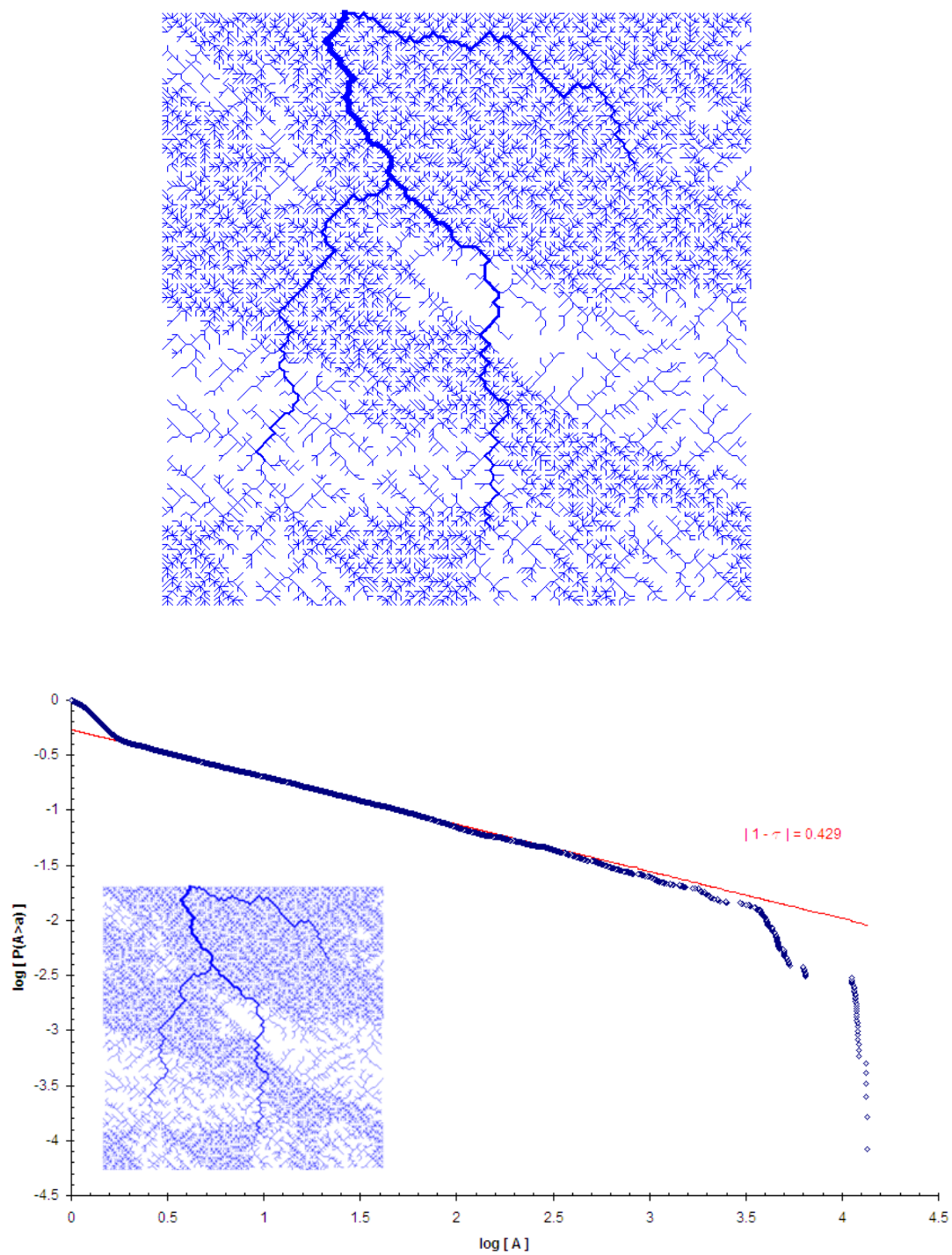
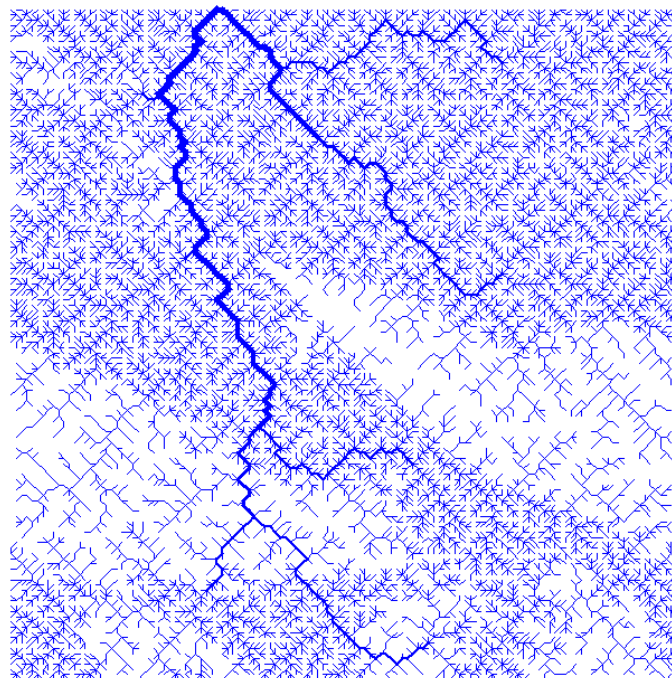
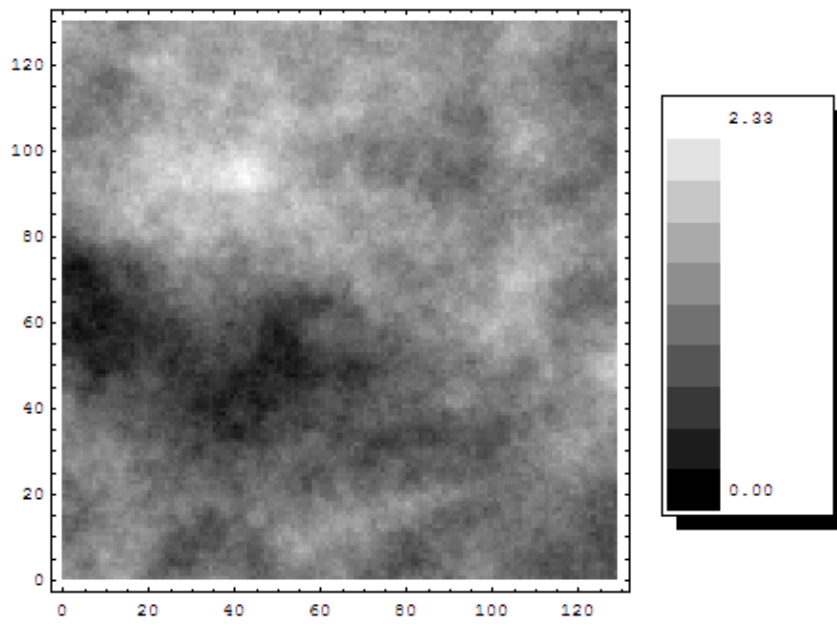


Figura 4.21: campo di pioggia random $I = 100$, $\sigma^2 = 0.5$, relativa OCN e scaling delle aree cumulate con $\tau(100, 0.5) = 0.429$.



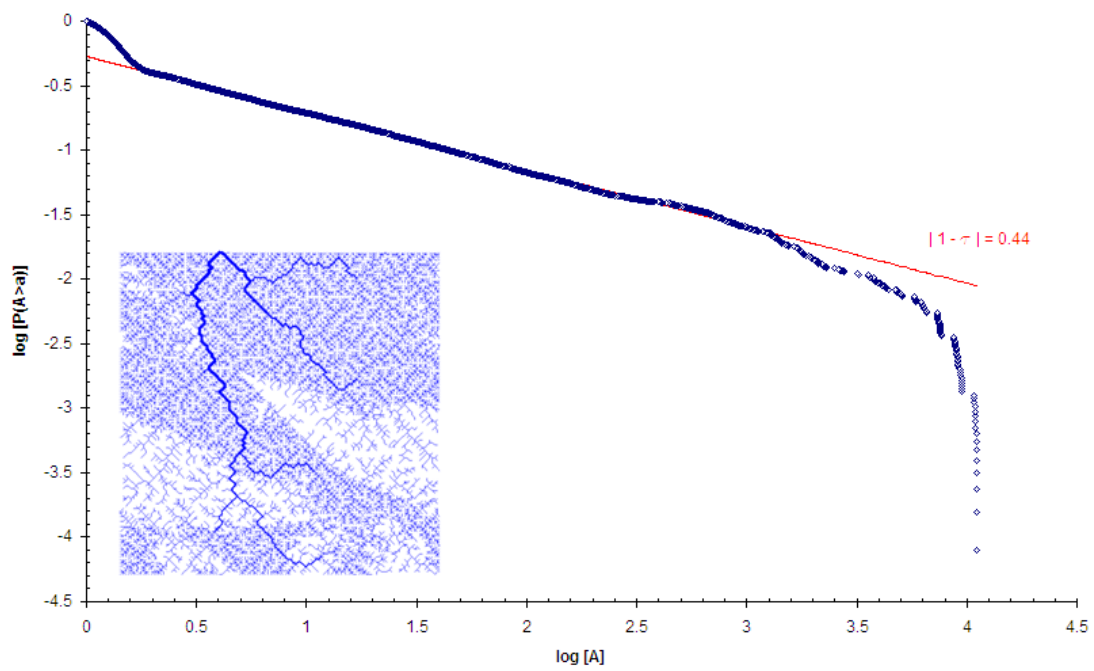
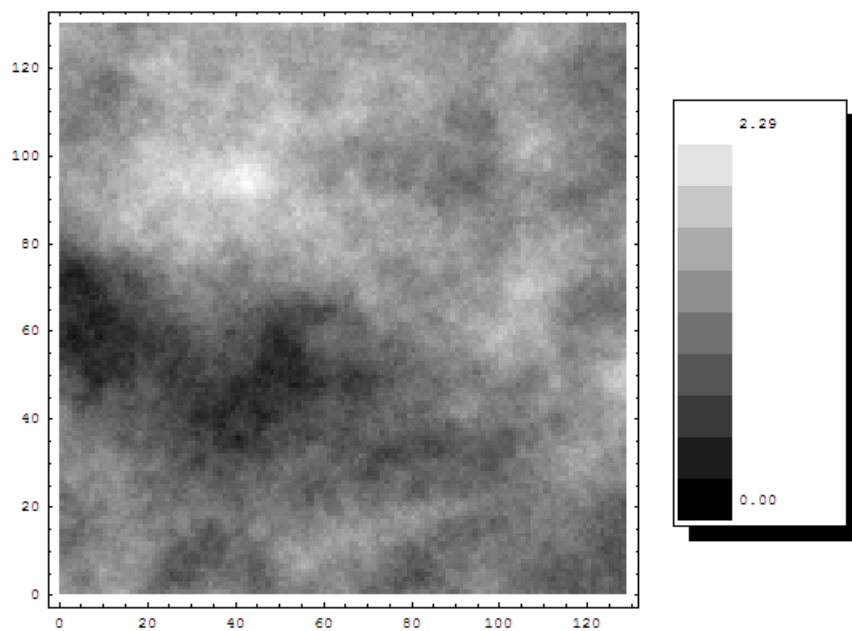


Figura 4.22: campo di pioggia random $I = 130$, $\sigma^2 = 0.5$, relativa OCN e scaling delle aree cumulate con $\tau(130, 0.5) = 0.440$.



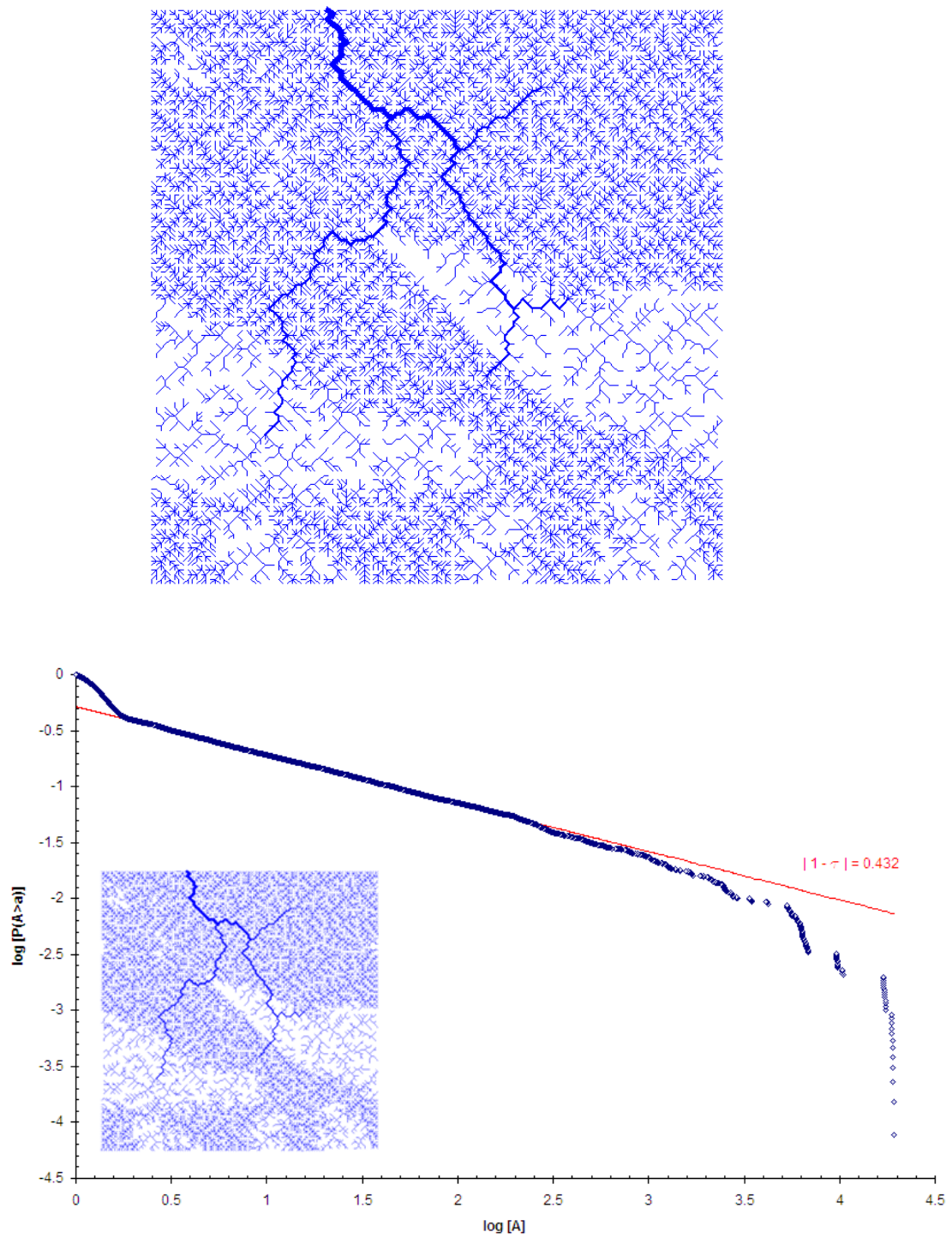


Figura 4.23: campo di pioggia random $I = 150$, $\sigma^2 = 0.5$, relativa OCN e scaling delle aree cumulate con $\tau(150, 0.5) = 0.432$.

Si propongono ora alcune altre relazioni lineari e con legge a potenza, effettuate per il caso omogeneo, per la rete eterogenea formata con campo random di precipitazione a scala di correlazione $I = 15$.

Lo scaling delle aree è già stato proposto precedentemente.

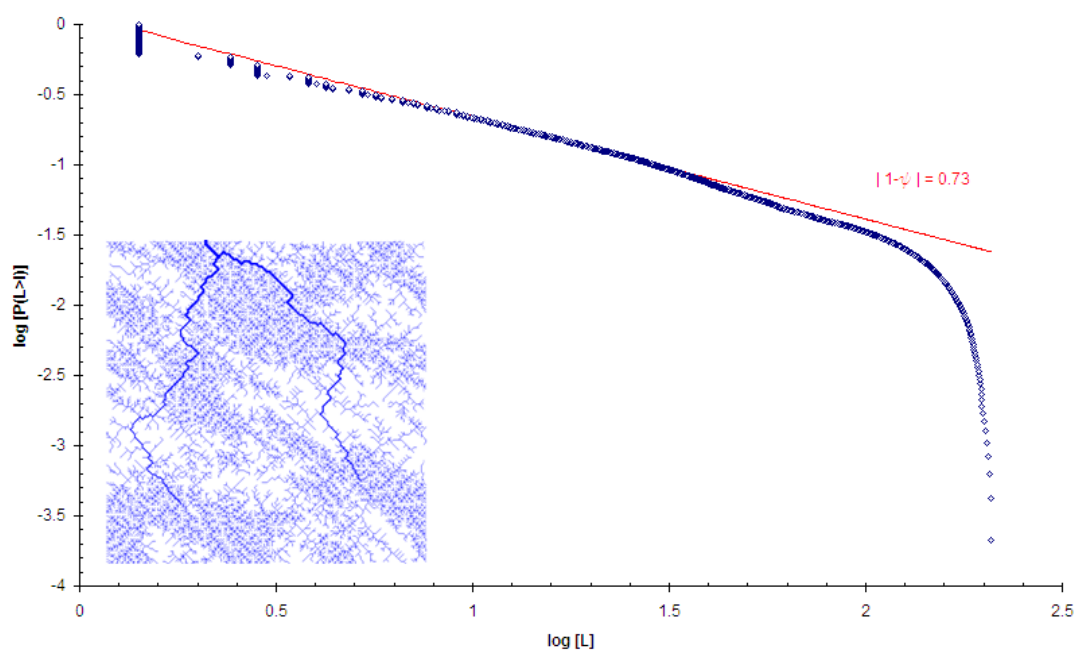


Figura 4.24: distribuzione a legge di potenza del logaritmo della probabilità cumulata di superamento $P[L_{up} > l_{up}]$ in funzione di $\log[L_{up}]$; l'esponente $\psi = 1.73$ risulta, per questa simulazione di rete con $I = 15$, uguale a quello della corrispondente rete uniforme con stesse condizioni iniziali e $r_i = cost = 1$.

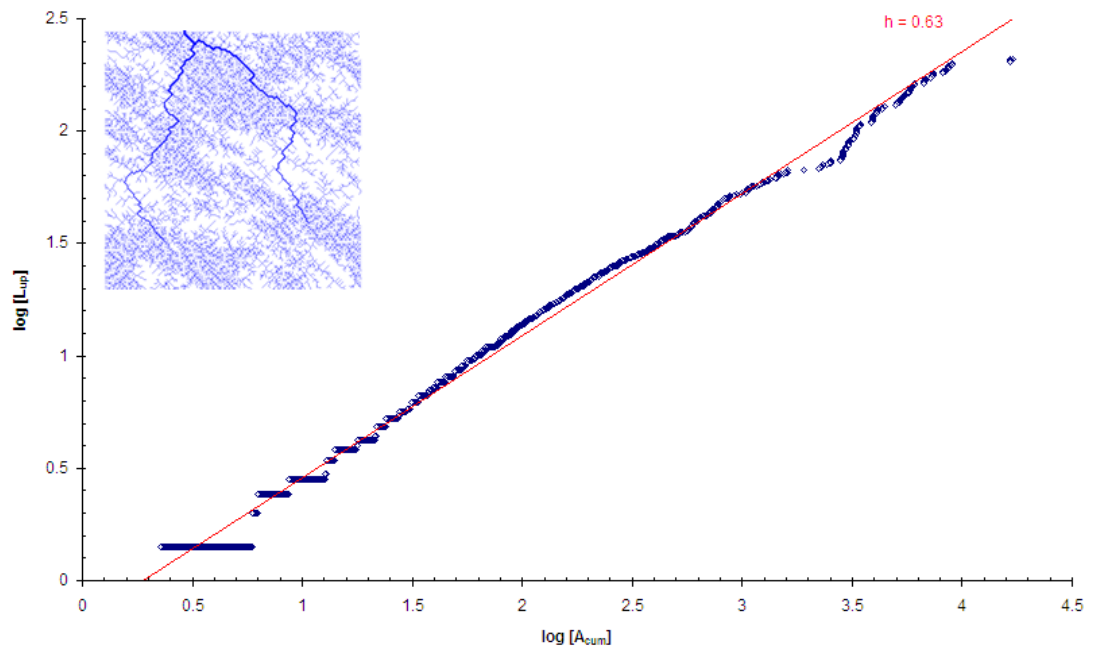


Figura 4.25: relazione tra le lunghezze upstream L_{up} e le aree cumulate A_i nota anche come relazione di Hack; $h = 0.63$ risulta essere uguale a quello della corrispondente rete uniforme.

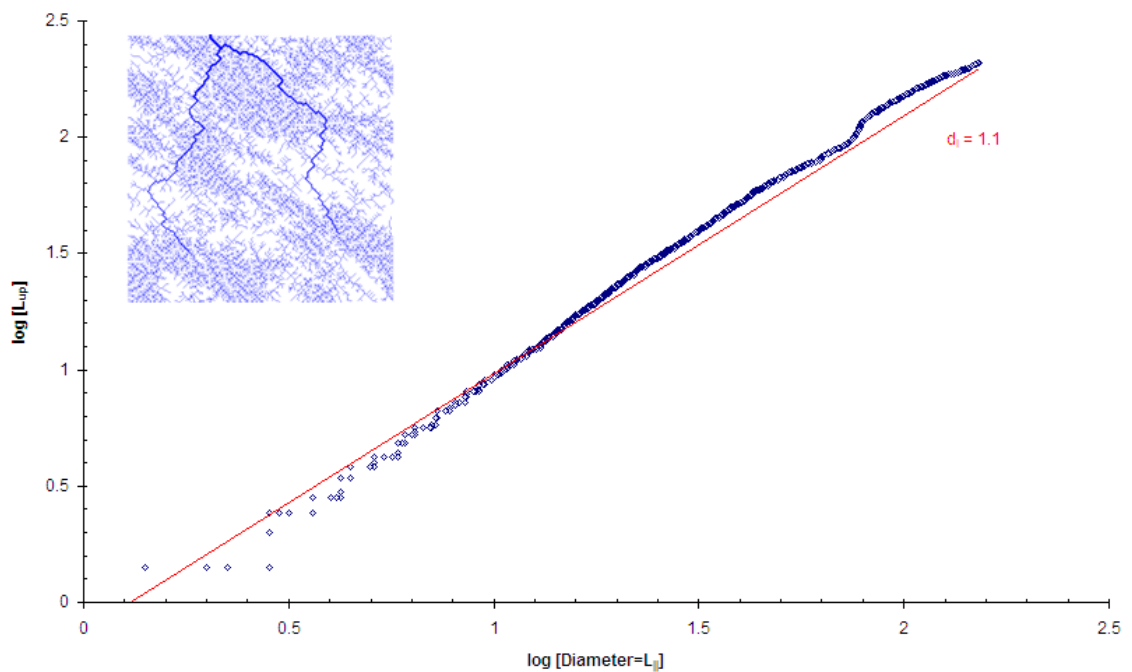


Figura 4.26: grafico della relazione tra lunghezze upstream e diametri indicata come $L \propto L_{||}^{d_l}$; l'esponente d_l risulta 1.1.

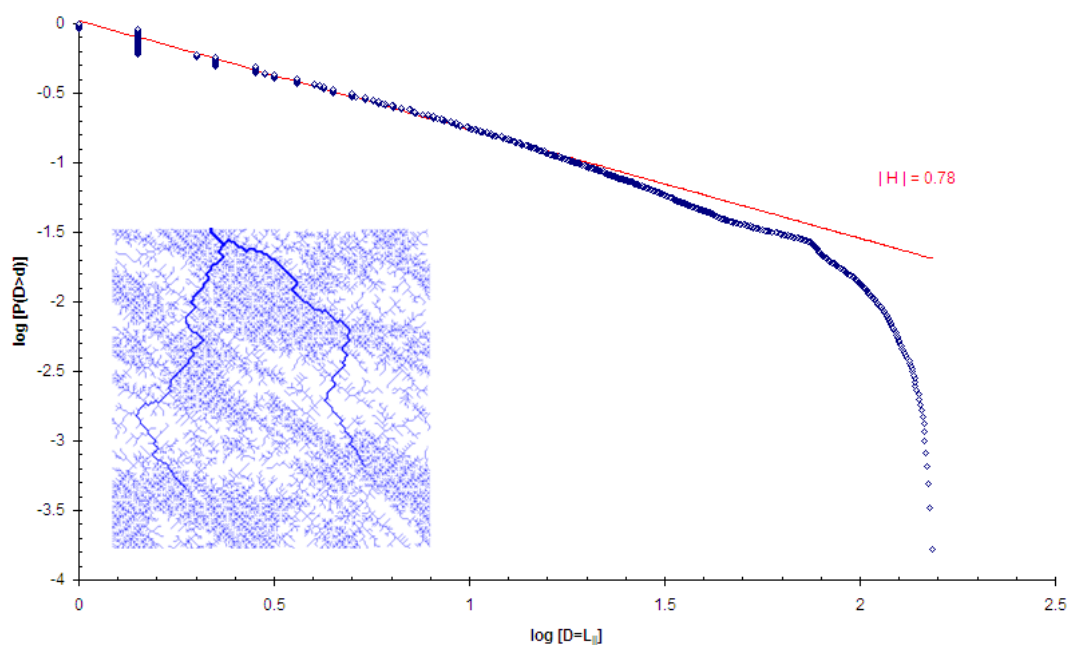


Figura 4.27: legge a potenza della distribuzione dei diametri in termini di probabilità $P[L_{||} > l_{||}]$, l'esponente è 0.78, differente da 0.76 della rete uniforme.

4.4 Analisi per campi di precipitazione a covarianza esponenziale con $\langle r_i \rangle = 1$ e $\sigma^2 = 1.0$.

L'analisi per campi di pioggia con covarianza esponenziale e $\sigma^2 = 0.5$, è stata condotta per gli stessi valori della scala di correlazione I adottati nell'analisi con campi di pioggia a $\sigma^2 = 0.5$.

Si propongono le relative OCNs, aventi le stesse condizioni iniziali di quelle ottenute con campi a $\sigma^2 = 0.5$, quindi della rete uniforme, in piccola scala accanto alle rispettive leggi di potenza delle aree cumulate.

Sono state eseguite altre quattordici simulazioni di reti aventi differenti condizioni iniziali (anche in termini di outlet), stesse condizioni al contorno e

forzanti (campi di precipitazione), la maggior parte di dimensione 128×128 , ma alcune anche 256×256 , 64×64 , e 32×32 .

Ad esse si rimanda agli allegati o al già citato sito (vedi Allegato 3).

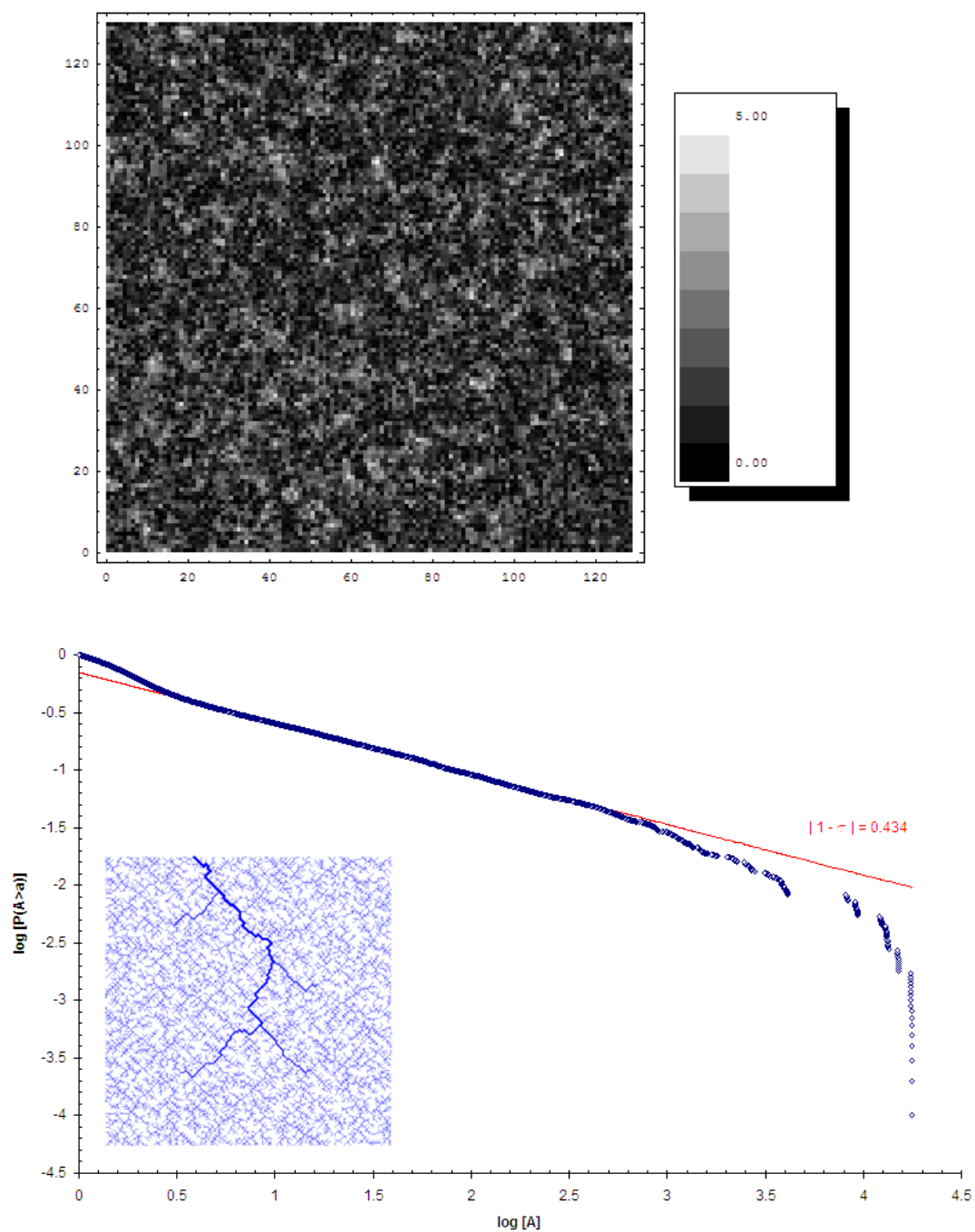


Figura 4.28: campo di pioggia random $I = 1$, $\sigma^2 = 1$, scaling delle aree cumulate con $\tau(1, 1) = 0.434$ e OCN in piccolo.

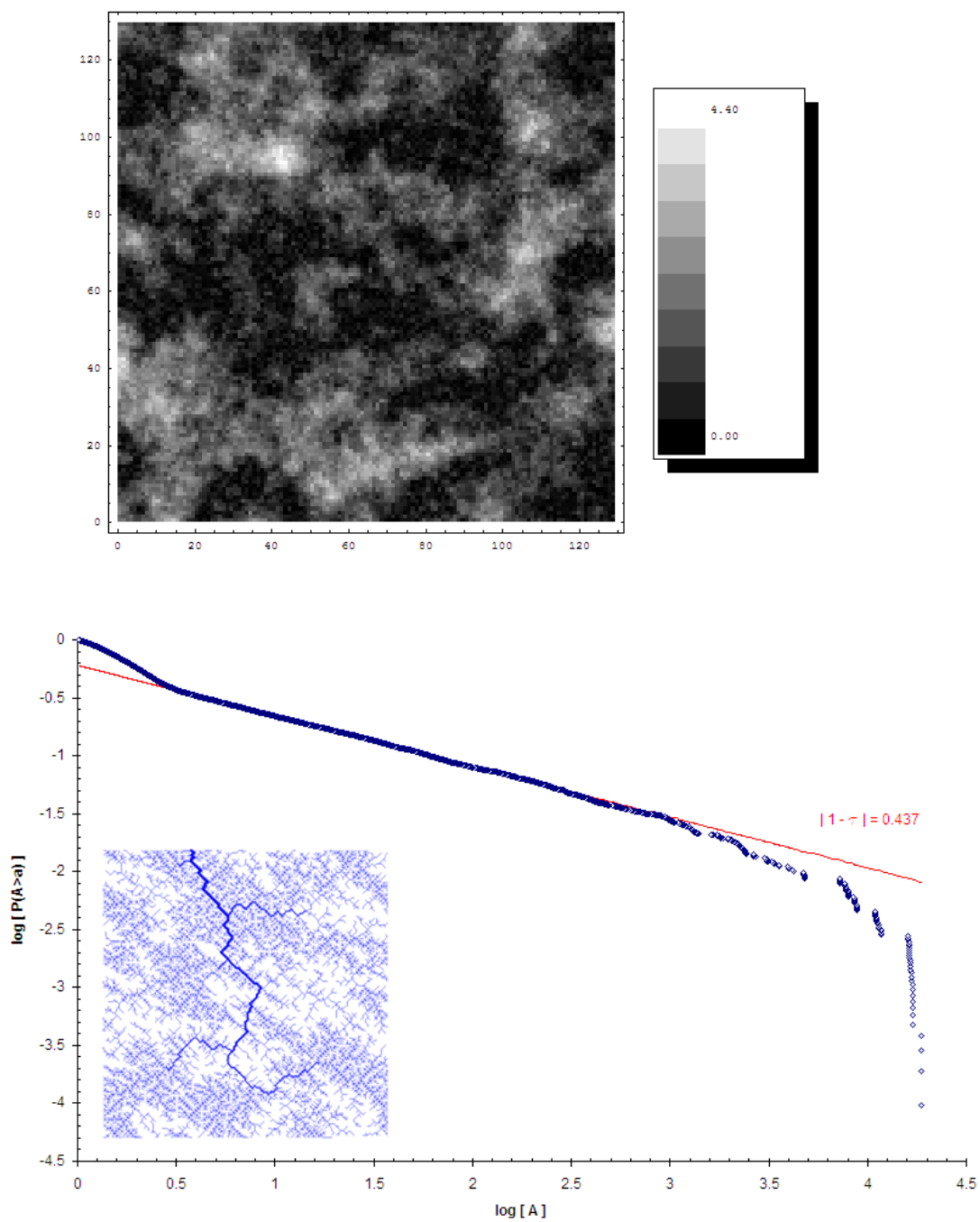


Figura 4.29: campo di pioggia random $I = 10$, $\sigma^2 = 1$, scaling delle aree cumulate

con $\tau(10, 1) = 0.437$ e OCN in piccolo.

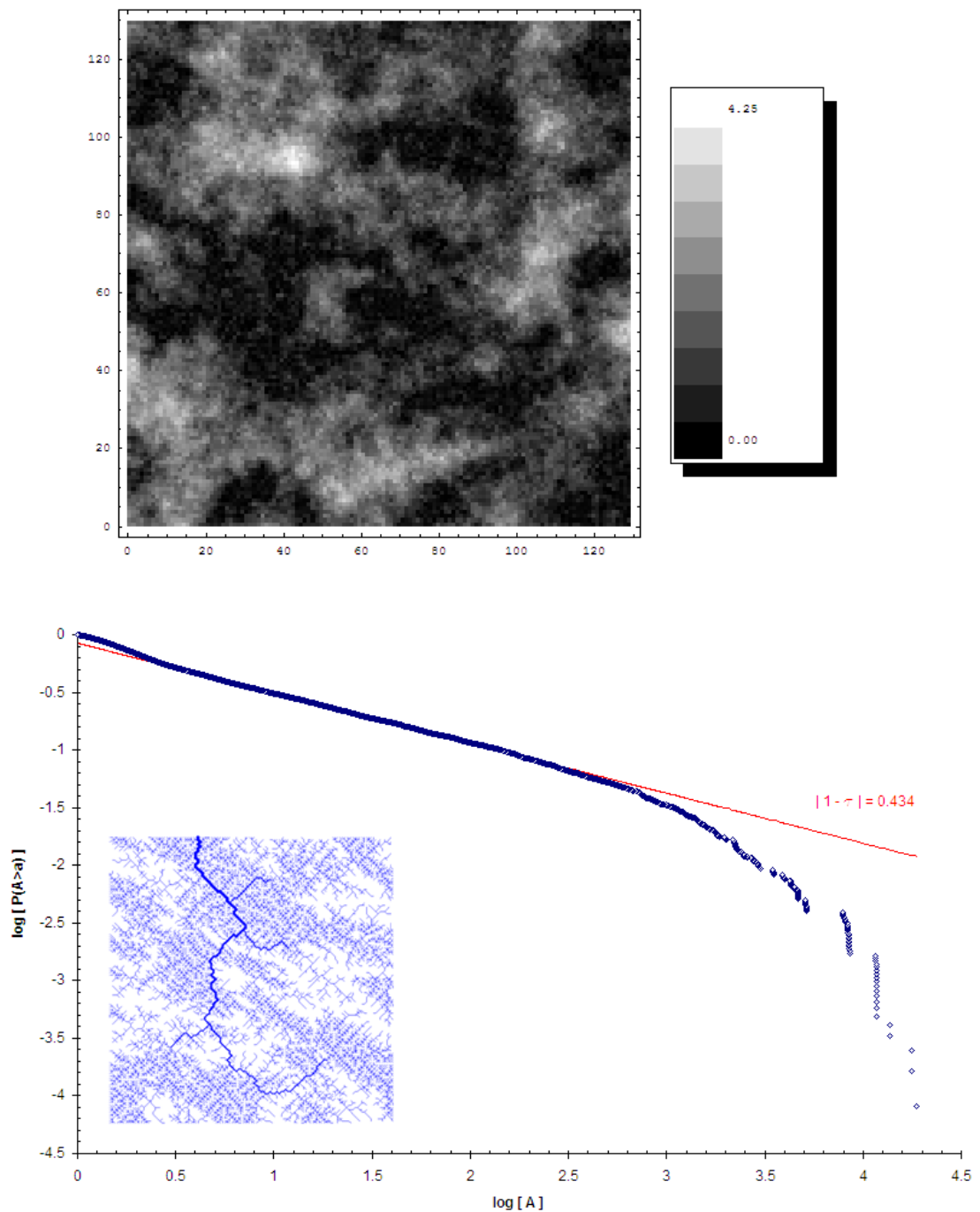


Figura 4.30: campo di pioggia random $I = 15$, $\sigma^2 = 1$, scaling delle aree cumulate con $\tau(15, 1) = 0.434$ e OCN in piccolo.

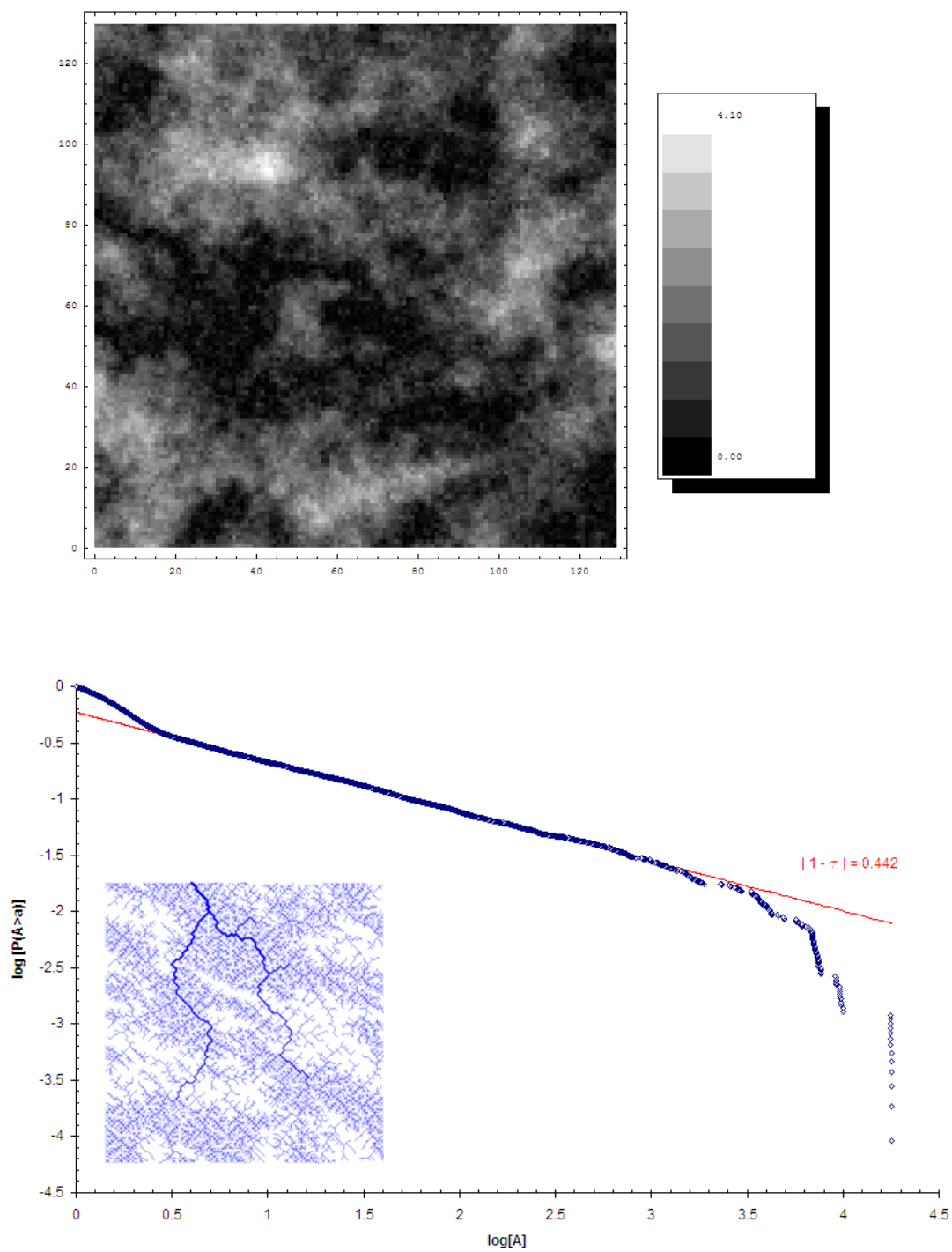


Figura 4.31: campo di pioggia random $I = 20$, $\sigma^2 = 1$, scaling delle aree cumulate con $\tau(20, 1) = 0.442$ e OCN in piccolo.

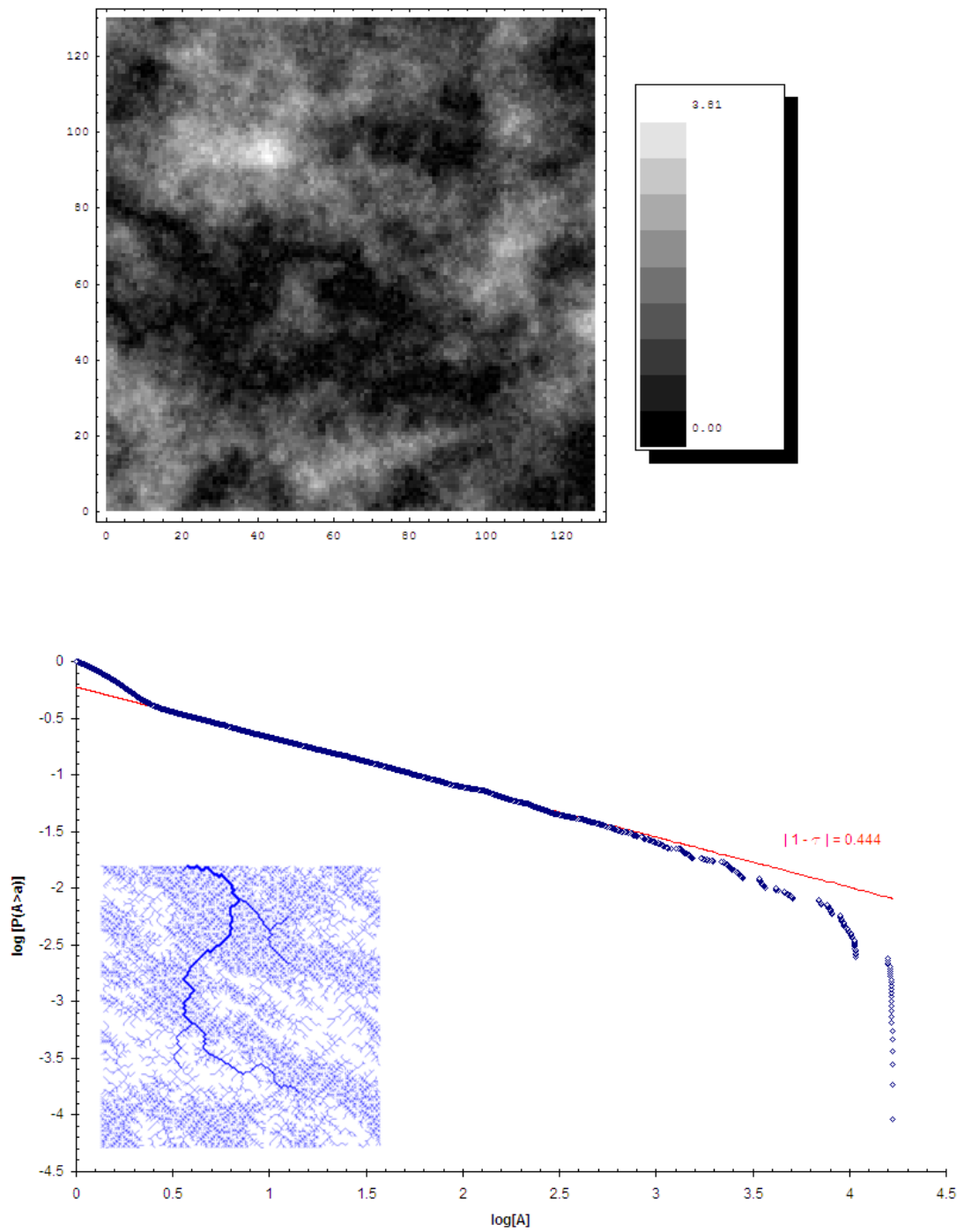


Figura 4.32: campo di pioggia random $I = 30$, $\sigma^2 = 1$, scaling delle aree cumulate con $\tau(30, 1) = 0.444$ e OCN in piccolo.

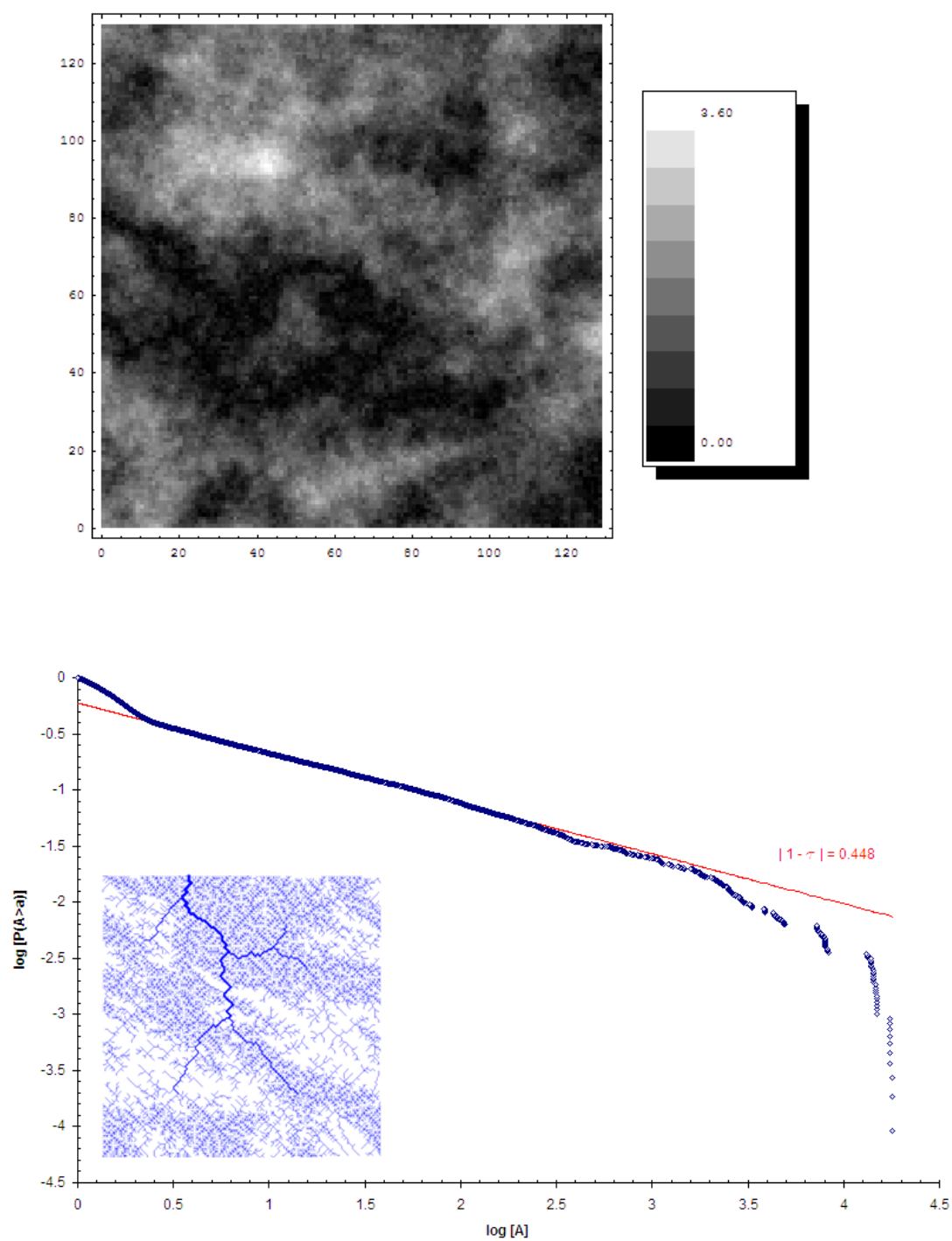


Figura 4.33: campo di pioggia random $I = 40$, $\sigma^2 = 1$, scaling delle aree cumulate con $\tau(40, 1) = 0.448$ e OCN in piccolo.

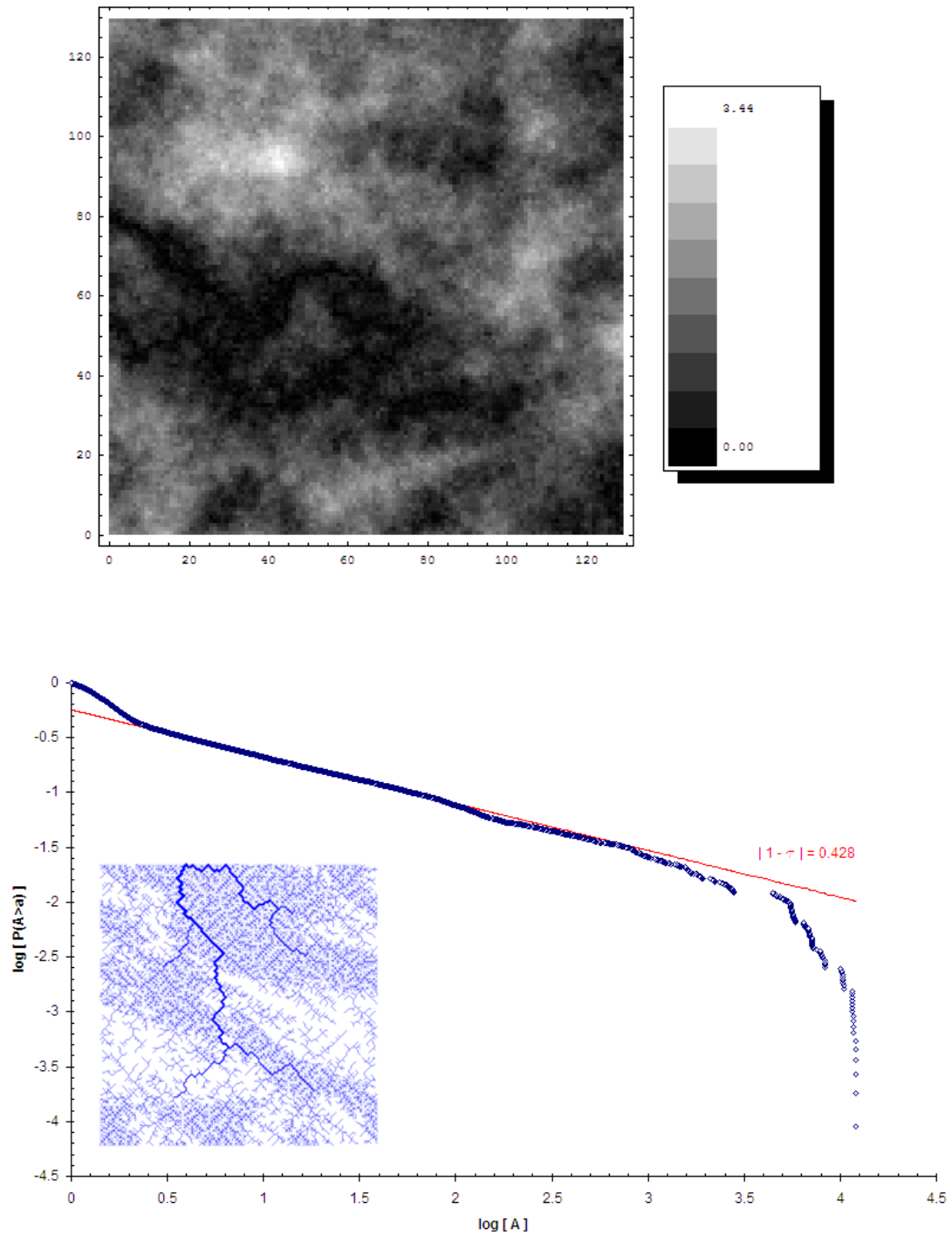


Figura 4.34: campo di pioggia random $I = 50$, $\sigma^2 = 1$, scaling delle aree cumulate con $\tau(50, 1) = 0.428$ e OCN in piccolo.

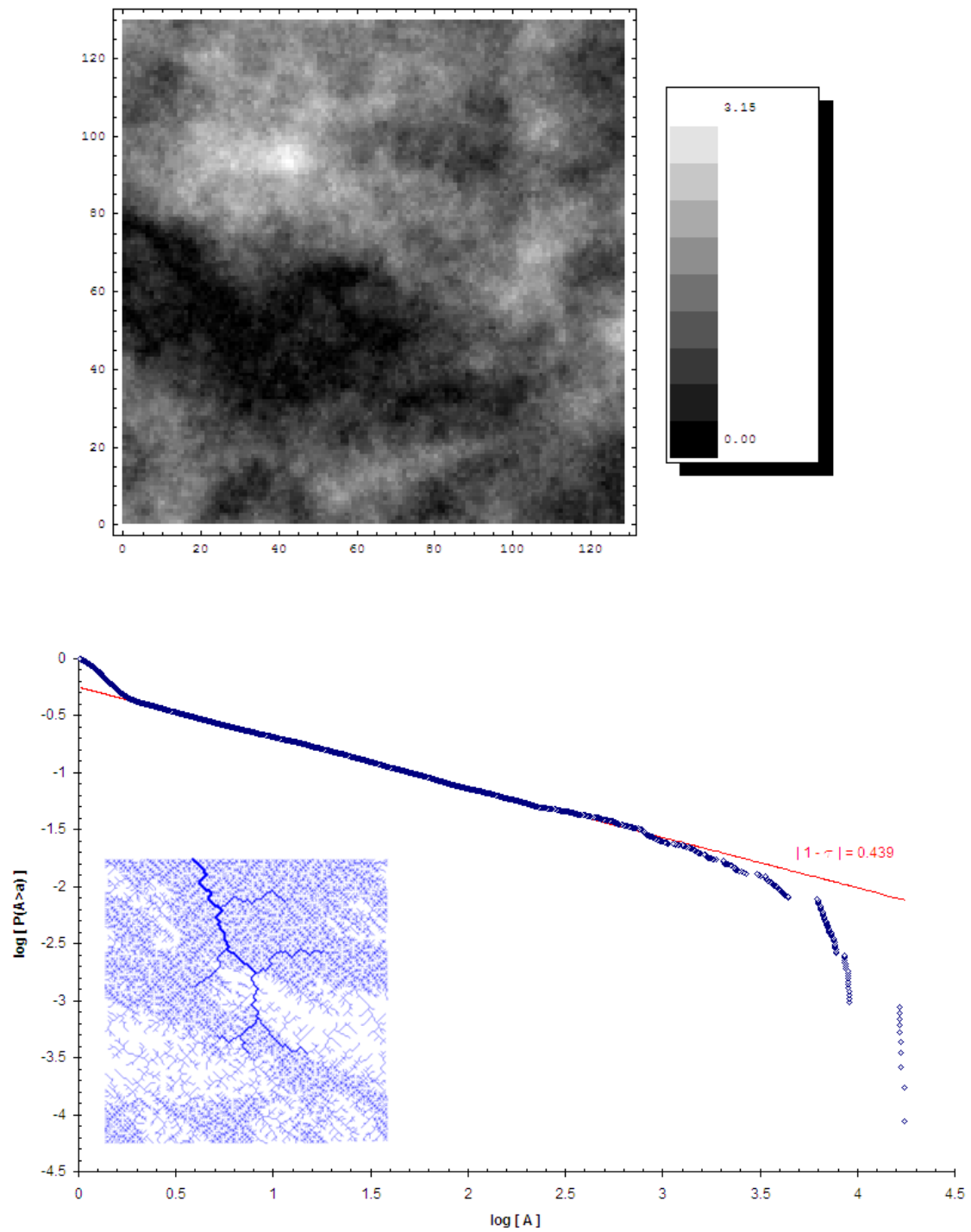


Figura 4.35: campo di pioggia random $I = 80$, $\sigma^2 = 1$, scaling delle aree cumulate con $\tau(80, 1) = 0.439$ e OCN in piccolo.

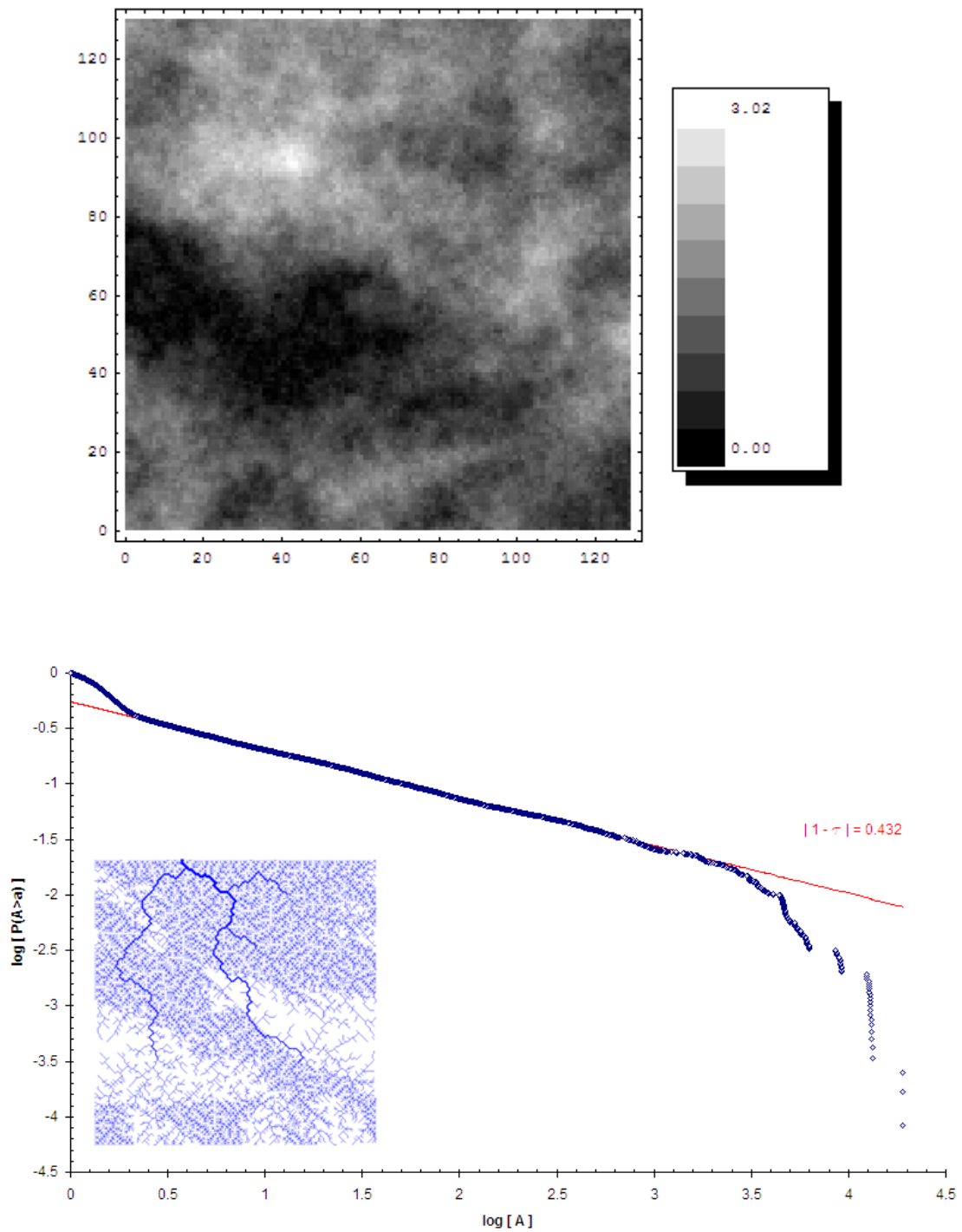


Figura 4.36: campo di pioggia random $I = 100$, $\sigma^2 = 1$, scaling delle aree cumulate con $\tau(100, 1) = 0.432$ e OCN in piccolo.

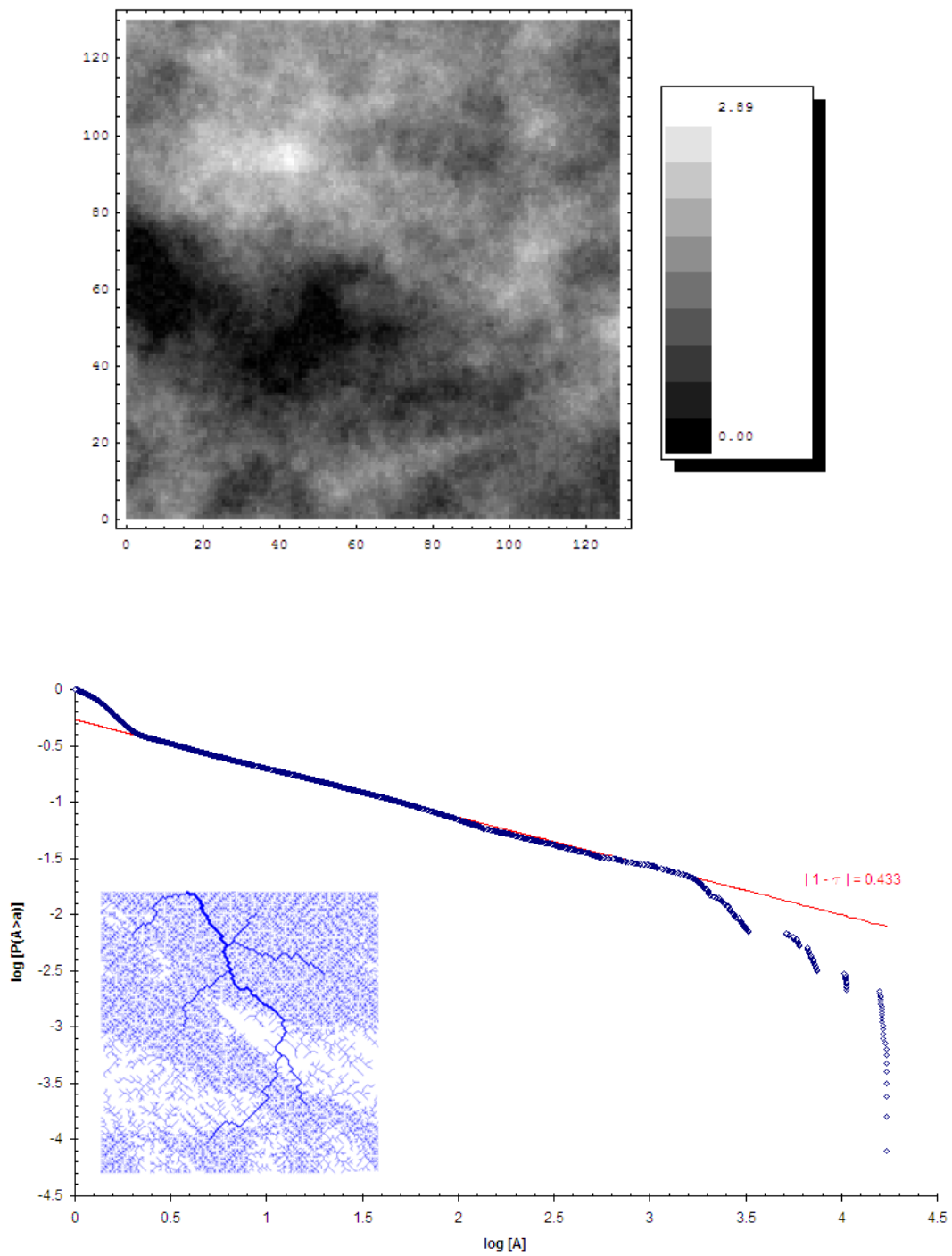


Figura 4.37: campo di pioggia random $I = 130$, $\sigma^2 = 1$, scaling delle aree cumulate con $\tau(130, 1) = 0.432$ e OCN in piccolo.

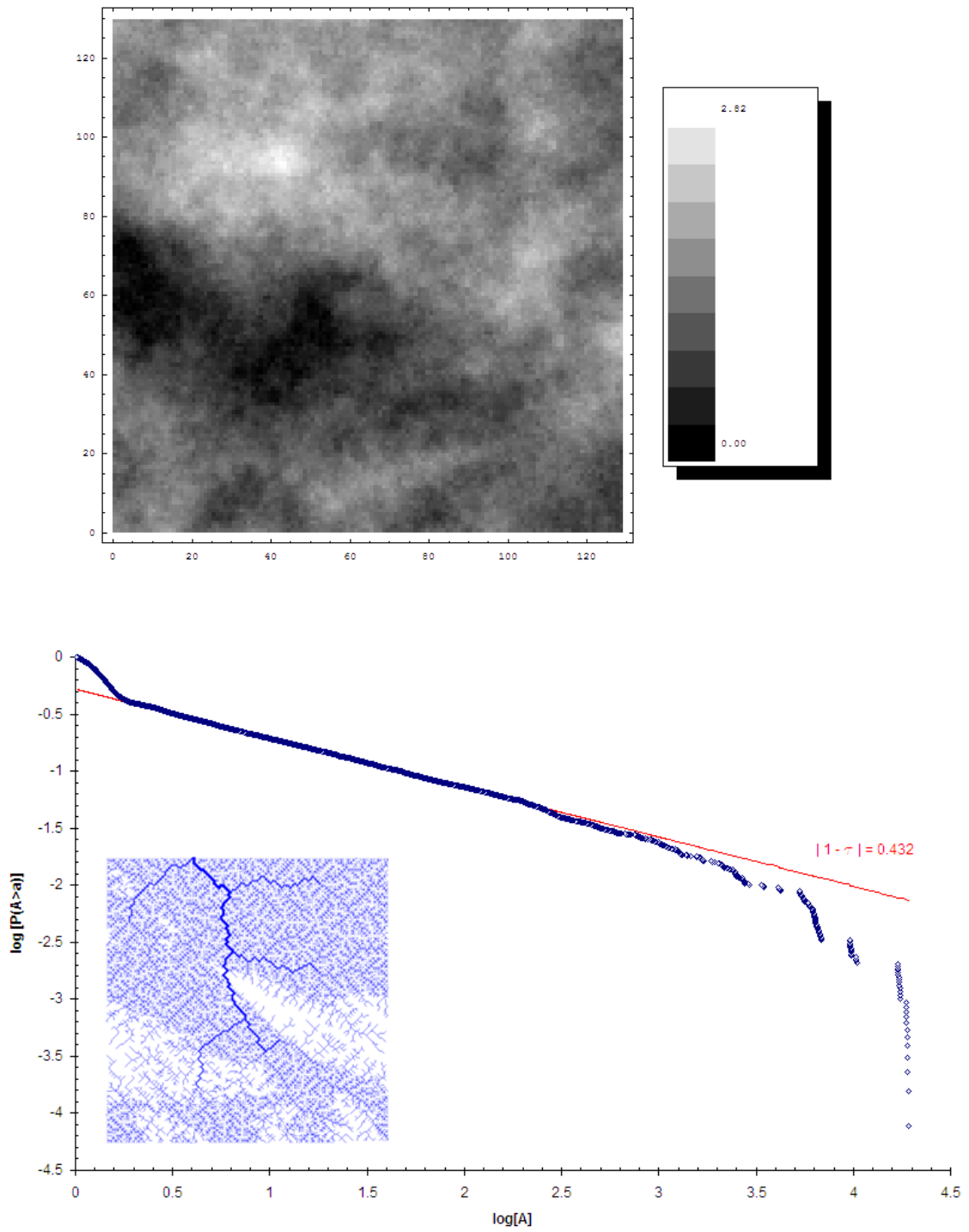


Figura 4.38: campo di pioggia random $I = 150$, $\sigma^2 = 1$, scaling delle aree cumulate con $\tau(150, 1) = 0.432$ e OCN in piccolo.

4.5 Analisi per altri campi di precipitazione.

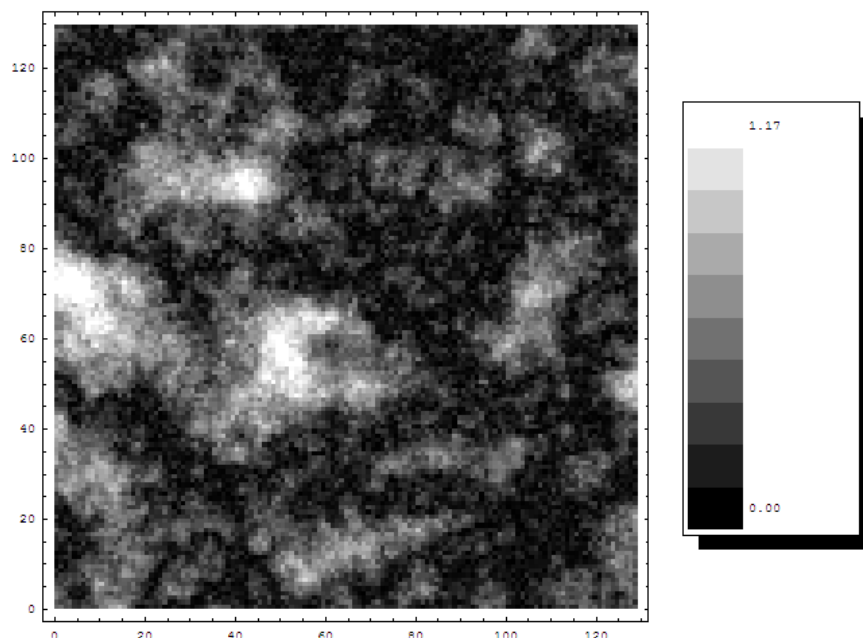
Si riportano di seguito le OCNs ottenute con campi di precipitazione a media zero e varianza $\sigma^2 = 0.1$, con campi deterministici, con campo random senza struttura di correlazione, e con campo frattale.

Il campo con $\langle r_i \rangle = 0.00$ e $\sigma^2 = 0.1$ è stato preso in considerazione per ricadere nella situazione di pioggia mediamente nulla (caso "siccità") teoricamente per $I \rightarrow \infty$ (per infinito si intende nella pratica $I/L \geq 1$).

In realtà il campo di pioggia a media nulla può essere generato con qualsiasi valore di I (ricordiamo che la scala di correlazione determina sia la distanza tra le zone senza precipitazione, quindi tra quelle con precipitazione, sia la dimensione di tali zone) dato che si impone $\langle r_i \rangle = 0.00$.

Sono state condotte diverse prove a riguardo e si è visto che anche per $I \rightarrow \infty$, così come per $I \rightarrow 0$, si tende al caso uniforme quindi $\tau \rightarrow \tau^*$.

Si propone il caso per $I = 20$.



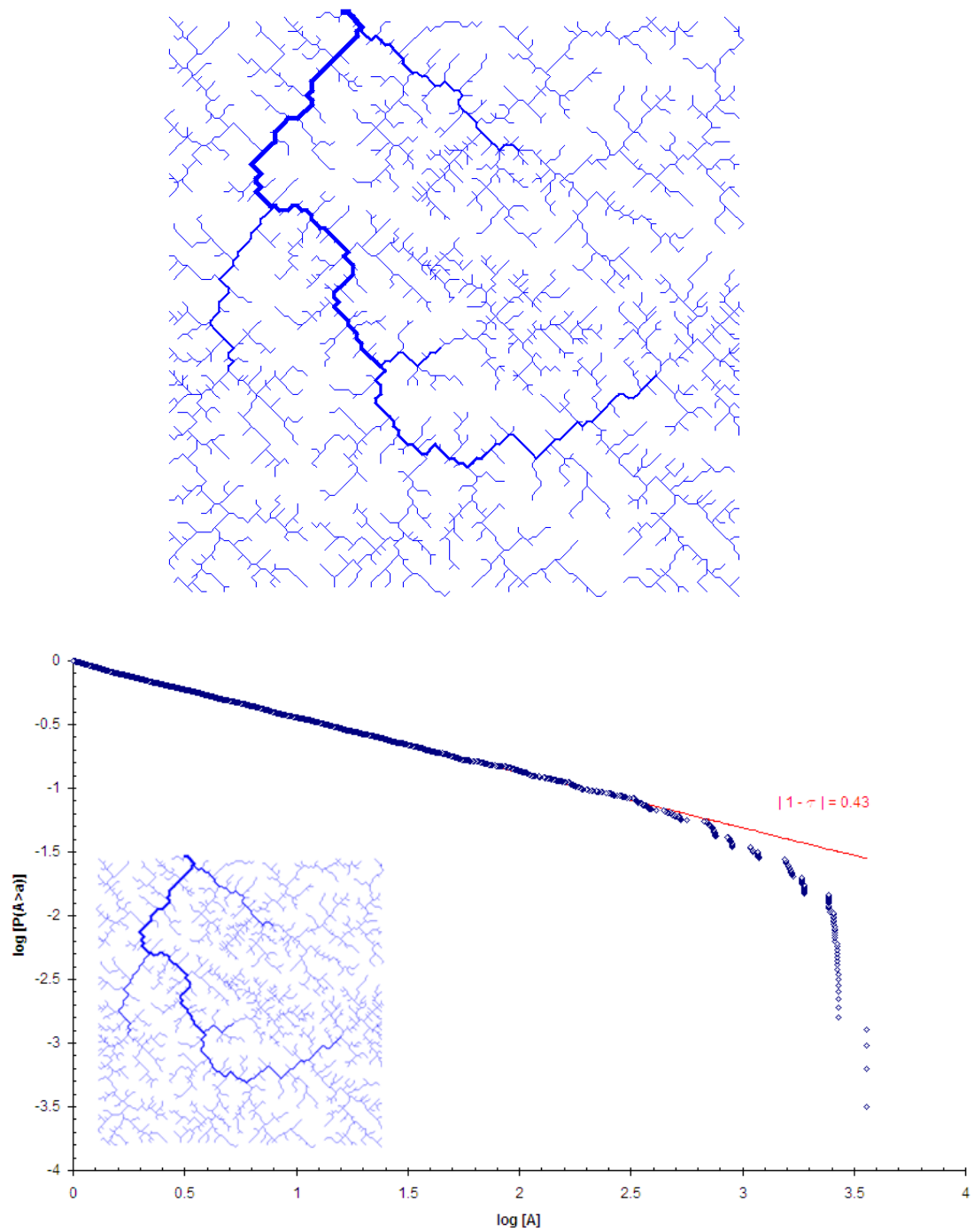
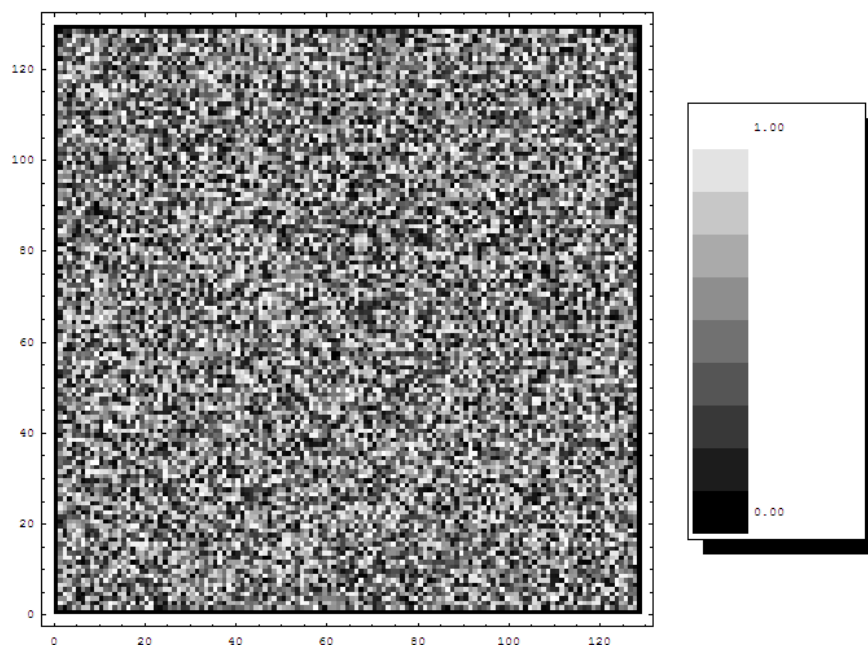


Figura 4.39: campo di pioggia random con $\langle r_i \rangle = 0.00$, $\sigma^2 = 0.1$, e $I = 20$, relativa OCN e scaling delle aree cumulate con $\tau(0, 0.1, 20) = 0.43 = \tau^*$.

Il caso con campo di pioggia completamente scorrelata, con valori nell'intervallo $[0, 1]$, rappresenta la situazione con "quenched randomness" introdotta nel modello tramite iniezione nodale r_i casuale, pertanto, come verificato già da precedenti studi [Colaioni et al., 1997], la rete "perturbata" tende alla struttura dell'OCN uniforme con esponente τ all'interno del normale campo di variabilità delle OCN omogenee.

Si propone un'esempio di simulazione.



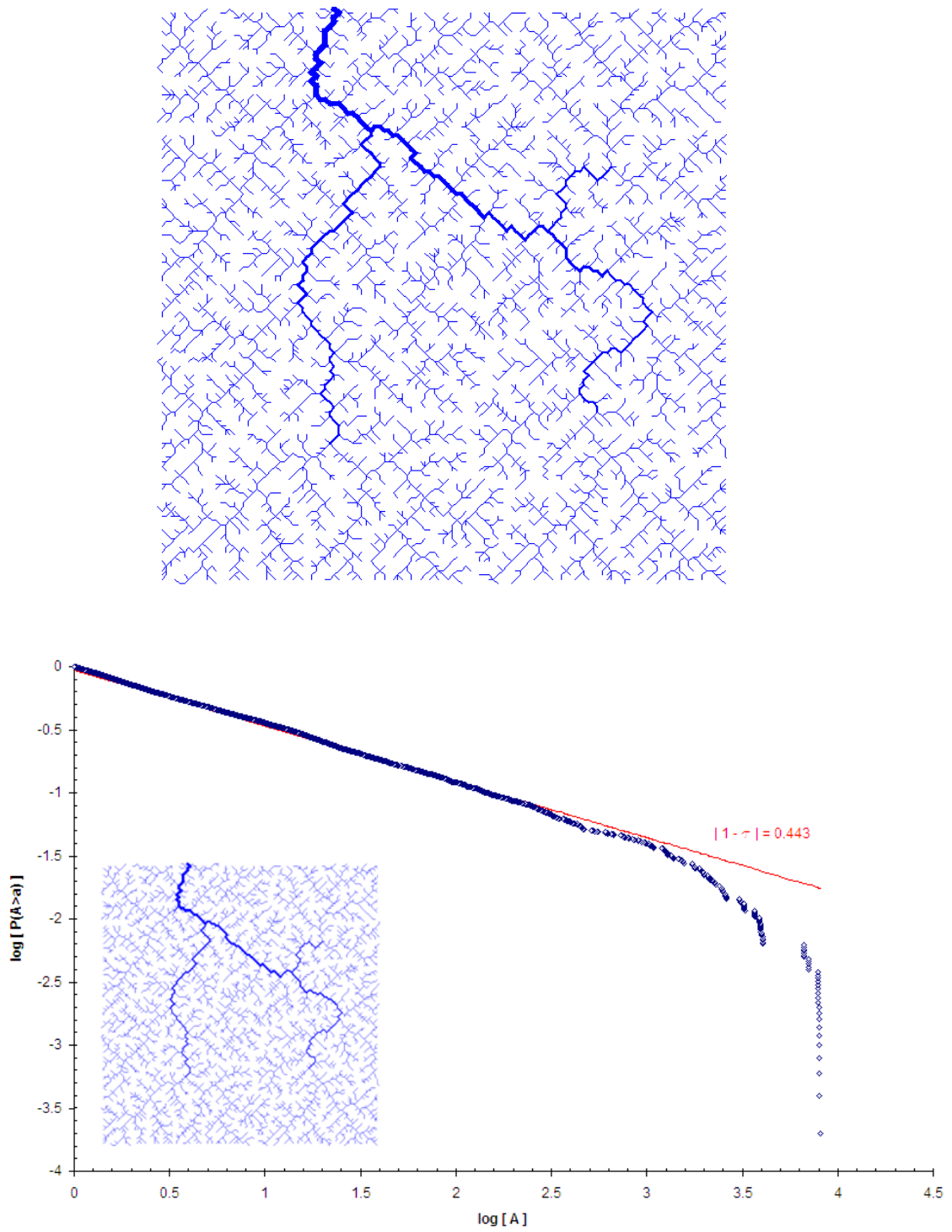
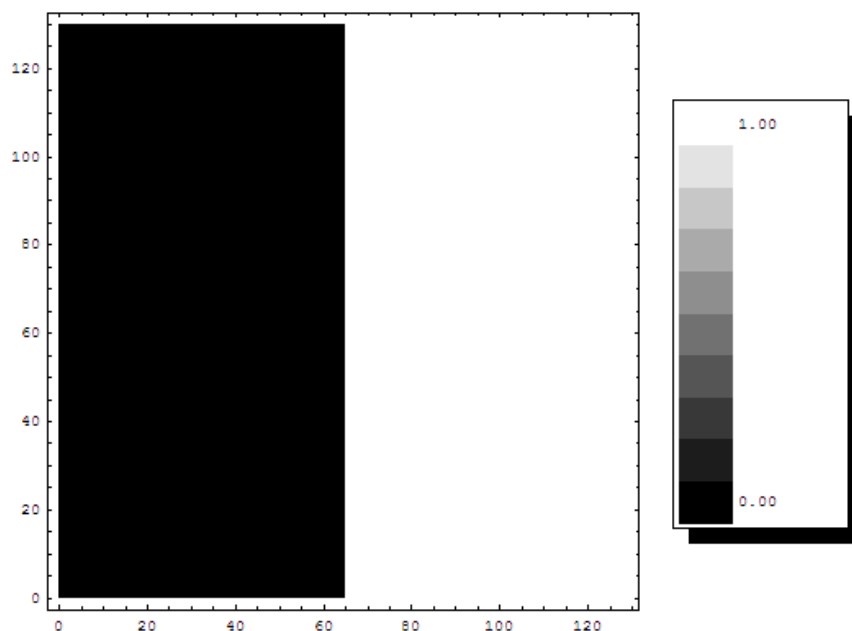


Figura 4.40: campo di pioggia random scorrelata (*quenched*), relativa OCN e scaling delle aree cumulate con $\tau(r_{irand.} \in [0, 1]) = 0.443$.

Si riportano ora i casi delle OCNs derivanti da campi di pioggia deterministici, realizzati imponendo in una metà il valore $r_i = 1.001$, nell'altra metà il valore $r_i = 0.001$, in modo da avere flusso cumulato J_i sempre diverso per ogni pixel i della rete.

Inoltre, ponendo 1 da una parte e 0 dall'altra si ha anche il problema di individuazione dell'outlet e l'algoritmo di Metropolis non si avvia.

I campi deterministici sono gli unici che provocano una variazione sensibile degli esponenti, non tanto nelle OCNs quadrate, quanto in quelle con contorni pari a quelli dei bacini naturali.



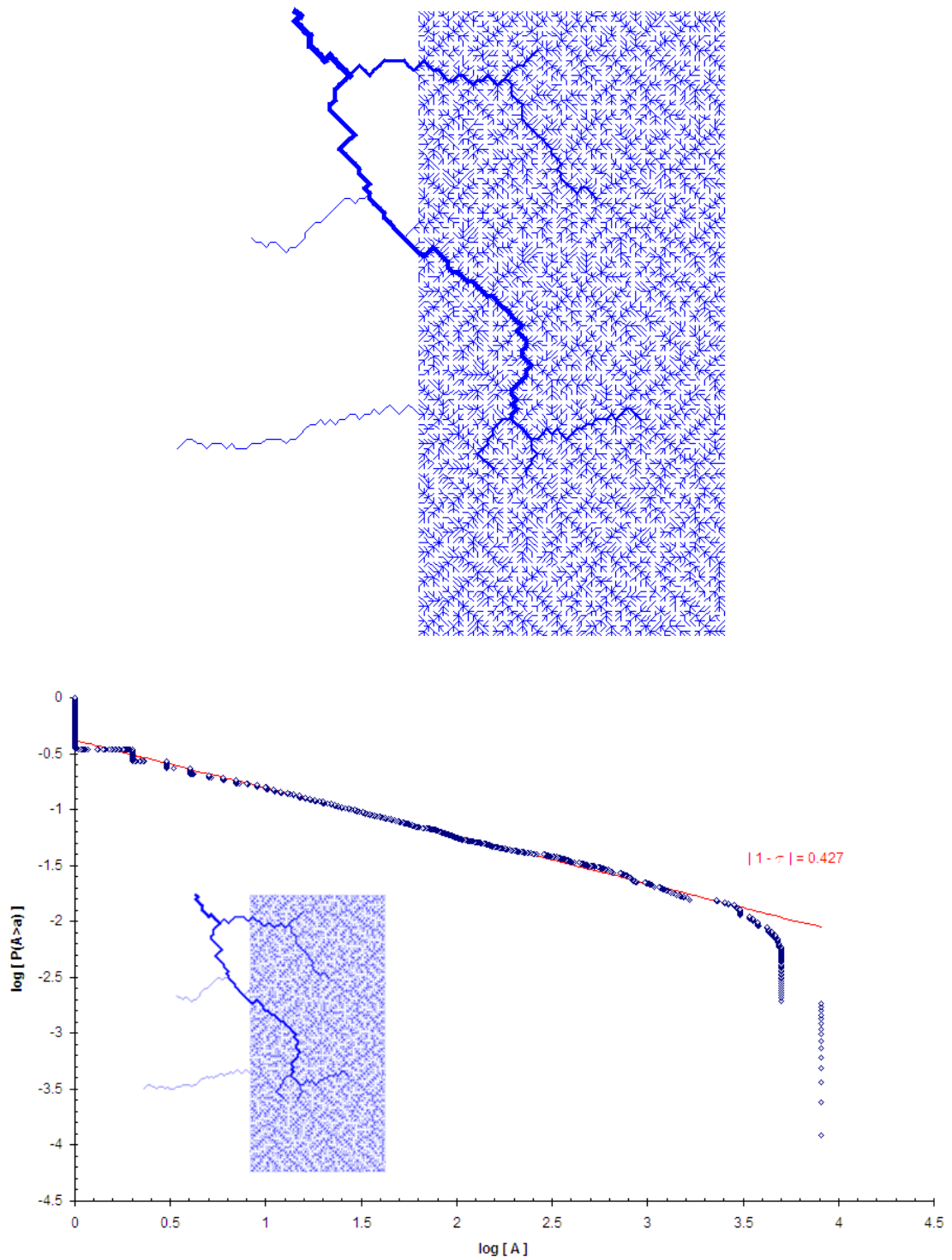
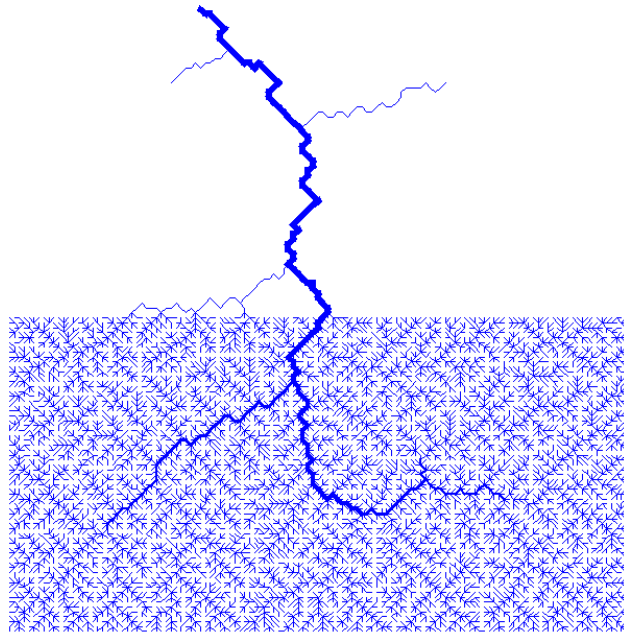
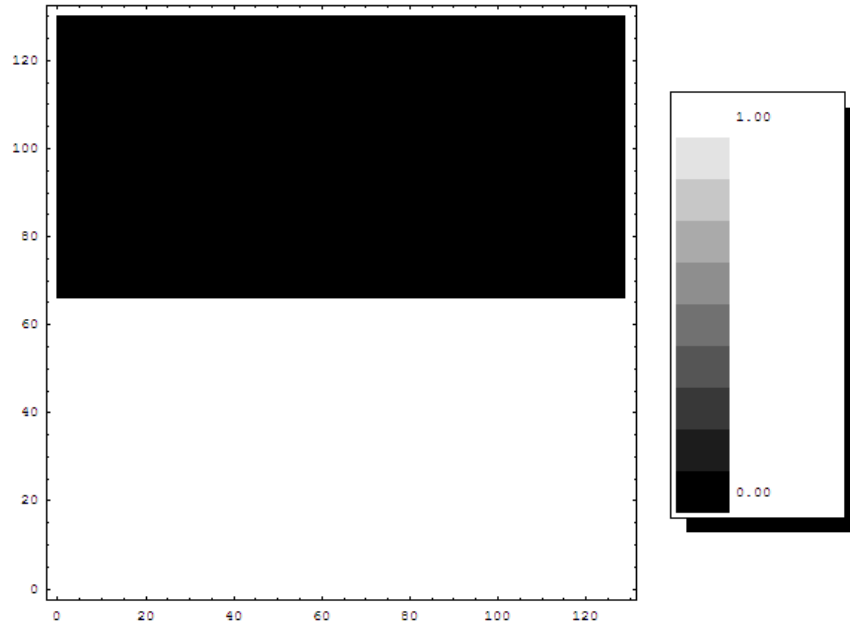


Figura 4.41: campo di pioggia deterministico "half-half", relativa OCN e scaling delle aree cumulate con $\tau = 0.427$; la variazione da τ^* rientra nei limiti ma la

struttura di drenaggio e la $P[A > a]$ non rispecchiano i bacini reali.



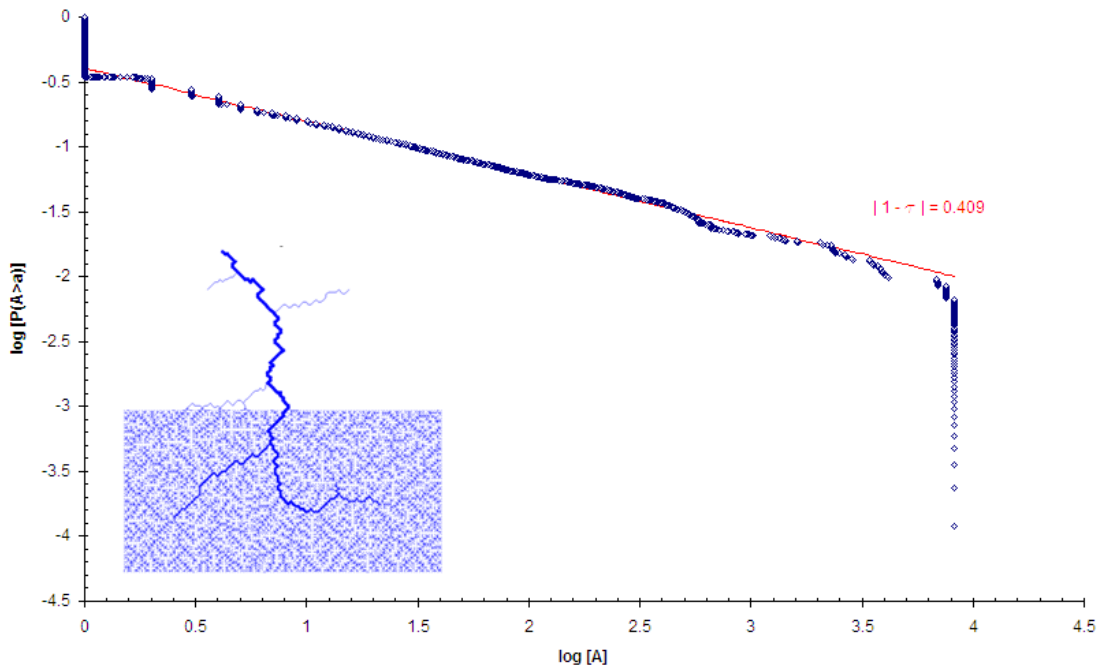


Figura 4.42: campo di pioggia deterministico "up-down", relativa OCN e scaling delle aree cumulate con $\tau = 0.409$; la variazione da τ^* è appena al di fuori dei limiti, la $P[A > a]$ non rispecchia quella dei bacini reali, anche se la struttura di drenaggio potrebbe avere un qualche riscontro in natura.

Per ultima si propone una simulazione con campo frattale di precipitazione, o meglio identificabile come pioggia a "rumore Gaussiano", generata imponendo $\beta = 2H = 1$ come esponente del semivariogramma $\gamma(r) = ar^{\beta=2H}$, con r la coordinata spaziale e H l'esponente di Hurst.

Il campo riportato come esempio, è isotropo con $I = I_x = I_y = 10$ e non si è forzata la media ad essere unitaria.

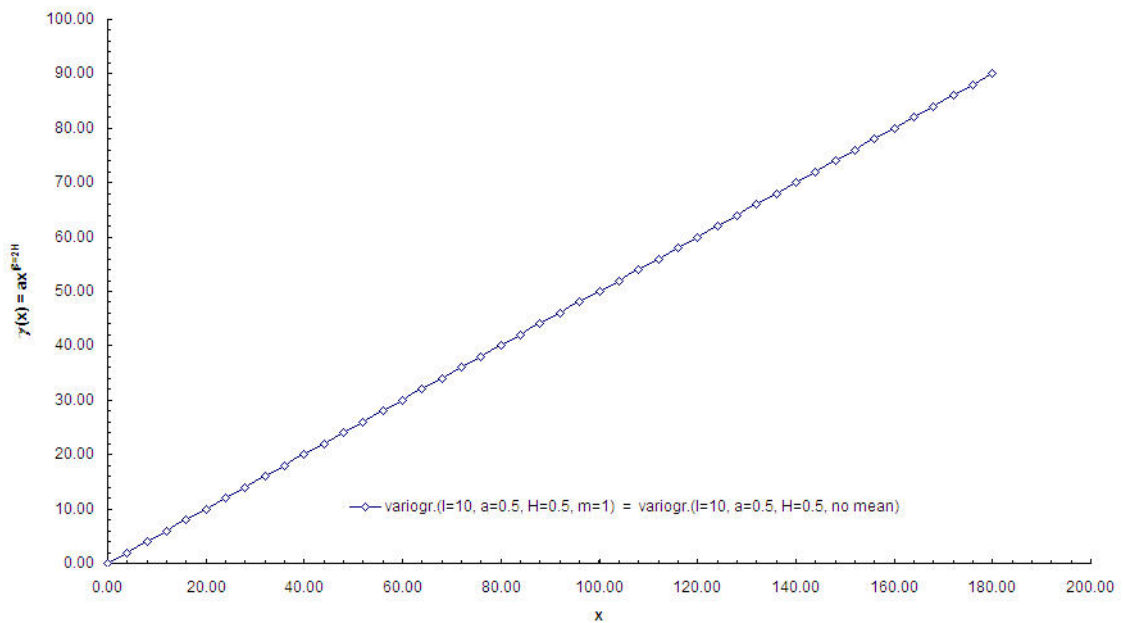


Figura 4.43: semivariogramma $\gamma(r) = ar^{\beta=2H}$ per rumore Gaussiano, quindi $H = 0.5$; la costante è stata posta pari a 0.5 .

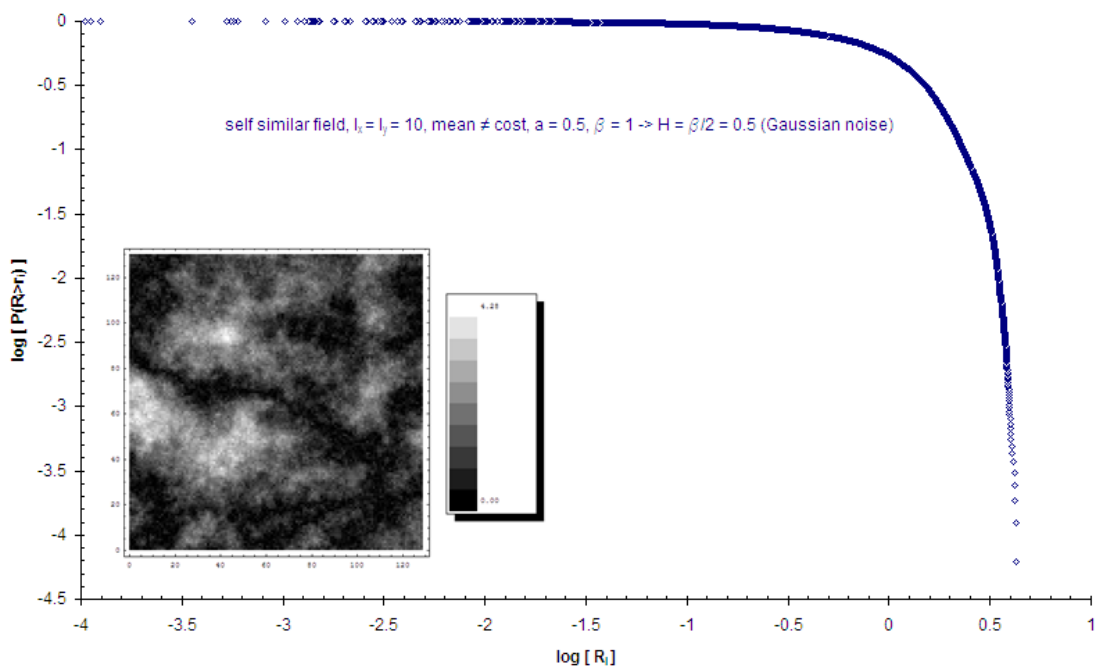


Figura 4.44: distribuzione della probabilità di superamento della precipitazione R_i , generata come frattale; l'andamento è lo stesso (con esponente di scaling nullo) anche per il caso con media imposta unitaria; una ricerca interessante sarebbe quella di correlare lo scaling nello spazio-tempo di campi reali di pioggia, con lo scaling delle aree e dei flussi cumulati dei bacini.

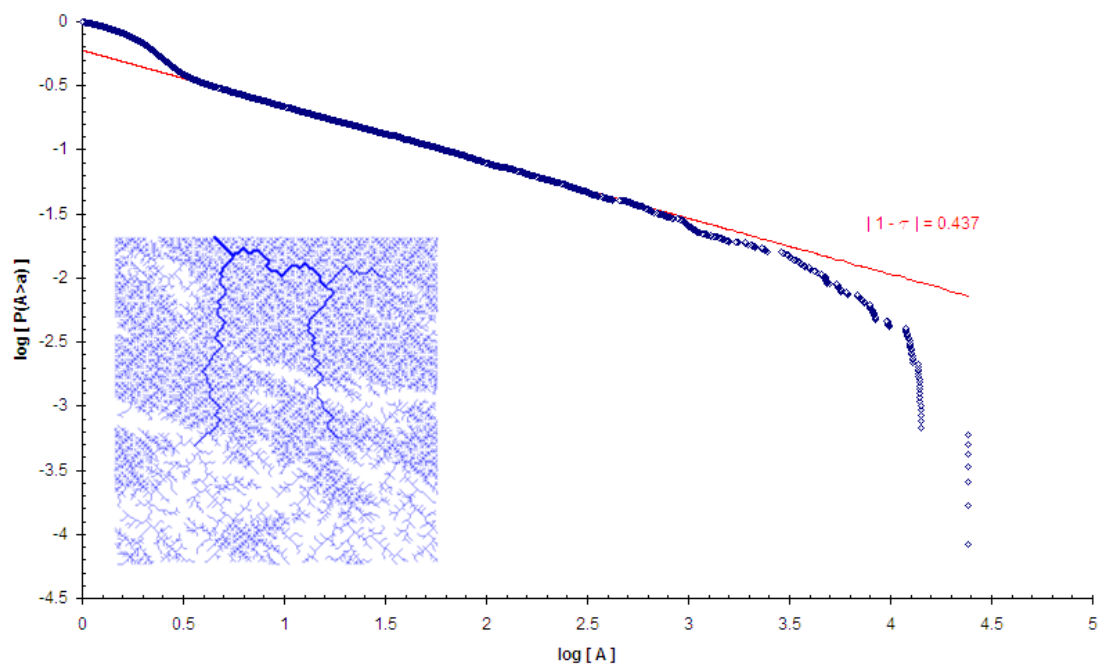


Figura 4.45: scaling dei flussi cumulati per la OCN generata con il campo di pioggia frattale della figura precedente; l'esponente $\tau = 0.437$ è molto vicino al valore dell'esponente ottimo.

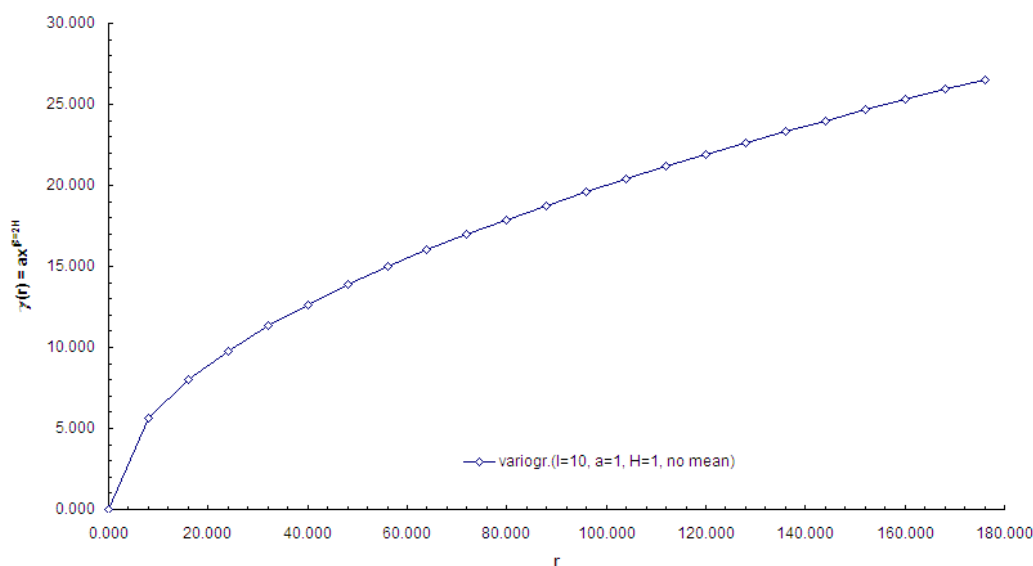


Figura 4.46: semivariogramma $\gamma(r) = ar^{\beta=2H}$ per $H = 1$, quindi $\beta = 2$, e $a = 0.5$; questo ed altri semivariogrammi sono stati creati per generare OCNs con randomness non attenuata, ma è risultato difficile forzare l'esponente τ oltre l'accettato range di variabilità.

4.6 Alcune analisi delle ground-stateOCNs e hotOCNs eterogenee.

Le analisi riguardo l'eterogeneità delle OCNs allo stato base (o *ground-state*) corrispondenti al minimo globale, e delle OCNs "calde" (o *hot*) casuali, non sono state approfondite molto poichè rispecchiano raramente forme naturali dei bacini, o loro parti, tuttavia sembra si sia individuato il loro comportamento in funzione della precipitazione random non attenuata.

Le OCNs allo stato base eterogenee vedono l'esponente τ ridotto rispetto quello delle corrispondenti reti omogenee (ricordiamo che l'esponente ottimo per le aree delle *gsOCNs* è l'esponente di Peano $\tau_{gs}^* = 1.50$), mentre per le *hotOCNs* l'esponente aumenta rispetto il valore ottimo delle corrispondenti reti omogenee pari a $\tau_h^* = 1.38$.

In definitiva per $I \rightarrow \infty$ l'esponente τ delle *gsOCNs* e delle *hotOCNs* tende teoricamente all'esponente ottimo delle OCNs omogenee $\tau^* = 1.43$.

Per quanto riguarda la struttura di drenaggio, le *gsOCNs* sono fortemente influenzate dai campi random di precipitazione, così come le OCNs eterogenee "normali" (quelle corrispondenti ad un minimo locale ossia quelle riscontrabili nelle forme dei bacini fluviali naturali), mentre le *hotOCNs*, data la loro natura fortemente casuale, non subiscono apprezzabili variazioni rispetto la loro corrispondente configurazione omogenea.

Si riportano alcuni esempi.

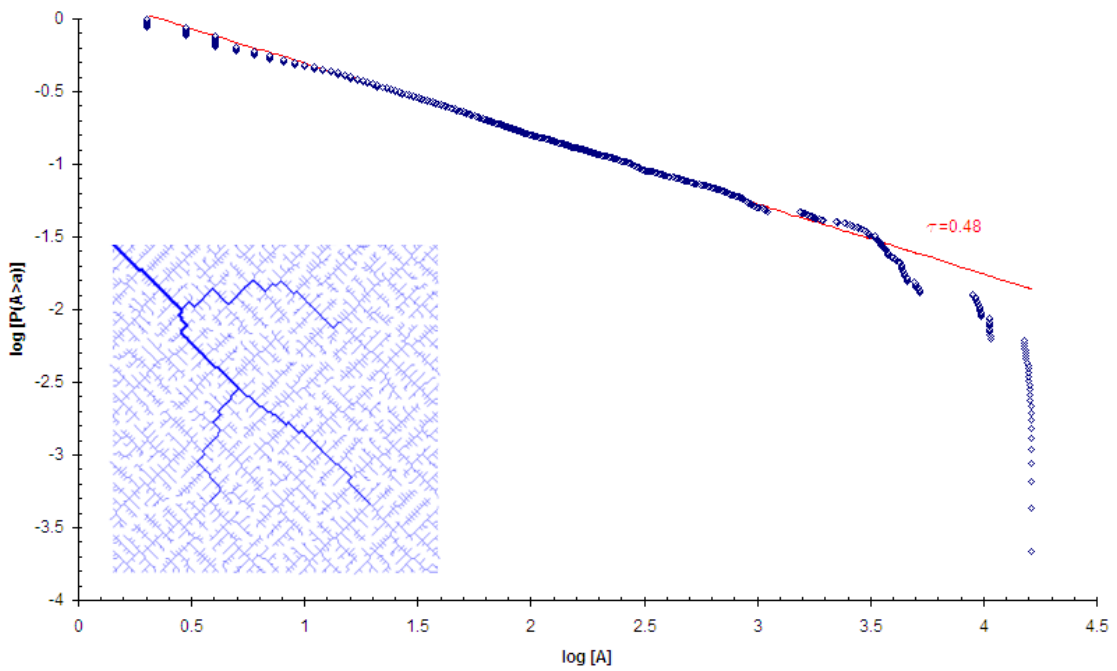


Figura 4.47: scaling delle aree di una OCN omogenea quasi allo stato base, ottenuta con raffreddamento lento e 5×10^6 iterazioni per ogni T ; l'esponente risulta $\tau = 0.48$ vicino a quello ottimo 0.50 .

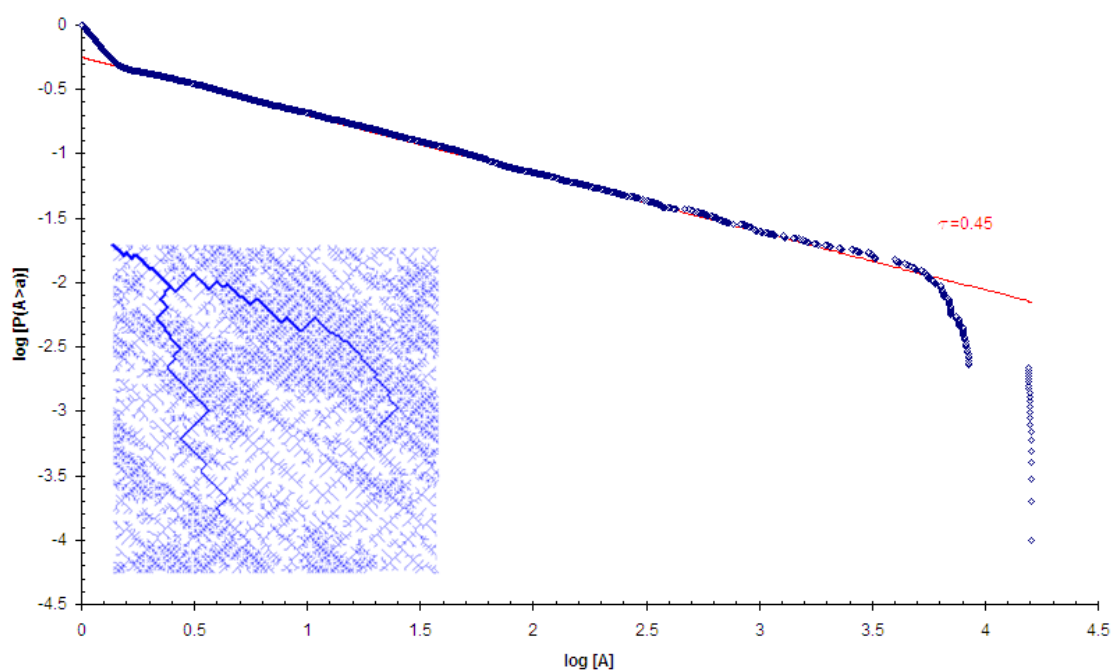


Figura 4.48: scaling delle aree della quasi-gsOCN eterogenea, formata con campo random a covarianza esponenziale, $I = 15$, $\langle r_i \rangle = 1$, $\sigma^2 = 0.5$, avente le stesse condizioni iniziali di drenaggio della precedente rete uniforme; l'esponente che ne risulta è 0.45 , minore di quello della corrispondente OCN uniforme, pari a 0.48 .

E' presente una deviazione dallo scaling per le aree "a taglia fine".

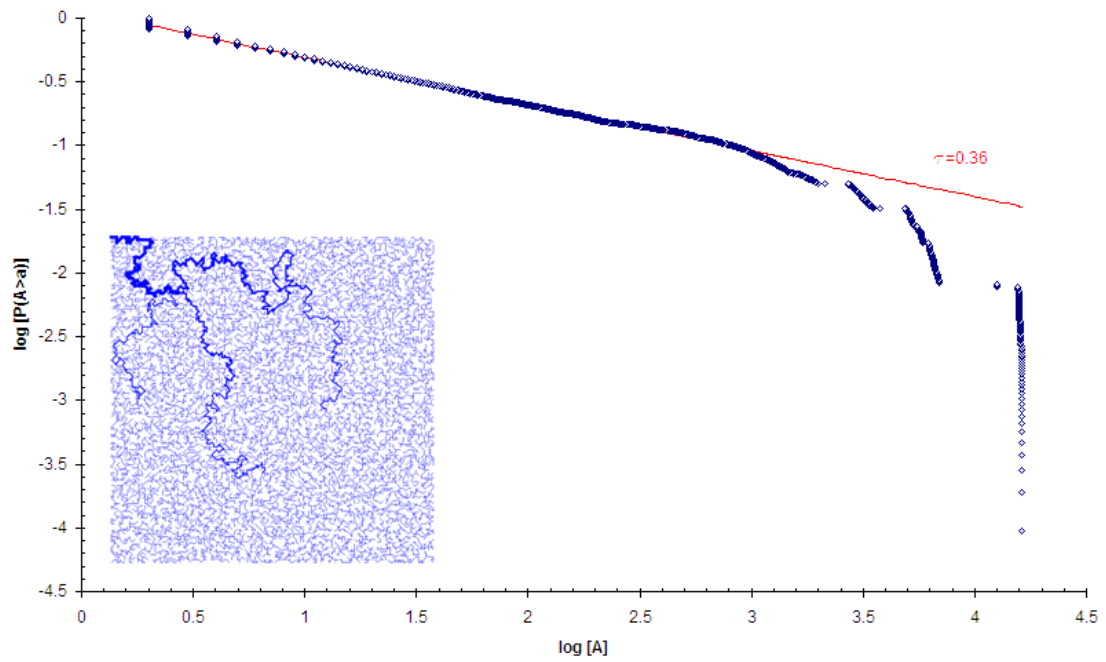


Figura 4.49: scaling delle aree di una *hotOCN* omogenea, ottenuta con *Simulated Annealing* a $its = 1 \times 10^6$ per ogni T ; l'esponente risulta $\tau = 0.36$, minore di quello ottimo 0.36 .

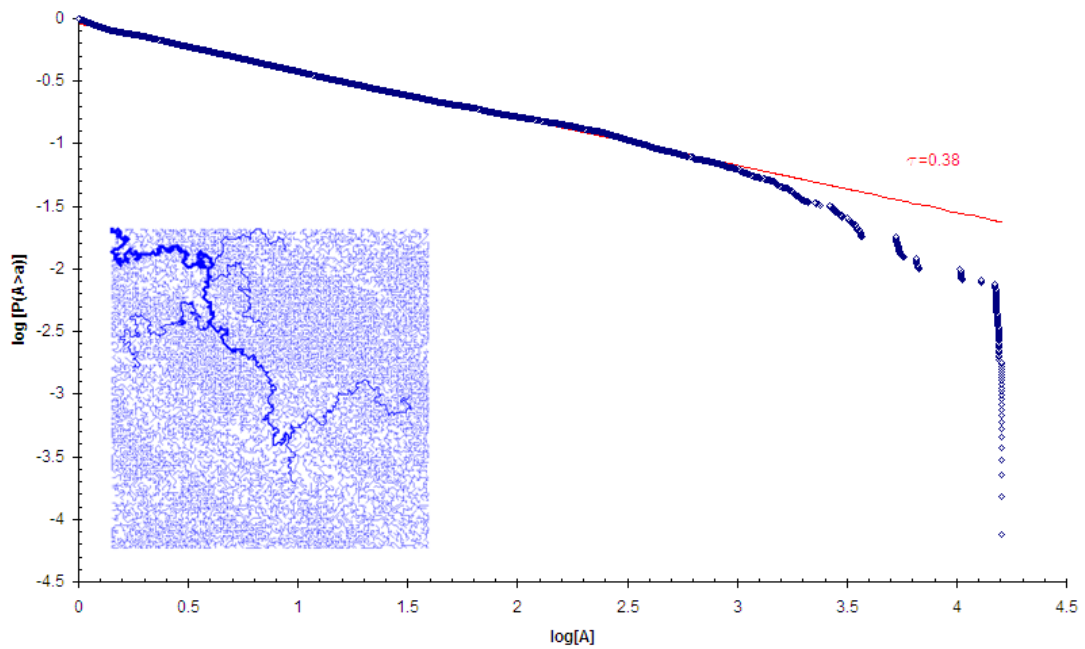


Figura 4.50: scaling delle aree della *hotOCN* eterogenea formata con campo random a covarianza esponenziale, $I = 15$, $\langle r_i \rangle = 1$, $\sigma^2 = 0.5$, avente le stesse condizioni iniziali di drenaggio della precedente *hotOCN* uniforme; l'esponente risulta quello ottimo $\tau = \tau_h^* = 0.38$, e maggiore di quello della corrispondente rete uniforme.

In conclusione, appaiono molto più sensibili le *hotOCNs* e le *gsOCNs* alle eterogeneità indotte attraverso la precipitazione random variamente correlata.

La variazione degli esponenti (non solo in quello delle aree τ) è infatti molto maggiore per queste strutture di drenaggio, rispetto la variazione subita dagli esponenti delle *OCNs* "normali" corrispondenti ad un minimo locale, a parità di condizioni iniziali, al contorno e forzanti.

E' questa probabilmente la spiegazione del perchè i bacini naturali rispecchiano le strutture delle *OCNs*, viceversa le *hotOCNs* e le *gsOCNs* non sembrano trovare riscontro nella realtà a parte qualche eccezione.

Si è visto come τ_{gs} e τ_h , di una generica *gsOCN* e *hotOCN* rispettivamente, tendano a τ^* in presenza di una forte eterogeneità di pioggia.

In verità le *hotOCNs* sembrano riprodurre le strutture a delta dei fiumi [Rodriguez-Iturbe e Rinaldo, 1997], però queste strutture sono in continua e "rapida" evoluzione (comparata alla evoluzione dei bacini montani), con maggiore instabilità, il che porta alla maggiore variabilità degli esponenti.

Sembra quindi che le eterogeneità, ad esempio quella della precipitazione qui analizzata, ma anche l'eterogeneità nei terreni, e tutte le altre presenti (non sapendo bene la specifica importanza di ognuna di esse e le mutue interrelazioni), guidino le forme naturali dei bacini fluviali, dalla loro formazione, a strutture comparabili a quelle delle Optimal Channel Networks.

Le *OCNs* sono quindi forme tra ordine (le *gsOCNs* sono in ordine "perfetto") e caos (le *hotOCNs* sono in caos "perfetto") governate nella loro crescita e nella loro stazionarietà dalle eterogeneità.

Assume quindi la precipitazione un ruolo indiscutibilmente importante.

4.7 Analisi con condizioni al contorno pari a quelle dei bacini reali.

L'analisi con condizioni al contorno pari a quelle dei bacini reali non ha portato a differenti conclusioni, riguardo l'invarianza degli esponenti, rispetto quelle ricavate dall'analisi dei bacini sintetici.

Sarebbe però interessante approfondire lo studio per la verifica della similarità delle OCNs eterogenee con le reti reali, o meglio verificare se la rete reale è meglio descritta da una OCN omogenea o non.

Per partire da condizioni iniziali che non rispecchino la rete reale è stato eseguito un "hot bath" ad alte temperature (per $T = 10,000$ e $T = 1000$) con un numero di cambi possibili elevato, nella fattispecie è stato fissato a $its = 1,000,000$.

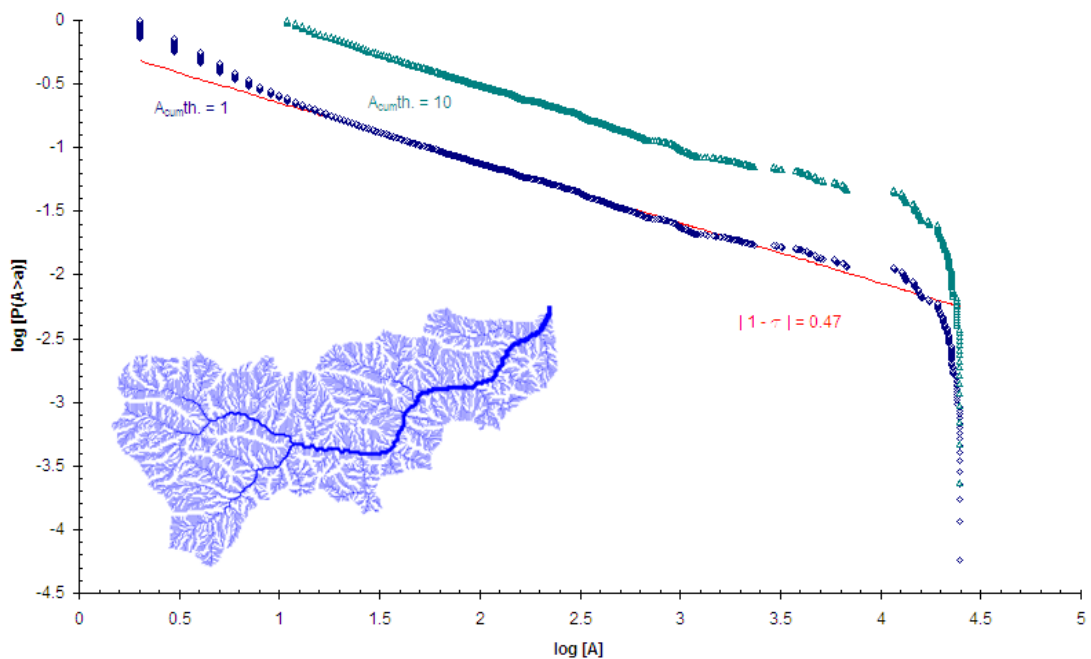


Figura 4.51: scaling della rete reale del bacino del Tanaro, eseguita per le aree estratte con soglia $A_{th} = 1$ (la rete raffigurata si riferisce a tale soglia) e $A_{th} = 10$; l'esponente, 0.47 , è evidentemente equivalente per le due e si discosta da quello ottimo medio dei bacini, pari a $\tau^* = 1.43$.

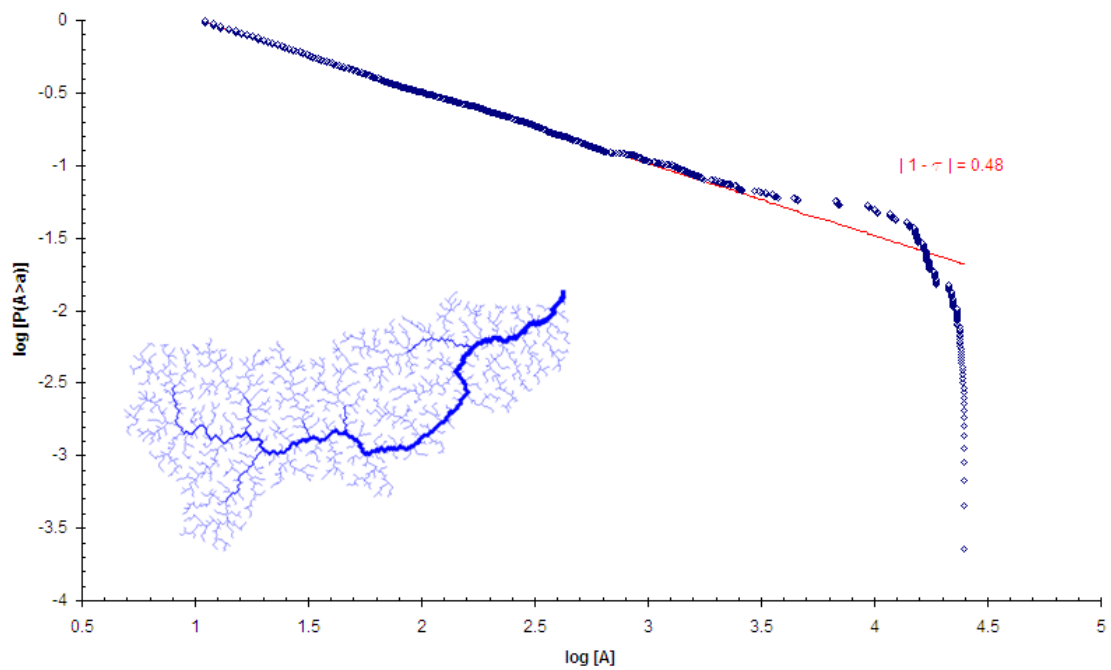


Figura 4.52: $OCN(T = 0.00)$ ottenuta a partire dalla hotOCN di figura sottostante, con 1×10^5 cambi consentiti per ogni T del *Simulated Annealing*; l'esponente rispecchia abbastanza bene quello della rete reale e anche la struttura di drenaggio è simile.

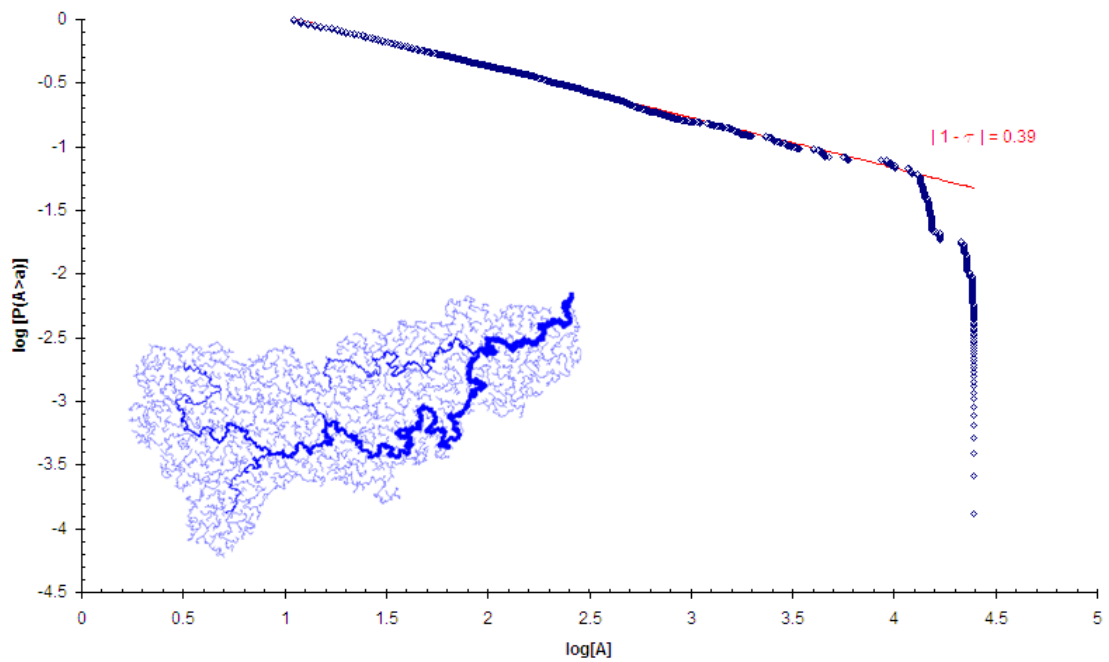
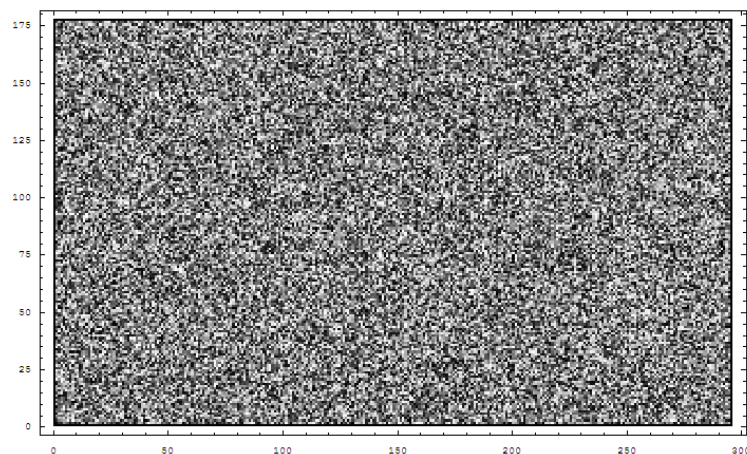


Figura 4.53: hotOCN($T = 10,000$) ottenuta da *Simulated Annealing*, con $its = 1 \times 10^5$, a partire dalla rete casuale ricavata da "hot bath" della rete reale; l'esponente $\tau = 0.39$ è molto vicino a quello ottimo $\tau_h^* = 1.38$ che cattura i processi erosionali.

Si propone ora il caso di OCN ottenuta con campo di precipitazione scorrelato a partire dalla rete reale dopo hot bath.



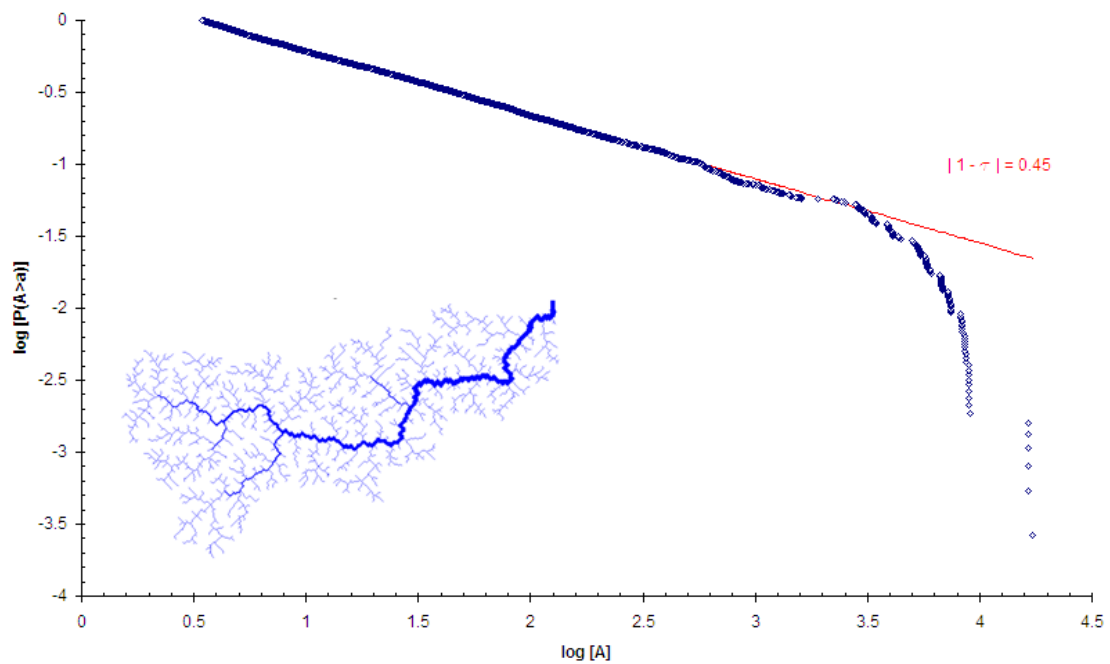


Figura 4.54: campo di pioggia random scorrelata e scaling delle aree della $OCN(T = 0.00)$, ottenuta a partire dalle condizioni iniziali di drenaggio della rete reale dopo hot bath; l'esponente è vicino al valore τ della rete reale, così come si nota una forte similarità con la struttura di drenaggio reale.

E' stato anche analizzato il caso di OCN ottenuta con campo anisotropo avente $I_x = 40$ e $I_y = 30$; l'esponente di scaling delle aree che si ottiene si discosta molto da quello della rete reale così come la struttura di drenaggio.

E' difficile tuttavia trarre delle conclusioni perchè ridotte sono state le simulazioni effettuate per tale bacino.

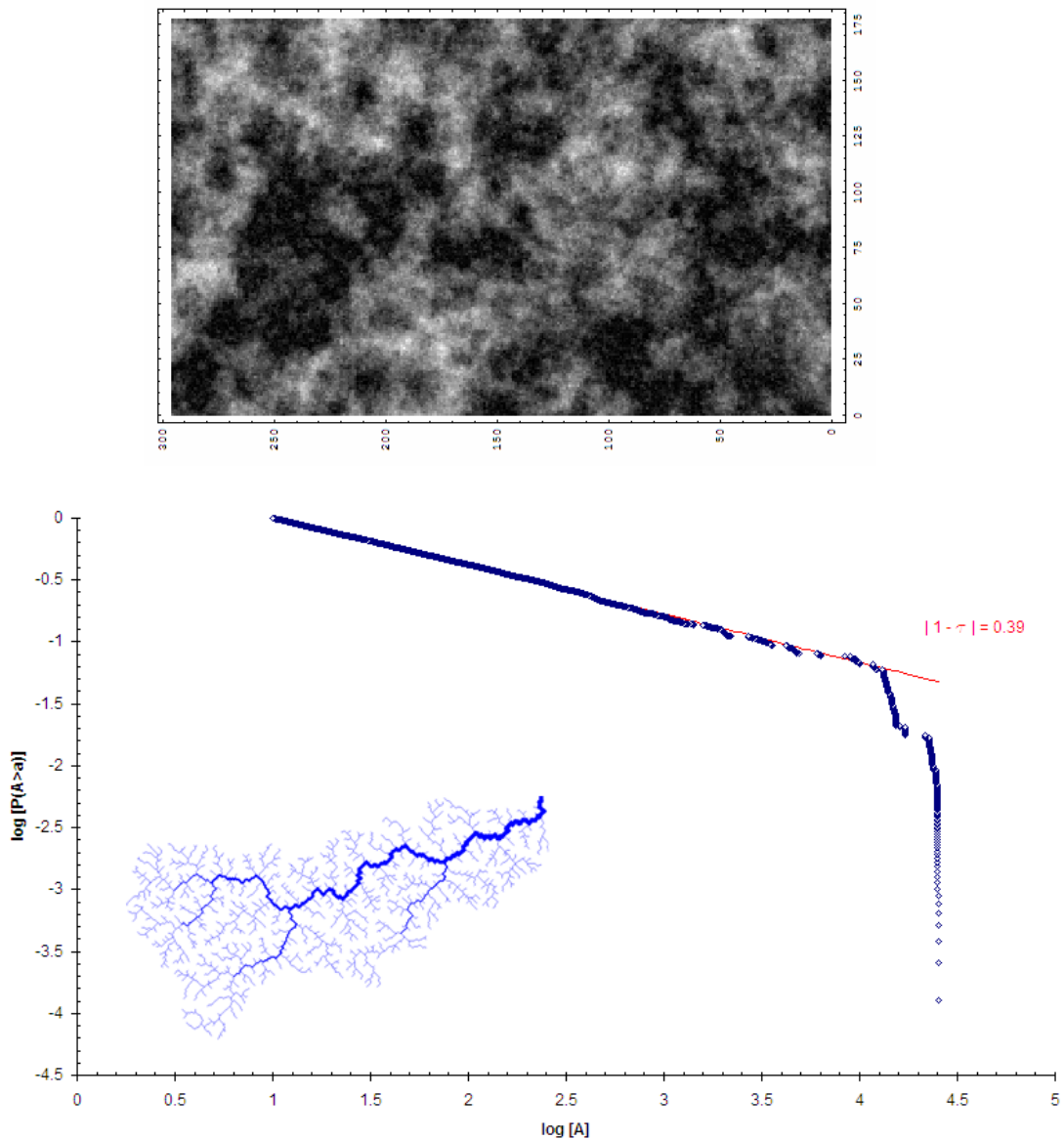


Figura 4.55: campo di pioggia anisotropo a covarianza esponenziale, con $I_x = 40$, $I_y = 30$, $\langle r_i \rangle = 1$, $\sigma^2 = 0.5$; scaling delle aree della relativa OCN($T = 0.00$), il quale mostra un esponente fortemente diverso rispetto quello del bacino reale.

Infine si riportano i casi di reti ottenute con il campo deterministico sotto raffigurato, avente $r_i = \text{cost} = 1.001$ nella metà di sinistra, e $r_i = 0.001$ nella metà di destra, i quali presentano forti deviazioni negli esponenti e strutture

di drenaggio molto particolari, non però del tutto dissimili da alcuni casi in natura.

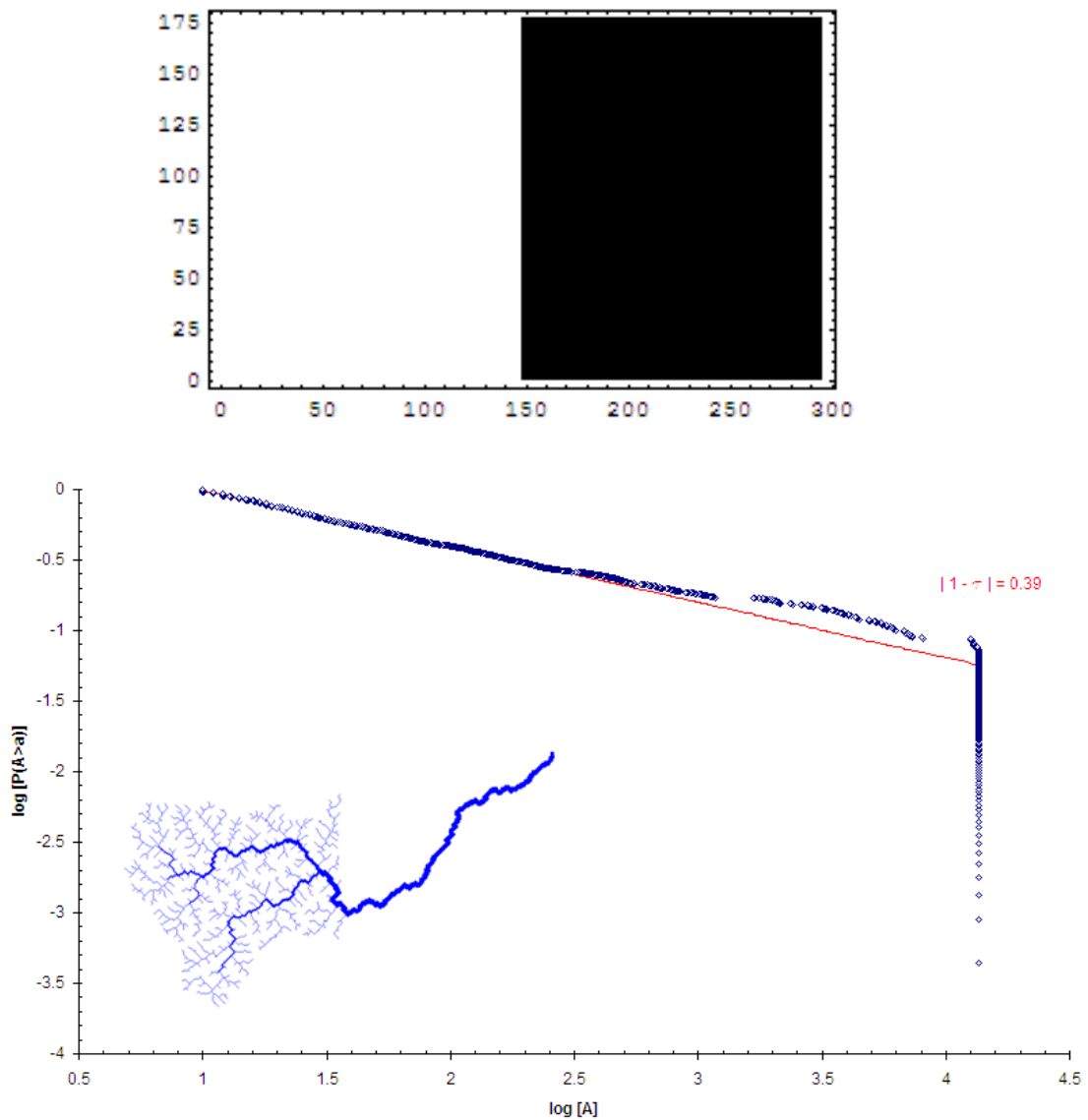


Figura 4.56: scaling delle aree della OCN ($T = 0.00$, $its = 1 \times 10^6$) ottenuta con campo deterministico; l'esponente $\tau = 1.39$ è molto distante dal valore ottimo dei bacini fluviali $\tau^* = 1.43$.

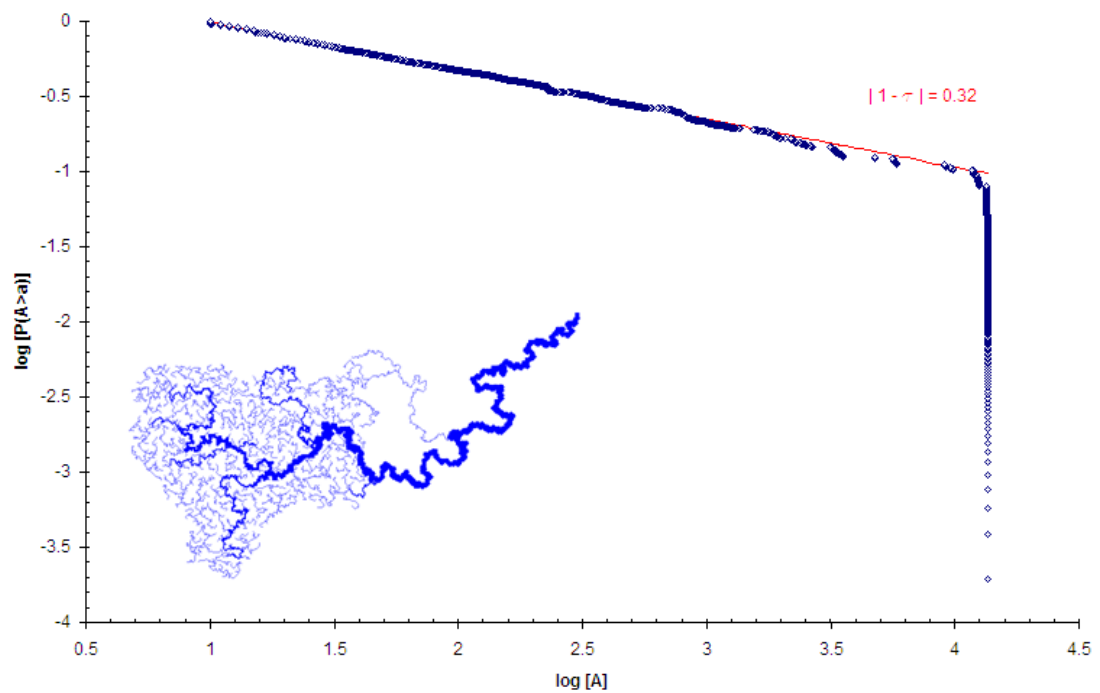


Figura 4.57: scaling delle aree della $hotOCN(T = 10,000, its = 1 \times 10^6)$ ottenuta con campo deterministico, l'esponente $\tau = 1.32$ è molto distante dal valore ottimo $\tau_h^* = 1.38$; sembrano prodursi dei loops, in realtà analizzando la rete più da vicino si vede che non vi sono percorsi chiusi.

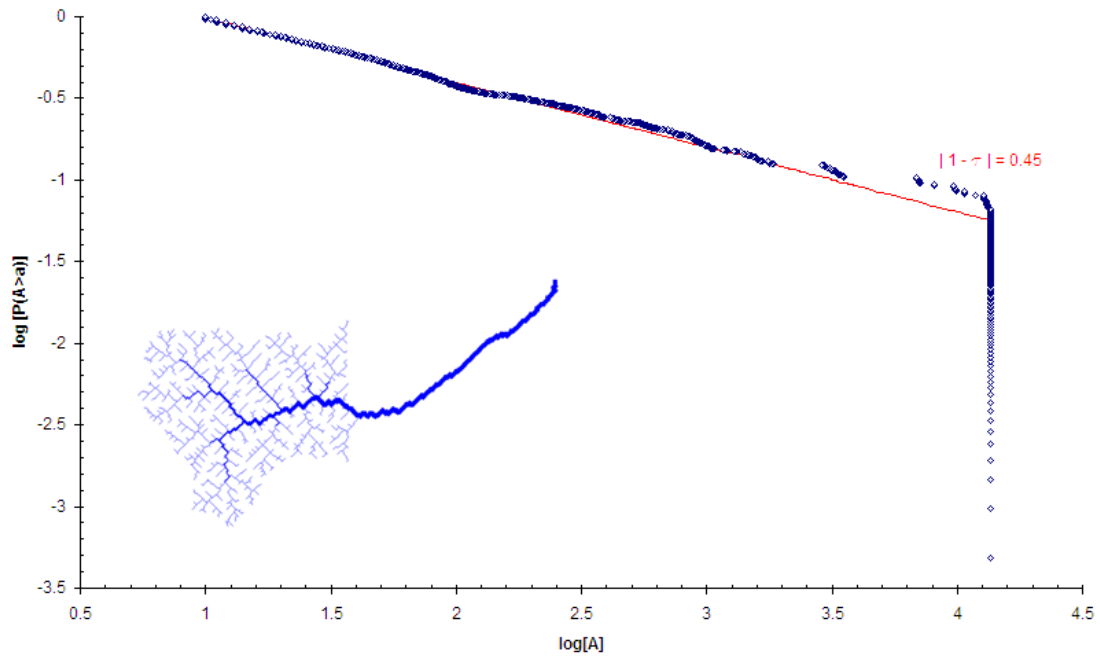


Figura 4.58: scaling delle aree della *quasi-gsOCN* ($T = 0.00$, $its = 1 \times 10^6$) ottenuta con campo deterministico; l'esponente $\tau = 1.45$ è lontano dall'esponente ottimo $\tau_{gs}^* = 1.50$, ma confrontandolo con i valori di τ della OCN e della hotOCN precedenti, aventi le stesse condizioni iniziali, risulta ragionevole.

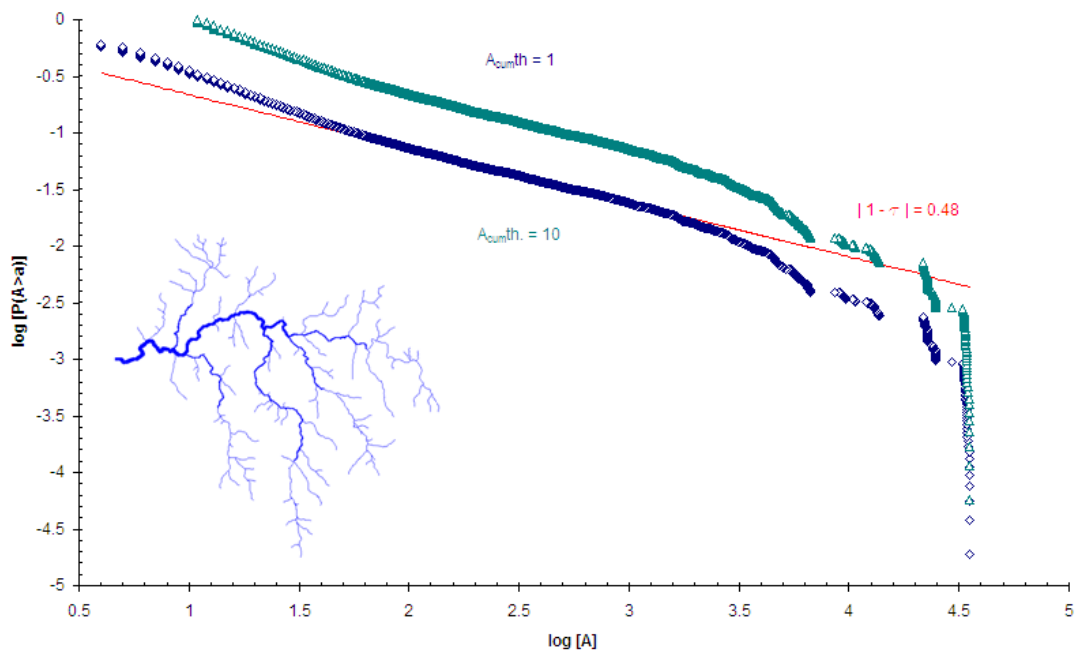


Figura 4.59: scaling della rete reale del bacino del Taloro, eseguita per le aree estratte con soglia $A_{th} = 1$ e $A_{th} = 10$ (la rete raffigurata si riferisce a tale soglia); l'esponente, 0.48 , è evidentemente equivalente per le due e si discosta da quello ottimo medio dei bacini, pari a $\tau^* = 1.43$.

E' evidente come l'analisi simulata dei bacini reali con OCNs eterogenee, abbia ancora bisogno di numerose verifiche per determinare una relazione tra il parametro I/L e gli esponenti di scala come per i bacini sintetici.

Studiando le forme ottime di drenaggio nei bacini reali, sembra però più opportuno introdurre l'anisotropia nei campi di pioggia, in quanto rispecchia molto più fedelmente la realtà.

E' sembrato infatti più difficile indurre in bacini elongati, ad esempio il Tanaro trattato, degli scostamenti significativi negli esponenti di scala da quelli ottimi, con campi isotropi di precipitazione realizzati su domini rettangolari.

4.8 Conclusioni riguardo le leggi a potenza delle reti eterogenee.

Le analisi effettuate mostrano che le variazioni indotte negli esponenti di scala sono molto ridotte, anche con forte eterogeneità di precipitazione.

La variabilità maggiore, osservata direttamente negli esponenti τ e ψ , quindi indirettamente in He e d_t , si manifesta per valori di I/L compresi nel range $1/5 \leq \frac{I}{L} \leq 1/3$.

E' interessante notare per le reti eterogenee la deviazione dalla legge a potenza delle aree cumulate, per i più piccoli valori delle aree stesse, ossia quelle con probabilità maggiore di verificarsi.

Da prime analisi sembra che l'esponente $|1 - \tau''|$ della legge di scala delle aree "a taglia piccola" sia proporzionale secondo qualche costante alla densità di drenaggio D_d delle aree con canali fortemente aggregati; inoltre l'esponente $|1 - \tau|$ potrebbe essere proporzionale alla densità di drenaggio media dell'intera rete $\overline{D_d}$.

La densità di drenaggio locale è

$$D_d = \frac{\sum_i L(i)}{A(i)} = \frac{N_{siti}(J_i > J_{th})|_{in L_{\parallel} \times L_{\perp}}}{L_{\parallel} \times L_{\perp}} \propto |1 - \tau''| \quad (4.2)$$

dove il numero di siti in stato canale è misurato nell'area di interesse di dimensioni $L_{\parallel} \times L_{\perp}$, e quindi rapportato alla medesima area.

In merito alla densità di drenaggio delle OCNs eterogenee sono state fatte parecchie analisi.

Nel capitolo dedicato alla geomorfologia delle reti eterogenee si vedrà che l'esponente $|1 - m|$ della legge di scala della densità di drenaggio, mediata su tutte le simulazioni di reti con I di pioggia differente, risulta essere molto simile all'esponente $|1 - \tau|$ delle aree, quindi

$$m \sim \tau \quad (4.3)$$

Questo risultato potrebbe confermare quanto prima ipotizzato riguardo il legame tra densità di drenaggio (definibile, sia localmente sia globalmente, alla Horton, o attraverso la legge di Melton, o alla Smart in modo equivalente) media del bacino e l'esponente τ , quindi sussisterebbe una relazione tra la probabilità cumulata di superamento delle aree

$$P(a, L) = a^{1-\tau} F\left(\frac{a}{L^{1+H}}\right) \quad (4.4)$$

e la probabilità cumulata di superamento delle densità di drenaggio

$$P[D_d > d_d] = f(1 - m) \quad (4.5)$$

funzione dell'esponente $|1 - m|$, con m come esponente di scala universale dei bacini fluviali.

La densità di drenaggio globale, o media, di un bacino è

$$\overline{D_d} = \frac{L_T}{A_{out}} = \frac{N_{siti}(J_i > J_{th})}{L \times L} \quad (4.6)$$

con L_T la lunghezza totale della rete di canali e A_{out} l'area cumulata totale del bacino quindi $L \times L$, è una proprietà geomorfologica di media che misura mediamente quanto un bacino è "coperto" da canali; tale valore è molto costante nei bacini fluviali, tipicamente varia tra, pertanto è comprensibile e spigabile la ridotta variabilità di τ anche con campi di precipitazione fortemente casuali.

Si riporta nel grafico sottostante un'esempio di stima dell'esponente τ'' , il quale risulta essere compreso, per ogni I (scala di correlazione della pioggia determinante il pattern della OCN), nell'intervallo $0.90 \div 1.00$.

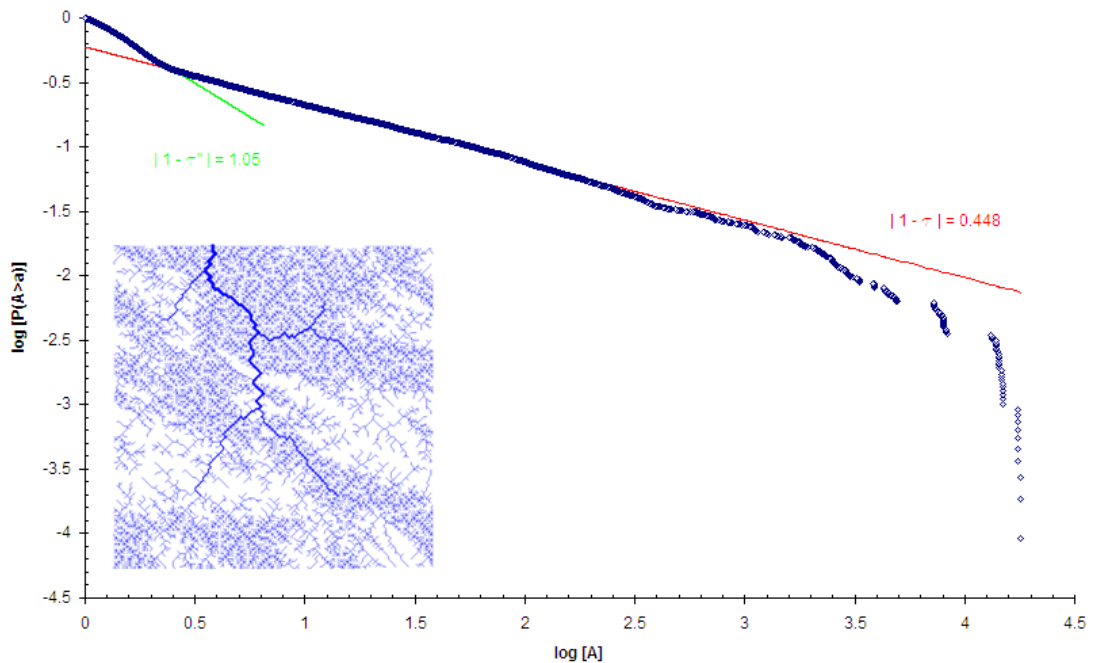


Figura 4.60: esempio di stima di τ'' per la OCN a $T = 0.00$ con campo di pioggia a $\langle r_i \rangle = 1$, $\sigma^2 = 1$, e $I = 40$; la deviazione dallo scaling secondo τ , è ipotizzabile essere dovuta alla struttura di aggregazione dei canali non più uniforme come per le OCNs con $r_i = cost = 1$, bensì "a macchie di leopardo" con zone ad elevata D_d ed altre a D_d quasi nulla.

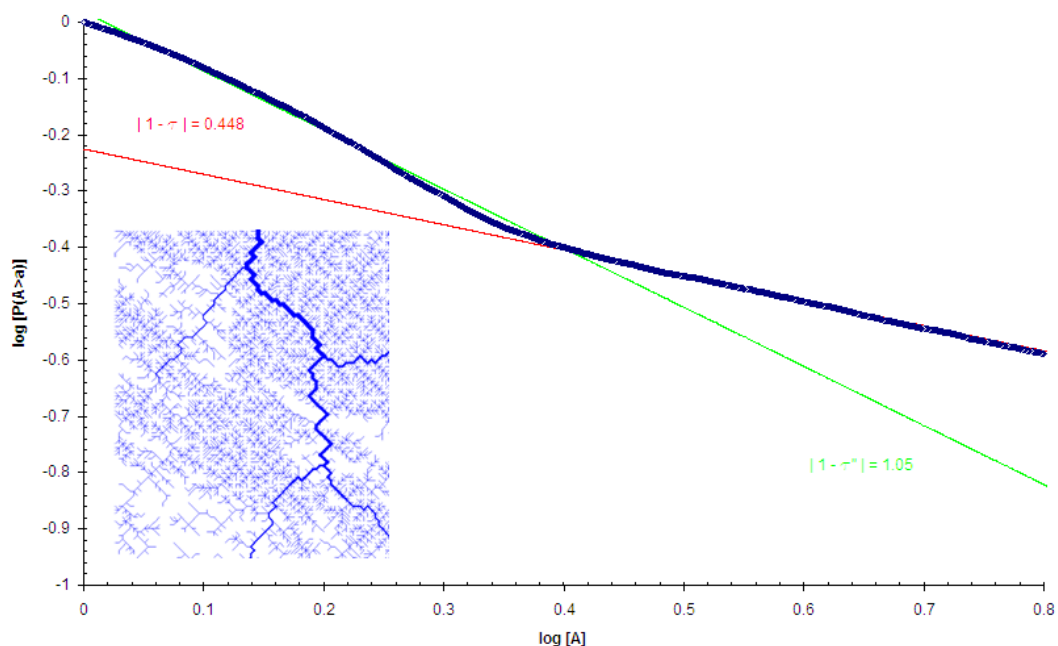


Figura 4.61: zoom della deviazione dallo scaling con τ delle aree, del caso raffigurato nel grafico precedente; è ipotizzabile una ben definita legge di potenza con τ'' per le aree "a taglia fine" le quali nelle OCNs eterogenee, hanno una forte aggregazione nelle zone caratterizzate da precipitazione con $D_d \gg D_d[OCN(r_i = cost = 1)]$; si è riportato anche uno zoom della rete.

In conclusione è ipotizzabile una natura *bifrattale* nella distribuzione delle aree cumulate delle OCNs eterogenee, con τ e τ'' sostanzialmente invarianti al variare di I del campo di precipitazione.

La variabilità degli esponenti delle aree nelle OCNs eterogenee può essere considerata essere

$$\tau = \tau^* \pm 0.02 \quad (4.7)$$

per τ legato alla densità media $\overline{D_d}$ del bacino, con $\tau^* = 1.43$, e

$$\tau'' = \tau''^* \pm 0.05 \quad (4.8)$$

per τ legato alla densità locale D_d del bacino, con $\tau^{**} = 1.95$.

Nelle OCN omogenee l'esponente τ'' non compare, quindi non si ha una bifrattalità, poichè le densità media e quelle locali vengono a coincidere, quindi si può scrivere

$$\overline{D_d} \approx D_d \quad (4.9)$$

per le reti omogenee.

La deviazione per le lunghezze upstream piccole, dallo scaling "principale" con ψ , invece non si verifica; questo è piuttosto comprensibile perchè è vero che la precipitazione random porta ad una riorganizzazione delle aree ma globalmente le lunghezze L_{up} rimangono inalterate.

Si riportano ora i diagrammi che riassumono la variazione degli esponenti τ e ψ con la lunghezza di correlazione I della precipitazione.

I grafici sono stati poi resi adimensionali, I in funzione della dimensione del bacino L in quanto l'estensione delle zone con precipitazione è relativa ad essa, $\tau(I)$ e $\psi(I)$ in funzione degli esponenti ottimi τ^* e ψ^* delle OCNs uniformi ossia dei bacini reali.

Si sono create delle bande di variabilità degli esponenti, le prime quelle più restrittive corrispondenti a $\tau = \tau^* \pm 0.01$ per τ , e a $\psi = \psi^* \pm 0.05$ per ψ , le seconde corrispondenti a quelle già dichiarate per le OCNs omogenee [Maritan *et al.*, 1996] ossia $\tau = \tau^* \pm 0.02$ per τ , e $\psi = \psi^* \pm 0.1$ per ψ .

Considerando i limiti più restrittivi le variazioni negli esponenti si notano nel campo $1/5 \leq \frac{I}{L} \leq 1/3$, invece considerando i secondi la variabilità degli esponenti delle OCNs eterogenee, rispetto le OCNs omogenee, è sostanzialmente inapprezzabile.

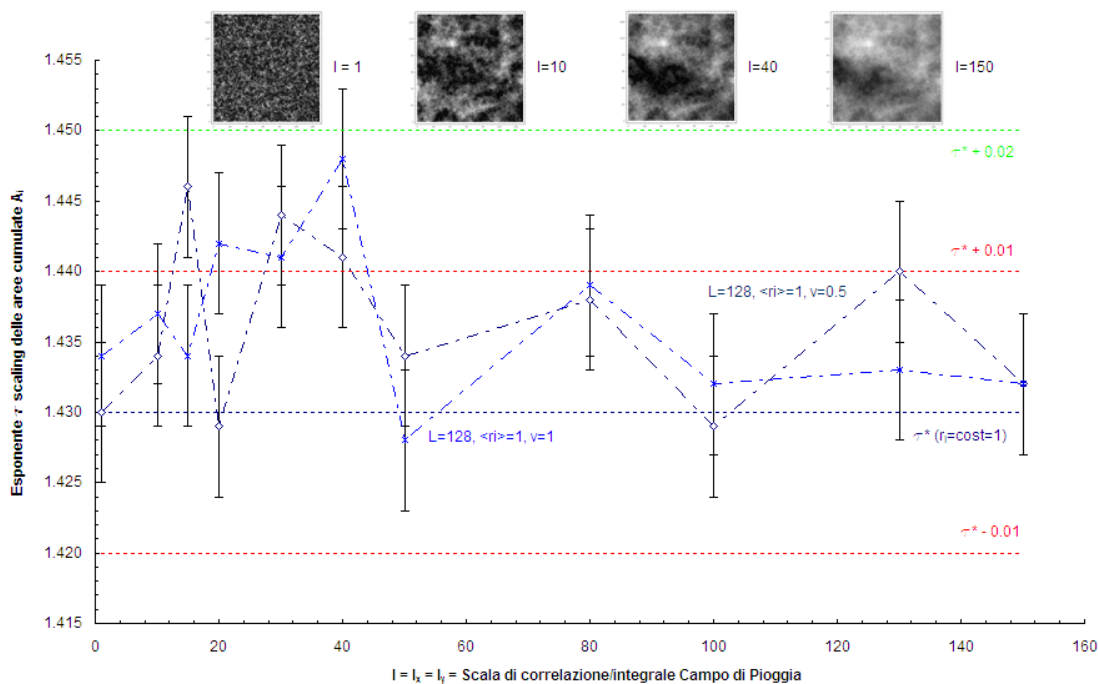


Figura 4.62: variazione di τ in funzione di I , ogni punto è la media di quindici valori di τ relativi a quindici simulazioni su altrettante reti, aventi differenti condizioni iniziali di drenaggio (anche la posizione dell'outlet è stata variata), uguali condizioni al contorno, ed uguale forzante rappresentata dal campo di pioggia con la medesima lunghezza di correlazione I ; la varianza per ogni punto è pari a 0.005 , in realtà la terza cifra decimale è non significativa per tali statistiche.

Eseguendo la media aritmetica dei quindici valori di τ e ψ delle quindici simulazioni con I fissato, per ogni I , o ricavare l'esponente tramite interpolazione su tutte le distribuzioni $P[A > a] = f(I)$ poste assieme, è risultato sostanzialmente equivalente, pertanto si è adottato il primo metodo per motivi pratici.

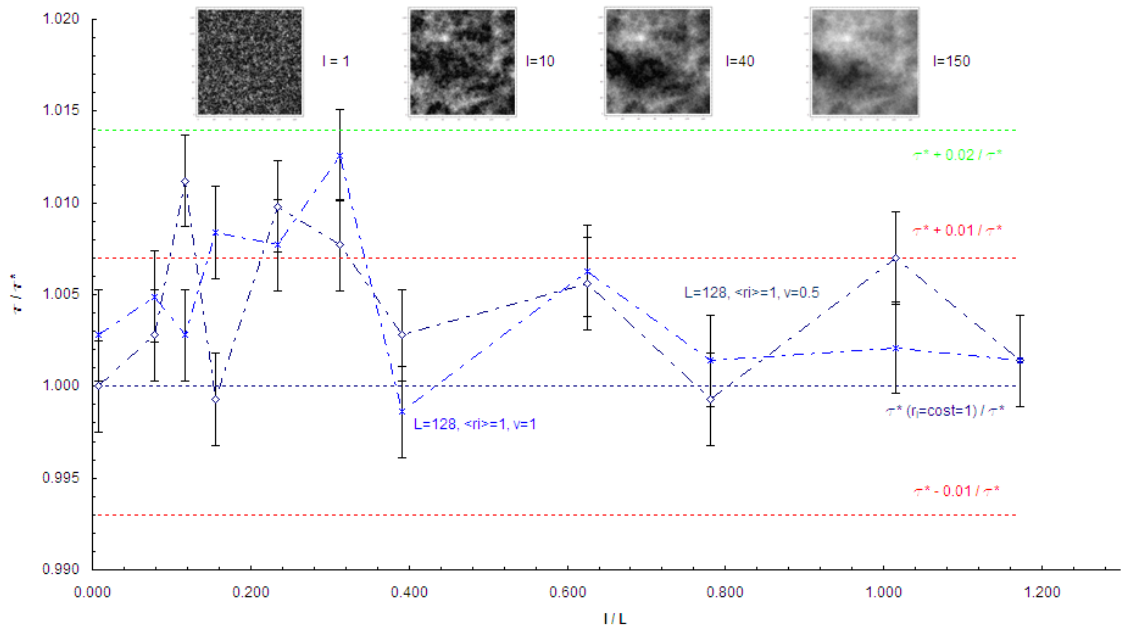


Figura 4.63: grafico adimensionale di $\frac{\tau}{\tau^*}$ in funzione di $\frac{I}{L}$; in tal modo è possibile riferire la lunghezza dei campi di precipitazione alla dimensione del bacino in studio e determinare l'esponente di scaling delle A_i .

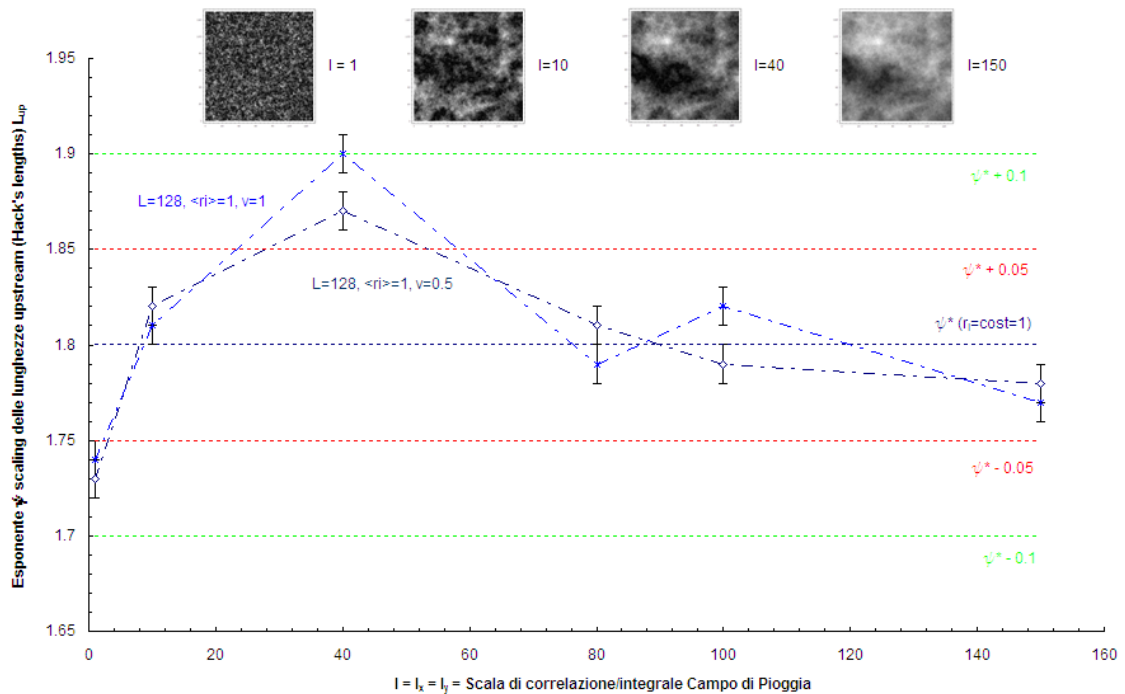


Figura 4.64: variazione di ψ in funzione di I , ogni punto è la media di quindici valori di ψ relativi a quindici simulazioni su altrettante reti, aventi differenti condizioni iniziali di drenaggio (anche la posizione dell'outlet è stata variata), uguali condizioni al contorno, ed uguale forzante rappresentata dal campo di pioggia con la medesima lunghezza di correlazione I ; la varianza per ogni punto è pari a 0.01 .

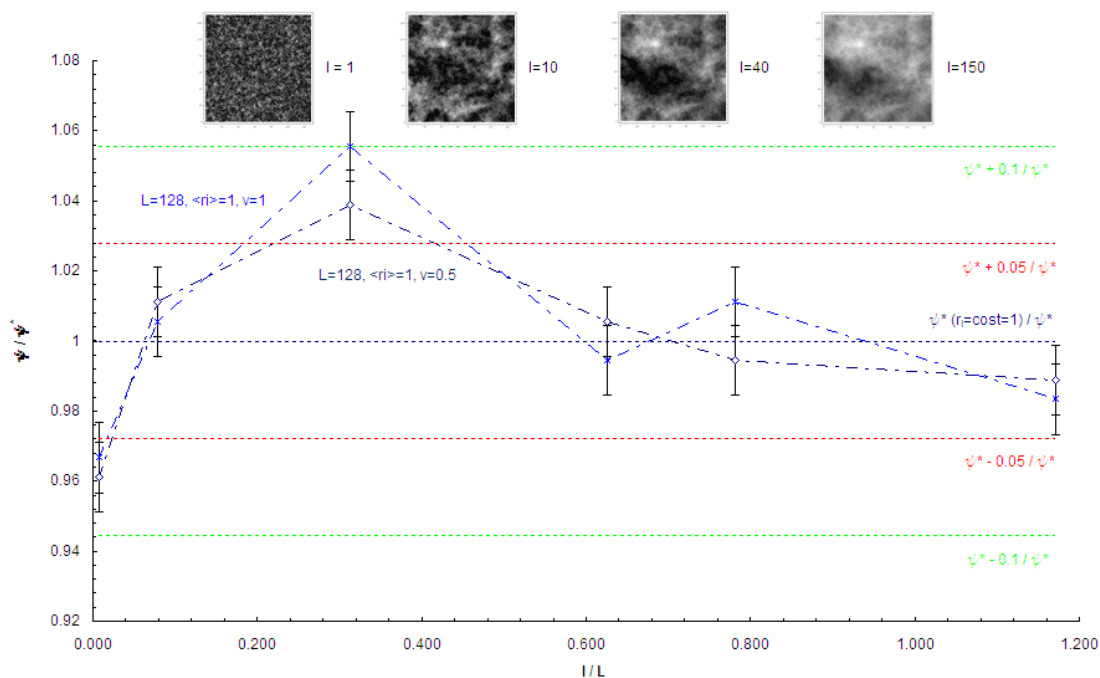


Figura 4.65: grafico adimensionale di $\frac{\psi}{\psi^*}$ in funzione di $\frac{I}{L}$; in tal modo è possibile riferire la lunghezza dei campi di precipitazione alla dimensione del bacino in studio e determinare l'esponente di scaling delle L_{up} .

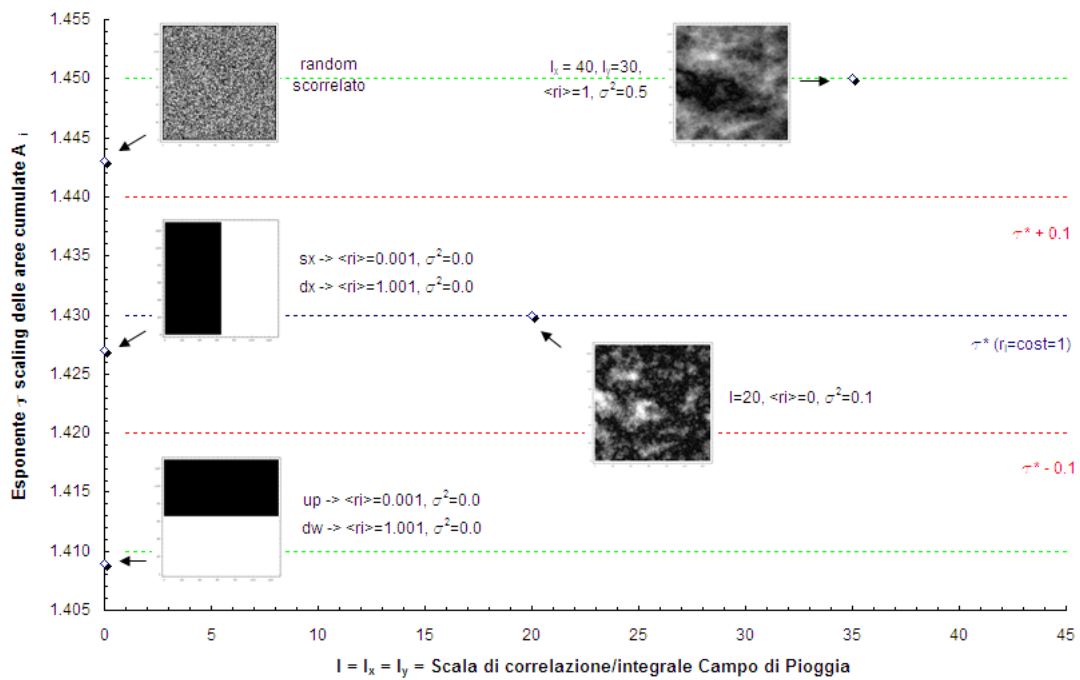


Figura 4.66: grafico relativo ai casi introdotti al paragrafo 5 del presente capitolo, si nota la sostanziale buona tenuta dell'esponente τ anche per campi di pioggia con randomness elevata; per il campo a covarianza esponenziale anisotropo, nel grafico si è considerato un valore medio $\overline{I_{xy}} = 35$.

Si riportano di seguito, due grafici di sintesi delle proprietà di scaling delle OCNs eterogenee, formate con campi di pioggia ad I differente, $\langle r_i \rangle = 1$, $\sigma^2 = 1$, e soglia sul flusso cumulato J_{th} unitaria.

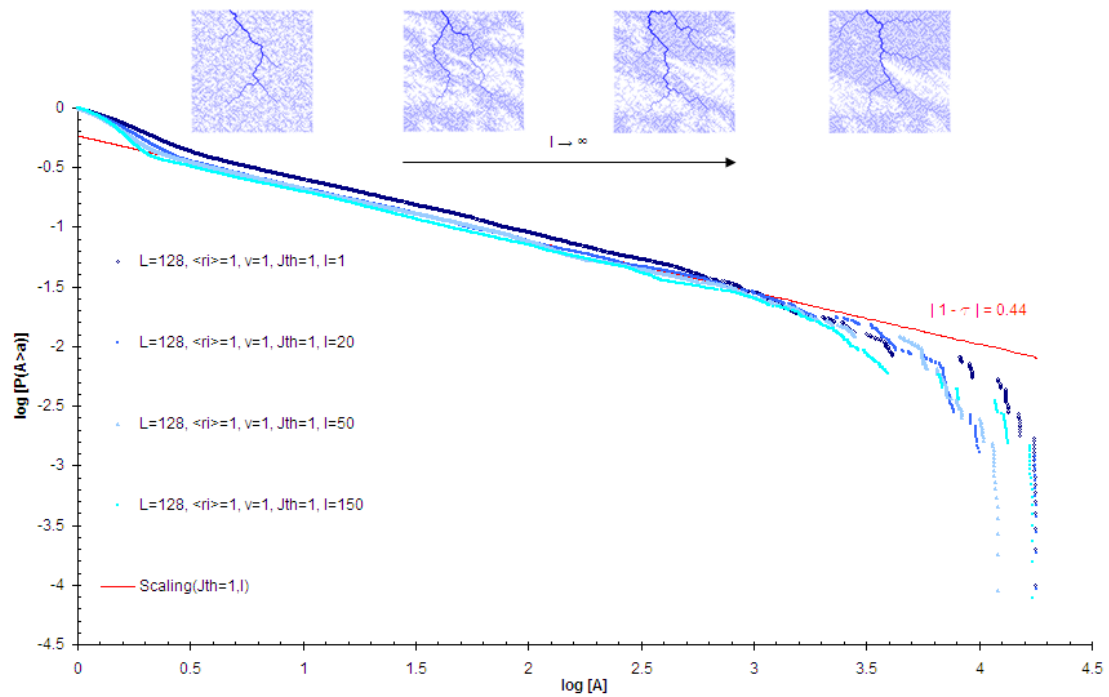


Figura 4.67: scaling del flusso cumulato di OCNs a $T = 0.00$, a parità di soglia J_{th} , e ottenute per differenti campi di pioggia; si nota la sostanziale coincidenza delle distribuzioni per le quali è stata effettuata l'interpolazione e la bontà dell'esponente $\tau < \tau^* + 0.02$; è evidente il perchè risulta $J_{out}(I = 1) \approx J_{out}(I = 150)$ mentre $J_{out}(I = 20)$ è il valore minore.

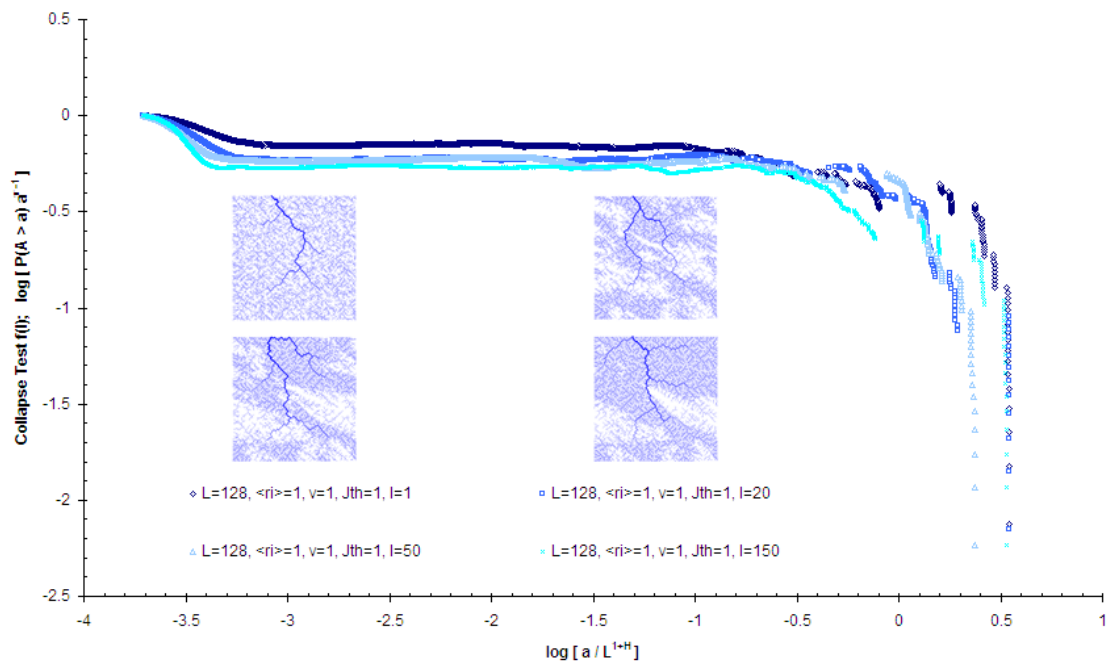


Figura 4.68: Collapse Test della probabilità cumulata di superamento dei flussi in funzione della scala di correlazione I della precipitazione; è verificata la consistenza degli esponenti con l'ipotesi di "finite-size scaling", H è evidentemente unitario per tutte e quattro le reti prese in considerazione.

Infine si riportano due analisi analoghe alle precedenti, la prima di scaling dei flussi cumulati, la seconda il relativo test "di collasso", però riferite alla stessa OCN ($I = 20$, $\langle r_i \rangle = 1$, $\sigma^2 = 1$) a differenti valori di soglia sul flusso cumulato J_{th} . Nel capitolo sei, dedicato alla geomorfologia delle OCNs eterogenee, sono riportate molte analisi interessanti relative alla densità di drenaggio $\overline{D_d}$ in funzione di J_{th} .

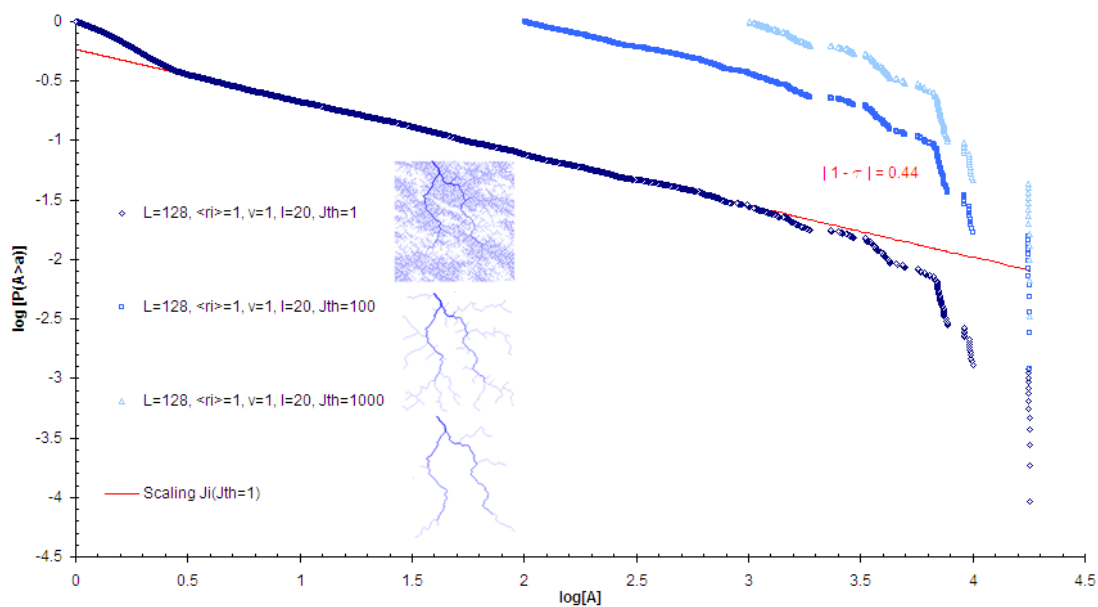


Figura 4.69: scaling dei flussi cumulati della OCN ($I = 20, \langle r_i \rangle = 1, \sigma^2 = 1$) a differenti valori di J_{th} ; l'esponente è in buon accordo con quello ottimo, tuttavia in generale è sempre bene derivare gli esponenti delle leggi a potenza sull'intera popolazione, non solamente su una sua parte poichè potrebbe avere uno scaling differente.

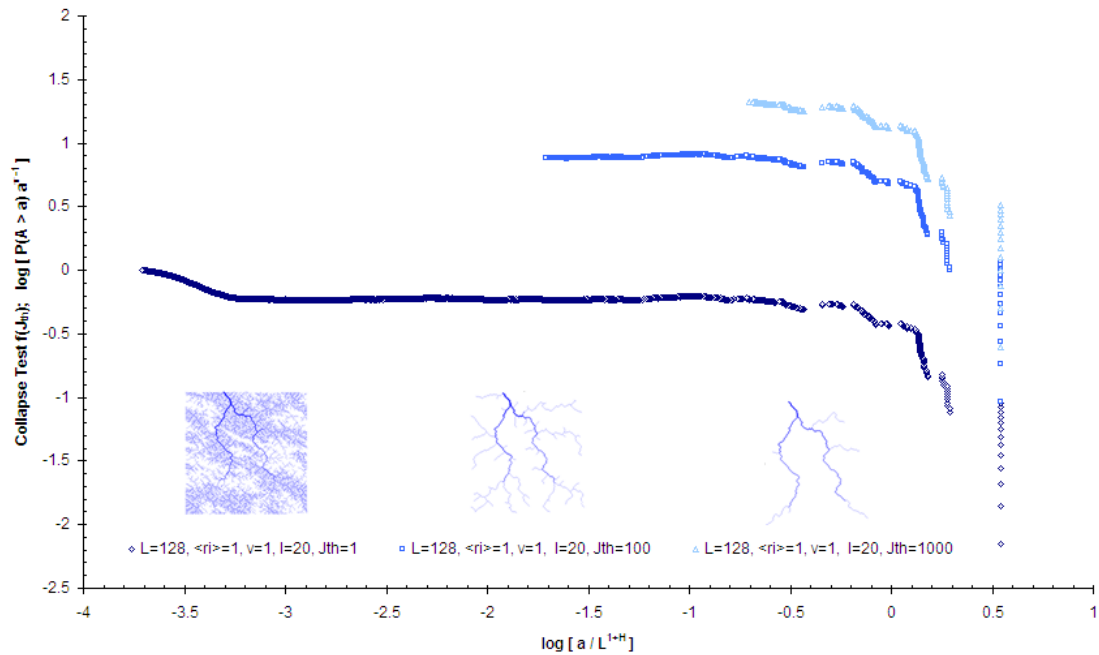


Figura 4.70: Collapse Test della probabilità cumulata di superamento dei flussi in funzione della soglia sul flusso cumulato J_{th} ; è verificata la consistenza degli esponenti con l'ipotesi di "finite-size scaling", H è evidentemente unitario per tutte e quattro le reti prese in considerazione.

In conclusione, lo scaling delle grandezze geomorfologiche dei bacini fluviali, è invariante:

- al livello di coarse graining;
- alla dimensione del bacino sintetico;
- alla soglia sul flusso cumulato (che coincide con la soglia sull'area cumulata nel caso di uniformità di precipitazione con $r_i = cost = 1$);
- alle eterogeneità "non quenched" della precipitazione (presumibilmente anche per le altre forme di eterogeneità, ad esempio geologiche).

Quindi assumendo Optimal Channel Networks, anche con differenti condizioni iniziali di drenaggio e condizioni al contorno, a differente indice di coarse

graining λ , e/o con differente dimensione L , e/o a diversa soglia J_{th} , e/o con iniezione nodale r_i uniforme o non uniforme (disordine smorzato o meno), si ottengono mediamente sempre gli stessi esponenti $\tau = \tau^* \pm e_\tau$, e $\psi = \psi^* \pm e_\psi$, quindi H e d_l , con $\tau^* = 1.43$ e $\psi^* = 1.80$ come valori ottimi, e $e_\tau = 0.02$ e $e_\psi = 0.1$ che vengono superati solo nel caso di campi di pioggia deterministici.

Nulla è ancora possibile dire, riguardo la formazione delle OCNs ed i relativi esponenti, determinate con campi di pioggia anisotropi o più aderenti alla realtà fisica, ad esempio quelli in cui r_i è legato all'orografia locale $z(i)$.

Termodinamica delle OCNs omogenee ed eterogenee.

5.1 Sommario.

In questo capitolo dapprima si propone una rivisitazione della termodinamica delle OCNs omogenee, ad esempio, investigando la tipologia delle reti che si ottiene al variare dell'esponente γ presente nella formula dell'energia dissipata da minimizzare (esponente a cui viene elevato il flusso cumulato, comprendendo così anche il caso delle reti eterogenee per le quali $J_i \neq a_i$).

Poi è stato verificato lo scaling dell'energia dissipata, e chiarito il ruolo reciproco della velocità di "raffreddamento" (imposta dal numero di temperature), dei salti di temperatura e del numero di cambiamenti random consentiti (uguali per ogni T , ad eccezione di casi particolari come si vedrà), al fine di regolare opportunamente i parametri del Simulated Annealing e così ricavare una OCN "canonica" con gli esponenti di scala ottimi.

Infine è stata analizzata "l'attività" della rete nel processo di ottimizzazione monitorando i siti attivi ad ogni step e considerando anche la variazione dell'entropia.

Dal punto di vista termodinamico le OCNs omogenee ed eterogenee presentano sostanzialmente lo stesso comportamento.

5.2 Termodinamica delle OCNs omogenee ($r_i = cost = 1$).

Elemento centrale dei modelli delle *reti topologicamente casuali* o *Random-Topology Models* [Shreve, 1969, 1967, 1966] è l'assunzione di uguale probabilità di qualsiasi configurazione ad albero.

Tuttavia i principi a fondamento della teoria delle *Optimal Channel Networks*, postulano che alcune reti distribuite e senza percorsi chiusi siano più probabili di altre, e la loro probabilità totale è regolata dal principio di minima energia spesa nella loro interezza e nelle loro parti.

Quindi nella formazione delle reti oltre alla *casualità* entra in gioco il *determinismo* (o *necessità*) imposto sull'energia dissipata.

Per un dato bacino B si definisce una probabilità $P(s)$, come una distribuzione di *Boltzmann*, ad ogni particolare configurazione ad albero distribuito (*spanning tree network*) s , con $s \in \mathcal{S}$ dove \mathcal{S} è l'insieme delle possibili configurazioni.

Analiticamente è

$$P(s) \propto e^{-H_\gamma(s)/T}, \quad (5.1)$$

dove T^{-1} è il parametro di *Gibbs* esprime l'inverso della temperatura in sistemi termodinamici classici.

Per un fissato valore dell'esponente γ , $H_\gamma(s)$ è l'Hamiltoniano del sistema da minimizzare per ottenere le OCNs, definito come:

$$H_\gamma(s) = \sum_{i=1}^{L^2} A_i^\gamma L_i, \quad (5.2)$$

dove i rappresenta uno dei possibili L^2 siti del reticolo $L \times L$. L'esponente γ è usualmente posto pari a 0.5 in modo da "catturare" la fisica dei processi erosivi la quale porta all'aggregazione fluviale ossia alla formazione della rete di drenaggio, ed è assunto $L_i = 1$ poichè si è visto che le statistiche delle reti risultano invariate assumendo unitaria ogni distanza dal centroide agli otto possibili pixel adiacenti adottando il metodo semplificato "delle otto direzioni di drenaggio" [Rodriguez-Iturbe e Rinaldo, 1997].

Ricordiamo che la probabilità cumulata dell'area contribuyente è espressa dalla relazione $P(A) \propto A^{-(1+\beta)} f(A/L^\phi)$ con $\beta = 0.43 \pm 0.02$ e $\phi \sim 1.8$, dove $f(\cdot)$ è una *funzione di omogeneità* opportuna per tenere conto degli effetti di dimensione finita.

Da notare che le reti topologicamente casuali di Shreve sono il caso limite del modello descritto dall'equazione (5.1) per $T \rightarrow \infty$, mentre le OCNs appartengono anche alla classe delle configurazioni descritte dall'equazione (5.2) dove $H_\gamma(s)$ è la dissipazione totale di energia della rete ad albero.

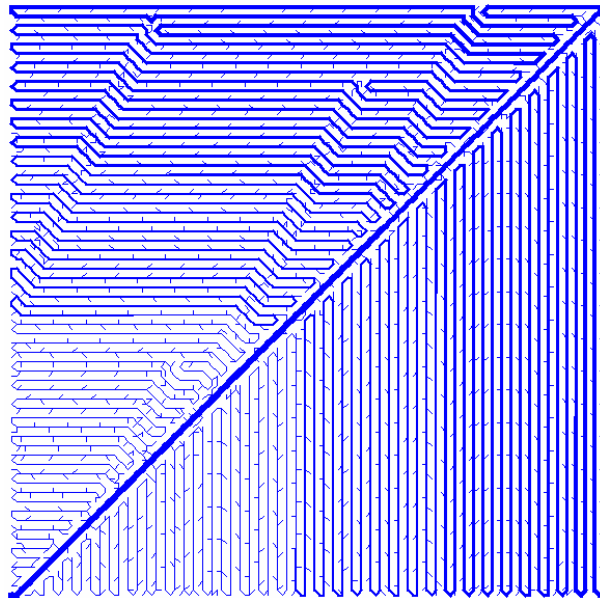
La struttura della configurazione minimizzante il funzionale H_γ dipende fortemente dal parametro γ . Si possono distinguere differenti comportamenti di cui si propone un esempio ciascuno, nel quale la larghezza dei canali è plottata ponendola proporzionale a \sqrt{A} per una migliore comprensione.

Le reti sono state ottenute applicando l'algoritmo di Metropolis partendo dalla configurazione iniziale casuale di Figura 5.5, la quale è una hot OCN.

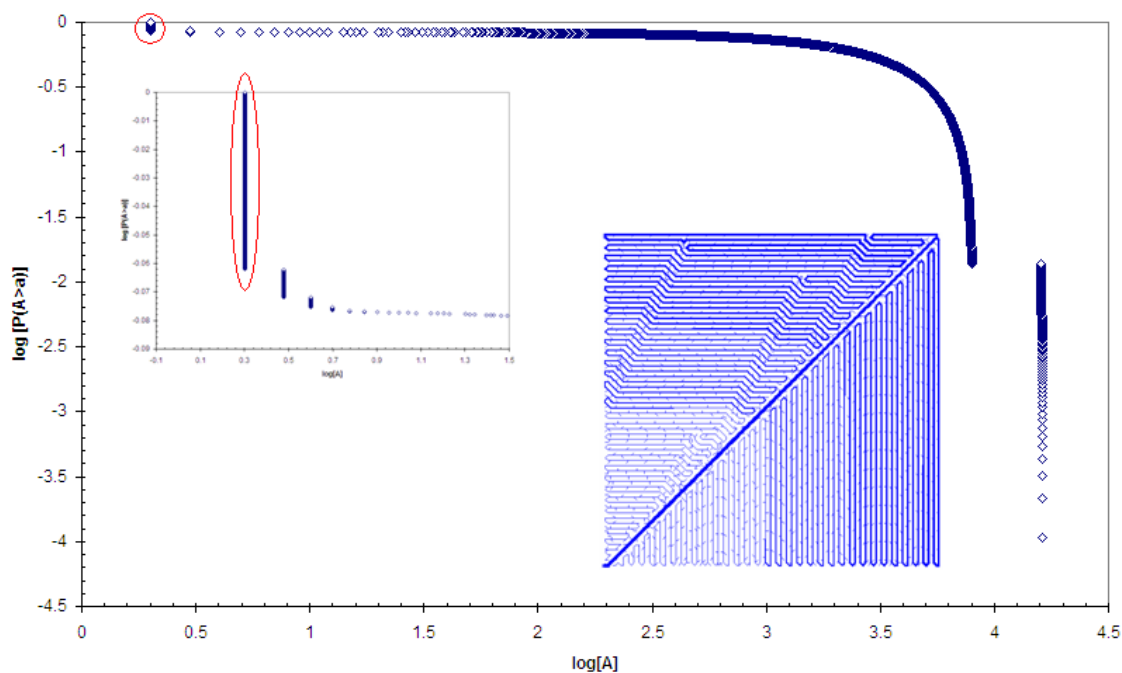
Le statistiche di una rete Eden e di una hot OCN sono leggermente differenti e pertanto partire da una condizione iniziale o l'altra è equivalente.

In sintesi,

- per $\gamma < 0$, le OCNs si attengono a seguire il comportamento dei cosiddetti *percorsi Hamiltoniani* in cui solo un canale drena tutta l'area del bacino (rete "comunista" o *spiral network*);



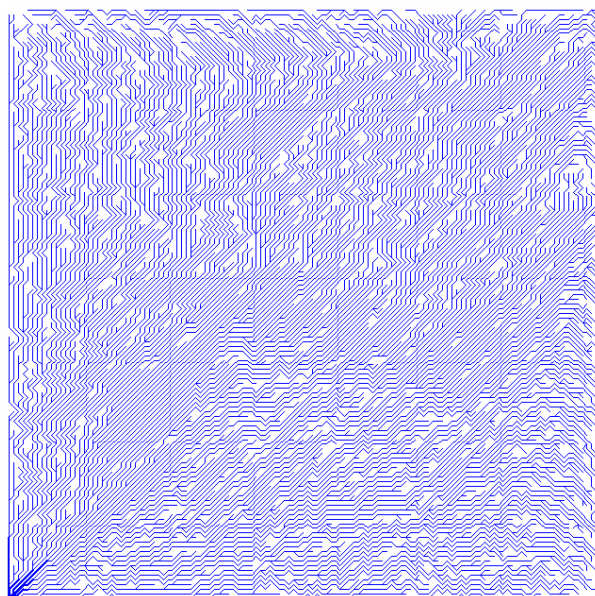
(a)



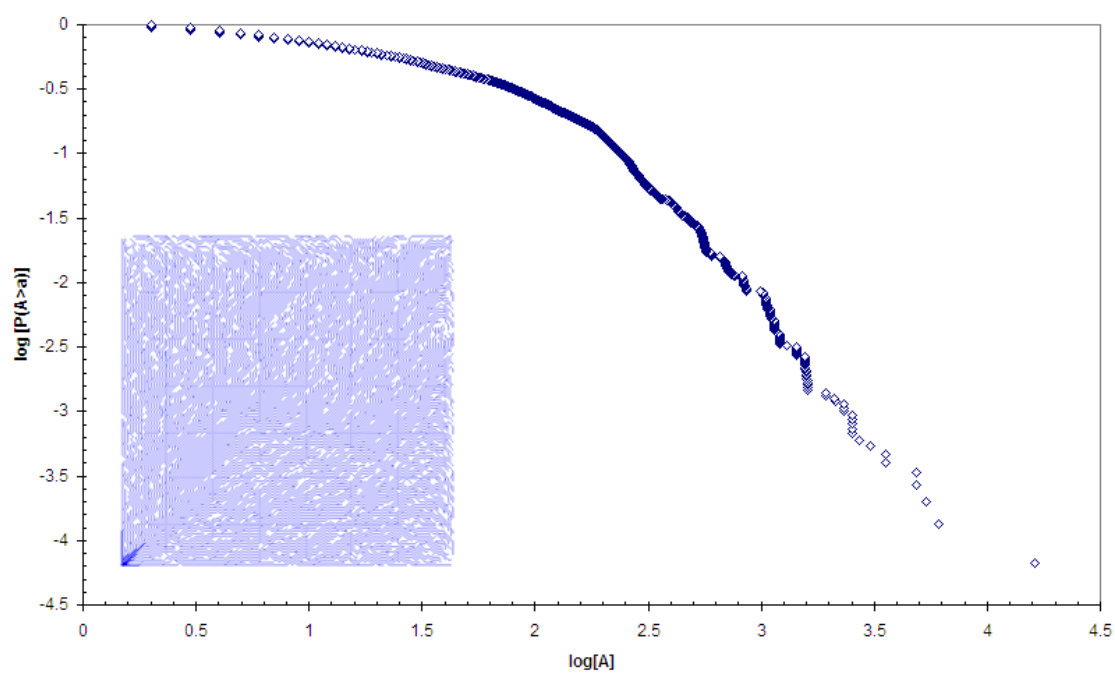
(b)

Figura 5.1: (a) rete a $T = 0$ ottenuta dal processo di Simulated Annealing con $\gamma = -0.5$ e 1×10^6 iterazioni, partendo dalla rete random di Figura 5.5, si nota che si sono formati due percorsi i quali drenano l'intero bacino; (b) andamento della $P[A \geq a]$ nel quale si nota una mancanza di universalità, ossia una mancanza di comportamento a legge di potenza dal quale poter estrarre un esponente "universale".

- per $\gamma > 1$, le forme minimizzanti l'equazione (5.2) sono tali che la lunghezza media del percorso da ogni sito i all'outlet è il più corto (rete "capitalista" o *explosion network*) e l'aggregazione è la minore possibile; per $\gamma = 1$ è stato dimostrato che le forme di OCNs ottenute appartengono alla classe delle reti di Scheidegger o reti fluviali dirette.



(a)

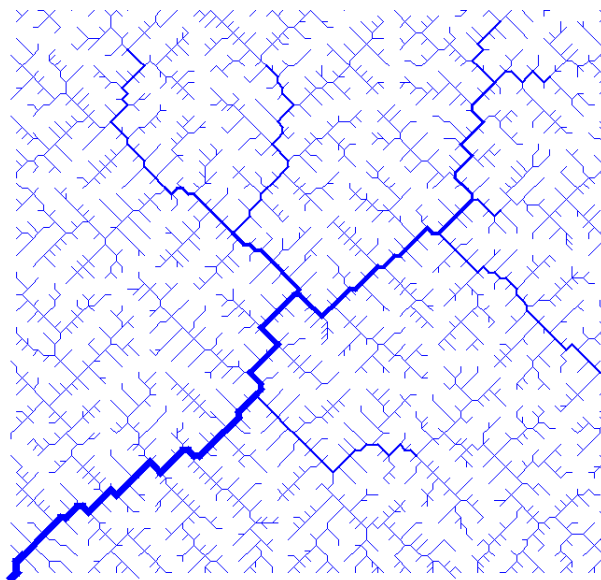


(b)

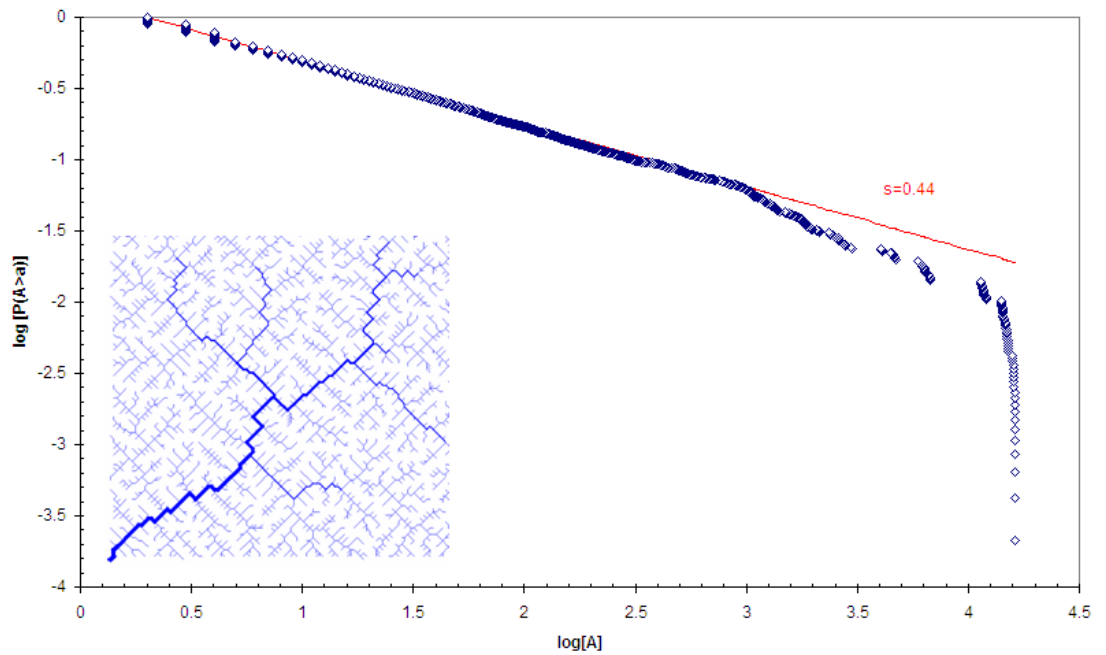
Figura 5.2: (a) rete a $T = 0$ ottenuta dal processo di Simulated Annealing

con $\gamma = 2$ e 1×10^6 iterazioni, partendo dalla rete random di Figura 5.5, si nota che ogni sito genera un proprio percorso indipendente e l'aggregazione è presente solamente in vicinanza all'outlet; (b) distribuzione della probabilità di superamento dell'area cumulata non caratterizzata da una legge di scala.

- per $0 \leq \gamma \leq 1$, i sistemi esibiscono strutture varie ed aggregate a seconda del valore specifico di γ , per $\gamma = 0.5$ i processi di erosione e conseguente aggregazione fluviale sono al meglio descritti; segue una OCN il cui esponente $\beta = 0.44$ della $P[A \geq a]$, risulta essere coerente ai valori osservati per i bacini reali ($\beta = 0.43 \pm 0.02$)

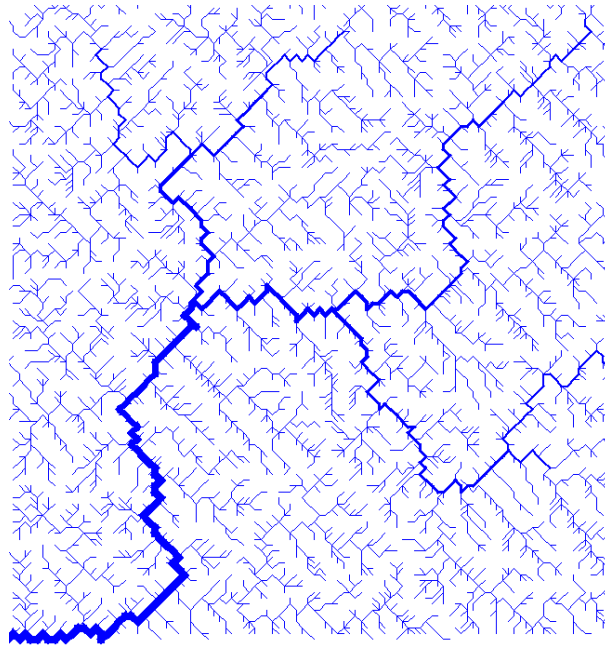


(a)

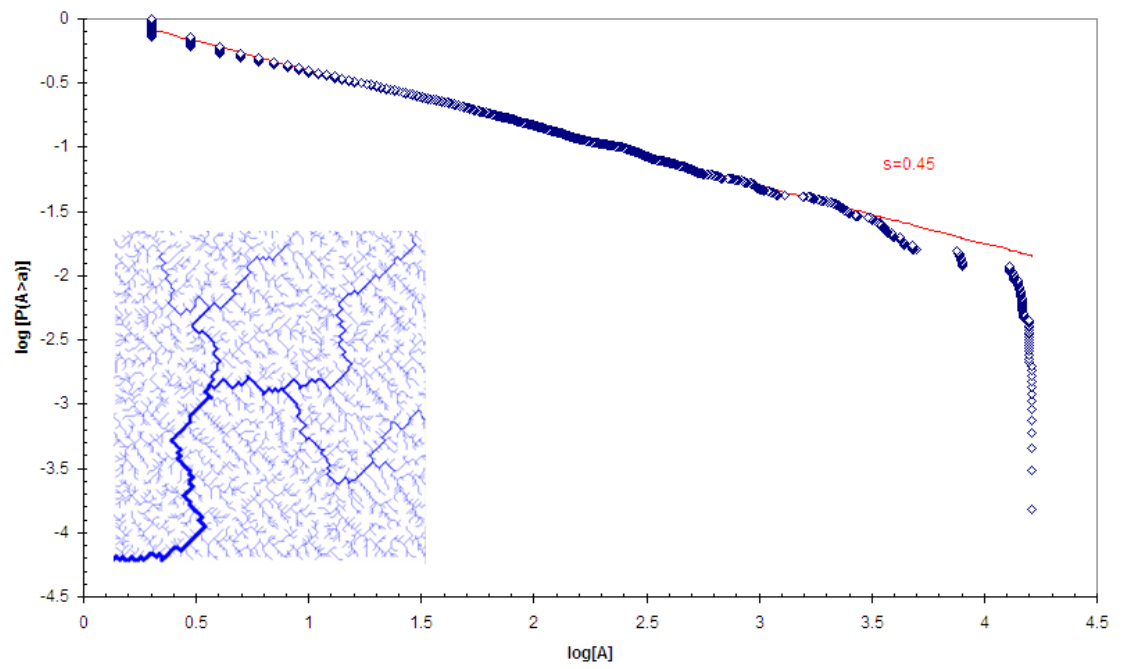


(b)

Figura 5.3: (a) OCN ottenuta con l'algoritmo di Metropolis a $T = 0.00$ e 1×10^6 iterazioni partendo dalla rete random di Figura 5.5; (b) rappresentazione bilogarithmica della legge di scala della distribuzione dell'area cumulata, si nota che all'aumentare di A_i si ha dapprima un comportamento simile a "devil staircase", poi una ripida variazione fino alla $P_{min}[A_{max} \geq a]$ corrispondente all'outlet, si osserva inoltre che più siti hanno in comune bassi valori di A_i , tra di essi anche i pixel sorgente; l'interpolazione lineare per la determinazione corretta dell'esponente di scala $s = \beta$, è stata effettuata troncando la distribuzione a $\log[A] = 3$.



(a)



(b)

Figura 5.4: (a) stessa OCN di Figura 5.3, a $T = 0.00$ e 1×10^6 iterazioni, con la differenza che nell'algoritmo di Metropolis le direzioni di flusso diagonali L_i sono assunte pari a $\sqrt{2}$ e quindi la (2) in tal caso risulta pesata con tale prefattore per le direzioni diagonali di drenaggio; (b) andamento della $P[A \geq a]$ con $s = \beta = 0.45$ che testimonia la sostanziale invarianza delle *weighted* OCNs alle OCNs "normali" (con $L_i = 1 \forall \text{pixel } i$ adiacente al centroide) nelle statistiche, quindi la forma del reticolo non influenza la fisica dei bacini ottimi.

La dissipazione di energia attraverso l' i -esimo collegamento di lunghezza unitaria è

$$P_i \propto Q_i \Delta z_i \quad (5.3)$$

dove Q_i è il flusso e Δz_i il salto di elevazione lungo l' i -esimo collegamento.

Si può assumere $Q_i \sim A_i$ esclusivamente in presenza di precipitazione unitaria uniforme (o iniezione di massa uniforme) ricorrente in ogni sito e in ogni tempo.

L'evidenza delle osservazioni suggerisce che $\langle \Delta z_i \rangle \propto A^{-0.5}$, e quindi

$$P_i \propto A_i^{0.5}. \quad (5.4)$$

La dissipazione totale di energia è quindi ottenuta sommando su tutti i siti, da cui discende l'equazione (5.2).

E' possibile dimostrare che minimizzando la dissipazione totale di energia del sistema si minimizza anche l'energia potenziale totale.

Ricordiamo che le OCNs sono ottenute selezionando la configurazione ottima attraverso un algoritmo detto "del comesso viaggiatore" partendo da una condizione iniziale casuale, ad esempio una rete generata da una crescita Eden.

L'algoritmo procede selezionando un sito i casualmente e perturbando la configurazione ($s \rightarrow s'$) assestando localmente un cambiamento nella matrice delle connessioni $\delta W_{i,j}$. Questo porta ad un cambiamento di tutte le aree cumulate collegate al sito i , ma la modificazione è accettata se $H_{1/2}(s') < H_{1/2}(s)$. La procedura si ferma quando sono stati rifiutati un prefissato numero di cambiamenti.

Scopo di questa tesi è quello di verificare quando l'ipotesi $Q_i \sim A_i$ decade, quindi quando non è più possibile minimizzare l'energia locale (del collegamento i) scritta come in (5.4) e quindi quella totale come in (5.1); in tal caso la potenza da rendere minima diventa quella effettiva descritta dall'equazione (5.3).

Per far questo si agirà nel termine r_i che fornisce il contributo del pixel i all'area cumulata A_i data dall'espressione $A_i = \sum_{j \in nn(i)} w_{i,j} A_j + r_i$, dove $nn(i)$ sono i pixel adiacenti al sito i .

Una prima simulazione verrà effettuata in modo deterministico dividendo il bacino in due parti attraverso una sua qualsiasi diagonale e imponendo $r_i = 1$ in una metà, ed $r_i = 0$ nell'altra metà; in tal modo si vedrà la robustezza nella determinazione delle OCNs.

E' possibile fare anche simulazioni ponendo $r_i = 1 + e_i$, con e_i una funzione di errore Gaussiana con media unitaria e varianza via via crescente.

Più semplicemente con HydroGen, nella generazione dei campi con una certa struttura di covarianza, si è imposto un valore della varianza σ^2 che determina lo scostamento dalla media m , tenuta pari ad uno in tutto il campo $L \times L$, per ogni sito i .

Dato un livello di energia detto $E \in H_\gamma(S)$, $N(E)$ sia la degenerazione, ad esempio il numero di differenti reti ad albero distribuite s per le quali $H_\gamma(s) = E$. Si introduce la probabilità $P(H_\gamma(s) = E) = \sum_{s: H_\gamma(s)=E} P(s) \propto N(E) \exp(-E/T)$ di avere un certo albero s con $H_\gamma(s) = E$.

Definendo l'entropia termodinamica come $\sigma(E) = \ln N(E)$ si ottiene per la probabilità suddetta

$$P(H_\gamma(s) = E) \propto e^{-F(E)/T}, \quad (5.5)$$

nella quale una formale *energia libera* $F(E) = E - T\sigma(E)$ è stata introdotta, quindi gli stati più probabili corrispondono a un'energia E che minimizza la $F(E)$.

Il risultato centrale è che l'entropia $\sigma(E)$ scala in modo sottodominante con la dimensione del sistema comparata all'energia E [Rinaldo et al., 1996], cosicché anche per un valore non nullo del parametro di Gibbs le più probabili configurazioni, determinate minimizzando l'energia libera $F(E)$, possono

essere ugualmente ben ottenute minimizzando l'energia E , ponendo che L sia sufficientemente grande.

Il risultato esatto è che, per un'insieme \mathcal{S} di OCNs, si ha

$$E = \text{Min} [H_\gamma(s) \propto L^{2+\delta}], \quad (5.6)$$

con $\delta > 0$ per $\gamma > 1/2$, e con $\delta = 0.1 \div 0.2$ per $\gamma = 1/2$ come ricavato da estensive analisi di dati di simulazioni numeriche [Rinaldo *et al.*, 1996].

Riassumendo è stato ricavato che per reti ad albero distribuite (con $\gamma \geq 1/2$) l'entropia scala in modo sottodominante all'energia con la dimensione del sistema nel limite termodinamico $L \rightarrow \infty$, ossia $\min F(E) \propto L^{2+\delta}$ perchè $\delta > 0$.

Così la configurazione che minimizza H , minimizza anche $F(E)$ qualsiasi sia il parametro di Gibbs T^{-1} , con l'ipotesi che il sistema sia grande abbastanza.

Le OCNs che corrispondono alla temperatura di zero gradi (ad esempio la rete che porta al valore $\min F(E)$ è quella con $\min E$ solo per $T \rightarrow 0$) riproducono le condizioni naturali reali a qualsiasi temperatura per grandi L .

Poichè le reti fluviali usualmente sviluppano lo spostamento delli spartiacque e la competizione per il drenaggio in assenza di controlli geologici su vasti domini rispetto al valore di soglia inferiore (la scala della nascita dei canali [Rodriguez Iturbe *et al.*, 1992]), è ipotizzabile che le reti naturali operino in condizioni che tendono al limite termodinamico nella maggior parte del tempo [Rinaldo *et al.*, 1996].

E' probabilmente questa la ragione per la quale le OCNs tendono a riprodurre la realtà indifferenti alla litologia di superficie, alla geologia, alla vegetazione e al clima.

Questo suggerisce fortemente anche che gli "effetti di dimensione" dei campioni di reti fluviali possono portare a risultati spuri per piccole dimensioni, in tal caso si parla di *finite size effects*.

Ricordiamo che le OCNs hanno una struttura vincolata (*loopness* e *spanning*) e derivano dalla minimizzazione della dissipazione totale di energia.

Inoltre non esibiscono un'insieme di di stati ricorsivi dinamicamente accessibili ma hanno una struttura congelata e si comportano come un sistema freddo a temperatura $T = 0$.

Questo segue dalla legge di potenza sottodominante dell'entropia con la dimensione del sistema comparata all'energia, mentre il comportamento criti-

co spaziale delle OCNs è originato dalla natura correlata della loro struttura vincolata.

Ricordiamo che esistono in natura altri sistemi con strutture stazionarie dendritiche come i campi elettrici con iniezione [Marani *et al.*, 1998].

Si è riportato un'esempio di OCN ad entropia dominante con $\gamma = 1/2$, ricavata utilizzando l'algoritmo di Metropolis, ad una certa temperatura T . La rete serve per mostrare le implicazioni della massimizzazione dell'entropia, ad esempio se $T > \text{const} \times L^\delta$ l'entropia domina rispetto l'energia.

Si è partiti da una condizione iniziale qualsiasi, tipicamente una rete random tipo Eden, e accettato un cambiamento di configurazione ($s \rightarrow s'$) quando:

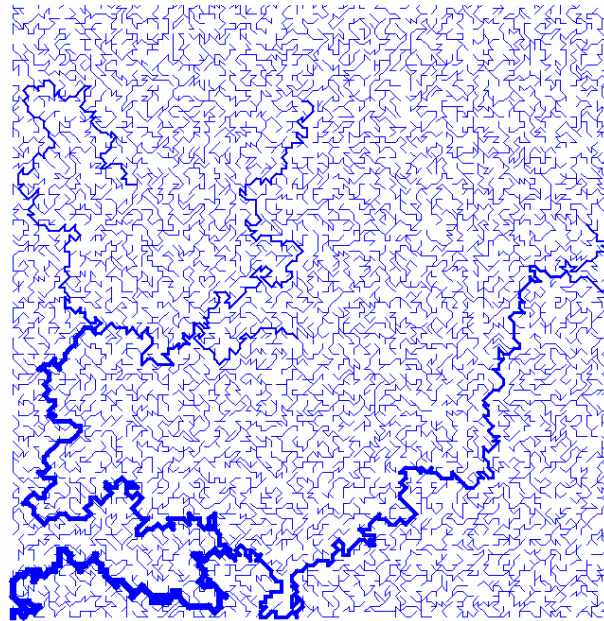
(i) $H_\gamma(s') < H_\gamma(s)$, ossia nel caso di diminuzione dell'Hamiltoniano, o,

(ii) quando si ha una nuova probabilità $P(s') \propto \exp\{-[H_\gamma(s') - H_\gamma(s)]/T\}$ altrimenti.

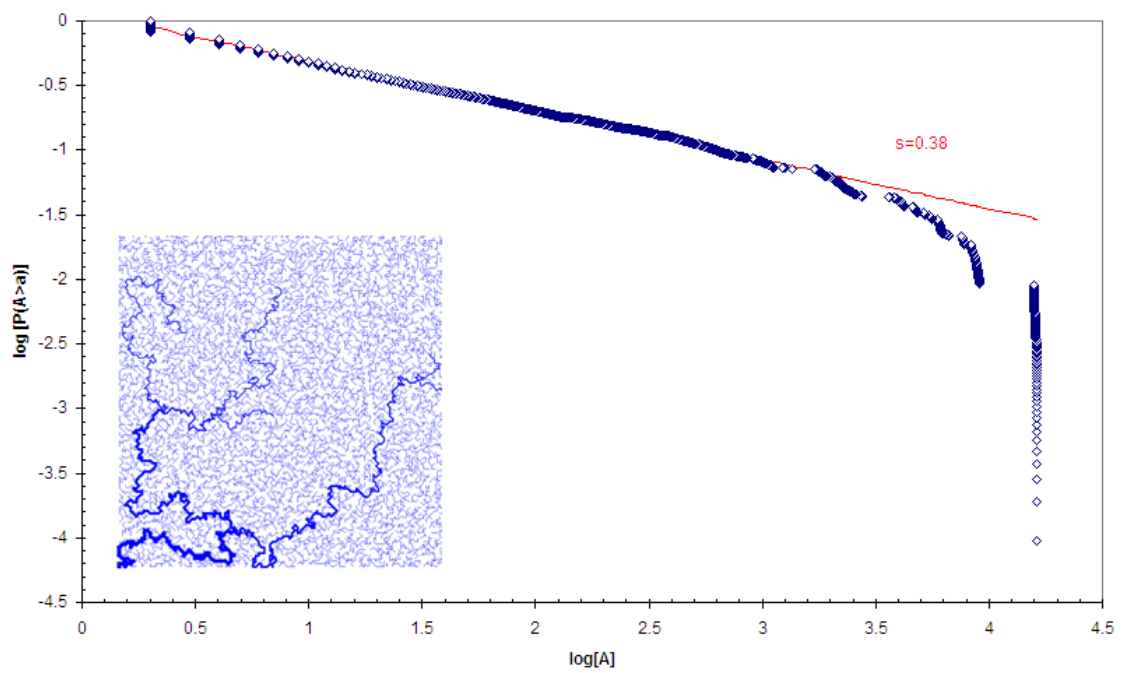
La Figura 5.5 mostra una OCN a $T = 10000$, la quale per la dimensione del sistema $L = 128$, è grande abbastanza per assicurare la dominanza dell'entropia.

Le rete risultante è chiaramente frattale con proprietà nessuna delle quali riproduce quelle che si verificano in natura [Rodriguez Iturbe *et al.*, 1992].

Tuttavia le "hot" OCNs, ossia le reti ottime a elevate temperature, portano a statistiche stabili di strutture spazialmente caratterizzate da leggi a potenza (*scale free networks*) e con una preponderanza di scale di tempo quando il sistema raggiunge l'insieme di stati ricorsivi, in un processo che ricorda i fenomeni ordinari tipici della criticità auto-organizzata (*Self Organized Criticality*) [Bak *et al.*, 1987, 1988, 1993].



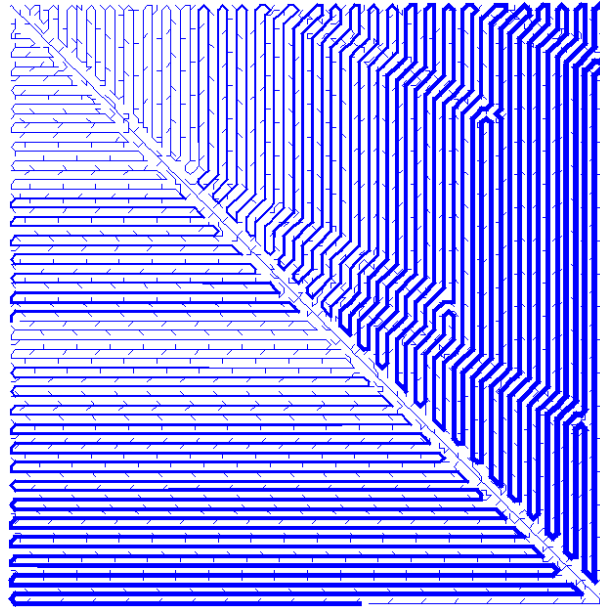
(a)



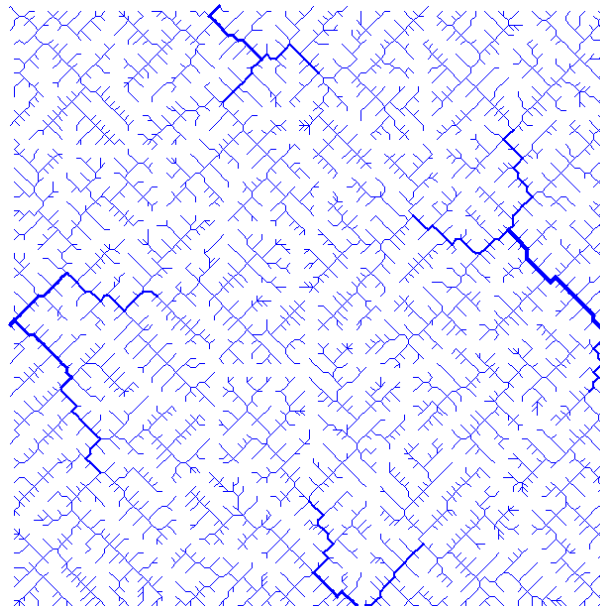
(b)

Figura 5.5: (a) *hot* OCN a $T = 10000$ e 1×10^7 iterazioni ottenuta con l'algoritmo di Metropolis; tale rete random è stata utilizzata come condizione iniziale per il

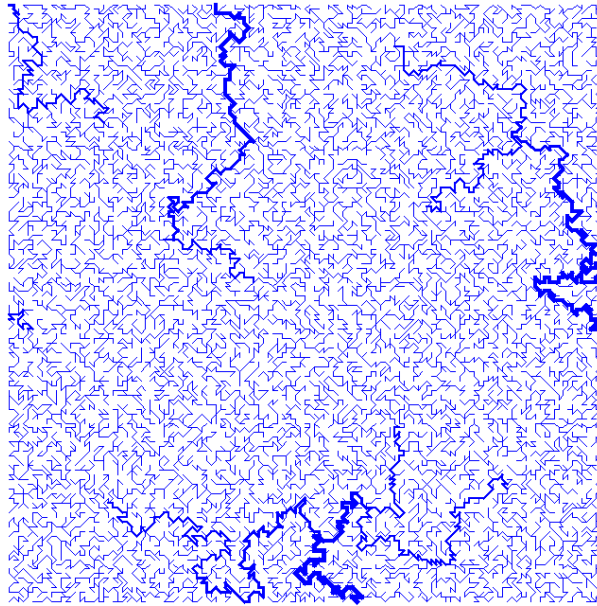
Simulated Annealing generando le reti di Figura 5.4, 5.3, 5.2, 5.1; (b) distribuzione della $P[A \geq a]$ nella quale risulta $s = \beta = 0.38$ (interpolando linearmente con cutoff inferiore a $\log[A] = 3$) pari al valore teorico valido per temperatura infinita e dominio illimitato.



(a)



(b)



(c)

Figura 5.6: (a), (b), (c) reti 128×128 aventi outlets casuali multipli sui lati, ed ottenute tramite processo di Simulated Annealing con 1×10^6 iterazioni per ogni temperatura; (a) OCN a $T = 0.00$ e $\gamma = -0.5$, si individua la formazione di 4 reti di drenaggio indipendenti e a spirale, quindi 4 bacini, ossia 4 outlets; (b) OCN a $T = 0.00$ e $\gamma = 0.5$ (soluzione ottimale anche per l'esponente γ adottato che cattura la fisica dei processi erosivi) con 5 outlets in totale nel dominio di calcolo; *hot* OCN a $T = 1000$ e $\gamma = 0.5$ con 5 outlets.

Le *hot* OCNs e i fenomeni di SOC hanno parecchi attributi comuni e una differenza chiave; entrambi hanno un'insieme di stati ricorsivi, tuttavia le reti ottime "calde" sono ottenute minimizzando l'energia libera, mentre i processi auto-organizzati sono ottenuti da regole dinamiche [Rinaldo *et al.*, 1996].

I sistemi classici auto-organizzati, per i quali il concetto di stati ricorsivi è molto significativo, è pensabile siano sistemi "caldi" e possono massimizzare l'entropia, con appropriati vincoli, nel limite termodinamico.

Poichè la dissipazione di energia è misurata dal numero di siti attivi [Hwa *et al.*, 1992] e avviene attraverso i confini del bacino, la sua legge a potenza tende ad essere sottodominante all'entropia nel limite termodinamico.

Strutture critiche controllate dalla temperatura sono state trovate [Miramontes et al., 1993] in reti neurali di elementi mobili con attivazione casuale, ricordando le società auto-organizzate delle formiche. Queste reti operano al limite del caos con fluttuazioni critiche che inoltre massimizzano l'entropia.

In questo caso la massimizzazione dell'entropia e il comportamento critico sono ottenuti modulando un parametro di densità, il quale corrisponde piuttosto accuratamente al valore auto-organizzato osservato in natura [Miramontes et al., 1993].

Infine, i fenomeni critici convenzionali ottenuti da una modulazione oculata di un parametro, ad esempio la temperatura, possono essere il risultato in cui le proprietà di scala (o proprietà "di legge a potenza") dell'energia e dell'entropia sono simili.

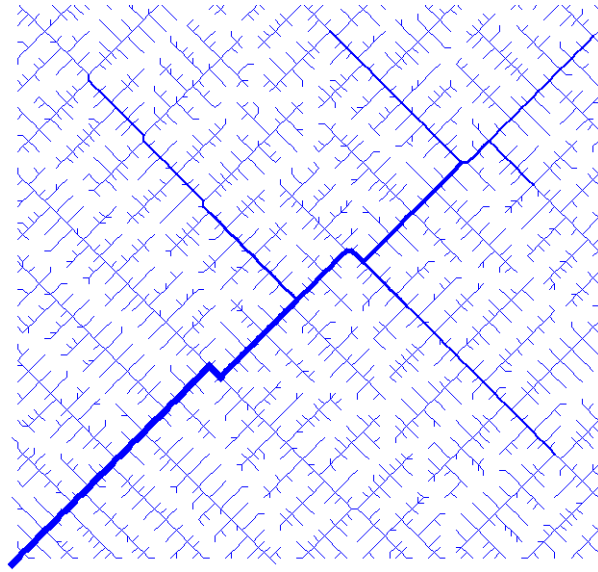
E' inoltre possibile che le OCNs e i sistemi SOC sono distinti perchè li ultimi non sono ottenibili attraverso nessun principio di minimizzazione dell'energia libera.

Tuttavia un'interessante alternativa è che l'evoluzione naturale di strutture frattali in sistemi aperti, dissipativi e con molti gradi di libertà, sia in generale il sottoprodotto combinato dell'opportunità e della necessità, l'ultima essendo impressa nella ricerca dell'ottimalità che si può vedere dappertutto nelle forme naturali [Kauffman, 1993].

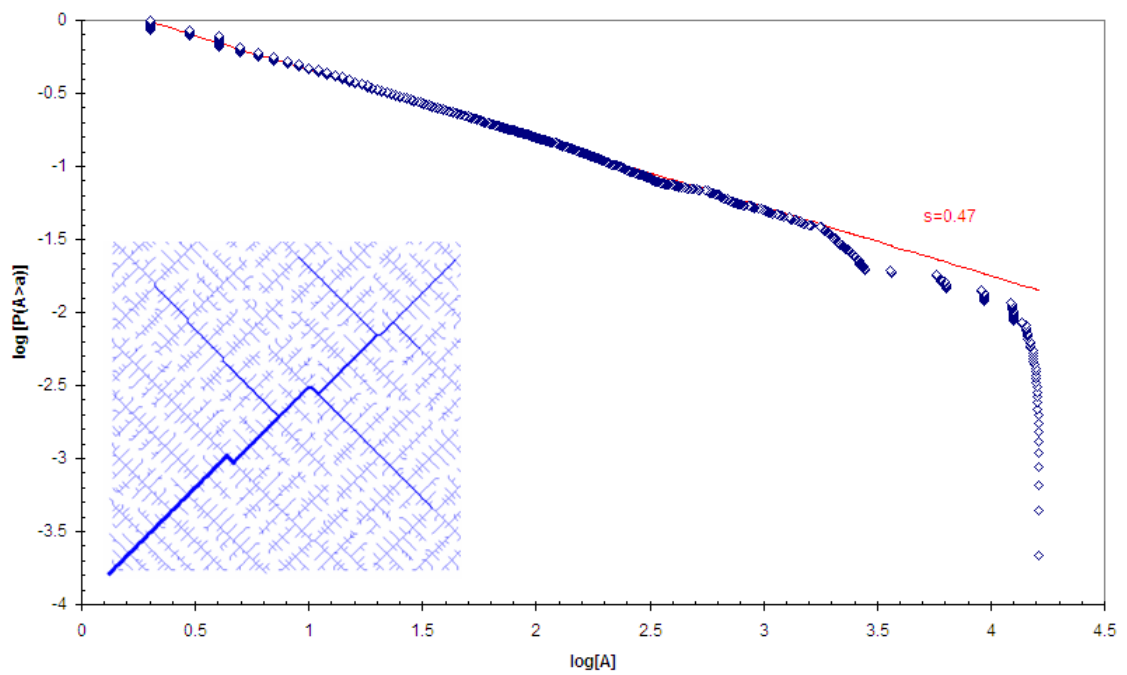
Concentriamo ora l'attenzione sul parametro *temperatura* nel processo di ottimizzazione. Anche se manca ancora una chiara valutazione geomorfologica al significato fisico del parametro "mutazionale" T , il quale determina la suscettibilità di una rete a cambiamenti planari, si osserva che le configurazioni "calde" (*hot* OCNs) hanno qualcosa di simile alle reti che si sviluppano nelle aree a bassa altitudine [Rinaldo e Rodriguez Iturbe, 1997].

Due regioni sono chiaramente identificabili nell'energia media dissipata; una la si identifica nel plateau iniziale dove $\langle E \rangle$ è circa costante fino al valore T^* che dipende dalla dimensione L della rete, l'altra oltre T^* si propone con una rapida crescita sostanzialmente lineare.

La temperatura di transizione T^* è stato osservato essere circa quella tipica al di sotto della quale si ottengono le OCNs, quindi valori bassi in genere minori di 0.2, mentre per *simulated annealing* molto lunghi, con ΔT piccoli e molte temperature, al di sotto di essa si ottengono li stati base delle reti conosciuti come *ground state* OCNs.



(a)



(b)

Figura 5.7: (a) *ground state* OCN a $T = 0.00e 5 \times 10^7$ iterazioni dell'algoritmo di Metropolis, si nota la forte rettilinearità delle strutture di drenaggio delle reti di base fluviali ottimali; (b) rappresentazione bilogarithmica della $P[A \geq a]$ nella quale

risulta $s = \beta = 0.47$ (con cutoff inferiore ad $\log[A] = 3$).

Le due regioni esistenti per la dissipazione di energia e l'entropia mostrano dinamiche temporali differenti, regolate dalla temperatura T . Per valori molto bassi di T il sistema è congelato e non reagisce a cambiamenti casuali della sua connettività, ossia i cambiamenti casuali operati sulle direzioni di drenaggio. Per qualche valore maggiore di temperatura c'è un numero non trascurabile di siti attivi le cui dinamiche temporali riflettono il modo in cui il sistema globalmente evolve [Rodriguez Iturbe e Rinaldo, 1997].

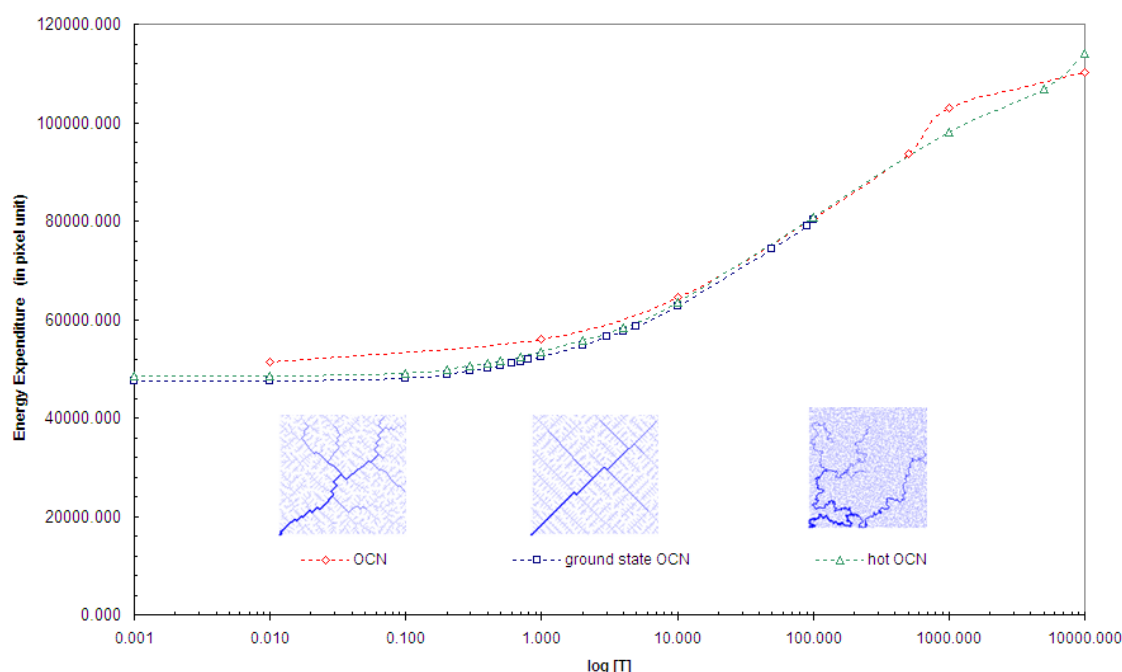


Figura 5.8: dissipazione media di energia $\langle E \rangle$ della distribuzione dei siti attivi per le reti sviluppate tramite processo di Simulated Annealing, e specificatamente per la OCN di Figura 5.3, la *ground-state*OCN di figura 5.7 e la *hot*OCN di Figura 5.5, tutte con $\gamma = 0.5$; la curva inferiore più bassa è dovuta all'attento e lento processo di "raffreddamento" (ΔT ridotti e molte temperature) che portano al raggiungimento del minimo globale dell'energia libera per una data T tipico della *ground-state* OCN; la temperatura critica, o di transizione, risulta essere per le tre reti $T^* \approx 0.100$; il comportamento di $\langle E \rangle$ vs T per $0 \leq \gamma \leq 1$ è intermedio a quello di Figura 5.9 e 5.10.

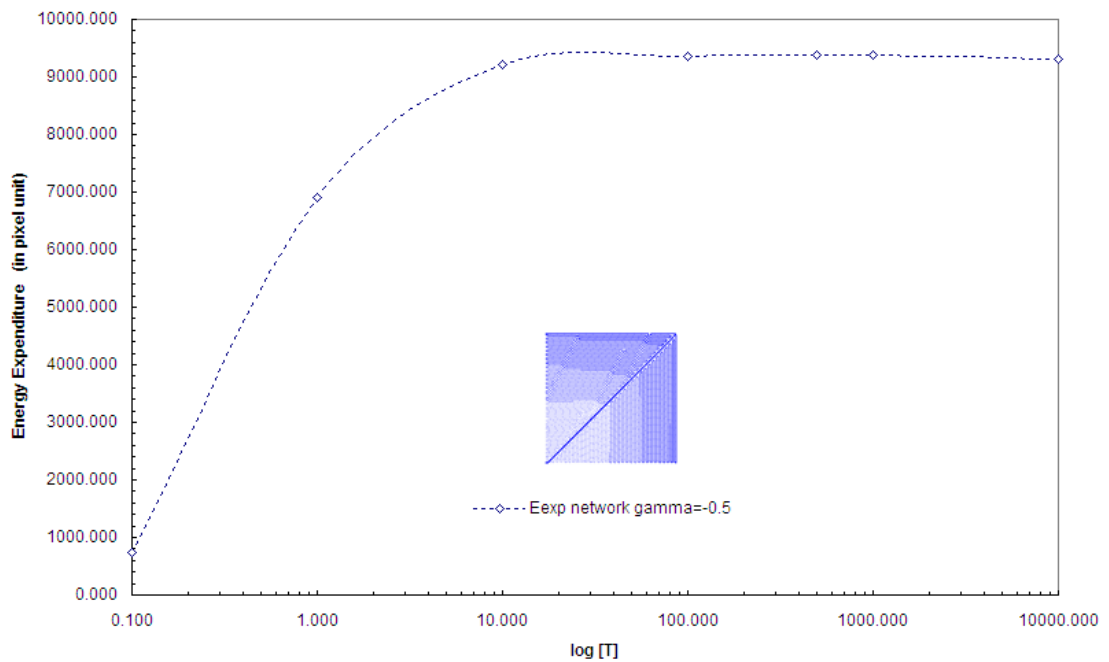


Figura 5.9: dissipazione media di energia $\langle E \rangle$ durante il processo di Simulated Annealing che porta alla rete di Figura 5.1 con $\gamma = -0.5$; l'andamento è differente da quello tipico per $0 \leq \gamma \leq 1$ in quanto non si osserva una temperatura critica T^* , si ha subito una rapida crescita di $\langle E \rangle$ con T e poi un plateau finale; è evidente che l'energia dissipata (in unità di pixel) è compresa in un intervallo inferiore al caso per $0 \leq \gamma \leq 1$ perchè l'Hamiltoniano $H_\gamma(s)$ di (5.2) ha A_i^γ con $\gamma < 0$.

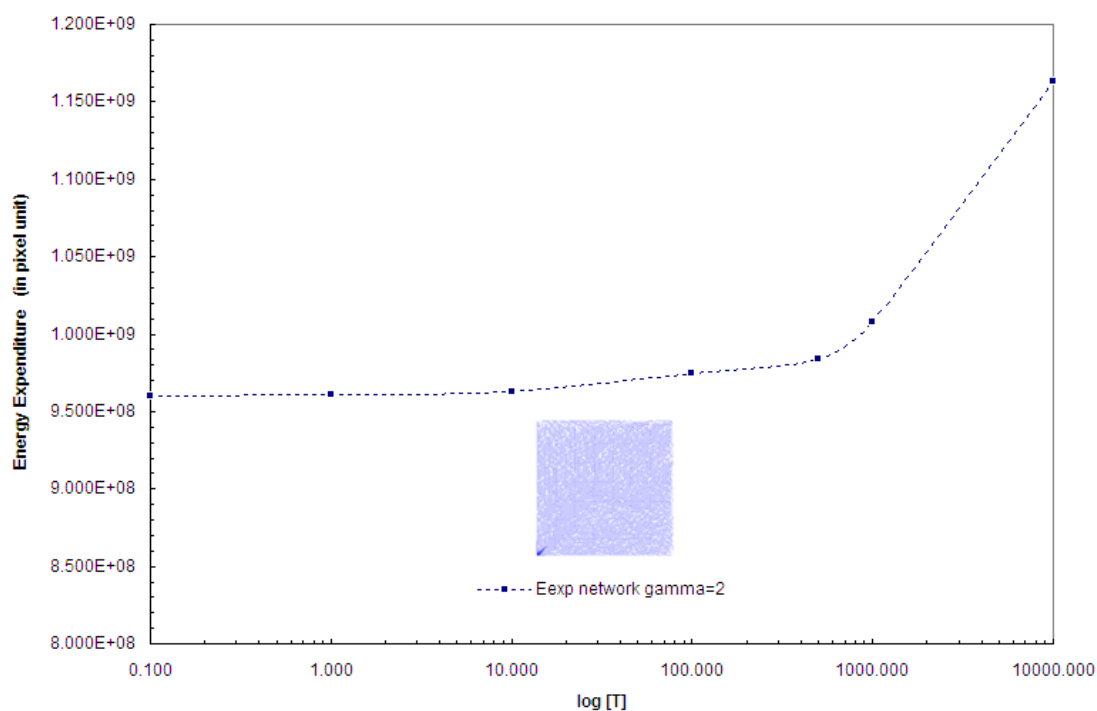


Figura 5.10: dissipazione media di energia $\langle E \rangle$ durante il processo di Simulated Annealing che porta alla rete di Figura 5.2 con $\gamma = 2$; l'andamento è differente da quello tipico per $0 \leq \gamma \leq 1$ in quanto si ha un più esteso plateau iniziale quindi una temperatura di transizione T^* maggiore, nella fattispecie ~ 100 , quindi la successiva ripida crescita lineare; è evidente che l'energia dissipata (in unità di pixel) è compresa in un intervallo maggiore al caso per $0 \leq \gamma \leq 1$ perchè l'Hamiltoniano $H_\gamma(s)$ di (5.2) ha A_i^γ con $\gamma > 0$.

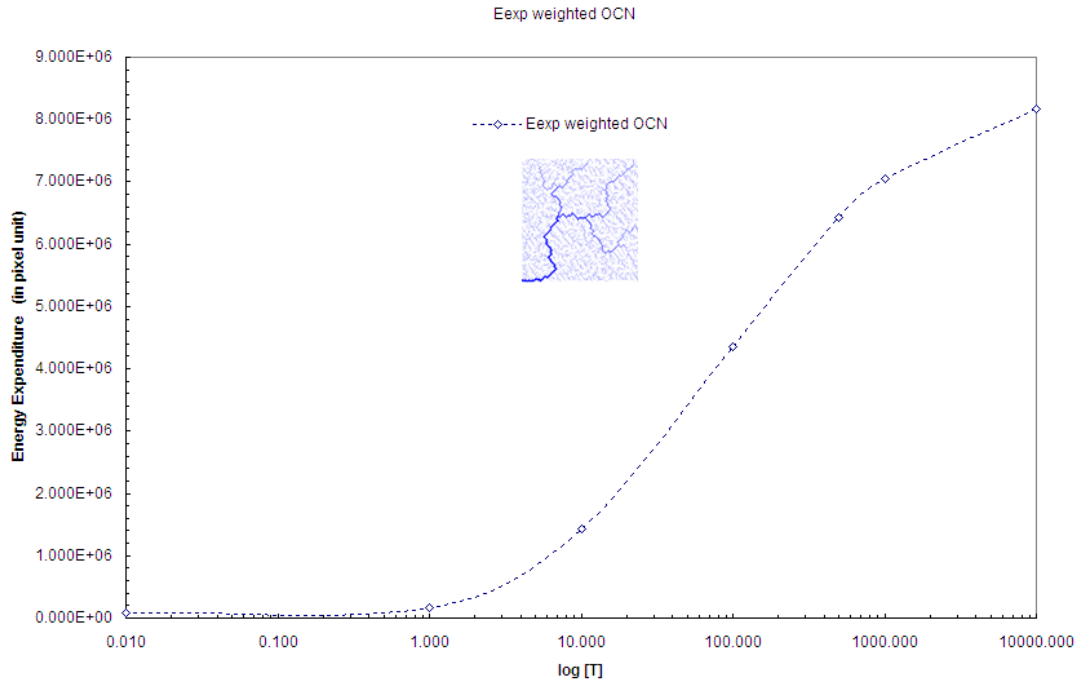


Figura 5.11: dissipazione media di energia $\langle E \rangle$ durante l'applicazione dell'algoritmo di Metropolis che porta alla *weighted OCN* con $\gamma = 0.5$ di Figura 5.4; l'andamento è molto simile a quelli di Figura 5.8 delle OCN "normali" con $L_i = 1$ per qualsiasi direzione di drenaggio, ma l'intervallo di $\langle E \rangle$ è molto più ampio, a parità di T_{min} e T_{max} , quindi la variazione quasi-lineare da $T^* \approx 1$ ha ripidità e valore assoluto maggiore per via del prefattore $\sqrt{2}$ in (5.2) nelle connettività diagonali.

Inoltre:

(i) Per temperature al di sotto di una certa soglia $T < T^*$ la pendenza β della probabilità di eccedenza delle aree contribuenti ad ogni punto, $P[A \geq a]$, è statisticamente da quelle più spesso osservate in natura il cui valore è $\beta = 0.43 \pm 0.02$;

(ii) A temperature $T \sim T^*$ il sistema esibisce un equilibrio puntuale con periodi di staticità di tutte le lunghezze interrotti da momenti di improvvisa e forte attività;

(iii) Per $T > T^*$ la dissipazione di energia aumenta con T e il comportamento caratteristico della $P[A \geq a]$ si discosta dall'evidenza delle osservazioni, quindi la pendenza β della probabilità di superamento dell'area cumulata è significativamente differente da quella dei bacini reali; per temperature molto alte ($T > 10000$ per le quali si può considerare $T \simeq \infty$) la pendenza raggiunge il valore teorico $\beta = 0.38$ valido per temperatura infinita e dominio illimitato.

L'evoluzione "intermittente" descritta al punto (ii), tipica dei segnali come $1/f$, è molto diversa da una graduale ad andamento lineare.

I fenomeni auto-organizzati mostrano questo tipo di dinamiche dove la attività di mutazione accumulata è descritta dalla tipica "scala del diavolo" [Sneppen *et al.*, 1995].

Le reti con dissipazione di energia quasi ottima (ossia quasi minima) ottenuta a temperature $T \sim T^*$, è stato osservato hanno una diversità dinamica molto ampia. Quindi sebbene possano essere considerate "fredde" dal punto di vista dell'energia spesa, esse sono "calde" nelle caratteristiche dell'*entropia dell'informazione* [riferimento a Shannon information theory].

Quest'ultima caratteristica è tipica dei sistemi auto-organizzati ed è stata anche osservata nelle reti fluide neurali [Solè *et al.*, 1995].

Alcune società animali come quelle delle formiche sembrano anche scegliere le loro densità spaziali al fine di massimizzare l'informazione sotto forma di entropia nella forma di attività spaziale; questo è il punto nel quale c'è la più grande varietà di stati dinamici.

La prova che le reti fluviali, così come ad esempio le pareti del dominio in un ferromagnete casuale, non sono liberi di esplorare estese regioni delle loro possibili configurazioni, suggerisce che la natura non cerca il minimo globale volendo raggiungere l'ottimalità.

Questo sembra vero per moltissime configurazioni ottimali di sistemi fisici complessi con molti gradi di libertà, che minimizzano una funzione di costo determinabile in una ampia varietà di contesti, ad esempio il classico problema del commesso viaggiatore⁴, l'equilibrio termodinamico, i reticoli di spin (*spin glasses*) e il problema dell'impaccamento delle proteine [Banavar *et al.*, 2003].

⁴Il problema originario tratta del modo più breve di collegare N città; la peculiarità è che il numero di soluzioni possibili, ciascuna con valore diverso della funzione obiettivo, cresce esponenzialmente con N e risulta impossibile risolvere il problema costruendo e valutando tutte le possibili soluzioni. Tale tipo di problema è detto a crescita non polinomiale (NP) e per risolverlo si ricorre a particolari tecniche computazionali, ad esempio la procedura di *Lin-Kernigham* [Lin, 1965]

Similmente all'evoluzione biologica molti sistemi fluviali sembrano evolversi verso un regime che è tra ordine e chaos [Kauffman *et al.*, 1991].

Essi esistono vicino ad un regime di transizione che fa loro essere ordinati abbastanza per coordinare efficacemente la loro attività, e sufficientemente flessibili per evolvere in caso di mutamento.

5.3 Termodinamica delle OCNs eterogenee (r_i random).

Si riporteranno, principalmente in forma grafica, i risultati dalle analisi condotte sui processi termodinamici che portarono all'ottenimento delle Optimal Channel Networks eterogenee.

La trattazione teorica valida per le OCNs omogenee, e riassunta nel paragrafo precedente, resta valida per quelle eterogenee.

Si sono studiate in particolare la funzione *dissipazione di energia* e la funzione *entropia*, sia per confrontarle con quelle delle corrispondenti reti ottime omogenee, a parità dei parametri del Simulated Annealing, sia per esaminare meglio la dinamica che porta alla loro formazione.

Di particolare interesse è risultata la valutazione dell'andamento della dissipazione di energia ΔE in funzione di T , per la scelta ideale della serie di temperature da usare nell'algoritmo di Metropolis, e lo studio dei siti attivi.

E' stato anche meglio analizzato il ruolo del "raffreddamento" veloce o lento nell'ottenere le OCNs e le *gsOCN* (omogenee ed eterogenee), quindi della scelta di quali e quante temperature (che determina i salti di temperatura ΔT), e del numero di iterazioni fissate *its* per ognuna di esse, ossia il numero di cambiamenti random ammessi dall'algoritmo di Metropolis ad ogni step.

Si è notato che con raffreddamento lento, in termini di poche temperature, ma con *its* elevato ($\geq 1 \times 10^6$) si ottengono delle strutture di drenaggio "*quasi-ground state*" le quali sembrano corrispondere globalmente ad uno stato di minimo locale dell'energia dissipata, e presumibilmente ad uno stato di minimo globale per quasi ogni ramo della rete nel bacino, quindi a livello locale.

Con raffreddamento lento, ossia molte T e ΔT sufficientemente ridotti, e *its* elevato si ottengono le canoniche strutture di base corrispondenti al minimo globale dell'energia dissipata.

Viceversa quindi, risulta difficile ottenere delle OCNs "normali" (intese con gli esponenti ottimi) con molte temperature per l'algoritmo di Metropolis e *itstropo* ridotto (in tal caso la rete che si ottiene è ancora abbastanza random), oppure con *its* elevato e poche temperature (si ricade nel caso delle gsOCNs "imperfette" di cui prima si è parlato).

In definitiva sembra che la funzione del numero di iterazioni per ogni T (*its*) sia quella di far esplorare alle reti i cambiamenti possibili con casualità, cercando quindi quelli ottimi in maniera miope, e la funzione del numero di temperature e delle ΔT sia quella di intrappolare nel bacino le strutture dendritiche di drenaggio tipiche delle OCNs.

In sostanza non si consente la completa ricerca dell'ottimalità per ogni possibile stato definito da *itse* N_T (numero di temperature), proprio perchè le reti fluviali reali non sperimentano tutte le ipotetiche configurazioni, ad esempio per la presenza di vincoli e/o per le stesse forme di eterogeneità presenti (es. di precipitazione e geologiche).

Inoltre in generale si è visto che è bene adottare ΔT relativamente elevati per ottenere buone configurazioni ottime, sia omogenee sia eterogenee.

5.3.1 Dissipazione di energia nel Simulated Annealing delle reti eterogenee.

Nell'obiettivo di chiarire ulteriormente l'importanza della scelta dello *schedule* di temperature, quindi determinare la velocità del Simulated Annealing e i salti di temperatura, e l'importanza del numero di cambiamenti random concessi, si sono fatte parecchie simulazioni analizzando le reti ottenute, omogenee e non, variando tali parametri.

La velocità del raffreddamento viene determinata dal numero di temperature fissate N_T e dal numero di iterazioni *its* (cambiamenti random delle direzioni di drenaggio) concesse ad ogni temperatura.

I cambiamenti casuali sono stati assunti costanti per ogni T del *Simulated Annealing*, tipicamente *its* = 1×10^5 è un buon valore per ricavare delle OCNs, ad eccezione del caso di simulazioni con bacini reali per i quali si è svolto l'*hot bath* con un numero di iterazioni maggiori, es. *its* = 1×10^6 , ad alte T per "annullare" l'effetto delle condizioni iniziali.

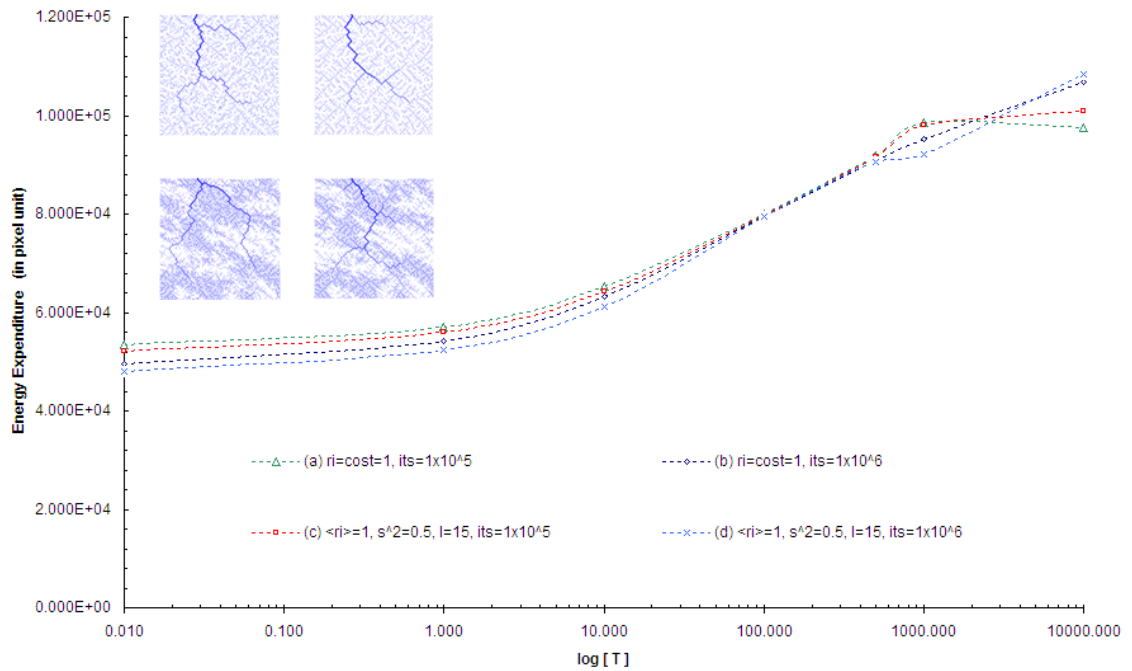


Figura 5.12: confronto tra la dissipazione di energia E_E di una OCN omogenea e della corrispondente OCN eterogenea per $I = 15$, $\langle r_i \rangle = 1$, $\sigma^2 = 0.5$; E_E della OCN eterogenea è sempre minore poichè il flusso cumulato risulta minore. Si nota anche che per $its = 1 \times 10^6$, in generale per I crescente, la E_E è minore.

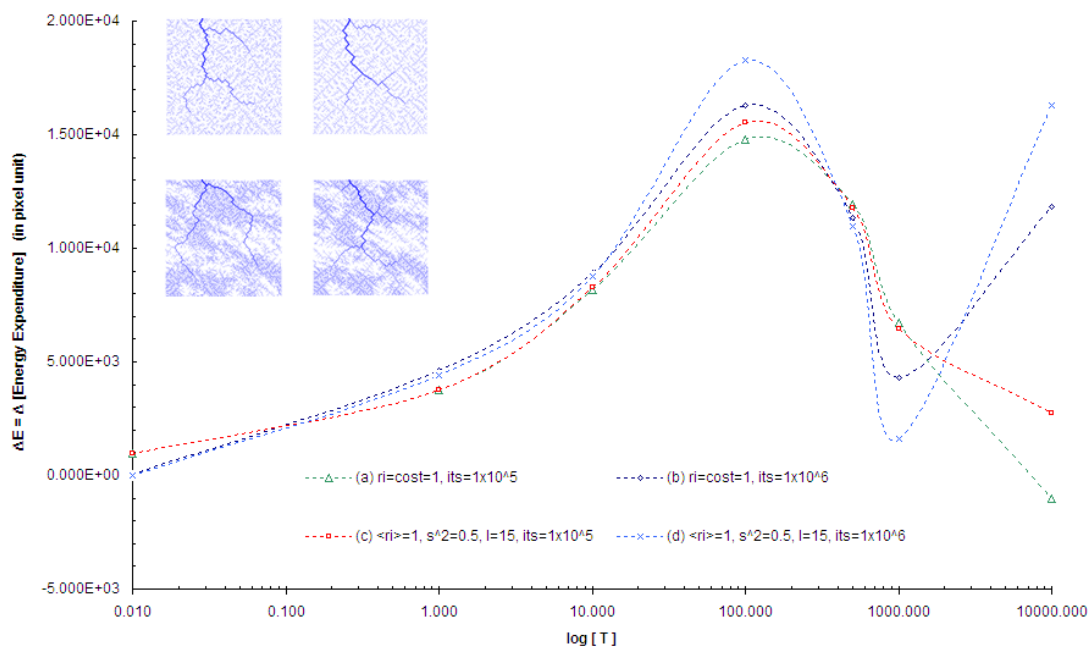


Figura 5.13: Variazione di E_E definita come $\Delta E_E(T_i) = |E_E(T_i) - E_E(T_{i-1})|$ e relativa alla Figura 5.12, la quale è maggiore ad elevate T per Simulated Annealing con its elevato, e maggiore a basse T con its minore; si nota inoltre come E_E è maggiore per le reti eterogenee. Tale andamento è anche utile per la scelta opportuna delle temperature, generalmente non è necessario andare oltre $10T_{max}$, con T_{max} la temperatura alla quale si ha $\Delta E_{E_{max}}$.

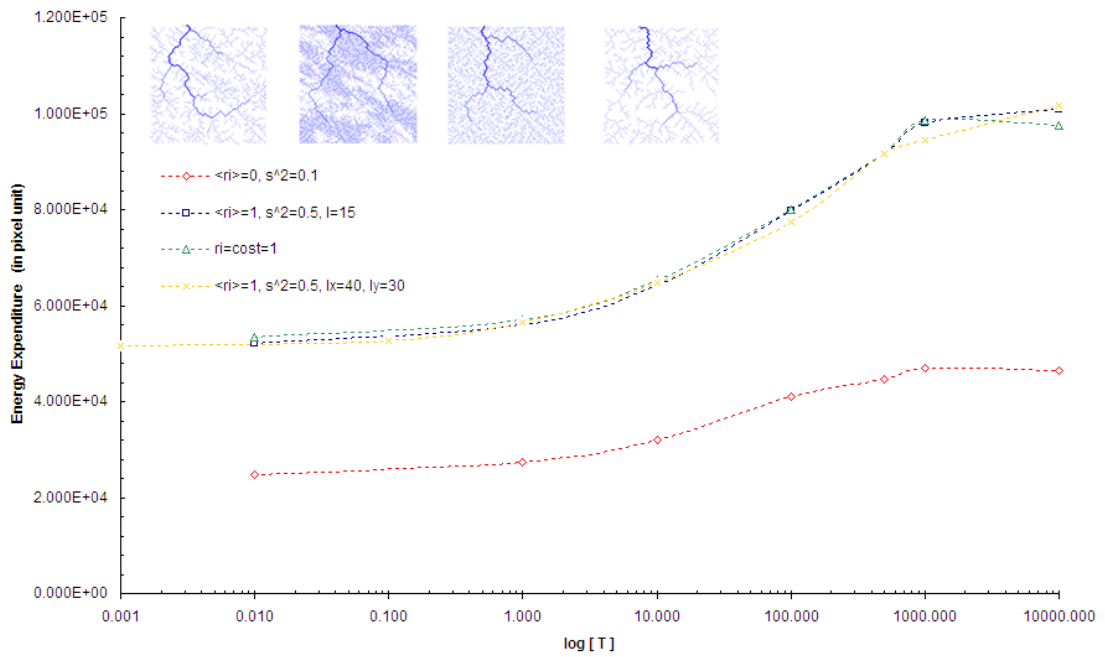


Figura 5.14: confronto della dissipazione di energia nel Simulated Annealing per varie OCN ottenute con diversi campi di pioggia; E_E è sensibilmente minore per ogni T_i nel caso di OCN formata con campo avente $\langle r_i \rangle = 0.00$, e $\sigma^2 = 0.5$, il quale corrisponde al caso "siccità" per $I/L \rightarrow 1$.

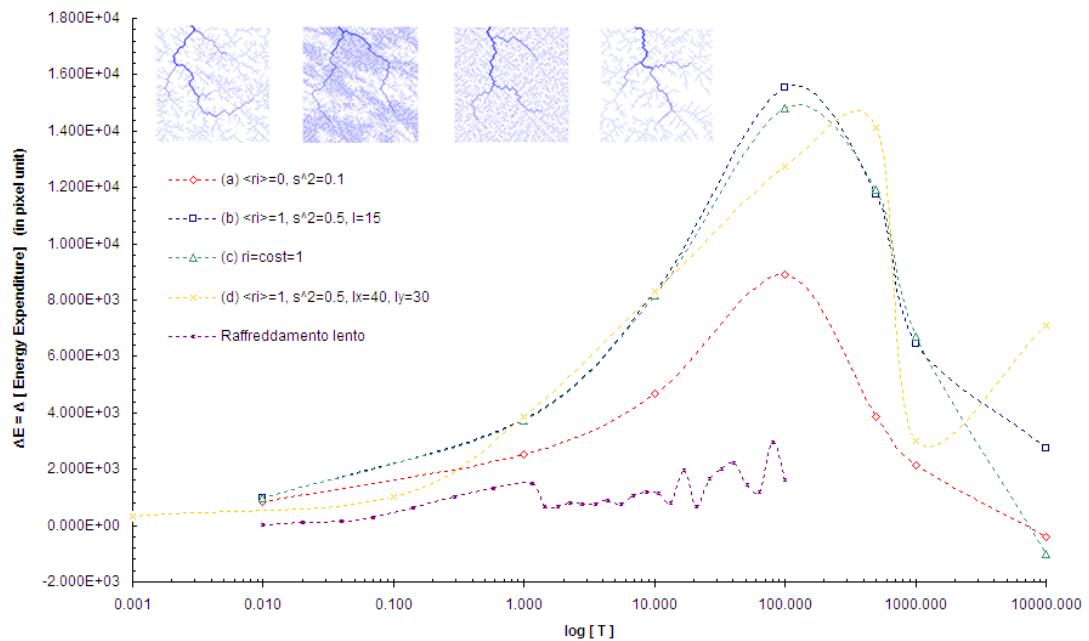


Figura 5.15: Variazione di E_E relativa alle simulazioni di Figura 5.14, si nota come per il caso di Simulated Annealing con campo di pioggia a $\langle r_i \rangle = 0.00$, e $\sigma^2 = 0.5$, E_E risulta minore per ogni T_T ; si pone in evidenza anche un raffreddamento lento, meglio raffigurato nel grafico successivo di Figura 5.16, ottenuto scegliendo non in maniera casuale le temperature.

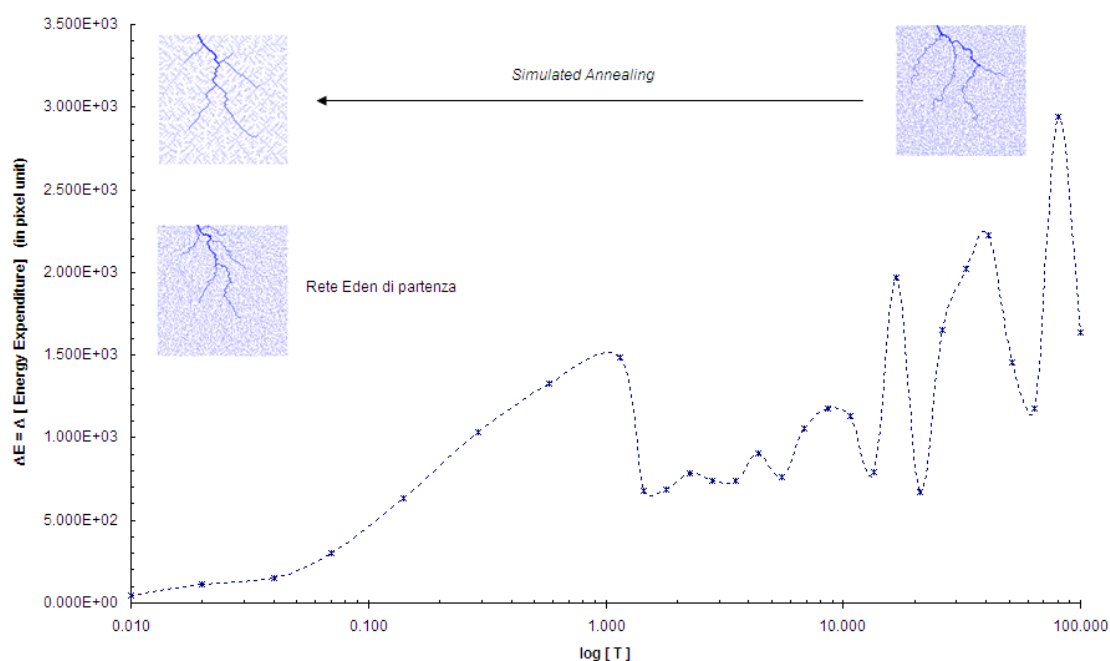


Figura 5.16: $\Delta E_E(T_i)$ in funzione di T_i per una OCN uniforme; le temperature da $T = 100$ a $T = 1.0$ sono state scelte in modo da risultare $T_i = 0.8T_{i-1}$, poi fino a $T = 0.00$ si è imposto $T_i = 0.5T_{i-1}$ per accelerare il raffreddamento. Si nota che oltre $T = T^* = 1.00$ la dissipazione di energia ha un'andamento oscillante pertanto, come già ricordato, è ragionevole partire per il Simulated Annealing dalla temperatura $T^* \geq T(\Delta E_{E_{max}})$ ma minore di $10T(\Delta E_{E_{max}})$.

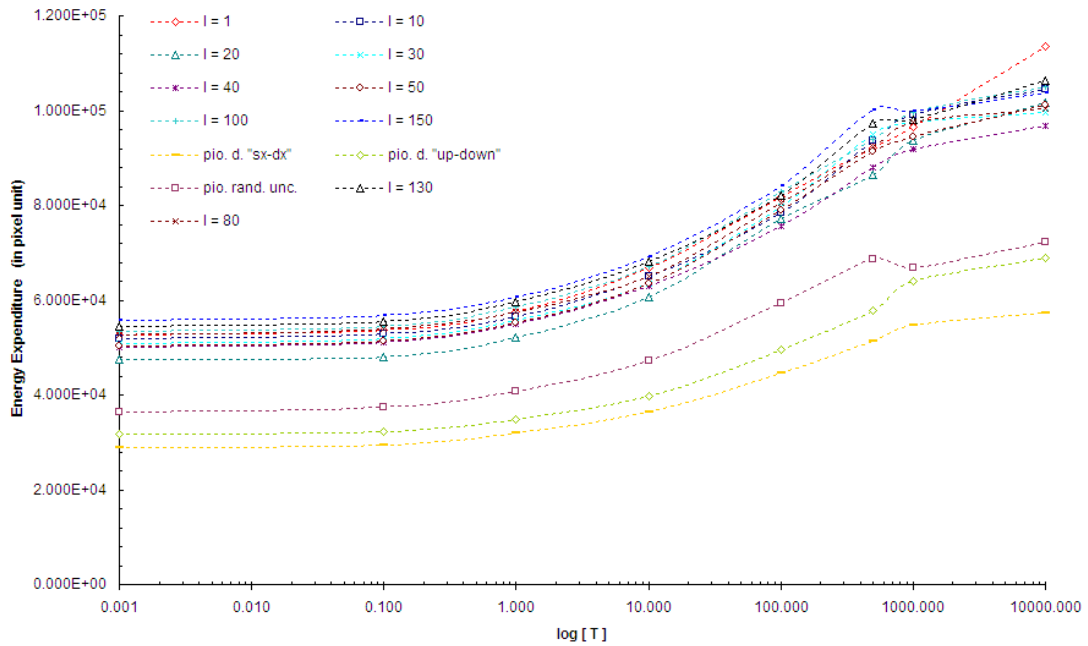


Figura 5.17: Andamento di E_E in funzione di T , valutata per i Simulated Annealing delle reti con campi di pioggia a differenti valori della scala di correlazione I ; E_E risulta sensibilmente minore, per ogni T_i , per le reti con campo di pioggia casuale scorrelata, e con i campi deterministici.

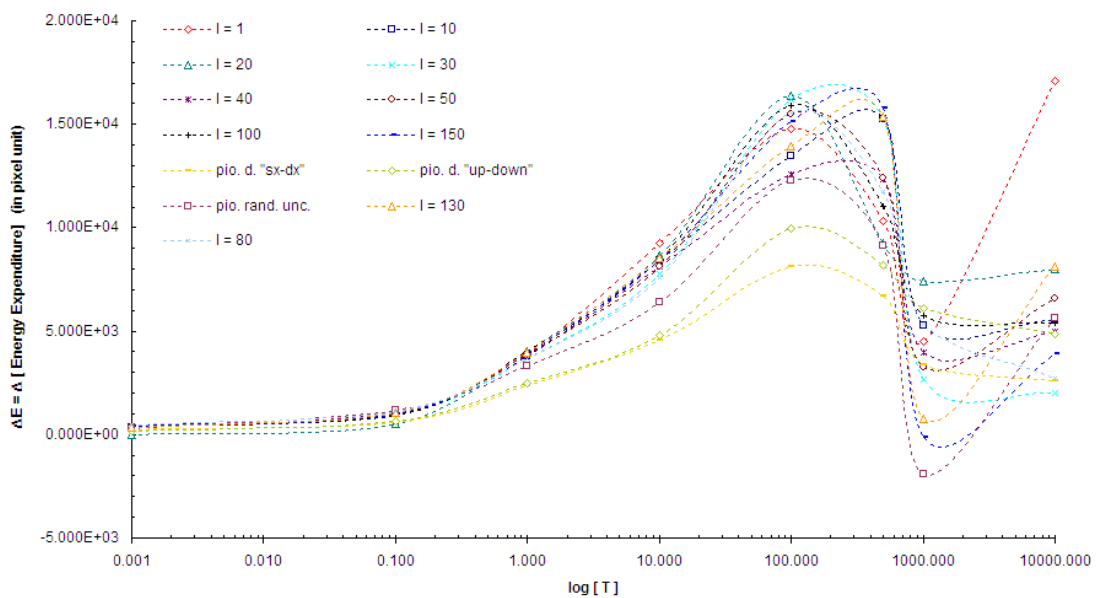


Figura 5.18: Variazione di E_E relativa alle simulazioni di Figura 5.17; l'andamento

è comune per ogni valore di I del campo di pioggia applicato alle reti a cui ogni processo di Simulated Annealing si riferisce.

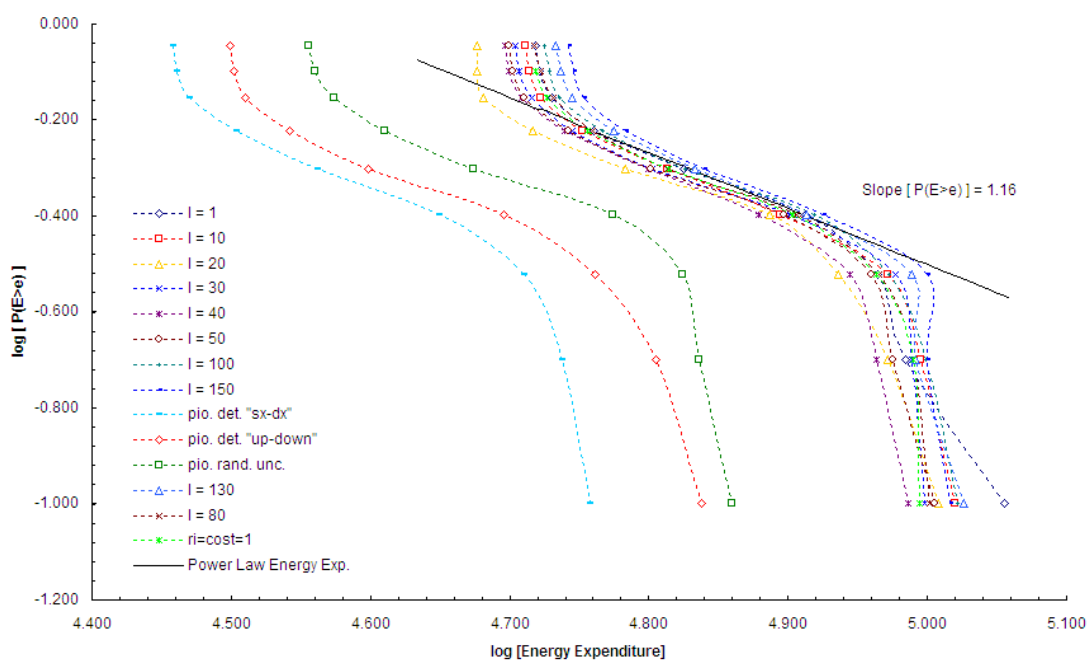


Figura 5.19: scaling dell'energia dissipata E_E per reti formate con campi ad I differente, l'esponente 1.16 risulta leggermente superiore a quello mediamente riscontrato nelle simulazioni su bacini reali [Rodriguez-Iturbe e Rinaldo, 1997] pari a ~ 0.95 ; l'interpolazione è stata però condotta su un ridotto numero di dati, per aumentare l'accuratezza bisognerebbe aumentare il numero di T , quindi il numero di E , nel Simulated Annealing.

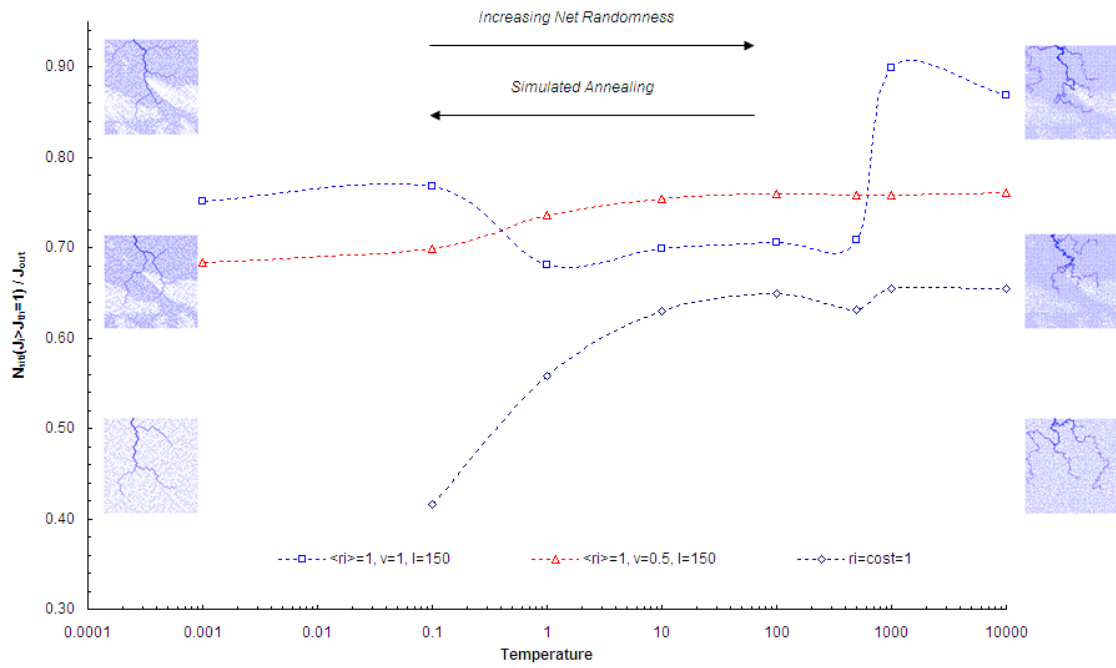


Figura 5.20: andamento del rapporto $\frac{N_{siti}(J_i > J_{th} = 1)}{J_{out}}$ durante il Simulated Annealing; non si nota per le reti eterogenee un forte decadimento per $T \rightarrow 0$, come quello che si verifica per le reti omogenee per le quali $J_{out} = A_{out} = L \times L = cost \forall T$ (quindi per esse la densità di drenaggio media decresce sensibilmente nel processo di ottimizzazione) e $J_i \equiv A_i$.

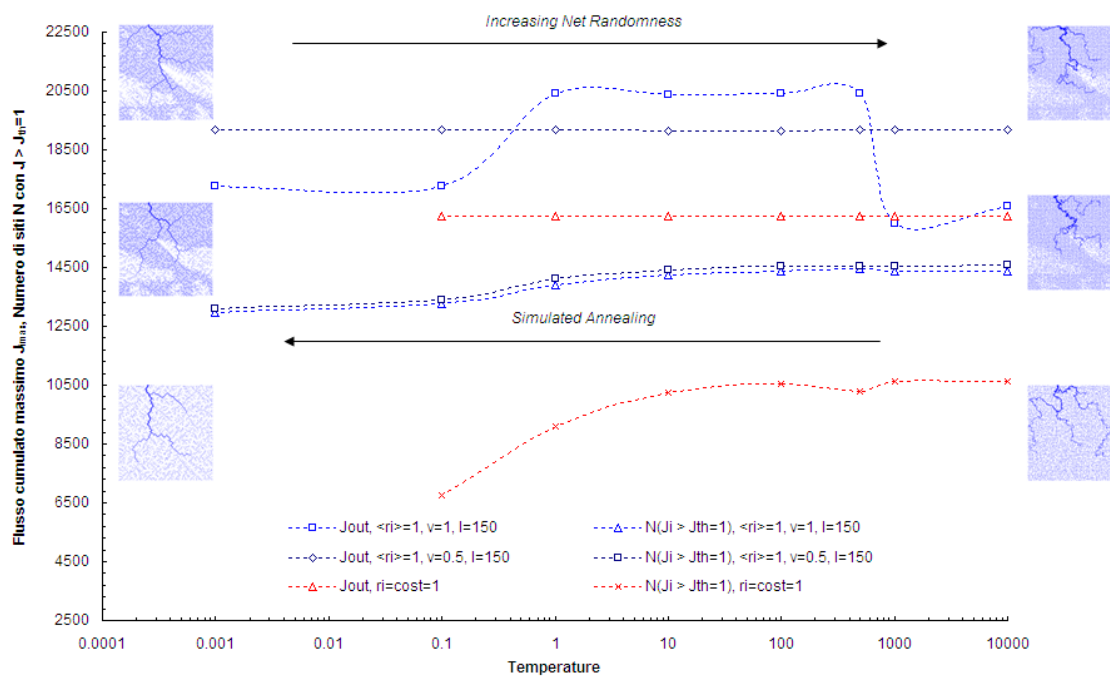


Figura 5.21: $J_{max} = J_{out}$ e $N_{siti}(J_i > J_{th} = 1)$ relativi alle stesse reti del grafico di Figura 5.20 precedente.

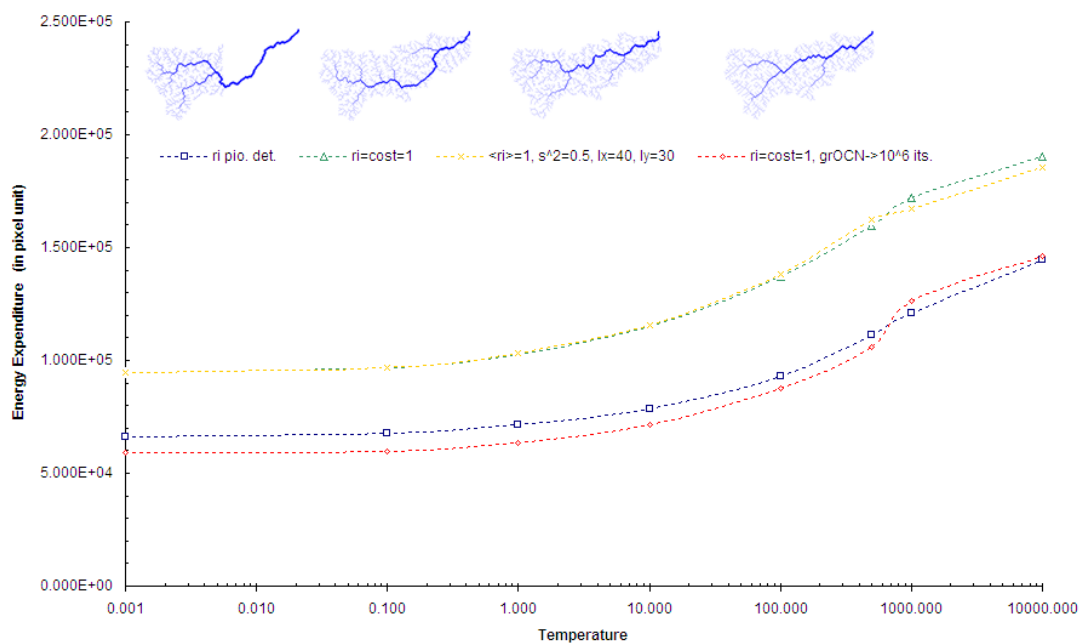


Figura 5.22: andamento di E_E nel Simulated Annealing di varie reti, con differenti

campi di pioggia, simulate nel bacino reale del Tanaro; si nota come la *gsOCN* abbia $E_E(T)$ minore poichè ottenuta con $its = 1 \times 10^6$ per ogni T , e la ridotta $E_E(T)$, della OCN con campo deterministico di pioggia, dovuta al basso valore di J_i rispetto ad A_i della corrispondente rete omogenea.

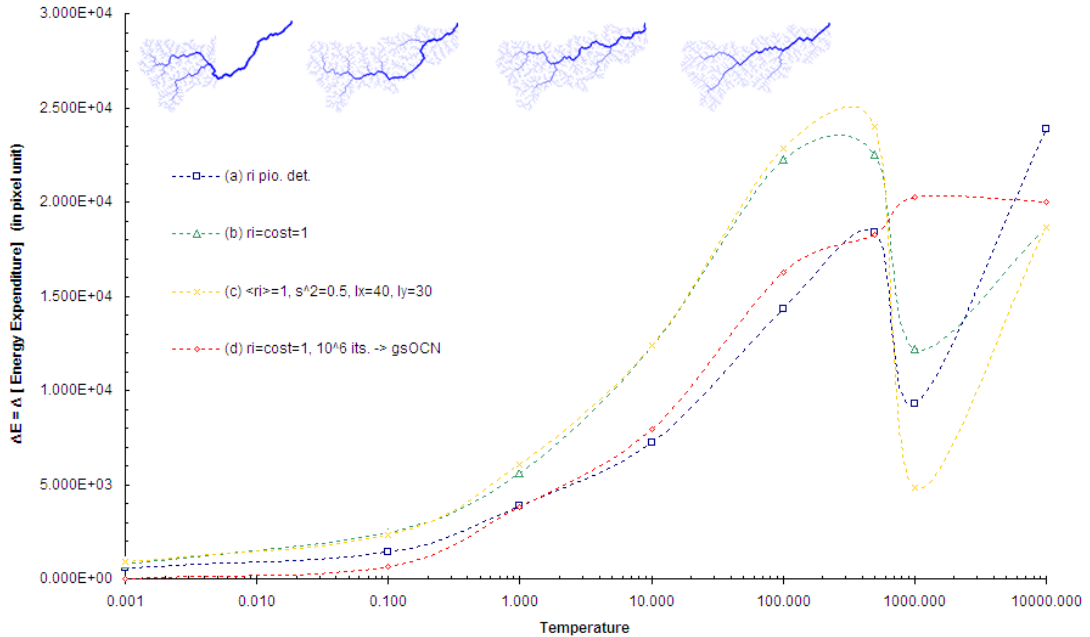


Figura 5.23: $\Delta E_E(T_i)$ in funzione di T_i per le medesime simulazioni relative al grafico di Figura 5.22 precedente.

5.3.2 Entropia nel Simulated Annealing delle reti eterogenee.

In merito all'entropia, così come per l'energia dissipata, si è verificato che le reti eterogenee esibiscono lo stesso comportamento delle reti omogenee, durante il Simulated Annealing che porta all'ottenimento delle rispettive OCNs.

La temperatura T^* , per $T \rightarrow 0$, alla quale la dissipazione di energia diventa sostanzialmente costante, è la stessa della temperatura alla quale l'entropia da costante diminuisce rapidamente portandosi a valori molto ridotti; si ricorda che sia la dissipazione di energia $E_E(T_i)$ sia l'entropia $S(T_i)$, sono espresse in unità di pixel.

La temperatura risulta nelle simulazioni effettuate, ma anche più in generale, nel campo

$$0.1 \leq T^* \leq 1.0. \quad (5.7)$$

L'entropia alla Shannon, o *informational entropy*, è stata calcolata come,

$$S(T) = - \sum_{i=1}^{N_{as}(T)} P_i \log P_i \quad (5.8)$$

dove P_i è la probabilità cumulata di superamento di avere un certo numero di siti attivi N_{as} , quindi come ogni probabilità è $0 < P_i < 1$, pertanto il logaritmo risulta negativo e per tale ragione è necessario il segno meno davanti all'espressione che determina l'entropia.

Il numero di siti attivi ad ogni temperatura $N_{as}(T)$ è stato calcolato come numero di pixel che cambiano valore di area cumulata da una temperatura all'altra nel Simulated Annealing, o equivalentemente quelli con variazione nel valore che identifica la direzione di drenaggio secondo il metodo delle otto direzioni utilizzato.

In pratica $N_{as}(T_i)$ è stato determinato eseguendo la differenza tra le matrici delle aree/flussi cumulati allo step di T_i e a quello di T_{i-1} ; è preferibile eseguire tale differenza tra le matrici delle direzioni di drenaggio identificate con numeri interi, tuttavia sono state utilizzate le matrici delle aree/flussi cumulati poichè si sono volute anche evidenziare le variazioni positive e negative di tali grandezze ad ogni step.

Quindi vengono conteggiati i pixel che allo step relativo a T_i hanno cambiato configurazione dallo step relativo alla temperatura precedente.

Nella rappresentazione sottostante si vede come l'entropia finale sia maggiore per la OCN eterogenea formata con campo random a $\sigma^2 = 1.0$, rispetto quella formata con campo a $\sigma^2 = 0.5$ e quella omogenea.

L'entropia $S(T)$ del modello ad iniezione $r_i = cost = 1$ è sempre minore dell'entropia delle reti eterogenee.

Sono stati eseguiti dei densityplot, alcuni, nei quali è visualizzabile la variazione del flusso cumulato in scala di grigi, i pixel più chiari sono quelli la cui

variazione è positiva, quelli più scuri la cui variazione è negativa, quelli grigi con variazione nulla.

E' interessante notare come la distribuzione dei siti attivi nel bacino sia molto simile a quella dei flussi cumulati, completamente casuale ad alte T (*hotOCNs*), frattale a basse T (*OCNs*). Non si è però riusciti a ricavare un'esponente di scala per l'entropia in quanto i valori per la quale viene calcolata sono troppo ridotti in numero, quindi risulta impossibile determinare una legge a potenza per essa.

E' ipotizzabile poter descrivere la variazione dei siti attivi in funzione della temperatura, quindi analizzare l'attività delle reti nel processo di Simulated Annealing che porta all'ottimizzazione, tramite un *modello a percolazione* [Stanley, 1971].

In analogia ad un modello a reticolo di gas di un sistema fluido, si vede infatti come la distanza di correlazione ξ tra i siti che cambiano flusso cumulato aumenta al tendere della temperatura a $T = 0.00$, la quale identifica lo stato di *ordine massimo a larga scala* con $\xi = \xi_{max_{ls}}$.

Viceversa lo stato di *ordine massimo a piccola scala* con $\xi = \xi_{max_{ss}}$ e per la temperatura critica $T = T_c$, sembra rappresentato dalla *hotOCN*, la quale presenta delle "isole" di siti attivi il cui diametro medio è mediamente $\xi_{max_{ss}}$.

Altri densityplot invece mostrano esclusivamente i siti attivi e quelli non attivi, si riportano ora le più significative rappresentazioni delle simulazioni di reti effettuate.

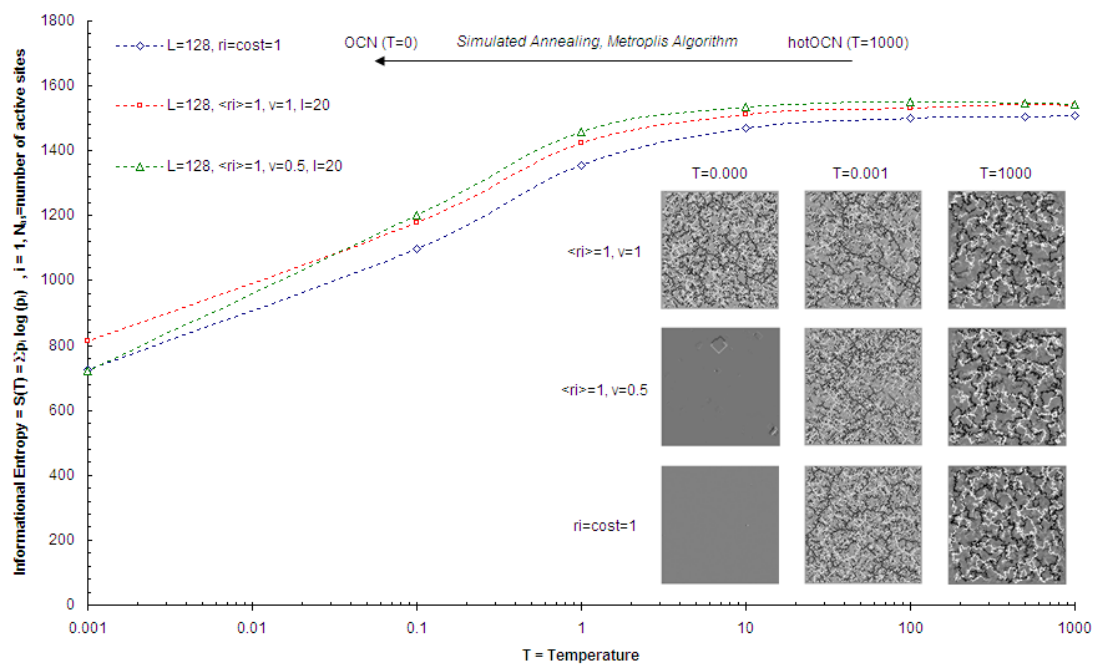


Figura 5.24: $S(T)$ durante il Simulated Annealing; l'entropia maggiore per basse T è per le reti formate con campi di pioggia a varianza maggiore, le quali presentano OCNs ancora con segni di "attività" in termini di cambiamenti di flusso cumulato, le altre sono quasi "congelate" ossia i cambiamenti sono ridotti, a pochi pixel ed in valore assoluto. Sono stati riportati i densityplot per alcune T significative, raffiguranti in bianco le variazioni positive di J_i , in nero quelle negative, in grigio le nulle (corrispondenti ai siti non attivi).

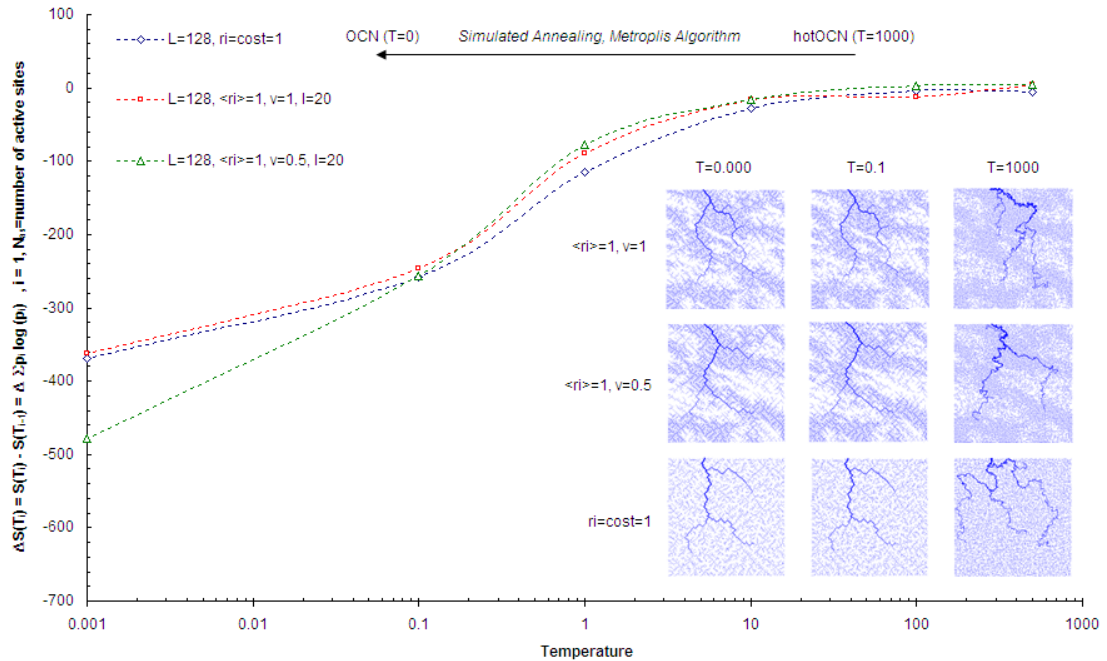


Figura 5.25: Variazione di $S(T)$ definita come $\Delta S(T_i) = |S(T_i) - S(T_{i-1})|$ e relativa alle reti di Figura 5.24, la quale presenta un andamento piuttosto simile per tutti e tre i casi analizzati, ad eccezione di una più ripida diminuzione, per $T \rightarrow 0$, per le reti con $\sigma^2 = 0.5$.

Si notino le reti proposte, in Figura 5.25, per i tre casi alle medesime temperature, quelle formate con campi a $\sigma^2 = 1.0$ hanno comportamento "opposto" rispetto quelle formate con campi a $\sigma^2 = 0.5$ e quelle uniformi; per le prime dove si ha una bioforcazione dei canali nelle seconde non si manifesta (vedi le OCNs), e viceversa (vedi le hotOCNs).

Si è osservato anche un certo comportamento comune, nello specifico sembra che quando la hotOCN presenta biforcazioni multiple la corrispondente OCN da essa derivante presenta un andamento del mainstream abbastanza rettilineo e unitario, e viceversa.

Certo queste considerazioni sono solamente ipotesi, dato che non ci si è spinti molto in tali questioni riguardo la forma assunta dalle reti di drenaggio ad ogni T , pertanto sono tutte cose da verificare con più attenzione.

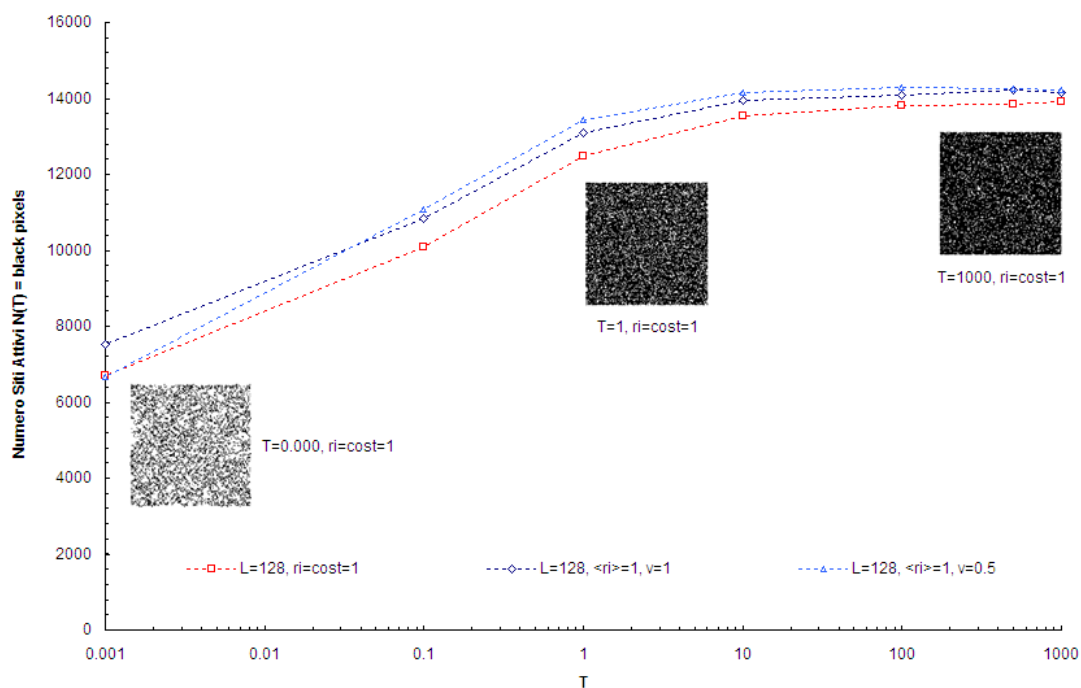


Figura 5.26: numero di siti attivi $N_{as}(T)$ che rispecchia l'andamento dell'entropia $S(T)$, definita come in (5.8), per tutti e tre i casi proposti; i densityplot raffigurano in nero i pixel attivi, si noti che per $T = 0.00$, in realtà anche la rete omogenea non è completamente congelata nella sua configurazione (stato di minimo locale, ossia di "minimo globale imperfetto"), quindi accetterebbe ancora ulteriori cambiamenti, che se accuratamente prodotti, la porterebbero verso lo stato di minimo globale.

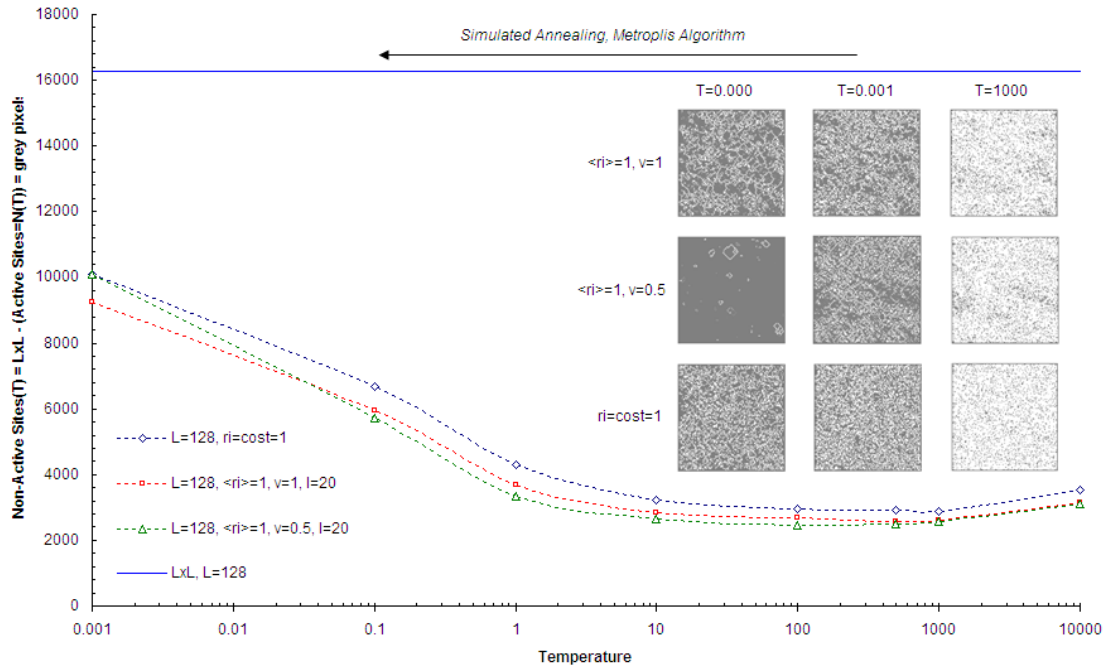


Figura 5.27: l'andamento dei siti non attivi $N_{nas}(T) = L \times L - N_{as}(T)$ è speculare rispetto quello dei siti attivi, quindi dell'entropia; i pixel grigi sono i siti non attivi, quelli bianchi sono attivi. La $OCN(T = 0.00, r_i = cost = 1)$ in realtà non è costituita completamente da siti non attivi, però anche da quanto si evince dal relativo densityplot di Figura 5.24, mediamente le variazioni dei flussi sono zero in tutto il reticolo $L \times L$; considerando la $OCN(T = 0.00, \sigma^2 = 1.0)$ i siti non attivi sono maggiori rispetto quelli della rete uniforme, ma presentano forti variazioni nei flussi, mediamenti non nulli.

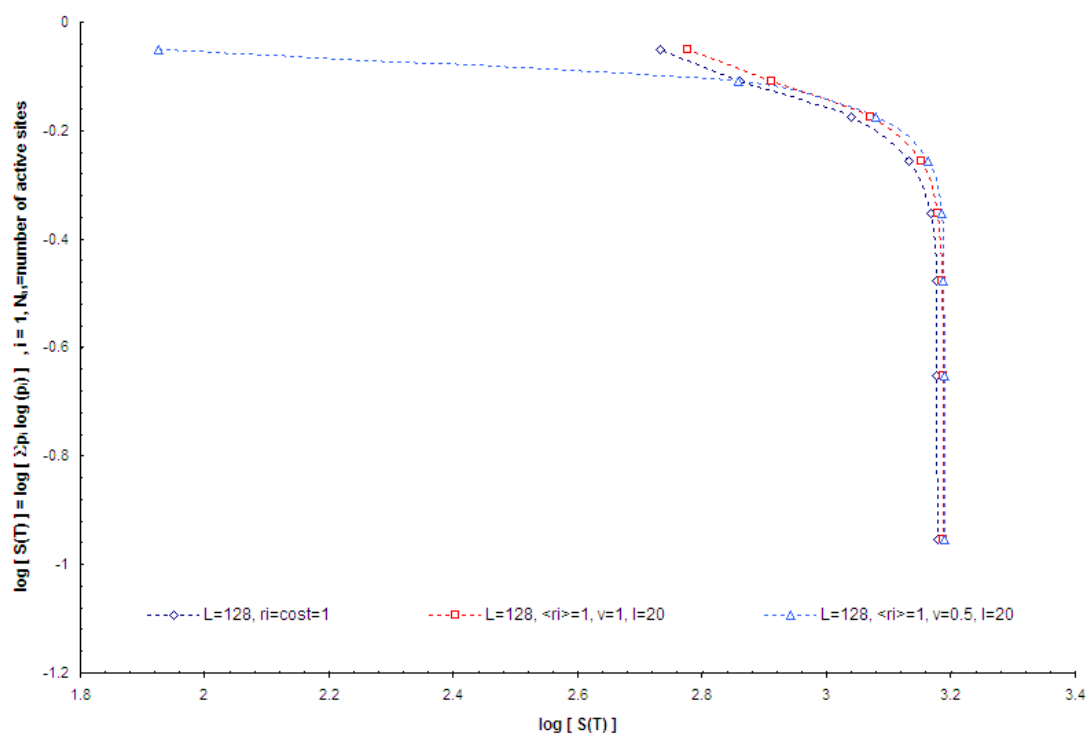


Figura 5.28: tentativo di scaling dell'entropia $S(T)$; il numero di punti sui quali effettuare l'approssimazione lineare e ricavare l'eventuale esponente della legge a potenza è troppo ridotto.

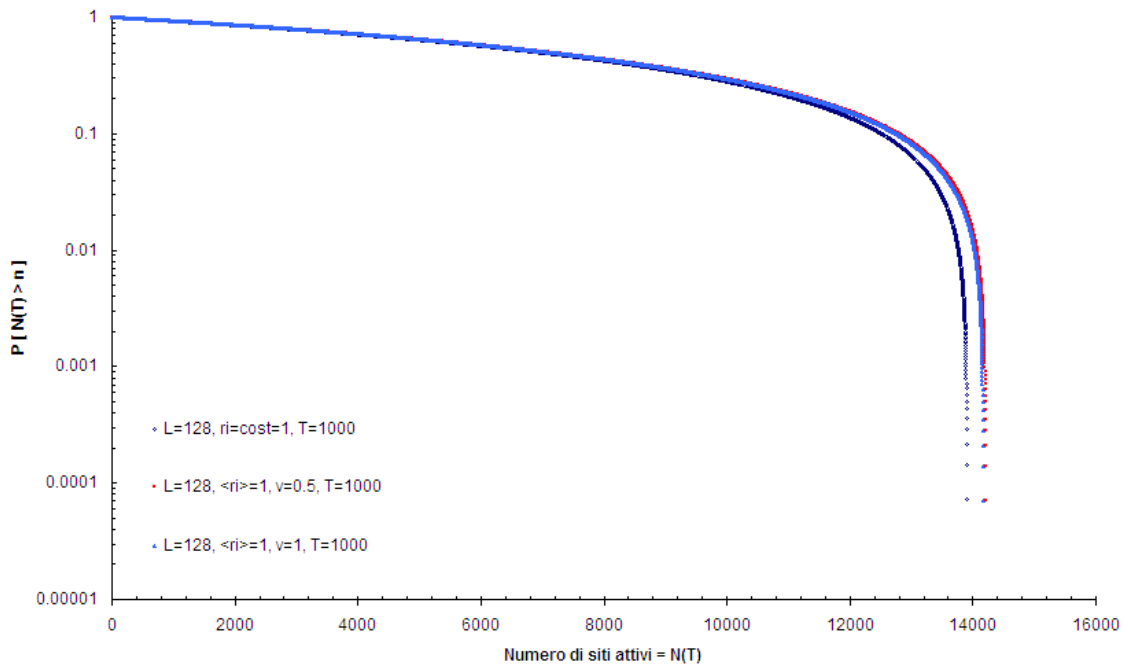


Figura 5.29: rappresentazione della probabilità di avere un certo numero di siti attivi $P[N_{as} > n_{as}]$ in funzione di $N_{as}(T)$; si è preferito riportare semplicemente $N_{as}(T)$ nella scala delle ascisse, anzichè eseguire il *logarithmic binning* ed adottare una duplice spaziatura alternata Δx dei *bin* come in [Rodriguez-Iturbe e Rinaldo, 1997].

In merito alla termodinamica delle OCNs sono state eseguite importanti analisi, le cui conclusioni valgono sia per il modello di rete omogenea, sia per quello di rete eterogenea.

Si sono visualizzate le distribuzioni dei siti attivi, e chiarita l'importanza relativa del numero di cambiamenti *its* imposti ad ogni step del Simulated Annealing, e la scelta del numero e dei salti di temperatura.

E' evidente che per confermare le ipotesi fatte serve una sistematizzazione dei risultati soprattutto attraverso numerose simulazioni a grande scala.

Geomorfologia delle OCNs eterogenee.

6.1 Sommario.

Le analisi geomorfologiche condotte sulle OCNs eterogenee sono state mirate principalmente allo studio della densità di drenaggio e della funzione di ampiezza, comparandole con le corrispondenti reti omogenee.

E' stata dapprima studiata la variazione della densità di drenaggio media del bacino, indicata con \overline{D}_d , con la scala di correlazione I dei campi di precipitazione generati, poi in funzione della soglia sul flusso cumulato J_{th} .

E' stata anche considerata la variazione del flusso cumulato minimo J_{min} in funzione di I e J_{th} .

Sono state poi eseguite alcune rappresentazioni per evidenziare ulteriori possibili analisi da effettuare, e anche per mettere in evidenza le potenzialità dei programmi utilizzati (es. per la visualizzazione di dati GIS utili in applicazioni di *Earth Observation*), che però esulano dall'obiettivo primario di questa tesi.

6.2 Analisi in funzione della scala di correlazione adimensionalizzata I/L .

La densità di drenaggio media del bacino \overline{D}_d , definita come in (4.6), è stata valutata per i campi random generati con $\sigma^2 = 0.5$, e $\sigma^2 = 1.0$, al variare della scala di correlazione I per alcuni valori di soglia sul flusso cumulato crescenti.

E' evidente che il flusso massimo J_{max} rimane costante per ogni valore J_{th} assunto, a parità di I , $\langle r_i \rangle$, e σ^2 del campo di precipitazione, a patto che si a evidentemente $J_{th} < J_{max}$ altrimenti nel bacino non vi sono canali.

Si è visto che sia per il caso con $\sigma^2 = 0.5$, sia per quello con $\sigma^2 = 1.0$, la densità di drenaggio media ha andamento crescente al crescere di I , tuttavia la crescita è sostanzialmente nulla, infatti interpolando i punti come risulta dai grafici sottostanti si ha un coefficiente angolare mediamente pari a zero.

Eseguendo lo scaling della densità di drenaggio, si ricava, per le reti ottenute con i campi di pioggia aventi entrambe le varianze imposte, per ogni I , un esponente medio di 0.42 , molto simile al valore ottimo dell'esponente τ nella legge a potenza delle aree cumulate. Si rimanda per le conclusioni analitiche al paragrafo 4.7.

In sintesi sembra che la densità di drenaggio media del bacino rimanga inalterata anche con forte eterogeneità nella precipitazione, la quale però localmente produce zone con strutture di drenaggio fortemente aggregate e zone con drenaggio chiaramente assente (vaste zone in stato canale).

Il pattern "a macchie di leopardo" delle reti ottime eterogenee simulate, porta però ad una evidente variazione nella funzione di ampiezza $W(x)$ rispetto quella della corrispondente OCN omogenea.

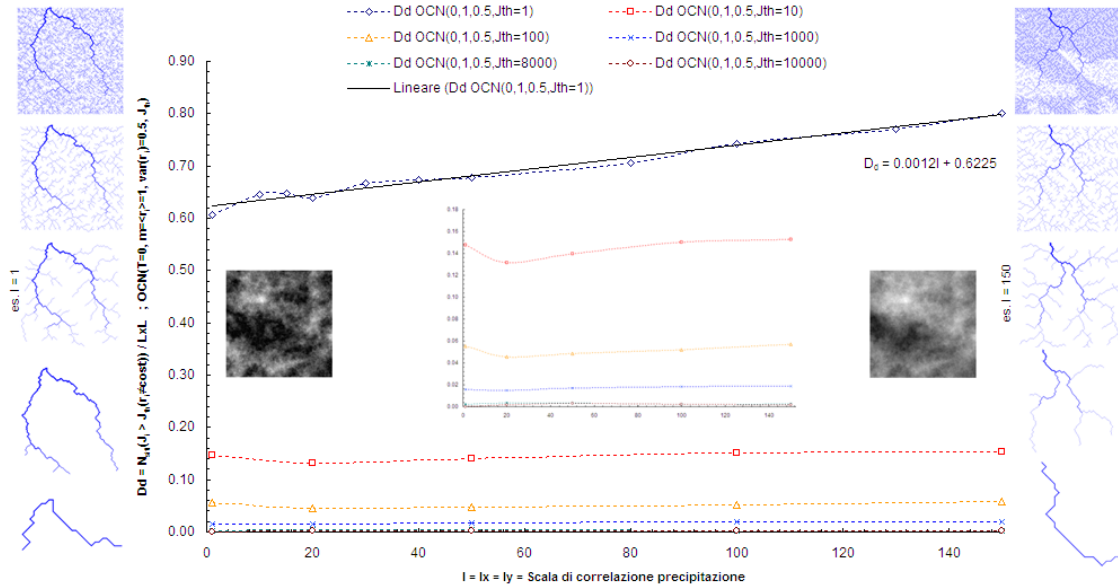


Figura 6.1: andamento della densità di drenaggio media $\overline{D_d}$, in funzione della scala di correlazione I del campo di precipitazione utilizzato per ottenere le OCN($\sigma^2 = 0.5$); $\overline{D_d}(I)$ è stata calcolata per alcuni valori di J_{th} , ottenendo un

anadamento monotono crescente per I crescente, ma la variazione è molto ridotta secondo un'esponente ~ 0.001 . Ai lati sono riportati due esempi di reti, la $OCN(T = 0.00, I = 1)$ e la $OCN(T = 0.00, I = 150)$ generate con campi di pioggia a $\sigma^2 = 0.5$, estratte per diversi valori di J_{th} . Si noti che $0.60 \leq \overline{D_d}[OCN(\sigma^2 = 0.5, J_{th} = 1, I)] \leq 0.85$ non è molto aderente alla realtà, pertanto per trovare valori di $\overline{D_d}$ compatibili con quelli dei bacini naturali, nelle OCNs eterogenee, bisogna adottare un valore di J_{th} maggiore di 1.

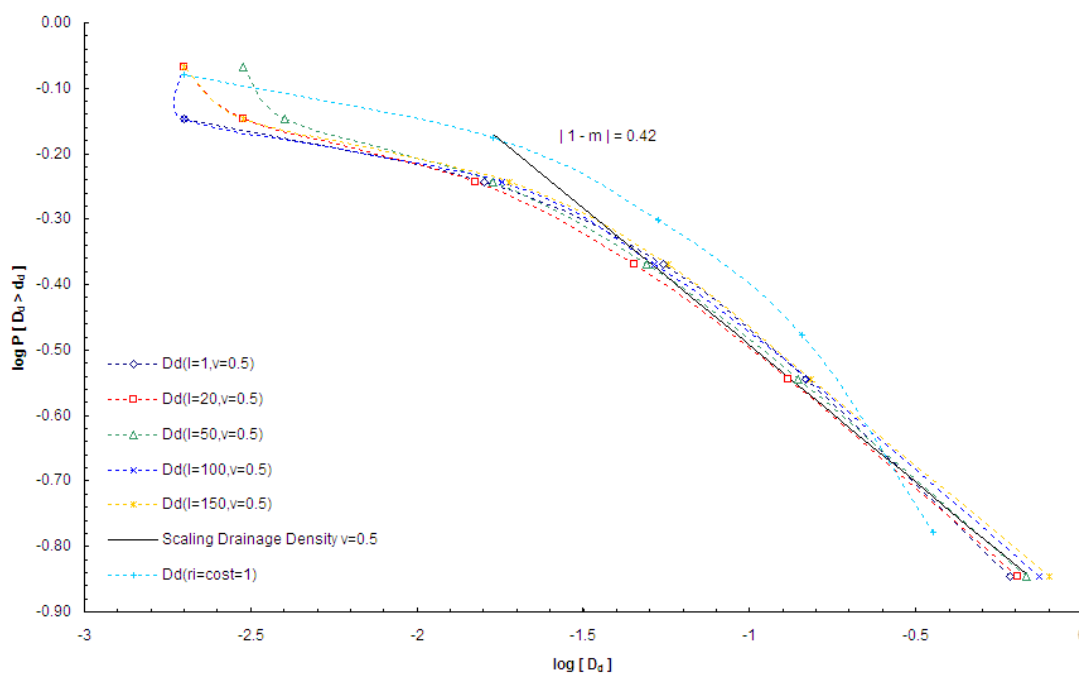


Figura 6.2: scaling della densità di drenaggio media, relativa alle simulazioni della Figura 6.1 precedente, l'esponente $m = 0.42$ rispecchia il valore di $\overline{D_d}$ delle reti sia omogenee sia eterogenee.

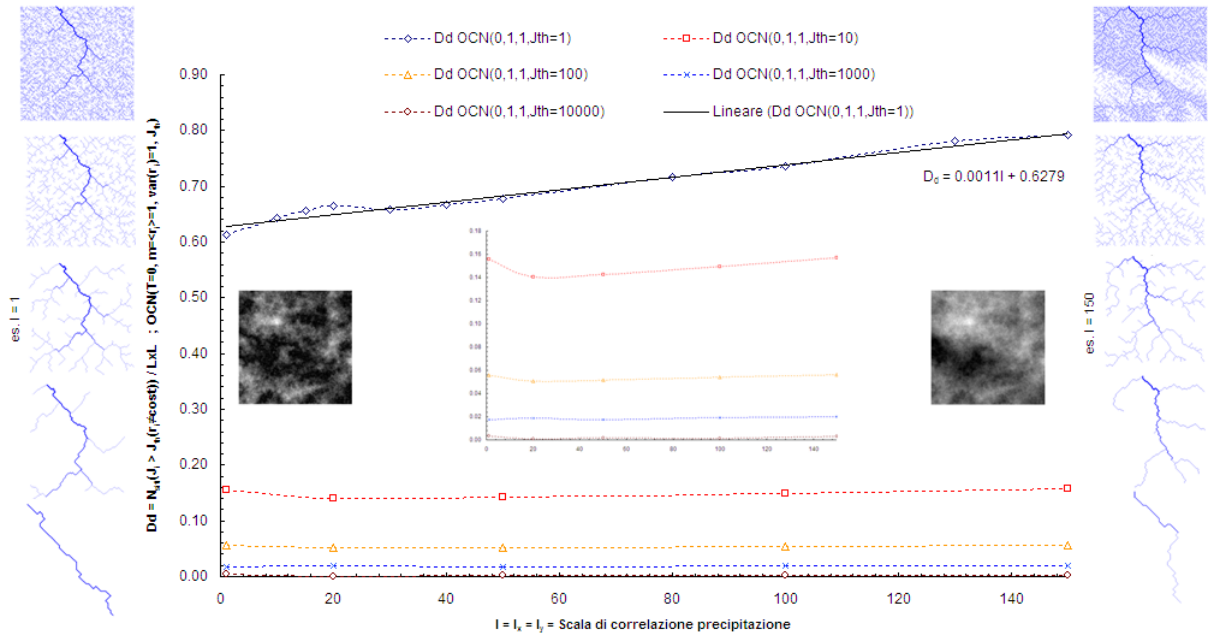


Figura 6.3: andamento della densità di drenaggio media $\overline{D_d}[OCN(\sigma^2 = 1.0)]$ in funzione della scala di correlazione I , e calcolata per diversi valori di J_{th} ; la crescita di $\overline{D_d}$ è molto ridotta secondo un'esponente ~ 0.001 . Ai lati sono riportati due esempi di reti, la $OCN(T = 0.00, I = 1)$ e la $OCN(T = 0.00, I = 150)$ generate con campi di pioggia a $\sigma^2 = 1.0$, estratte per diversi valori di J_{th} . Si noti che $0.60 \leq \overline{D_d}[OCN(\sigma^2 = 1.0, J_{th} = 1, I)] \leq 0.85$ non è molto aderente alla realtà, pertanto per trovare valori di $\overline{D_d}$ compatibili con quelli dei bacini naturali, nelle OCNs eterogenee, bisogna adottare un valore di J_{th} maggiore di 1.

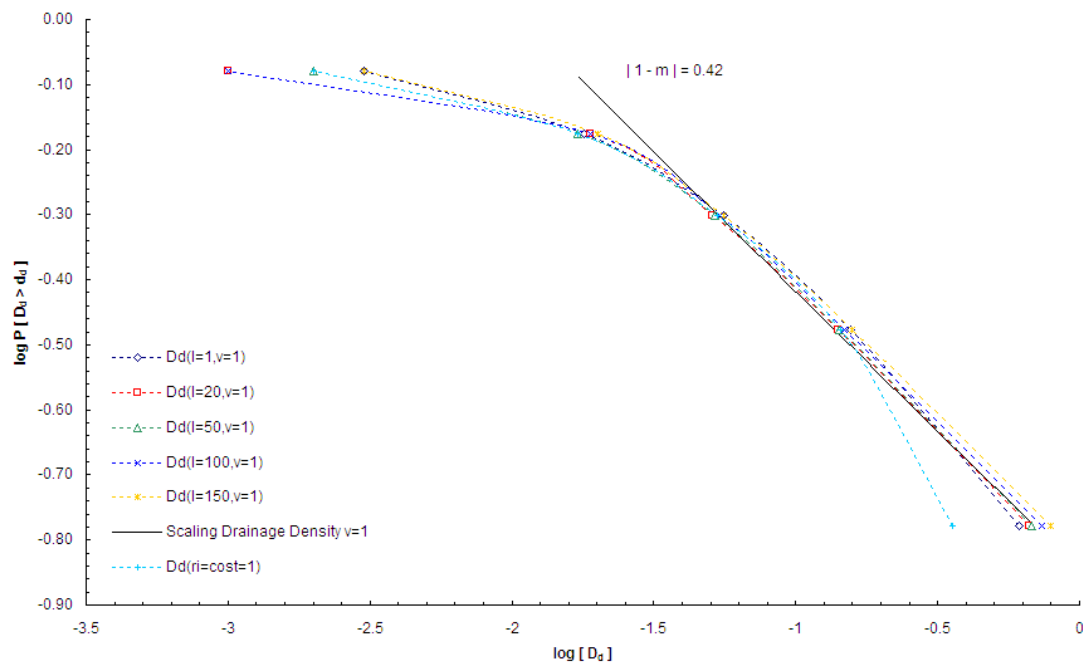


Figura 6.4: scaling della densità di drenaggio media, relativa alle simulazioni della Figura 6.3 precedente, l'esponente $m = 0.42$ rispecchia il valore di $\overline{D_d}$ delle reti sia omogenee sia eterogenee.

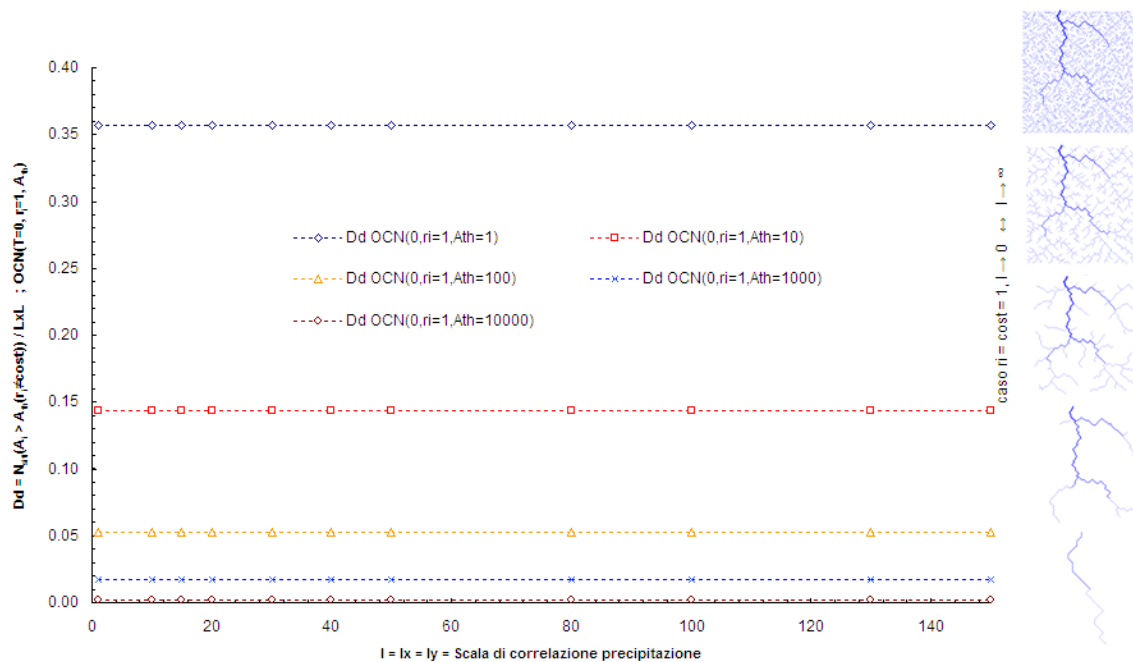


Figura 6.5: la densità di drenaggio media per le reti con $r_i = cost = 1$ (identificabili alle reti per $I \rightarrow 0$ e per $I \rightarrow \infty$ caso "alluvione", per quanto riguarda gli esponenti ed il pattern di drenaggio, non per il valore di $\overline{D_d}$) è evidentemente sempre costante; l'aver riportato quindi $\overline{D_d}$ in funzione di I è fuorviante. A lato è riportato l'esempio della $OCN(r_i = cost = 1)$ estratta per diversi valori di J_{th} . Si noti che $\overline{D_d}[OCN(r_i = cost = 1)] \simeq 0.35$ (aderente ai bacini reali) differisce di molto dal valore $0.60 \leq \overline{D_d}[OCN(\langle r_i \rangle = 1, \sigma^2, I)] \leq 0.85$, grandezze valuate entrambe per $J_{th} = 1$.

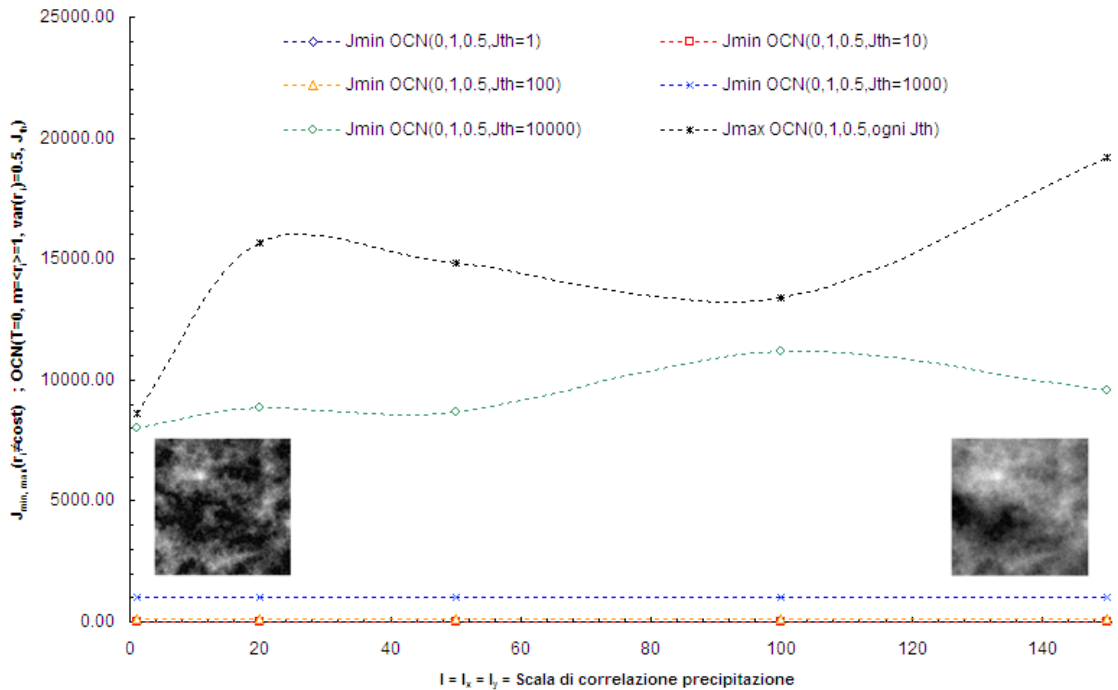


Figura 6.6: andamento di $J_{min}(I, \sigma^2 = 0.5)$ calcolato per diversi valori della soglia J_{th} ; è evidente che per $J_{th} \rightarrow L \times L$ il flusso minimo che si ha nella rete aumenta poichè si considerano canalizzati esclusivamente i pixel con $J_i > J_{th}$ (si vedano le relative reti riportate in Figura 6.1). Il flusso massimo J_{out} è indipendente dalla soglia, quindi è funzione solamente di I , a meno di non adottare $J_{th} > L \times L$ ma questo non ha senso fisico.

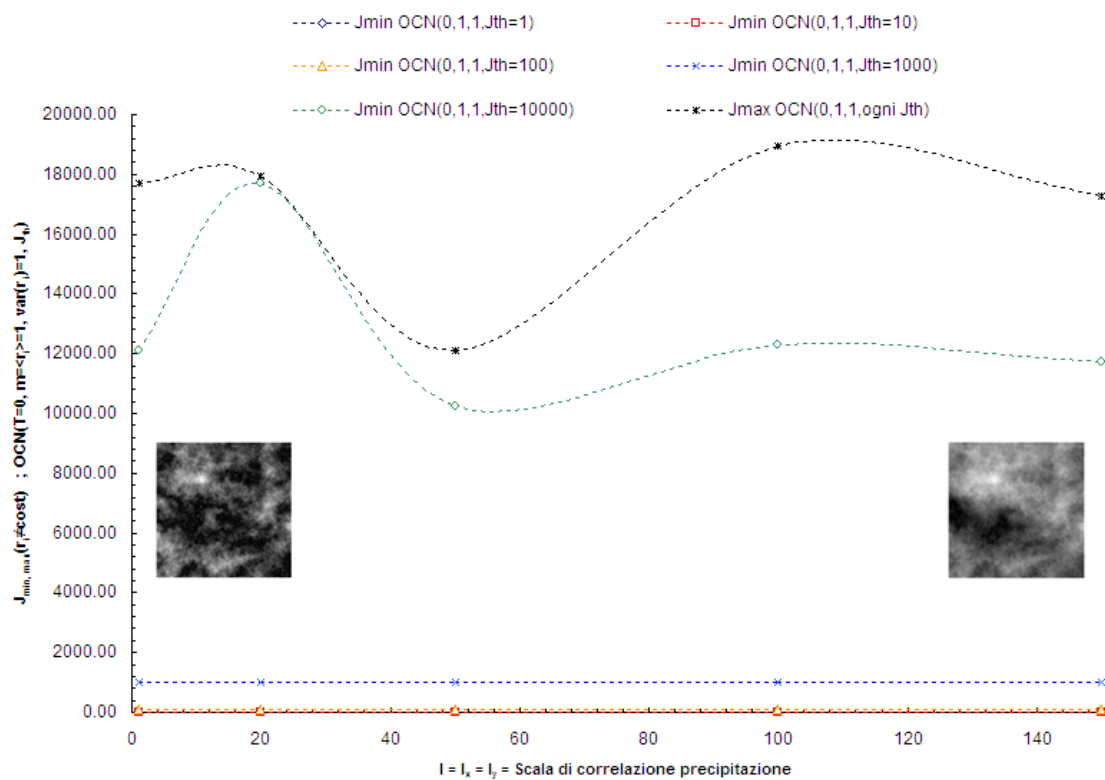


Figura 6.7: andamento di $J_{\min}(I, \sigma^2 = 1.0)$ calcolato per diversi valori della soglia J_{th} ; data la varianza maggiore dei campi random di precipitazione generati, risulta evidente il motivo per il quale risulta in generale

$$J_{\min}(\sigma^2 = 1.0) > J_{\min}(\sigma^2 = 0.5).$$

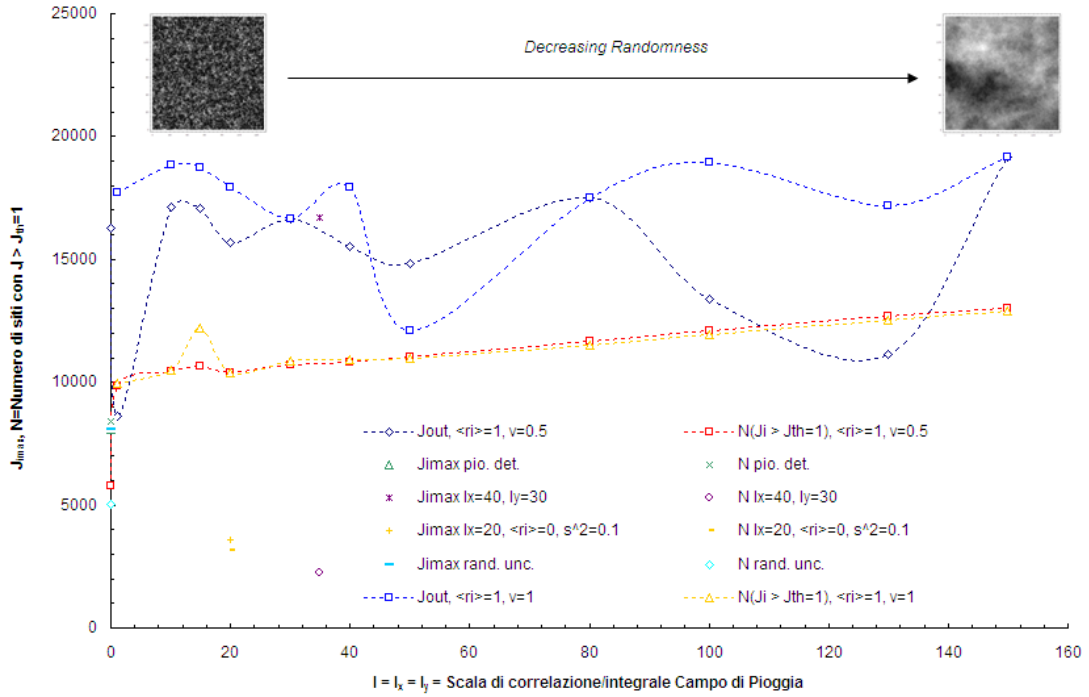


Figura 6.8: andamento di $J_{min}(I)$ e $J_{out}(I)$, con $J_{th} = 1$ per le altre reti simulate, ad esempio le reti con campo di pioggia anisotropo e con campo di pioggia deterministico, nonchè $N_{siti}(I, J_i > J_{th} = 1)$; si noti che i casi di OCN($\langle r_i \rangle = 0.00$) e di OCN($I = 150$, "alluvione") tendono al caso uniforme solo per quanto concerne gli esponenti ed il pattern delle strutture di drenaggio, non per J_{min} e J_{out} i quali sono, ad un generico valore J_{th} , minori (per $\langle r_i \rangle = 0.00$) e maggiori (per $I = 150$ caso "alluvione") dei rispettivi valori della rete nel modello ad iniezione $r_i = cost = 1$.

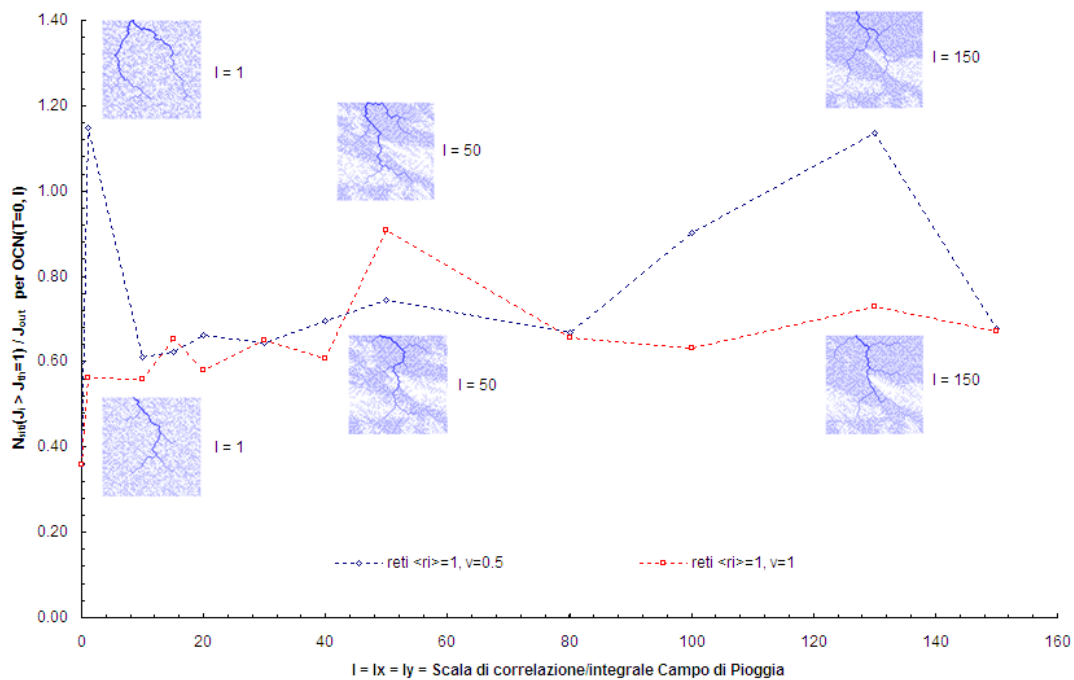


Figura 6.9: andamento del rapporto $\frac{N_{siti}(J_i > 1)}{J_{out}}$ in funzione della scala di correlazione della pioggia I , per le OCNs($T = 0.00, I$); per $I \rightarrow 0$ e $I \rightarrow L$, J_{out} delle OCNs formate con campi a $\sigma^2 = 1$ è molto elevato rispetto quello delle reti formate con campi a $\sigma^2 = 0.5$, pertanto il rapporto investigato è molto maggiore per queste ultime. Si fa notare inoltre la struttura biforcata delle reti ottenute con campi a $\sigma^2 = 0.5$ per ogni I , contrapposta a quella più rettilinea delle reti formate con campi a $\sigma^2 = 1.0$. Si veda il grafico correlato della Figura 6.10 successiva.

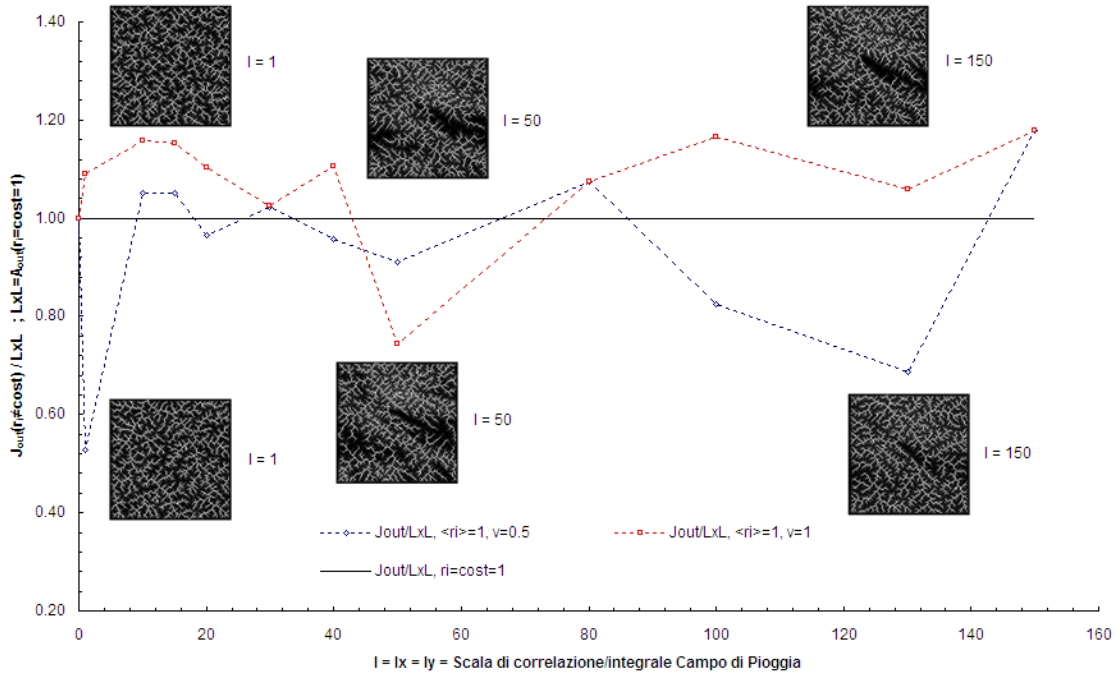


Figura 6.10: andamento del rapporto $\frac{J_{out}}{L \times L}$, con $L \times L \equiv A_{out}$ nel caso di rete formata con campo di pioggia avente $r_i = cost = 1$; si vede dai densitplot come la distribuzione delle aree sia più uniforme per le OCNs ($\langle r_i \rangle = 1, \sigma^2 = 0.5$), ma il valore di J_{out} è maggiore per le OCNs ($\langle r_i \rangle = 1, \sigma^2 = 1.0$).

6.3 Analisi in funzione della soglia sul flusso cumulato J_{th} .

In questo paragrafo si riportano sinteticamente le analisi effettuate sulla densità di drenaggio media, definita come in (4.6), in funzione della soglia sul flusso cumulato.

E' evidente che per J_{th} che aumenta \overline{D}_d diminuisce, si fa notare però l'andamento e i valori sostanzialmente identici di $\overline{D}_d(J_{th})$ per le reti generate con campi di pioggia a $\sigma^2 = 0.5$ e $\sigma^2 = 1.0$.

E' importante anche vedere come $\overline{D}_d(J_{th} = 1)$ aumenti per I del campo di pioggia che aumenta; infatti per scala di correlazione grande, imponendo

la media $\langle r_i \rangle = 1$, aumenta la dimensione della zona con precipitazione e quindi anche le aree canalizzate.

La rete del modello ad iniezione uniforme ($r_i = cost = 1$) presenta per $I = 1$ il valore di densità di drenaggio media minore e specificamente $\overline{D_d}(J_{th} = 1) \cong 0.35$, contro ad esempio $\overline{D_d}(J_{th} = 1, I = 1) \cong 0.62$ e $\overline{D_d}(J_{th} = 1, I = 150) \cong 0.80$ per le reti con r_i random sia $\sigma^2 = 0.5$ sia $\sigma^2 = 1.0$.

La densità di drenaggio della OCN con $\langle r_i \rangle = 0$ e $\sigma^2 = 0.0$, equivalente al caso di "siccità" per $I \rightarrow \infty$, presenta evidentemente $\overline{D_d}$ minore anche del valore $\overline{D_d}(r_i = cost = 1, J_{th} = 1) \cong 0.35$.

Inoltre, da $J_{th} \cong 10$ l'andamento della densità di drenaggio media con J_{th} tende a coincidere sempre più per ogni valore della scala di correlazione I

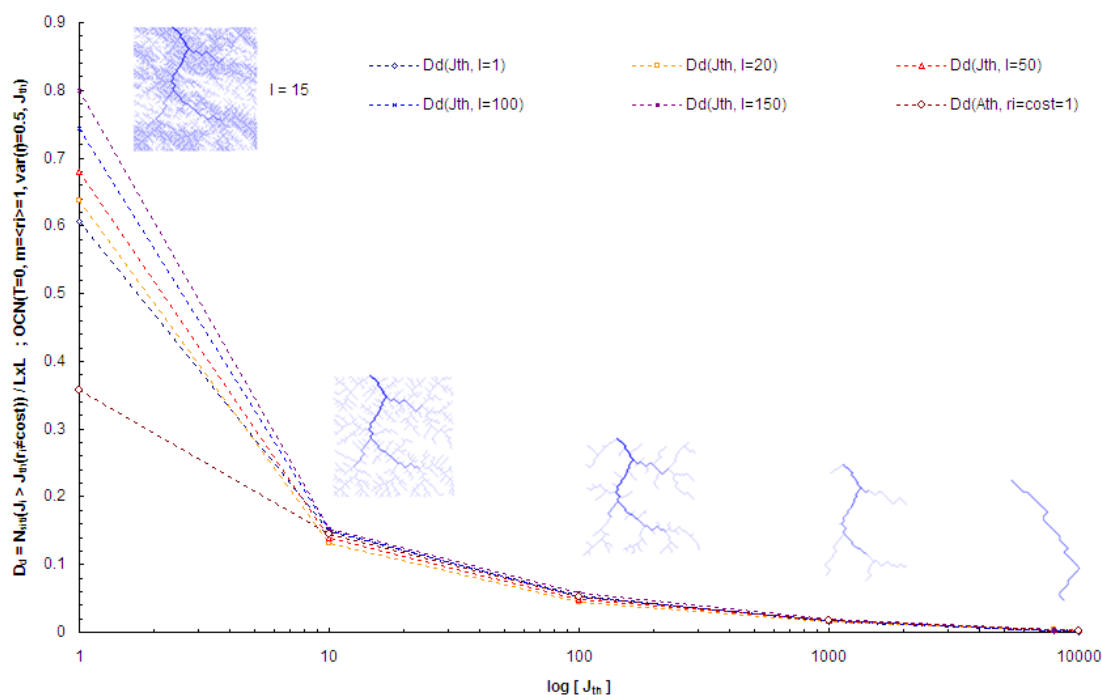


Figura 6.11: densità di drenaggio media definita come in (4.6), ossia $\overline{D_d}[OCNs(\sigma^2 = 0.5)] = \frac{N_{siti}(J_i > J_{th})}{L \times L}$, in funzione dei pixel considerati canale, quindi in funzione di J_{th} ; da $J_{th} = 10$ l'andamento di $\overline{D_d}$ per le OCNs omogenee ed eterogenee è il medesimo, inoltre il valore $\overline{D_d}[OCN(r_i = cost = 1)] \cong 0.35$ è quello più aderente ai bacini reali.

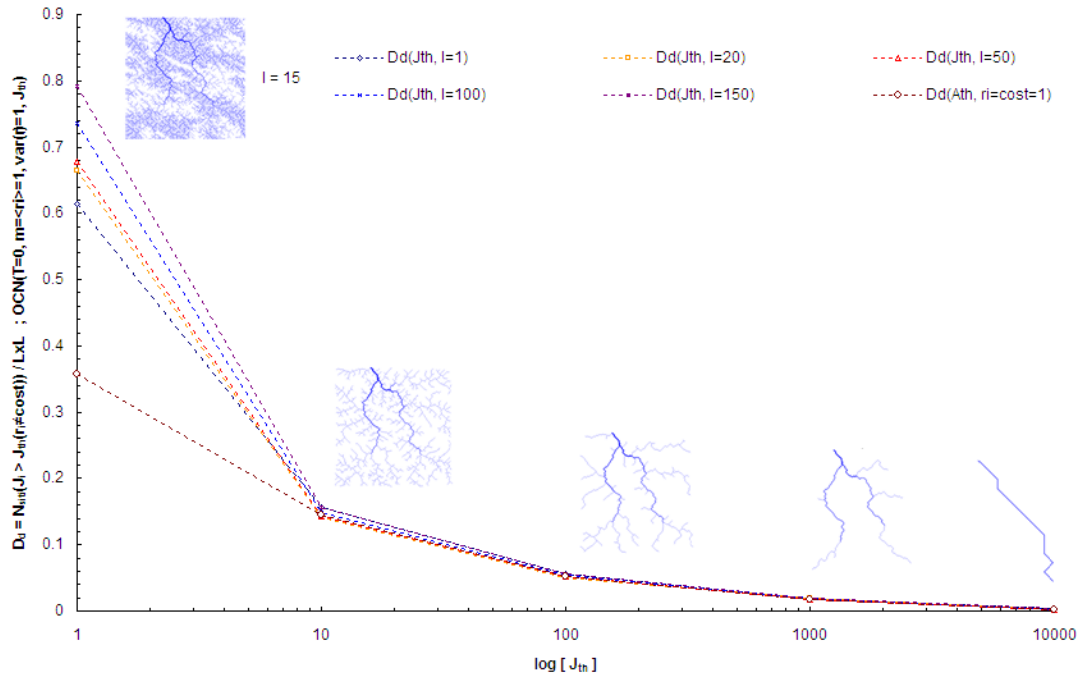


Figura 6.12: densità di drenaggio media definita come $\overline{D}_d[OCNs(\sigma^2 = 1.0)] = \frac{N_{siti}(J_i > J_{th})}{L \times L}$, in funzione dei pixel considerati canale, quindi in funzione di J_{th} ; i valori e l'andamento di \overline{D}_d sono sostanzialmente gli stessi di quelli delle reti formate con campi a $\sigma^2 = 0.5$, riportati nella figura 6.11 precedente.

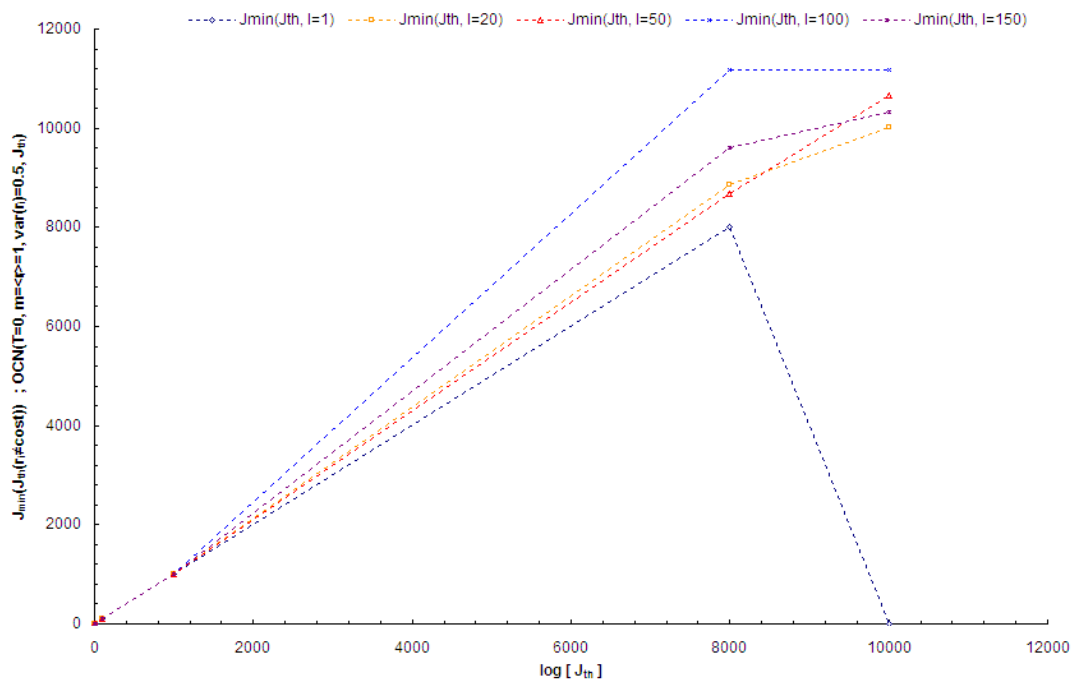


Figura 6.13: flusso minimo $J_{min}(J_{th})$ delle OCNs($\sigma^2 = 0.5, I$); è evidente l'andamento crescente al crescere della soglia, mentre non si può affermare che J_{min} aumenta per I che aumenta, ad un generico e prefissato valore di J_{th} ; $J_{min}(J_{th}, I = 1)$ v'è a zero in quanto è stata scelta una soglia $J_{th} > J_{out}$ quindi nessun pixel è allo stato canale e non risulta alcun J_{min} .

E' chiaro come un valore troppo elevato di soglia porti ad una rete del tutto inaffidabile per compiere analisi idrologico-idrauliche del bacino in studio.

6.4 Ulteriori analisi geomorfologiche.

Dato il ridotto numero di bacini naturali simulati, non è stato possibile vedere se la funzione $W_{OCN_h}(x)$ della OCN eterogenea (OCN_h), descrive meglio la funzione di ampiezza reale $W_r(x)$, rispetto la funzione di ampiezza della rete omogenea $W_{OCN}(x)$, con stesse condizioni iniziali e al contorno, che come già verificato da studi precedenti [Rodriguez-Iturbe e Rinaldo, 1997; Marani, M., et al., 1994; Rigon et al., 2001] fornisce una ottima rappresentazione della realtà.

Ulteriori analisi che possono essere effettuate sono:

(i) in merito al confronto della funzione di ampiezza determinata su tutti i pixel del bacino $W_{all}(x)$, con quella calcolata esclusivamente sui pixel-canale $W_{cp}(x)$,

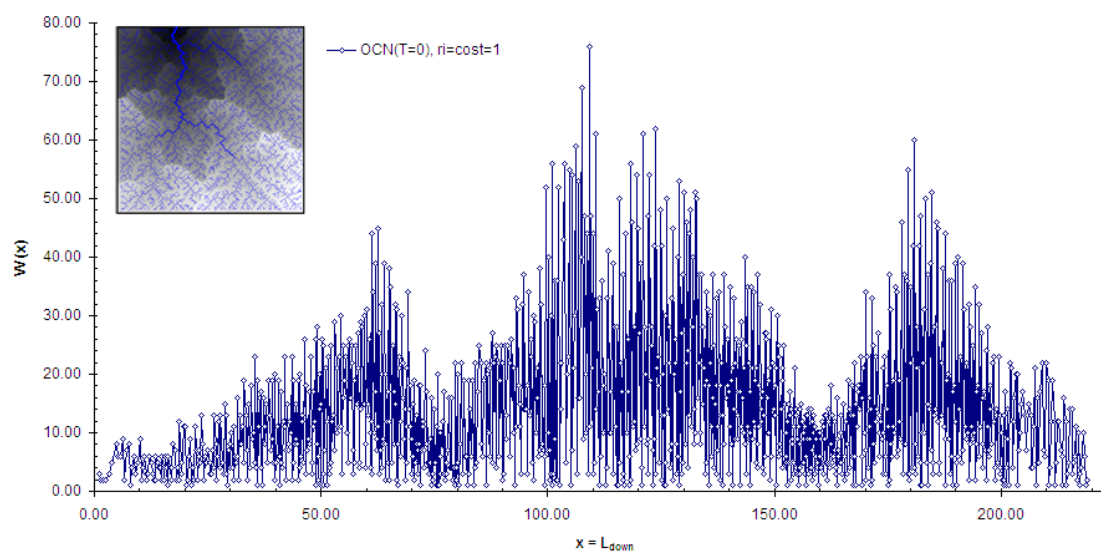
(ii) in relazione al calcolo di $W(x)$ in funzione della soglia sul flusso cumulato.

Per il punto (i), a rigore, la differenza tra $W_{all}(x)$ e $W_{cp}(x)$ dovrebbe essere molto più evidente per le OCNs eterogenee, rispetto le OCNs omogenee per le quali vale la relazione (4.9).

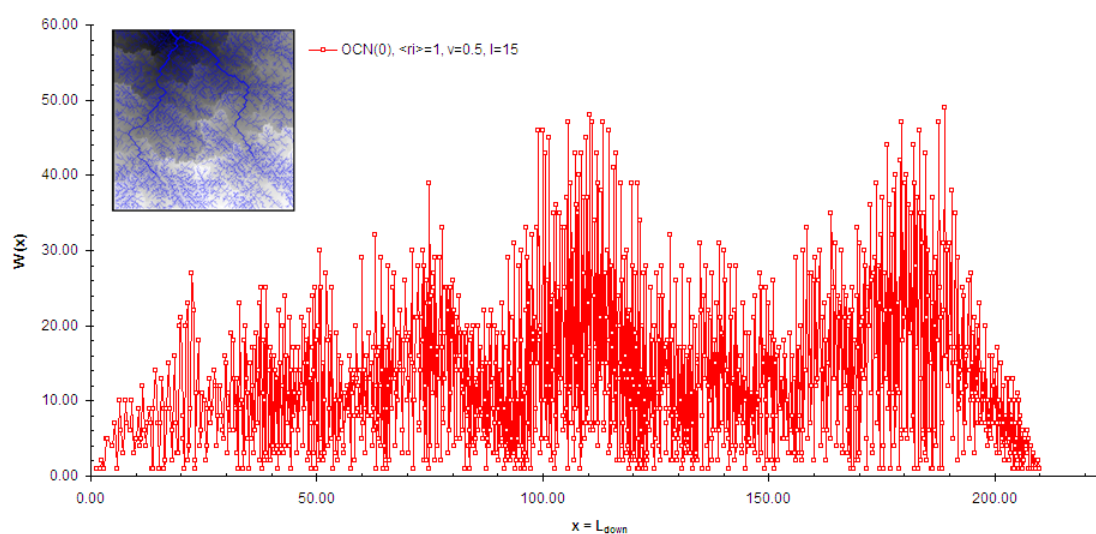
Nelle OCNs eterogenee, infatti, le strutture di drenaggio non sono distribuite uniformemente nel bacino e questo porta alle principali differenze, sia dalla $W_{OCN}(x)$, sia dalla propria $W_{all}(x)$.

Per il punto (ii), la funzione di ampiezza $W(x)$ all'aumentare della soglia J_{th} , quindi al diminuire del numero di pixel considerati allo stato canale, mantiene la sua forma, ma diminuisce la fedeltà della descrizione del bacino attraverso le distanze di Hack e il relativo numero di pixel con tali distanze.

E' fondamentale infatti stabilire, soprattutto per i bacini di grande estensione, qual'è la soglia J_{th} , quindi il numero di pixel, da considerare per il calcolo di $W(x)$ al fine di avere una descrizione accurata del territorio, utilissima per molte applicazioni idrologiche (ad esempio il calcolo della risposta geomorfologica di un bacino attraverso la teoria dell'*idrogramma istantaneo unitario geomorfologico* (GIUH e sue evoluzioni successive) [Rodriguez-Iturbe e Valdes, 1979]), e una rapidità computazionale necessaria per simulazioni a "grande scala" (sia in termini di numero di simulazioni, sia in termini di estensione dei bacini considerati) o per simulazioni previsionali.



(a)



(b)

Figura 6.14: (a) e (b) funzioni di ampiezza $W(x)$, calcolate per tutti i pixel del bacino, per la $OCN(r_i = cost = 1)$ e per la $OCN(\langle r_i \rangle = 1, \sigma^2 = 0.5, I = 15)$ rispettivamente; si nota come (b) si discosta da (a) sia nell'andamento in funzione di L_{down} sia nei valori di picco, pertanto l'eterogeneità altera sensibilmente $W(x)$ così come è anche visualizzabile nei relativi densityplot, pur mantenendo sostanzialmente inalterati gli esponenti come si è visto al Capitolo 4.

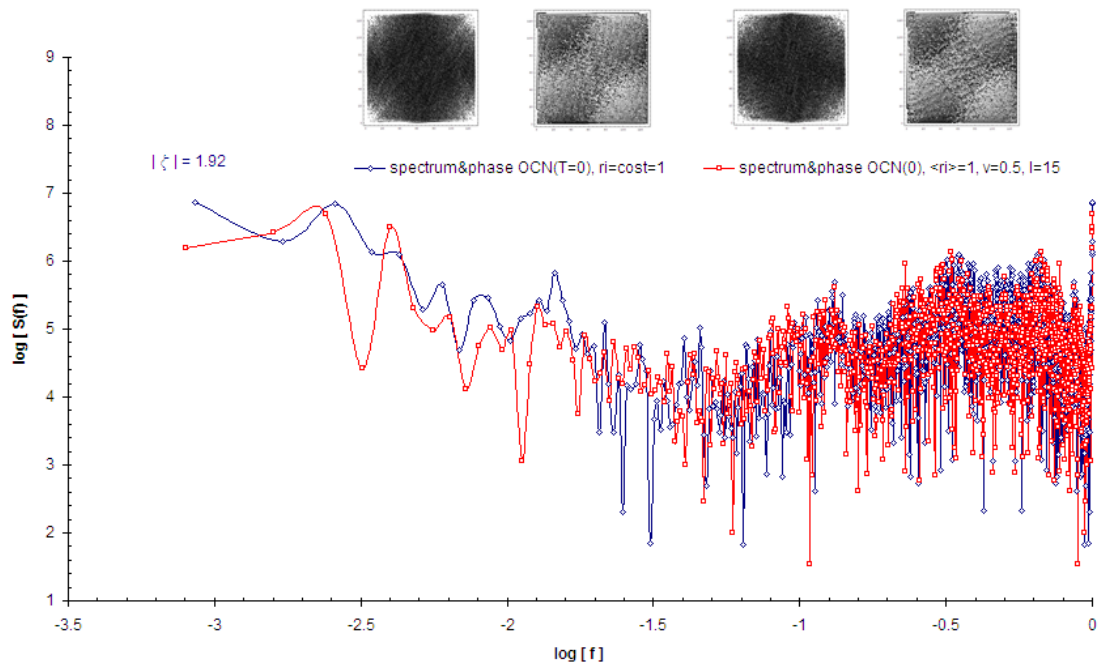


Figura 6.15: Trasformata di Fourier $S(f)$ della funzione di ampiezza $W(x)$, e densityplot nei quali sono visualizzati lo spettro e la fase; lo spettro è compreso tra 0.04 e $15,231.80$ per la $OCN(r_i = cost = 1)$, e tra 0.06 e $14,773.00$ per la $OCN(\sigma^2 = 0.5, I = 15)$, la fase è comune ad entrambe le reti nell'intervallo $[3.14, -3.14]$. Si nota anche qui la differenza di $W(x)$ tra la OCNs omogenea ed eterogenea, la prima con esponente ottimo nel tratto finale di $S(f)$ pari a $\zeta = 1.92$.

Trovare l'esponente ζ , caratteristico dello spettro di potenza della funzione di ampiezza ad alte frequenze, è un'impresa che spesso non riesce.

La funzione di ampiezza è infatti in generale un'oggetto difficile da maneggiare e si rimanda a sue analisi future molto più dettagliate in reti eterogenee, sulla base delle proprietà già ricavate per le reti omogenee [Rodríguez-Iturbe e Rinaldo, 1997].

Il comportamento notevolmente oscillante di $W(x)$ a basse frequenze può essere interpretato assumendo l'esistenza di un meccanismo comune, regolante l'organizzazione delle reti di drenaggio a scale piccole. Alle scale maggiori le strutture sono invece controllate dalla forma globale del bacino [Marani et al., 1994].

Quindi sembra più opportuno analizzare la funzione di ampiezza, la quale non presenta molto spesso un chiaro comportamento a legge di potenza nel-

la sua forma spettrale, assumendo un'intera gerarchia di dimensioni frattali anzichè una sola [Rodriguez-Iturbe e Rinaldo, 1997], come nell'analisi dei processi moltiplicativi binomiali, che ad esempio portano all'ottenimento del bacino di Peano.

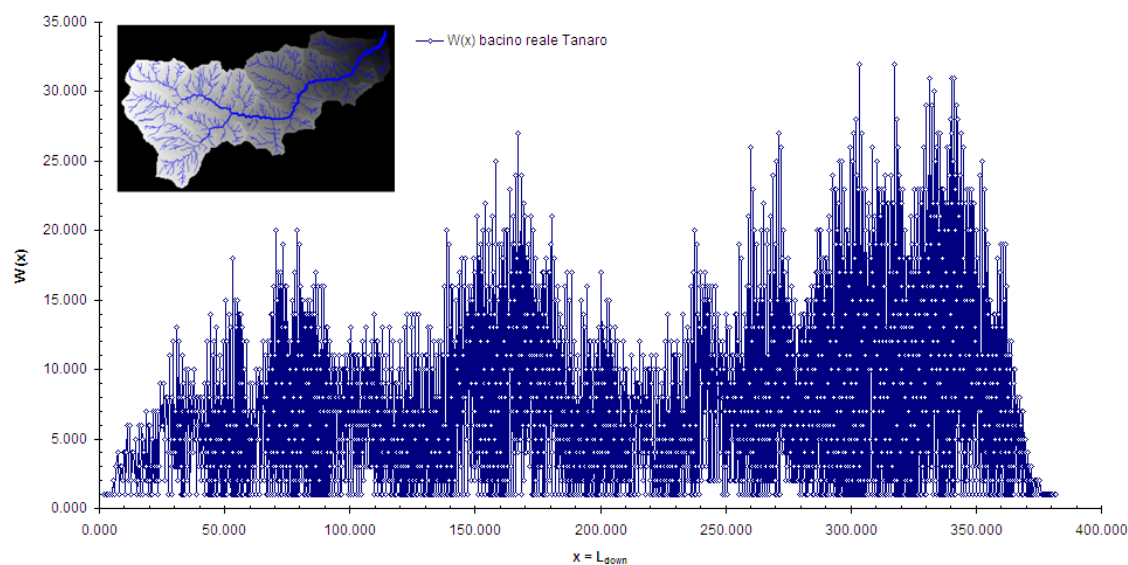


Figura 6.16: $W(x)$ del bacino reale del Tanaro; utilizzando tutti i pixel del DEM sembra però più opportuno introdurre la *funzione di ampiezza riscalata* $W_r(x)$, la quale tiene conto delle velocità differenti dell'acqua nello stato canale e nello stato versante, la prima la maggiore, assumendo le lunghezze di Hack modificate come

$$L'_d = L_{dc} + (r = c_c/c_h)L_{dh}, \text{ dove } c \text{ sta per "channel" e } h \text{ per "hillslope"}.$$

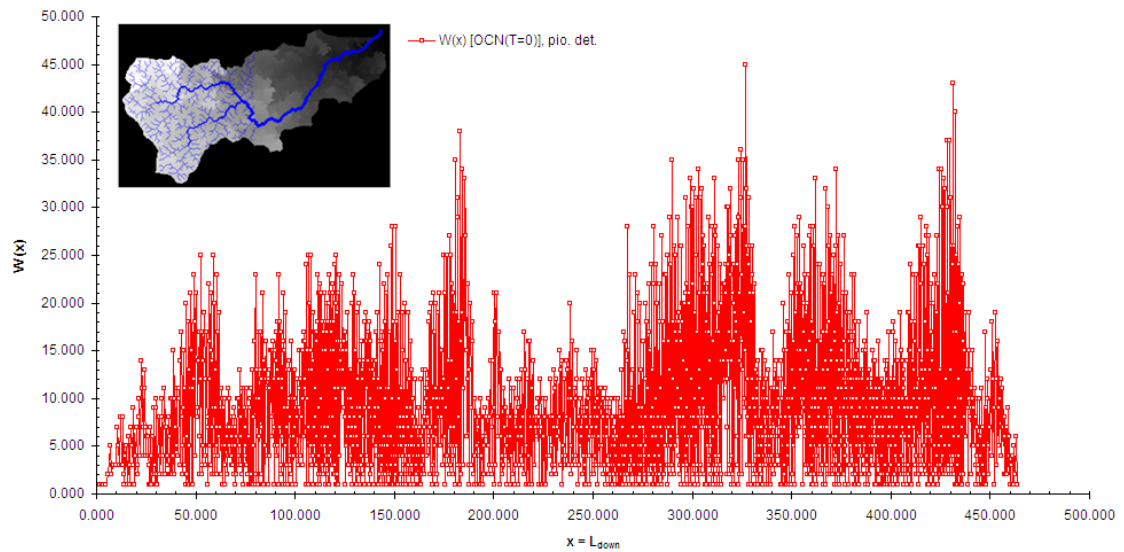


Figura 6.17: $W(x)$ della OCN ottenuta con campo deterministico e condizioni al contorno dettate dai boundaries riflettenti del bacino del Tanaro; si nota la notevole differenza rispetto il $W(x)$ reale, sia nel maggior numero di distanze L_{down} elevate, sia nel maggior numero di pixel a grande distanza dall'outlet (es. per $L_{down} \sim 350$ risulta $W(x, retereale) \approx 30$, mentre $W(x, campodet.) \approx 45$).

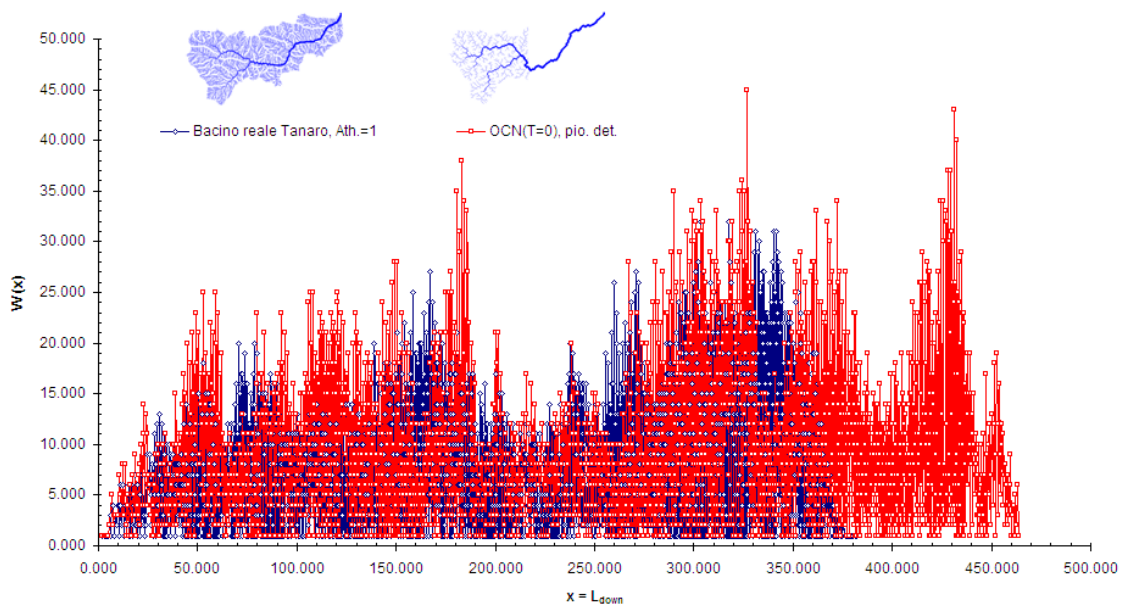


Figura 6.18: la notevole differenza delle $W(x)$ è dovuta alla particolare struttura di drenaggio della rete con campo di pioggia deterministico, il quale produce un

pattern di canali molto inusuale in natura, in tal caso infatti si ha anche una deviazione sensibile negli esponenti di scala, dal range statisticamente accettato per i bacini fluviali.

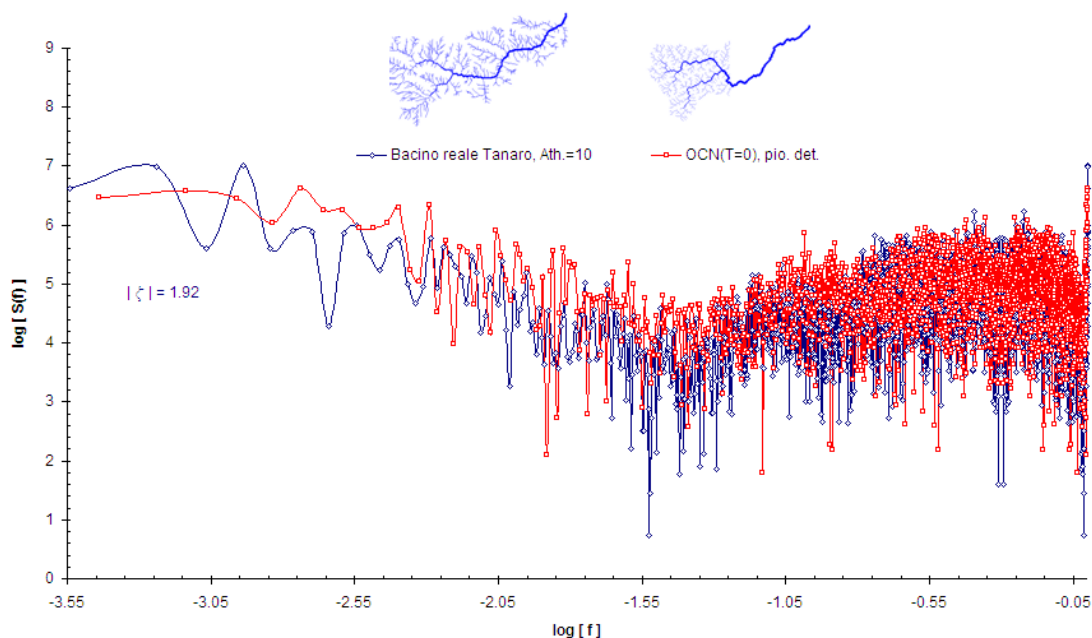


Figura 6.19: Trasformata di Fourier $S(f)$ delle funzioni di ampiezza $W(x)$ di Figura 6.16 e 6.17, rispettivamente della rete reale del bacino del Tanaro e della OCN ottenuta con campo deterministico sullo stesso bacino. Non si notano comportamenti a legge di potenza, e la differenza tra i due spettri è ancora più marcata rispetto quelli di Figura 6.15, relativi a due OCN sviluppate su bacino sintetico 128×128 .

Si sono notate quindi parecchie differenze nella funzione di ampiezza delle reti eterogenee da quella delle rispettive reti omogenee; *tale differenza però non implica automaticamente una forte deviazione degli esponenti di scala* (si veda l'esempio di Figura 6.14 (a) e (b) e relativi commenti), *viceversa il contrario sembra valere, ossia una rete che mostra deviazioni negli esponenti universali, oltre i limiti accettati per i bacini fluviali, ha funzione di ampiezza fortemente differente da quella della rete reale.*

Di seguito si riportano dei "densityplot" inerenti la distribuzione dei flussi cumulati nel bacino; in accordo alla scala dei grigi adottata le zone più chiare

corrispondono ai pixel a flusso cumulato maggiore (pixel-canale), quelle più scure ai pixel-versante.

Come già evidenziato analizzando la densità di drenaggio media, si vede come per I che aumenta la relativa OCN presenta un maggior numero di pixel a flusso cumulato elevato e una loro distribuzione nel bacino più uniforme, quindi riassumendo

$$D_d \xrightarrow{I \rightarrow \infty} \overline{D}_d, \quad (6.1)$$

e

$$N_{siti}(J_i > J_{th}) \text{ aumenta per } I \rightarrow \infty. \quad (6.2)$$

E' da sottolineare la validità generale della relazione (6.1), mentre la relazione (6.2) vale esclusivamente quando si impone la media di pioggia pari ad un valore non nullo (es. $\langle r_i \rangle = I$), ossia si ricade sempre con il bacino, nella zona con precipitazione (caso "alluvione") di estensione $L \times L$ del campo random generato.

Ad esempio la (6.2) non vale nel caso "siccità" per I molto grande (es. $I = 150$), quindi è applicabile solo se contemporaneamente all'aumento di $N_{siti}(J_i > J_{th})$ si verifica anche l'aumento della densità di drenaggio \overline{D}_d .

In conclusione, per

$$\overline{D}_d \nearrow \text{ con } I \rightarrow \infty, \quad (6.3)$$

avendo J_{th} fissato,

$$N_{siti}(J_i > J_{th}) \nearrow \text{ con } I \rightarrow \infty. \quad (6.4)$$

E' interessante anche notare con maggior evidenza, nei densityplot sotto riportati, il carattere frattale nella distribuzione delle aree delle OCNs, il che rispecchia la natura dei bacini fluviali, viceversa il carattere casuale nella distribuzione delle aree delle hotOCNs, OCNs e hotOCNs siano esse eterogenee o omogenee.

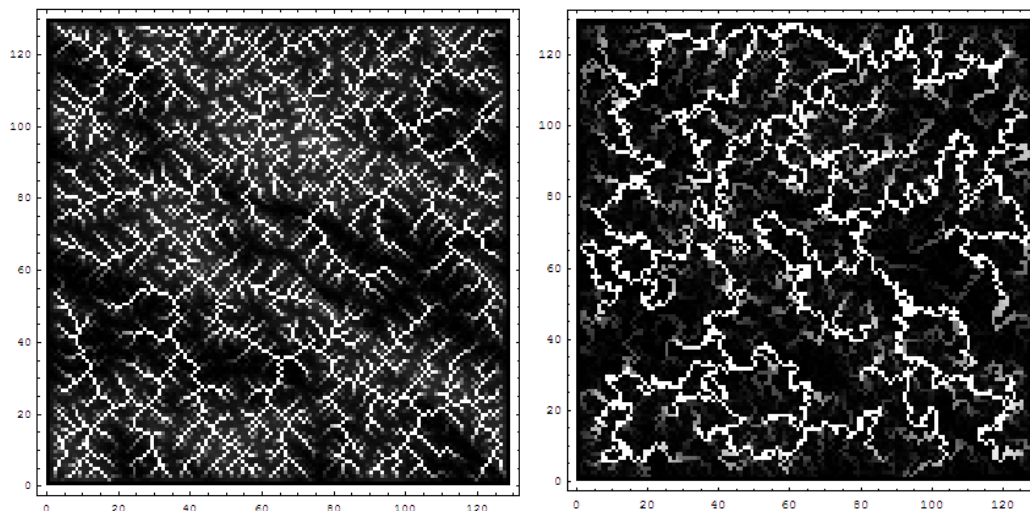


Figura 6.20: densityplot dei flussi cumulati della rete ottenuta con campo di pioggia a covarianza esponenziale, $\langle r_i \rangle = 1$, $\sigma^2 = 1.0$, e $I = 30$, sulla sinistra quello relativo alla $OCN(T = 0.00)$, sulla destra quello della $hotOCN(T = 10, 000)$. La distribuzione dei flussi è frattale per la prima, casuale per la seconda, ripecchando la natura delle relative strutture di drenaggio.

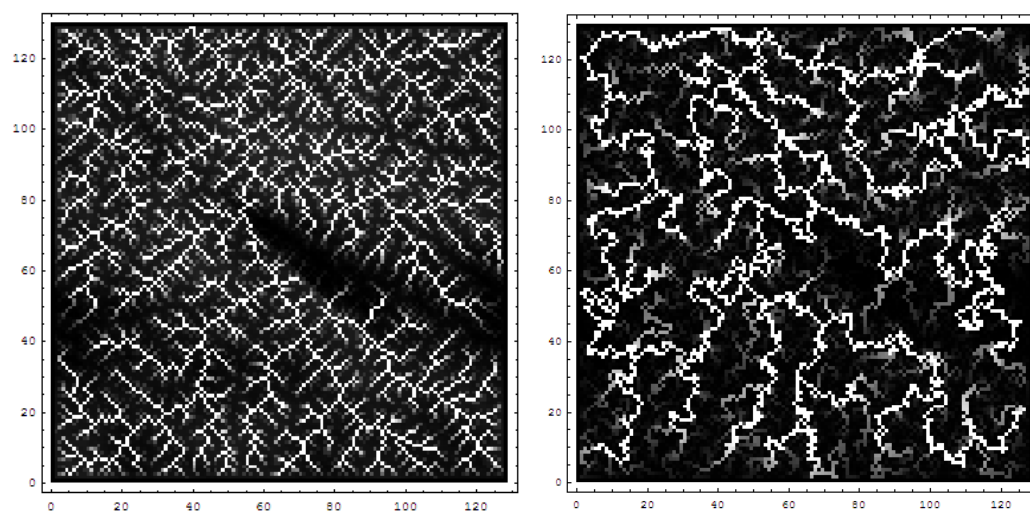


Figura 6.21: densityplot dei flussi cumulati della rete ottenuta con campo di pioggia a covarianza esponenziale, $\langle r_i \rangle = 1$, $\sigma^2 = 1.0$, e $I = 150$, sulla sinistra quello relativo alla $OCN(T = 0.00)$, sulla destra quello della $hotOCN(T = 10, 000)$.; per $I \rightarrow \infty$, e considerando sempre il caso "alluvione", la distribuzione diventa più uniforme, nonostante questo non si ha un apprezzabile aumento nella densità di drenaggio media del bacino, come mostrato in Figura 6.1

e 6.3.

Si riportano ora i densityplot, dei flussi cumulati del bacino del Tanaro simulato con pioggia deterministica; le conclusioni a cui si giunge sono le stesse di quelle ricavate per i bacini artificiali precedenti.

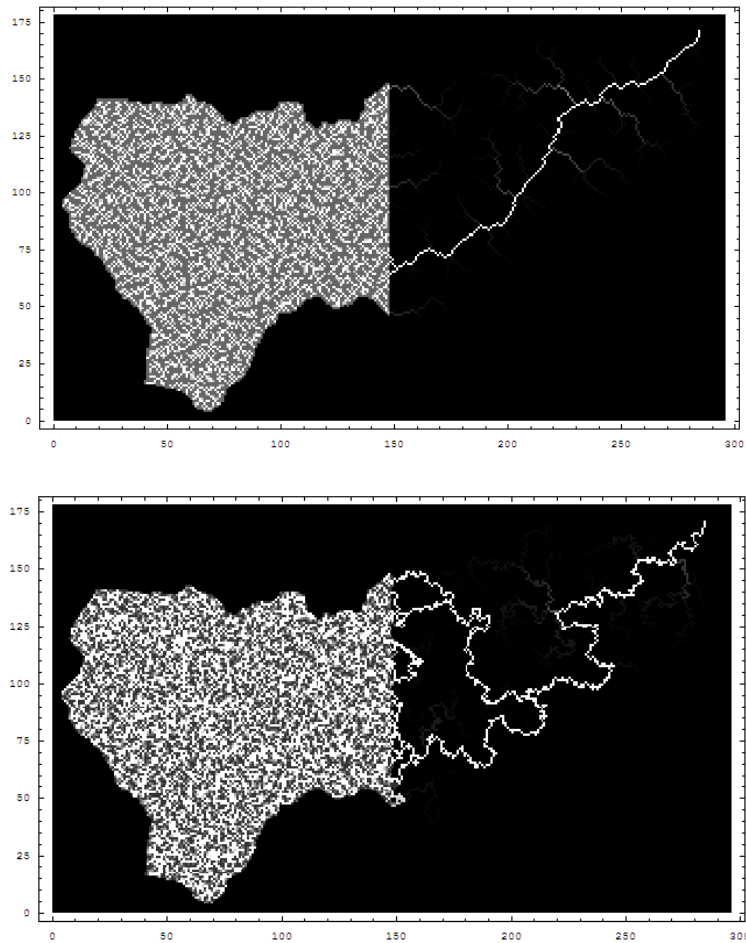
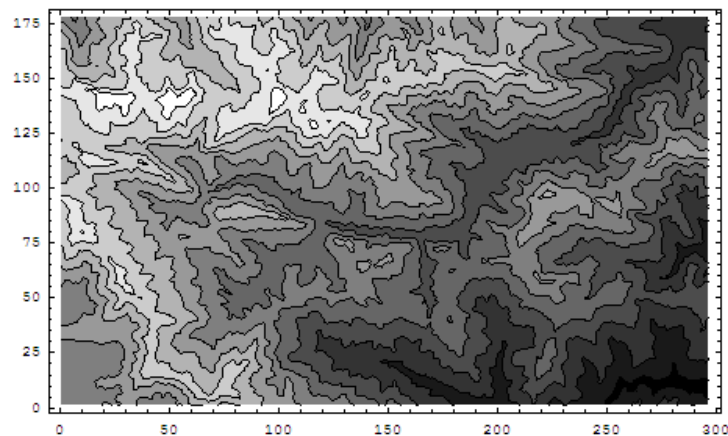


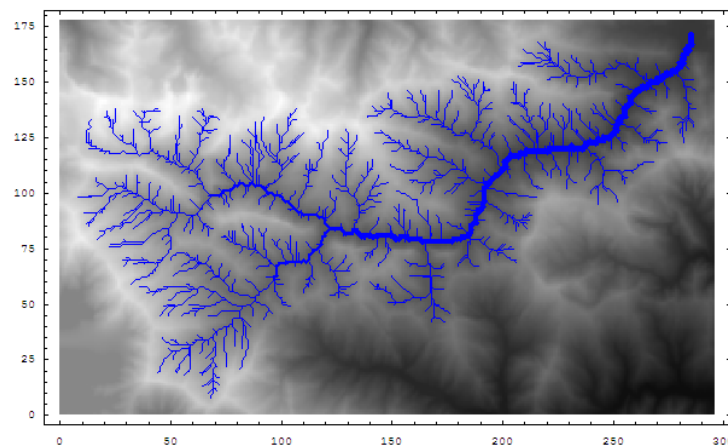
Figura 6.22: densityplot dei flussi cumulati, delle reti sviluppate con condizioni al contorno pari a quelle del bacino reale del Tanaro, in alto quello relativo alla $OCN(T = 0.00)$, in basso quello della $hotOCN(T = 10, 000)$.

Si propongono di seguito alcune visualizzazioni dei bacini naturali indagati, il Tanaro ed il Taloro, utili sia per il loro studio diretto, sia per le analisi

delle simulazioni di Optimal Channel Networks, eterogenee ed omogenee, con le stesse condizioni al contorno e dopo "hot bath" della rete iniziale come più volte ripetuto.



(a)



(b)

Figura 6.23: (a) *contourplot* delle elevazioni fornite dal DEM⁵ del Tanaro, si noti la

⁵Un DEM (*Digital Elevation Model*) è una rappresentazione digitale della superficie topografica, con le elevazioni e/o le altezze del terreno al di sopra ogni dato geodetico. Un DTM (*Digital Terrain Model*) è invece una rappresentazione digitale delle caratteristiche del terreno indagato, includendo oltre alle elevazioni, le pendenze, le direzioni di drenaggio e altri attributi; un DTM è pertanto usualmente ottenuto da un DEM attraverso dei software, es. JGrass e TauDEM. Alcune volte si parla anche di DSM (*Digital Surface Model*), tuttavia quest'ultimo è equivalente al DEM, ed in genere è ottenuto tramite tecniche LIDAR.

frattalità delle linee di livello; (b) *densityplot* del DEM del Tanaro con interposta la rete reale estratta con area di supporto pari a 10 ($\equiv A_{th}$).

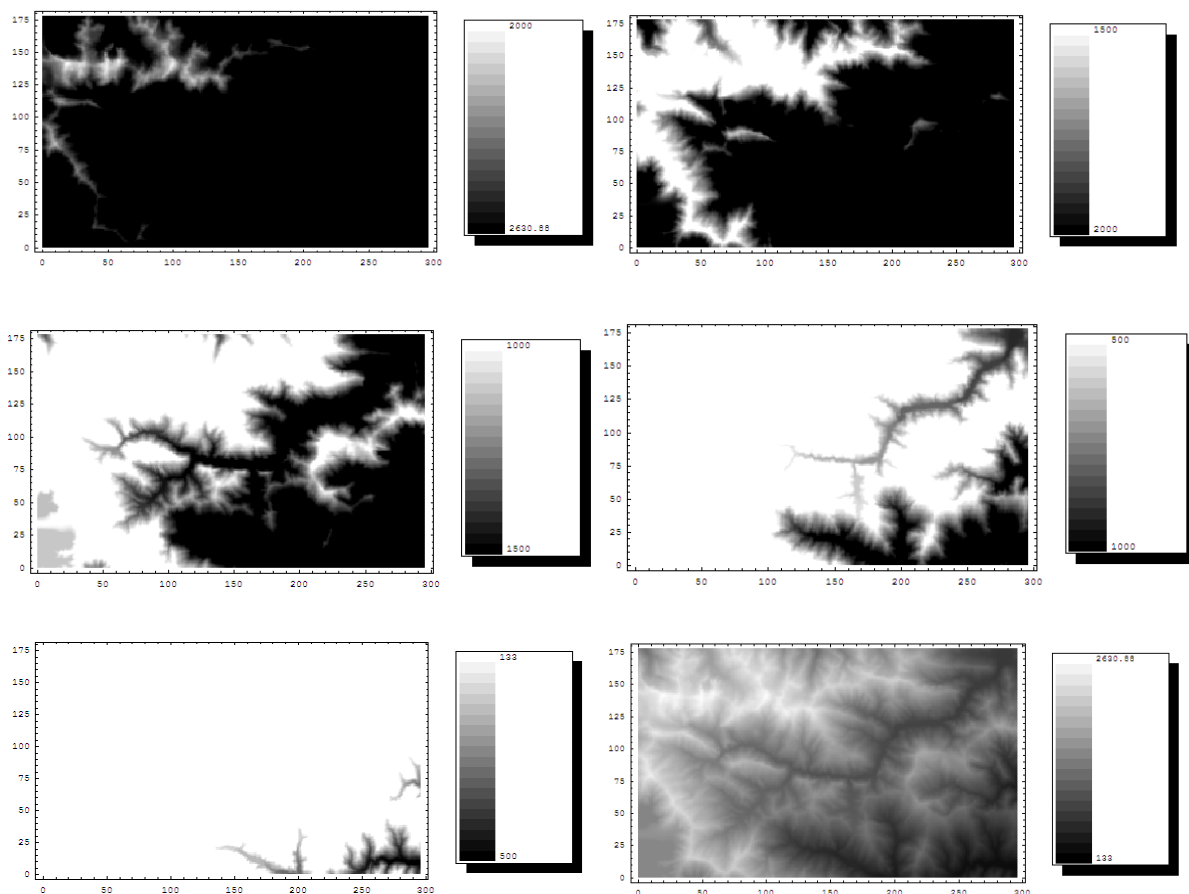


Figura 6.24: *densityplot* dei pixel appartenenti ai range di elevazione $[z_i, z_{i-1}]$, aventi i seguenti estremi (dal primo e da sx a dx), 2630.88 , 2000 , 1500 , 1000 , 500 , e 133 , l'ultimo *densityplot* è con tutti i pixel rappresentati quindi per ogni elevazione; si noti la frattalità dei *transects*⁶, la quale è anche evidente per le linee di livello ossia per i patterns che si ottengono visualizzando esclusivamente i pixel ad una certa elevazione z_i [per approfondimenti *Rodriguez-Iturbe e Rinaldo, 1997*].

⁶Un transect è un percorso lungo il quale si contano o si registrano degli eventi del fenomeno studiato, es. la presenza di determinate specie di piante o le tracce di animali. Nei casi riportati i *transects* sono costituiti dai pixel aventi elevazione pari ad uno dei due estremi dell'intervallo di quote rappresentato, sono quindi "i bordi" della zona plottata avente pixel tutti all'interno del range di quote scelto.

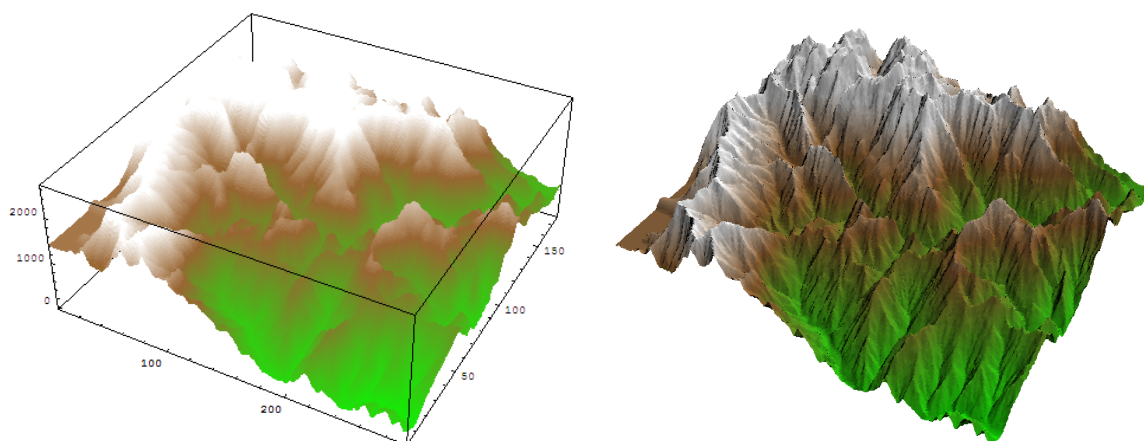


Figura 6.25: interessanti visualizzazioni del DEM del bacino reale del Tanaro, la seconda "a colori naturali"; è interessante cercare di riprodurre il bacino tramite modelli di evoluzione del territorio incorporando le relative OCN, più realisticamente con tutte le eterogeneità presenti. Per questo si rimanda ad ulteriori future ricerche, e a [Rodriguez-Iturbe e Rinaldo, 1997] per quelle già condotte in tale ambito.

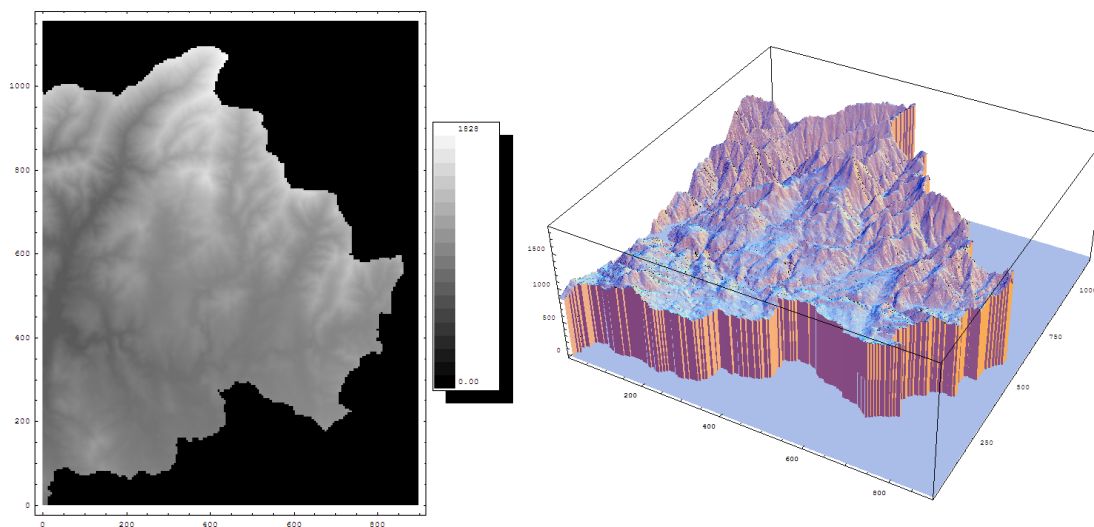
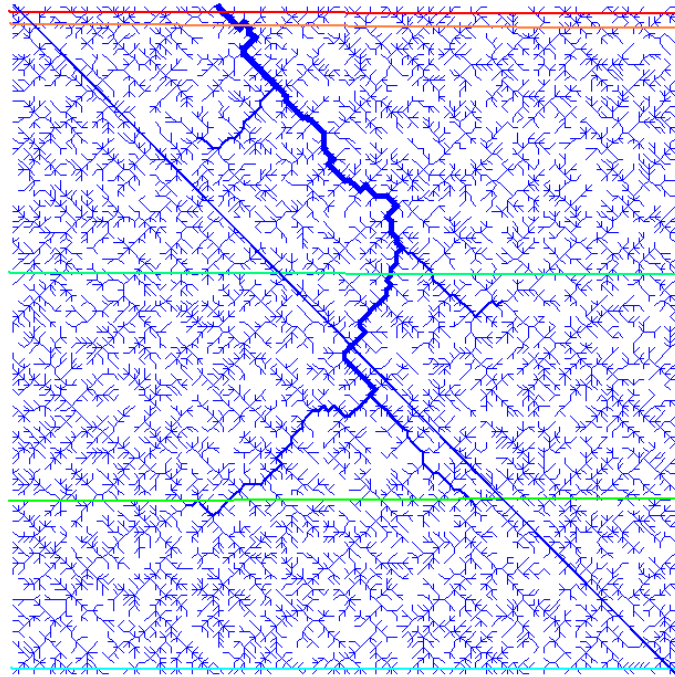
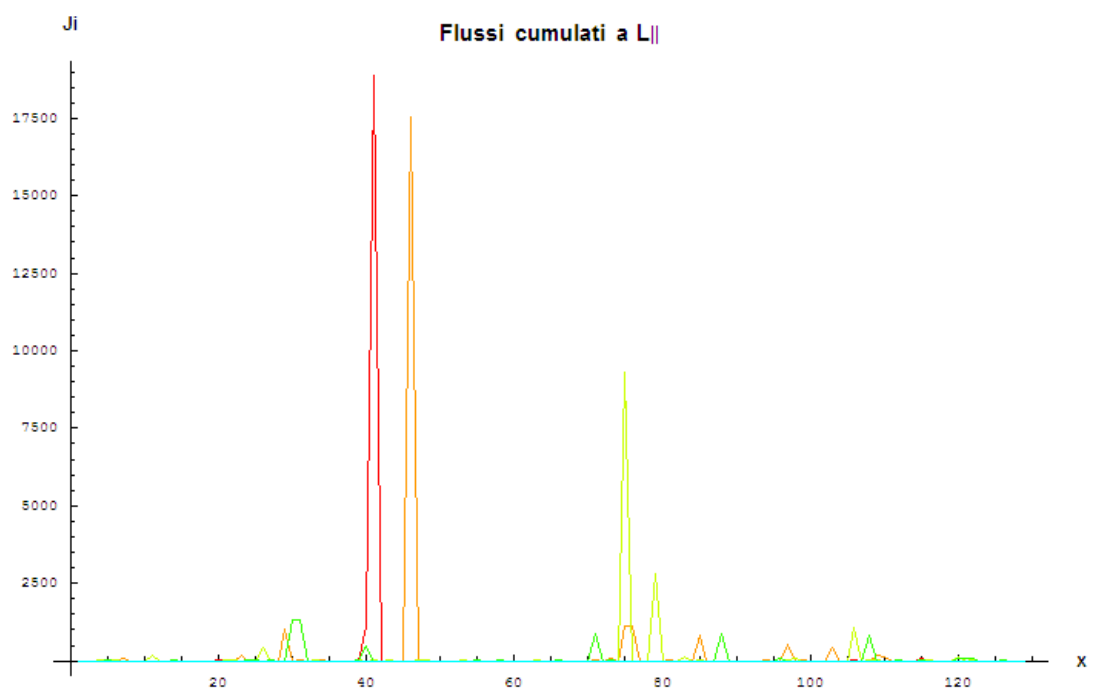


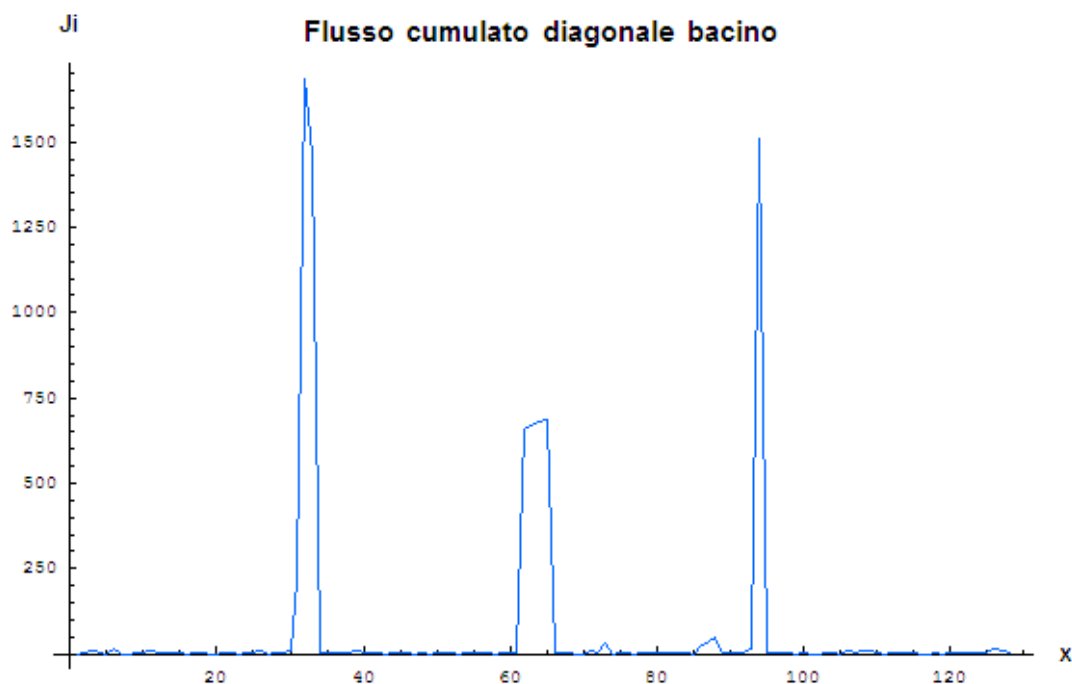
Figura 6.26: sulla sinistra densityplot delle elevazioni del DEM del bacino reale del Taloro, sulla destra sua rappresentazione 3D non in scala di colori reali dato il notevole sforzo computazionale richiesto; non sono state eseguite simulazioni di OCN in tale bacino data la sua notevole estensione che impone potenza di calcolo di molto superiore; si veda per le analisi della risposta idrologica e della superficie vegetata e non [Convertino, 2006a].



(a)



(b)



(c)

Figura 6.27: (a) $OCN(\langle r_i \rangle = 1, \sigma^2 = 1.0, I = 1, J_{th} = 1, 128 \times 128)$ e sezioni per le quali si è valutato il flusso cumulado J_i , a una distanza dall'outlet $L_{||} = 2, 10, 50, 100, 129$ (si è adottata la stessa simbologia dei diametri per la distanza delle sezioni dall'outlet); (b) flussi cumulati J_i relativi alle sezioni individuate in (a); (c) J_i lungo la sezione diagonale per la rete (a), i "picchi" sono relativi ai rami principali di drenaggio del bacino.

Le analisi geomorfologiche possibili da fare sono moltissime, qui si è cercato di illustrare le principali, in special modo per investigare meglio la struttura di drenaggio delle reti eterogenee.

Si rimanda a futuri lavori per tali approfondimenti, nei quali dovranno essere sicuramente studiate anche le evoluzioni del territorio, quindi simulazioni tridimensionali, tenendo conto dei concetti di *Self Organized Criticality* già esaminati nei precedenti studi [Rodriguez-Iturbe e Rinaldo, 1997], oltre alle varie forme di eterogeneità come la precipitazione, che può essere collegata alle variazioni climatiche dovute al cambiamento del clima.

Prospettive future di ricerca e conclusioni.

I risultati ottenuti testimoniano come l'area cumulata sia sempre ben fondibile con il flusso cumulato, quindi l'assunzione

$$A_x = \sum_{j \in nn(x)} A_j + 1 \sim J_x = \sum_{j \in nn(x)} J_j + r_i \quad (7.1)$$

è sempre fattibile nello studio dei bacini fluviali.

Gli esponenti delle leggi a potenza delle caratteristiche geomorfologiche sembrano dipendere dalla lunghezza di correlazione I della precipitazione, tuttavia la loro variazione massima dagli esponenti ottimi, concentrata nel range $\frac{1}{5} \leq I/L \leq \frac{1}{3}$, è appena maggiore della variazione "statisticamente naturale" osservati nei bacini reali.

Le variazioni osservate da studi precedenti per reti SOC e con pinning, risultano maggiori di quelle trovate nella presente ricerca, infatti per quelli esponenti si era suggerita l'ipotesi dell'appartenenza ad altre classi di universalità.

Delle consistenti differenze sono state tuttavia trovate, per le OCNs eterogenee, nella loro geomorfologia, in particolare nella diversità della funzione di ampiezza da quella delle corrispondenti OCNs uniformi, e nella forma dello scaling (quasi un doppio scaling, si aggiunge quello per i flussi minori), dettata presumibilmente dalla non più uniformità della densità di drenaggio. Si rimanda per tali conclusioni ai capitoli nei quali tali temi sono state approfonditi, quindi al Capitolo 4 e al Capitolo 6 rispettivamente.

Dal punto di vista termodinamico, per l'entropia e l'energia nel Simulated Annealing, il comportamento è il medesimo delle reti del modello ad iniezione uniforme.

Solo nei casi di precipitazione a campo deterministico e a campo anisotropo, tuttavia non sempre nelle simulazioni effettuate, si è trovata una variazione forte degli esponenti. Questo suggerisce che solo per i bacini con eterogeneità nella precipitazione molto accentuata (es. Colorado), o per loro parti, come nei due casi citati, si abbia una deviazione dalla classe "di ottimo" delle leggi a potenza.

Restano pertanto valide le assunzioni idrologico-allometriche eseguite con l'area cumulta, o meglio valgono anche considerando il flusso cumulato, e le implicazioni "OCNs-landscape evolution" tramite la relazione "pendenza-portata" con il flusso approssimato con l'area.

A partire dalla sistematizzazione della ricerca compiuta, sembrano necessarie simulazioni "in grande scala" in termini di numero e di ampiezza dei bacini considerati (in special modo quelli reali) per confermare i risultati ottenuti (e/o derivarne di nuovi), nonché una loro più accurata verifica, ad esempio tramite test statistici per verificare la bontà delle leggi a potenza (test χ^2 o altri), molti sono gli argomenti sviluppabili a partire dalle conclusioni di questa tesi.

Si citano i seguenti possibili temi.

(1) lo studio dell'evoluzione del paesaggio con forte eterogeneità di precipitazione ad esempio dovuta al cambiamento del clima [*Rinaldo et al.*, 1995; *Dietrich et al.*, 1994];

(2) la creazione di un nuovo modello per creare campi di pioggia maggiormente realistici ad esempio in funzione dell'orografia ($r_i = f(z_i)$), e in funzione della portata ($r_i = f(J_i)$), magari accoppiando analisi climatologico-atmosferiche dei bacini reali in studio e/o analisi multifrattali della copertura nuvolosa [*Lovejoy*, 2006, 1985; *Foufoula-Georgiou*, 2001];

(3) stabilire più approfonditamente le relazioni tra le leggi di scala geomorfologiche dei bacini, quelle nello spazio-tempo dei campi di pioggia cumulati [*Rodriguez-Iturbe et al.*, 1998], quelle relative alle sequenze nel tempo della portata all'outlet [*Porporato et al.*, 1997, 2001] e delle inondazioni [*Gupta, V.K., et al.*, 1994], quelle relazionanti la densità di drenaggio con l'umidità del terreno [*Abrahams*, 1994] quindi la quantità di vegetazione;

(4) sviluppo di un modello completo incorporante tutte le forme di randomness presenti nell'evoluzione del territorio*;

(5) analisi di ecoidrologia (es. valutazione della distribuzione, dell'abbondanza, e dell'evoluzione delle specie vegetali in relazione al ciclo idrologico) unite agli studi geomorfologici con campi reali di precipitazione o campi più realistici quindi anisotropi [Lovejoy, 2006], intendendo la precipitazione in senso lato;

(6) analisi allometrica del metabolismo dagli organismi agli ecosistemi [Enquist et al., 2003], derivando per questi ultimi i flussi di energia e massa a scala di bacino con lo strato limite atmosferico [Parlange, M.B., 1995] per i quali esistono già dei modelli di calcolo, es. GEOTop basato sulle routine FluidTurtle [Rigon et al., 2006; Zanotti et al., 2004; Bertoldi, 2004];

(7) sviluppare tecniche alternative per lo studio dei processi geomorfici es. introducendo la similarità con la turbolenza [Passalacqua et al., 2006] o la formalizzazione della teoria costrutturale [Bejan, 2000, 1997], quindi incentivando l'idrologia e la meccanica dei fluidi ad una proficua interdisciplinarietà con le altre scienze [Rinaldo, 2006].

(8) studio di altre forme frattali che la natura esibisce sul territorio (es. ghiacciai), di rilevanza per l'idrologia;

(9) perfezionare i modelli computazionali già realizzati e pubblicare delle guide di supporto al loro uso, inoltre, ampliare le interconnessioni e le reciproche compatibilità tra di essi sviluppando files di output con formato comune.

Così come il materiale supplementare alla tesi, nella pagina web dedicata allo studio delle OCNs eterogenee, vedi

<http://digilander.libero.it/matconv/ThesisMaterials.html>,

si prevede di mettere a disposizione parte dei futuri risultati, relativi ai sette punti sopra detti o ad altre ricerche inerenti l'argomento.

La responsabilità dei contenuti della pagina web sopra citata, ricadono direttamente ed esclusivamente sull'autore della presente tesi, non su terzi o sull'Università di Padova. L'autore dichiara di non avere alcun interesse finanziario.

In conclusione, come già anticipato nella Premessa, le eterogeneità sembrano influenzare la *competizione* dei singoli rami di drenaggio, ovvero lì dove piove di più nel corso del tempo, un canale ha più probabilità di formarsi rispetto uno, che, per effetto del *caso* si trova costretto a nascere in una zona nella quale mediamente, nello stesso tempo, piove molto meno.

Quindi nelle reti fluviali, oltre al *caso* (insito nell'algoritmo di Metropolis nella scelta casuale dei collegamenti tra i nodi-pixel) e alla *necessità* di massimizzare l'energia globale, quindi minimizzando quella dissipata al fine di tendere all'efficienza totale nel trasporto dell'acqua e dei sedimenti (anche di altre forme di materia organica ed inorganica, e/o di sostanze viventi?), agisce anche la *competizione* dei costituenti la rete stessa, ossia i canali di drenaggio, in funzione delle eterogeneità, geologiche e nella precipitazione in modo primario.

Necessità e Competizione sembrano quindi i concetti unitamente insiti nella parola *Auto-Organizzazione*, la quale assieme al *Caso*, regola il comportamento dei bacini fluviali, così come già ben sintetizzato nel titolo "*Fractal River Basins, Chance and Self Organization*" del libro degli autori della teoria, Rodriguez-Iturbe, Rinaldo e Rigon.

Si può poi complicare il modello considerando altre fonti di eterogeneità (o meglio tentando di emulare sempre più fedelmente la realtà), ad esempio la vegetazione come specie e come loro distribuzione nel bacino, ed il clima con le sue variazioni naturali e antropiche.

Certo è che tutte queste eterogeneità sono correlate da dei cicli, tipicamente con *feedbacks*, ad esempio il clima detta la distribuzione e l'intensità della precipitazione, quest'ultima influenza la distribuzione della vegetazione ed i suoli, i quali però sono a loro volta correlati, infine i flussi energetici e di massa costituiscono gli scambi tra superficie ed atmosfera.

*E' evidente come tale modello sia dal punto di vista computazionale estremamente gravoso, inoltre porterebbe quasi certamente alle stesse conclusioni del modello semplice ed originario delle OCNs, poichè da una parte gli effetti delle eterogeneità sommate tra loro si attenuano (così come nella meccanica dei materiali un mezzo totalmente anisotropo è ben schematizzabile con un

equivalente modello isotropo), dall'altra lo studio della Fisica delle Reti Complesse ha come obiettivo la comprensione della forma delle reti, associata alla loro funzione, non la ricerca e l'analisi dettagliata dei processi di *micro* e *meso scala*.

Il modello dei bacini fluviali frattali, quindi delle OCNs, è infatti un modello di macroscale, così come tutti i modelli di reti studiate dall'emergente Scienza della Complessità. La teoria delle OCNs non dice nulla ad esempio riguardo i profili idraulici in ogni sezione del canale o la pezzatura media in ogni tronco dei sedimenti trasportati.

Poi da tali modelli generali si può passare ad analisi più dettagliate delle loro componenti, ad esempio analisi "di nicchia" della flora presente in una parte del bacino.

Recenti studi [*Caylor et al.*, 2005; *Porporato e Rodriguez-Iturbe*, 2005], supportati anche da test in ambienti semiaridi [*D'Odorico et al.*, 2006, 2005; *Albertson et al.*, 2006], hanno anche dimostrato una ottimalità nella distribuzione della vegetazione, dello stato stazionario dell'umidità dei suoli, degli stati di "water-stress" nelle piante, e dei flussi idrologici ad esempio la traspirazione, a scala di bacino, quindi sempre a livello globale o di macroscale. Tale distribuzione rispecchia il carattere auto-affine delle reti fluviali insite nel bacino stesso, similarità tra tutti i bacini, e auto-organizzazione.

Sorprendentemente la biodiversità e le caratteristiche geofisiche dei bacini sembrano invarianti; tuttavia tale settore, l'ecoidrologia, è ancora in fase di pieno sviluppo, quindi molte dinamiche devono ancora essere ben comprese [*Porporato et al.*, 2002, *Eagleson*, 2000].

Le nicchie locali sono molto influenzabili e modificabili da forme di disturbo esterne, mentre le proprietà di scala globali rimangono inalterate.

Gli esponenti universali variano di molto poco, rispetto quelli del modello originario ad iniezione costante, perchè descrivono le proprietà globali della rete, influenzate esclusivamente dal vincolo della forma geometrica del bacino nel piano. Le aree occupate da canali sono evidentemente quelle più efficienti dal punto di vista della produzione e trasporto di sedimenti, nonchè per il trasporto dell'acqua se si considera favorevole la sua maggiore celerità quando si trova in "stato-canale" rispetto il suo "stato-versante".

In definitiva le OCNs uniformi sono un ottimo modello per catturare le proprietà globali delle reti fluviali, la relazione "pendenza-portata" con l'area

assunta come flusso è verificata, così come l'energia dissipata scritta in termini di area. L'"allometria idrologica" in funzione dell'area pertanto mantiene la sua validità. Attenzione vada posta nell'analisi di bacini con eterogeneità "estrema" i quali presentano deviazioni nello scaling.

"Every day is a good day. You need rain, you need sun, wind to blow things around. Every day is a good day"

Slow Turtle, supreme medicine man,
Mashpee Wampanoag Indians (Massachusetts, USA)

Alcuni concetti di Fisica delle Reti Complesse.

a1.1 Universalità.

In *meccanica statistica*, l'universalità è l'osservazione che ci sono proprietà, per una ampia classe di sistemi, che sono indipendenti dai dettagli dinamici del sistema.

I sistemi che mostrano universalità tendono ad essere *caotici* e spesso hanno un gran numero di parti interagenti tra loro.

La nozione di universalità è nata dallo studio delle *transizioni di fase* attraverso la meccanica statistica. Le transizioni di fase sono caratterizzate da un *parametro d'ordine*, come la densità o la magnetizzazione, che cambiano in funzione di un *parametro del sistema*, ad esempio la temperatura.

Lo speciale valore del parametro al quale il sistema cambia la sua fase è il *punto critico del sistema*; per sistemi che esibiscono universalità il valore più vicino a tale parametro è il *valore critico*, mentre, per quelli meno sensibili il parametro d'ordine dipende dai dettagli del sistema.

Se il parametro β è critico al valore β_c , il parametro d'ordine è approssimato dalla relazione:

$$a = a_0 ||\beta - \beta_c||^\alpha \text{ (a.1)}$$

L'esponente α è un esponente critico del sistema. *La rilevante scoperta fatta nella seconda metà del ventesimo secolo è che sistemi molto differenti tra loro hanno gli stessi esponenti critici, quindi universalità.*

Esistono però differenti *classi di universalità*, ossia classi caratterizzate da diversi esponenti critici a cui i sistemi fisici in esse ricadenti obbediscono.

L'universalità è anche osservata in sistemi non in equilibrio, come sistemi di particelle interagenti, modelli di reazione-diffusione, o sistemi auto organizzati.

Un esempio di universalità attinente alle reti fluviali, ma in generale estendibile a moltissime altre reti di trasporto, è quella del sistema circolatorio umano; l'analogia con i corsi d'acqua è stata introdotta da *Rinaldo* coniando il curioso termine "*hydrologic allometry*" [*Rinaldo et al.*, 2006]. Il concetto di efficienza di una rete è già stato introdotto nella descrizione delle OCNs, pertanto qui si è riportata direttamente il risultato che interessa per spiegare l'universalità manifestata attraverso la legge a potenza, detta *relazione di Kleiber*, del sistema di trasporto e consegna dei nutrienti ad un essere vivente (animale e essere umano), dove M è la massa corporea, e B è il tasso metabolico basale.

La legge è:

$$B \propto M^{3/4}, \text{ (a.2)}$$

la quale discende dalle relazioni tra il volume totale di sangue C utilizzato (pari alla somma del flusso di nutrienti) ed il tasso metabolico totale B , con la lunghezza caratteristica L dell'organismo, nello spazio Euclideo, quindi per $D = 3$ [*Banavar et al.*, 1999, 2002].

$$\left. \begin{array}{l} B \propto L^D \\ C = M \propto L^{D+1} \text{ per grafo ottimizzato} \end{array} \right\} \rightarrow B = M^{\frac{D}{D+1}}$$

(a.3)

Questa relazione è sorprendentemente valida per M che spazia in un intervallo di oltre 21 ordini di grandezza, dagli organismi unicellulari ai più grandi mammiferi del pianeta. La spiegazione di tale universalità è attualmente molto dibattuta [*West et al.*, 1999; *Banavar et al.*, 1999, 2002; *Painter et al.*, 2000; *Dodds et al.*, 2003], quello che però sembra assodato è il concetto che il trasporto dei nutrienti necessari alla vita debba avvenire con la quantità minima possibile trasportata di materia, nella fattispecie del sistema circolatorio il sangue.

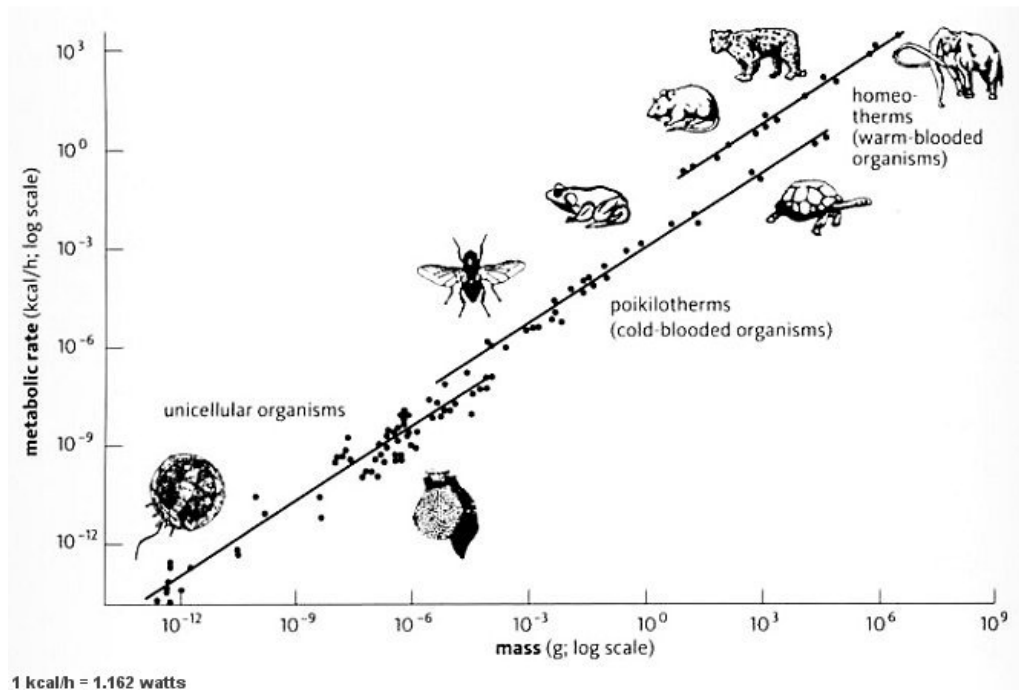


Figura a1.1 [da <http://universe-review.ca/R10-35-metabolic.html>]: rappresentazione bi-logaritmica della legge di Kleiber, $\ln B = \frac{3}{4} \ln M$; in precedenza ad essa si pensava che l'esponente fosse pari a $2/3$.

L'universalità, tuttavia, è anche presente nelle statistiche di altre quantità anche se esse non sono distribuite a legge di potenza.

Per esempio in un'ampia varietà di casi la distribuzione $P(x)$ della variabile x non è invariante alla scala di analisi (*scale invariant*), piuttosto è concentrata attorno a piccoli valori come 4, 5, 6 tipicamente. Questo è chiamato *Small World Effect* ed è stato studiato soprattutto per le reti sociali dove nei grafi i vertici rappresentano gli individui e i lati-collegamenti un piccolo numero di relazioni tra gli individui stessi.

L'effetto *Small World* è stato inserito nello *Small World Model* [Watts et al., 1998, 1999] il quale descrive particolari grafi il cui diametro rimane molto piccolo mentre il numero dei vertici aumenta. Tale modello è risultato essere ottimamente aderente al WWW, alle reti sociali e alle reti di coautori dove i diversi scienziati scrivono la pubblicazione congiuntamente [Newman, 2001a, 2001b].

Un'estensiva ricerca in ambito dello *Small World Model* applicato alle reti sociali è attualmente in corso alla Columbia University nella quale si vuole an-

che verificare la validità della cosiddetta teoria "dei sei gradi di separazione" [Watts, 2003].

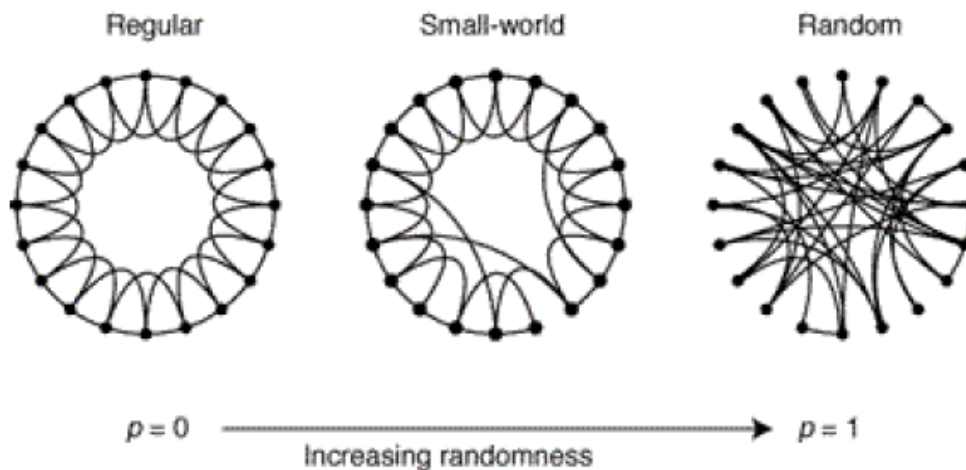


Figura a1.2 [Colizza, 2004]: il modello *Small World* interpola bene i modelli di rete estremi, il primo completamente ordinato e non "clusterizzato", l'ultimo completamente casuale e "clusterizzato"; il numero di nodi $n = 20$ e il numero di collegamenti, di lunghezza l , è costante, con $p = \langle k \rangle / n = \langle C_{rand} \rangle$ (\equiv coefficiente di clustering medio \equiv probabilità di connessione) e $\langle k \rangle = 2\langle l \rangle / n = np$ per n grande (\equiv grado medio di *Erdős-Rényi*)

a1.2 Leggi di potenza e distribuzioni a scala libera.

Quando la probabilità di misurare un particolare valore di qualche quantità varia inversamente come una potenza di quel valore, la quantità è detta seguire una legge a potenza (*power law*), anche conosciuta come *legge di Zipf's* o *distribuzione di Pareto* (in realtà le due leggi differiscono nella rappresentazione grafica della probabilità cumulata $P(x)$, il grafico di Zipf pone $P(x)$ in ordinata e x in ascissa, quello di Pareto l'opposto).

La forma della distribuzione di probabilità che segue una legge a potenza è generalmente descritta dalla seguente relazione:

$$p(x) = Cx^{-\alpha}, \text{ (a.4)}$$

da cui si ricava la relazione logaritmica,

$$\log[p(x)] = -\alpha \log(x) + \log(C). \text{ (a.5)}$$

La costante C nell'equazione (a.4) è fornita dalla richiesta di normalizzazione, ossia

$$\int_{x_{min}}^{\infty} p(x)dx = 1 \rightarrow C = (\alpha - 1)x_{min}^{\alpha-1}, \text{ (a.6)}$$

nella quale è immediatamente visibile che deve essere $\alpha > 1$ altrimenti l'equazione diverge; le leggi a potenza con esponente minore dell'unità non possono essere normalizzate e normalmente non si verificano in natura.

La frequenza degli eventi o gli effetti di variazione di dimensione in sistemi critici auto organizzati (SOCS), per esempio la legge di Gutenberg-Richter dell'intensità dei terremoti, e le leggi di Horton descrittive i sistemi fluviali, seguono una legge a potenza.

Tuttavia leggi a potenza sono osservate in svariati campi, includendo la fisica, biologia, geografia, economia, linguistica, le guerre ed il terrorismo.

Le leggi a potenza sono tra le più frequenti leggi di scala che descrivono l'invarianza di scala trovabile in molti fenomeni naturali.

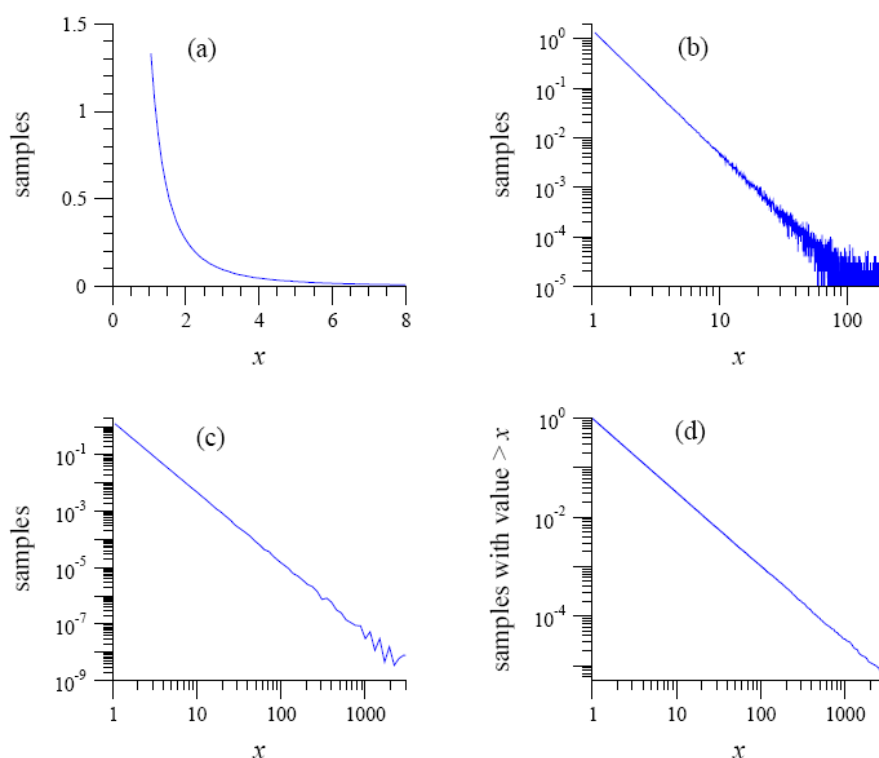


Figura a1.3 [Newman, 2005]: (a) istogramma di un insieme di un milione di numeri casuali, il quale ha una distribuzione a legge di potenza con esponente $\alpha = 2.5$; (b) lo stesso istogramma in scala logaritmica dove si notano le fluttuazioni statistiche nella coda; (c) istogramma costruito con la tecnica del "logarithmic binning" ossia normalizzando il numero di campioni nell'intervallo in cui ricadono; (d) istogramma della probabilità cumulata $P(x)$ la quale segue anch'essa una legge a potenza ma con esponente $\alpha - 1 = 1.5$.

Una distribuzione a legge di potenza è anche alle volte chiamata *distribuzione "a scala libera"*. Questo perchè la legge di potenza è la sola distribuzione che è la stessa a qualsiasi scala la si guardi⁷.

Sistemi a scala libera sono più in generale quei sistemi nei quali la singola lunghezza macroscopica (definita spesso come *lunghezza di correlazione*), la

⁷Poichè sia la legge di potenza sia la distribuzione log-normale sono distribuzioni asintotiche, può essere facile confonderle non utilizzando metodi statistici robusti come il modello Bayesiano di selezione o test sulle ipotesi statistiche. Un grafico bi-logaritmico di una distribuzione log-normale può spesso sembrare dritto per certi rapporti di x e y . Una regola per verificare se la distribuzione è conforme a una *power law* è quella di verificare se, in un grafico bi-logaritmico, risulta rettilinea a tre o più ordini di grandezza ("ingrandimento").

dimensione di scala, o la scala di tempo che li caratterizza, diverge lasciandoli senza scala.

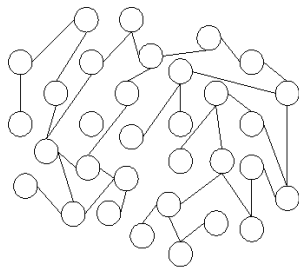
Tale situazione è tipica dei fenomeni critici e produce una legge a potenza seguita dalle grandezze fisiche macroscopiche del sistema.

Il preciso punto al quale la lunghezza di scala diverge è chiamato *punto critico* o *punto di transizione di fase continua*; si è quindi associato il concetto di universalità al concetto di legge a potenza, ossia l'universalità si esibisce attraverso una legge a potenza ed ogni classe di universalità ha un "ben preciso" esponente critico. Abbiamo visto però come esistono delle eccezioni a tale regola, vedi ad esempio il modello delle *Small World Networks* descritto sinteticamente nella sezione precedente.

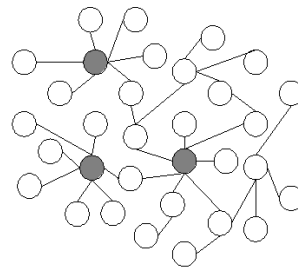
Attenzione però che non tutto ciò che esibisce una legge a potenza ha a che fare con complessità o criticità. Esistono meccanismi come i processi moltiplicativi, le combinazioni di esponenziali, le inversioni di quantità, e i cammini aleatori, i quali sono esempi di alcuni metodi di generazione di leggi a potenza [Caldarelli, 2005; Newman, 2005].

Recentemente [Barabasi et al., 1999] il concetto di distribuzione a scala libera è stato associato al concetto di reti a scala libera (*scale free networks*) introdotte da Barabasi studiando dapprima la topologia del World Wide Web e poi applicando li stessi concetti ad alcune reti sociali e biologiche [vedi anche Vázquez et al., 2003].

Una *scale free network* è una struttura con distribuzione a scala libera ma non più caratterizzata da una connettività puramente aleatoria; sono presenti nodi fulcro (*hubs*) i quali hanno più collegamenti in media di tutti gli altri nodi della rete, formati da un principio di "attacco preferenziale" [Barabasi et al., 2000].



(a) Random network



(b) Scale-free network

Figura a1.4 [*Castillo, 2004*]: (a) rete random; (b) rete a scala libera nella quale i nodi-fulcro sono evidenziati; ogni grafo ha 32 nodi e 32 collegamenti ma entrambi sono stati realizzati per apparire in modo chiaro nel piano, quindi nemmeno la (a) è una struttura puramente casuale.

a1.3 Effetti di scala finita (*Finite Size Effects*).

Ricordando la natura discreta della funzione distribuzione di probabilità nella pratica, è da sottolineare che anche per una funzione a scala libera c'è una tipica scala che è sempre presente, dovuta alla dimensione finita dei campioni analizzati.

Nel caso specifico delle reti si ha un grado minimo che è uno (non si può avere meno di un collegamento in un *grafo*) e un grado massimo che è la dimensione della rete (non si possono avere più di $n - 1$ collegamenti). Come nel caso del World Wide Web il grafo è molto ampio ed è possibile spostare il *cutoff superiore* lungo l'asse x delle ascisse quanto si vuole.

Si ha però una deviazione dal comportamento a legge di potenza quando x diventa troppo simile alla dimensione del sistema e quindi si hanno errori nella determinazione degli esponenti.

Risulta quindi controindicato prendere campioni di dati (*datasets*) troppo grandi poichè in tal caso la media, o momento primo, calcolata come sotto indicato (Formula 10), diverge senza limiti. La distribuzione in tal caso si dice non avere media finita, ed è tipica per valori di $\alpha \leq 2$ come accade per la distribuzione delle guerre o dei pennacchi solari.

$$\langle x \rangle = \int_{x_{\min}}^{\infty} xp(x)dx = C \int_{x_{\min}}^{\infty} x^{-\alpha+1}dx = \frac{C}{2-\alpha} [x^{-\alpha+2}]_{x_{\min}}^{\infty} \quad (\text{a.7})$$

La relazione () è utilizzabile per un dataset finito e quindi la si utilizza quando la coda della distribuzione viene tagliata (*tail cutoff*). In tal caso per ricavare l'esponente α non si può più procedere con la forma analitica tradizionale di seguito riportata (Formula 11), ma con altre tecniche abbastanza elaborate basate sulla funzione *beta* di Legendre [*Newman, 2005*].

$$\alpha = 1 + n \left[\sum_{i=1}^n \ln \frac{x_i}{x_{min}} \right] - 1 \quad (\text{a.8})$$

Spesso si pone anche il problema di stabilire un valore x_{min} , infatti poche distribuzioni reali seguono una legge a potenza in tutto il campo delle ascisse, ed in particolare per valori piccoli della variabile misurata.

Infatti la legge della distribuzione a potenza $p(x) = Cx^{-\alpha}$ diverge per $x \rightarrow 0$ con $\alpha > 0$. In tali casi l'esponente della legge viene calcolato omettendo la regione di valori compresi tra l'origine e x_{min} e la distribuzione viene detta "a coda" (*power law tail distribution*).

In conclusione la traduzione più adatta di *finite-size scaling* sembra essere quella di *leggi di scala per sistemi "a taglia fine"*, ossia leggi di potenza per campioni non troppo numerosi.

E' evidente come trovare esattamente li esponenti sia complesso, così come lo sono altre rilevanti questioni relative alle reti complesse, si rimanda pertanto a pubblicazioni specifiche [*Caldarelli, 2005; Newman, 2005; Albert et al., 2002*].

Allegato 2

Introduzione ad HydroGen per la generazione di campi random variamente correlati.

HydroGen è un codice, scritto in Ansi Fortran 77, per la generazione di funzioni casuali bidimensionali nello spazio con un'assegnata struttura di covarianza.

I calcoli vengono effettuati in doppia precisione.

Nel programma si fa riferimento alla covarianza (o *autocovarianza*) con la scrittura $cov(itype, r_x, r_y)$, dove l'argomento *itype* identifica la funzione di covarianza, r_x e r_y sono le distanze spaziali alle quali la covarianza è computata.

Con xsp e ysp si indicano le dimensioni principali dell'area di ricerca (*search neighborhood area*) nelle direzioni x e y (Figura a2.1), ed i valori per esse suggeriti, basati sulla funzione di covarianza scelta e sulle scale integrali/di correlazione, sono calcolate e visualizzate a monitor in automatico.

E' fornito, anch'esso in automatico, il valore suggerito per $xspa$, la dimensione secondaria dell'area di ricerca.

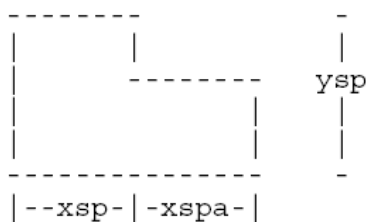


Figura a2.1: area di ricerca definita in HydroGen; le dimensioni xsp , $xspa$, e ysp devono essere introdotte manualmente, tuttavia sulla base di test condotti dagli autori *Bellin* e *Rubin*, il programma suggerisce in automatico dei valori.

Le dimensioni dell'area di ricerca devono essere ragionevolmente piccole rispetto le dimensioni di campo, pena un possibile errore di segmentazione con output vuoto; in tal caso si può optare di assumere dimensioni dell'area di ricerca minori di quelle suggerite, oppure effettuare la simulazione con un campo più ampio.

Tuttavia poichè le dimensioni della " *search neighborhood area*" sono basate su tests numerici degli autori del programma, vedi [Bellin e Rubin, 1996b], relativi alla riproduzione della struttura di covarianza, non è consigliabile adottarle molto più piccole di quelle consigliate, pertanto è preferibile lavorare con un campo il più ampio possibile.

Nel caso di campi frattali le dimensioni dell' area di ricerca sono automaticamente poste pari a quelle del campo generato, pertanto da $L_x = xsp$, $L_y = ysp$, $xspa = 0$, risulta l'equivalenza delle aree $L_x \times L_y = xsp \times ysp$.

Le strutture di covarianza possibili sono:

- (0) *itype* = 0, *funzione di covarianza discreta*, introdotta con un file di input il quale deve contenere la funzione di autocovarianza discretizzata su una sottogriglia di dimensioni $(xsp + xspa) \times ysp$, con spaziature Δx e Δy della griglia uguali alle spaziature della rete a maglia larga;

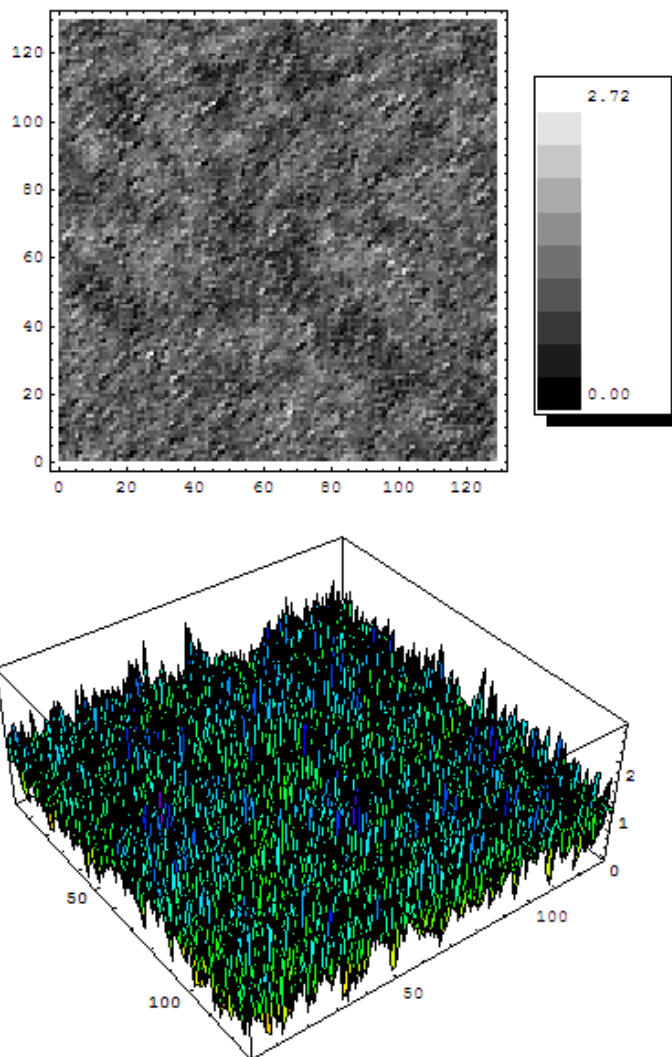


Figura a2.2: campo a covarianza discreta, si è eseguito l'esempio proposto a corredo del manuale [Bellin et al., 1996b], (vedi anche "addings" in <http://www.ing.unitn.it/bellin/frames/hydrogen.php>).

- (1) $itype = 1$, funzione di covarianza esponenziale, con $C_Z(r_x, r_y) = e^{-r'}$, dove $r' = \sqrt{(r_x/I_{Zx})^2 + (r_y/I_{Zy})^2}$ è la distanza tra due punti adimensionale, $r_x = x_2 - x_1$ e $r_y = y_2 - y_1$ sono le componenti in x e y della distanza di separazione tra due punti, I_{Zx} e I_{Zy} sono le scale integrali nella direzione x e y rispettivamente, $e = I_{Zy}/I_{Zx}$ è il rapporto di anisotropia;

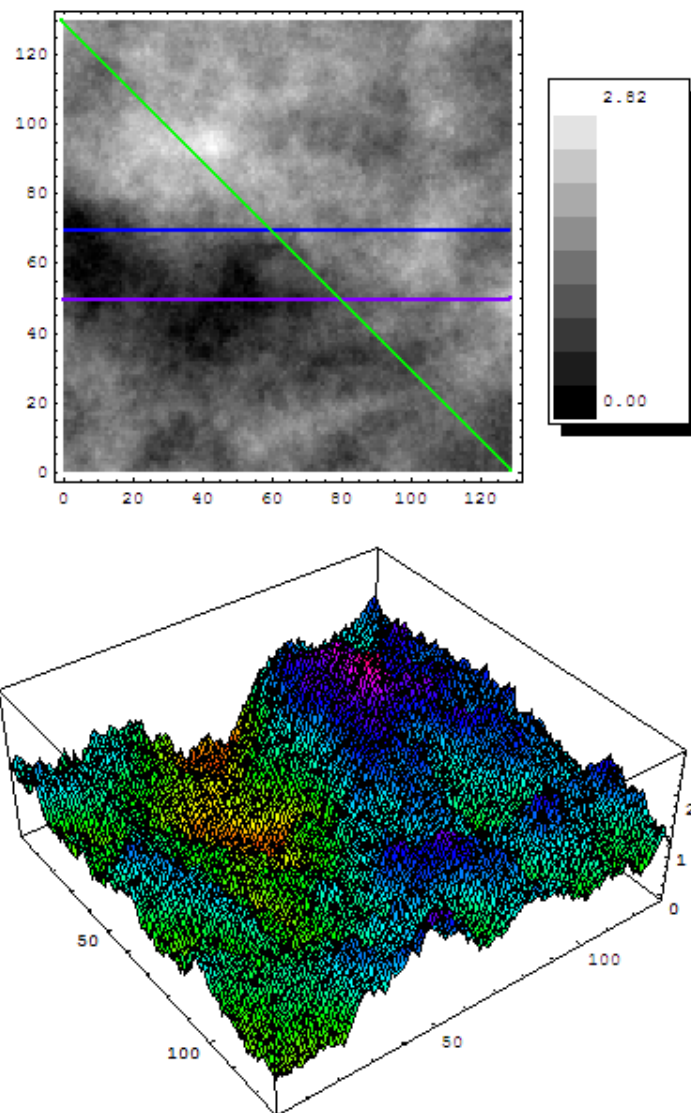
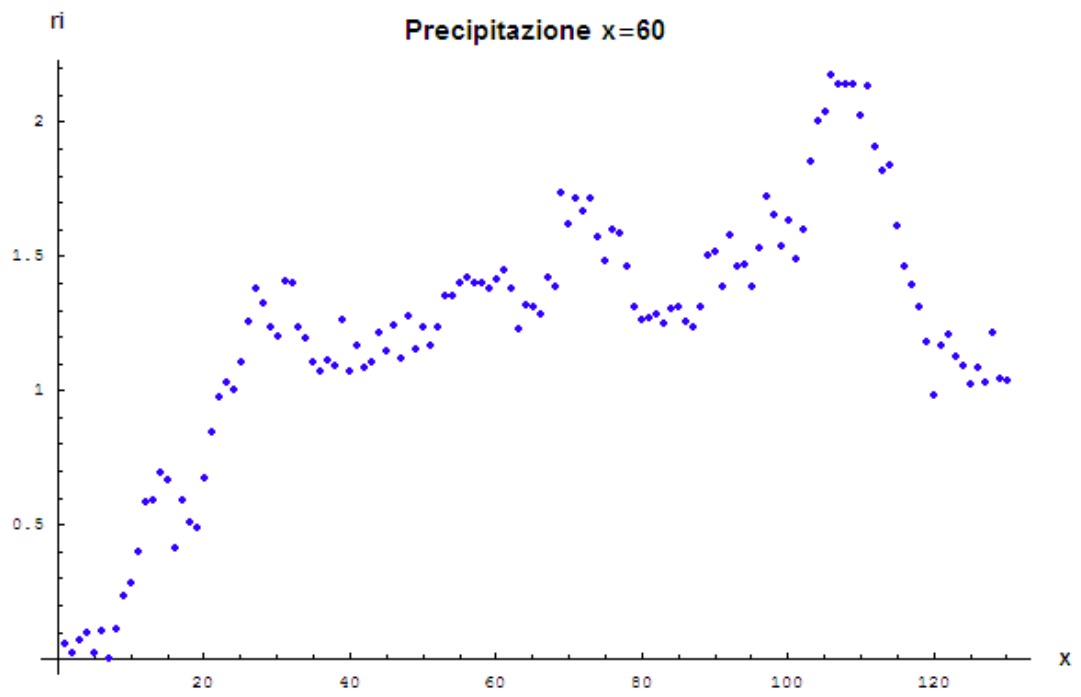
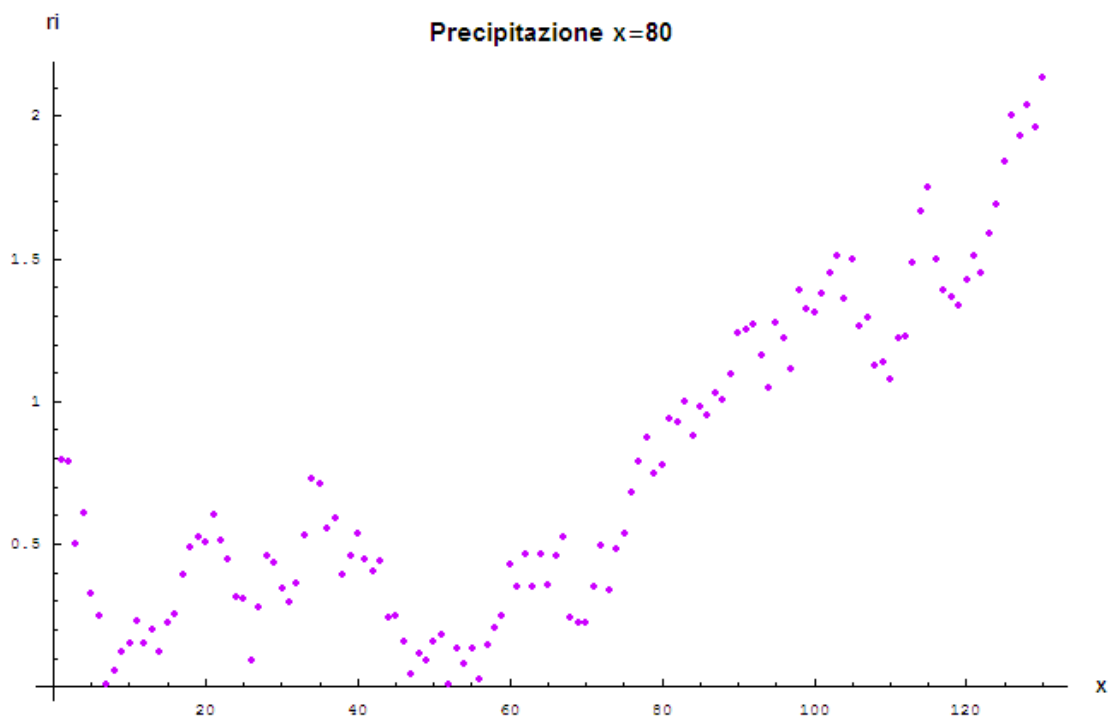


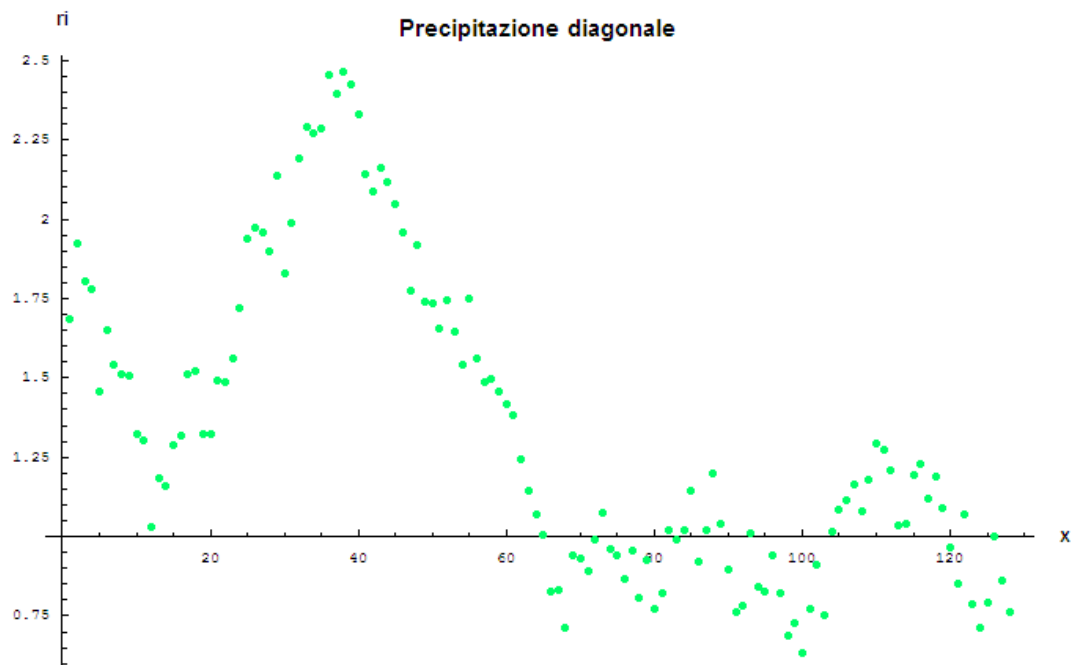
Figura a2.3: campo a covarianza esponenziale con $\langle r_i \rangle = 1$, $\sigma^2 = 1.0$, $I = 150$, e ottenuto con due raffinamenti di campo; visualizzazione bidimensionale in scala di grigi, e rappresentazione tridimensionale in modalità "MeshHue"



(a)



(b)



(c)

Figura a2.4: (a), (b), (c), sezioni a $x = 60$, $x = 80$, e sezione diagonale del campo di precipitazione di Figura a2.3.

- (2) $itype = 2$, funzione di covarianza Gaussiana, con $C_Z(r) = e^{-r'^2}$;

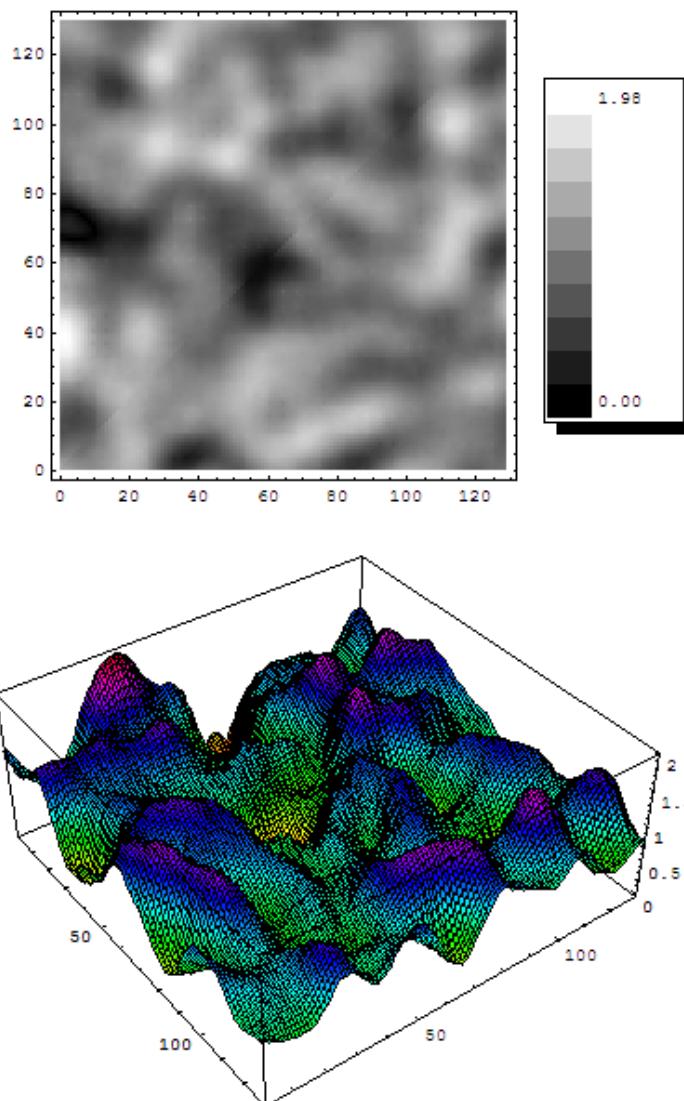


Figura a2.5: campo isotropo di pioggia a covarianza gaussiana con scala di correlazione $I = 10$, ottenuto con due raffinamenti di campo.

- (3) $itype = 3$, funzione di covarianza isotropica di Whittle, con $C_Z(r_x, r_y) = \alpha r K_1(\alpha r)$, dove $r = \sqrt{r_x^2 + r_y^2}$ e $\alpha = \pi/2I_Z$, ponendo $I_{Zx} = I_{Zy} = I_Z$, e $K_1(\alpha r)$ è la funzione modificata di Bessel del terzo tipo al primo ordine;

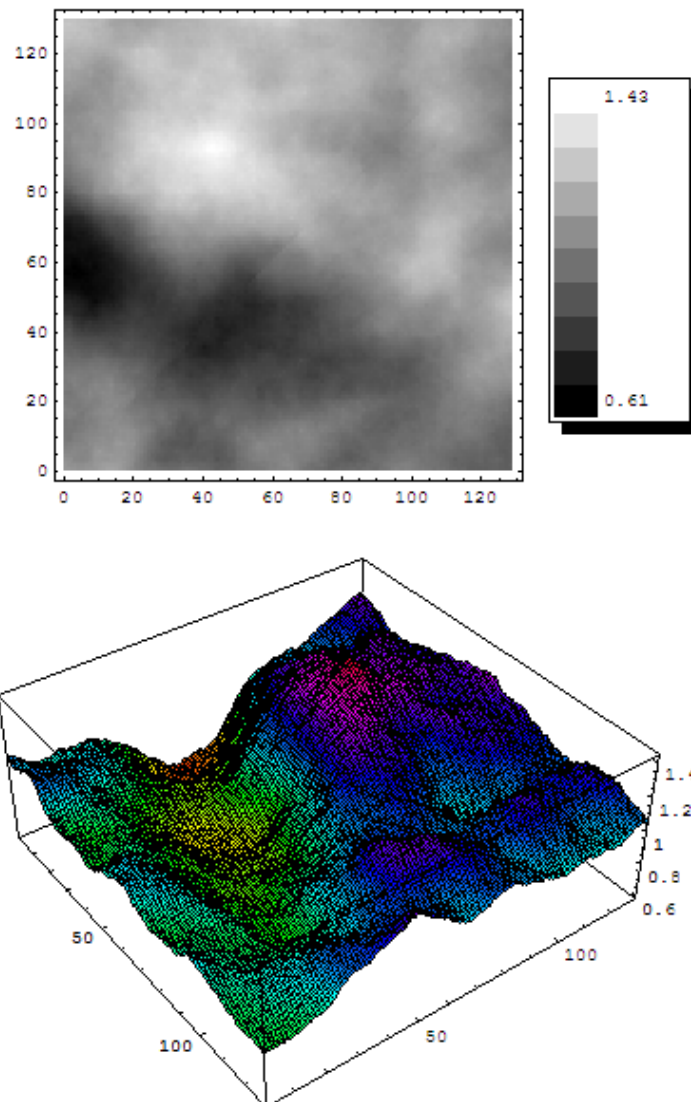


Figura a2.6: campo isotropo a covarianza di Whittle con $I = 10$, ottenuto con due raffinamenti di campo.

- (4) $itype = 4$, *funzione di covarianza isotropica di Mizell* (di tipo B) [Mizell, 1982], con $C_Z(r_x, r_y) = \alpha r K_1(\alpha r) - (\alpha r)^2 K_0(\alpha r)$, i cui simboli hanno lo stesso significato di quelli della precedente funzione di covarianza (3), e K_0 è la funzione di Bessel modificata del terzo tipo di ordine zero;

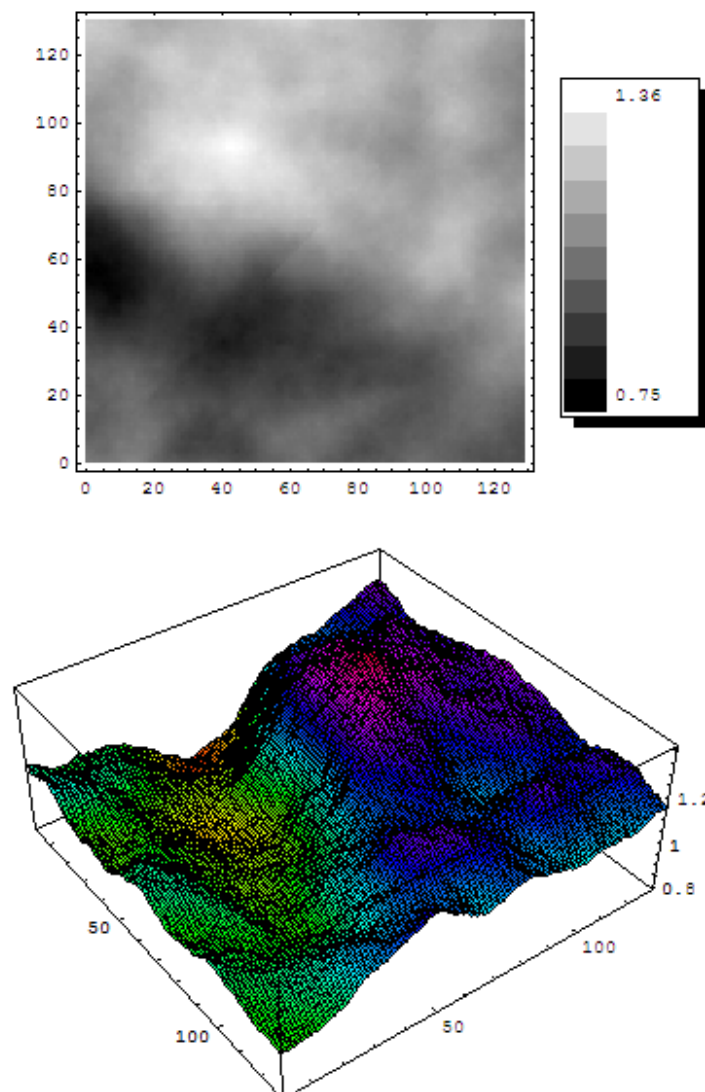


Figura a2.7: campo isotropo a covarianza di Mizell (tipo B) con $I = 10$, ottenuto con due raffinamenti di campo; si noti la sostanziale equivalenza del pattern di pioggia con quello di Figura a2.6 avente covarianza di Whittle, il valore $r_{i_{max}} = 1.26$ risulta minore mentre $r_{i_{min}} = 0.76$ risulta maggiore, sempre rispetto al precedente caso.

- (5) $itype = 5$, semivariogramma a legge di potenza, con $\gamma_Z(r_x, r_y) = cr^{I\beta}$, dove $r_x = x_2 - x_1$, $r_y = y_2 - y_1$, $r' = \sqrt{(r_x/I_x)^2 + (r_y/I_y)^2}$, I_x e I_y sono

le scale di riferimento lungo la direzione x e y rispettivamente le quali rappresentano la minima scala di variabilità risolta nelle simulazioni, c è una costante legata alla varianza di campo, e l'esponente β , che controlla come $\gamma_Z(r_x, r_y)$ cresce con la distanza, è in relazione all'esponente di Hurst tramite la relazione $\beta = 2H$ [Hurst, 1951]; per $\beta < 1$ il campo appare sgranato con valori correlati su distanze molto piccole, il fenomeno è chiamato *antipersistenza*, viceversa per $\beta > 1$ la correlazione persiste, da cui il nome *persistenza* per tale caso, su grandi distanze, il campo appare "liscio" ma con forti contrasti tra una zona e l'altra. Il caso con $H = 0.5$, quindi $\beta = 1$ corrisponde al rumore Gaussiano.

Ponendo $I_x = I_y = I$ si ottiene un campo frattale o auto-simile, con $I_x \neq I_y$ si crea un campo auto-affine; inoltre con $\Delta x = \Delta y = I$ non si ha variabilità spaziale a scale minori di I .

Nel caso di covarianza "frattale" si può anche forzare la media ad essere costante in ogni realizzazione, questo è equivalente però ad assumere deterministiche e note le variabilità di campo a larga scala.

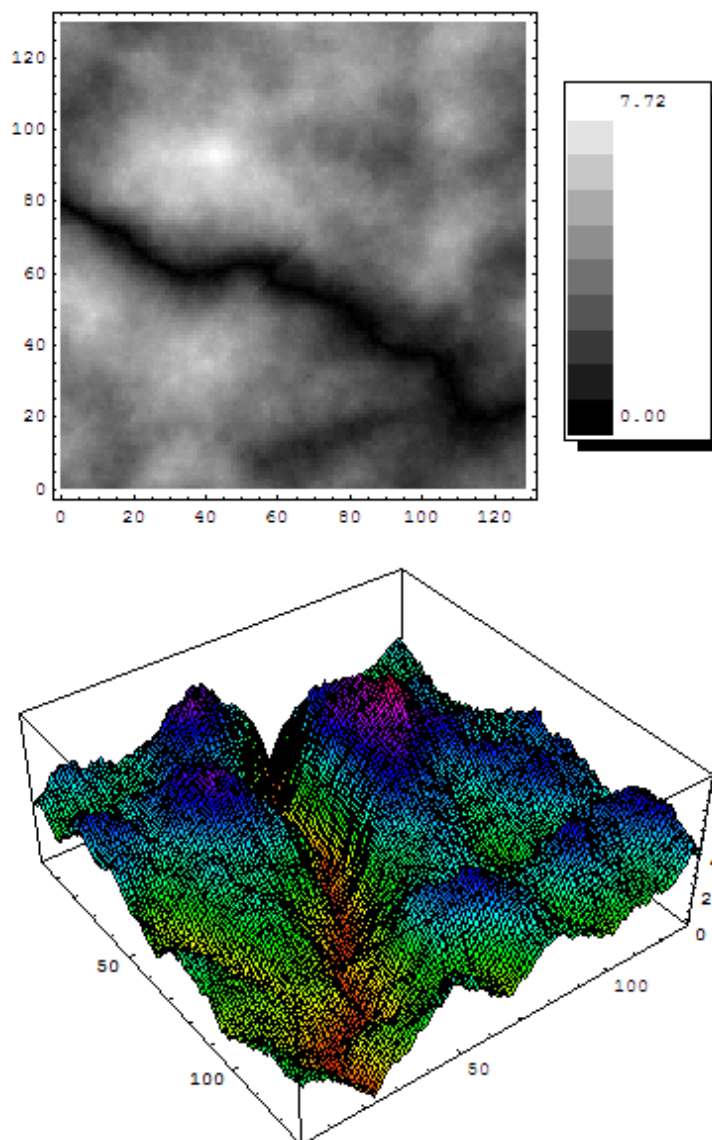


Figura a2.8: campo isotropo con semivariogramma a legge di potenza, avente $c = 0.5$, $\beta = 1.8$ quindi $H = \beta/2 = 0.9$, $I = 5$, e media imposta a $\langle r_i \rangle = 1$; si vede come tale campo proposto abbia una ridotta probabilità di descrivere la realtà fisica di un evento precipitativo.

All'aumentare della scala di correlazione o della scala integrale I dei campi di pioggia generati, aumenta la distanza tra le zone a pioggia mediamente nulla, o mediamente unitaria, dato che la media è stata imposta pari ad uno, e la loro dimensione.

Quindi per I/L grande, ad esempio tendente ad uno o maggiore, si hanno zone di precipitazione molto estese e distanti tra loro (rispecchianti gli eventi nella stagione invernale), viceversa per I/L piccolo si hanno zone di precipitazione molto vicine tra loro e di dimensione limitata (eventi estivi), mentre al tendere di I/L a zero si ritorna al caso uniforme.

Inoltre al crescere di I/L il valore massimo di r_i diminuisce in conseguenza all'aumento dell'ampiezza del campo di precipitazione (mediante di area $I \times I$ e con $\langle r_i \rangle = 1$, nel bacino $L \times L = 128 \times 128$); è possibile infatti fissare $I > L$ (imponendo opportunamente in HydroGen un'area di ricerca piccola, ma non troppo, per evitare errori nella generazione dei campi) ma il valore medio della variabile aleatoria precipitazione è fissato sempre sul DEM in studio, quindi nei bacini reali sull'area $L \times L$.

L'imposizione della media ad uno nel campo di pioggia $L \times L$ spiega il perchè nel caso con I elevato, tendente alla dimensione del bacino o superiore, si verifichi sempre il caso di "alluvione" e non di "siccità", ossia il bacino ricade sempre nella zona caratterizzata da precipitazione.

Per ovviare a questo sono state fatte delle simulazioni con campi di precipitazione a media zero, quindi come se si ricadesse nella zona a precipitazione mediamente nulla del caso con rapporto I/L elevato (es. pari ad uno); li esponenti in tal caso risultano sostanzialmente uguali a quelli per I/L tendente a zero, quindi a quelli delle reti ottime con $r_i = \text{cost} = 1$.

L'analisi della variazione degli esponenti è stata condotta generando campi di precipitazione con varianza $\sigma^2 = 0.5$ e $\sigma^2 = 1$

In genere, per tutte le strutture di correlazione, le lunghezze di campo L_x e L_y , e le spazature di griglia Δx e Δy , vengono sempre esplicitate come multipli delle scale integrali/di correlazione I_x e I_y , ossia si trova scritto frequentemente $L_{x,y} = mI_{x,y}$ e $\Delta x, y = mI_{x,y}$ con m numero generico decimale e positivo.

I grafici vengono quasi esclusivamente forniti in forma adimensionale rispetto le scale integrali o le scale di correlazione (queste ultime, alle volte anche dette, scale di riferimento).

Secondo la scelta dell'utente la generazione può avvenire in due modi:

- (i) generazione diretta su una griglia selezionata;

(ii) generazione su una griglia "aperta" (*coarse grid*) seguita da massimo tre passi di raffinamento nei quali la dimensione del blocco di punti, quindi l'*indice di coarse graining* λ , è ridotto di un fattore pari a due e pertanto la densità di nodi della griglia raddoppia ad ogni step.

La generazione della griglia prima avviene su una griglia "sparsa", poi le sottosezioni della griglia sono rifinite incrementando la densità di nodi; ad ogni raffinamento, il quale avviene in due passi, il numero di nodi raddoppia.

Per esempio inserendo $\Delta x = 0.25\Delta y = 0.025$ come valori desiderati per le spaziature di griglia del campo finale (indicati anche come dx e dy), e posto $n = 1$ raffinamenti, il programma genera dapprima una griglia sparsa con spaziature $\Delta x = 0.50$ e $\Delta y = 0.050$ (quindi $\lambda = 2$), il quale poi è raffittita una volta al fine di ottenere la maglia di calcolo voluta.

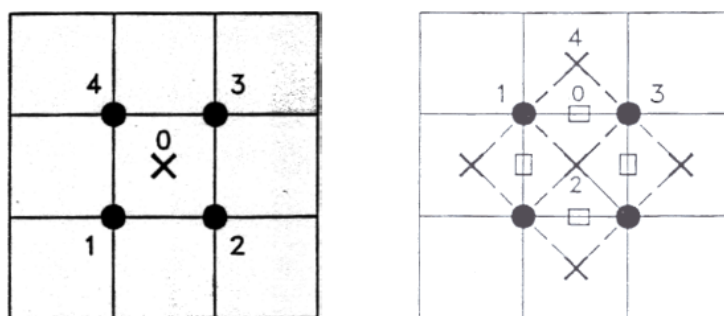


Figura a2.9: esempio di discretizzazione isotropa del dominio (con griglia avente Δl uguale in x e y), ed esempio di raffinamento; sulla sinistra il primo stage di raffinamento (su coarse grid), sulla destra il secondo stage.

Nelle simulazioni condotte sulle reti fluviali artificiali e naturali, si è sempre posto $\Delta x = \Delta y = 1.00$ pari alla dimensione unitaria dei pixel del DEM.

Sempre in merito al precedente punto (ii) in [Bellin e Rubin, 1996b] si avvisa l'utente di rispettare il limite di tre raffinamenti per evitare una apprezzabile riduzione nell'accuratezza numerica.

In generale il numero di passaggi per raffinare la rete dovrebbe essere sufficientemente grande per evitare errori di segmentazione (tipici dei casi con area di ricerca troppo ampia), ma allo stesso tempo, abbastanza piccolo per preservare un certo livello di accuratezza dei campi generati.

Il numero dei passi di raffinamento dipende dal rapporto tra la risultante spaziatura della griglia "coarse" e le scale integrali; tests numerici [Bellin e Rubin, 1996b] suggeriscono che per campi casuali regolari le spaziature della griglia "coarse" dovrebbero non eccedere due volte il valore delle scale integrali ($l_x = \lambda\Delta x \leq 2I_{zx}$ e $l_y = \lambda\Delta y \leq 2I_{zy}$), mentre per campi frattali il limite dipende dal valore β e dalle dimensioni di campo.

Per questa ragione la spaziatura ottimale della rete a maglie larghe, dovrebbe essere fissata secondo tests performati direttamente dall'utente, usando differenti numeri di raffinamenti multipli.

Il raffinamento può essere utile quando l'area di ricerca (*neighborhood area*) è grande; in queste situazioni lo sforzo computazionale per la generazione della griglia a maglie larghe (*coarse grid*), può essere ridotto senza un'apprezzabile impatto sull'accuratezza.

Si indica con Δx e Δy le discretizzazioni della griglia nella direzione x e y rispettivamente, ossia la distanza tra due centri di pixel adiacenti.

Per campi frattali (*auto-simili*) la più grande area di ricerca coincide con il dominio di generazione.

E' importante definire nel processo di generazione la dimensione massima della matrice contenente la funzione di covarianza.

Ad ogni step le dimensioni sono $(NN2 + NN2A) \times NN1$ [Bellin e Rubin, 1996b], dove si definisce $NN2 = xsp/\Delta x$, $NN2A = xspa/\Delta x$, e $NN1 = ysp/\Delta y$, con xsp e ysp le dimensioni in x e y dell'area di ricerca come mostrato in Figura a2.1, mentre Δx e Δy sono le discretizzazioni della griglia lungo x e y .

Da notare che mentre xsp e ysp rimangono costanti ad ogni step di calcolo dopo averli inseriti, Δx e Δy variano tante volte quanti sono i raffinamenti di griglia utilizzati, massimo tre come consigliato; ad esempio nel caso si voglia un solo raffinamento i valori di input voluti Δx e Δy risultano dapprima pari a $\lambda\Delta x$ e $\lambda\Delta y$, con λ indice di coarse graining, corrispondenti alla generazione della prima griglia "coarse".

Nel caso di campi frattali $NN2$ e $NN1$ sono il numero di nodi nelle direzioni x e y , perchè l'area di ricerca coincide con il dominio generato, inoltre $NN2A = 0$ perchè $xspa = 0$.

Il principale vantaggio del metodo usato dal programma è che i *coeffici-*

enti di kriging dipendono esclusivamente dalla geometria di campo e dalla spaziatura di griglia, e non dai loro stessi valori [Bellin e Rubin, 1996b].

L'opzione di utilizzare coefficienti di interpolazione (o di kriging) generati su simulazioni precedenti, è valida esclusivamente per simulazioni con identiche spaziature di griglia Δx e Δy , e stessa funzione di correlazione $C_Z(r)$.

È possibile quindi generare un campo casuale $\mathfrak{F}_i(Z)$ con le stesse proprietà statistiche di un generico campo $\mathfrak{F}_{i-1}(Z)$ precedentemente simulato e avente dimensioni L_x e L_y differenti, utilizzando i coefficienti di interpolazione di quest'ultimo.

Con Z si indica, in genere, una *funzione casuale stazionaria nello spazio* (anche nota in letteratura come RSP, da *Random Space Function*) caratterizzata da una media costante $\langle Z \rangle$ e una varianza σ_Z^2 .

Con l_x e l_y si indicano le dimensioni di campo ossia le dimensioni in x e y della griglia generata.

Al variare del tipo di covarianza (o autocovarianza) varia la *funzione di autocorrelazione* definita come rapporto tra la covarianza e la varianza, analiticamente è $\rho(r_x, r_y) = C(r_x, r_y)/\sigma_Z^2$; al solito r_x e r_y sono le componenti in x e y della distanza tra due punti nei quali la funzione di covarianza C_Z è computata, e σ_Z^2 è la varianza.

Il campo casuale generato, o i campi nel caso di più realizzazioni Monte Carlo, è dato come output in due possibili modalità, formato x, y, z in colonna dove x e y sono le coordinate spaziali e z il valore della variabile random, oppure formato matrice in cui i valori della variabile aleatoria Z si susseguono.

L'ultimo formato è stato postprocessato, trasformandolo nel formato FluidTurtle, per ricavare la matrice delle aree cumulate con iniezione r_i eterogenea.

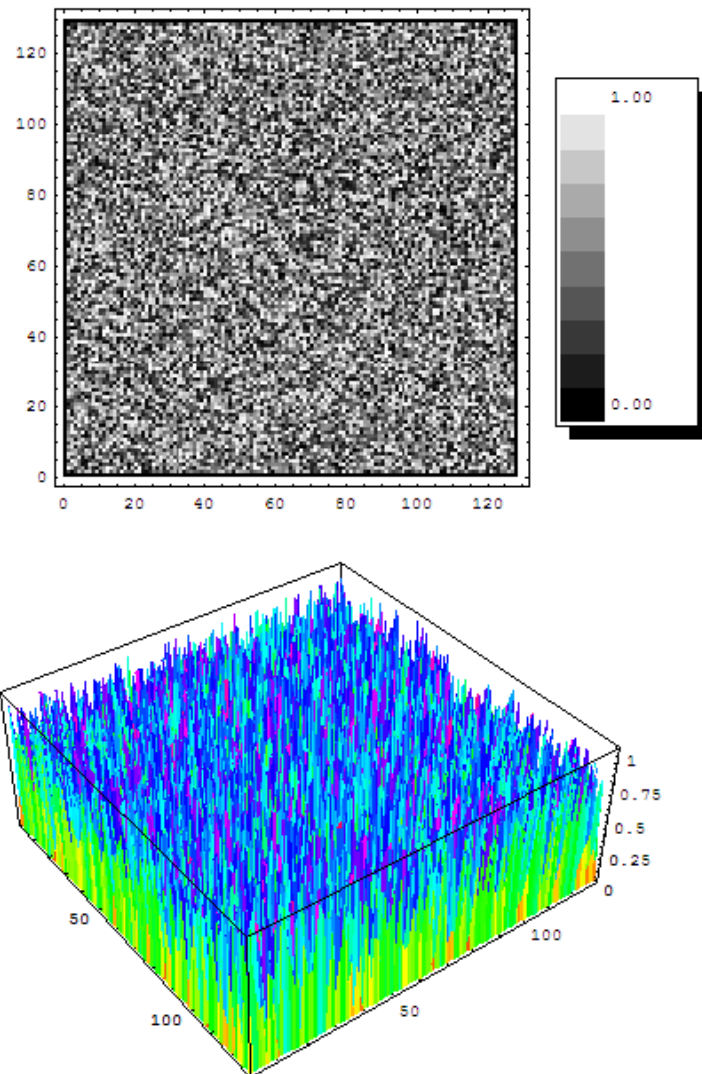


Figura a2.10: campo di pioggia casuale senza struttura di correlazione, generato con la routine FluidTurtle "random-uncorrelated" [Rigon *et al.*, 2002; Convertino *et al.*, 2006b]

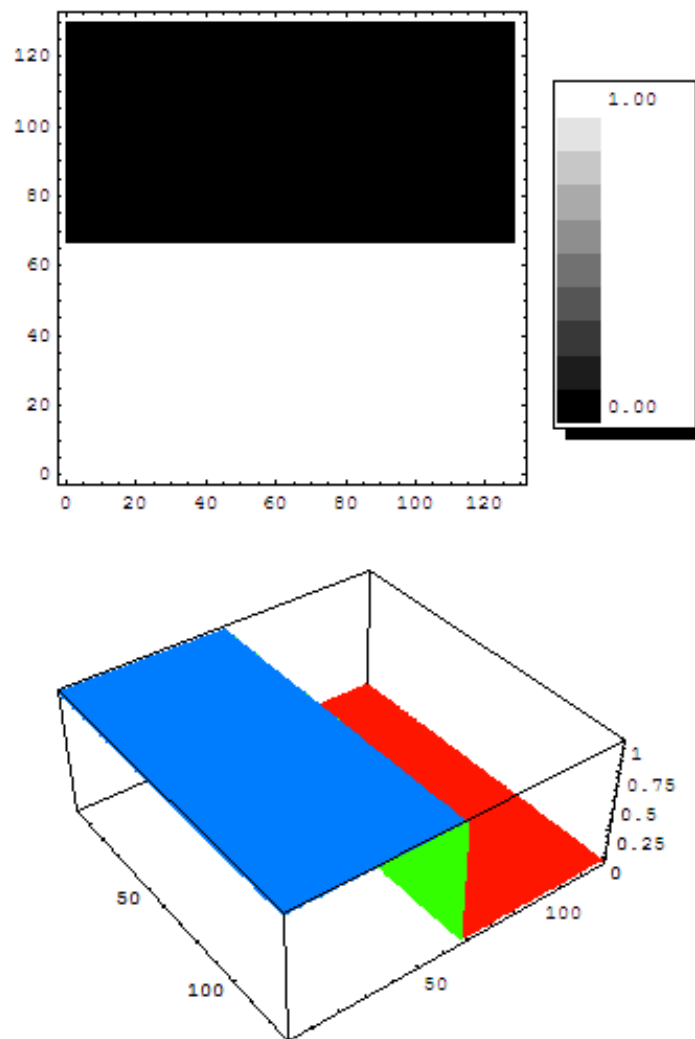


Figura a2.11: campo di pioggia deterministico imponendo nella metà superiore $\langle r_i \rangle = 0.001$, nella metà inferiore $\langle r_i \rangle = 1.001$; la scelta di numeri non interi è dovuta al fatto di voler avere un unico outlet, applicando tale campo ad una rete per la determinazione del flusso cumulato $J_i \forall$ pixel i -esimo. La routine "r-metropolis" non accetta infatti condizioni al contorno cilindriche.

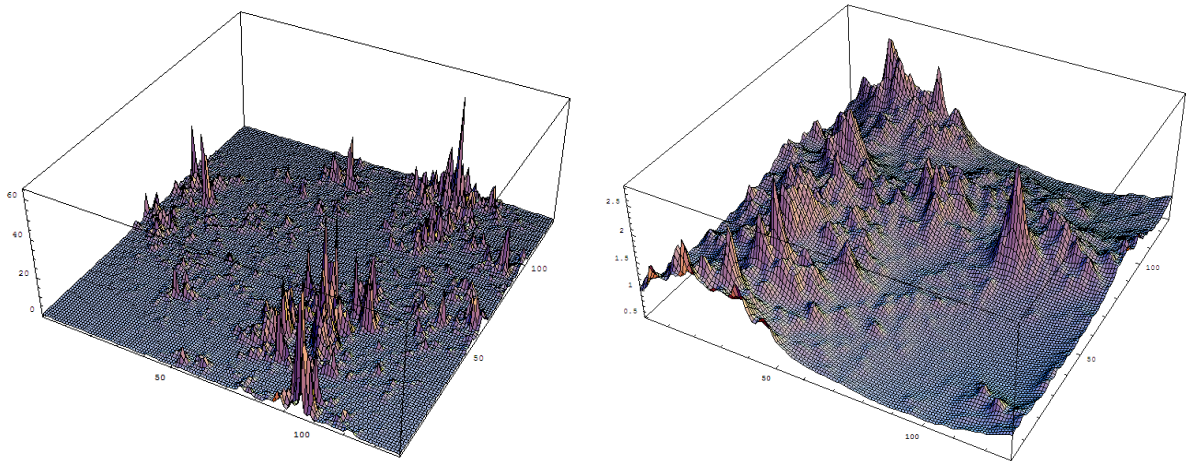


Figura a2.12: alcuni campi multifrattali isotropi, non utilizzati nelle simulazioni proposte, ma probabilmente più rappresentativi dei campi di precipitazione reali [si veda <http://www.physics.mcgill.ca/gang/multifrac/index.htm>].

Allegato 3

Le routines FluidTurtle per lo studio delle OC-Ns, basi teoriche, e ulteriori software utilizzati.

Oltre al già citato HydroGen, sinteticamente illustrato nell'Allegato 2 precedente, ed utilizzato per la generazione di campi random variamente correlati, si riportano i principali software adottati per lo sviluppo grafico e numerico della tesi.

Le simulazioni sono state realizzate grazie alle routine FluidTurtle opportunamente modificate come descritto al Capitolo 1; è in fase di sviluppo un manuale [*Convertino et al.*, 2006b] comprendente una più appropriata descrizione di ogni routine, la loro compilazione e le mutue interrelazioni. Inoltre, il tutto verrà commentato e pubblicato in rete attraverso Doxygen.

I programmi utilizzati per la tesi, oltre alle già citate routine FluidTurtle, sono principalmente i seguenti:

- compilatori: Eclipse SDK 3.2.1, Metrowerks CodeWarrior 8.0, Blood-Shed Dev-C++;
- per elaborazioni grafiche e numeriche: Mathematica 5.2, Matlab 7.0 R14 e Matlab package for Excel (in VisualBasic);
- analisi DEM: JGrass 2.0 Trento, MapWindow 42SR;
- manipolazione dati e immagini: TextPad, GoBatchGS for GostScript 8.54;

- scrittura tesi: InftyEditor for Latex, TeXnicCenter (MikTeX) e WinEdt.

a3.1 Teoria di base delle routine FluidTurtle.

a3.1.1 Eden.

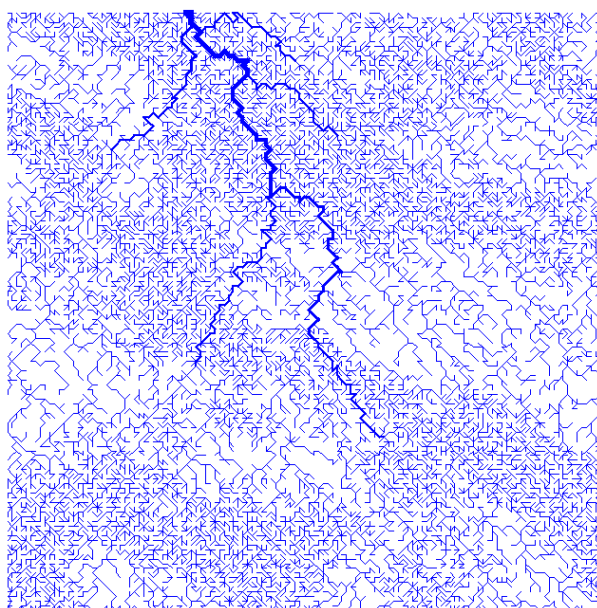
Viene creata una rete iniziale random con un meccanismo di tipo "Eden".

Questo significa che, partendo da uno o più *outlets*, viene costruito il confine del bacino o dei bacini. Un punto sul confine il quale è conseguentemente drenato è scelto a random; il contorno è poi calcolato nuovamente e la procedura va avanti fino a quando tutti i punti del bacino risultano essere drenati.

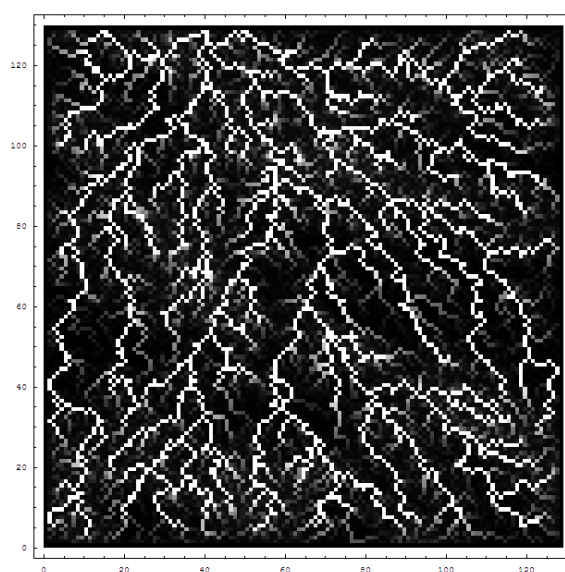
La crescita "Eden" è generata da un cammino casuale auto-evitante (più noto alla comunità scientifica nella sua terminologia anglosassone "*self-avoiding random walk*") il quale è noto porta a strutture subottimali [*Rodriguez Iturbe e Rinaldo, 1997*].

E' interessante usare le strutture Eden come forme fondamentali di base a causa della chiara presenza in esse esclusivamente del principio di selezione dominato dalla opportunità (*chance dominated selection principle*), ossia nessuna necessità è richiesta dal cammino casuale e le strutture ad albero si formano per via della natura autoevitante imposta al processo.

In passato si pensava che le strutture Eden cogliessero le essenzialità della selezione naturale [*Leopold et al., 1964*], non cogliendo altri aspetti fondamentali ad esempio quello della necessità.



(a)



(b)

Figura a3.1: (a) rete Eden completamente casuale generata con campo di pioggia random a covarianza esponenziale, e imponendo $\langle r_i \rangle = 1$, $\sigma^2 = 0.5$, $I = 30$; (b) densityplot dei flussi cumulati nel quale si nota la loro distribuzione random, le zone più chiare sono quelle con flusso cumulato maggiore (pixel canale), quelle più scure con flusso minore (pixel versante).

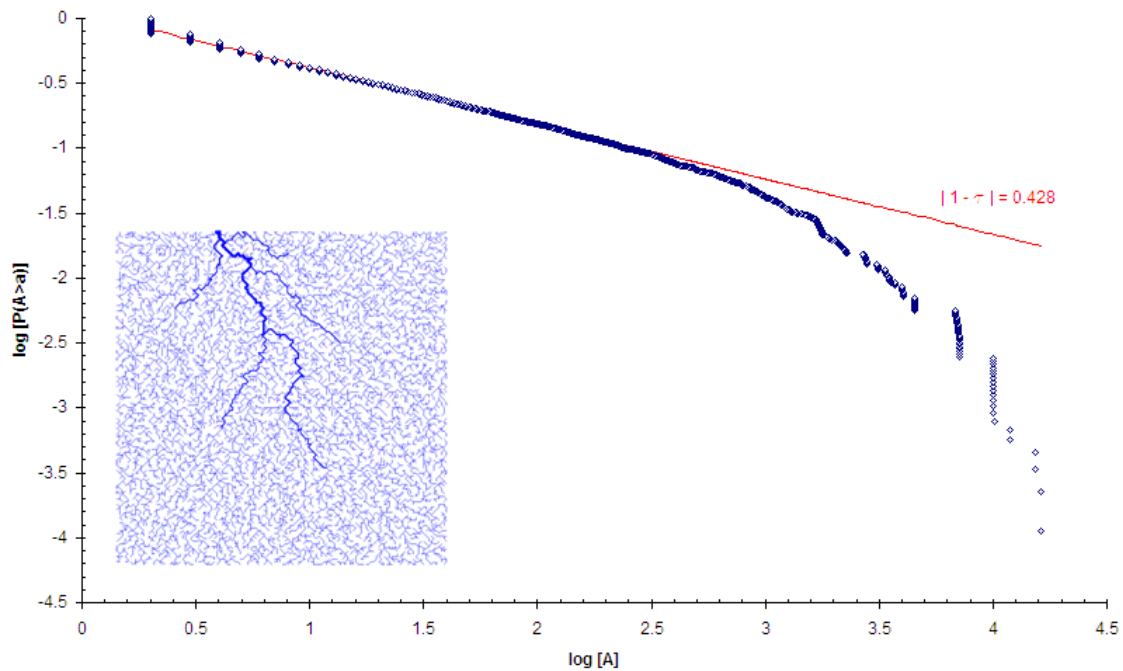


Figura a3.2: approssimazione lineare della distribuzione dei flussi cumulati per la rete Eden formata con campo di pioggia a covarianza esponenziale e $\langle r_i \rangle = 1$, $\sigma^2 = 0.5$, $I = 1$; l'esponente di scala $\tau_{Ed} = 0.428$, risulta molto vicino al valore ottimo delle OCNs pari a $\tau^* = 1.43$. Da reti Eden si parte con il Simulated Annealing per ottenere la rete ottima, sia essa omogenea sia eterogenea.

a3.1.2 Scheidegger.

Realizza una rete di Scheidegger la quale è il prototipo di una rete diretta ed ha molte proprietà analitiche. Rispetto al modello originale il quale richiede delle maglie di tipo triangolare [Scheidegger, 1967], l'applicazione usata genera reti di Scheidegger su maglie quadrate e con l'aggiunta della possibile direzione di drenaggio "7" secondo il metodo delle 8 direzioni di drenaggio [Tarboton, 1992]; inoltre sono assunte condizioni al contorno cilindriche che permettono alla rete di drenare anche verso l'esterno (*adsorbing barriers*, vedi [Chandrasekhar, 1943]).

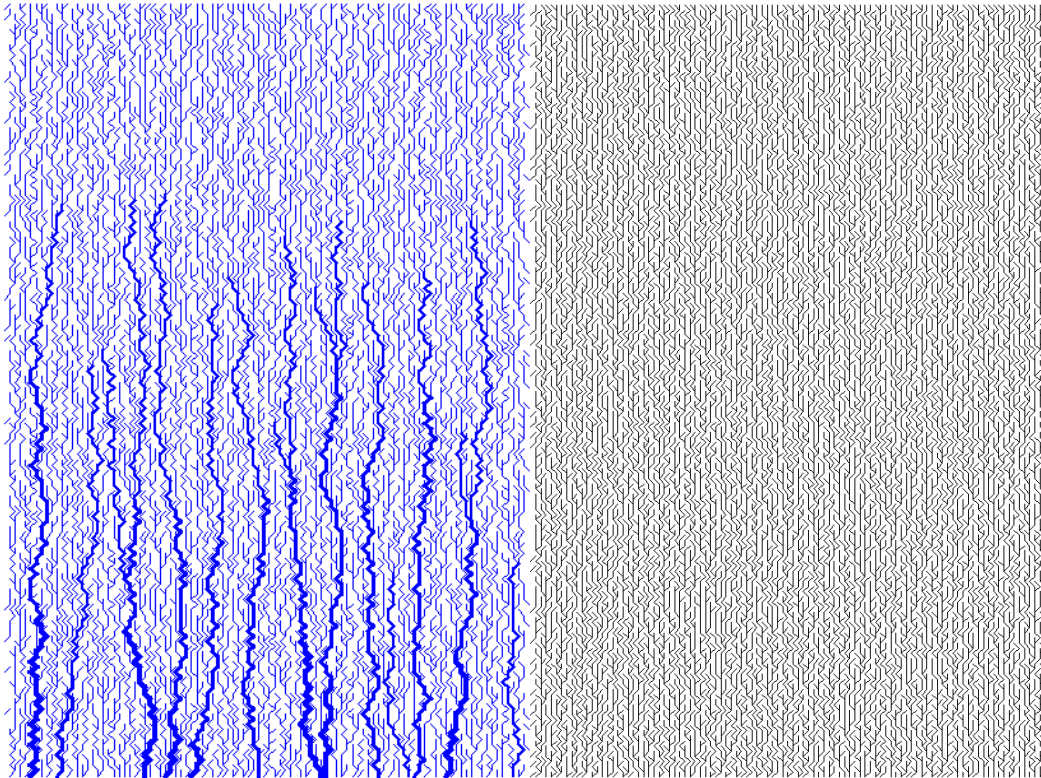


Figura a3.3: a sx , rete di Scheidegger su maglia rettangolare, con condizioni al contorno cilindriche e direzioni di drenaggio possibili $6, 7, 8$ secondo il metodo delle 8 direzioni di drenaggio, la rete drena dall'alto verso il basso; a dx , rappresentazione delle direzioni di drenaggio della rete a sx .

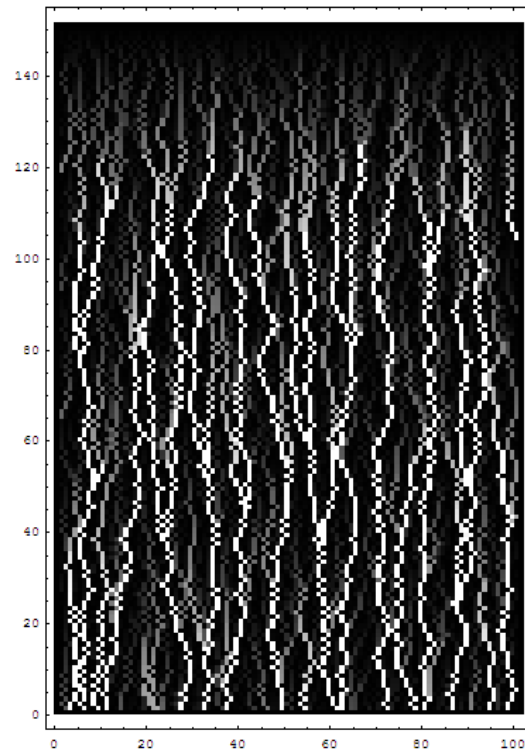


Figura a3.4: densityplot delle aree cumulate della rete di Scheidegger di Figura a3.3 con drenaggio dall'alto verso il basso.

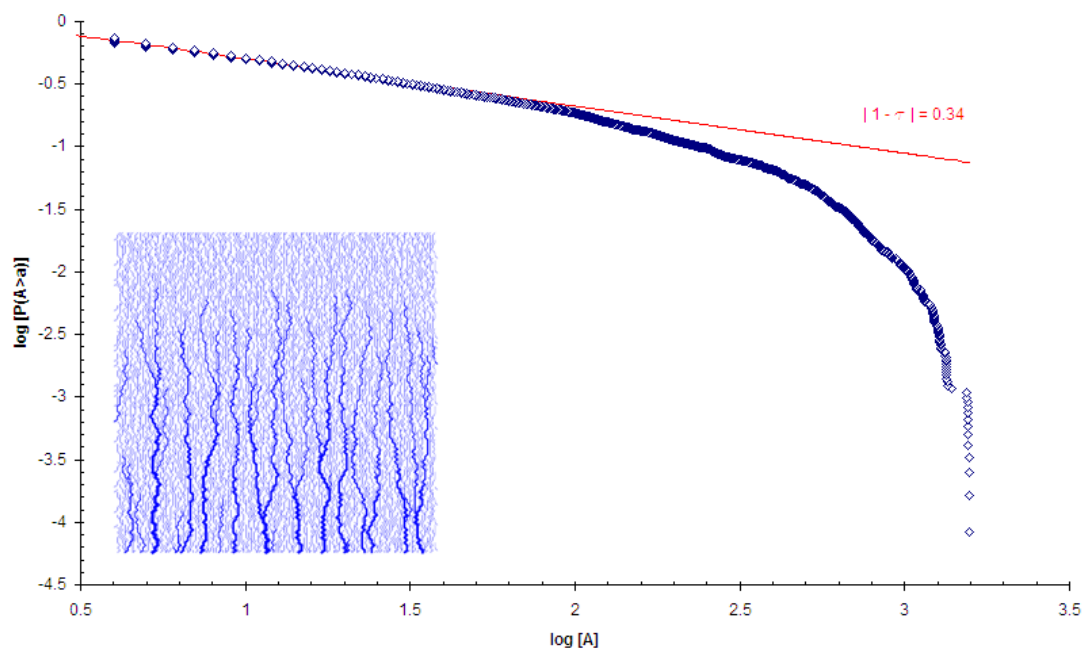


Figura a3.5: scaling delle aree di una rete di Scheidegger quadrata, l'esponente $\tau = 0.34 = 4/3$ risulta coincidere con quello esatto determinabile analiticamente [Maritan et al., 1996]

Più semplicemente la rete di Scheidegger originale è una costruzione derivante da una regola stocastica: con uguale probabilità un ipotetico viaggiatore sceglie di compiere il passo a destra o a sinistra solamente. Tale modello è stato derivato in riferimento alla forma di drenaggio di un bacino intramontano⁸. [Scheidegger, 1967] ed è mappato esattamente in un *modello di aggregazione random con iniezione* o *modello del votante*⁹ [Takayasu et al., 1988, 1991a-b], inoltre descrive l'attività nel tempo di una valanga "critica" auto-organizzata [Bak et al., 1987].

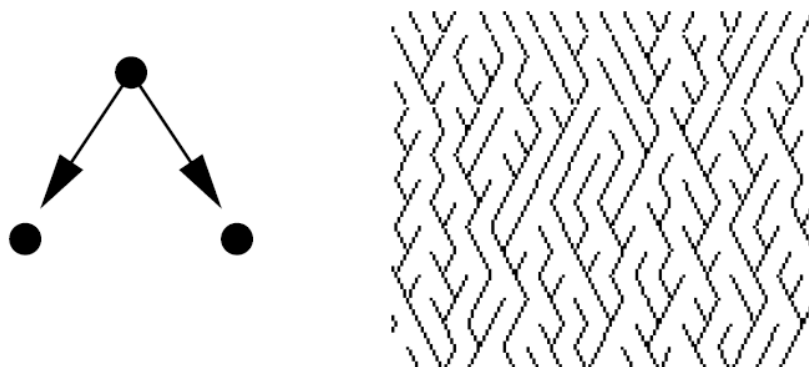


Figura a3.6: modello di rete casuale e diretta di Scheidegger su maglia quadrata; la direzione di drenaggio è dall'alto al basso, mentre la direzione di flusso è scelta in modo casuale tra una delle due direzioni possibili delle diagonali verso sx e dx (direzioni di flusso 6 ed 8 rispettivamente, secondo il metodo delle 8 direzioni di drenaggio); il percorso dei canali ed il contorno del bacino sono *cammini aleatori discreti*.

⁸Scheidegger era interessato alle valli delle Alpi e giustamente considerava che tutti i percorsi di drenaggio fossero imposti nella direzione del più elevato gradiente $\nabla z(x, y)$, e questa condizione di flusso preferenziale crea la rete diretta.

⁹Il modello del votante è un semplice modello matematico di formazione delle opinioni, nel quale i votanti sono posti ai nodi di una rete, ogni votante ha un'opinione (nel caso più semplice 0 o 1, nel caso generale n) assunta in modo casuale tra le opinioni dei suoi votanti vicini. Vedi ad es. <http://mathworld.wolfram.com/VoterModel.html>.



Figura a3.7: pattern di erosione quasi-parallelo "a burroncelli" (*gully erosion*) in un pendio (Spagna), di cui per la descrizione generale del fenomeno è stato proposto il modello di Scheidegger "modificato" con direzioni di drenaggio 6, 7, e 8 [Dunne *et al.*, 1998].

In realtà la rete di Scheidegger originale si sviluppa su una maglia triangolare.

Un'altra tipologia di rete molto simile alla rete di Scheidegger è la rete di Shreve (o TDCN, da rete fluviale topologicamente distinta) la quale si sviluppa su dominio quadrato e permette come direzioni di drenaggio possibili la 6, 7 e 8.

Le forme delle reti random spaziano dai *cammini aleatori auto-evitanti* come quelli generati dai modelli di crescita Eden, *topologicamente casuali* o costruzioni di *Leopold-Langbein*, alle reti di tipo *Scheidegger* le quali sono forme casuali di aggregazione dirette con iniezione.

Non dimentichiamo inoltre la struttura deterministica frattale della rete di Peano la quale è stata studiata estensivamente anche con la prospettiva di individuare collegamenti tra il determinismo e la stocasticità in ambito delle scienze geofisiche [Sivakumar, 2004].

a3.1.3 Metropolis.

Metropolis calcola alcune eccellenti reti di drenaggio partendo da reti fluviali non ottimizzate usando un metodo simile al "*simulated annealing*". Il programma usa come inputs:

1. le direzioni di drenaggio e le aree cumulate come punto di partenza per l'ottimizzazione; i file hanno lo stesso nome ma diversa estensione, rispettivamente *.flow* e *.area*;
2. il file contenente le temperature attraverso le quali l'ottimizzazione è effettuata (es. *temperature.dat*);
3. il numero di interazioni che vogliamo avere al fine di ottimizzare la rete (es. 1,000,000) per ogni temperatura assegnata;
4. l'esponente γ il quale appare nel funzionale da ottimizzare $H = \sum_i (A_i^\gamma \cdot L_i)$, dove A_i sono le aree cumulate, L_i la lunghezza del tratto di canale tra il pixel i -esimo e il pixel subito a valle (la quale distanza può essere 1 o $\sqrt{2}$ utilizzando il metodo delle 8 direzioni di drenaggio)

E' da notare che il migliore minimo ottenuto con la regola di Metropolis porta a statistiche significativamente differenti da quelle osservate in natura, tuttavia la maggior parte delle caratteristiche strutturali sono riprodotte bene.

a3.2 Codici delle routines FluidTurtle per lo studio delle OCNs eterogenee.

Si veda per le routines FluidTurtle per lo studio delle OCNs omogenee ed eterogenee (presto commentate con Doxygen) il sito già menzionato,

<http://digilander.libero.it/matconv/ThesisMaterials.html>

Inoltre, si rimanda al manuale "Le FluidTurtle per lo studio delle Optimal Channel Networks: basi teoriche ed applicazioni" ([Convertino et al., 2006b]), in corso di preparazione, per ulteriori approfondimenti riguardo l'implementazione e la compilazione dei codici.

Si consiglia anche la guida "The FluidTurtle Library Version 0.750, Users and Programmers Guide" ([*Rigon et al.*, 2002]).

Bibliografia^{*}

Albert, R., and A. L. Barabasi (2002), Statistical mechanics of complex networks, *Rev. Mod. Phys.*, 74, 4797.

Bak, P., Tang, C., Wiesenfeld, K. (1987), Self-organized criticality, *Phys. Rev. Lett.*, 59, 381384.

Bak, P., Tang, C., Wiesenfeld, K. (1988), *Phys. Rev. A*, 38, 364.

Bak, P., Paczuski, M. (1993), *Phys. World*, 6(12), 39.

Banavar, J. R., Maritan, A, Rinaldo, A. (1999), Size and form in efficient transportation network, *Nature*, 399, 130-134.

Banavar, J. R., Maritan, A, Rinaldo, A. (2000), Topology of the fittest network, *Phys. Rev. Lett*, 84, 4745-4748.

Banavar, J. R., Damuth, J, Maritan, A, Rinaldo, A. (2002), Supply demand balance and metabolic scaling, *Proc. Natl. Acad. Sci. U.S.A.*, 99, 16, 10506-10509.

Barabasi, A. L., Albert, R. (1999), Emergence of scaling in random networks, *Science*, 286, 509-512.

Barabasi, A. L., Albert, R., Jeong H. (2000), Scale-free characteristics of random networks: The topology of the World-Wide Web, *Physica A*, 281, 6977.

Bell Junr., W.A (1869), On the Physical Geography of the Colorado Basin and the Great Basin Region of North America.

Bellin, A. (1991), *Numerical Generation of Random Fields with Specified Spatial Correlation Structure*, Quaderni del Dipartimento, DICA, Università degli Studi di Trento.

Bellin, A., Rubin, R. (1996b), *HYDROGEN, A New Method for the Generation of Random Functions*, Code Descriptions and User's Guide.

Caldarelli, G. (2005), *Scale-Free Networks, Complex Webs in Natural, Technological and Social Sciences*, Oxford University Press.

Capra, F. (1997), *The Web of Life*, Doubleday-Anchor Book, New York, and Center for Ecoliteracy, Berkeley, CA.

Castillo C. (2004), Effective Web Crawling, PhD Thesis, Center for Web Research, *University of Chile*, Chile (vedi <http://www.chato.cl/534/article-63160.html>).

Chandrasekhar, S. (1943), Stochastic Problems in Physics and Astronomy, *Rev. Mod. Phys.*, 15, 1.

Colaioni, F., Flammini, A., Maritan, A., Banavar, J. R. (1997), Analytical and numerical study of optimal channel networks, *Phys. Rev. E*, 55, 1298-1302.

Colizza, V. (2004), Statistical mechanics approach to complex networks: From abstract to biological networks, Ph.D. dissertation, *Int. Sch. for Adv. Stud. (SISSA-ISAS)*, Trieste, Italy.

Convertino, M. (2006a), "Determinazione della risposta idrologica a scala di evento, del bacino del fiume Taloro, chiuso a Gavoi (NU), tramite il Modello Geomorfologico", esercitazione corso di Idrologia, Prof. M. Marani, IMAGE Dept., UniPd, A.A. 2005/2006.

Convertino, M. (2006b), Le FluidTurtle per lo studio delle Optimal Channel Networks: basi teoriche ed applicazioni, *Manuale in corso di realizzazione*.

Dodds, P. S., Rothman, D. H. (1999), Unified view of scaling laws for river networks, *Phys. Rev. E*, 59(5), 1298-13

Dodds, P. S., Rothman, D. H. (2000), Scaling, Universality and Geomorphology, *Annu. Rev. Earth Planet. Sci.*, 2000, 28.

Dodds, P. S., Rothman, D. H., Weitz, J. S. (2003), Re-examination of the "3/4-law" of Metabolism, *J. Theor. Biol.*, 28, 571-583.

Hwa, T., Kardar, M. (1992), *Phys. Rev. A*, 45, 7002.

Flake, G.W. (1998), *The Computational Beauty of Nature: Computer Explorations of Fractals, Chaos, Complex Systems, and Adaptation*, MIT Press, Cambridge, Boston, USA.

Frame, M. (2000), Review of " *The Computational Beauty of Nature: Computer Explorations of Fractals, Chaos, Complex Systems, and Adaptation*", *The American Math. Monthly*, 107, 6.

Kauffman, S., Johnsen S. J. (1991), *J. Theor. Biol.*, 149, 467-506.

Kauffman, S. (1993), *The Origins of Order*, Oxford University Press, New York.

Leopold, L. B., Wolman, M. G., Miller, J. P. (1964), *Fluvial Processes in Geomorphology*, W. H. Freeman, San Francisco.

Lin, S. (1965), Computer solutions for the travelling salesman problem, *Bell Syst. Tech. J.*, 44, 2245-2258.

Lovejoy, S., Schertzer, D. (2006), Multifractals, cloud radiances and rain, *Journ. of Hydrology*, 328, 1-2.

Marani, M., D'Alpaos A., Belluco, E., Lanzoni, S., Rinaldo A. (2002), Tidal meanders, *Water Resour. Res.*, 38 (11), 1225.

Marani, M., Lanzoni, S., Belluco, E., D'Alpaos A., Defina, A., Rinaldo A. (2003), On the drainage density of tidal networks, *Water Resour. Res.*, 39 (2), 1040.

Marani, M. (2005), *Processi e Modelli dell'Idrometeorologia*, dispensa corso di Idrologia, Dipartimento I.M.A.G.E., Università di Padova.

Miramontes, O., Solé, R. V., Goodwin, B. C. (1993), 63D, 145, *Physica* (Amsterdam).

Newman, M. E. J. (2001a), Scientific collaboration networks I: network construction and fundamental results, *Physical Review E*, 64, 016131.

Newman, M. E. J. (2001b). Scientific collaboration networks II: shortest paths, weighted networks, and centrality, *Physical Review E*, 64, 016132.

Newman, M. E. J. (2005), Power laws, Pareto distributions and Zipf's law, *Contemporary Physics*, 46, 323-351.

Painter, P. R., Haff, P. K., Banavar, J. R., Maritan, A., Rinaldo, A. (2000), Scaling: Rivers, blood and transportation networks, *Nature*, 408, 6809, 159-161.

Passalacqua, P., Porté-Agel, F., Foufoula-Georgiou, E., Paola, C. (2006), Application of dynamic subgrid-scale concepts from large-eddy simulation to modeling landscape evolution, *Water Resour. Res.*, 42, W06D11.

Rodriguez Iturbe, I., Bras, R. L., Ijjasz-Vasquez, E., Tarboton, D. G. (1992), *Water Resour. Res.*, 28, 988.

Rodriguez Iturbe, I., Rinaldo, A. (1997 e 2001), *Fractal River Basins, Chance and Self Organization*, Cambridge University Press, New York.

Rigon, R., Zanotti, F. (2002), The FluidTurtle Library Version 0.750, Users and Programmers Guide, DICA-CUDAM, Università di Trento.

Rigon, R., Ghesla, E., Tiso, C., Cozzini, A. (2006a), The HORTON machine: a system fro DEM analysis, DICA-CUDAM, Università di Trento.

Rigon, R., Vitti, A., Antonello, A., Franceschi, S. (2006b), JGrass 2.0 Manuale Utente, DICA-CUDAM, Università di Trento, HydroloGIS, Bolzano (see <http://www.hydrologis.com/>).

Rinaldo, A., Rodriguez Iturbe, I., Rigon, R., Bras, R. L., Ijjasz Vasquez, E., Marani, A. (1992), Minimum energy and fractal structures of drainage networks, *Phys. Rev. Lett.*, 70, 822-826.

Rinaldo, A., Maritan, A., Colaiori, F., Flammini, A., Swift, M. R., Rigon, R., Banavar, J. R., Rodriguez Iturbe, I. (1996), On feasible optimality, *Istituto Veneto di Scienze, Lettere e Arti*, Nota 14/12/'96, Tomo CLV ('96-'97).

Rinaldo, A., Banavar, J. R., Maritan, A. (2006), Tree, networks, and hydrology, *Water Resour. Res.*, 42, W06D07.

Scheidegger, A. E. (1967), A stochastic model for drainage patterns into an intramontane trench, *Bull. Assoc. Sci. Hydrol.*, 12, 15-20.

Schumm, S. A. (1977), *The Fluvial System*, J. Wiley, New York.

Sivakumar, B. (2004), Chaos theory in geophysics: Past, present and future, *Chaos Solitons Fractals*, 19(2), 441-462.

Solé, R. V., Miramontes, O. (1995), Information at the edge of chaos in fluid neural networks, *Physica D*, 80, 171-180.

Takayasu, H., Nishikawa, I., Tasaki, H. (1988), Power-law mass distribution of aggregation systems with injection, *Phys. Rev. A*, 37, 31103117.

Takayasu, H., Takayasu, M., Provata, A., Huber, G. (1991a), Steady-state distribution of generalized aggregation systems with injection, *J. Stat. Phys.*, 65, 725739.

Takayasu, H., Takayasu, M., Provata, A., Huber, G. (1991b), Statistical models of river networks, *J. Stat. Phys.*, 65, 725745.

Tarboton, D. G. (2006), Terrain Analysis Using Digital Elevation Models (TauDEM), CEE Dept. Utah State University at Logan (vedi web-page).

Vázquez, A., Flammini, A., Maritan, A., Vespignani, A. (2003), Modeling of protein interaction networks, *Complexus*, 1, 38.

Watts, D. J., Strogatz, S. H. (1998), Collective dynamics of "small-world" networks, *Nature*, 393, 440-442.

Watts, D. J. (1999), *Small-worlds: The Dynamics of Networks between Order and Randomness*, Princeton University Press, Princeton, NJ, U.S.A.

Watts, D. J. (2003), *Six degrees: The Science of a Connected Age*, Norton.

West, G. B., Brown, J. H., Enquist, B. J. (1997), A General Model for the Origin of Allometric Scaling Laws in Biology, *Science*, 276, 122-126.

West, G. B., Brown, J. H., Enquist, B. J. (1999), The fourth dimension of life: fractal geometry and allometric scaling of organisms, *Science*, 284, 1677-1679.

* Sono state consultate alcune parti di ulteriori articoli e pubblicazioni non riportati, principalmente dei Professori Rinaldo A., Maritan A., Rigon R., Rodriguez-Iturbe I., Marani M., e degli autori citati nelle bibliografie dei loro lavori.

Ringraziamenti.

È difficile scrivere dei ringraziamenti per molti motivi. Il primo, perchè tantissime persone hanno contribuito a formare la persona che oggi sono ed è impossibile elencarli tutti in una paginetta o poco più (ma loro lo sanno...), il secondo perchè anche con l'enorme gioia di tagliare un traguardo importante come la laurea, si ha sempre paura di perdere qualcosa, ad esempio gli amici "colleghi" di questi cinque anni, i professori nel proficuo rapporto di dare-ricevere (in senso lato), l'ambiente stesso di un'esperienza che costituisce una parte di vita fondamentale. Terzo motivo, meno serio.., ad ingegneria si perde un po' la mano nello "scrivere bene" ..

Il lavoro condotto per questa tesi è necessariamente non completo, o meglio, sono molte le cose che si possono affinare (anche a livello estetico, e per questo mi scuso vista la mia poca esperienza con L^AT_EX, ma mi prometto di imparare!) e sviluppare.

Molte sono le cose che mi sarebbero piaciute approfondire, ma si sa prima o poi "si chiude" per iniziare un dopo e questa tesi io l'ho vista soprattutto come una mia manifestazione personale per il dopo, per quello che mi piacerebbe fare in seguito, insomma come un'introduzione al mio futuro (mi è stato più volte chiesto cosa volevo fare "da grande" ..), uno "statement of purpose"!

Spero di aver dato delle conferme e di essere stato all'altezza di quanto mi è stato chiesto di fare, di certo l'impegno e la passione da parte mia non sono mancati. Il tempo già ridotto, per questioni alle quali servirà anche un pizzico di fortuna, ..ovunque vada.., è volato come sempre, in ogni caso ho cercato di puntare al massimo di me stesso.

Ringrazio innanzitutto i miei due relatori, il Prof. Andrea Rinaldo, dapprima per avermi consigliato durante tutto l'ultimo anno della Laurea Specialistica, poi per avermi dato un tema così interessante e ambizioso, nonchè per la schiettezza, le opportunità datomi (aveva detto che non me ne sarei pentito ed infatti così è stato!), e l'entusiasmo dimostratomi, il Prof. Amos Maritan per la sua semplicità e disponibilità nella sua "Complessità" ..., e per avermi introdotto (anzi per averci introdotto coinvolgendo anche gli altri tre coraggiosi, il fisico, la fisica e l'ingegnera, del corso di Fisica dei Sistemi Complessi) in vasti ed enormemente interessanti ambiti scientifici.

Ringrazio inoltre enormemente il mio controrelatore, il Prof. Riccardo Rigon, per i suoi pazienti insegnamenti, le risposte a tutti i miei dubbi, e gli aiuti, senza i quali la tesi non avrebbe prodotto alcun risultato, a lui in particolar modo (anche per la gentilezza e l'ospitalità nei miei due giorni a Trento) sono debitore, ma anche ai "suoi ragazzi" che in un modo o nell'altro sono venuti a contatto con questo lavoro e hanno sopportato le mie domande, in particolare Fabrizio Zanotti, Christian Tiso, e Erica Ghesla. Un ambiente "friendly" nel quale ho anche capito a fondo Winzozz e Mac..! Non avrei potuto chiedere delle "spalle" migliori; un'altro stimolo per portare a termine i lavori correlati alla parte computazionale della tesi (mi prometto anche qui di instruirmi), che ci si era prefissati di svolgere "più avanti".

Un grazie anche al Prof. Alberto Bellin per HydroGen e gli articoli fornitimi.

Spero di non aver disturbato troppo nessuno, e spero inoltre di poter continuare in futuro ad applicarmi in tali ambiti e con le stesse persone con le quali ho avuto il piacere e l'onore di lavorare per questa tesi, che magari potrebbe sembrare un tantino avventurosa agli occhi di molti...ma è stata di gran lunga un'enorme soddisfazione che ripeterei fin da ora! Penso che per "contenere" tutto quello che ho imparato non basterebbero tre corsi interi; è sufficiente questo per farmi esprimere una profonda gratitudine verso coloro che mi hanno portato a tale risultato.

Infine ringrazio anche gli amici più recenti conosciuti, Paola Passalacqua (UMN) per l'articolo e i suggerimenti, Curtis Osterhoudt (WSU) per il supporto riguardo alcune "diavolerie" di Mathematica, Gianluca Gorni (UniUd) per L^AT_EX, Paolo D'Odorico (UVA) e Roman Stocker (MIT) per i consigli lungimiranti "di carriera", i ragazzi dell'Acquario che alcune volte mi hanno avuto come ospite.. (e quelli "del piano di sopra"), lo staff del Centro Studi UC EAP di Padova (il tutto è stato comunque una conquista!) in particolare Raffaella, ma anche i meno recenti come Luca Doretto (UniPd) per la sua cordialità e i suoi tre corsi!.

Un ringraziamento opportuno anche a tutti i miei compagni ingegneri di questi cinque anni, Mattia (dal primo giorno di università...01/10/2001!!!), Silvia (purtroppo forse conosciuta troppo tardi, dalla nostra Laurea Triennale, 22/07/2004!) e Carlo (se non ci fossi stato tu caro rappresentante.., non ti perdere in Inghilterra!) tra tutti, con i quali sono certo di continuare la forte e sincera amicizia che ci lega.

A tutti gli altri amici, le persone che ho conosciuto un po' sparse per il mon-

do nelle mie avventure, ai miei insegnanti, a tutti quelli con i quali ho passato dei momenti estremamante piacevoli, ma anche a coloro che mi hanno fatto arrabbiare o rattristare.. (alle volte..(!).. avevate ragione, in ogni caso ho imparato tanto anche da voi), ai prossimi s/fortunati che mi incontreranno, insomma a tutti infinitamente grazie di cuore.

..un P.S. doveroso: alla mia famiglia.., per non avermi fatto mancare anche momenti poco tranquilli.., a mio fratello e a mia sorella "in prospettiva" .., con affetto,

(alla fine la paginetta è diventata "3 paginette", ma si sa l'uomo non è fatto solo di numeri..)

Matteo Convertino

Padova, 25 Ottobre 2006