



UNIVERSITÀ DEGLI STUDI DI PADOVA

CORSO DI LAUREA IN INGEGNERIA ELETTRICA

TESI DI LAUREA MAGISTRALE

SFORZI ELETTRODINAMICI IN CONDUTTORI AT: SVILUPPO DI ALGORITMI PER IL CALCOLO 3D

RELATORE: CH.MO PROF. ROBERTO CALDON

DIPARTIMENTO DI INGEGNERIA INDUSTRIALE

CORRELATORE: ING. FABIO PASUT

S.T.E. ENERGY S.P.A.

LAUREANDO: ANDREA FANIN

ANNO ACCADEMICO: 2013-2014

Indice

Sommario.....	1
Introduzione.....	3
1. Richiami teorici su campi e forze magnetiche	6
1.1. Campo magnetico prodotto da una corrente.....	6
1.1.1. Prima legge elementare di Laplace	6
1.1.2. Legge di Ampere-Laplace.....	6
1.1.3. Calcolo del campo magnetico in casi particolari.....	7
1.1.4. Legge di Ampere.....	8
1.2. Forza magnetica	8
1.2.1. Forza di Lorentz.....	8
1.2.2. Seconda legge elementare di Laplace	9
1.2.3. Forza su conduttori rettilinei filiformi.....	9
1.2.4. Calcolo della forza considerando l'energia magnetica.....	10
1.2.5. Forze elettrodinamiche nei trasformatori	15
2. Resistenza alle sollecitazioni elettrodinamiche degli elementi di una sottostazione.....	20
2.1. Tensioni a cui sono sottoposti gli elementi della sottostazione	20
2.2. Calcolo delle tensioni interne	20
2.2.1. Calcolo delle tensioni dovute a momento flettente	20
2.2.3. Calcolo delle tensioni dovute a taglio	21
2.2.4. Criterio tensionale di von Mises	22
3. Normativa sulle sollecitazioni elettrodinamiche CEI EN 60865-1	26
3.1. Calcolo della forza in conduttori rigidi.....	26
3.2. Calcolo della tensione interna massima in conduttori rigidi.....	28
3.3. Calcolo della forza in conduttori flessibili	32
4. Programma di calcolo degli sforzi su tre sbarre complanari aventi stessa lunghezza	38
4.1. Considerazioni e ipotesi	38
4.2. Dati del programma.....	38
4.3. Parte del programma dedicata al calcolo.....	39
4.3.1. Divisione dei conduttori in tratti	39
4.3.2. Calcolo del campo magnetico	40
4.3.3. Risultati del campo magnetico	42
4.3.4. Calcolo della forza magnetica.....	44
4.3.5. Risultati della forza magnetica.....	44
4.3.6. Calcolo del taglio	46
4.3.7. Risultati del taglio	46
4.3.8. Calcolo del momento flettente	47
4.3.9. Risultati del momento flettente	48
4.3.10. Calcolo delle tensioni nei vari tratti.....	49
4.3.11. Risultati delle tensioni nei vari tratti.....	51

5.	Programma di calcolo degli sforzi su n sbarre senza vincoli di posizione e lunghezza	56
5.1.	Considerazioni ed ipotesi.....	56
5.2.	Dati del programma	56
5.3.	Parte del programma dedicata al calcolo	57
5.3.1.	Divisione dei conduttori in tratti	57
5.3.2.	Calcolo del campo magnetico	57
5.3.3.	Calcolo della forza magnetica	59
5.3.4.	Sistema di riferimento VTS orientato con le sbarre	61
5.3.5.	Risultati di campo magnetico e forza	64
5.3.6.	Calcolo del momento flettente e delle tensioni interne	66
5.3.7.	Risultati del momento flettente e tensioni interne	70
5.3.8.	Grafico delle sbarre nello spazio	72
6.	Programma per il calcolo degli sforzi in conduttori flessibili	76
6.1.	Considerazioni ed ipotesi.....	76
6.2.	Dati del programma	76
6.3.	Parte del programma dedicata al calcolo	77
6.3.1.	Calcolo della disposizione dovuta alla sola forza peso	77
6.3.2.	Calcolo del campo magnetico, della forza magnetica e della disposizione successiva	86
6.3.3.	Calcolo della tensione normale	96
6.4.	Verifica dei risultati del programma	97
7.	Esempio applicativo: analisi degli sforzi nella sottostazione Bele1	104
7.1.	Calcolo della corrente di cortocircuito	105
7.1.1.	Dati degli impianti connessi alla sottostazione.....	105
7.1.2.	Risultati delle correnti di cortocircuito.....	108
7.2.	Calcolo degli sforzi elettrodinamici utilizzando i programmi	108
7.2.1.	Calcolo degli sforzi elettrodinamici nelle sbarre	108
7.2.2.	Calcolo degli sforzi nei conduttori flessibili	115
7.3.	Calcolo degli sforzi elettrodinamici utilizzando il metodo della norma CEI EN 60865-1	124
7.3.1.	Calcolo degli sforzi elettrodinamici nelle sbarre	124
7.3.2.	Calcolo degli sforzi elettrodinamici nei conduttori flessibili	125
7.3.3.	Confronto dei risultati	128
	Conclusioni	130
	Bibliografia	132
	Appendici.....	134
A1	Programma di calcolo degli sforzi su tre sbarre complanari aventi stessa lunghezza completo	134
A2	Programma principale completo di calcolo degli sforzi su n sbarre senza vincoli di posizione e lunghezza	139
A2.1.	Function FBP	147
A2.2.	Function VTS	147
A3	Programma principale completo per il calcolo degli sforzi in conduttori flessibili	149

A3.1. Function DISPOSIZIONEFP	158
A3.2. Function DISPOSIZIONE	160

Sommario

L'obiettivo principale di questo lavoro di tesi è lo sviluppo di algoritmi per il calcolo degli sforzi elettrodinamici sugli elementi conduttori principali presenti in una sottostazione elettrica (sbarre rigide e conduttori flessibili) arbitrariamente disposti nello spazio. Tale calcolo viene di norma eseguito considerando le correnti di cortocircuito che, essendo molto più elevate della nominale, producono la massima forza elettrodinamica.

In questa tesi viene anche riportato il procedimento di calcolo degli sforzi contenuto nella norma CEI EN 60865-1, il quale, rispetto ai programmi di calcolo sviluppati, impone vincoli restrittivi nella disposizione spaziale dei conduttori e, in generale, fornisce risultati più conservativi.

La struttura dei programmi realizzati è la seguente: inizialmente viene calcolato il campo magnetico, poi la forza magnetica, successivamente le azioni interne ed infine le tensioni. Come risultati, i programmi forniscono i grafici delle grandezze sopra menzionate in funzione della lunghezza dei conduttori.

Viene inoltre riportato un esempio applicativo ad una sottostazione AT esistente. Per il calcolo degli sforzi elettrodinamici, si sono utilizzati sia i programmi, sia il procedimento analitico riportato nella norma. Dai risultati ottenuti si evince come i valori ottenuti secondo norma siano più conservativi di quelli ottenuti con gli algoritmi sviluppati nel presente lavoro di tesi.

Introduzione

Questa tesi è stata svolta durante uno stage presso l'azienda S.T.E. Energy S.p.A. di Padova, da anni operante nei settori della produzione di energia elettrica da fonti rinnovabili e dell'impiantistica tradizionale.

Le elevate correnti che si hanno durante un guasto di cortocircuito in una sottostazione elettrica danno origine a forze elettrodinamiche sugli elementi conduttori. Queste forze interessano sia il conduttore sia la struttura che lo sostiene e possono essere tali da provocare danneggiamenti, rotture o cedimenti.

La motivazione che ha spinto questo lavoro di tesi è la necessità di disporre di uno strumento per il calcolo degli sforzi elettrodinamici, che si possono presentare in una sottostazione elettrica durante i guasti di cortocircuito, in conduttori rigidi e flessibili arbitrariamente disposti nello spazio.

A tal scopo, sono stati sviluppati dei programmi in ambiente MATLAB in grado di calcolare le sollecitazioni elettrodinamiche e le tensioni interne che si generano sugli elementi considerati.

Nei primi capitoli dell'elaborato vengono ripresi i concetti teorici che riguardano il campo magnetico, la forza magnetica e la resistenza alle sollecitazioni e vengono dimostrate le formule utilizzate per lo sviluppo degli algoritmi.

Nei capitoli successivi vengono descritti in dettaglio i programmi di calcolo, che sono poi stati applicati ad un caso reale di sottostazione AT.

CAPITOLO 1

1. Richiami teorici su campi e forze magnetiche

1.1. Campo magnetico prodotto da una corrente

Da esperimenti, eseguiti su conduttori percorsi da corrente, si è osservato che in essi agiscono delle forze repulsive o attrattive. Queste sono state giustificate assumendo che una corrente i produca effetti a distanza, esprimibili per mezzo di un campo vettoriale, chiamato campo magnetico indicato con \mathbf{B} e si misura in Tesla [T].

1.1.1. Prima legge elementare di Laplace

La legge per ricavare il campo magnetico prodotto da una corrente (chiamata prima legge elementare di Laplace) è stata formulata a seguito dell'analisi di questi esperimenti e fornisce il campo magnetico $d\mathbf{B}$ prodotto da un tratto infinitesimo di filo $d\mathbf{s}$ percorso da corrente i in un punto P distante r .

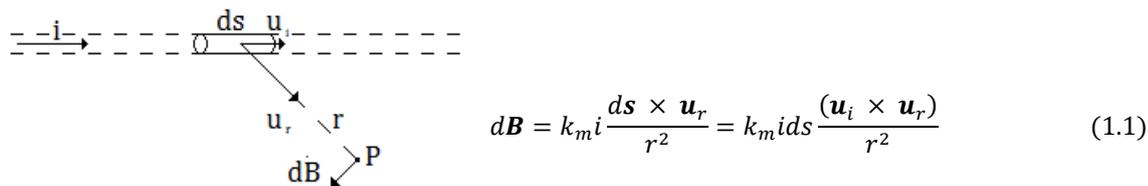


Figura 1.1 Campo magnetico prodotto da un tratto infinitesimo di filo

Come da Figura 1.1 \mathbf{u}_r è il versore che ha la stessa direzione di r e verso orientato dal conduttore al punto P . Il versore \mathbf{u}_i è tangente al conduttore con stesso verso di $d\mathbf{s}$ che è lo stesso di i . Il termine k_m è una costante che dipende dal mezzo in cui si opera. Se si è nel vuoto, nel sistema internazionale si fissa arbitrariamente:

$$k_m = \frac{\mu_0}{4\pi} \quad \mu_0 = 4\pi \cdot 10^{-7} \simeq 1.26 \cdot 10^{-6} \text{ H/m} \quad (1.2)$$

dove μ_0 è la permeabilità magnetica nel vuoto e si misura in [H/m]; è praticamente la stessa anche per l'aria e per i materiali che si utilizzano per realizzare i conduttori, come alluminio e rame.

Per il calcolo del campo prodotto da un conduttore finito avente come estremi i punti P e Q occorre integrare la relazione tra questi due estremi, sommando così i contributi dei singoli tratti infinitesimi di conduttori:

$$\mathbf{B} = \frac{\mu_0}{4\pi} i \int_P^Q \frac{d\mathbf{s} \times \mathbf{u}_r}{r^2} \quad (1.3)$$

1.1.2. Legge di Ampere-Laplace

Se il circuito analizzato è un circuito chiuso, l'integrale è lungo quella linea chiusa. La relazione così ottenuta è chiamata legge di Ampere-Laplace:

$$\mathbf{B} = \frac{\mu_0}{4\pi} i \oint \frac{d\mathbf{s} \times \mathbf{u}_r}{r^2} \quad (1.4)$$

si vedrà in seguito che nel programma di calcolo degli sforzi è stato deciso di risolvere numericamente il problema, dividendo il conduttore in N tratti finiti di una certa lunghezza Δs e calcolando il valore di \mathbf{B} nel punto voluto sommando i vari contributi $\Delta\mathbf{B}$ di ogni tratto finito.

$$\mathbf{B} \simeq \frac{\mu_0}{4\pi} i \Delta s \sum_1^N \frac{(\mathbf{u}_i \times \mathbf{u}_r)}{r^2} \quad (1.5)$$

Ovviamente più Δs sarà scelto piccolo più la precisione sarà elevata e il valore ottenuto tenderà al valore analitico.

1.1.3. Calcolo del campo magnetico in casi particolari

Nel seguito vengono ricavate delle formule analitiche per il calcolo di \mathbf{B} in condizioni particolari, che servono poi per verificare i risultati ottenuti numericamente con i programmi.

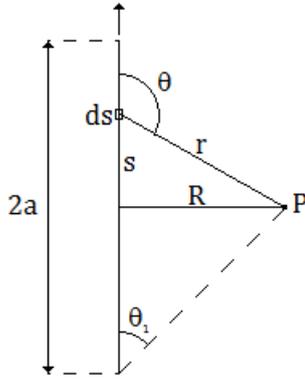


Figura 1.2 Campo magnetico prodotto da un filo rettilineo percorso da corrente

Ci si ponga in regime stazionario e, come mostrato in Figura 1.2, si prenda un filo conduttore rettilineo finito di lunghezza $2a$, percorso da una corrente i e si calcoli \mathbf{B} in un punto P posto ad una distanza R dal centro del conduttore nell'asse mediano che è perpendicolare ad esso.

$$d\mathbf{B} = \frac{\mu_0}{4\pi} i \frac{d\mathbf{s} \times \mathbf{u}_r}{r^2} \quad dB = \frac{\mu_0}{4\pi} i ds \frac{\sin(\theta)}{r^2} \quad (1.6)$$

dalla Figura 1.2 si osserva che: $R = r \sin(\pi - \theta) = r \sin(\theta)$. Ne consegue che:

$$\frac{1}{r} = \frac{\sin(\theta)}{R} \quad \frac{1}{r^2} = \frac{\sin^2(\theta)}{R^2} \quad (1.7)$$

si osserva inoltre, sempre dalla Figura 1.2, che:

$$R = s \tan(\pi - \theta) = -s \tan(\theta) \text{ e quindi la lunghezza del tratto}$$

infinitesimo può essere scritta come:

$$s = -\frac{R}{\tan(\theta)} = -R \frac{\cos(\theta)}{\sin(\theta)} \quad (1.8)$$

$$ds = R \frac{1}{\sin^2(\theta)} d\theta \quad (1.9)$$

andando a sostituire nell'equazione 1.6 risulta:

$$dB = \frac{\mu_0}{4\pi} i ds \frac{\sin(\theta)}{r^2} = \frac{\mu_0}{4\pi} i R \frac{1}{\sin^2(\theta)} d\theta \sin(\theta) \frac{\sin^2(\theta)}{R^2} = \frac{\mu_0}{4\pi} i \frac{d\theta \sin(\theta)}{R} \quad (1.10)$$

e poiché $d(\cos(\theta)) = -\sin(\theta)d\theta$ si trova infine:

$$dB = -\frac{\mu_0}{4\pi} i \frac{d(\cos(\theta))}{R} \quad (1.11)$$

ora è possibile integrare questa equazione che fornisce il modulo. Lo si fa in mezzo filo, quindi in una lunghezza pari ad a .

$$B_a = -\frac{\mu_0 i}{4\pi R} \int_{\cos(\theta_1)}^0 d(\cos(\theta)) = \frac{\mu_0 i}{4\pi R} \cos(\theta_1) = \frac{\mu_0 i}{4\pi R} \frac{a}{\sqrt{R^2 + a^2}} \quad (1.12)$$

Il modulo del campo magnetico prodotto dall'intero filo è il doppio di questo, quindi:

$$B = 2B_a = \frac{\mu_0 i}{2\pi R} \frac{a}{\sqrt{R^2 + a^2}} \quad (1.13)$$

per trovare il vettore del campo \mathbf{B} basta moltiplicare il modulo ottenuto per il versore ricavato dal prodotto vettoriale $\mathbf{u}_i \times \mathbf{u}_r$, che in questo caso risulta entrante nella figura.

Se si fa tendere all'infinito la lunghezza a si ottiene la legge di Biot-Savart, che calcola il campo magnetico prodotto da un conduttore indefinito:

$$\mathbf{B} = \lim_{a \rightarrow +\infty} \frac{\mu_0 i}{2\pi R} \frac{a}{\sqrt{R^2 + a^2}} (\mathbf{u}_i \times \mathbf{u}_r) = \frac{\mu_0 i}{2\pi R} (\mathbf{u}_i \times \mathbf{u}_r) \quad (1.14)$$

1.1.4. Legge di Ampere

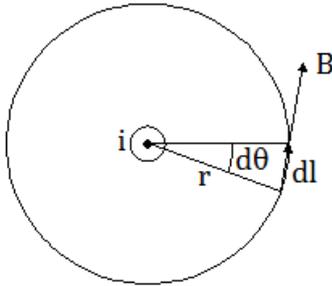


Figura 1.3 Tratto di circonferenza in cui calcolare il prodotto scalare $\mathbf{B} \cdot d\mathbf{l}$

Partendo da un conduttore indefinito, si consideri ora una circonferenza concentrica con esso, lungo quest'ultima il modulo del campo magnetico è costante. Prendendo ora un elemento infinitesimo di circonferenza $d\mathbf{l}$, come da Figura 1.3, si calcoli il prodotto scalare:

$$\mathbf{B} \cdot d\mathbf{l} = \frac{\mu_0 i}{2\pi r} dl = \frac{\mu_0 i}{2\pi} d\theta \quad (1.15)$$

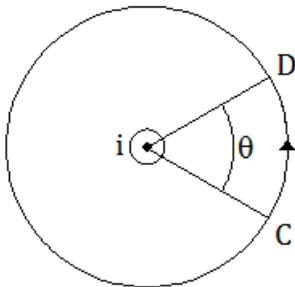


Figura 1.4 Circonferenza in cui calcolare il prodotto scalare $\mathbf{B} \cdot d\mathbf{l}$

Adesso si prenda un tratto di circonferenza CD, come da Figura 1.4, e si integrino i singoli contributi del prodotto scalare. Quindi si ottiene:

$$\int_C^D \mathbf{B} \cdot d\mathbf{l} = \frac{\mu_0 i}{2\pi} \int_C^D d\theta = \frac{\mu_0 i}{2\pi} \theta \quad (1.16)$$

L'angolo θ è quello sotteso dall'arco CD. Si osserva che il risultato dipende solo da questo angolo e non dal percorso, da qui si deduce che il risultato sia lo stesso per qualunque percorso tra C e D.

Se si calcola l'integrale lungo una linea chiusa ovvero:

$$\oint \mathbf{B} \cdot d\mathbf{l} = \frac{\mu_0 i}{2\pi} \oint d\theta \quad (1.17)$$

se la linea chiusa non concatena il conduttore allora $\oint \mathbf{B} \cdot d\mathbf{l} = 0$; mentre se la linea chiusa concatena il conduttore percorso dalla corrente i si ha:

$$\oint \mathbf{B} \cdot d\mathbf{l} = \frac{\mu_0 i}{2\pi} \oint d\theta = \frac{\mu_0 i}{2\pi} 2\pi = \mu_0 i \quad (1.18)$$

questa relazione, ricavata per il conduttore rettilineo indefinito, ha validità generale e costituisce la legge di Ampere:

$$\oint \mathbf{B} \cdot d\mathbf{l} = \mu_0 i \quad (1.19)$$

1.2. Forza magnetica

1.2.1. Forza di Lorentz

La forza che agisce su un conduttore percorso da corrente immerso in un campo magnetico è la risultante delle varie forze che agiscono sui singoli portatori di carica in movimento. Tale forza su un portatore di carica è chiamata forza di Lorentz ed è data dalla relazione:

$$\mathbf{F} = q(\mathbf{v} \times \mathbf{B}) \quad (1.20)$$

dove: q =carica in movimento [C], \mathbf{v} =velocità [m/s], \mathbf{B} =campo magnetico [T]

Il cui modulo è $F = qvB \sin \theta$ dove θ è l'angolo tra \mathbf{v} e \mathbf{B} . Da qui si vede che se il campo è parallelo alla velocità la forza è nulla, mentre se è ortogonale è massima. Dalla regola della mano destra del prodotto vettoriale si nota che la forza è sempre perpendicolare alla velocità.

Prendendo un conduttore, la corrente è dovuta al moto degli elettroni per l'azione del campo elettrico imposto da un generatore. Ponendo:

n =numero di elettroni liberi per unità di volume, $-e$ =carica di ciascun elettrone[C], v_d =velocità di deriva[m/s]

1.2.2. Seconda legge elementare di Laplace

Sostituendo nella relazione della forza di Lorentz 1.20 si ottiene la forza applicata a ciascun elettrone:

$$\mathbf{F}_L = -e(\mathbf{v}_d \times \mathbf{B}) \quad (1.21)$$

da qui sapendo che la densità di corrente è $\mathbf{j} = -nev_d$, si ricava: $\mathbf{F}_L = \frac{1}{n}(\mathbf{j} \times \mathbf{B})$. Considerando ora un conduttore rettilineo di sezione Σ e lunghezza ds per calcolare la forza risultante totale basta moltiplicare il valore della forza di un elettrone F_L per il numero di elettroni N presenti all'interno del volume del conduttore in esame $V = \Sigma ds$ da cui $N = n\Sigma ds$:

$$dF = n\Sigma ds F_L = n\Sigma ds \frac{1}{n}(\mathbf{j} \times \mathbf{B}) = \Sigma ds(\mathbf{j} \times \mathbf{B}) \quad (1.21.1)$$

riferendosi ad un conduttore filiforme si sa che $\Sigma \mathbf{j} = i$ quindi $dF = i(ds \times \mathbf{B})$. Ovviamente con il vettore ds avente stesso verso e direzione del vettore \mathbf{j} . L'equazione ottenuta è chiamata seconda legge elementare di Laplace.

1.2.3. Forza su conduttori rettilinei filiformi

Per ottenere la forza su un conduttore filiforme rettilineo, di lunghezza finita l percorso da una corrente stazionaria i ed immerso in un campo magnetico \mathbf{B} uniforme (ovvero con stesso modulo, direzione e verso in ogni punto), si integra la relazione 1.21.1 tra i due punti estremi del filo, chiamati in questo caso P e Q :

$$\mathbf{F} = i \int_P^Q d\mathbf{s} \times \mathbf{B} = i(\mathbf{l} \times \mathbf{B}) \quad (1.22)$$

il cui modulo è $F = ilB \sin \theta$, e nel caso in cui \mathbf{l} e \mathbf{B} siano perpendicolari vale $F = ilB$.

Se il conduttore è curvilineo, ma rimane su un piano, allora \mathbf{l} è il segmento PQ e non la lunghezza di tutto il conduttore. Da qui se il percorso del conduttore è chiuso rimanendo nello stesso piano la forza complessiva è nulla.

Questa relazione permette di ricavare la forza magnetica, però è necessario conoscere il campo magnetico presente in quel conduttore per effetto della circolazione di corrente sugli altri conduttori.

Si prenda, come esempio che poi servirà come verifica dei risultati ottenuti dai programmi di calcolo, il caso di due conduttori filiformi rettilinei indefiniti paralleli di ugual lunghezza attraversati da correnti rispettivamente i_1 e i_2 , distanti r . Il primo conduttore è interessato da una forza \mathbf{F}_1 prodotta dalla corrente che lo attraversa e dal campo magnetico \mathbf{B}_1 presente nella sua posizione che è prodotto dalla corrente i_2 nel secondo conduttore:

$$\mathbf{F}_1 = i_1(\mathbf{l} \times \mathbf{B}_1) \quad (1.23)$$

il campo \mathbf{B}_1 lo si calcola con le equazioni, precedentemente ricavate, per i conduttori rettilinei indefiniti:

$$\mathbf{F}_1 = i_1(\mathbf{l} \times \mathbf{B}_1) = i_1 \left\{ \mathbf{l} \times \left[\frac{\mu_0 i_2}{2\pi r} (\mathbf{u}_i \times \mathbf{u}_r) \right] \right\} = \frac{\mu_0 i_2 i_1}{2\pi r} [\mathbf{l} \times (\mathbf{u}_i \times \mathbf{u}_r)] \quad (1.24)$$

il modulo è quindi $F_1 = \frac{\mu_0 i_2 i_1}{2\pi r} l$. Il secondo conduttore è interessato da una forza \mathbf{F}_2 prodotta dalla corrente che lo attraversa e dal campo magnetico \mathbf{B}_2 presente nella sua posizione che è prodotto dalla corrente i_2 nel primo conduttore:

$$\mathbf{F}_2 = i_2(\mathbf{l} \times \mathbf{B}_2) = i_2 \left\{ \mathbf{l} \times \left[\frac{\mu_0 i_1}{2\pi r} (\mathbf{u}_i \times \mathbf{u}_r) \right] \right\} = \frac{\mu_0 i_1 i_2}{2\pi r} [\mathbf{l} \times (\mathbf{u}_i \times \mathbf{u}_r)] \quad (1.25)$$

si vede che il modulo della forza è lo stesso $F_1 = F_2 = \frac{\mu_0 i_1 i_2}{2\pi r} l$. Quindi esso è proporzionale ai valori di corrente nei conduttori e alla lunghezza, mentre è inversamente proporzionale alla distanza. Se si volesse ridurlo, una soluzione immediata è quella di aumentare la distanza tra essi, però occorre verificare se è possibile nel caso che si considera.

La direzione della forza è ortogonale all'asse del conduttore, questo perché sono paralleli, mentre il verso dipende dal verso delle correnti. Se le correnti nei conduttori sono discordi, le forze \mathbf{F}_1 e \mathbf{F}_2 sono di tipo repulsivo: tendono ad allontanare i due conduttori. Se le correnti nei conduttori sono concordi, le forze \mathbf{F}_1 e \mathbf{F}_2 sono di tipo attrattivo: tendono ad allontanare i due conduttori. Questo lo si vede bene nella Figura 1.5 seguente:

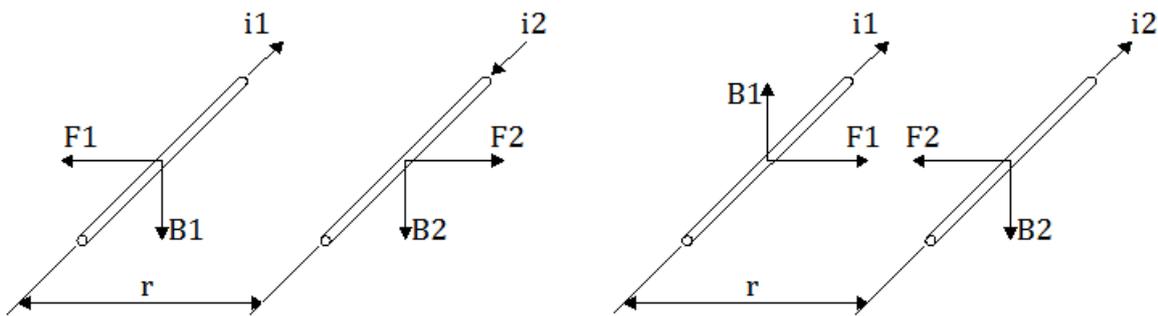


Figura 1.5 Vettori del campo magnetico e della forza magnetica nel caso di corrente discordi e concorde

Se si vuole ricavare la forza per unità di lunghezza basta dividere per la lunghezza, quindi il modulo della forza risulta uguale a $\frac{\mu_0 i_1 i_2}{2\pi r}$.

Nel caso in cui la corrente nei due conduttori fosse la stessa, come ad esempio nel caso di un circuito monofase o in corrente continua, il modulo della forza è $\frac{\mu_0 i^2}{2\pi r} l$. Si osserva che esso ora dipende dalla corrente al quadrato. Per questo fatto le sollecitazioni elettrodinamiche diventano problematiche nel cortocircuito, in cui la corrente è molto più grande della nominale, ed esse dipendono dal quadrato.

1.2.4. Calcolo della forza considerando l'energia magnetica

Un altro modo di calcolare la forza di origine elettrodinamica è quello di considerare l'energia magnetica. In questo caso si parte da un induttore alimentato da una sorgente elettrica qualsiasi. Sia $d\mathbf{s}$ una qualsiasi deformazione infinitesima dell'induttore e sia F_s la componente della forza magnetica lungo la direzione e verso di $d\mathbf{s}$, per il bilancio energetico si può scrivere:

$$dW_g = dW_m + F_s ds \quad (1.26)$$

dove dW_g è l'energia infinitesima fornita dalla sorgente elettrica, mentre dW_m è la variazione infinitesima di energia magnetica. Ora si pone Φ_n il flusso concatenato con l'induttore, i la corrente che attraversa l'induttore e v la tensione ai suoi capi. Utilizzando l'equazione caratteristica dell'induttore $v = \frac{d\Phi_n}{dt}$ si riscrive dW_g in un altro modo:

$$dW_g = vidt = i \frac{d\Phi_n}{dt} dt = id\Phi_n \quad (1.27)$$

si riscrive anche il termine dW_m utilizzando l'equazione dell'energia magnetica $W_m = \frac{1}{2} \Phi_n i$

$$dW_m = d\left(\frac{1}{2} \Phi_n i\right) = \frac{1}{2} id\Phi_n + \frac{1}{2} \Phi_n di \quad (1.28)$$

andando a sostituire le equazioni appena ottenute nella relazione 1.27 del bilancio energetico si ottiene:

$$F_s ds = dW_g - dW_m = id\Phi_n - \frac{1}{2} id\Phi_n - \frac{1}{2} \Phi_n di = \frac{1}{2} id\Phi_n - \frac{1}{2} \Phi_n di \quad (1.29)$$

da qui si ricava immediatamente l'equazione della forza magnetica:

$$F_s = \frac{1}{2} i \frac{d\Phi_n}{ds} - \frac{1}{2} \Phi_n \frac{di}{ds} \quad (1.30)$$

il termine Φ_n lo si sostituisce con Li , essendo L il coefficiente di autoinduttanza dell'induttore:

$$F_s = \frac{1}{2} i \frac{d(Li)}{ds} - \frac{1}{2} (Li) \frac{di}{ds} = \frac{1}{2} i \left(i \frac{dL}{ds} + L \frac{di}{ds} \right) - \frac{1}{2} Li \frac{di}{ds} = \frac{1}{2} i^2 \frac{dL}{ds} \quad (1.31)$$

da quest'ultima relazione si osserva che la forza magnetica tende ad aumentare il coefficiente L . Questo si scrive come $L = \frac{\mu N^2 S}{l}$. Quindi la forza tenderà: ad aumentare il numero di spire N (tendenza del solenoide ad auto-avvolgersi), ad aumentare la sezione S ed ad accorciare la lunghezza l .

Si verifica ora che la forza magnetica, ottenuta con questo procedimento, sia uguale a quella ricavata con il precedente nel caso di due conduttori filiformi rettilinei indefiniti paralleli della stessa lunghezza, ovvero che il circuito sia lo stesso e quindi la corrente su un conduttore è uguale in modulo ed opposta sul secondo conduttore.

Come prima cosa occorre trovare il coefficiente di autoinduttanza tramite il rapporto $\frac{\Phi_n}{i}$. Il flusso concatenato Φ_n si ottiene integrando il campo magnetico nella superficie racchiusa tra i due conduttori filiformi. In ogni punto di questa superficie il campo magnetico è dato dalla somma di due contributi: uno generato dal primo conduttore e uno generato dal secondo conduttore. Per calcolarli si utilizza la legge di Biot-Savart 1.14. Come da Figura 1.6.

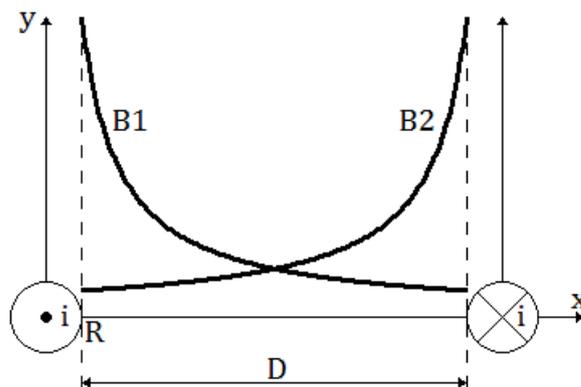


Figura 1.6 Andamenti del campo magnetico prodotti da ogni conduttore

R è il raggio dei conduttori, D è la distanza fra loro e B_1, B_2 sono i contributi del campo magnetico, rispettivamente generati dal primo conduttore (quello di sinistra) e dal secondo (quello di destra).

Quindi si può scrivere:

$$B(x) = B_1(x) + B_2(x) = \frac{\mu_0 i}{2\pi x} + \frac{\mu_0 i}{2\pi(D-x)} \quad (1.32)$$

ora lo si integra per ricavare il flusso tra i due conduttori, chiamando l la lunghezza dei conduttori:

$$\begin{aligned}\Phi_n &= \int \vec{B} \cdot d\vec{s} = l \int_R^{D-R} \frac{\mu_0 i}{2\pi x} + \frac{\mu_0 i}{2\pi(D-x)} dx = l \frac{\mu_0 i}{2\pi} \left[\ln\left(\frac{D-R}{R}\right) - \ln\left(\frac{R}{D-R}\right) \right] \\ &= l \frac{\mu_0 i}{\pi} \ln\left(\frac{D-R}{R}\right)\end{aligned}\quad (1.33)$$

per trovare il coefficiente di autoinduttanza si divide il flusso Φ_n per la corrente i :

$$L = \frac{\Phi_n}{i} = l \frac{\mu_0}{\pi} \ln\left(\frac{D-R}{R}\right) \quad (1.34)$$

se la distanza tra i conduttori D è molto più grande del raggio di essi, è possibile trascurare il raggio al numeratore del logaritmo, diventando perciò $L = l \frac{\mu_0}{\pi} \ln\left(\frac{D}{R}\right)$. Qui non viene fatto per considerare il caso generale.

È da ricordare che questo coefficiente L non considera l'energia magnetica all'interno dei conduttori, quindi è minore di quello effettivo.

Conoscendo L si può ora calcolare la forza magnetica lungo l'asse x dei conduttori applicando l'equazione ricavata in precedenza:

$$F_s = \frac{1}{2} i^2 \frac{dL}{dD} = \frac{1}{2} i^2 \frac{d}{dD} \left[l \frac{\mu_0}{\pi} \ln\left(\frac{D-R}{R}\right) \right] = \frac{1}{2} i^2 l \frac{\mu_0}{\pi} \frac{1}{D-R} = \frac{\mu_0 i^2 l}{2\pi(D-R)} \quad (1.35)$$

si vede che trascurando il raggio del conduttore rispetto alla lunghezza si riottiene la formula 1.25 ricavata precedentemente con l'altro metodo: $F_s = \frac{\mu_0 i^2 l}{2\pi R}$.

Rimane da verificare se, considerando l'energia magnetica all'interno dei conduttori, la forza tra essi rimanga la stessa oppure no. Quindi ora si calcola il termine di autoinduttanza dovuto all'energia interna.

Per fare questo si ipotizza una distribuzione della corrente nel conduttore uniforme. Con questa ipotesi, si intende che la densità di corrente nel conduttore è costante, ed è $J = \frac{i}{\pi R^2}$.

Oltre a questa ipotesi, occorre formularne un'altra, ovvero che il conduttore abbia caratteristica magnetica lineare e non ferromagnetica. Cioè la sua permeabilità magnetica sia costante e circa uguale a quella nel vuoto μ_0 .

Tracciando una circonferenza all'interno del conduttore ad un certo raggio r , la corrente ir racchiusa in essa vale:

$$ir = J\pi r^2 = \frac{i}{\pi R^2} \pi r^2 = i \frac{r^2}{R^2} = i \left(\frac{r}{R}\right)^2 \quad (1.36)$$

conoscendo la corrente racchiusa all'interno della circonferenza di raggio $r < R$ è possibile ricavare l'andamento del campo magnetico all'interno del conduttore, che servirà nel calcolo dell'energia magnetica interna. Per calcolare il campo si applica sempre la legge di Biot-Savart 1.14, con questo è come considerare la parte interna del conduttore come un altro conduttore rettilineo indefinito:

$$B(r) = \frac{\mu_0 ir}{2\pi r} = \frac{\mu_0}{2\pi r} i \frac{r^2}{R^2} = \frac{\mu_0}{2\pi} i \frac{r}{R^2} \quad (1.37)$$

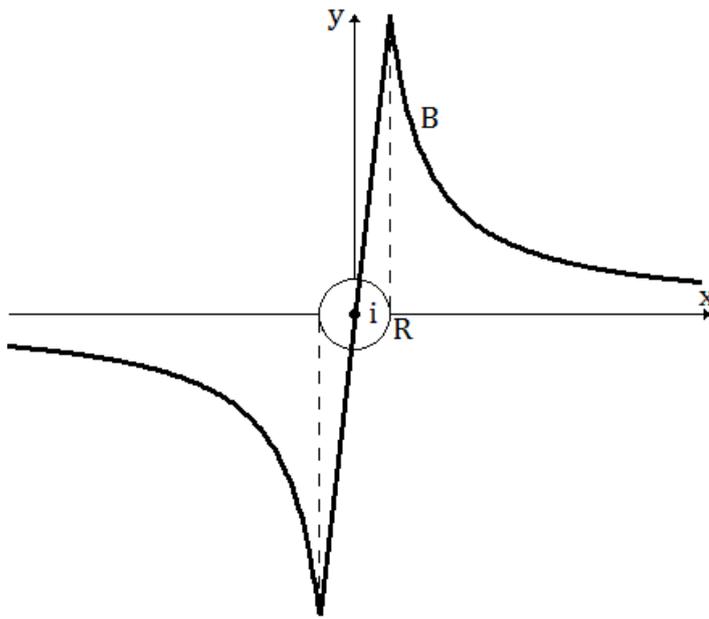


Figura 1.7 Andamento del campo magnetico all'esterno ed all'interno del conduttore

si osserva che il campo magnetico interno al conduttore ha un andamento lineare come dal grafico in Figura 1.7.

Ora si procede con il calcolo dell'energia magnetica immagazzinata nel conduttore. Per farlo si integra nel volume la densità di energia magnetica, ovvero l'energia magnetica per unità di volume.

Per ricavare la relazione della densità di energia magnetica si utilizza l'equazione dell'induttore utilizzando come variabile elettrica il flusso: $v = \frac{d\Phi_n}{dt}$. Da qui per trovare l'energia infinitesima si moltiplica entrambi i membri per idt :

$$vidt = id\Phi_n \quad (1.38)$$

il flusso elementare può essere scritto come: $d\Phi_n = \int_S d\mathbf{B} \cdot \mathbf{n}dS$,

mentre la corrente può essere riscritta utilizzando la legge di Ampère: $\oint \mathbf{B} \cdot d\mathbf{l} = \mu_0 i$. Il termine a sinistra nell'uguale ($vidt$) rappresenta l'energia assorbita elettrica dall'induttore e convertita in energia magnetica elementare dW_m . Sostituendo ai vari elementi diventa:

$$dW_m = \frac{1}{\mu_0} \oint \mathbf{B} \cdot d\mathbf{l} \int_S d\mathbf{B} \cdot \mathbf{n}dS = \frac{1}{\mu_0} \int_{\tau} (\mathbf{B} \cdot d\mathbf{B}) d\tau \quad (1.39)$$

avendo ottenuto un integrale di volume, il suo integrando è proprio la densità di energia magnetica elementare $dw'_m = \frac{1}{\mu_0} (\mathbf{B} \cdot d\mathbf{B})$. Per ricavare la densità di energia magnetica, basta integrarla in B :

$$w'_m = \int_0^B \frac{1}{\mu_0} B dB = \frac{1}{2} \frac{B^2}{\mu_0} \quad (1.40)$$

questa è la relazione della densità di energia magnetica, per trovare l'energia magnetica in un certo volume basta integrarla in questo volume, ovvero risolvere

$$W_m = \int_{\tau} \frac{1}{2} \frac{B^2}{\mu_0} d\tau \quad (1.41)$$

ritornando al nostro caso, l'integrale di volume, attuando un cambio di variabile $d\tau = 2\pi r \cdot dr \cdot l$ risulta essere:

$$W_m = \int_{\tau} \frac{1}{2} \frac{[B(r)]^2}{\mu_0} d\tau = l \int_0^R \frac{1}{2\mu_0} \left(\frac{\mu_0}{2\pi} i \frac{r}{R^2} \right)^2 2\pi r dr = \frac{\mu_0 i^2 l}{4\pi R^4} \int_0^R r^3 dr = \frac{\mu_0 i^2 l R^4}{4\pi R^4 \cdot 4} = \frac{\mu_0 i^2 l}{16\pi} \quad (1.42)$$

Conoscendo ora l'energia magnetica è possibile trovare il termine del coefficiente di autoinduttanza dovuto al campo magnetico interno.

Sapendo che l'energia magnetica può anche essere calcolata utilizzando l'equazione caratteristica dell'induttore utilizzando come variabile elettrica la corrente cioè: $v = L \frac{di}{dt}$ la si moltiplica per idt ed integrando:

$$\int v i dt = W_m = \int L i di = \frac{1}{2} L i^2 \quad (1.43)$$

Da qui si ricava facilmente L in funzione di i e di W_m : $L = \frac{2W_m}{i^2}$. Si sostituisce ora l'energia ricavata nel caso in esame, ottenendo così il termine del coefficiente di autoinduttanza dovuto al campo magnetico interno, che è chiamato L_i :

$$L_i = \frac{2W_m}{i^2} = \frac{2}{i^2} \frac{\mu_0 i^2 l}{16\pi} = \frac{\mu_0 l}{8\pi} \quad (1.44)$$

Andando a sommarlo con il termine, precedentemente calcolato, del coefficiente di autoinduttanza dovuto al campo magnetico esterno, che è chiamato da ora L_e , si ottiene il coefficiente di autoinduttanza complessivo L . Si ricordi che L_i va moltiplicato per 2 in quanto sono 2 i conduttori nel caso.

$$L = L_e + 2L_i = \frac{\mu_0 l}{\pi} \ln\left(\frac{D-R}{R}\right) + \frac{\mu_0 l}{4\pi} = \frac{\mu_0 l}{\pi} \left[\ln\left(\frac{D-R}{R}\right) + \frac{1}{4} \right] \quad (1.45)$$

Come per il caso precedente per il calcolo della forza si applica l'equazione ricavata:

$$F_s = \frac{1}{2} i^2 \frac{dL}{dD} = \frac{1}{2} i^2 \frac{d}{dD} \left(\frac{\mu_0 l}{\pi} \left[\ln\left(\frac{D-R}{R}\right) + \frac{1}{4} \right] \right) = \frac{\mu_0 i^2 l}{2\pi(D-R)} \quad (1.46)$$

la forza ottenuta è la stessa trovata senza considerare il contributo del campo magnetico interno con corrente uniformemente distribuita. Questo perché L_i non dipende da D . Nel caso in cui R sia molto minore di D lo può trascurare, riottenendo così: $F_s = \frac{\mu_0 i^2 l}{2\pi D}$. Con ciò si può dire che, per la forza elettrodinamica, il tutto è equivalente a due conduttori filiformi lunghi l , posti alla distanza D e percorsi dalla corrente i .

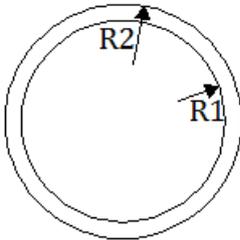


Figura 1.8 Sezione di una sbarra della sottostazione

Le barre nella sottostazione presa come esempio applicativo non hanno una sezione circolare piena, ma hanno una sezione tubolare come in Figura 1.8 dove R_1 è il raggio interno e R_2 è il raggio esterno.

Ora rimane da verificare che la forza magnetica, anche in questo caso, non dipenda dal campo magnetico interno. Si fa sempre l'ipotesi di densità di corrente costante che adesso deve essere calcolata sottraendo la sezione vuota

centrale, ovvero:

$$J = \frac{i}{S} = \frac{i}{\pi R_2^2 - \pi R_1^2} \quad (1.47)$$

come fatto per la sezione circolare, si traccia una circonferenza però con raggio r compreso tra R_1 e R_2 . La corrente ir racchiusa in essa vale:

$$ir = J(\pi r^2 - \pi R_1^2) = \frac{i}{\pi R_2^2 - \pi R_1^2} (\pi r^2 - \pi R_1^2) = i \frac{r^2 - R_1^2}{R_2^2 - R_1^2} \quad (1.48)$$

ora occorre determinare l'andamento del campo magnetico all'interno del conduttore. Nella zona vuota centrale in campo magnetico è nullo poiché, tracciando una circonferenza al suo interno, non viene racchiusa corrente. Nella zona $R_1 < r < R_2$ per il calcolo del campo si applica sempre la legge di Biot-Savart:

$$B(r) = \frac{\mu_0 ir}{2\pi r} = \frac{\mu_0 i}{2\pi r} \frac{r^2 - R_1^2}{R_2^2 - R_1^2} = \frac{\mu_0 i}{2\pi(R_2^2 - R_1^2)} \left(r - \frac{R_1^2}{r} \right) \quad (1.49)$$

si procede con il calcolo dell'energia magnetica integrando la densità di energia:

$$\begin{aligned}
W_m &= \int_{\tau} \frac{1}{2} \frac{[B(r)]^2}{\mu_0} d\tau = l \int_{R_1}^{R_2} \frac{1}{2\mu_0} \left(\frac{\mu_0}{2\pi} i \frac{1}{(R_2^2 - R_1^2)} \left(r - \frac{R_1^2}{r} \right) \right)^2 2\pi r dr \\
&= \frac{\mu_0 i^2 l}{4\pi(R_2^2 - R_1^2)^2} \int_{R_1}^{R_2} \left(\frac{r^2 - R_1^2}{r} \right)^2 r dr \\
&= \frac{\mu_0 i^2 l}{4\pi(R_2^2 - R_1^2)^2} \int_{R_1}^{R_2} (r^3 - 2R_1 r + R_1^4) dr \\
&= \frac{\mu_0 i^2 l}{4\pi(R_2^2 - R_1^2)^2} \left[\frac{1}{4}(R_2^4 - R_1^4) - R_1(R_2^2 - R_1^2) + R_1^4(R_2 - R_1) \right] \quad (1.50)
\end{aligned}$$

oltre alla complessità del risultato, un'altra cosa che si nota è che W_m non dipende dalla distanza tra i due conduttori: D . Quindi nel calcolo della forza il termine $L_i = \frac{2W_m}{i^2}$, non dipendendo dalla distanza, non produce contributo, infatti:

$$\begin{aligned}
F_s &= \frac{1}{2} i^2 \frac{dL}{dD} = \frac{1}{2} i^2 \frac{d}{dD} (L_e + 2L_i) = \frac{1}{2} i^2 \frac{d}{dD} \left(L_e + \frac{4W_m}{i^2} \right) = \frac{1}{2} i^2 \frac{dL_e}{dD} + \frac{1}{2} i^2 \frac{4}{i^2} \frac{dW_m}{dD} \\
&= \frac{1}{2} i^2 \frac{dL_e}{dD} + 0 \quad (1.51)
\end{aligned}$$

in conclusione l'equazione 1.51 di F_s è uguale a quella già calcolata la 1.24, equivalente a quella del caso di due conduttori filiformi rettilinei alla distanza D , se si trascura il raggio esterno del conduttore rispetto alla distanza D :

$$F_s = \frac{1}{2} i^2 \frac{dL_e}{dD} + 0 = \frac{\mu_0 i^2 l}{2\pi(D - R_2)} \cong \frac{\mu_0 i^2 l}{2\pi D} \quad (1.52)$$

ovviamante si ricorda che questo risultato è stato ottenuto con l'ipotesi di corrente uniformemente distribuita.

1.2.5. Forze elettrodinamiche nei trasformatori

Le formule che si sono ottenute vengono anche utilizzate per il calcolo delle forze magnetiche presenti negli avvolgimenti dei trasformatori, sempre durante i cortocircuiti. Il caso più semplice è il trasformatore a bobine concentriche di sezione rettangolare. Per farlo si utilizza il loro seguente modello semplificato. Gli avvolgimenti vengono rappresentati da un'unica spira avente le stesse dimensioni e, trascurando la corrente a vuoto, per produrre la stessa forza magnetomotrice devono essere attraversate dalle correnti $N_1 I_1$ il primario e $N_2 I_2$ il secondario. Con N_1, N_2 si intende il numero di spire di primario e secondario e con I_1, I_2 si intendono le correnti nei rispettivi. Inoltre le correnti vengono ipotizzate uniformemente distribuite all'interno delle spire. Avendo trascurato la corrente a vuoto si ha $N_1 I_1 = N_2 I_2$

Essendo molto vicini gli avvolgimenti, ovvero la distanza tra loro è confrontabile con le loro dimensioni, non è possibile considerarle come conduttori filiformi. Per il calcolo della forza si può utilizzare l'equazione della forza di Lorentz 1.22: $\mathbf{F} = i(\mathbf{l} \times \mathbf{B})$. Occorre però sapere il campo magnetico all'interno della spira, che non è costante ma avrà un certo andamento. Per il calcolo di esso si utilizza la legge di Ampère 1.19: $\oint \mathbf{B} \cdot d\mathbf{l} = \mu_0 i$. Si considera che all'esterno il campo magnetico sia trascurabile e che, nello spazio racchiuso tra i due avvolgimenti e all'interno di essi sia costante e parallelo al lato lungo delle spire. Con queste considerazioni, prendendo come percorso chiuso una linea che percorra lo spazio racchiuso in modo parallelo al lato lungo delle spire e che si richiuda all'esterno, l'integrale di circuitazione risulta:

$$\oint \mathbf{B} \cdot d\mathbf{l} = Bh = \mu_0 N_1 I_1 = \mu_0 N_2 I_2 \quad (1.53)$$

dove h è l'altezza del lato lungo e B è il modulo del campo magnetico nello spazio racchiuso tra i due avvolgimenti, che ora è possibile ricavarlo da questa equazione:

$$B = \frac{\mu_0 N_1 I_1}{h} = \frac{\mu_0 N_2 I_2}{h} \quad (1.54)$$

avendo ipotizzato una distribuzione uniforme delle correnti, la distribuzione del campo all'interno degli avvolgimenti la si può considerare lineare tale da congiungere il modulo di B della zona interna con il valore zero della zona esterna, come si vede dalla Figura 1.9:

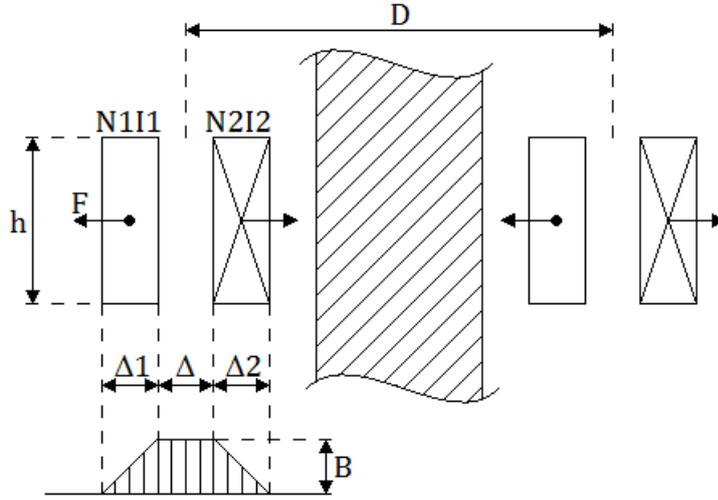


Figura 1.9 Distribuzione del campo magnetico e forza magnetica nell'avvolgimento di un trasformatore a bobine concentriche

Per cui all'interno dell'avvolgimento si può assumere il valore medio, che sarà uguale alla metà di B , cioè: $\frac{\mu_0 N_1 I_1}{2h}$

Il verso della forza, come in Figura 1.9, tende ad allontanare gli avvolgimenti in quanto sono attraversati da correnti discordi.

Le lunghezze medie degli avvolgimenti, essendo circolari e detto D il diametro medio, sono date da:

$$l_1 = l_2 = \pi D \quad (1.55)$$

conoscendo il campo negli avvolgimenti e la loro lunghezza è possibile trovare il modulo della

forza applicando Lorentz, per il primo avvolgimento risulta:

$$F = \frac{B}{2} il = \frac{\mu_0 N_1 I_1}{2h} N_1 I_1 \pi D = \frac{1}{2} \mu_0 \frac{N_1^2 i_1^2}{h} \pi D \quad (1.56)$$

Per il secondo avvolgimento il risultato è uguale, solo che il verso della forza è verso l'interno anziché verso l'esterno, facendo la verifica si ottiene:

$$F = \frac{B}{2} il = \frac{\mu_0 N_2 I_2}{2h} N_2 I_2 \pi D = \frac{1}{2} \mu_0 \frac{N_2^2 i_2^2}{h} \pi D = \frac{1}{2} \mu_0 \frac{N_1^2 i_1^2}{h} \pi D \quad (1.57)$$

essendoci una corrente alternata sinusoidale, se si vuole trovare la forza massima si deve sostituire alle correnti il valore massimo, se si vuole trovare il valore medio nel tempo F_m occorre integrare la forza in un periodo e dividere il risultato per il periodo stesso:

$$F_m = \int_0^T F dt = \int_0^T \frac{1}{2} \mu_0 \frac{N_1^2 i_1^2}{h} \pi D dt = \frac{1}{2} \mu_0 \frac{N_1^2}{h} \pi D \int_0^T i_1^2 dt \quad (1.58)$$

si osserva che il termine $\int_0^T i_1^2 dt$ rappresenta il valore efficace della corrente al quadrato, quindi sostituendo risulta:

$$F_m = \frac{1}{2} \mu_0 \frac{N_1^2}{h} \pi D I_{1eff}^2 \quad (1.59)$$

Da qui si vede che il valore medio della forza è la metà del valore massimo in quanto se si sostituisce ad I il valore massimo che è $I_{1max} = \sqrt{2} I_{1eff}$ si ottiene:

$$F_{max} = F_m = \frac{1}{2} \mu_0 \frac{N_1^2}{h} \pi D I_{1max}^2 = \frac{1}{2} \mu_0 \frac{N_1^2}{h} \pi D (2 I_{1eff}^2) = \mu_0 \frac{N_1^2}{h} \pi D I_{1eff}^2 = 2 F_m \quad (1.60)$$

per ridurre le sollecitazioni meccaniche si possono utilizzare avvolgimenti a bobine alternate. Questo metodo consiste nel suddividere gli avvolgimenti in q mezza bobine, che hanno rispettivamente $\frac{N_1}{q}$ e $\frac{N_2}{q}$ spire. Esse vengono disposte lungo il nucleo centrale come in Figura 1.10, in cui $q = 4$.

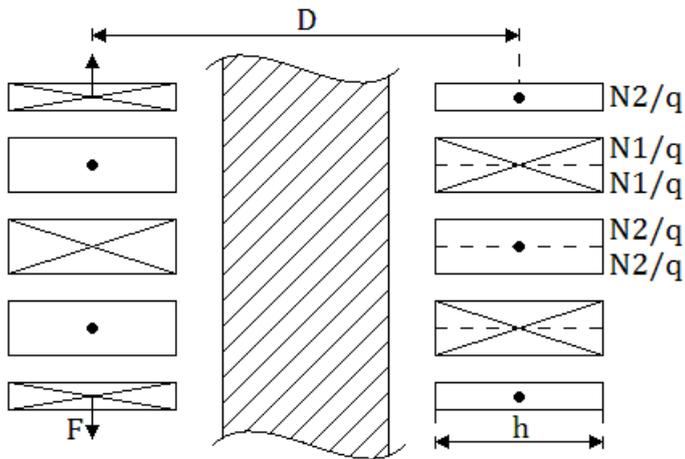


Figura 1.10 Distribuzione del campo magnetico e forza magnetica nell'avvolgimento di un trasformatore a bobine alternate

Applicando le stesse considerazioni sviluppate in precedenza, si ricava la forza magnetica, che avra in questo caso direzione assiale con modulo:

$$F = \frac{1}{2} \mu_0 \frac{N_1^2 i_1^2}{h q^2} \pi D \quad (1.61)$$

Il verso della forza delle bobine esterne è repulsivo. Nelle bobine interne compaiono due forze uguali in modulo ma con verso opposto che tendono a schiacciare la bobina. Questo fatto fa sì che si compensino.

In questa tesi ci si concentrerà più sugli altri elementi della sottostazione, poiché l'impresa installatrice dell'impianto non necessita di verificare la resistenza del trasformatore alle sollecitazioni

elettrodinamiche che è compito del costruttore.

CAPITOLO 2

2. Resistenza alle sollecitazioni elettrodinamiche degli elementi di una sottostazione

2.1. Tensioni a cui sono sottoposti gli elementi della sottostazione

Gli elementi della sottostazione per i quali si verifica la resistenza meccanica alle sollecitazioni elettrodinamiche sono le sbarre rigide ed i conduttori flessibili.

Le sbarre rigide, normalmente, sono incernierate nel primo supporto ed appoggiate al secondo, questo permette alla sbarra di allungarsi o restringersi per effetto termico senza deformarsi. Dal punto di vista meccanico, una sbarra non è altro che una trave.

Per la verifica alle sollecitazioni, come prima cosa occorre trovare l'andamento delle azioni interne quali: momento flettente e taglio, dai quali è possibile ricavare l'andamento della tensione interna. Da quest'ultimo si trova il suo massimo e si verifica che la tensione interna rimanga all'interno di quella massima consentita, o critica, stabilita inizialmente.

Per il calcolo delle tensioni interne è stato scelto di non considerare lo spostamento dovuto alla deformazione della trave in modo da ottenere un risultato più cautelativo. Come tensione interna critica non viene scelta quella di rottura, ma quella di snervamento. Questo consente di avere un margine di sicurezza, ed inoltre consente di avere deformazioni elastiche, il che significa che una volta rimossa la forza, la sbarra ritorna alla posizione originale, contrariamente a ciò che avviene superando lo snervamento in cui la sbarra assume una nuova posizione di riposo.

Conoscendo il momento flettente in una sezione della sbarra è possibile ricavare la massima tensione normale prodotta utilizzando la formula di Navier. Essa è valida se sono soddisfatte le ipotesi del modello di De Saint Venant, ovvero: il corpo deve essere un cilindro retto, il materiale deve essere omogeneo elastico lineare ed isotropo, non ci devono essere vicioli e forze di superficie o volume (come la gravità) ed il corpo deve essere in equilibrio. Nel nostro caso queste ipotesi sono soddisfatte.

2.2. Calcolo delle tensioni interne

2.2.1. Calcolo delle tensioni dovute a momento flettente

Si prenda quindi la trave (che sarebbe la sbarra) e si definisce: asse z quello coincidente con l'asse della trave e gli assi x , y ortogonali tra loro e con l'asse z . Questi assi x , y generano un piano su cui si trovano le sezioni della trave.

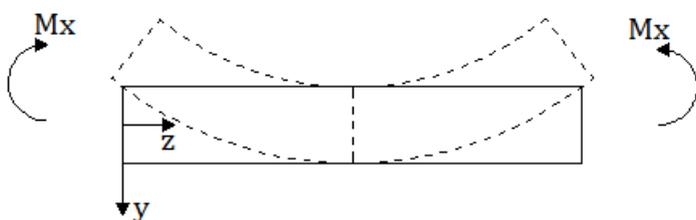


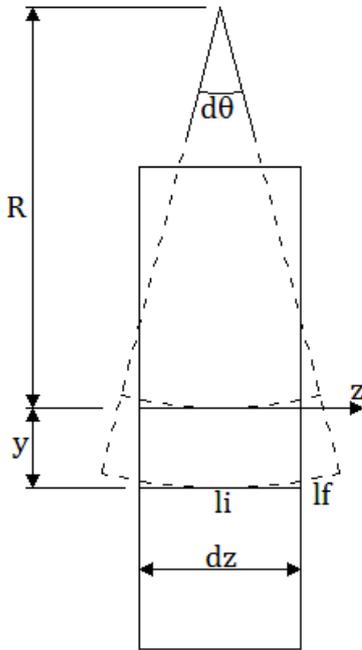
Figura 2.1 Momenti flettenti uguali ed opposti applicati ad una trave

Applicando ora, come in Figura 2.1, due momenti uguali ed opposti M_x lungo x alle estremità si avrà una certa deformazione.

Si osserva che la sezione di mezzeria rimane piana, verticale e non subisce spostamenti lungo z . Questo per simmetria. Per le altre sezioni si può solo dire che rimangono piane, perché basta dividere in parti uguali la trave e studiarle separatamente. Quindi rimangono sempre piane, anche se, però possono subire rotazioni, traslazioni e

deformazioni all'interno del piano in cui rimangono.

Si prenda ora un concio di trave dz , questo si deformerà come nella Figura 2.2. Chiamando con R la distanza dell'asse z dal centro di curvatura, ci si pone ad una distanza y da quest'asse e si calcola il coefficiente di dilatazione lineare lungo zeta ε_z di questa fibra:



$$\varepsilon_z = \frac{l_f - l_i}{l_i} = \frac{(R + y)d\theta - Rd\theta}{Rd\theta} = \frac{y}{R} = \kappa_x y \quad (2.1)$$

dove κ_x è la curvatura, cioè l'inverso del raggio. Ora si scrive la tensione interna σ_z (che è quella che si vuole ricavare) in funzione di ε_z , ponendo E il modulo di elasticità normale o di Young:

$$\sigma_z = E\varepsilon_z = E\kappa_x y \quad (2.2)$$

in questa equazione a destra dell'uguale non si conosce κ_x , ma lo si può trovare scrivendo un'altra equazione, quella del momento flettente: se si integra σ_z moltiplicato la distanza y dall'asse z si deve ottenere il momento flettente M_x :

$$M_x = \int_A \sigma_z y dA = \int_A E\kappa_x y^2 dA = E\kappa_x \int_A y^2 dA = E\kappa_x I_x \quad (2.3)$$

Si ricava:

$$\kappa_x = \frac{M_x}{EI_x} \quad (2.4)$$

Il termine $\int_A y^2 dA$ rappresenta il momento d'inerzia I_x dall'asse x .

Combinando le due equazioni si ottiene la formula di Navier che permette di calcolare la tensione interna conoscendo il momento flettente a cui è sottoposta la trave:

$$\sigma_z = E\kappa_x y = E \frac{M_x}{EI_x} y = \frac{M_x}{I_x} y \quad (2.5)$$

2.2.3. Calcolo delle tensioni dovute a taglio

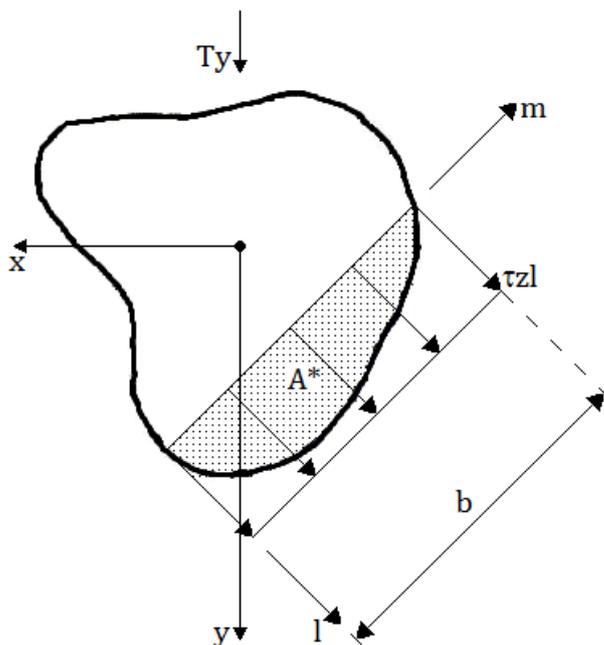


Figura 2.3 Corda generica in una sezione della trave

La sbarra è sottoposta anche a taglio (che è quello che produce il momento), è necessario dunque calcolare la tensione dovuta a taglio. La soluzione di questo problema è complicata per cui è stato scelto di ricorrere alla trattazione approssimata del taglio, utilizzando la soluzione di Jourawski.

Per arrivare alla soluzione di Jourawski, si prende una sezione della trave e si traccia una corda generica, di lunghezza b , che la divida in due parti come in Figura 2.3.

Sulla corda sono presenti sforzi perpendicolari τ_{zl} e sforzi tangenti τ_{zm} , e variano lungo la corda, cioè sono funzioni di m .

Utilizzando Jourawski, si ricava il valore medio di τ_{zl} lungo m . Per farlo si inizia isolando la parte sottostante la corda di un

conco di trave avente lunghezza dz .

Si ottiene un cilindro di lunghezza dz e di base A^* .

Si analizzano ora gli sforzi presenti in questo cilindro lungo z . In z è presente una distribuzione di tensioni normali $\sigma_z(z)$ dovuta al momento flettente associato al taglio, calcolabile con la formula di Navier 2.5 : $\frac{M_x(z)}{I_x}y$. Anche in $z + dz$ è presente una distribuzione di tensioni normali dovuta al momento flettente associato al taglio $\sigma_z(z + dz) = \frac{M_x(z+dz)}{I_x}y$ diversa dalla precedente. Sulla superficie superiore è presente una distribuzione τ_{lz} , costante lungo b , poiché il tratto è infinitesimo. Sulle superfici laterali è presente la distribuzione τ_{zl} con versi opposti. Imponendo l'equilibrio alla traslazione lungo z si ottiene:

$$-\int_{A^*} \sigma_z(z) dA - \int_{bdz} \tau_{lz} dA + \int_{A^*} \sigma_z(z + dz) dA = 0 \quad (2.6)$$

Adesso si applica il teorema del valor medio all'integrale, sostituendolo con $\overline{\tau_{lz}}bdz$, dove $\overline{\tau_{lz}}$ è il valore medio del taglio, quindi l'equazione diventa:

$$-\int_{A^*} \sigma_z(z) dA - \overline{\tau_{lz}}bdz + \int_{A^*} \sigma_z(z + dz) dA = 0 \quad (2.7)$$

$$-\int_{A^*} \frac{M_x(z)}{I_x} y dA - \overline{\tau_{lz}}bdz + \int_{A^*} \frac{M_x(z + dz)}{I_x} y dA = 0 \quad (2.8)$$

$$\overline{\tau_{lz}} = \frac{1}{I_x b} \left[\frac{M_x(z + dz) - M_x(z)}{dz} \right] \int_{A^*} y dA = \frac{1}{I_x b} \left[\frac{dM_x(z)}{dz} \right] \int_{A^*} y dA = \frac{T_y}{I_x b} S_x^* \quad (2.9)$$

La derivata del momento è il taglio, per questo è stata sostituita con T_y . Il momento statico $\int_{A^*} y dA$ dell'area A^* è stato chiamato S_x^* .

Con la formula di Jourawski: $\overline{\tau_{lz}} = \frac{T_y}{I_x b} S_x^*$ è possibile calcolare la tensione tangenziale media su una corda qualsiasi.

2.2.4. Criterio tensionale di von Mises

Con le formule di Navier e di Jourawski è quindi possibile ricavare le tensioni interne in ogni punto delle sbarre. Per verificare poi che non superino in valore limite si è scelto di applicare il criterio tensionale dell'energia di distorsione (detto anche di von Mises) perché rappresente bene i materiali duttili, essendo le sbarre in metallo. Con questo metodo la tensione ideale σ_{id} si calcola così

$$\sigma_{id} = \sqrt{\sigma_z^2 + 3\tau_z^2} \quad (2.10)$$

La σ_{id} è la tensione monoassiale di uguale pericolosità. Come stabilito all'inizio deve essere minore di quella di snervamento.

Per le sbarre, nella verifica di resistenza alle forze elettrodinamiche nei cortocircuiti è stato scelto di non considerare la forza peso perché è trascurabile rispetto ad esse.

Nei conduttori flessibili l'unica tensione interna presente è quella normale. In questo caso, per ogni sezione del conduttore essa non deve superare quella di snervamento. A differenza della sbarre, nei conduttori flessibili si deve considerare anche la forza peso, questo per la disposizione del conduttore. Anche se il peso crea tensioni interne molto più basse delle forze elettrodinamiche, il suo contributo è fondamentale per ricavarne la posizione.

CAPITOLO 3

3. Normativa sulle sollecitazioni elettrodinamiche CEI EN 60865-1

3.1. Calcolo della forza in conduttori rigidi

Anche nella norma vengono analizzate le due tipologie di conduttore: rigido e flessibile. Inizialmente viene fornita la formula generale per il calcolo della forza in conduttori rettilinei paralleli, già ottenuta in precedenza (ovvero la il modulo della 1.25). La distanza tra i conduttori viene indicata con a anziché r :

$$F = \frac{\mu_0 i_2 i_1 l}{2\pi a} \quad (3.1)$$

si fa riferimento ad un sistema trifase. Per i conduttori rigidi distingue due casi: il primo in cui ci sia un solo conduttore per fase, ed il secondo in cui ci siano più conduttori per fase.

Iniziando dal primo, vengono fornite delle formule per il calcolo della forza massima nei vari tipi di guasto considerando i conduttori nello stesso piano. Nel caso di guasto fase-fase la formula fornita è la stessa ricavata in precedenza:

$$F_{m2} = \frac{\mu_0 i_p^2 l}{2\pi a} \quad (3.2)$$

nel caso di guasto trifase simmetrico, la norma sostiene che la forza massima sia applicata al conduttore centrale e viene fornita l'equazione seguente:

$$F_{m3} = \frac{\sqrt{3} \mu_0 i_p^2 l}{2 \cdot 2\pi a_m} \quad (3.3)$$

Dove a_m è la distanza tra i conduttori di fase. È possibile trovare questa relazione procedendo nel seguente modo. Considerando la disposizione dei conduttori nel piano come in Figura 3.1:

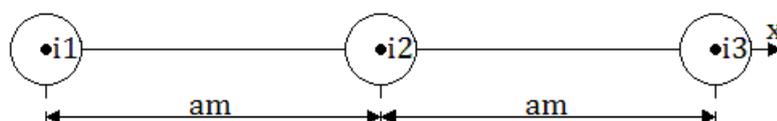


Figura 3.1 Disposizione dei conduttori nel piano nel caso considerato

dove i_1, i_2, i_3 sono le correnti rispettivamente nelle fasi 1,2,3. Essendo nello stesso piano, le forze si possono trovare solo lungo l'asse x . In un cortocircuito trifase simmetrico queste correnti sono una terna simmetrica ed equilibrata di correnti, di valore massimo i_p . Dunque possono essere scritte come:

$$i_1(t) = i_p \sin(\omega t) \quad (3.4)$$

$$i_2(t) = i_p \sin\left(\omega t - \frac{2}{3}\pi\right) \quad (3.5)$$

$$i_3(t) = i_p \sin\left(\omega t - \frac{4}{3}\pi\right) \quad (3.6)$$

la forza nel conduttore 2 è data dalla somma di due contributi: il primo dovuto alla fase 1 ed il secondo dovuto alla fase 3. Lo stesso ragionamento vale anche per gli altri due conduttori. Andando a scrivere l'equazione della forza nella fase 2 si ottiene:

$$F_2(t) = \frac{\mu_0 i_2(t) i_3(t) l}{2\pi a_m} - \frac{\mu_0 i_2(t) i_1(t) l}{2\pi a_m} = \frac{\mu_0 l}{2\pi a_m} [i_2(t) i_3(t) - i_2(t) i_1(t)] \quad (3.7)$$

Ora si procede col sostituire le relazioni delle correnti nell'equazione appena trovata, ricavando:

$$F_2(t) = \frac{\mu_0 l}{2\pi a_m} \left[i_p \sin\left(\omega t - \frac{2}{3}\pi\right) i_p \sin\left(\omega t - \frac{4}{3}\pi\right) - i_p \sin\left(\omega t - \frac{2}{3}\pi\right) i_p \sin(\omega t) \right] \quad (3.8)$$

$$F_2(t) = \frac{\mu_0 i_p^2 l}{2\pi a_m} \left[\sin\left(\omega t - \frac{2}{3}\pi\right) \sin\left(\omega t - \frac{4}{3}\pi\right) - \sin\left(\omega t - \frac{2}{3}\pi\right) \sin(\omega t) \right] \quad (3.9)$$

per continuare è necessario utilizzare le formule di Werner, che permettono di scomporre il prodotto tra seni, ottenendo così:

$$\begin{aligned} F_2(t) &= \frac{\mu_0 i_p^2 l}{2\pi a_m} \left\{ -\frac{1}{2} \left[\cos\left(2\omega t - \frac{6}{3}\pi\right) - \cos\left(\frac{2}{3}\pi\right) \right] + \frac{1}{2} \left[\cos\left(2\omega t - \frac{2}{3}\pi\right) - \cos\left(\frac{2}{3}\pi\right) \right] \right\} \\ F_2(t) &= \frac{\mu_0 i_p^2 l}{2\pi a_m} \left\{ -\frac{1}{2} \cos(2\omega t) + \frac{1}{2} \cos\left(\frac{2}{3}\pi\right) + \frac{1}{2} \cos\left(2\omega t - \frac{2}{3}\pi\right) - \frac{1}{2} \cos\left(\frac{2}{3}\pi\right) \right\} \\ F_2(t) &= \frac{\mu_0 i_p^2 l}{2\pi a_m} \frac{1}{2} \left\{ \cos\left(2\omega t - \frac{2}{3}\pi\right) - \cos(2\omega t) \right\} = \frac{\mu_0 i_p^2 l \sqrt{3}}{2\pi r} \frac{1}{2} \cos\left(2\omega t - \frac{5}{6}\pi\right) \end{aligned} \quad (3.10)$$

non è necessario calcolarne la derivata, poiché il coseno è compreso tra 1 e -1, la forza massima trovata quindi è uguale a quella indicata nella norma, ovvero alla 3.3:

$$F_{2max} = \frac{\sqrt{3} \mu_0 i_p^2 l}{2 \cdot 2\pi a_m} = F_{m3} \quad (3.11)$$

resta da verificare che la forza massima nelle altre due fasi esterne rimanga al di sotto di questa. Per simmetria, il modulo della forza massima calcolata in una fase esterna dovrebbe essere uguale al modulo della forza massima calcolato per l'altra fase esterna. Si prende quindi la fase 1 e procedendo alla stessa maniera:

$$\begin{aligned} F_1(t) &= \frac{\mu_0 i_1(t) i_2(t)}{2\pi a_m} l + \frac{\mu_0 i_1(t) i_3(t)}{2\pi(2a_m)} l = \frac{\mu_0 l}{2\pi a_m} \left[i_1(t) i_2(t) + \frac{1}{2} i_1(t) i_3(t) \right] \\ F_1(t) &= \frac{\mu_0 i_p^2 l}{2\pi a_m} \left[\sin(\omega t) \sin\left(\omega t - \frac{2}{3}\pi\right) + \frac{1}{2} \sin(\omega t) \sin\left(\omega t - \frac{4}{3}\pi\right) \right] \\ F_1(t) &= \frac{\mu_0 i_p^2 l}{2\pi a_m} \left\{ -\frac{1}{2} \left[\cos\left(2\omega t - \frac{2}{3}\pi\right) - \cos\left(\frac{2}{3}\pi\right) \right] - \frac{1}{4} \left[\cos\left(2\omega t - \frac{4}{3}\pi\right) - \cos\left(\frac{4}{3}\pi\right) \right] \right\} \\ F_1(t) &= \frac{\mu_0 i_p^2 l}{2\pi a_m} \frac{1}{2} \left[\cos\left(\frac{2}{3}\pi\right) - \cos\left(2\omega t - \frac{2}{3}\pi\right) - \frac{1}{2} \cos\left(2\omega t - \frac{4}{3}\pi\right) + \frac{1}{2} \cos\left(\frac{4}{3}\pi\right) \right] \\ F_1(t) &= \frac{\mu_0 i_p^2 l}{2\pi a_m} \frac{1}{2} \left[\frac{3}{2} \cos\left(\frac{2}{3}\pi\right) - \left[\cos\left(2\omega t - \frac{2}{3}\pi\right) + \frac{1}{2} \cos\left(2\omega t - \frac{4}{3}\pi\right) \right] \right] \\ F_1(t) &= \frac{\mu_0 i_p^2 l}{2\pi a_m} \frac{1}{2} \left[-\frac{3}{4} - \frac{\sqrt{3}}{2} \cos\left(2\omega t + \pi - \frac{\pi}{6}\right) \right] = \frac{\mu_0 i_p^2 l}{2\pi a_m} \frac{1}{2} \left[-\frac{3}{4} - \frac{\sqrt{3}}{2} \cos\left(2\omega t - \frac{5\pi}{6}\right) \right] \end{aligned} \quad (3.12)$$

il valore massimo della forza in modulo si ottiene sostituendo al coseno il valore unitario:

$$F_{1max} = F_{3max} = \frac{\mu_0 i_p^2 l}{2\pi a_m} \frac{1}{2} \left[\frac{3}{4} + \frac{\sqrt{3}}{2} \right] \quad (3.13)$$

si nota che, come sostiene la norma, è minore del valore massimo nella fase 2 poiché il termine $\frac{1}{2} \left[\frac{3}{4} + \frac{\sqrt{3}}{2} \right]$ è minore di $\frac{\sqrt{3}}{2}$.

Se si hanno più conduttori per fase, la norma fornisce questa formula per il calcolo della forza massima su ogni sub-conduttore:

$$F_s = \frac{\mu_0}{2\pi} \left(\frac{i_p}{n} \right)^2 \frac{l_s}{a_s} \quad (3.14)$$

n è il numero di sub-conduttori e a_s è la distanza effettiva tra essi. Quest'ultima dipende dalla forma geometrica del sub conduttore. Ad esempio se è unico e di sezione quadrata allora $a_s = \frac{r}{k_{12}}$, in cui k_{12} è un coefficiente ricavabile da un grafico fornito nella norma. Per altri casi come sub-conduttori con sezioni circolari sono presenti altre formule per il calcolo.

3.2. Calcolo della tensione interna massima in conduttori rigidi

Dopo il calcolo delle forze, nella norma viene definito il procedimento per calcolare la tensione interna massima. Come già stato detto, anche la norma sottolinea che i conduttori rigidi, per come sono disposti, non sono soggetti a sforzo normale da parte della sollecitazioni elettrodinamiche. Per il calcolo della tensione interna massima, nel caso di conduttore unico, viene suggerita l'equazione generale:

$$\sigma_{m,d} = V_{\sigma m} V_{r m} \beta \frac{F_m l}{8W_m} \quad (3.15)$$

W_m è il modulo di resistenza, che è uguale a $\frac{I_x}{y}$. $V_{\sigma m}$, $V_{r m}$ sono dei coefficienti che tengono conto dell'effetto dinamico ricavabili da una tabella qua riportata (la 3.2), praticamente: se presente la richiusura automatica il prodotto $V_{\sigma m} V_{r m}$ vale 1.8, altrimenti 1. β è un altro coefficiente che tiene conto del numero di supporti (è uguale a 1 se è incernierato in un estremo e appoggiato nell'altro) anche questo si ricava da una tabella, qua riportata (la 3.1).

TABELLA 3.1 contenuta nella norma, necessaria per ricavare i coefficienti α β γ

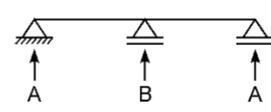
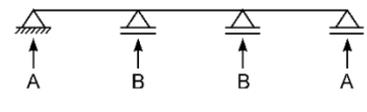
Type of beam and support			α	$\beta^*)$	γ
Single span beam	A and B: simple supports		A: 0,5 B: 0,5	1,0	1,57
	A: fixed support B: simple support		A: 0,625 B: 0,375	$\frac{8}{11} = 0,73$	2,45
	A and B: fixed supports		A: 0,5 B: 0,5	$\frac{8}{16} = 0,5$	3,56
Continuous beam with equidistant simple supports	Two spans		A: 0,375 B: 1,25	$\frac{8}{11} = 0,73$	2,45
	Three or more spans		A: 0,4 B: 1,1	$\frac{8}{11} = 0,73$	3,56
* Plasticity effects included.					

TABELLA 3.2 contenuta nella norma, necessaria per ricavare i coefficienti $V_{\sigma m} V_{r m}$, $V_{\sigma s} V_{r s}$, $V_F V_{r m}$

Type of short-circuit	System			
	Without three-phase automatic reclosing	With three-phase automatic reclosing		With and without three-phase automatic reclosing
	$V_{\sigma m} V_{r m}, V_{\sigma s} V_{r s}$	$V_{\sigma m} V_{r m}, V_{\sigma s} V_{r s}$		$V_F V_{r m}$
		First current flow	Second current flow	
Line-to-line	1,0	1,0	1,8	<div style="display: flex; justify-content: space-between;"> <div> <p>2,0 for $\frac{\sigma_{tot,d}}{0,8 f_y} \leq 0,5$</p> <p>$\frac{0,8 f_y}{\sigma_{tot,d}}$ for $0,5 < \frac{\sigma_{tot,d}}{0,8 f_y} < 1,0$</p> <p>1,0 for $1,0 \leq \frac{\sigma_{tot,d}}{0,8 f_y}$</p> </div> <div style="border-left: 1px solid black; padding-left: 10px;"> <p>range</p> <p>1</p> <p>2</p> <p>3</p> </div> </div>
Three-phase	1,0	1,0	1,8	<div style="display: flex; justify-content: space-between;"> <div> <p>2,7 for $\frac{\sigma_{tot,d}}{0,8 f_y} \leq 0,37$</p> <p>$\frac{0,8 f_y}{\sigma_{tot,d}}$ for $0,37 < \frac{\sigma_{tot,d}}{0,8 f_y} < 1,0$</p> <p>1,0 for $1,0 \leq \frac{\sigma_{tot,d}}{0,8 f_y}$</p> </div> <div style="border-left: 1px solid black; padding-left: 10px;"> <p>range</p> <p>1</p> <p>2</p> <p>3</p> </div> </div>

Quello che si nota è che la formula 3.15 fornita non è altro che quella di Navier 2.5 a cui sono stati aggiunti dei coefficienti correttivi. Quindi è equivalente a:

$$\sigma_{m,d} = V_{\sigma m} V_{r m} \beta \frac{M_x}{I_x} y \quad (3.16)$$

M_x è il valore massimo del momento. Esso è stato calcolato considerando uniformemente distribuita la forza, in questo M_x si trova al centro del conduttore. Osservando la Figura 3.2 è possibile calcolarlo.

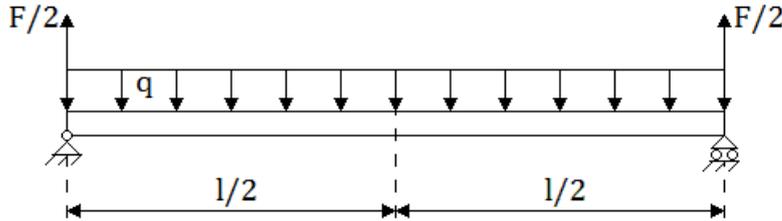


Figura 3.2 Sbarra con forza uniformemente distribuita

Chiamando il carico distribuito $q = \frac{F_m}{l}$. Le reazioni vincolari sono uguali nei due estremi a $\frac{F_m}{2}$, per simmetria. Posizionandosi al centro del conduttore si ha il massimo momento flettente, considerando, per l'analisi la parte sinistra si vede una forza $\frac{F_m}{2}$ ad una distanza di $\frac{l}{2}$ ed una

forza distribuita $\frac{l}{2} q$, che è possibile considerare al centro del tratto $\frac{l}{2}$, dunque il momento flettente massimo si calcola così:

$$M_x = \frac{F_m}{2} \frac{l}{2} - \int_0^{\frac{l}{2}} q x dx = \frac{F_m l}{2} - \frac{l}{2} q \frac{l}{4} = \frac{F_m l}{4} - \frac{F_m l^2}{8} = \frac{F_m l}{8} \quad (3.17)$$

inserendo la 3.17 nella formula di Navier 2.5 con i coefficienti correttivi si ottiene la formula della norma:

$$\sigma_{m,d} = V_{\sigma m} V_{r m} \beta \frac{M_x}{I_x} y = V_{\sigma m} V_{r m} \beta \frac{F_m l}{8 \frac{I_x}{y}} = V_{\sigma m} V_{r m} \beta \frac{F_m l}{8 W_m} \quad (3.18)$$

nel caso più sub-conduttori, viene fornita una formula simile per il calcolo di σ , in cui non compare il coefficiente β , e compare un fattore $\frac{1}{2}$:

$$\sigma_{s,d} = V_{\sigma s} V_{r s} \frac{F_s l_s}{16 W_s} \quad (3.19)$$

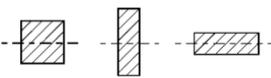
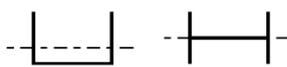
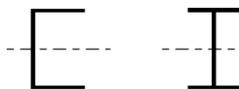
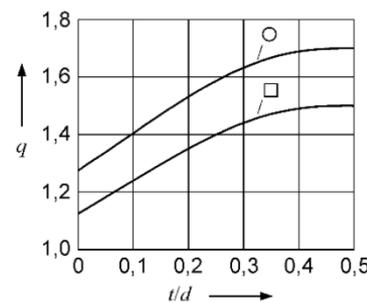
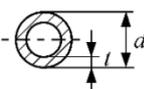
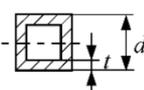
il modulo di resistenza W_s è indipendente dal numero di sub-conduttori, ed è dato dalla somma dei vari moduli di resistenza dei singoli sub-conduttori.

Lo stress permesso dalla norma è quello di snervamento f_y moltiplicato per un certo coefficiente q :

$$\sigma_{m,d} \leq q f_y \quad (3.20)$$

Il fattore q dipende dalla forma geometrica del conduttore. Si ottiene da una tabella sempre fornita dalla norma, e qui riportata (la 3.3).

TABELLA 3.3 contenuta nella norma, necessaria per ricavare il coefficiente q

Cross section		Cross section	
	$q = 1,5$		$q = 1,83$
			$q = 1,19$
	$q = 1,7$		
	$q = 1,7 \frac{1-(1-2t/d)^3}{1-(1-2t/d)^4}$		
	$q = 1,5 \frac{1-(1-2t/d)^3}{1-(1-2t/d)^4}$		
q is valid for the dotted bending axis. The forces are perpendicular to it.			

Se il conduttore è formato da due o più sub-conduttori allora la tensione interna massima totale è data da:

$$\sigma_{tot,d} = \sigma_{s,d} + \sigma_{m,d} \alpha F \quad (3.21)$$

e, di conseguenza deve essere $\sigma_{tot,d} \leq q f_y$

La forza equivalente sui supporti dei conduttori rigidi si calcola tramite l'utilizzo di alcuni coefficienti correttivi:

$$F_{r,d} = V_F V_{rm} \alpha F_m \quad (3.22)$$

il coefficiente α lo si ricava dalla stessa tabella da cui si è trovato il β che è la 3.1. Mentre $V_F V_{rm}$, nella stessa di V_σ, V_r che è la 3.2. Si nota che il valore massimo che può assumere il prodotto $V_F V_{rm}$ è 2.7. A F_m si sostituisce quella del caso in esame, che può essere F_{m2} se il guasto è tra fase e fase oppure F_{m3} se il guasto è trifase.

I coefficienti V_σ, V_r, V_F come già detto, considerano la dinamica del fenomeno, in particolare dalla natura oscillatoria delle forze. Sono funzioni del rapporto tra frequenza naturale del sistema e frequenza delle forze. Il calcolo della frequenza naturale, nel caso di unico conduttore l'equazione è:

$$f_{cm} = \frac{\gamma}{l^2} \sqrt{\frac{EI_x}{m'_m}} \quad (3.23)$$

γ si ottiene dalla tabella 3.1 (la stessa del α e β). m' indica la massa per unità di lunghezza del conduttore. Inoltre, i coefficienti V_σ, V_r, V_F cambiano se presente la richiusura automatica, come già detto.

3.3. Calcolo della forza in conduttori flessibili

Nella parte successiva della norma viene considerato il caso dei conduttori flessibili. Come prima cosa è scritto che la forza durante l'oscillazione di essi è diversa da quella in cui i conduttori scendono alla posizione originale. I conduttori oscillano per le forze alternative e per l'inerzia.

Per il calcolo della forza per unità di lunghezza si fa riferimento ad un caso orizzontale, con lunghezza l fino a 120 metri e rapporto dell'arco fino a 8 %:

$$F' = \frac{\mu_0}{2\pi} 0.75 \frac{(I_k'')^2 l_c}{a l} \quad (3.24)$$

se la corrente percorre solo metà del conduttore, l'equazione diventa:

$$F' = \frac{\mu_0}{2\pi} 0.75 \frac{(I_k'')^2 l_c + l_v}{a 2l} \quad (3.25)$$

I_k'' è il valore efficace iniziale della corrente di cortocircuito (può essere trifase o bifase, nel caso monofase occorre eliminare lo 0.75), a è la distanza tra punti medi dei conduttori, l_c è la lunghezza del conduttore e l_v è la lunghezza del conduttore verticale. Se i conduttori sono allentati ed esercitano forze di flessione nel sostegno $l_c = l$. Per conduttori tesi $l_c = l - 2l_i$, dove l_i è la lunghezza della catena di isolatori.

Un parametro importante è il rapporto r tra forza elettromagnetica e quella di gravità:

$$r = \frac{F'}{nm'_s g} \quad (3.26)$$

con n si intende il numero di sub-conduttori e con m'_s la massa per unità di lunghezza. Questo permette di calcolare la direzione della forza totale risultante $\delta_1 = \text{atan}(r)$.

L'abbassamento del conduttore in mezzeria nelle condizioni statiche è dato da:

$$f_{es} = \frac{nm'_s g l^2}{8F_{st}} \quad (3.27)$$

un'altra equazione che la norma fornisce è quella per il calcolo del periodo di oscillazione del conduttore. Senza che sia percorso da corrente e nel caso di un basso angolo di oscillazione si ha:

$$T = 2\pi \sqrt{0.8 \frac{f_{es}}{g}} \quad (3.28)$$

il periodo calcolato invece con corrente di cortocircuito si calcola così:

$$T_{res} = \frac{T}{\sqrt[4]{1+r^2} \left[1 - \frac{\pi^2}{64} \left(\frac{\delta_1}{90^\circ} \right)^2 \right]} \quad (3.29)$$

In cui l'angolo δ_1 deve essere espresso in gradi, avendo a denominatore un numero in gradi.

A questo punto, la norma fornisce il modo di trovare la norma di rigidità:

$$N = \frac{1}{Sl} + \frac{1}{nE_{eff}A_s} \quad (3.30)$$

S è la costante elastica, A_s è la sezione del conduttore ed E_{eff} è il modulo di Young effettivo. Quest'ultimo si calcola nel seguente modo:

$$E_{eff} = \begin{cases} E \left[0.3 + 0.7 \sin \left(\frac{F_{st}}{nA_s \sigma_{fin}} 90^\circ \right) \right], & \frac{F_{st}}{nA_s} \leq \sigma_{fin} \\ E, & \frac{F_{st}}{nA_s} > \sigma_{fin} \end{cases} \quad (3.31)$$

Dove:

$$\sigma_{fin} = 50 \cdot 10^6 \frac{N}{m^2} \quad (3.32)$$

σ_{fin} è il valore minimo della tensione del cavo per cui il modulo di Young diventa costante. F_{st} è la forza statica che si ha nel conduttore.

L'angolo del conduttore δ_{end} alla fine del cortocircuito di durata T_{k1} è dato da:

$$\delta_{end} = \begin{cases} \delta_1 \left[1 - \cos \left(360^\circ \frac{T_{k1}}{T_{res}} \right) \right], & 0 < \frac{T_{k1}}{T_{res}} \leq 0.5 \\ 2\delta_1, & \frac{T_{k1}}{T_{res}} > 0.5 \end{cases} \quad (3.33)$$

invece l'angolo massimo δ_{max} durante il cortocircuito è dato da:

$$\delta_{max} = \begin{cases} 1.25 \arccos(\chi), & 0.766 \leq \chi \leq 1 \\ 10^\circ + \arccos(\chi), & -0.985 \leq \chi < 0.766 \\ 180^\circ, & \chi < -0.985 \end{cases} \quad (3.34)$$

Dove:

$$\chi = \begin{cases} 1 - r \sin \delta_{end}, & 0 \leq \delta_{end} \leq 90 \\ 1 - r, & \delta_{end} > 90 \end{cases} \quad (3.35)$$

successivamente la norma tratta la forza di trazione nel cortocircuito durante l'oscillazione, che dipende da un termine φ che è definito così:

$$\varphi = \begin{cases} 3 \left(\sqrt{1 + r^2} - 1 \right), & T_{k1} \geq \frac{T_{res}}{4} \\ 3(r \sin \delta_{end} + \cos \delta_{end} - 1), & T_{k1} < \frac{T_{res}}{4} \end{cases} \quad (3.36)$$

T_{k1} è la durata del cortocircuito. Ricavata questa variabile si può calcolare la forza di trazione:

$$F_{t,d} = F_{st}(1 + \varphi\psi) \quad (3.37)$$

ψ è un fattore dipendente da φ e da ζ che si ottiene da una figura qua riportata nella Figura 3.3

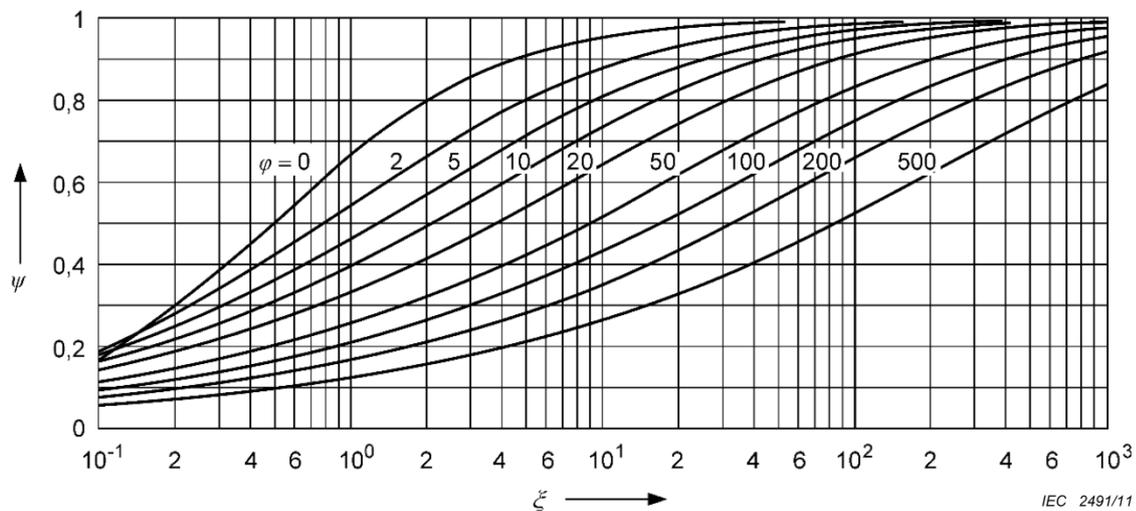


Figura 3.3 Grafico del valore di ψ in funzione di φ e di ζ

ζ è il fattore di stress e si calcola con la seguente formula:

$$\zeta = \frac{(ngm'_s l)^2}{24F_{st}^3 N} \quad (3.38)$$

successivamente la norma tratta il cambiamento dell'abbassamento durante il corto, poi la forza di trazione causata dalla caduta dopo il cortocircuito, poi ancora la forza su sub-conduttori e su conduttori verticali ed infine la forza su conduttori ed infine la forza dovuta ad effetto termico. Per questa tesi, i casi appena citati non hanno grande importanza e dunque non vengono trattati.

CAPITOLO 4

4. Programma di calcolo degli sforzi su tre sbarre complanari aventi stessa lunghezza

Il primo programma MATLAB realizzato per questa tesi, riguarda il calcolo degli sforzi su tre sbarre della stessa lunghezza posizionate nello stesso piano.

4.1. Considerazioni e ipotesi

Sono state considerate 3 sbarre nel calcolo: R,S,T. Questo per avere la possibilità di studiare anche il caso di guasto trifase. La loro disposizione nel piano è quella di Figura 4.1:

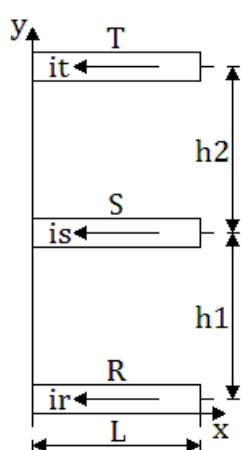


Figura 4.1 Disposizione dei conduttori R, S, T considerata nel programma di calcolo

L è la lunghezza sbarre, uguale per tutte e tre. h_1 è la distanza tra le sbarre R ed S mentre h_2 è la distanza tra le barre S ed T. Alle correnti i_r, i_s, i_t è stato assegnato il verso convenzionale di Figura 4.1, nel caso in cui esso sia contrario, nei dati dovrà avere segno negativo. L'asse y è stato inserito per indicare il verso delle forze, che, poiché le sbarre sono state disposte nello stesso piano, rimarranno in quel piano.

La sezione delle sbarre è stata scelta nel programma di tipo tubolare. I dati relativi ad esse sono il diametro interno D_{int} , ed il diametro esterno D_{est} . Se dovessero essere circolari, basta porre nullo il diametro interno. Questi dati servono per il calcolo delle tensioni interne, che verrà svolto alla fine del programma, una volta calcolate le forze e i momenti.

I vincoli delle sbarre si posizionano ai due estremi. Uno dei due è incernierato al sostegno, mentre l'altro è solamente appoggiato. La cosa rispecchia la realtà per l'appoggio che è presente per consentire la dilatazione termica, per la cerniera meno perché in alcuni casi si può avere un estremo incastrato in una morsa, ma si fa l'ipotesi semplificativa che sia incernierato.

Un'altra ipotesi che si fa è quella di conduttori filiformi, cioè si considera trascurabile il raggio esterno dei conduttori $\frac{D_{est}}{2}$ rispetto alle distanze h_1, h_2 tra essi.

Ai fini del calcolo occorre suddividere le sbarre in tratti di lunghezza dl , ovviamente più essa piccola e più il risultato sarà preciso ma i tempi di calcolo si allungano.

4.2. Dati del programma

La parte iniziale del programma è ovviamente dedicata all'inserimento dati:

```
%maschera di inserimento dati=====
L=11;           %lunghezza di sbarra [m]
m0=4*pi*1e-7;  %permeabilità magnetica[H/m]
Dest=0.1;      %diametro esterno sbarra[m]
Dint=0.086;    %diametro interno sbarra[m]

%correnti [A]
ipicco=43000;  %corrente di picco in un sistema trifase

ir=ipicco*sin(5*pi/12); %corrente nella fase R
is=ipicco*sin(5*pi/12-2*pi/3); %corrente nella fase S
it=ipicco*sin(5*pi/12-4*pi/3); %corrente nella fase T
h1=2.2;        %distanza tra la sbarra R e la sbarra S
h2=h1;         %distanza tra la sbarra S e la sbarra T
```

```
dl=0.055; %lunghezza dei segmenti in cui dividere la linea
```

Le correnti da inserire sono quelle istantanee del caso in considerazione. Qui si è preso, come esempio, un guasto trifase simmetrico con $i_p = 43$ kA. Come ci si ricorda dalla norma, la forza massima si ha nel conduttore centrale. Utilizzando la formula 3.10, se $h_1 = h_2$, la forza nel tempo nel conduttore S vale:

$$F_2(t) = \frac{\mu_0 i_p^2}{2\pi h} l \frac{\sqrt{3}}{2} \cos\left(2\omega t - \frac{5}{6}\pi\right)$$

che è massima quando $2\omega t - \frac{5}{6}\pi = k\pi$, quindi risolvendo per $\omega t = \frac{5}{12}\pi + k\frac{\pi}{2}$, che corrisponde a 75° ponendo $k = 0$. Per trovare le correnti corrispondenti al caso peggiore, si deve fare riferimento a $\omega t = \frac{5}{12}\pi$, infatti si è sostituito questo nei dati. Il programma però non considera la variazione della corrente nel tempo: è come se circolasse una corrente continua pari al valore che produce maggior forza.

4.3. Parte del programma dedicata al calcolo

4.3.1. Divisione dei conduttori in tratti

Si chiama con N il numero di tratti in cui si divide la linea, esso dovrà essere un numero intero, il più vicino a quello ottenuto dal rapporto $\frac{L}{dl}$.

```
N=round(L/dl); %numero di segmenti in cui è divisa la sbarra
```

Successivamente si costruiscono le matrici posizione dei segmenti per ogni sbarra, chiamandole rispettivamente \mathbf{l}_r , \mathbf{l}_s , \mathbf{l}_t . Ognuna ha due colonne: la prima per le coordinate in x , la seconda per le coordinate in y . Le righe rappresentano i segmenti, quindi se ne hanno N . Dunque le matrici \mathbf{l}_r , \mathbf{l}_s , \mathbf{l}_t sono $[N \times 2]$. Per ogni segmento (per ogni riga) si inseriscono le coordinate x , y del punto centrale. Per far questo, si prende una matrice che parta dal punto iniziale dei segmenti, e poi la si trasla di $\frac{dl}{2}$.

$$\mathbf{l}_r = \frac{dl}{2} \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 1 & 0 \\ \dots & \dots \\ 1 & 0 \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} 0 & 0 \\ dl & 0 \\ \dots & \dots \\ L-dl & 0 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \frac{dl}{2} & 0 \\ \frac{dl}{2} + dl & 0 \\ \dots & \dots \\ L - \frac{dl}{2} & 0 \end{bmatrix} \quad (4.1)$$

$$\mathbf{l}_s = \frac{dl}{2} \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 1 & 0 \\ \dots & \dots \\ 1 & 0 \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} 0 & h_1 \\ dl & h_1 \\ \dots & \dots \\ L-dl & h_1 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \frac{dl}{2} & h_1 \\ \frac{dl}{2} + dl & h_1 \\ \dots & \dots \\ L - \frac{dl}{2} & h_1 \end{bmatrix} \quad (4.2)$$

$$\mathbf{l}_t = \frac{dl}{2} \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 1 & 0 \\ \dots & \dots \\ 1 & 0 \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} 0 & h_1 + h_2 \\ dl & h_1 + h_2 \\ \dots & \dots \\ L-dl & h_1 + h_2 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \frac{dl}{2} & h_1 + h_2 \\ \frac{dl}{2} + dl & h_1 + h_2 \\ \dots & \dots \\ L - \frac{dl}{2} & h_1 + h_2 \end{bmatrix} \quad (4.3)$$

per far questo nel programma si devono scrivere questo:

```

%vettori delle sbarre=====
%vettore sbarra R
lr=[(dl/2)*ones(N,1) zeros(N,1)]+[0:dl:(L-dl/2)]' zeros(N,1)];
%vettore sbarra S
ls=[(dl/2)*ones(N,1) zeros(N,1)]+[0:dl:(L-dl/2)]' h1*ones(N,1)];
%vettore sbarra T
lt=[(dl/2)*ones(N,1) zeros(N,1)]+[0:dl:(L-dl/2)]'
(h1+h2)*ones(N,1)];

```

4.3.2. Calcolo del campo magnetico

Ora si procede con il calcolo del campo magnetico. Per ogni sbarra, si definisce un vettore contenente i valori di esso al centro di ogni segmento in cui è stata suddivisa. Questo valore è la componente z del campo magnetico, le altre componenti sono nulle perché ci si trova nello stesso piano delle sbarre.

```

%calcolo del campo magnetico nelle 3 barre=====
%matrici di B
Br=zeros(size(lr,1),1); %campo in R
Bs=zeros(size(ls,1),1); %campo in S
Bt=zeros(size(lt,1),1); %campo in T

```

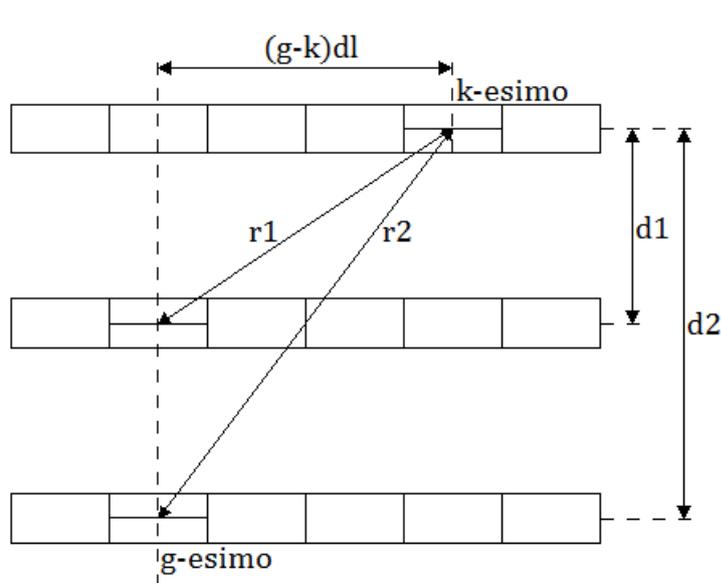
Per calcolare B_r , B_s , B_t , si procede studiando un tratto alla volta.

Ci si pone ora nel k -esimo segmento di una sbarra: tutti i segmenti delle altre sbarre forniscono contributo a B , e non quelli della stessa sbarra. Questo poiché il prodotto vettoriale $ds \times \mathbf{u}_r$, della prima legge elementare di Laplace, è nullo nella stessa sbarra. Considerando quindi il tratto g -esimo negli altri due conduttori, per calcolare B nel tratto k -esimo si applica appunto la prima legge elementare di Laplace:

$$B = \frac{\mu_0}{4\pi} i_1 dl \frac{|\mathbf{u}_i \times \mathbf{u}_{r_1}|}{r_1^2} + \frac{\mu_0}{4\pi} i_2 dl \frac{|\mathbf{u}_i \times \mathbf{u}_{r_2}|}{r_2^2} \quad (4.4)$$

dei prodotti vettoriali si considera solo il modulo, perché hanno unica componente in z , che è quella da trovare.

r_1 è la distanza tra il tratto k -esimo e il tratto g -esimo del primo degli altri due conduttori, e r_2 è la distanza tra il tratto k -esimo e il tratto g -esimo del secondo degli altri due conduttori. Come in Figura 4.2:



d_1 , d_2 sono le distanze rispettivamente dal primo e dal secondo conduttore.

Dal disegno si capisce come trovare r_1 e r_2 .

Figura 4.2 Distanze r_1 e r_2 dal segmento k -esimo necessarie per il calcolo del campo magnetico

$$r_1 = \sqrt{[(g - k)dl]^2 + d_1^2} \quad (4.5)$$

$$r_2 = \sqrt{[(g - k)dl]^2 + d_2^2} \quad (4.6)$$

Per quanto riguarda i moduli del prodotto vettoriale, $|\mathbf{u}_i \times \mathbf{u}_{r_1}|$ e $|\mathbf{u}_i \times \mathbf{u}_{r_2}|$, essi sono uguali al seno dell'angolo compreso, è possibile ricavarne un'equazione sempre dal disegno:

$$|\mathbf{u}_i \times \mathbf{u}_{r_1}| = \frac{d_1}{r_1} \quad (4.7)$$

$$|\mathbf{u}_i \times \mathbf{u}_{r_2}| = \frac{d_2}{r_2} \quad (4.8)$$

andando a sostituire quest'ultime all'equazione 4.4 di B si ottiene:

$$B = \frac{\mu_0}{4\pi} i_1 dl \frac{d_1}{r_1^3} + \frac{\mu_0}{4\pi} i_2 dl \frac{d_2}{r_2^3} \quad (4.9)$$

questa relazione ricavata, calcola il contributo del campo magnetico nel k -esimo tratto di uno dei conduttori prodotto dai tratti g -esimi degli altri due conduttori. Per trovare il campo magnetico complessivo nel tratto k -esimo, occorre sommare i contributi di tutti i g -esimi tratti.

Fatto questo si passa al tratto successivo $k + 1$ e si ricalcola il campo magnetico complessivo. Si procede in questo modo per tutti gli N tratti di questo conduttore.

Successivamente si ripete il procedimento per gli altri due conduttori rimasti.

Nel programma per svolgere ciò, si devono eseguire due cicli for. Il primo per i tratti k -esimi di tutti i conduttori, in cui si vuole calcolare il campo. Il secondo è all'interno del primo, per considerare tutti i tratti g -esimi per ogni k -esimo segmento.

```

for k=1:size(Br,1)
    %campi nelle tre sbarre nel k-esimo segmento
    for g=1:size(lr,1)
        %calcolo del contributo di campo di ogni g-esimo tratto

        %calcolo di B nella fase R
        %raggio dalla fase S
        r1=sqrt((ls(g,1)-lr(k,1))^2+(ls(g,2)-lr(k,2))^2);
        %raggio dalla fase T
        r2=sqrt((lt(g,1)-lr(k,1))^2+(lt(g,2)-lr(k,2))^2);
        Br(k)=Br(k)+(m0*is*dl*h1/(4*pi))*(1/(r1)^3)+...
            (m0*it*dl*(h1+h2)/(4*pi))*(1/(r2)^3);

        %calcolo di B nella fase S
        %raggio dalla fase R
        r1=sqrt((lr(g,1)-ls(k,1))^2+(lr(g,2)-ls(k,2))^2);
        %raggio dalla fase T
        r2=sqrt((lt(g,1)-ls(k,1))^2+(lt(g,2)-ls(k,2))^2);
        Bs(k)=Bs(k)-(m0*ir*dl*h1/(4*pi))*(1/(r1)^3)+...
            (m0*it*dl*h2/(4*pi))*(1/(r2)^3);

        %calcolo di B nella fase T
        %raggio dalla fase R
        r1=sqrt((lr(g,1)-lt(k,1))^2+(lr(g,2)-lt(k,2))^2);
    
```

```

%raggio dalla fase S
r2=sqrt((ls(g,1)-lt(k,1))^2+(ls(g,2)-lt(k,2))^2);
Bt(k)=Bt(k)-(m0*ir*d1*(h1+h2)/(4*pi))*(1/(r1)^3)-...
(m0*is*d1*h2/(4*pi))*(1/(r2)^3);

end
end

```

4.3.3. Risultati del campo magnetico

Una volta calcolato il campo magnetico per ogni sbarra, si fa un grafico di esso per controllare se è corretto.

```

%grafico del campo magnetico su ogni sbarra in funzione della
%lunghezza

figure(1)
x=(dl:dl:L)-dl/2;
plot(x,Br,':',x,Bs,'r',x,Bt,'c--')
ylabel('Br[T]-b:, Bs[T]-r, Bt[T]-c--')
xlabel('lunghezza [m]')
title('campo magnetico in funzone della lunghezza')
grid

```

Il risultato grafico ottenuto avendo posto $i_p = 43$ kA, lunghezza delle barre $L = 11$ m, distanze $h_1 = h_2 = 2.2$ m, in un guasto trifase simmetrico è il seguente in Figura 4.3.

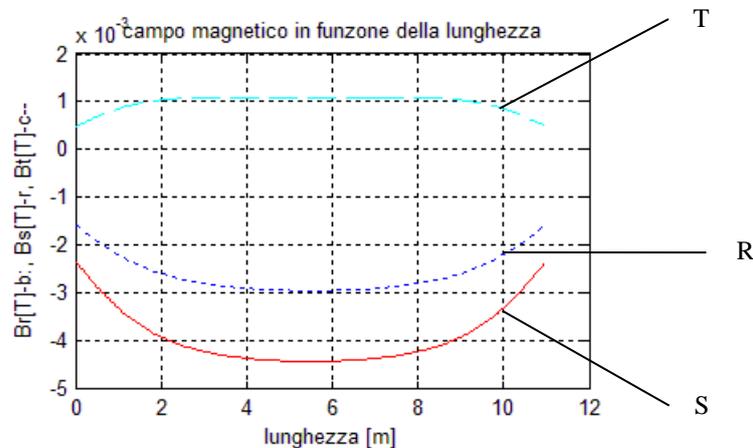


Figura 4.3 Risultati del campo magnetico in funzione della lunghezza

La curva blu tratteggiata a punti è relativa al conduttore R, quella rossa continua al conduttore S e quella ciano tratteggiata a segmenti al conduttore T.

Si deve ora verificare la correttezza del risultato. Come prima cosa occorre calcolare le correnti sulle sbarre, utilizzando le equazioni 3.4, 3.5, 3.6 e sapendo che $i_p = 43$ kA:

$$i_r = 43000 \sin\left(\frac{5}{12}\pi\right) \cong 41530 \text{ A}$$

$$i_s = 43000 \sin\left(\frac{5}{12}\pi - \frac{2}{3}\pi\right) \cong -30410 \text{ A}$$

$$i_t = 43000 \sin\left(\frac{5}{12}\pi - \frac{4}{3}\pi\right) \cong -11130 \text{ A}$$

Utilizzando la formula 1.24 per il campo magnetico di un conduttore rettilineo indefinito, si ottiene:

$$B_r = \frac{\mu_0 i_s}{2\pi h_1} + \frac{\mu_0 i_t}{2\pi(h_1 + h_2)} = \frac{\mu_0}{2\pi} \left[\frac{-30410}{2.2} + \frac{-11130}{4.4} \right] = -0.003269 \text{ T}$$

$$B_s = -\frac{\mu_0 i_r}{2\pi h_1} + \frac{\mu_0 i_t}{2\pi h_2} = \frac{\mu_0}{2\pi} \left[-\frac{41530}{2.2} + \frac{-11130}{2.2} \right] = -0.004785 \text{ T}$$

$$B_t = -\frac{\mu_0 i_r}{2\pi(h_1 + h_2)} - \frac{\mu_0 i_s}{2\pi h_2} = \frac{\mu_0}{2\pi} \left[-\frac{41530}{4.4} + \frac{30410}{2.2} \right] = 0.0008764 \text{ T}$$

I valori medi forniti dal programma invece sono:

$$B_{r\text{medio}} = -0.0026 \text{ T} \quad B_{s\text{medio}} = -0.0039 \text{ T} \quad B_{t\text{medio}} = -0.00099 \text{ T}$$

Come si può vedere, sono minori di quelli calcolati con le relazioni del conduttore rettilineo indefinito, questo perché come si vede dal grafico, negli estremi il campo magnetico si riduce. Se si avvicinano i conduttori (diminuendo h_1 e h_2), oppure aumentando la lunghezza L i valori medi forniti dal programma tendono a quelli calcolati.

Un'altra verifica, più importante, che si può fare è quella del campo magnetico presente al centro di ogni conduttore. La si svolge utilizzando la formula 1.13 per calcolare il campo al centro di un tratto di conduttore, già trovata in precedenza.

$$\begin{aligned} B_r \left(\frac{L}{2} \right) &= \frac{\mu_0 i_s}{2\pi h_1} \frac{\frac{L}{2}}{\sqrt{h_1^2 + \left(\frac{L}{2} \right)^2}} + \frac{\mu_0 i_t}{2\pi(h_1 + h_2)} \frac{\frac{L}{2}}{\sqrt{(h_1 + h_2)^2 + \left(\frac{L}{2} \right)^2}} \\ &= \frac{\mu_0 L}{2\pi} \left[\frac{1}{h_1} \frac{i_s}{\sqrt{h_1^2 + \left(\frac{L}{2} \right)^2}} + \frac{1}{(h_1 + h_2)} \frac{i_t}{\sqrt{(h_1 + h_2)^2 + \left(\frac{L}{2} \right)^2}} \right] \\ &= \frac{\mu_0}{2\pi} \frac{11}{2} \left[\frac{1}{2.2} \frac{-30410}{\sqrt{2.2^2 + \left(\frac{11}{2} \right)^2}} + \frac{1}{(4.4)} \frac{-11130}{\sqrt{(4.4)^2 + \left(\frac{11}{2} \right)^2}} \right] = -0.002960 \text{ T} \end{aligned}$$

Si fa lo stesso calcolo per gli altri due conduttori.

$$\begin{aligned} B_s \left(\frac{L}{2} \right) &= -\frac{\mu_0 i_r}{2\pi h_1} \frac{\frac{L}{2}}{\sqrt{h_1^2 + \left(\frac{L}{2} \right)^2}} + \frac{\mu_0 i_t}{2\pi h_2} \frac{\frac{L}{2}}{\sqrt{h_2^2 + \left(\frac{L}{2} \right)^2}} = \frac{\mu_0 L}{2\pi} \left[\frac{-i_r}{h_1 \sqrt{h_1^2 + \left(\frac{L}{2} \right)^2}} + \frac{i_t}{h_2 \sqrt{h_2^2 + \left(\frac{L}{2} \right)^2}} \right] \\ &= \frac{\mu_0}{2\pi} \frac{11}{2} \left[\frac{1}{2.2} \frac{-41530}{\sqrt{2.2^2 + \left(\frac{11}{2} \right)^2}} + \frac{1}{2.2} \frac{-11130}{\sqrt{2.2^2 + \left(\frac{11}{2} \right)^2}} \right] = -0.004445 \text{ T} \end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
B_t\left(\frac{L}{2}\right) &= -\frac{\mu_0 i_r}{2\pi(h_1 + h_2)} \frac{\frac{L}{2}}{\sqrt{(h_1 + h_2)^2 + \left(\frac{L}{2}\right)^2}} - \frac{\mu_0 i_s}{2\pi h_2} \frac{\frac{L}{2}}{\sqrt{h_2^2 + \left(\frac{L}{2}\right)^2}} \\
&= \frac{\mu_0 L}{2\pi} \left[\frac{1}{(h_1 + h_2)} \frac{i_r}{\sqrt{(h_1 + h_2)^2 + \left(\frac{L}{2}\right)^2}} + \frac{1}{h_2} \frac{i_s}{\sqrt{h_2^2 + \left(\frac{L}{2}\right)^2}} \right] \\
&= \frac{\mu_0}{2\pi} \frac{11}{2} \left[\frac{1}{4.4} \frac{-41530}{\sqrt{4.4^2 + \left(\frac{11}{2}\right)^2}} + \frac{1}{2.2} \frac{30410}{\sqrt{2.2^2 + \left(\frac{11}{2}\right)^2}} \right] = 0.001093 \text{ T}
\end{aligned}$$

I valori del campo magnetico nel punto centrale forniti dal programma invece sono:

$$B_r\left(\frac{N}{2}\right) = -0.002961 \text{ T} \quad B_s\left(\frac{N}{2}\right) = -0.004445 \text{ T} \quad B_t\left(\frac{N}{2}\right) = 0.001092 \text{ T}$$

Essi sono praticamente coincidenti con quelli calcolati. Si può quindi dire che il programma fornisce risultati attendibili per quanto riguarda il campo magnetico.

4.3.4. Calcolo della forza magnetica

Si procede nel programma con il calcolo della forza magnetica. Inizialmente si trova la forza agente su ogni segmento delle sbarre, è possibile farlo poiché si conosce la corrente, il campo magnetico per ogni tratto e la lunghezza dl per ogni tratto. Quindi $F = idl B \sin \theta$, e nel nostro caso $\sin \theta = 1$. Nel programma occorre scrivere:

```

%calcolo delle forze magnetiche=====
Fr=ir*dl*Br; %forza magnetica in R
Fs=is*dl*Bs; %forza magnetica in S
Ft=it*dl*Bt; %forza magnetica in T

```

4.3.5. Risultati della forza magnetica

Si ottengono dei vettori F_r , F_s , F_t . Come quelli del campo magnetico, indicano la forza al centro di ogni segmento. Anche per le forze, si fa un grafico per controllare se il risultato è corretto.

```

%grafico della forza magnetica su ogni sbarra in funzione della
%lunghezza

figure(2)
plot(x,Fr,':',x,Fs,'r',x,Ft,'c--')
ylabel('Fr[N]-b:, Fs[N]-r, Ft[N]-c--')
xlabel('lunghezza [m]')
title('forza magnetica in funzone della lunghezza')
grid

```

Il risultato grafico, sempre con i dati dell'esempio, è il seguente in Figura 4.4:

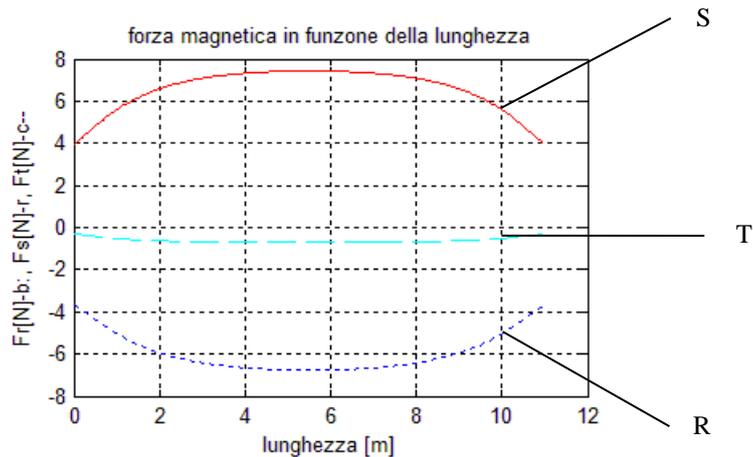


Figura 4.4 Risultati della forza magnetica in funzione della lunghezza

La curva blu tratteggiata a punti è relativa al conduttore R, quella rossa continua al conduttore S e quella ciano tratteggiata a segmenti al conduttore T.

Si osservi ora il segno della forza. Sulla sbarra S è positiva, questo è giustificabile perché sia il campo magnetico e sia la corrente in essa, sono negativi. Nelle altre due invece campo magnetico e corrente hanno segni diversi.

Si calcola la forza totale su ogni conduttore, sommando le forze su ogni tratto:

```

Frm=sum(Fr); %forza magnetica totale in R
Fsm=sum(Fs); %forza magnetica totale in S
Ftm=sum(Ft); %forza magnetica totale in T

```

I risultati sono: $F_{rm} = -1192 \text{ N}$ $F_{sm} = 1313 \text{ N}$ $F_{tm} = -120.9 \text{ N}$

La prima cosa da fare con questi numeri è controllare se sommando tutte le forze si ottiene zero:

$$F_{tot} = F_{rm} + F_{sm} + F_{tm} = -1192 + 1313 - 120.9 = 0.1 \cong 0$$

non si ottiene perfettamente zero per errori dovuti al troncamento dei risultati del calcolo.

Adesso si verifica se la forza ottenuta è confrontabile con quella che si ha nel caso di conduttori rettilinei indefiniti. Si fa questo utilizzando il risultato di \mathbf{B} ottenuto precedentemente, sempre nel caso di rettilinei indefiniti, utilizzando la formula 1.24: $F = \frac{\mu_0 i_2 i_1}{2\pi r} l = il B$, ricavata nel primo capitolo che è la stessa indicata nella norma (la 3.1).

$$F_r = i_r l B_r = 41530 \cdot 11 \cdot (-0.003269) = -1493 \text{ N}$$

$$F_s = i_s l B_s = (-30410) \cdot 11 \cdot (-0.004785) = 1601 \text{ N}$$

$$F_t = i_t l B_t = (-11130) \cdot 11 \cdot 0.0008764 = -107.3 \text{ N}$$

come si vede, la forza nel conduttore centrale ricavata in questo modo risulta più grande di quella fornita dal programma, sempre per effetto della diminuzione di \mathbf{B} negli estremi. Come prima, se si avvicinano i conduttori o si aumenta la lunghezza L i valori tendono a quelli calcolati. La forza sul conduttore centrale, essendo $h_1 = h_2$, si è già detto che la norma consente di calcolarla anche con la 3.1:

$$F_s = \frac{\mu_0 i_p^2}{2\pi h} L \frac{\sqrt{3}}{2} = \frac{\mu_0}{2\pi} \frac{43000^2}{2.2} 11 \frac{\sqrt{3}}{2} = 1600 \text{ N}$$

il risultato è uguale a quello di prima a meno degli errori di troncamento. Si può vedere che le formule suggerite dalla norma sono cautelative, ovvero forniscono un valore della forza superiore a quello realmente esistente. Lo scopo di questo programma era appunto, come si è visto, quello di trovare un valore che si avvicini il più possibile a quello reale.

Le reazioni vincolari che si hanno agli estremi delle sbarre, per simmetria, corrispondono alla metà della forza totale agente. Occorrerà verificare che i sostegni siano in grado di resistere ad essa.

Sapendo le reazioni è possibile ora calcolare le reazioni interne alla sbarra.

4.3.6. Calcolo del taglio

Per il taglio si procede analizzando ogni segmento per ogni conduttore, partendo dalla prima estremità fino ad arrivare alla seconda estremità. In ogni segmento il taglio è uguale alla somma algebrica delle forze presenti dietro di se (ovvero a sinistra di esso). Si ripete questo per tutti e tre i conduttori. Le istruzioni del programma che svolgono questo calcolo sono:

```
%calcolo del taglio=====
for k=1:size(Fr)
    %calcolo del taglio in ogni k-esimo segmento nelle tre sbarre
    Tr(k)=(Frm/2)-sum(Fr(1:k)); %taglio fase R
    Ts(k)=(Fsm/2)-sum(Fs(1:k)); %taglio fase S
    Tt(k)=(Ftm/2)-sum(Ft(1:k)); %taglio fase T
end
```

4.3.7. Risultati del taglio

Si ottengono dei vettori T_r , T_s , T_t . Come quelli del campo magnetico e della forza, indicano il taglio al centro di ogni segmento. Anche per questi, si fa un grafico per controllare se il risultato è corretto.

```
%grafico del taglio su ogni sbarra in funzione della
%lunghezza

figure(3)
plot(x,Tr,':',x,Ts,'r',x,Tt,'c--')
ylabel('Tr[N]-b:, Ts[N]-r, Tt[N]-c--')
xlabel('lunghezza [m]')
title('taglio in funzone della lunghezza')
grid
```

Il risultato grafico del taglio ottenuto è il seguente in Figura 4.5:

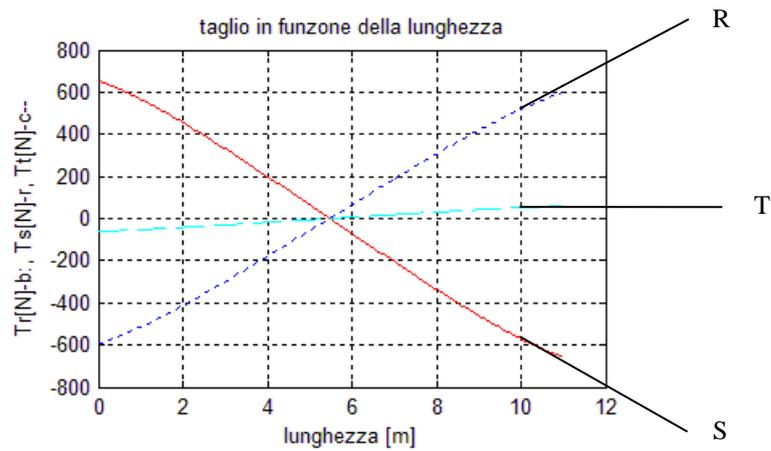


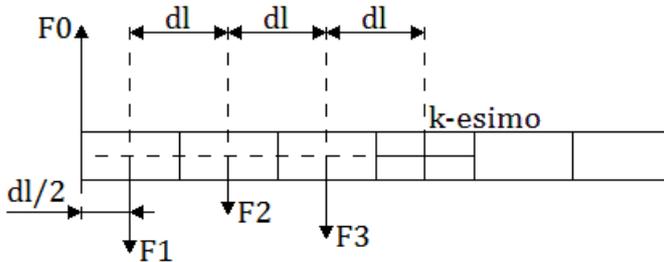
Figura 4.5 Risultati del taglio in funzione della lunghezza

La curva blu tratteggiata a punti è relativa al conduttore R, quella rossa continua al conduttore S e quella ciano tratteggiata a segmenti al conduttore T.

Si osserva che il taglio è massimo nei segmenti estremi, poi diminuisce per l'effetto della forza distribuita che fa diminuire l'effetto della reazione vincolare. Questo fino al centro in cui la somma delle forze distribuite è uguale alla reazione vincolare. L'andamento non è lineare, sarebbe lineare se il carico distribuito fosse uniforme, invece la forza magnetica varia con la posizione.

4.3.8. Calcolo del momento flettente

Successivamente si trova l'azione interna di momento flettente. Anche in questo caso occorre analizzare tratto per tratto di ogni conduttore. Prendendo un k -esimo segmento, occorre considerare tutte le forze presenti dietro di se, cioè a sinistra di esso. Per calcolare il momento occorre fare la somma delle velle forze moltiplicate per la loro distanza dal k -esimo segmento, prese con segno: se creano momento orario è positivo altrimenti negativo.



Per capire meglio si consideri un caso semplice come l'asta di Figura 4.6, in cui sono presenti solo tre segmenti prima di quello considerato.

Il momento nel k -esimo segmento è dato da:

Figura 4.6 Asta con forze concentrate nei punti medi di ogni segmento in cui è suddivisa

$$M(k) = F_0 \left(3dl + \frac{dl}{2} \right) - F_1 3dl - F_2 2dl - F_3 dl = dl \left(\frac{F_0}{2} + 3F_0 - F_1 3 - 2F_2 - F_3 \right) \quad (4.10)$$

è possibile scrivere questa equazione utilizzando un prodotto tra vettori in questo modo:

$$M(k) = dl \left(\frac{F_0}{2} + 3F_0 - [F_1 \quad F_2 \quad F_3] \begin{bmatrix} 3 \\ 2 \\ 1 \end{bmatrix} \right) \quad (4.11)$$

generalizzando per qualsiasi caso si ottiene:

$$M(k) = \frac{F_0}{2} dl + (k-1)dlF_0 - dl[F_1 \quad F_2 \quad \dots \quad F_{k-1}] \begin{bmatrix} k-1 \\ k-2 \\ \dots \\ 1 \end{bmatrix} \quad (4.12)$$

Il primo addendo è dovuto alla forza F_0 che rappresenta la reazione vincolare, mentre il secondo è dovuto alle forze distribuite di origine elettrodinamica.

Quindi le istruzioni da scrivere nel programma per eseguire questo sono:

```
%momento flettente=====
for k=1:size(Fr)
    %calcolo del momento in ogni k-esimo segmento nelle tre sbarre

    %momento fase R: Mreazione vincolare + Msomma forze distribuite
    %moltiplicate distanza dal punto k-esimo
    Mr(k)=(Frm/2)*((k-1)*dl+(dl/2))-dl*sum(Fr(1:(k-1)).*...
        [(k-1):-1:1]');

    %momento fase S: Mreazione vincolare + Msomma forze distribuite
    %moltiplicate distanza dal punto k-esimo
    Ms(k)=(Fsm/2)*((k-1)*dl+(dl/2))-dl*sum(Fs(1:(k-1)).*...
        [(k-1):-1:1]');

    %momento fase T: Mreazione vincolare + Msomma forze distribuite
    %moltiplicate distanza dal punto k-esimo
    Mt(k)=(Ftm/2)*((k-1)*dl+(dl/2))-dl*sum(Ft(1:(k-1)).*...
        [(k-1):-1:1]');

end
```

4.3.9. Risultati del momento flettente

Come per il campo magnetico, la forza ed il taglio; si ottengono dei vettori \mathbf{M}_r , \mathbf{M}_s , \mathbf{M}_t contenenti il valore del momento in funzione della lunghezza.

Anche per il Momento si fa un grafico per controllare se sia corretto.

```
%grafico del momento su ogni sbarra in funzione della
%lunghezza

figure(4)
plot(x,Mr,': ',x,Ms,'r',x,Mt,'c--')
ylabel('Mr[Nm]-b:, Ms[Nm]-r, Mt[Nm]-c--')
xlabel('lunghezza [m]')
title('momento in funzone della lunghezza')
grid
```

Il risultato grafico del momento ottenuto è il seguente di Figura 4.7:

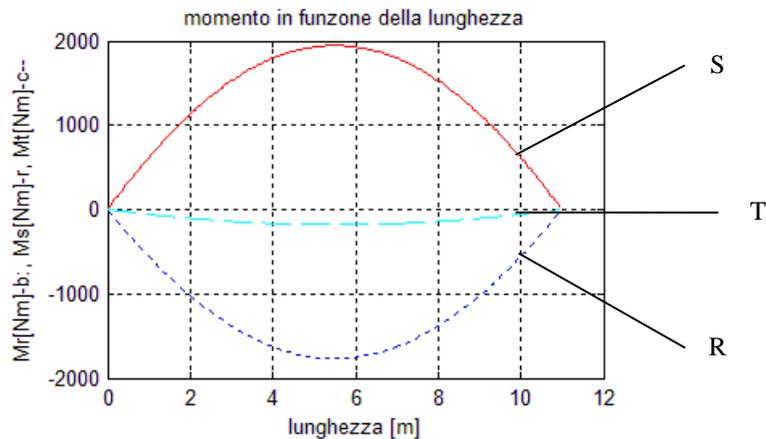


Figura 4.7 Risultati del momento flettente in funzione della lunghezza

La curva blu tratteggiata a punti è relativa al conduttore R, quella rossa continua al conduttore S e quella ciano tratteggiata a segmenti al conduttore T.

Si vede che il momento è nullo agli estremi e massimo al centro dei conduttori, questo per la simmetria del caso considerato.

4.3.10. Calcolo delle tensioni nei vari tratti

Adesso che si conoscono le azioni interne, occorre calcolare le tensioni nei vari tratti delle trave e verificare che si rimanga al di sotto dello snervamento. Per ogni segmento si deve prendere il punto della sezione in cui la sollecitazione è maggiore: per trovarlo si divide la sezione in lunghezza come da Figura 4.8:

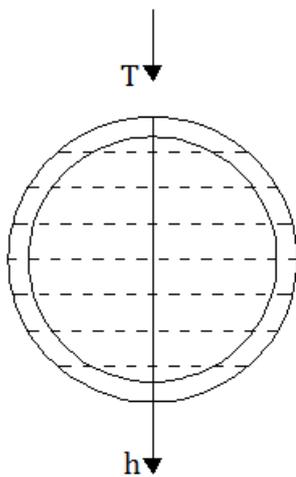


Figura 4.8 Divisione della sezione della sbarra per il calcolo della massima tensione di taglio

la tensione normale dovuta al momento flettente dipende dalla posizione in h , secondo la formula di Navier 2.5: $\sigma = \frac{M_x}{I_x} h$, ed è massima in modulo quando $h = \pm \frac{D_{est}}{2} = \pm R_2$. Mentre la tensione al taglio, secondo la formula di Jourawski: $\tau = \frac{T}{I_x b} S^*$, dove S^* è il momento statico. Se, chiamando $R_1 = \frac{D_{int}}{2}$, si ha $h > R_1$ allora S^* si calcola come se ci fosse solo il cerchio estremo:

$$S^* = \int_{A^*} h dA^* = 2 \int_h^{R_2} h \sqrt{R_2^2 - h^2} dh = \frac{2}{3} (R_2^2 - h^2)^{\frac{3}{2}} \quad (4.13)$$

altrimenti se $h < R_1$, occorre sottrarre l'area del cerchio interno ottenendo:

$$S^* = \int_{A^*} h dA^* = 2 \int_h^{R_2} h \sqrt{R_2^2 - h^2} dh - 2 \int_h^{R_1} h \sqrt{R_1^2 - h^2} dh = \frac{2}{3} (R_2^2 - h^2)^{\frac{3}{2}} - \frac{2}{3} (R_1^2 - h^2)^{\frac{3}{2}} \quad (4.14)$$

con b si intende la corda sottesa, facilmente ottenibile utilizzando l'equazione della circonferenza. Se $h > R_1$, si calcola come se ci fosse solo la circonferenza esterna: $b = 2\sqrt{R_2^2 - h^2}$, altrimenti con $h < R_1$ occorre sottrarre la parte relativa alla circonferenza interna: $b = 2\sqrt{R_2^2 - h^2} - 2\sqrt{R_1^2 - h^2}$.

Complessivamente si può dire che $\tau = \frac{T}{I_x b} S^*$ è massimo per $h = 0$ (poiché in $h = 0$ si ha il massimo momento statico e la minima corda), contrariamente alla sollecitazione del momento flettente che è

massima per $h = \pm R_2$. La sollecitazione massima per von Mises $\sigma_{vm} = \sqrt{\sigma^2 + 3\tau^2}$ sarà massima in un punto compreso tra $h = 0$ e, prendendo il semiasse positivo, $h = +R_2$.

È stato scelto di dividere il semiasse positivo h in 100 punti, calcolare la σ_{vm} in ognuno e prenderne il massimo, questo per ogni segmento di ogni conduttore.

Prima di procedere è necessario ricavare un'equazione per il momento di inerzia I_x , che serve sia per il taglio che per il momento.

$$I_x = \int_A h^2 dA = \int_{-R_2}^{R_2} \int_{-R_2}^{R_2} h^2 \sqrt{R_2^2 - h^2} dh dy - \int_{-R_1}^{R_1} \int_{-R_1}^{R_1} h^2 \sqrt{R_1^2 - h^2} dh dy \quad (4.15)$$

Passando in coordinate polari si ha:

$$\begin{aligned} I_x &= \int_0^{2\pi} \int_0^{R_2} \rho(\rho \sin \alpha)^2 d\rho d\alpha - \int_0^{2\pi} \int_0^{R_1} \rho(\rho \sin \alpha)^2 d\rho d\alpha = \frac{\pi}{4} R_2^4 - \frac{\pi}{4} R_1^4 \\ &= \frac{\pi}{64} D_{est}^4 - \frac{\pi}{64} D_{int}^4 \end{aligned} \quad (4.16)$$

nel programma, si considera anche il caso senza sollecitazione di taglio, per vedere quanto influisce il taglio sulla sollecitazione massima.

```
% verifica sollecitazioni con il criterio di von Mises=====
nsv=100; %numero di punti di verifica sollecitazione
R2=Dest/2; %raggio esterno sbarra
R1=Dint/2; %raggio interno sbarra

%vettore che indica a quale distanza dal centro verificare
%la sollecitazione
h=0:R2/nsv:R2-R2/nsv;

%momento d'inerzia della sbarra rispetto a x perpendicolare
%all'asse della sbarra
Ix=(pi/64)*(Dest^4)-Dint^4);

%calcolo del momento statico e della corda sottesa
%in ogni punto di verifica che serviranno poi per il calcolo
%delle sollecitazioni di taglio con la formula di Jourawski

for k=1:size(h,2)
    %per ogni punto indicato da y
    if abs(h)<(R1)
        %se il punto in esame è minore del raggio interno
        %momento statico o del primo ordine
        S(k)=(2/3)*((R2*R2-h(k)*h(k))^3/2-(R1*R1-h(k)*h(k))^3/2);

        %corda sottesa
        b(k)=2*(sqrt(R2*R2-h(k)*h(k))-sqrt(R1*R1-h(k)*h(k)));

    else

        %se il punto in esame è maggiore del raggio interno
        %momento statico o del primo ordine
        S(k)=(2/3)*((R2*R2-h(k)*h(k))^3/2);
```

```

        %corda sottesa
        b(k)=2*(sqrt(R2*R2-h(k)*h(k)));
    end
end

% fase R
for k=1:size(lr,1)
sig=(Mr(k)*h)/Ix;          %tensione dovuta a flessione
t=(Tr(k).*S)/(Ix.*b); %tensione dovuta a taglio

%si prende il valore massimo di sollecitazione calcolato
%con il metodo von Mises
sigvmr(k)=max(sqrt(sig.*sig+3*t.*t));

%valore senza considerare il taglio
sigvmr1(k)=max(abs(sig));
end

% fase S
for k=1:size(ls,1)
sig=(Ms(k)*h)/Ix;          %tensione dovuta a flessione
t=(Ts(k).*S)/(Ix.*b); %tensione dovuta a taglio

%si prende il valore massimo di sollecitazione calcolato
%con il metodo von Mises
sigvms(k)=max(sqrt(sig.*sig+3*t.*t));

%valore senza considerare il taglio
sigvms1(k)=max(abs(sig));
end

% fase T
for k=1:size(lt,1)
sig=(Mt(k)*h)/Ix;          %tensione dovuta a flessione
t=(Tt(k).*S)/(Ix.*b); %tensione dovuta a taglio

%si prende il valore massimo di sollecitazione calcolato
%con il metodo von Mises
sigvmt(k)=max(sqrt(sig.*sig+3*t.*t));

```

4.3.11. Risultati delle tensioni nei vari tratti

Nello stesso grafico si tracciano le σ_{vm} dei due casi.

```

%grafico della sollecitazione massima in funzione
%della lunghezza

figure(5)
plot(x,sigvmr,':',x,sigvms,'r',x,sigvmt,'c--')
hold on
title('massima tensione con von mises')
ylabel('R[N/m^2]-b:, S[N/m^2]-r, T[N/m^2]-c--')
xlabel('lunghezza [m]')
%grafico senza considerare il taglio
plot(x,sigvmr1,':',x,sigvms1,'r',x,sigvmt1,'c--')
grid

```

L'andamento è quindi il seguente di Figura 4.9:

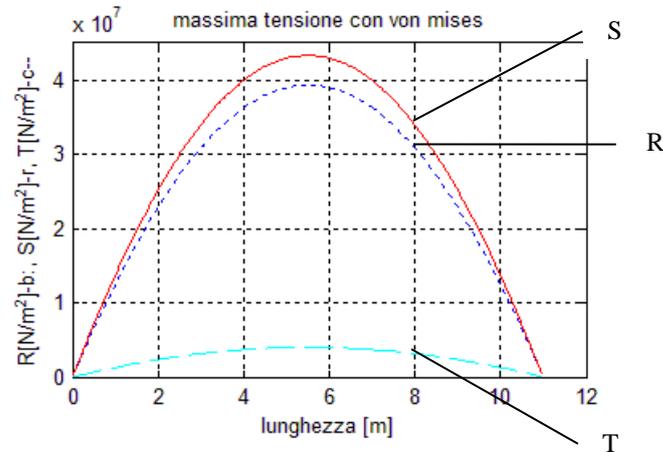


Figura 4.9 Risultati della massima tensione in funzione della lunghezza

La curva blu tratteggiata a punti è relativa al conduttore R, quella rossa continua al conduttore S e quella ciano tratteggiata a segmenti al conduttore T.

Come si può vedere i due grafici coincidono, inoltre il punto più sollecitato è quello centrale, in cui il taglio è nullo. Da queste osservazioni si può concludere che l'azione interna dovuta a taglio è trascurabile rispetto a quella dovuta al momento flettente, questo permette di semplificare di molto i programmi, poiché $\sigma_{vmax} = \sqrt{\sigma^2} = |\sigma| = \left| \frac{M_x}{I_x} R_2 \right|$. Nei prossimi programmi non verrà più considerato il taglio.

Dalla figura 4.9 si vede che il conduttore centrale supera il valore di 40 MPa, che corrisponde allo snervamento dell'alluminio, dunque dalle considerazioni fatte questa situazione di esempio di guasto non si ritiene sicura.

CAPITOLO 5

5. Programma di calcolo degli sforzi su n sbarre senza vincoli di posizione e lunghezza

Il secondo programma MATLAB realizzato per questa tesi, riguarda il calcolo degli sforzi su un qualsiasi numero di sbarre senza vincoli sulla loro posizione nello spazio e sulla lunghezza. Potendo considerare n sbarre, sono analizzabili anche i casi con più conduttori per fase. Inoltre, non avendo vincoli sulla lunghezza, si possono esaminare casi in cui la corrente non percorre tutta la sbarra, ma venga prelevata prima.

5.1. Considerazioni ed ipotesi

In questo caso i conduttori vengono considerati filiformi (trascurando quindi il raggio esterno rispetto alle distanze) e vincolati alle estremità da una parte con cerniera e dall'altra con un appoggio. La sezione delle sbarre, necessaria per il calcolo delle tensioni interne, è presa sempre tubolare, con diametro interno D_i , e diametro esterno D_e . Se dovessero essere circolari, basta porre nullo il diametro interno. Inoltre, come prima, non viene considerata la variazione della corrente nel tempo, quindi il programma funziona con corrente continua che basta porre uguale a quella istantanea del caso peggiore.

5.2. Dati del programma

Come il programma precedente, la prima parte è dedicata ai dati. Quelli relativi alle sbarre vengono inseriti in una matrice di ingresso I , che deve contenere le informazioni tridimensionali sulla posizione delle sbarre e sulle correnti. Ogni riga di questa matrice corrisponde ad una sbarra. La prima colonna di I serve per identificare il numero del conduttore, ma non viene utilizzata nel programma. La seconda, terza e quarta colonna corrispondono rispettivamente alle coordinate x, y, z del punto iniziale della sbarra. Allo stesso modo la quinta, sesta e settima colonna corrispondono rispettivamente alle coordinate x, y, z del punto finale della sbarra. L'ottava ed ultima colonna della matrice I contiene la corrente, considerata entrante nel punto iniziale ed uscente nel punto finale.

Altri dati da inserire sono i diametri D_i, D_e e la lunghezza dl dei tratti in cui si suddivideranno i conduttori come già fatto per l'altro programma. Ecco le righe di comando dei dati:

```
%maschera di inserimento dati=====
%I=matrice in ingresso:
%righe: k-esima riga=k-esima sbarra
%colonne: n°sbarra - punto iniziale - punto finale - corrente
%il verso della corrente è considerato dal punto iniziale a quello
%finale

ipicco=43000; %corrente di picco in un sistema trifase

ir=ipicco*sin(5*pi/12); %corrente nella fase R
is=ipicco*sin(5*pi/12-2*pi/3); %corrente nella fase S
it=ipicco*sin(5*pi/12-4*pi/3); %corrente nella fase T

I=[...
  1  0  0  0  11  0  0  ir
  2  0  2.2  0  11  2.2  0  is
  3  0  4.4  0  11  4.4  0  it];

Dest=0.1; %diametro esterno sbarra[m]
Dint=0.086; %diametro interno sbarra[m]

dl=0.055; %lunghezza dei segmenti in cui scomporre la sbarra
```

Come esempio è stato preso lo stesso del primo programma, ovvero un guasto trifase simmetrico con $i_{picco} = 43$ kA, su sbarre lunghe 11 metri, parallele equi spaziate di 2.2 metri con $D_e=0.1$ metri e $D_i = 0.086$ metri. La corrente istantanea presa è, come già visto, quella che produce maggiore forza, corrispondente a $\omega t = \frac{5}{12}\pi$. Se il programma è corretto, si dovrebbero riottenere il risultati del precedente.

5.3. Parte del programma dedicata al calcolo

5.3.1. Divisione dei conduttori in tratti

Ora si definisce N , un vettore colonna contenente il numero di segmenti in cui sono suddivise le sbarre: ogni riga corrisponde alla relativa sbarra. Esso dovrà essere un numero intero, il più vicino a quello ottenuto dal rapporto $\frac{L}{dl}$.

Il problema è che non si conosce la lunghezza totale, quindi si definisce un vettore L , uguale ad N , ma contenente le lunghezze di ogni sbarra. Per calcolarle, basta fare la norma della differenza delle coordinate x, y, z del punto finale e quelle del punto iniziali. La differenza tra coordinate contiene anche il verso della corrente, perciò è meglio conservarla in una matrice T . Questa ha 3 colonne e tante righe quanti conduttori. La prima colonna è la differenza delle coordinate x , la seconda di quelle in y e la terza di quelle in z . Si può dire che la matrice T contiene i vettori sbarre, se si dividono rispettivamente per la lunghezza, si ricavano i versori con cui sono orientate le sbarre e quindi anche le correnti, questi versori ottenuti si inseriscono in una matrice v di dimensioni uguali a T . Per fare ciò nel programma occorre scrivere:

```
%calcolo della lunghezza sbarre e del n°segmenti=====
N=zeros(size(I,1),1); %vettore del n°segmenti per ogni sbarra
T=zeros(size(I,1),3); %matrice vettori sbarre (stesso modulo e
%verso)
v=zeros(size(I,1),3); %matrice versori sbarre (stesso verso,
%modulo=1)
L=N; %vettore delle lunghezze di ogni sbarra

for k=1:size(I,1) %per ogni barra
    T(k,1)=I(k,5)-I(k,2); %componente in x k-esima sbarra
    T(k,2)=I(k,6)-I(k,3); %componente in y k-esima sbarra
    T(k,3)=I(k,7)-I(k,4); %componente in z k-esima sbarra
    L(k)=norm(T(k,:)); %lunghezza k-esima sbarra
    N(k)=round(L(k)/dl); %n°intero di segmenti k-esima sbarra
    v(k,:)=(T(k,:))./L(k);
end
```

5.3.2. Calcolo del campo magnetico

Si passa adesso al calcolo del campo magnetico. Esso avrà 3 componenti, secondo le coordinate x, y, z , per ogni punto di ogni sbarra. In questo programma, a differenza del precedente, occorre considerare tutte le componenti. Si definisce una matrice B , le cui righe corrispondono alle sbarre. Le colonne sono disposte in gruppi di 3. Ovvero le prime 3 contengono le componenti in x, y, z del campo magnetico nel punto centrale del primo segmento, la 4°,5°,6° contengono le componenti in x, y, z del campo magnetico nel punto centrale del secondo segmento e così via. Dunque ha un numero di colonne uguale a 3 volte quello del numero di segmenti. Nel definire la matrice B si prende il massimo di N , nel caso sia presente un conduttore con un numero più basso di segmenti gli spazi della matrice in eccesso conterranno zero.

```

%matrice del campo magnetico=====
%righe: k-esima riga=k-esima sbarra
%colonne: 3 colonne per ogni punto(componenti del vettore B) quindi
%n°colonne=3 volte il massimo valore di N

B=zeros(size(I,1),3*max(N));

```

Per calcolare il campo magnetico in ogni segmento dl di ciascuna sbarra, occorre considerare tutti gli altri tratti delle altre che, non avendo vincoli di posizioni, potranno essere disposti in qualsiasi punto ed avere una qualunque direzione. Questo complica un po' la scrittura, per semplificare si crea una function per il calcolo, chiamandola FBP, che si utilizzerà più volte all'interno del programma.

La function FBP deve essere in grado di calcolare il contributo del campo magnetico che si è chiamato dB , in un punto A , prodotto da una corrente I circolante in un altro punto B secondo il verso t e lungo un percorso dl . I dati di ingresso dunque sono: le coordinate x, y, z dei punti A, B , le componenti in x, y, z del versore t , la corrente I e la lunghezza del tratto dl . All'interno della function c'è l'applicazione della prima legge elementare di Laplace, la 1.1 qua riportata:

$$dB = \frac{\mu_0}{4\pi} I dl \frac{(t \times v_r)}{r^2} \quad (5.1)$$

μ_0 viene fissato a $4\pi \cdot 10^{-7}$, ipotizzando che non ci siano tratti ferromagnetici. Il raggio r , o distanza tra i due punti, si calcola con la norma della differenza delle coordinate dei punti A, B , che è anche uguale a:

$$r = \sqrt{(x_A - x_B)^2 + (y_A - y_B)^2 + (z_A - z_B)^2} \quad (5.2)$$

occorre poi definire un versore v_r , che non è altro che la differenza delle coordinate dei punti A, B diviso la norma, e quindi r .

$$v_r = \frac{A - B}{r} = \frac{(x_A, y_A, z_A) - (x_B, y_B, z_B)}{r} = \frac{(x_A - x_B, y_A - y_B, z_A - z_B)}{\sqrt{(x_A - x_B)^2 + (y_A - y_B)^2 + (z_A - z_B)^2}} \quad (5.3)$$

Fatto questo, si hanno tutti i dati per calcolare il contributo del campo magnetico. Le istruzioni di questa function sono le seguenti:

```

function [db] = FBP(A,B,t,I,dl)
%function [db] = FBP(A,B,t,I,dl)
%calcola il valore di db[3,1] in un punto di osservazione A[3,1]
%dovuto alla corrente I in un punto B[3,1] che segue la direzione
%del vettore t[3,1] in un segmento di lunghezza dl

m0=4*pi*1e-7; %permeabilità magnetica
AB=A-B; %vettore raggio
r=norm(AB); %distanza tra i due punti
vr=AB./r; %versore tra i due punti
db=(m0*I*dl/(r*r*4*pi)).*cross(t,vr);
end

```

Ritornano al calcolo del campo, si ha un certo numero di sbarre tutte divise in tratti. Ci si posiziona in una k -esima sbarra qualsiasi e si osserva il campo magnetico presente in un g -esimo segmento: esso è dato dalla somma dei contributi dovuti a tutti i tratti delle altre sbarre. Tramite la function FBP è possibile calcolare un contributo alla volta, quindi è necessario applicarla tante volte quanti sono tutti i segmenti delle altre sbarre. Per calcolare il campo nel g -esimo segmento dunque sono necessari due cicli for: uno per ogni altra m -esima sbarra ed uno per ogni h -esimo tratto di ciascun'altra sbarra, ogni volta che si calcola in nuovo contributo con la function FBP, esso deve essere sommato al precedente. All'interno si

imposta la function FBP in modo da avere come punto di osservazione A quello centrale del g -esimo segmento, come punto B quello centrale del h -esimo segmento come modulo e direzione della corrente quella della m -esima sbarra. Il tutto va poi racchiuso in altri due cicli for, il primo per considerare tutti i segmenti della k -esima sbarra ed il secondo per considerare tutte le sbarre. Le istruzioni sono quindi le seguenti:

```

%ogni sbarra è divisa in segmenti lunghi dl, per ciascuno il campo
%magnetico è dato dalla somma di tutti i contributi di tutti gli
%altri segmenti sia della stessa sbarra che delle altre sbarre.
%Essendo delle barre rettilinee il contributo dei segmenti della
%stessa sbarra dovrebbe essere nullo

for k=1:size(I,1)
    %per ogni k-esima sbarra in cui si sta calcolando B

    for g=1:N(k)
        %per ogni g-esimo segmento della k-esima sbarra in cui si
        %sta calcolando B

        for m=1:size(I,1)
            %per ogni m-esima sbarra in cui c'è il segmento
            %h-esimo in esame che produce il contributo del campo
            %nel g-esimo segmento della k-esima sbarra in cui si
            %sta calcolando B

            for h=1:N(m)
                %per ogni h-esimo segmento della m-esima sbarra
                %che produce il contributo del campo nel g-esimo
                %segmento della k-esima sbarra in cui si sta
                %calcolando B

                if k==m
                    %se la sbarra che produce è stessa che
                    %osserva = non fare nulla, perché non è
                    %necessario ed inoltre il contributo del campo
                    %prodotto dallo stesso segmento (quando h=g)
                    %è indefinito
                else
                    B(k, (3*g-2):1:(3*g))=B(k, (3*g-2):1:(3*g))+...
                        (FBP(I(k,2:1:4)+(g*dl-dl/2)*v(k,1:1:3),...
                            I(m,2:1:4)+(h*dl-dl/2)*v(m,1:1:3),...
                            v(m,:),I(m,8),dl));
                end
            end
        end
    end
end
end
end
end

```

5.3.3. Calcolo della forza magnetica

Conoscendo il campo magnetico in ogni tratto, è possibile trovare la forza magnetica agente in ciascuno di essi utilizzando la 1.22: $\mathbf{F} = Idl(\mathbf{v} \times \mathbf{B})$. Prima però si definisce la matrice delle forze \mathbf{F} come quella del campo magnetico, ovvero con le righe corrispondenti alle sbarre, e le colonne raggruppate in gruppi di tre contenenti le componenti x , y , z della forza nello spazio. Nel programma occorre scrivere due cicli for: uno includere tutte le sbarre ed uno per considerare tutti i segmenti di ogni sbarra.

```

%calcolo della forza magnetica F=I*dl*(v x B)=====
%matrice delle forze magnetiche uguale a quella di B
F=B;

for k=1:size(I,1)
    %per ogni sbarra

    for g=1:N(k)
        %per ogni segmento della k-esima sbarra

        F(k, (3*g-2):1:(3*g))=I(k,8)*dl*cross(v(k,:),...
        B(k, (3*g-2):1:(3*g)));

    end

end

```

Si inserisce ora una sezione di verifica, che consiste nel calcolo della forza totale nelle direzioni x , y , z . Servirà poi per controllare la correttezza dei risultati e per il confronto con quelli del programma precedente.

```

%sezione di verifica=====

%calcolo della forza totale su x
Fx=zeros(size(I,1),1);
for k=1:size(I,1)
    %per ogni sbarra

    for g=1:N(k)
        %per ogni segmento della k-esima sbarra
        Fx(k)=Fx(k)+(F(k,3*g-2));
    end
end

%calcolo della forza totale su y
Fy=zeros(size(I,1),1);
for k=1:size(I,1)
    %per ogni sbarra

    for g=1:N(k)
        %per ogni segmento della k-esima sbarra

        Fy(k)=Fy(k)+(F(k,3*g-1));
    end
end

%calcolo della forza totale su z
Fz=zeros(size(I,1),1);
for k=1:size(I,1)
    %per ogni sbarra

    for g=1:N(k)
        %per ogni segmento della k-esima sbarra
        Fz(k)=Fz(k)+(F(k,3*g));
    end
end

```

5.3.4. Sistema di riferimento VTS orientato con le sbarre

Successivamente, per il calcolo delle tensioni interne, è necessario costruire un sistema di coordinate orientate con la sbarra. Questo poiché non avendo vincoli di posizione, le forze magnetiche agenti su di esse possono non essere allineate con il sistema di riferimento principale x, y, z ed inoltre varare direzione lungo il conduttore.

Ogni sbarra deve avere il suo sistema di riferimento. Per questo si ricava il sistema di riferimento utilizzando una function, chiamandola VTS. I nuovi versori del sistema sono appunto $\mathbf{v}, \mathbf{t}, \mathbf{s}$. Il versore \mathbf{v} si è scelto uguale a quello della corrente di sbarra, per questo mantiene lo stesso nome. Per i versori \mathbf{t}, \mathbf{s} si è deciso di tenerli perpendicolari tra loro e di ricavarli in modo che il loro prodotto vettoriale $\mathbf{t} \times \mathbf{s}$ sia uguale a \mathbf{v} . Quindi le componenti dei versori in x, y, z devono essere:

$$\mathbf{v} = \mathbf{t} \times \mathbf{s} \quad (v_x, v_y, v_z) = (t_y s_z - t_z s_y, t_x s_z - t_z s_x, t_x s_y - t_y s_x) \quad (5.4)$$

Si hanno 6 incognite da determinare, che sono le componenti dei versori t, s . Dalla 5.4 è possibile quindi ottenere 3 equazioni:

$$v_x = t_y s_z - t_z s_y \quad (5.5)$$

$$v_y = t_z s_x - t_x s_z \quad (5.6)$$

$$v_z = t_x s_y - t_y s_x \quad (5.7)$$

altre due equazioni si ottengono sapendo che \mathbf{t}, \mathbf{s} sono dei versori, e quindi il loro modulo è unitario:

$$t_x^2 + t_y^2 + t_z^2 = 1 \quad (5.8)$$

$$s_x^2 + s_y^2 + s_z^2 = 1 \quad (5.9)$$

avendo 5 equazioni e 6 variabili esistono più versori con le caratteristiche volute, quindi per semplificarne il calcolo si pone $t_z = 0$. Le equazioni 5.5, 5.6 e 5.8 diventano ora:

$$v_x = t_y s_z \quad (5.10)$$

$$v_y = -t_x s_z \quad (5.11)$$

$$t_x^2 + t_y^2 = 1 \quad (5.12)$$

dividendo la 5.11 per la 5.10 si ottiene una relazione per t_x :

$$\frac{v_y}{v_x} = -\frac{t_x s_z}{t_y s_z} \quad t_x = -t_y \frac{v_y}{v_x} \quad (5.13)$$

Inserendola nella 5.12 si ottiene una equazione con una sola incognita che è t_y :

$$\frac{v_y^2}{v_x^2} t_y^2 + t_y^2 = 1 \quad \left(\frac{v_y^2}{v_x^2} + 1 \right) t_y^2 = 1 \quad t_y = \sqrt{\frac{1}{\frac{v_y^2}{v_x^2} + 1}} \quad (5.14)$$

Da qui si ricava t_y , che poi sostituendolo nella 5.13, permette di ricavare anche t_x .

Fatto questo, si conosce il versore \mathbf{t} , il versore \mathbf{s} lo si può ottenere dal prodotto vettoriale $\mathbf{v} \times \mathbf{t}$.

Nel caso in cui la componente v_x fosse nulla, il rapporto $\frac{v_y}{v_x}$ sarebbe indefinito e non sarebbe possibile il calcolo. Si deve seguire un'altra strada: osservando la 5.10, si capisce che se $v_x = 0$ allora anche $t_y = 0$ e di conseguenza per la 5.12 $t_x = 1$.

```

function [P] = VTS(v)
%function [P] = VTS(v)
%calcola una matrice P[6,1] contenente i due versori t[3,1] ed
%s[3,1] perpendicolari tra loro e il loro prodotto vettoriale
%(t x s) è uguale al vettore di v. P=[t[3,1] s[3,1]]

%componenti vettore in x,y a cui deve essere perpendicolare
vx=v(1);
vy=v(2);

%versore t
%componente lungo z
tz=0; %posto uguale a zero per semplificare il calcolo

%componenti lungo x,y
if vx==0
    %se vx=0 il vettore t è [1 0 0]
    tx=1;
    ty=0;
else
    %calcolo delle componenti di t se vx non è zero
    ty=1/sqrt((vy*vy/(vx*vx)+1));
    tx=-(vy/vx)*ty;
end

%costruzione del versore t dalle componenti
t=[tx ty tz];

%calcolo del versore s perpendicolare a t e a v
s=cross(v,t)/norm(v);

%matrice in uscita con i due versori nella stessa riga
P=[t s];

end

```

La matrice in uscita **P** contiene le componenti dei versori **t**, **s** in questo ordine sulla stessa riga.

Ora si applica la function per trovare il sistema di riferimento nelle sbarre, raggruppandoli in matrici, chiamandole appunto **t**, **s** dove, come per **v**, le righe indicano la sbarra e le 3 colonne indicano le componenti **x**, **y**, **z**:

```

%calcolo del sistema di versori orientati secondo le sbarre=====
t=zeros(size(v)); %matrice dei versori perpendicolari alla sbarra

%matrice dei versori perpendicolari alla sbarra tale che (t x s)=v
s=t;
for k=1:size(I,1)
    P=VTS(v(k,:)); %funzione che ricava i versori

    %versore t
    t(k,:)=P(1:1:3);
    %versore s
    s(k,:)=P(4:1:6);
end

```

Adesso si ricavano le componenti del campo magnetico e della forza nelle direzioni $\mathbf{v}, \mathbf{t}, \mathbf{s}$ per le sbarre.

Si inizia dal campo magnetico, non servirebbe trasformarlo in questo sistema di riferimento, ma lo si fa comunque come verifica. Si inizia definendo una matrice \mathbf{B}_{vts} , che come dimensioni deve essere uguale a \mathbf{B} dove le righe rappresentano la sbarre e le colonne sono raggruppate in gruppi di tre per ogni punto, contengono le componenti del campo nelle direzioni $\mathbf{v}, \mathbf{t}, \mathbf{s}$ che sono diverse per ogni sbarra.

```
%calcolo del campo magnetico nel sistema di versori orientati
%secondo le sbarre
Bvts=zeros(size(B));
```

Per ottenere le componenti di un vettore in una direzione, di cui si sa il versore, basta eseguire il prodotto scalare tra quel vettore e il versore della direzione. Quindi basterà prendere tutti i vettori del campo magnetico in ogni punto medio di ogni tratto di ogni sbarra, contenuti nella matrice \mathbf{B} , e moltiplicarli per i tre versori di ogni sbarra contenuti in $\mathbf{v}, \mathbf{t}, \mathbf{s}$.

```
for k=1:size(I,1)
    %per ogni sbarra
    for g=1:N(k)
        %per ogni tratto

        %campo magnetico lungo la direzione v per le tre sbarre
        Bvts(k,3*g-2)=B(k,3*g-2:1:3*g)*v(k,:);
        %campo magnetico lungo la direzione t per le tre sbarre
        Bvts(k,3*g-1)=B(k,3*g-2:1:3*g)*t(k,:);
        %campo magnetico lungo la direzione s per le tre sbarre
        Bvts(k,3*g)=B(k,3*g-2:1:3*g)*s(k,:);

    end
end
```

Come appena fatto per \mathbf{B} , lo stesso procedimento lo si fa per la forza magnetica.

```
%calcolo della forza nel sistema di versori orientati secondo
%le sbarre
Fvts=zeros(size(F));

for k=1:size(I,1)
    %per ogni sbarra
    for g=1:N(k)
        %per ogni tratto

        %forza lungo la direzione v
        %(dovrebbe essere zero a meno di errori di troncamento)
        Fvts(k,3*g-2)=F(k,3*g-2:1:3*g)*v(k,:);
        %forza lungo la direzione t
        Fvts(k,3*g-1)=F(k,3*g-2:1:3*g)*t(k,:);
        %forza lungo la direzione s
        Fvts(k,3*g)=F(k,3*g-2:1:3*g)*s(k,:);

    end
end
```

Per la forza magnetica inoltre si calcolano quelle totali nelle nuove direzioni, e si inseriscono in tre vettori chiamati rispettivamente $\mathbf{F}_{vm}, \mathbf{F}_{tm}, \mathbf{F}_{sm}$, dove, come al solito le righe corrispondono alle sbarre.

```

%calcolo della forza totale nelle direzioni vts=====
Fvm=zeros(size(I,1),1); %forza totale lungo v delle varie sbarre
Ftm=zeros(size(I,1),1); %forza totale lungo t delle varie sbarre
Fsm=zeros(size(I,1),1); %forza totale lungo s delle varie sbarre

for k=1:size(I,1)
    for g=1:N(k)
        Fvm(k)=Fvm(k)+(Fvts(k,3*g-2));
        Ftm(k)=Ftm(k)+(Fvts(k,3*g-1));
        Fsm(k)=Fsm(k)+(Fvts(k,3*g));
    end
end
end

```

5.3.5. Risultati di campo magnetico e forza

Allo scopo di controllare i risultati, per ogni sbarra, si tracciano dei grafici sia per il campo magnetico e sia per la forza in funzione della lunghezza.

Iniziando dal campo magnetico, per ogni conduttore, si traccia prima un grafico delle componenti lungo le direzioni v , t , s e poi un altro grafico contenente il modulo di esso. Il modulo si ricava dalla radice quadrata della somma dei quadrati delle componenti. Quest'ultimo è stato deciso di disegnarlo con una linea di spessore maggiore. Dunque le istruzioni sono le seguenti.

```

%grafico del campo magnetico nel sistema di versori orientati
%secondo le sbarre
for k=1:size(I,1)
    %per ogni sbarra

    %campo magnetico lungo la direzione v
    Bv=Bvts(k,1:3:size(Bvts,2));
    %campo magnetico lungo la direzione t per le tre sbarre
    Bs=Bvts(k,2:3:size(Bvts,2));
    %campo magnetico lungo la direzione s per le tre sbarre
    Bt=Bvts(k,3:3:size(Bvts,2));
    %modulo del campo magnetico
    Btot=sqrt(Bv.*Bv+Bt.*Bt+Bs.*Bs);

    x=(dl/2):dl:(dl*max(N)-dl/2); %asse x dei grafici=lunghezza

    figure(k)
    %grafico del campo lungo le direzioni v,t,s
    plot(x,Bv,':',x,Bt,'r',x,Bs,'c--')
    hold on
    %grafico del campo complessivo in modulo
    plot(x,Btot,'k','LineWidth',2)
    title(['Campo magnetico sbarra ',num2str(k)])
    ylabel('Bv-b: [T], Bt-r [T], Bs-c-- [T], |Btot-k| [T]')
    xlabel('lunghezza [m]')
    grid
end
end

```

I grafici ottenuti con i dati dell'esempi sono i seguenti di Figura 5.1:

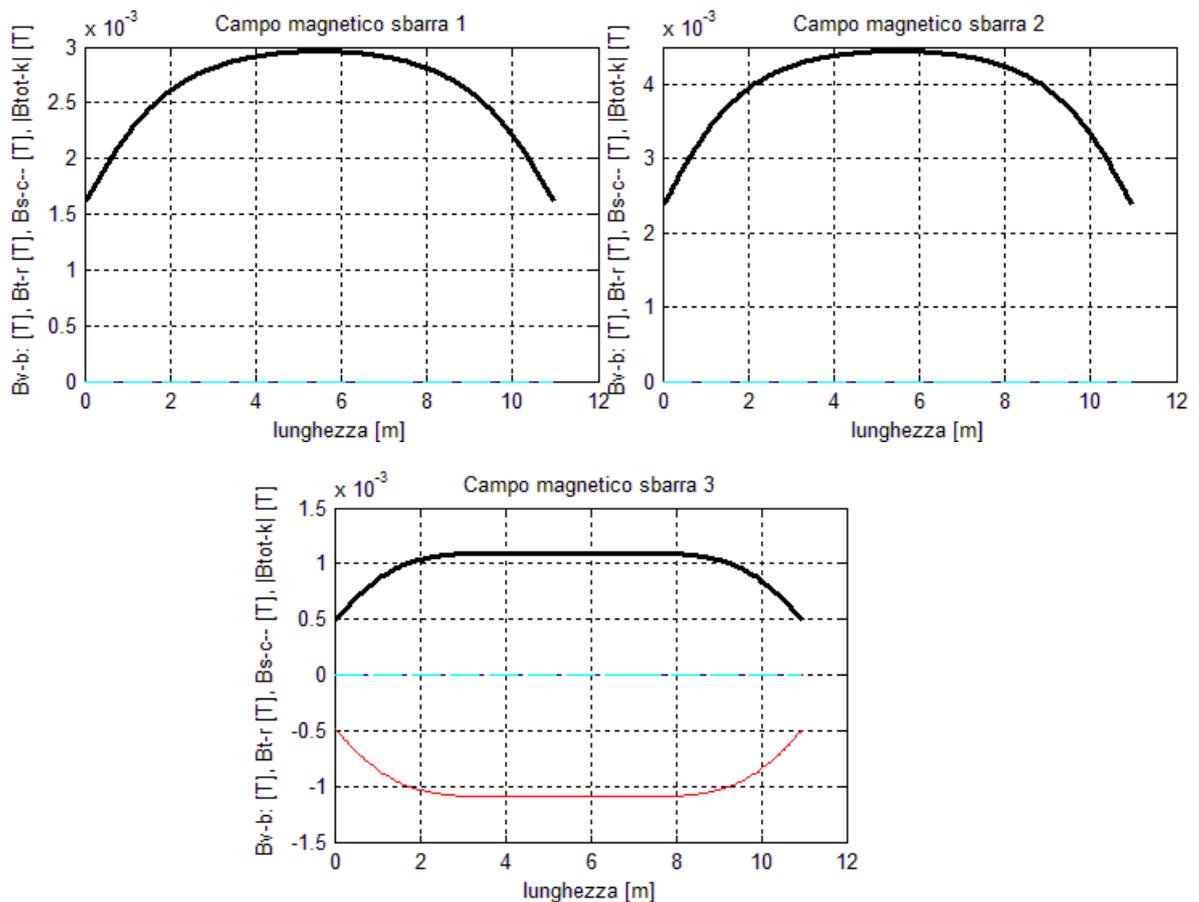


Figura 5.1 Andamenti del campo magnetico nei conduttori

La curva blu continua è relativa alla direzione v , quella rossa continua alla direzione t , quella ciano tratteggiata alla direzione s e quella nera a spessore maggiore indica il modulo della somma vettoriale.

Lo stesso procedimento lo si applica per tracciare i grafici della forza, per cui le istruzioni da scrivere sono le stesse, solo che si inserisce la forza al posto del campo magnetico.

```
%grafico della forza nel sistema di versori orientati
%secondo le sbarre
for k=1:size(I,1) %per ogni sbarra

    %forza lungo la direzione v
    Fv=Fvts(k,1:3:size(Fvts,2));
    %forza lungo la direzione t per le tre sbarre
    Fs=Fvts(k,2:3:size(Fvts,2));
    %forza lungo la direzione s per le tre sbarre
    Ft=Fvts(k,3:3:size(Fvts,2));
    %modulo della forza
    Ftot=sqrt(Fv.*Fv+Ft.*Ft+Fs.*Fs);

    x=(dl/2):dl:(dl*max(N)-dl/2); %asse x dei grafici=lunghezza

    figure(size(I,1)+k)
    %grafico della forza lungo le direzioni v,t,s
    plot(x,Fv,':',x,Ft,'r',x,Fs,'c--')
    hold on
```

```

%grafico della forza complessiva in modulo
plot(x,Ftot,'k','LineWidth',2)
title(['Forza nella sbarra ',num2str(k),'])
ylabel('Fv-b: [N], Ft-r [N], Fs-c-- [N], |Ftot-k| [N]')
xlabel('lunghezza [m]')
grid
end

```

I grafici ottenuti con i dati dell'esempi sono i seguenti di Figura 5.2:

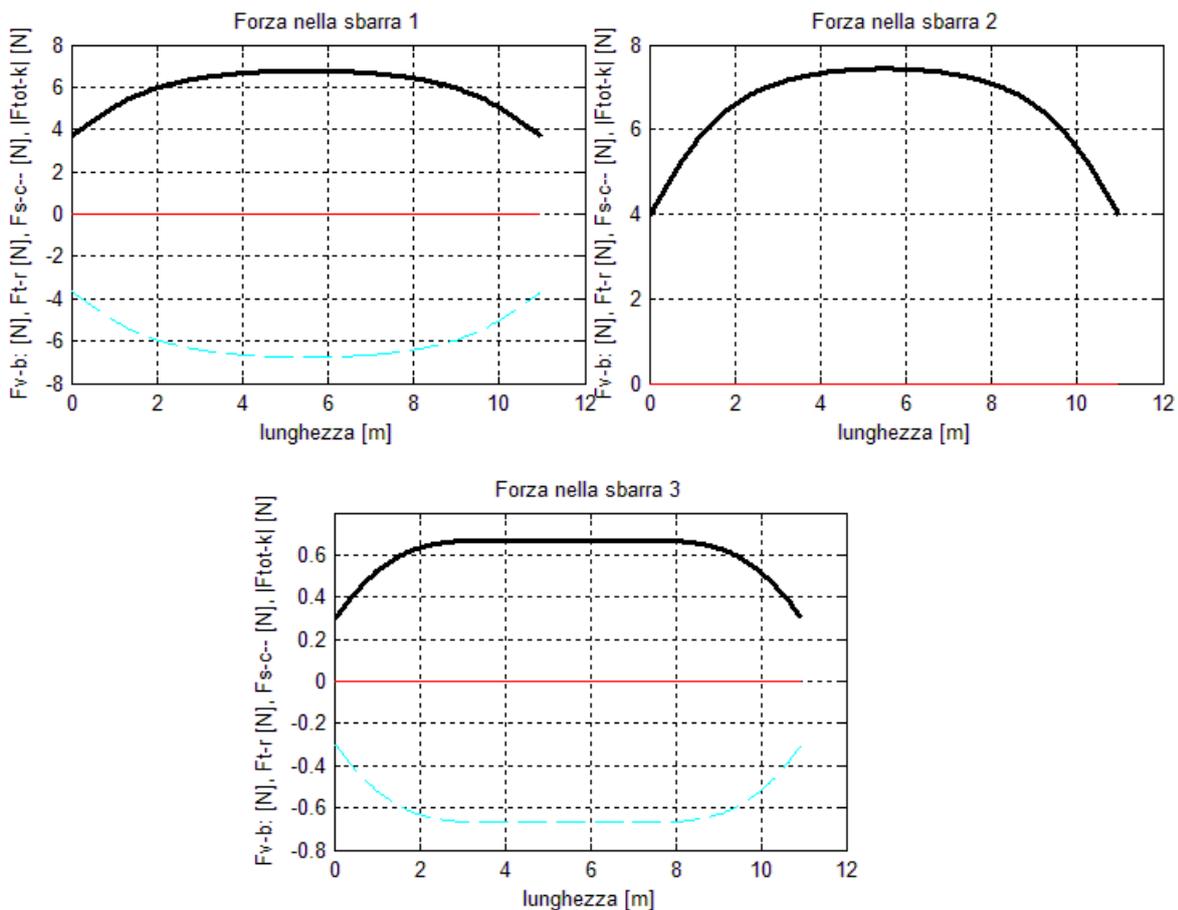


Figura 5.2 Andamenti della forza magnetica nei conduttori

La curva blu continua è relativa alla direzione \mathbf{v} , quella rossa continua alla direzione \mathbf{t} , quella ciano tratteggiata alla direzione \mathbf{s} e quella nera a spessore maggiore indica il modulo della somma vettoriale.

Come si può vedere i grafici sia del campo magnetico sia della forza sono uguali a quelli ottenuti con il programma precedente, questo conferma la validità dei risultati, in quanto il caso considerato è lo stesso.

5.3.6. Calcolo del momento flettente e delle tensioni interne

Come prima cosa si definiscono le matrici ed i vettori che poi si useranno nel calcolo. Si chiamano \mathbf{M}_t ed \mathbf{M}_s le matrici contenenti i valori del momento in funzione della lunghezza rispettivamente lungo le direzioni \mathbf{t} , \mathbf{s} . Mentre si chiama con \mathbf{M}_{tot} la matrice contenente i valori del momento risultante in funzione della lunghezza. Queste tre matrici hanno stesse dimensioni, strutturate come quelle in usate in precedenza, ovvero le righe coincidono con le sbarre e le colonne con i punti centrali di ogni segmento. Si definiscono \mathbf{R}_t , \mathbf{R}_s i vettori delle reazioni vincolari nel primo appoggio rispettivamente lungo le direzioni \mathbf{t} , \mathbf{s} ed \mathbf{R}_1 , \mathbf{R}_2 i vettori delle reazioni vincolari complessive rispettivamente nel primo e nel secondo

appoggio. Hanno un numero di componenti pari al numero delle sbarre. Infine si definiscono le matrici delle tensioni \mathbf{sig}_t , \mathbf{sig}_s , \mathbf{sig} di struttura uguale a quella del momento flettente, e stanno ad indicare rispettivamente la tensione interna massima dovuta al momento lungo t , la tensione interna massima dovuta al momento lungo s e la tensione interna massima complessiva. Le istruzioni da scrivere sono dunque queste:

```
%calcolo del momento flettente e tensioni interne=====
%matrice momenti flettenti nei vari tratti delle k sbarre asse t
Mt=zeros(size(I,1),max(N));
%matrice momenti flettenti nei vari tratti delle k sbarre asse s
Ms=Mt;
%matrice momenti flettenti nei vari tratti delle k sbarre
Mtot=Mt;
%vettore reazioni vincolari delle k sbarre asse t nel primo appoggio
Rt=zeros(size(I,1),1);
%vettore reazioni vincolari delle k sbarre asse s nel primo appoggio
Rs=Rt;
%vettore reazioni vincolari complessive nel primo appoggio
R1=Rt;
%vettore reazioni vincolari complessive nel secondo appoggio
R2=Rt;
%matrice della tensione interna massima nei vari tratti delle
% sbarre dovuta al momento di asse t
sigt=zeros(size(I,1),max(N));
%matrice della tensione interna massima nei vari tratti delle
% sbarre dovuta al momento di asse s
sigs=sigt;
%matrice della tensione interna massima nei vari tratti delle sbarre
sig=sigt;
```

Successivamente si calcola il valore del momento d'inerzia della sbarra, che servirà nel determinare le tensioni interne.

```
%momento d'inerzia della sbarra rispetto alla linea perpendicolare
%all'asse della sbarra
Ix=(pi/64)*((Dest^4)-Dint^4);
```

Le prime cose da ricavare sono le reazioni vincolari nei due appoggi nelle direzioni t, s . Nel programma precedente il procedimento era più semplice in quanto esisteva simmetria nella disposizione della forza lungo il conduttore. Qui invece, non essendoci i vincoli di posizione e lunghezza si può avere una distribuzione non simmetrica. Per il calcolo si può procedere considerando l'effetto della forza distribuita equivalente a quello di una forza concentrata (di modulo uguale a quello risultante della forza distribuita F_m), posizionata ad una distanza H_b dal primo appoggio, come da Figura 5.3:

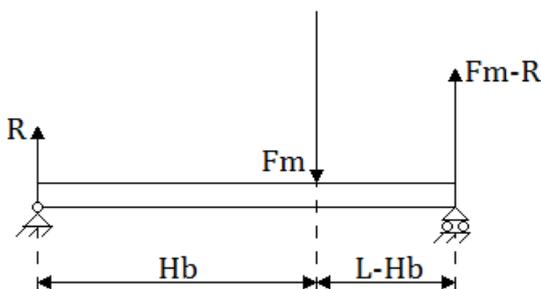


Figura 5.3 Forza concentrata con effetto equivalente a quella distribuita

La distanza H_b , la si ricava con le stesse regole valide per il baricentro, quindi:

$$H_b = \frac{1}{F_m} \int_0^L l F(l) dl \quad (5.15)$$

Dove $F(l)$ è il carico distribuito ed L la lunghezza totale del conduttore.

Il termine $\int_0^L l F(l) dl$ è il momento statico (o del primo ordine) della forza dal primo appoggio, è stato

scelto di chiamarlo S_f . Esso deve essere calcolato numericamente: ogni forza applicata al punto centrale del tratto deve essere moltiplicata per la distanza dal primo appoggio e poi occorre sommare tutti questi risultati. In pratica occorre risolvere questa sommatoria:

$$S_f = \sum_{h=1}^N \left[(h-1)dl + \frac{dl}{2} \right] F(hdl) \quad (5.16)$$

si nota che quando $h = 1$, la distanza è $\frac{dl}{2}$ come deve essere, poiché il primo punto centrale dista $\frac{dl}{2}$. Avendo a disposizione la forza in ogni punto centrale, nel programma la si scriverà al posto del carico distribuito $F(hdl)$.

Una volta calcolata H_b , si trova la reazione vincolare R ponendo l'equilibrio della sbarra, più precisamente si pone nulla la somma dei momenti dal secondo punto di appoggio:

$$F_m(L - H_b) - RL = 0 \quad R = F_m \frac{L - H_b}{L} \quad (5.17)$$

questo procedimento lo si fa sia per l'asse t , sia per l'asse s , aggiungendo ai simboli usati il pedice corrispondente. Quindi si ottengono le reazioni R_t ed R_s .

Successivamente si calcola la reazione complessiva negli appoggi: R_1 del primo e R_2 del secondo. Essendo t, s in quadratura, per R_1 basterà applicare il teorema di Pitagora:

$$R_1 = \sqrt{R_t^2 + R_s^2} \quad (5.17)$$

Per R_2 si sottrae alla forza complessiva F_m il contributo di R_1 , ovvero $R_2 = F_m - R_1$. Le istruzioni del programma per risolvere tutto questo sono le seguenti.

```

for k=1:size(I,1)
    %per ogni sbarra

    %calcolo delle reazioni vincolari

    %definizioni momento statico lungo assi t,s
    Sft=0;
    Sfs=0;

    for h=1:N(k)
        %per ogni tratto

        %momento del primo ordine direzione t
        Sft=Sft+((h-1)*dl+dl/2)*Fvts(k,3*h-1);
        %momento del primo ordine direzione s
        Sfs=Sfs+((h-1)*dl+dl/2)*Fvts(k,3*h);

    end

    %reazione vincolare lungo t
    if Ftm(k)==0% se la forza è nulla non calcolare la reazione
        Rt(k)=0;
    else
        %distanza della risultante dal primo amppggio asse t
        Hbt=Sft/Ftm(k);
        %reazione vincolare lungo t
        Rt(k)=Ftm(k)*(L(k)-Hbt)/L(k);
    end
end

```

```

%reazione vincolare lungo s
if Fsm(k)==0% se la forza è nulla non calcolare la reazione
    Rs(k)=0;
else
    Hbs=Sfs/Fsm(k); %distanza baricentro di s
    Rs(k)=Fsm(k)*(L(k)-Hbs)/L(k); %reazione vincolare lungo s
end

%reazioni vincolari complessive nel primo appoggio
R1(k)=sqrt(Rt(k)*Rt(k)+Rs(k)*Rs(k));
%reazioni vincolari complessive nel secondo appoggio
R2(k)=sqrt(Ftm(k)*Ftm(k)+Fsm(k)*Fsm(k))-R1(k);

end

```

Il momento flettente si ricava come nel programma precedente seguendo la formula 4.27. Ovvero si sta percorrendo la sbarra dal primo appoggio verso il secondo, e compaiono due contributi: uno dovuto alla reazione vincolare ed il secondo dovuto alla forza distribuita. Questo lo si fa per le due direzioni t, s ottenendo così M_t ed M_s . Infine si calcola quello totale $M_{tot} = \sqrt{M_t^2 + M_s^2}$

Per le tensioni interne è stato scelto di trascurare l'effetto del taglio, in quanto trascurabile. Dunque si ha solo lo sforzo di trazione σ ricavabile con la formula di Navier 2.5, ponendo come distanza dal centro quella massima, cioè $\frac{D_{est}}{2}$, che permette di trovare il massimo sforzo. È stato scelto di calcolare lo sforzo per i tre momenti presenti ovvero M_t, M_s ed M_{tot} , che rispettivamente producono σ_t, σ_s ed σ_{tot} .

Una volta calcolati momento flettente e tensioni interne si fa un grafico di essi in funzione della lunghezza per ogni conduttore per verificare i risultati. Per il momento e lo sforzo complessivo si è scelto uno spessore maggiore, poiché esso è il vero risultato del calcolo e si deve fare riferimento ad esso per il criterio tensionale. Le istruzioni per fare tutto ciò sono le seguenti.

```

%momento flettente e tensione interna per ogni sbarra (trascurando
%l'effetto del taglio)

for k=1:size(I,1)
    %per ogni sbarra

    for g=1:N(k)

        %asse t
        %momento fase k lungo t: Mreazione vincolare + Msomma forze
        %distribuite moltiplicate distanza dal punto g-esimo
        Mt(k,g)=(Rt(k)*((g-1)*dl+dl/2)-...
            dl*(sum(Fvts(k,2:3:3*(g-1)).*((g-1):-1:1))));
        %tensione interna massima dovuta al momento di asse t
        %nel punto g della sbarra k
        sigt(k,g)=(Mt(k,g)/Ix)*(Dest/2);

        %asse s
        %momento fase k lungo s: Mreazione vincolare + Msomma forze
        %distribuite moltiplicate distanza dal punto g-esimo
        Ms(k,g)=(Rs(k)*((g-1)*dl+dl/2)-...
            dl*(sum(Fvts(k,3:3:3*(g-1)).*((g-1):-1:1))));
        %tensione interna massima dovuta al momento di asse t
        %nel punto g della sbarra k
        sigs(k,g)=(Ms(k,g)/Ix)*(Dest/2);
    end
end

```

```

end

%grafici del momento nelle direzioni t s
x=(dl/2):dl:(dl*max(N)-dl/2); %asse x
figure(2*size(I,1)+2*k-1)
    %grafico del momento lungo le direzioni ts
plot(x,Mt(k,:), 'r', x, Ms(k,:), 'c--')
hold on
%grafico del momento complessivo in modulo
plot(x,Mtot(k,:), 'k', 'LineWidth',2)
title(['momento nella sbarra ', num2str(k), ])
ylabel('Mt-r [Nm], Ms-c-- [Nm], |Mtot-k| [Nm]')
xlabel('lunghezza [m]')
grid

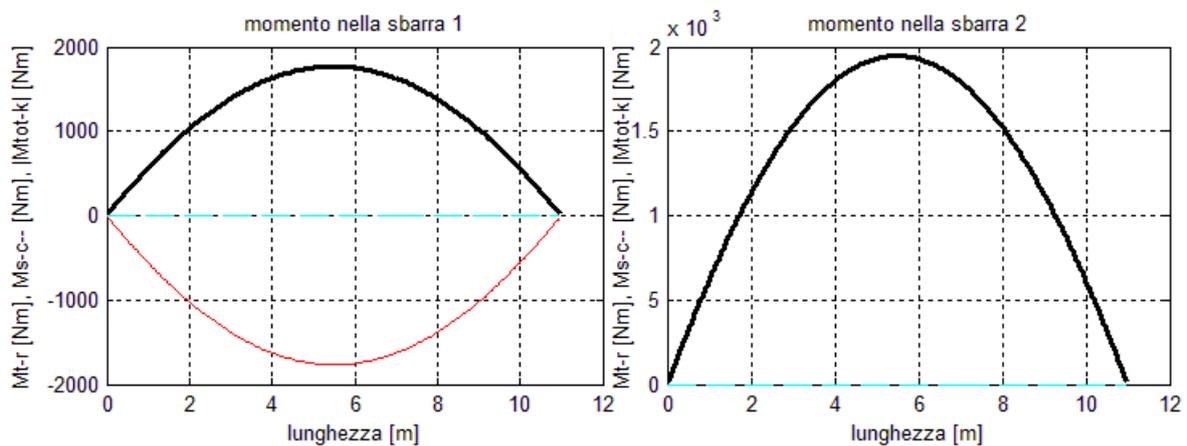
%grafici delle tensioni interne nelle direzioni t s
figure(2*size(I,1)+2*k)
%grafico della tensione interna lungo le direzioni ts
plot(x, sigt(k,:), 'm', x, sigs(k,:), 'y--')
hold on
%grafico delle tensione interna complessiva in modulo
plot(x, sig(k,:), 'k', 'LineWidth',2)
title(['tensione nella sbarra ', num2str(k), ])
ylabel('sigt-m [N/m^2], sigs-y-- [N/m^2], |sig-k| [N/m^2]')
xlabel('lunghezza [m]')
grid

end

```

5.3.7. Risultati del momento flettente e tensioni interne

I grafici del momento flettente sono i seguenti di Figura 5.4.



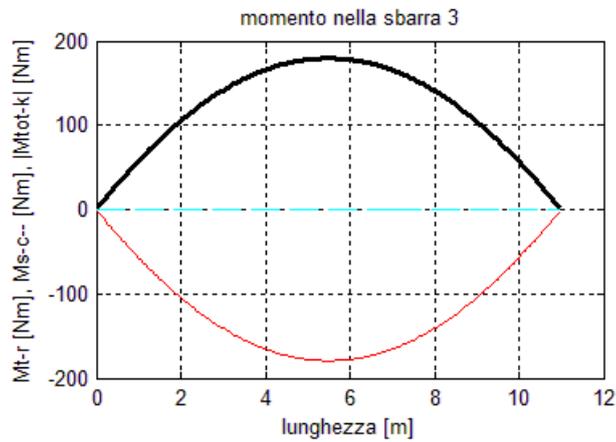


Figura 5.4 Andamenti del momento flettente nei conduttori

La curva blu continua è relativa alla direzione v , quella rossa continua alla direzione t , quella ciano tratteggiata alla direzione s e quella nera a spessore maggiore indica il modulo della somma vettoriale.

I grafici delle tensioni interne sono i seguenti di figura 5.5:

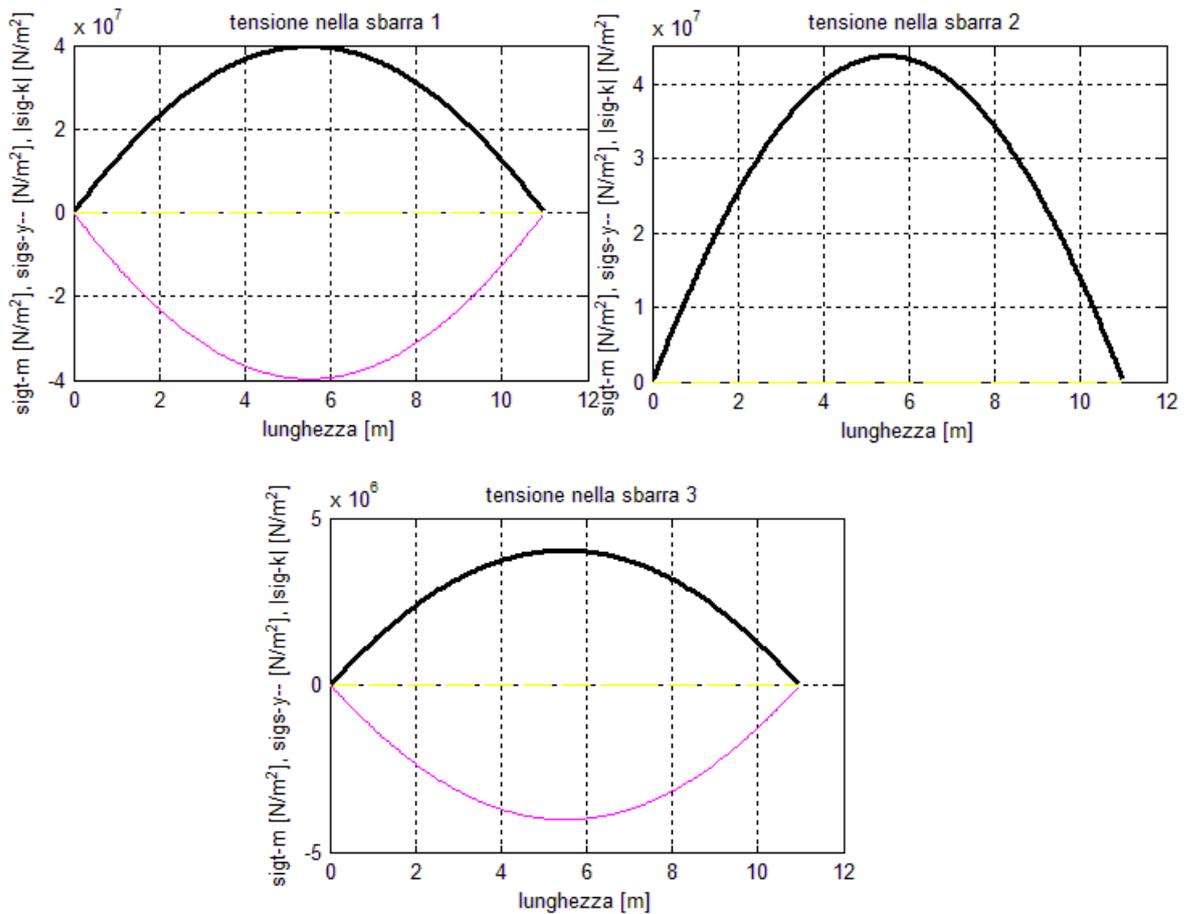


Figura 5.5 Andamenti della tensione nei conduttori

La curva magenta continua è relativa alla direzione t , quella gialla tratteggiata alla direzione s e quella nera a spessore maggiore indica il modulo della somma vettoriale.

Come si può vedere per entrambi, il grafico complessivo coincide con quello ottenuto dal programma precedente, per cui si possono ritenere corretti i risultati.

5.3.8. Grafico delle sbarre nello spazio

Alla fine del programma si inserisce una sezione dedicata al disegno delle sbarre nello spazio, per controllare che sia quella voluta. Nello stesso grafico si inseriscono anche la forza ed il momento flettente complessivo vicino al conduttore corrispondente. Questo per la verifica del verso della forza e dell'andamento del momento flettente che deve essere analogo alla disposizione di un filo caricato con la stessa forza.

Si inizia col definire una matrice D per ogni sbarra. Questa deve contenere le coordinate di tutti i punti centrali dei tratti di ogni sbarra. Partendo dal punto iniziale si sottrae un vettore avente stesso verso della sbarra e lungo $\frac{dl}{2}$ e poi si sommeranno un certo numero di questi vettori lunghi però dl . Il numero di vettori sommati corrisponde al numero del punto sulla sbarra. La matrice D è, nel grafico, la curva della sbarra corrispondente.

Le altre matrici impiegate hanno stesse dimensioni di D e sono: F_{3d} , M_{bt} , M_{bs} , M_{3d} . Contengono rispettivamente: la forza per ogni sbarra, il momento lungo t per ogni sbarra, il momento lungo s per ogni sbarra e il momento complessivo per ogni sbarra.

Per ottenere la curva delle forze si prende la matrice D e, per ogni punto, si somma la forza corrispondente ridotta di una certa quantità: si è scelto di dividerla per 5. Quest'ultima operazione serve per contenere le dimensioni del grafico. Anche per le matrici M_{bt} , M_{bs} si opera allo stesso modo, dividendo per 1000 in questo caso. La matrice M_{3d} , che indica il momento complessivo, è ricavata dalla somma delle due matrici componenti sottraendo D che compare in entrambe: $M_{3d} = M_{bt} + M_{bs} - D$. Le istruzioni sono le seguenti.

```
%disegno delle sbarre nello spazio=====
for k=1:size(I,1)
    %per ogni sbarra

    %matrice contenente le coordinate xyz di ogni punto sulla sbarra
    D=zeros(N(k),3);
    %matrice che indicherà la forza su ogni punto
    F3d=D;
    %matrice che indicherà il momento sull'asse t ogni punto
    Mbt=D;
    %matrice che indicherà il momento sull'asse s ogni punto
    Mbs=D;
    %matrice che indicherà il momento complessivo per ogni punto
    M3d=D;

    for g=1:N(k)
        %per ogni punto sulla sbarra

        %posizione del punto sulla sbarra
        D(g,:)=I(k,2:4)+(g*dl-dl/2)*v(k,:);

        %curva della forza
        %posizione dei punti indicanti la forza ridotta di 5
        F3d(g,:)=D(g,:)+F(k,3*g-2:1:3*g)/5;
```

```

%curva dei momenti
%posizione dei punti indicanti il momento flettente ridotto
%di 1000 lungo l'asse t
Mbt(g,:) = D(g,:) + Mt(k,g) .* t(k,:) ./ 1000;
%posizione dei punti indicanti il momento flettente ridotto
%di 1000 lungo l'asse s
Mbs(g,:) = D(g,:) + Ms(k,g) .* s(k,:) ./ 1000;
%posizione dei punti indicanti il momento flettente
%complessivo ridotto di 1000
M3d(g,:) = Mbt(g,:) + Mbs(g,:) - D(g,:);

end

figure(4*size(I,1)+1)
title('Sbarre nello spazio')
%disegno sbarre
plot3(D(:,1), D(:,2), D(:,3), 'LineWidth', 2)
hold on
%disegno forze
plot3(F3d(:,1), F3d(:,2), F3d(:,3), 'g')
%disegno momento flettente
plot3(M3d(:,1), M3d(:,2), M3d(:,3), 'r')
end
grid

```

Il grafico ottenuto è quello di figura 5.6.

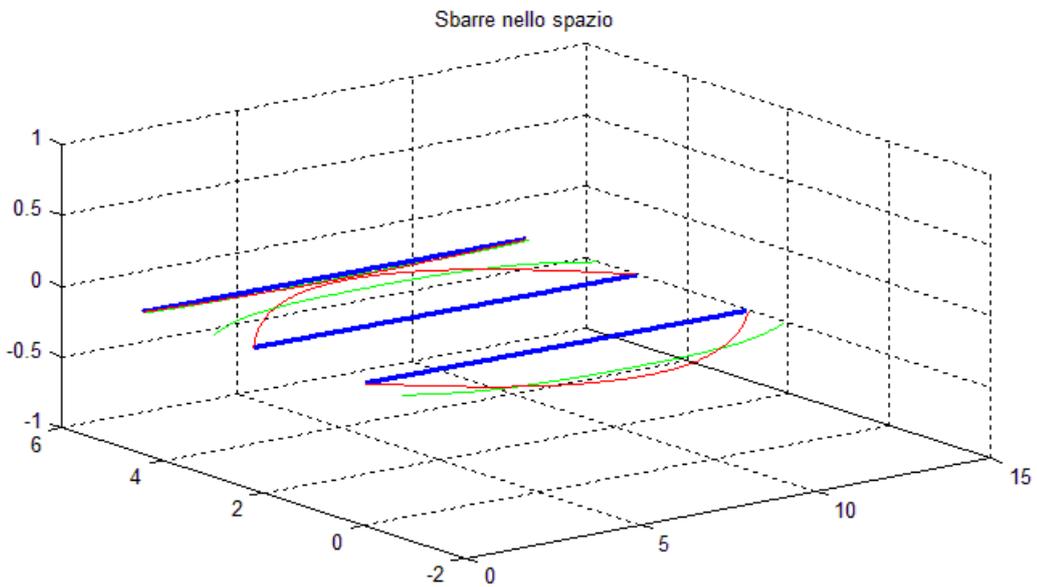


Figura 5.6 Disposizione dei conduttori nello spazio (blu) con andamento della forza magnetica (verde) e del momento flettente (rosso)

CAPITOLO 6

6. Programma per il calcolo degli sforzi in conduttori flessibili

Il terzo ed ultimo programma MATLAB realizzato per questa tesi, riguarda il calcolo degli sforzi presenti su tre conduttori flessibili durante i guasti di cortocircuito. Questo senza vincoli di posizione nello spazio per i conduttori. Il programma fornisce inoltre la posizione spaziale assunta dai conduttori durante il guasto, necessaria per ricavare le tensioni interne ai conduttori.

6.1. Considerazioni ed ipotesi

Anche in questo caso i conduttori vengono considerati filiformi (trascuando quindi il raggio esterno rispetto alla distanze) e vincolati alle estremità con cerniere. La sezione dei conduttori, necessaria per il calcolo delle tensioni interne, è presa circolare, con diametro D . Inoltre, come sempre, non viene considerata la variazione della corrente nel tempo, quindi il programma funziona con corrente continua che basta porre uguale a quella istantanea del caso peggiore. Dunque il programma studia un funzionamento stazionario non considerando la dinamica dello spostamento dei conduttori dalla posizione iniziale a quella finale. Il funzionamento del programma è simile ai precedenti, ovvero ogni conduttore viene diviso in tratti di cui se ne studia uno alla volta.

6.2. Dati del programma

La prima parte, come sempre, è dedicata ai dati. Quelli relativi ai conduttori vengono inseriti in una matrice di ingresso I , simile a quella del programma precedente. Essa deve contenere le informazioni sulla posizione, sulle correnti, sulle lunghezze, sul tiro e sull'errore di posizione in z di ciascuno. Ogni riga di questa matrice corrisponde ad un conduttore, vengono però considerati solo i primi tre conduttori, altre righe dopo la terza non vengono lette dal programma. La prima colonna di I serve per identificare il numero, ma non viene utilizzata nel programma. La seconda, terza e quarta colonna corrispondono rispettivamente alle coordinate x , y , z del punto iniziale del conduttore. La quinta e sesta colonna corrispondono rispettivamente alle coordinate x , y , z del punto finale. L'ottava colonna della matrice I contiene il tiro ipotizzato nel conduttore, se non è quello effettivo verrà corretto dal programma. La nona colonna contiene il peso per unità di volume. La decima colonna contiene la lunghezza del conduttore. L'undicesima ed ultima colonna contiene la corrente nel conduttore, il cui verso è dal punto iniziale a quello finale.

Altri dati da inserire sono: la misura dl dei tratti in cui si dividono i conduttori ed il diametro esterno D . Ecco le righe di comando dei dati:

```
%maschera di inserimento dati=====
dl=0.125; %lunghezza di ogni tratto con cui si suddivide i
conduttori
D=0.022; %diametro esterno dei conduttori
%correnti
ipicco=43000; %corrente di picco in un sistema trifase
ir=ipicco*sin(5*pi/12); %corrente nella fase R
is=ipicco*sin(5*pi/12-2*pi/3); %corrente nella fase S
it=ipicco*sin(5*pi/12-4*pi/3); %corrente nella fase T
%I=matrice in ingresso:
I=[...
    1    0    0    0    0    5.2    2.6    60    10    6    ir
    2    2.2  0    0    2.2    5.2    2.6    60    10    6    is
    3    4.4  0    0    4.4    5.2    2.6    60    10    6    it];
```

Come esempio si è preso sempre lo stesso guasto trifase simmetrico degli altri due programmi. Si sono poi presi tre conduttori in alluminio uguali equi spazati di 2.2 m con diametro $D = 0.022$ m, a cui corrisponde un peso per unità di lunghezza di:

$$p = \rho_{Al} \left(\frac{\pi D^2}{4} \right) g = 2700 \left(\frac{\pi 0.022^2}{4} \right) 9.81 \cong 10 \frac{N}{m}$$

Infatti, nella riga corrispondente, ovvero la nona, si è inserito il valore 10 per tutti e tre.

Dopo i dati segue una porzione del programma che li legge, ed associa ad ogni variabile di ingresso un nome. Prendendo il conduttore R si assegneranno i seguenti nomi con il pedice R. La lunghezza viene chiamata L_R , il punto iniziale $\mathbf{P0}_R$, il punto finale \mathbf{Pf}_R , il tiro H_R , il peso per unità di lunghezza p_R ed il numero di tratti N_R . Per gli altri conduttori basta cambiare il pedice con quello corrispondente, come si vede dalle istruzioni del programma:

```
%lettura dei dati=====
%conduttore R
LR=I(1,10);           %lunghezza totale conduttore conduttore R
P0R=I(1,2:1:4);      %punto iniziale in x,y,z conduttore R
PfR=I(1,5:1:7);     %punto finale in x,y,z conduttore R
HR=I(1,8);           %tiro del conduttore R
pR=I(1,9);           %peso conduttore R per unità di lunghezza
NR=size((dl:dl:LR),2); %numero di tratti

%conduttore S
LS=I(2,10);           %lunghezza totale conduttore conduttore S
POS=I(2,2:1:4);      %punto iniziale in x,y,z conduttore S
Pfs=I(2,5:1:7);     %punto finale in x,y,z conduttore S
HS=I(2,8);           %tiro del conduttore S
pS=I(2,9);           %peso conduttore S per unità di lunghezza
NS=size((dl:dl:LS),2); %numero di tratti

%conduttore T
LT=I(3,10);           %lunghezza totale conduttore conduttore T
P0T=I(3,2:1:4);      %punto iniziale in x,y,z conduttore T
Pft=I(3,5:1:7);     %punto finale in x,y,z conduttore T
HT=I(3,8);           %tiro del conduttore T
pT=I(3,9);           %peso conduttore T per unità di lunghezza
NT=size((dl:dl:LT),2); %numero di tratti
```

6.3. Parte del programma dedicata al calcolo

La prima cosa da calcolare è la forma dovuta alla sola forza peso, che è quella assunta dal conduttore prima del guasto. Successivamente, partendo da questa forma, verranno applicate le correnti quindi si calcolerà il campo magnetico e la forza magnetica che, unita alla forza peso, permetterà di ricavare una successiva disposizione del conduttore. I conduttori in questa nuova forma avranno diversi valori del campo magnetico e della forza, che dovranno essere ricalcolati per ricavarne un'altra disposizione ancora. Si procede in questo modo fino a quando non si raggiunge una forma che si discosti di molto poco dalla precedente, arrivando dunque ad una convergenza.

6.3.1. Calcolo della disposizione dovuta alla sola forza peso

Inizialmente si considera il conduttore disteso alla stessa altezza z del punto iniziale in direzione del punto finale. La posizione dei punti centrali la si inserisce in una matrice \mathbf{P} , in cui le colonne rappresentano i punti e le righe le coordinate rispettivamente x , y , z . Questo per ogni conduttore, quindi si avranno rispettivamente le matrici $\mathbf{P}_R, \mathbf{P}_S, \mathbf{P}_T$. Nel calcolarle è necessario conoscere la direzione del

punto finale, che si ottiene dalla differenza vettoriale tra \mathbf{Pf} e $\mathbf{P0}$. I vettori ottenuti per i tre conduttori da questa differenza sono chiamati rispettivamente: \mathbf{h}_R , \mathbf{h}_S , \mathbf{h}_T . Si fa tutto questo con le seguenti istruzioni:

```
%disposizione dovuta alla sola forza peso=====
%la forza peso è diretta lungo z senza inclinazioni

%Vettori lungo la direzione dei punti iniziali e finali

%conduttore R
hR=[PfR(1)-P0R(1) PfR(2)-P0R(2) PfR(3)-P0R(3)];
%conduttore S
hS=[Pfs(1)-P0S(1) Pfs(2)-P0S(2) Pfs(3)-P0S(3)];
%conduttore T
hT=[Pft(1)-P0T(1) Pft(2)-P0T(2) Pft(3)-P0T(3)];

%il versore è ricavabile dividendo per il rispettivo modulo:
%sqrt(h(1)*h(1)+h(2)*h(2))

%calcolo della matrice P[3 x N]:
%matrice P[3 x N] dei punti centrali presenti (con z=P0R(3)) nel
%conduttore = un punto si trova al centro di ogni tratto lungo dl:
%colonna: punto in esame
%righe: 1°e2°riga: coordinate x,y del punto in esame,
%3°riga: coordinata z del punto iniziale, uguale per tutti i punti

%conduttore R
PR=[...
    P0R(1)+((dl:dl:LR)-dl/2)*hR(1)/sqrt(hR(1)*hR(1)+hR(2)*hR(2))
    P0R(2)+((dl:dl:LR)-dl/2)*hR(2)/sqrt(hR(1)*hR(1)+hR(2)*hR(2))
    P0R(3)*ones(1,NR)];
%conduttore S
PS=[...
    P0S(1)+((dl:dl:LS)-dl/2)*hS(1)/sqrt(hS(1)*hS(1)+hS(2)*hS(2))
    P0S(2)+((dl:dl:LS)-dl/2)*hS(2)/sqrt(hS(1)*hS(1)+hS(2)*hS(2))
    P0S(3)*ones(1,NS)];
%conduttore T
PT=[...
    P0T(1)+((dl:dl:LT)-dl/2)*hT(1)/sqrt(hT(1)*hT(1)+hT(2)*hT(2))
    P0T(2)+((dl:dl:LT)-dl/2)*hT(2)/sqrt(hT(1)*hT(1)+hT(2)*hT(2))
    P0T(3)*ones(1,NT)];
```

Successivamente si crea una matrice \mathbf{V} , contenente per ogni tratto il vettore, che si chiama vettore intermedio, che congiunge il primo punto con il punto centrale di ciascun tratto. È quindi una matrice che contiene i vettori di ogni segmento, solo che il loro modulo è la metà della lunghezza dl ma non è un problema poiché basta moltiplicare per 2. La forza peso agente nel g -esimo tratto è quindi $-2p|\mathbf{V}(1:3,g)|$. Nelle prime 3 righe di \mathbf{V} stanno le componenti di questi vettori in x , y , z . Nelle ultime 3 righe si inseriscono le coordinate del punto finale di ogni segmento ottenuto sommando 2 volte il vettore corrispondente. Questi punti sono chiamati punti intermedi.

Il primo vettore intermedio di \mathbf{V} si calcola sottraendo al primo punto di \mathbf{P} il punto iniziale, si dovrebbe ottenere proprio il punto iniziale. Successivamente basta sommare sempre lo stesso vettore.

Ecco le istruzioni del programma per scrivere la matrice \mathbf{V} .

```

%calcolo della matrice V[6 x N]:

%colonna: tratto in esame

%1°-2°-3°riga: componenti x,y,z del vettore intermedio che congiunge
%il punto estremo precedente (quello all'inizio del tratto lungo dl)
%con il punto in esame (che è al centro del tratto lungo dl).
%la norma di esso è metà della lunghezza dl del tratto

%3°-4°-5°riga: coordinate x,y,z del punto estremo successivo
%ricavate grazie al vettore intermedio. Il primo punto estremo è P0

%conduttore R
VR=zeros(6,NR);
for g=1:NR
    %per ogni tratto
    if g==1
        %se il tratto è il primo
        VR(1:1:3,g)=PR(:,g)-P0R';           %vettore intermedio
        VR(4:1:6,g)=PR(:,g)+VR(1:1:3,g);   %punto intermedio
    else
        VR(1:1:3,g)=PR(:,g)-VR(4:1:6,g-1); %vettore intermedio
        VR(4:1:6,g)=PR(:,g)+VR(1:1:3,g);   %punto intermedio
    end
end

%conduttore S
VS=zeros(6,NS);
for g=1:NS
    %per ogni tratto
    if g==1
        %se il tratto è il primo
        VS(1:1:3,g)=PS(:,g)-P0S';           %vettore intermedio
        VS(4:1:6,g)=PS(:,g)+VS(1:1:3,g);   %punto intermedio
    else
        VS(1:1:3,g)=PS(:,g)-VS(4:1:6,g-1); %vettore intermedio
        VS(4:1:6,g)=PS(:,g)+VS(1:1:3,g);   %punto intermedio
    end
end

%conduttore T
VT=zeros(6,NT);
for g=1:NT
    %per ogni tratto
    if g==1
        %se il tratto è il primo
        VT(1:1:3,g)=PT(:,g)-P0T';           %vettore intermedio
        VT(4:1:6,g)=PT(:,g)+VT(1:1:3,g);   %punto intermedio
    else
        VT(1:1:3,g)=PT(:,g)-VT(4:1:6,g-1); %vettore intermedio
        VT(4:1:6,g)=PT(:,g)+VT(1:1:3,g);   %punto intermedio
    end
end
end

```

Dalla matrice V la forza può essere calcolata come sopra elencato, ovvero per ogni tratto si moltiplica per $-2p$ la norma delle prime tre righe, che coincide con $\frac{dl}{2}$. La forza peso ottenuta agisce solo lungo z , però la si considera comunque in tre componenti, contenute in matrici F_R, F_S, F_T dove il pedice indica il

conduttore. Le righe di queste matrici indicano le componenti della forza, mentre le colonne il punto centrale del segmento dove è applicata la forza. Le istruzioni sono le seguenti:

```
%conduttore con solo forza peso
%calcolo della forza peso

%matrice forza conduttore R
FR=zeros(3,NR);
for g=1:NR
    FR(3,g)=-2*pR*norm(VR(1:1:3,g));
end

%matrice forza conduttore S
FS=zeros(3,NS);
for g=1:NS
    FS(3,g)=-2*pS*norm(VS(1:1:3,g));
end

%matrice forza conduttore T
FT=zeros(3,NT);
for g=1:NT
    FT(3,g)=-2*pT*norm(VT(1:1:3,g));
end
```

Per il calcolo della disposizione dovuta alla forza peso, dovendola fare per i tre conduttore, è stato deciso di creare una function di nome appunto DISPOSIZIONEFP. Questa riceve come ingressi la matrice della forza, il punto iniziale e finale del conduttore, il suo tiro ipotizzato nella fase di riposo e la lunghezza dl . In uscita fornisce una matrice con dieci righe, e tante colonne quante il numero di tratti del conduttore.

Le prime tre righe contengono le coordinate dei punti centrali nella nuova disposizione. Questa sottomatrice la si chiama $P1$, poiché è la matrice P dopo il calcolo della forza peso. Dalla 4° riga alla 9° la matrice è identica alla matrice V , solo dopo il calcolo della forza peso e quindi, come per la P , questa sottomatrice la si chiama $V1$. L'ultima riga contiene la forza di trazione a cui è sottoposto ogni tratto.

Il numero di tratti è uguale al numero di colonne della matrice delle forze, la function utilizza questo fatto per ricavare N .

Successivamente si calcolano le forze complessive nelle tre direzioni, e le si raggruppano in un vettore **Ftot**. Le reazioni vincolari si ipotizzano concentrate tutte nel primo estremo e vengono chiamate rispettivamente per le tre direzioni: $Rx1$, $Ry1$, $Rz1$. Le istruzioni nella function per fare questi passaggi sono:

```
%n° di tratti dalla matrice della forza
N=size(F,2);

%definizione delle matrici impiegate
P1=zeros(3,N); %matrice P dopo la prima iterazione
V1=zeros(6,N); %matrice V dopo la prima iterazione
S1=zeros(1,N); %vettore S1 che contiene la trazione

%forza totale nelle tre direzioni
Ftot=zeros(3,1);
Ftot(1)=sum(F(1,:));
Ftot(2)=sum(F(2,:));
Ftot(3)=sum(F(3,:));
```

```

%reazione vincolare nel primo appoggio nelle tre direzioni
Rz1=-Ftot(3);
Ry1=-Ftot(2);
Rx1=-Ftot(1);

```

Ora si trova il versore \mathbf{v} con cui è orientato il tiro. Esso ha come estremi il punto finale ed iniziale, quindi basta farne la differenza delle coordinate e dividerle per la norma, come fatto nel programma principale.

```

%versore del tiro
v=(vh(1:1:3)-P0(1:1:3))/norm((vh(1:1:3)-P0(1:1:3)));

```

La function, cerca la disposizione che possiede il punto finale il più vicino possibile a quello fissato. Per far questo procede per tentativi, variando la reazione vincolare $Rz1$, solo questa poiché la forza peso agisce solo lungo l'asse z .

In generale un conduttore flessibile è in grado di sostenere tensioni interne solo di trazione e non di taglio. Per questo fatto, quando è sottoposto ad una carico meccanico, reagisce disponendosi all'equilibrio in modo da produrre solo tensioni interne di trazione. La function utilizza questa proprietà per ricavare la forma assunta dal conduttore.

Si parte dal punto iniziale, dove sono presenti la reazione vincolare ed il tiro, lo sforzo normale avrà stessa direzione della somma di essi ma verso opposto. Dunque il primo tratto è orientato nella stessa direzione di questo vettore somma. Il secondo segmento oltre a questo vede anche la forza applicata al primo tratto, e quindi sarà orientato nella stessa direzione del vettore somma del precedente con la forza del primo tratto. Il terzo vede la somma tra la reazione, il tiro e la forza applicata ai precedenti. Questo si vede bene in Figura 6.1, dove è solo presente la forza peso.

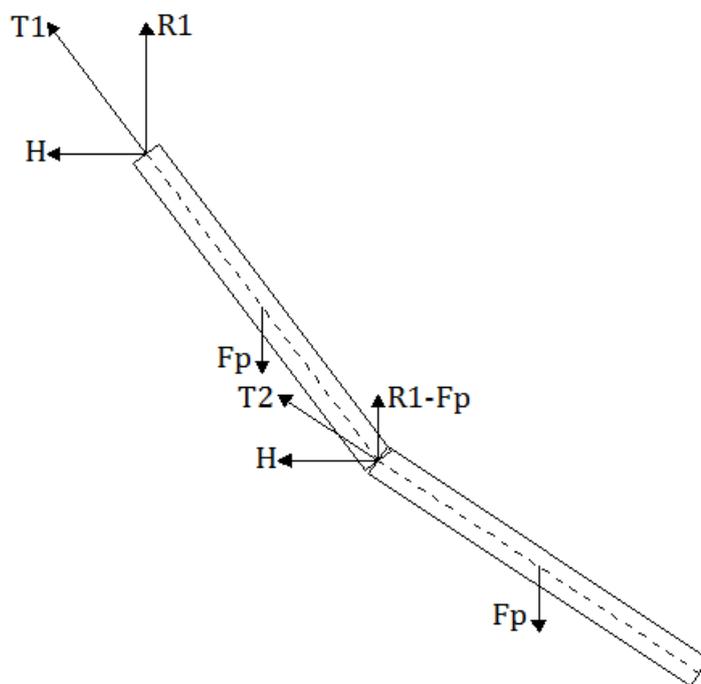


Figura 6.1 Disposizione dei tratti di un conduttore sottoposti alla sola forza peso

errore contenuto basterà scegliere piccola la quantità di cui si aumenta la reazione, però questo comporta un maggiore tempo di calcolo.

Si procede in questo modo per tutto il conduttore. Ovviamente il punto finale si trova nella posizione corretta solo se le reazioni vincolari sono corrette. Non conoscendole si procede a tentativi variando le componenti delle reazioni vincolari. Si parte dal valore nullo (come se fossero applicate tutte al secondo estremo) e si aumentano progressivamente di una quantità fino al valore massimo (come se fossero applicate tutte al primo estremo). Fatto questo, per ogni risultato si ricava l'errore, che è la distanza del punto finale da quello corretto. Si sceglie la soluzione che possiede il minore errore. Per avere

Ritornando alla disposizione della forza peso l'unica componente della reazione da variare è quella lungo l'asse z. Per modificarla la si moltiplica per un coefficiente kz , che deve essere uguale a zero inizialmente e uguale ad uno alla fine. Per ogni tentativo lo si aumenta di una quantità che si chiama ki . Da qui si trova il numero di tentativi che è l'inverso di quest'ultimo: $Nc = \frac{1}{ki}$. In realtà c'è un tentativo in più: quello con kz nullo.

```
%coefficiente ki che indica di quanto aumentare la reazione per
%i tentativi successivi
ki=0.05;
%numero di tentativi
Nc=1/ki;
```

Successivamente si definisce una matrice E che contenga l'errore in funzione del coefficiente kz . Ha un numero di righe uguale al numero di tentativi Nc e due colonne. La prima colonna per kz e la seconda per l'errore che si chiama e .

```
%matrice E con l'errore in funzione del coefficiente kz
%(l'errore è la distanza tra il punto finale indicato e quello
%calcolato)

E=zeros(Nc+1,2);
```

Per ogni segmento, si chiamano le componenti della forza di trazione rispettivamente: T_x , T_y , T_z . Esse sono la somma tra le reazioni vincolari, le forze applicate ai tratti precedenti ed il tiro. Dopo si ricava il modulo r e gli angoli di orientamento delle coordinate sferiche θ e φ . L'angolo θ è quello che il vettore forma con l'asse z, mentre l'angolo φ è quello che il vettore forma con l'asse x. Conoscendo questo è possibile costruire le matrici $P1$, $V1$. Sapendo le coordinate del punto finale è possibile ricavare la distanza da quello fornito nei dati, che sarebbe quello corretto. Questa distanza la si chiama errore e e la si inserisce nella matrice E nella corrispondente posizione del kz impiegato. Ecco le istruzioni per fare tutto questo:

```
for z=1:(Nc+1)

%calcolo della nuova disposizione

%coefficiente che permette di trovare la reazione
%(posto inizialmente, per z=1, kz=0)
kz=(z-1)*ki;
%calcolo nuova reazione vincolare lungo z
Rz=Rz1*kz;

for g=1:N
    %per ogni tratto

    %modulo della trazione nel tratto g-esimo lungo l'asse x
    Tx=Rx1+sum(F(1,1:1:g-1))-H*v(1);
    %modulo della trazione nel tratto g-esimo lungo l'asse y
    Ty=Ry1+sum(F(2,1:1:g-1))-H*v(2);
    %modulo della trazione nel tratto g-esimo lungo l'asse z
    Tz=Rz+sum(F(3,1:1:g-1))-H*v(3);

    %modulo della trazione nel tratto g-esimo
    r=sqrt(Tz*Tz+Ty*Ty+Tx*Tx);
```

```

%calcolo degli angoli in cui agisce la trazione nel tratto
teta=acos(Tz/r); %angolo rispetto all'asse z
fi=atan2(Ty,Tx); %angolo rispetto all'asse x

%calcolo del vettore intermedio per ogni tratto
%componente x del vettore
V1(1,g)=- (dl/2)* (sin(teta)*cos(fi));
%componente y del vettore
V1(2,g)=- (dl/2)*sin(teta)*sin(fi);
%componente z del vettore
V1(3,g)=- (dl/2)*cos(teta);

if g==1 %se è il primo tratto usa P0
    P1(:,g)=P0'+V1(1:1:3,g); %punti centrali tratto
    V1(4:1:6,g)=P0'+2*V1(1:1:3,g); %punti intermedi tratto
else
    P1(:,g)=V1(4:1:6,g-1)+V1(1:1:3,g); %punti centrali tratto
    V1(4:1:6,g)=P1(:,g)+V1(1:1:3,g); %punti intermedi tratto
end
end

%calcolo della distanza lungo z
e=norm(V1(4:1:6,N)-[Pf(1) Pf(2) Pf(3)]');
E(z,:)= [kz e];

end

```

Dalla matrice **E** si estrae il valore minimo dell'errore ed il relativo *kz*.

```

%estrazione del valore di kz che ha errore minore
emin=min(E(:,2));
%indice a cui si trova l'errore minore
ind=find(E(:,2) == emin);
%coefficiente di reazione per l'errore minore
kz=E(ind(1),1);

```

Ora si ricalcola la disposizione utilizzando quel valore di *kz* trovato.

```

%calcola la disposizione con il minor errore=====
%calcolo reazione vincolare lungo z
Rz=Rz1*kz;

for g=1:N
    %per ogni tratto

    %modulo della trazione nel tratto g-esimo lungo l'asse x
    Tx=Rx1+sum(F(1,1:1:g-1))-H*v(1);
    %modulo della trazione nel tratto g-esimo lungo l'asse y
    Ty=Ry1+sum(F(2,1:1:g-1))-H*v(2);
    %modulo della trazione nel tratto g-esimo lungo l'asse z
    Tz=Rz+sum(F(3,1:1:g-1))-H*v(3);

```

```

%modulo della trazione nel tratto g-esimo
r=sqrt (Tz*Tz+Ty*Ty+Tx*Tx);
S1(g)=r;
%calcolo degli angoli in cui agisce la trazione nel tratto
teta=acos (Tz/r); %angolo rispetto all'asse z
fi=atan2 (Ty,Tx); %angolo rispetto all'asse x

%calcolo del vettore intermedio per ogni tratto
%componente x del vettore
V1 (1,g)=- (dl/2) * (sin (teta) *cos (fi));
%componente y del vettore
V1 (2,g)=- (dl/2) *sin (teta) *sin (fi);
%componente z del vettore
V1 (3,g)=- (dl/2) *cos (teta);

if g==1 %se è il primo tratto usa P0
    P1 (:,g)=P0'+V1 (1:1:3,g); %punti centrali tratto
    V1 (4:1:6,g)=P0'+2*V1 (1:1:3,g); %punti intermedi tratto
else
    P1 (:,g)=V1 (4:1:6,g-1)+V1 (1:1:3,g); %punti centrali tratto
    V1 (4:1:6,g)=P1 (:,g)+V1 (1:1:3,g); %punti intermedi tratto
end
end
end

```

L'ultima cosa da fare nella function è di assegnare l'uscita, tramite la composizione delle sottomatrici ottenute.

```

%assegnazione dell'uscita
P1V1S1=[...
    P1
    V1
    S1];

```

Si nota che la parte di matrice che dovrebbe contenere la trazione è rimasta vuota, questo perché la trazione dovuta alla sola forza peso non è interessante in quanto molto minore di quella durante le correnti di guasto.

Ritornando al programma principale, si elencano ora le istruzioni per ricavare la forma assunta dai conduttori per effetto della sola forza peso utilizzando la function appena scritta:

```

%calcolo della disposizione con solo forza peso

%conduttore R
P1V1S1R=DISPOSIZIONEFP (FR, P0R, PfR, HR, dl);
%divisione delle sottomatrici
P1R=P1V1S1R (1:1:3, :);
V1R=P1V1S1R (4:1:9, :);

%conduttore S
P1V1S1S=DISPOSIZIONEFP (FS, P0S, PfS, HS, dl);
%divisione delle sottomatrici
P1S=P1V1S1S (1:1:3, :);
V1S=P1V1S1S (4:1:9, :);

```

```

%conduttore T
P1V1S1T=DISPOSIZIONEFP (FT, P0T, PfT, HT, dl) ;
%divisione delle sottomatrici
P1T=P1V1S1T(1:1:3, :);
V1T=P1V1S1T(4:1:9, :);

```

Per verificare l'attendibilità del risultato, si considera la trazione solo (per questa volta) lungo conduttore R dovuta alla sola forza peso. Questo andamento dovrebbe essere lo stesso in tutti e tre i conduttori, lo si ricava inserendo subito dopo delle righe di comando provvisorie qui riportate:

```

figure(2)
hold on
grid on
plot((dl:dl:LR)-dl/2, P1V1S1R(10, :))
title('Trazione conduttore R')
ylabel('Trazione [N]')
xlabel('lunghezza [m]')
% plot((dl:dl:LR)-dl/2, P1V1S1S(10, :), 'r')
% plot((dl:dl:LR)-dl/2, P1V1S1T(10, :), 'c')

```

Il grafico ottenuto è del conduttore R, che è lo stesso per gli altri due ed è il seguente di Figura 6.2.

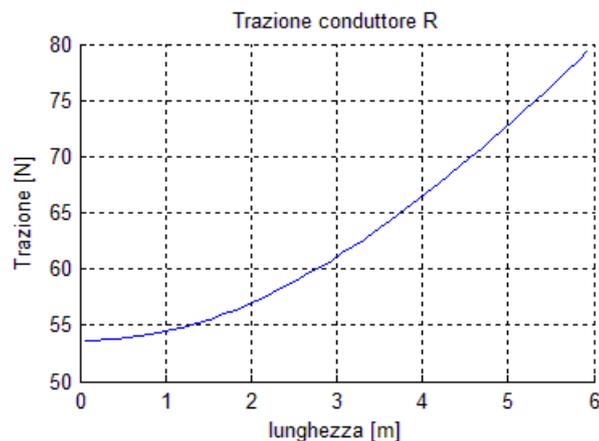


Figura 6.2 Andamento della trazione dovuta alla forza peso nel conduttore R

Come si può vedere la trazione massima è sul secondo estremo e vale $79.45 \frac{N}{m^2}$ mentre la trazione minima è nel primo e vale $53.67 \frac{N}{m^2}$. Il programma, infatti, ricava un $kz = 0.45$.

Si va a verificare ora se i valori di trazione sono corretti. Il peso totale del conduttore lo si ricava moltiplicando il peso per unità di lunghezza per la sua lunghezza:

$$P_{totR} = p_R L_R = 10 \cdot 6 = 60 \text{ N}$$

analizzando il secondo estremo la reazione vincolare presente in esso è di

$$Rz2_R = (1 - kz)P_{totR} = 0.55 \cdot 60 = 33 \text{ N}$$

inoltre è presente il tiro del conduttore in direzione del secondo estremo e di modulo uguale a 60 N. La risultante di queste due forze è la trazione del primo tratto. Per ricavarla ci si aiuta guardando la Figura 6.3.

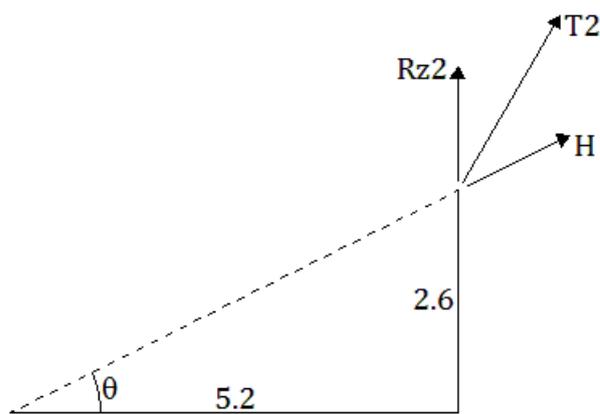


Figura 6.3 Trazione risultante nel primo tratto data dalla somma vettoriale del tiro con la reazione vincolare

Si procede scomponendo il vettore del tiro in componenti lungo y e lungo z:

$$H_y = H \cos \theta = 60 \cdot \frac{5.2}{\sqrt{5.2^2 + 2.6^2}} = 53.67 \text{ N}$$

$$H_z = H \sin \theta = 60 \cdot \frac{2.6}{\sqrt{5.2^2 + 2.6^2}} = 26.83 \text{ N}$$

alla componente H_z si deve sommare la $Rz2_R$ per ottenere così le componenti del vettore risultante, da cui è possibile ricavare il modulo.

$$T2 = \sqrt{H_y^2 + (H_z + Rz2_R)^2} = \sqrt{53.67^2 + 59.85^2} = 80.39 \text{ N}$$

Si nota che il valore della trazione nel secondo estremo così calcolato è molto vicino a quello dato dal programma: il piccolo scostamento è dovuto ad errori di approssimazione del conduttore in tratti. È possibile quindi dire che i risultati del programma sono attendibili.

6.3.2. Calcolo del campo magnetico, della forza magnetica e della disposizione successiva

Per il calcolo del campo magnetico si utilizza la function scritta per il programma precedente, la FBP. Per ogni tratto di conduttore il campo magnetico è dovuto alla somma dei contributi di tutti gli altri tratti. In questo caso, oltre ai tratti degli altri conduttori, occorre considerare anche quelli nello stesso conduttore in quanto non è possibile affermare che siano allineati, come invece lo era per le sbarre.

Come prima cosa si definiscono le matrici contenenti il campo magnetico per ogni conduttore, rispettivamente: \mathbf{B}_R , \mathbf{B}_S , \mathbf{B}_T . Le righe indicano le componenti in x, y, z mentre le colonne si riferiscono ai tratti del conduttore. Poi, per ogni conduttore si sommano i contributi dei tratti dei vari componenti dal primo conduttore all'ultimo. Successivamente si calcola la forza magnetica per ogni segmento facendo il prodotto vettoriale tra la corrente e campo magnetico e moltiplicandolo per la lunghezza dl . Ovviamente la forza così ottenuta deve essere sommata a quella di prima, così si considera anche la forza peso.

```
%calcolo del campo magnetico, della forza magnetica e della=====
%disposizione successiva

%matrici del campo per i tre conduttori
BR=zeros(3,NR);
BS=zeros(3,NS);
BT=zeros(3,NT);

%CONDUTTORE R
for gr=1:NR
    %campo magnetico
    %campo generato dal conduttore R
    for grr=1:NR
        if grr==gr
            else
```

```

        BR(1:1:3,gr)=BR(1:1:3,gr)+FBP(P1R(1:1:3,gr),...
            P1R(1:1:3,grr),V1R(1:1:3,grr)/(dl/2),I(1,11),dl);
    end
end
%campo generato dal conduttore S
for gs=1:NS
    BR(1:1:3,gr)=BR(1:1:3,gr)+FBP(P1R(1:1:3,gr),...
        P1S(1:1:3,gs),V1S(1:1:3,gs)/(dl/2),I(2,11),dl);
end
%campo generato dal conduttore T
for gt=1:NT
    BR(1:1:3,gr)=BR(1:1:3,gr)+FBP(P1R(1:1:3,gr),...
        P1T(1:1:3,gt),V1T(1:1:3,gt)/(dl/2),I(3,11),dl);
end
%forza magnetica
FR(1:1:3,gr)=FR(1:1:3,gr)+I(1,11)*dl*...
    cross(V1R(1:1:3,gr)/(dl/2),BR(1:1:3,gr));
end

%CONDUTTORE S
for gs=1:NS
    %campo magnetico
    %campo generato dal conduttore R
    for gr=1:NR
        BS(1:1:3,gs)=BS(1:1:3,gs)+FBP(P1S(1:1:3,gs),...
            P1R(1:1:3,gr),V1R(1:1:3,gr)/(dl/2),I(1,11),dl);
    end
    %campo generato dal conduttore S
    for gss=1:NS
        if gss==gs
            else
                BS(1:1:3,gs)=BS(1:1:3,gs)+FBP(P1S(1:1:3,gs),...
                    P1S(1:1:3,gss),V1S(1:1:3,gss)/(dl/2),I(2,11),dl);
            end
        end
    end
    %campo generato dal conduttore T
    for gt=1:NT
        BS(1:1:3,gs)=BS(1:1:3,gs)+FBP(P1S(1:1:3,gs),...
            P1T(1:1:3,gt),V1T(1:1:3,gt)/(dl/2),I(3,11),dl);
    end
    %forza magnetica
    FS(1:1:3,gs)=FS(1:1:3,gs)+I(2,11)*dl*...
        cross(V1S(1:1:3,gs)/(dl/2),BS(1:1:3,gs));
end

%CONDUTTORE T
for gt=1:NT
    %campo magnetico
    %campo generato dal conduttore R
    for gr=1:NR
        BT(1:1:3,gt)=BT(1:1:3,gt)+FBP(P1T(1:1:3,gt),...
            P1R(1:1:3,gr),V1R(1:1:3,gr)/(dl/2),I(1,11),dl);
    end
end

```

```

%campo generato dal conduttore S
for gs=1:NS
    BT(1:1:3,gt)=BT(1:1:3,gt)+FBP(P1T(1:1:3,gt),...
        P1S(1:1:3,gs),V1S(1:1:3,gs)/(dl/2),I(2,11),dl);
end
%campo generato dal conduttore T
for gtt=1:NT
    if gtt==gt
    else
        BT(1:1:3,gt)=BT(1:1:3,gt)+FBP(P1T(1:1:3,gt),...
            P1T(1:1:3,gtt),V1T(1:1:3,gtt)/(dl/2),I(3,11),dl);
    end
end
%forza magnetica
FT(1:1:3,gt)=FT(1:1:3,gt)+I(3,11)*dl*...
    cross(V1T(1:1:3,gt)/(dl/2),BT(1:1:3,gt));
end

```

Ora che si conosce la forza su ogni tratto di ogni conduttore si procede calcolando la nuova disposizione. È necessario farlo per ogni conduttore, dunque si è scelto di scrivere una function, come per la disposizione della forza peso solo che deve essere in grado di ricavare la disposizione per qualsiasi forza e non solo quella lungo l'asse z dovuta al peso. Questa function la si chiama **DISPOSIZIONE**.

Ha quasi la stessa struttura della **DISPOSIZIONEFP**. Gli ingressi sono gli stessi, ovvero sono: la matrice della forza, il punto iniziale e finale del conduttore, il suo tiro ipotizzato nella fase di riposo e la lunghezza dl . Anche la matrice in uscita è la stessa, che contiene ordinatamente le sottomatrici **P1**, **V1** ed la forza di trazione per ogni tratto.

Poi, sempre come nella **DISPOSIZIONEFP**, si ricava il numero tratti N dalla matrice delle forze, si calcolano le forze complessive nelle tre direzioni, il versore del tiro \mathbf{v} e si definiscono Nc , ki ed \mathbf{E} . In questo caso le forze possono essere in tutte le direzioni, quindi occorre procedere per tentativi variano tutte le reazioni vincolari. Si utilizzano a tale scopo tre coefficienti kx , ky , kz che moltiplicheranno la forza complessiva per ottenere la reazione nel primo appoggio. Oltre alle reazioni, anche il tiro varia: se la forza complessiva aumenta, cresce anche il tiro rispetto alla posizione di riposo. Per tenerne conto si moltiplica il tiro iniziale per un coefficiente kh , che si ipotizza inizialmente non superiore alle 40 volte. Tutti i coefficienti kx , ky , kz , kh sono contenuti nella matrice \mathbf{E} . Le istruzioni per la prima parte della function sono quindi le seguenti.

```

%n° di tratti dalla matrice della forza
N=size(F,2);

%definizione delle matrici impiegate
P1=zeros(3,N); %matrice P dopo la prima iterazione
V1=zeros(6,N); %matrice V dopo la prima iterazione
S1=zeros(1,N); %vettore S1 che contiene la trazione

%forza totale nelle tre direzioni
Ftot=zeros(3,1);
Ftot(1)=sum(F(1,:));
Ftot(2)=sum(F(2,:));
Ftot(3)=sum(F(3,:));

%reazione vincolare nel primo appoggio nelle tre direzioni
Rz1=-Ftot(3);
Ry1=-Ftot(2);
Rx1=-Ftot(1);

```

```

%versore nel piano x,y,z del tiro
v=(vh(1:1:3)-P0(1:1:3))/norm((vh(1:1:3)-P0(1:1:3)));

%coefficiente ki che indica di quanto aumentare la reazione per
%i tentativi successivi
ki=0.05;
%numero di tentativi
Nc=1/ki;

%matrice E con l'errore in funzione dei coefficienti kx ky kz kh e
%(l'errore è la distanza tra il punto finale indicato e quello
%calcolato)
E=zeros((Nc+1)*(Nc+1)*(Nc+1)*(40),5);
ind=0; %indice matrice E per i cicli

```

Il termine *ind* indica la riga corrispondente della matrice **E** ed è diverso per ogni combinazione dei coefficienti. Per trovare la disposizione con minor errore occorre appunto procedere per tentativi, calcolandola per ogni possibile combinazione dei coefficienti *kx*, *ky*, *kz*, *kh*. I primi tre aumentano di una quantità *ki* da zero ad uno, mentre per l'ultimo si è scelto di farlo variare da 1 al valore finale 40, aumentandolo di una unità alla volta. Per far questo, dato che i coefficienti sono appunto 4, occorrono 4 cicli for in cui all'interno sia presente il calcolo della disposizione. Alla fine di ogni calcolo della disposizione si aumenta di 1 il termine *ind* e nella corrispondente riga della matrice **E** si salvano i valori di *kx*, *ky*, *kz*, *kh* ed *e*. Ecco le istruzioni per far questo:

```

for x=1:(Nc+1)
%per ogni coefficiente di reazione lungo l'asse x posto inizialmente
%nullo per avere zero al primo tentativo
kx=(x-1)*ki

    for y=1:(Nc+1)
%per ogni coefficiente di reazione lungo l'asse y posto
%inizialmente nullo per avere zero al primo tentativo
ky=(y-1)*ki;

        for z=1:(Nc+1)
%per ogni coefficiente di reazione lungo l'asse z posto
%inizialmente nullo per avere zero al primo tentativo
kz=(z-1)*ki;

            for hh=1:40
%per ogni coefficiente di tiro posto inizialmente
%uguale ad uno per avere il tiro ipotizzato
kh=hh;

                %calcolo reazioni vincolari primo estremo e tiro

                Rx=Rx1*kx;
                Ry=Ry1*ky;
                Rz=Rz1*kz;
                Rh=H*kh;

                %calcolo disposizione con nuova reazione vincolare e tiro
                for g=1:N
%per ogni tratto

```

```

%modulo della trazione nel tratto g-esimo lungo l'asse x
Tx=Rx+sum(F(1,1:1:g-1))-Rh*v(1);
%modulo della trazione nel tratto g-esimo lungo l'asse y
Ty=Ry+sum(F(2,1:1:g-1))-Rh*v(2);
%modulo della trazione nel tratto g-esimo lungo l'asse z
Tz=Rz+sum(F(3,1:1:g-1))-Rh*v(3);

%modulo della trazione nel tratto g-esimo
r=sqrt(Tz*Tz+Ty*Ty+Tx*Tx);
S1(g)=r;
%calcolo degli angoli in cui agisce la trazione nel
%tratto
teta=acos(Tz/r); %angolo rispetto all'asse z
fi=atan2(Ty,Tx); %angolo rispetto all'asse x

%calcolo del vettore intermedio per ogni tratto
%componente x del vettore
V1(1,g)=- (dl/2) * (sin(teta) * cos(fi));
%componente y del vettore
V1(2,g)=- (dl/2) * sin(teta) * sin(fi);
%componente z del vettore
V1(3,g)=- (dl/2) * cos(teta);

if g==1
    %se è il primo tratto usa P0
    P1(:,g)=P0'+V1(1:1:3,g); %punti centrali
    V1(4:1:6,g)=P0'+2*V1(1:1:3,g); %punti intermedi
else
    P1(:,g)=V1(4:1:6,g-1)+V1(1:1:3,g); %punti centrali
    V1(4:1:6,g)=P1(:,g)+V1(1:1:3,g); %punti intermedi
    P1(:,g)=V1(4:1:6,g-1)+V1(1:1:3,g); %punti centrali
    V1(4:1:6,g)=P1(:,g)+V1(1:1:3,g); %punti intermedi
end

end

%calcolo dell'errore della distanza lungo z
e=norm(V1(4:1:6,N)-[vh(1) vh(2) vh(3)]');
ind=ind+1; %riga della matrice e in cui inserire l'errore
E(ind,:)=[kx ky kz kh e];

end

```

Al termine, come per la function precedente, si estraggono i coefficienti corrispondenti al minor errore e si calcola la loro disposizione la si scrive in uscita.

```

%estrazione dei coefficienti kx ky kz kh che producono errore minore
emin=min(E(:,5))
%indice a cui si trova l'errore minore
ind=find(E(:,5) == emin);

kx=E(ind(1),1)
ky=E(ind(1),2)
kz=E(ind(1),3)
kh=E(ind(1),4)

```

```

%calcola la disposizione con il minor errore=====

%reazioni
Rx=Rx1*kx;
Ry=Ry1*ky;
Rz=Rz1*kz;
Rh=H*kh;

%calcolo disposizione con nuova reazione vincolare e tiro

for g=1:N
    %per ogni tratto

    %modulo della trazione nel tratto g-esimo lungo l'asse x
    Tx=Rx+sum(F(1,1:1:g-1))-Rh*v(1);
    %modulo della trazione nel tratto g-esimo lungo l'asse y
    Ty=Ry+sum(F(2,1:1:g-1))-Rh*v(2);
    %modulo della trazione nel tratto g-esimo lungo l'asse z
    Tz=Rz+sum(F(3,1:1:g-1))-Rh*v(3);

    %modulo della trazione nel tratto g-esimo
    r=sqrt(Tz*Tz+Ty*Ty+Tx*Tx);

    %calcolo degli angoli in cui agisce la trazione nel tratto
    teta=acos(Tz/r); %angolo rispetto all'asse z
    fi=atan2(Ty,Tx); %angolo rispetto all'asse x

    %calcolo del vettore intermedio per ogni tratto
    %componente x del vettore
    V1(1,g)=- (dl/2) * (sin(teta) *cos(fi));
    %componente y del vettore
    V1(2,g)=- (dl/2) *sin(teta) *sin(fi);
    %componente z del vettore
    V1(3,g)=- (dl/2) *cos(teta);

    if g==1
        P1(:,g)=P0'+V1(1:1:3,g); %se è il primo tratto usa P0
        V1(4:1:6,g)=P0'+2*V1(1:1:3,g); %punti centrali tratto
        %punti intermedi tratto
    else
        P1(:,g)=V1(4:1:6,g-1)+V1(1:1:3,g); %punti centrali tratto
        V1(4:1:6,g)=P1(:,g)+V1(1:1:3,g); %punti intermedi tratto
    end

    P1V1S1=[...
        P1
        V1
        S1];

end

```

Con questa function si può anche ricavare la distribuzione dovuta alla forza peso, ma si è scelto di non farlo continuando ad usare la precedente a questo scopo. Il motivo è che la function precedente richiede molto meno tempo di calcolo in quanto fa variare un solo coefficiente.

Ora che si ha la function, si può applicarla ai tre conduttori nel programma principale. Nel farlo si cambia nome alle matrici contenenti i punti del conduttore da **P1**, **V1** a **P2**, **V2**. Questo perché si tratta della seconda iterazione e non si deve confondere con la prima.

```
%ricalcolo della posizione=====
%CONDUTTORE R
P2V2R=DISPOSIZIONE (FR, P0R, PfR, HR, dl) ;
P2R=P2V2R (1:1:3, :) ;
V2R=P2V2R (4:1:9, :) ;
%CONDUTTORE S
P2V2S=DISPOSIZIONE (FS, P0S, PfS, HS, dl) ;
P2S=P2V2S (1:1:3, :) ;
V2S=P2V2S (4:1:9, :) ;
%CONDUTTORE T
P2V2T=DISPOSIZIONE (FT, P0T, PfT, HT, dl) ;
P2T=P2V2T (1:1:3, :) ;
V2T=P2V2T (4:1:9, :) ;
```

Fatto questo, per verificare il risultato si traccia un grafico tridimensionale. In esso si inseriscono le posizioni dei tre conduttori nelle condizioni considerate, Quali di solo alla forza peso e con forza peso e magnetica. Le righe di comando per i grafici sono:

```
figure(1)
hold on
grid on

%conduttore R
%grafico disposizione solo forza peso
plot3(P1R(1,:),P1R(2,:),P1R(3:),'c','LineWidth',2)
%grafico disposizione forza peso e magnetica
plot3(P2R(1,:),P2R(2,:),P2R(3:),'r','LineWidth',2)

%conduttore S
%grafico disposizione solo forza peso
plot3(P1S(1,:),P1S(2,:),P1S(3:),'c','LineWidth',2)
%grafico disposizione forza peso e magnetica
plot3(P2S(1,:),P2S(2,:),P2S(3:),'r','LineWidth',2)
%conduttore T
%grafico disposizione solo forza peso
plot3(P1T(1,:),P1T(2,:),P1T(3:),'c','LineWidth',2)
%grafico disposizione forza peso e magnetica
plot3(P2T(1,:),P2T(2,:),P2T(3:),'r','LineWidth',2)
```

Il grafico ottenuto è in Figura 6.4.

In questo punto del programma non si considera la trazione, perché non è quella giusta in quanto la forza magnetica sui conduttori è stata calcolata nella posizione di riposo: il conduttore ora si è disposto in un'altra posizione e il campo è diverso lungo esso e di conseguenza anche la forza. Occorre quindi ricalcolare il campo magnetico e la forza. Di conseguenza la forza calcolata produrrà un'altra disposizione, con diverso campo e forza e così via. Nel programma si continuerà a ricalcolare la disposizione successiva fino a che, quella nuova si discosti di una quantità trascurabile rispetto a quella ricavata precedentemente, ovvero quando si raggiunge una convergenza. Si è visto sperimentalmente che si ottiene una posizione abbastanza corretta dopo circa sei iterazioni. È possibile scegliere un numero di iterazioni maggiore per avere più precisione, ma si ha lo svantaggio di aumentare il tempo di calcolo.

Per eseguire le iterazioni si utilizza un ciclo for con un contatore *qq*, indicante il numero dell'iterazione. Procedendo, all'inizio di ciascuna iterazione si trascrive il contenuto delle matrici **P2**, **V2** (ottenute dalla

precedente), nelle matrici $P1$, $V1$ per ogni conduttore. Il contenuto di quest'ultime viene perso, ma non è importante perché si tratta della posizione ricavata due cicli precedenti e dunque non corretta. Ecco le istruzioni per questo:

```
% iterazioni successive=====
for qq=1:6
%iterazione q-esima
%riscrizione delle matrici di posizione
%conduttore R
P1R=P2R;
V1R=V2R;
%conduttore S
P1S=P2S;
V1S=V2S;
%conduttore T
P1T=P2T;
V1T=V2T;
```

Per ogni ciclo, le matrici dove si salvano i valori del campo magnetico e della forza ovvero F e B di ciascun conduttore sono sempre le stesse. È necessario dunque azzerarle ad ogni inizio di iterazione utilizzando queste righe di comando:

```
%azzeramento delle matrici della forza e del campo magnetico
%matrice forza e campo magnetico hanno le stesse dimensioni per ogni
%conduttore: Le righe sono le componenti x,y,z, le colonne i tratti
%conduttore R
FR=zeros(3,NR);
BR=zeros(3,NR);
%conduttore S
FS=zeros(3,NS);
BS=zeros(3,NS);
%conduttore T
FT=zeros(3,NT);
BT=zeros(3,NT);
```

Azzerando il contenuto della matrice della forza viene perso il contributo della forza peso, che è necessario ricalcolarlo subito dopo allo stesso modo di come fatto in precedenza:

```
%ricalcolo della forza peso
%conduttore R
for g=1:NR
FR(3,g)=-2*pR*norm(V1R(1:1:3,g));
end
%conduttore S
for g=1:NS
FS(3,g)=-2*pS*norm(V1S(1:1:3,g));
end
%conduttore T
for g=1:NT
FT(3,g)=-2*pT*norm(V1T(1:1:3,g));
end
```

Fatto questo le righe di comando per il calcolo del campo magnetico, della forza e della disposizione successiva sono esattamente le stesse di quelle usate per la seconda iterazione, e sono riportate qui di seguito:

```

%CONDUTTORE R
for gr=1:NR
    %campo generato dal conduttore R
    for grr=1:NR
        if grr==gr
        else
            BR(1:1:3,gr)=BR(1:1:3,gr)+FBP(P1R(1:1:3,gr),...
                P1R(1:1:3,grr),V1R(1:1:3,grr)/(dl/2),I(1,11),dl);
        end
    end
    %campo generato dal conduttore S
    for gs=1:NS
        BR(1:1:3,gr)=BR(1:1:3,gr)+FBP(P1R(1:1:3,gr),...
            P1S(1:1:3,gs),V1S(1:1:3,gs)/(dl/2),I(2,11),dl);
    end
    %campo generato dal conduttore T
    for gt=1:NT
        BR(1:1:3,gr)=BR(1:1:3,gr)+FBP(P1R(1:1:3,gr),...
            P1T(1:1:3,gt),V1T(1:1:3,gt)/(dl/2),I(3,11),dl);
    end
    FR(1:1:3,gr)=FR(1:1:3,gr)+I(1,11)*dl*...
        cross(V1R(1:1:3,gr)/(dl/2),BR(1:1:3,gr));
end

%CONDUTTORE S
for gs=1:NS
    %campo generato dal conduttore R
    for gr=1:NR
        BS(1:1:3,gs)=BS(1:1:3,gs)+FBP(P1S(1:1:3,gs),...
            P1R(1:1:3,gr),V1R(1:1:3,gr)/(dl/2),I(1,11),dl);
    end
    %campo generato dal conduttore S
    for gss=1:NS
        if gss==gs
        else
            BS(1:1:3,gs)=BS(1:1:3,gs)+FBP(P1S(1:1:3,gs),...
                P1S(1:1:3,gss),V1S(1:1:3,gss)/(dl/2),I(2,11),dl);
        end
    end
    %campo generato dal conduttore T
    for gt=1:NT
        BS(1:1:3,gs)=BS(1:1:3,gs)+FBP(P1S(1:1:3,gs),...
            P1T(1:1:3,gt),V1T(1:1:3,gt)/(dl/2),I(3,11),dl);
    end
    FS(1:1:3,gs)=FS(1:1:3,gs)+I(2,11)*dl*...
        cross(V1S(1:1:3,gs)/(dl/2),BS(1:1:3,gs));
end

```

```

%CONDUTTORE T
for gt=1:NT
    %campo generato dal conduttore R
    for gr=1:NR
        BT(1:1:3,gt)=BT(1:1:3,gt)+FBP(P1T(1:1:3,gt),...
            P1R(1:1:3,gr),V1R(1:1:3,gr)/(dl/2),I(1,11),dl);
    end
    %campo generato dal conduttore S
    for gs=1:NS
        BT(1:1:3,gt)=BT(1:1:3,gt)+FBP(P1T(1:1:3,gt),...
            P1S(1:1:3,gs),V1S(1:1:3,gs)/(dl/2),I(2,11),dl);
    end
    %campo generato dal conduttore T
    for gtt=1:NT
        if gtt==gt
            else
                BT(1:1:3,gt)=BT(1:1:3,gt)+FBP(P1T(1:1:3,gt),...
                    P1T(1:1:3,gtt),V1T(1:1:3,gtt)/(dl/2),I(3,11),dl);
            end
        end
        FT(1:1:3,gt)=FT(1:1:3,gt)+I(3,11)*dl*...
            cross(V1T(1:1:3,gt)/(dl/2),BT(1:1:3,gt));
    end
end

%ricalcòlo della posizione
%CONDUTTORE R
P2V2S2R=DISPOSIZIONE(FR,P0R,PfR,HR,dl);
P2R=P2V2S2R(1:1:3,:);
V2R=P2V2S2R(4:1:9,:);
%CONDUTTORE S
P2V2S2S=DISPOSIZIONE(FS,P0S,PfS,HS,dl);
P2S=P2V2S2S(1:1:3,:);
V2S=P2V2S2S(4:1:9,:);
%CONDUTTORE T
P2V2S2T=DISPOSIZIONE(FT,P0T,PfT,HT,dl);
P2T=P2V2S2T(1:1:3,:);
V2T=P2V2S2T(4:1:9,:);
end

```

Ora si riprende il grafico della posizioni nello spazio e si aggiunge la posizione ottenuta dall'ultima iterazione. Questo sia per verificare il risultato e sia per osservare quanto la posizione finale sia diversa da quella ricavata inizialmente considerando la posizione dovuta alla sola forza peso. Le istruzioni per il grafico sono le seguenti:

```

%grafico della posizione finale=====
figure(1)
hold on
grid on
title('conduttori nello spazio')
plot3(P2R(1,:),P2R(2,:),P2R(3:,:), 'k', 'LineWidth', 2)
plot3(P2S(1,:),P2S(2,:),P2S(3:,:), 'k', 'LineWidth', 2)
plot3(P2T(1,:),P2T(2,:),P2T(3:,:), 'k', 'LineWidth', 2)

```

Il grafico completo è qui di seguito riportato in Figura 6.4.

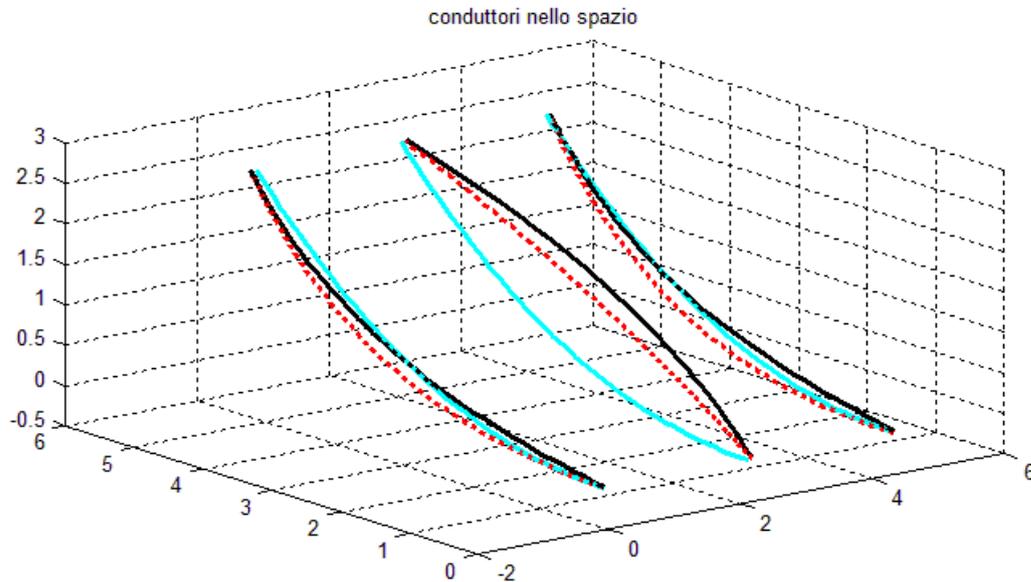


Figura 6.4 Disposizione dei conduttori nello spazio: per forza peso (curva ciano continua), dopo la prima iterazione (curva rossa tratteggiata) e finale (curva nera continua)

6.3.3. Calcolo della tensione normale

Questa è la parte finale del programma, ed è la più importante perché consente di sapere se il conduttore rimanga al di sotto della sollecitazione critica da non superare.

La function DISPOSIZIONE, come già visto in uscita fornisce il valore della trazione o sforzo normale. Per il calcolo della tensione normale σ , basta dividere la trazione per l'area del conduttore, ricavabile dal diametro.

$$\sigma = \frac{T}{A} = \frac{T}{\frac{D^2}{4} \pi} \quad (6.1)$$

Una volta ricavata la tensione normale per ogni conduttore, si traccia il grafico il funzione della lunghezza. In esso è possibile individuare quale zona è più sollecitata, ed il valore massimo, che deve essere minore di quello critico scelto inizialmente. Ecco le istruzioni per fare tutto questo:

```

%calcolo della tensione normale=====
A=D*D*pi/4; %sezione del conduttore

%conduttore R
sigmaR=P2V2S2R(10, :)/A;
%conduttore S
sigmaS=P2V2S2S(10, :)/A;
%conduttore T
sigmaT=P2V2S2T(10, :)/A;

```

```

%grafico dello sforzo
figure(3)
hold on
grid on
title('tensione normale nei tre conduttori')
ylabel('Sigma [N/(m^2)]')
xlabel('lunghezza [m]')
plot(dl*(1:1:NR), sigmaR)
plot(dl*(1:1:NS), sigmaS, 'r--')
plot(dl*(1:1:NT), sigmaT, 'c:')

```

Il grafico così ottenuto è il seguente di Figura 6.5:

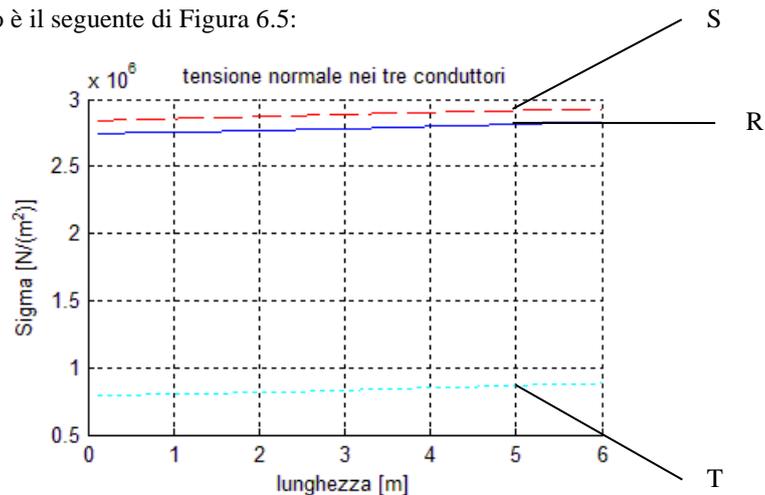


Figura 6.5 Andamento della tensione normale nei tre conduttori in funzione della lunghezza, la curva blu continua rappresenta il conduttore R, quella rossa tratteggiata a tratti il conduttore S e quella ciano tratteggiata a punti il conduttore T

Si può osservare da questo grafico che la tensione normale non supera i 3 MPa. La tensione critica scelta è quella di snervamento, che per l'alluminio è di circa 40 MPa. Si osserva che la tensione calcolata è molto al di sotto di quella critica, quindi i conduttori sono in grado di resistere alle sollecitazioni elettrodinamiche in questo tipo di guasto.

6.4. Verifica dei risultati del programma

Per verificare la correttezza dei risultati si prende un esempio in cui la forza la si può calcolare analiticamente con poche approssimazioni. Per questo esempio si sceglie come disposizione conduttori quella precedente, però si fa circolare la corrente solo in due conduttori vicini quali l'R e l'S. La corrente la si prende sempre $i = 43$ kA e discorde nei due conduttori.

Si ipotizza il conduttore sia disposto lungo la linea che congiunge i due punti di inizio e fine, per il calcolo magnetico si utilizza la formula per il conduttore indefinito. Successivamente, ricavata la forza, la si considera concentrata nel punto iniziale, a questo punto se ne ricava la trazione.

Si procede con il calcolo della forza magnetica, sapendo che la distanza tra i conduttori è $r = 2.2$ m e la lunghezza $l = 6$ m:

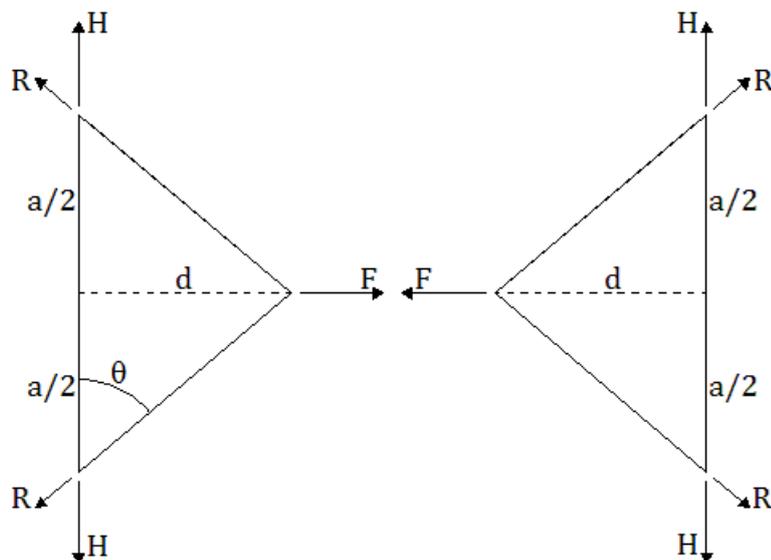


Figura 6.6 Disposizione dei conduttori dovuta ad una forza concentrata nel mezzo

$$F = \frac{\mu_0 I^2}{2\pi r} l = \frac{\mu_0}{2\pi} 43000^2 \frac{6}{2.2} = 1008 \text{ N}$$

applicandola al centro i conduttori si disporranno come in Figura 6.6.

La reazione vincolare ai due estremi R , sommata al tiro H , è uguale alla trazione in tutti i tratti del conduttore. Essa si calcola ponendo l'equilibrio: la sua componente orizzontale è uguale a metà della forza $R_o = \frac{F}{2}$. Il modulo è quindi uguale a $R = \frac{R_o}{\sin \theta}$.

il $\cos \theta$ è ricavabile dal disegno:

$$\sin \theta = \frac{d}{\sqrt{\left(\frac{a}{2}\right)^2 + d^2}} \quad (6.2)$$

Il valore di a lo si ottiene sapendo l'altezza e la distanza del punto finale:

$$a = \sqrt{5.2^2 + 2.6^2} = 5.814 \text{ m}$$

sapendo che il conduttore è lungo $l = 6$ m, e che si divide in due parti uguali: $\frac{l}{2} = \sqrt{\left(\frac{a}{2}\right)^2 + d^2} = 3$ m, è possibile trovare anche il valore di d :

$$d = \sqrt{\left(\frac{l}{2}\right)^2 - \left(\frac{a}{2}\right)^2} = \sqrt{\left(\frac{6}{2}\right)^2 - \left(\frac{5.814}{2}\right)^2} = 0.7412 \text{ m}$$

quindi la reazione di R risulta

$$R = \frac{R_o}{\sin \theta} = \frac{\frac{F}{2}}{\frac{d}{\frac{l}{2}}} = \frac{Fl}{4d} = \frac{1008 \cdot 6}{4 \cdot 0.7412} = 2040 \text{ N}$$

Per trovare la trazione, si scompone in componenti orizzontali e verticali la reazione R , questo perché alla verticale occorre sommare successivamente il tiro del conduttore.

$$R_v = R \cos \theta = R \frac{\frac{a}{2}}{l} = 2040 \cdot \frac{5.814}{6} = 1977 \text{ N}$$

Si ricava ora il modulo della trazione T , sommando il tiro $H = 60 \text{ N}$ alla componente verticale.

$$T = \sqrt{R_o^2 + (R_v + H)^2} = \sqrt{\left(\frac{1008}{2}\right)^2 + (1977 + 60)^2} = 2098 \text{ N}$$

Questa trazione è costante lungo il conduttore per il fatto che la forza è stata considerata concentrata al centro di esso. Prendendo un diametro del conduttore come nel precedente esempio $D = 0.022 \text{ m}$, la tensione normale vale:

$$\sigma = \frac{T}{\pi \frac{D^2}{4}} = \frac{2098}{\pi \frac{0.022^2}{4}} = 5.519 \text{ MPa}$$

Ora si utilizza il programma di calcolo e si confrontano i risultati. Nel conduttore R si pone la corrente uguale a $i_p = 43 \text{ kA}$, mentre nel conduttore S si pone la corrente a $-i_p$. Si ottiene il seguente grafico di Figura 6.7 delle tensioni normali.

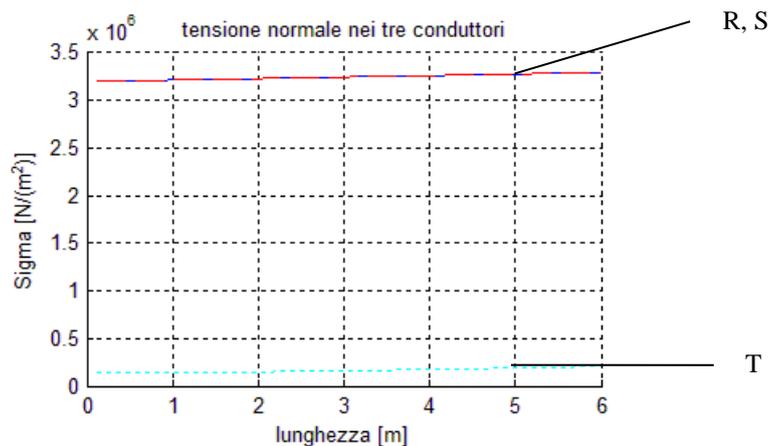


Figura 6.7 Andamento della tensione normale nei tre conduttori in funzione della lunghezza quando la corrente circola solo nei conduttori R ed S e di modulo uguale a i_p , la curva blu continua rappresenta il conduttore R, quella rossa tratteggiata a tratti il conduttore S e quella ciano tratteggiata a punti il conduttore T

Si osserva che i conduttori R, S hanno lo stesso andamento della tensione normale, questo perché hanno la stessa corrente. Il conduttore T, invece ha solo la trazione dovuta alla forza peso.

Il valore della tensione normale calcolato rimane sempre al di sotto di 3.5 MPa , che è minore dei 5.519 MPa calcolati. Questo è dovuto al fatto che il calcolo è stato eseguito considerando concentrata al centro la forza e non è stata considerata la diminuzione del campo magnetico causata dall'allontanamento dei conduttori. Tale allontanamento lo si può vedere nel grafico dei conduttori nello spazio in Figura 6.8.

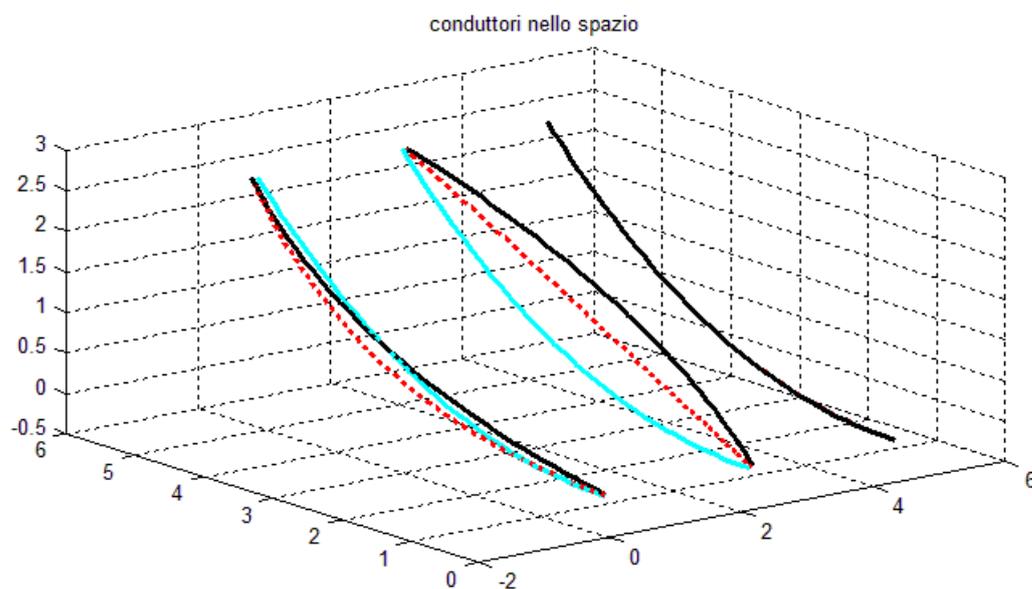


Figura 6.8 Disposizione dei conduttori nello spazio quando la corrente circola solo nei conduttori R ed S e di modulo uguale a i_p : la curva ciano rappresenta la disposizione dovuta alla sola forza peso, la curva nera rappresenta la disposizione finale

Concludendo, i risultati si ritengono attendibili, per i motivi sopra elencati e poiché sono dello stesso ordine di grandezza di quelli ricavati analiticamente con le varie approssimazioni ed ipotesi.

CAPITOLO 7

7. Esempio applicativo: analisi degli sforzi nella sottostazione Bele1

La sottostazione BELE1 si trova in Albania, su di essa sono stati applicati i programmi di calcolo degli sforzi elettrodinamici scritti in precedenza. Questa sottostazione connette alla rete nazionale albanese, alla tensione nominale di 110 kV, cinque impianti idroelettrici, quali: Bele1, Bele2, Topojan1, Topojan2 e Orgjost, alla tensione nominale di 20kV. La struttura consiste in una sbarra a 110 kV a cui sono collegati: i secondari di due trasformatori elevatori 20/110 kV (funzionanti quindi in parallelo) e l'arrivo linea. Il collegamento dei trasformatori e dell'arrivo linea alle sbarre non è diretto: tra essi è posizionato un modulo compatto collegato mediante conduttori flessibili. I programmi devono quindi calcolare gli sforzi nelle sbarre ed in questi conduttori flessibili. Nella Figura 7.1 è possibile osservare la struttura della sottostazione.



Figura 7.1 Foto delle sbarre e dei conduttori flessibili nella sottostazione in esame

Nella Figura 7.1 si possono osservare tre conduttori flessibili collegati alle sbarre ed al modulo compatto e poi altri tre conduttori flessibili che collegano il modulo compatto al trasformatore. È necessario studiare questi due collegamenti per i conduttori flessibili, mentre per le sbarre basta analizzarne solo uno.

In Figura 7.2. è riportata una planimetria della sottostazione, nel quale è possibile distinguere l'arrivo linea in alto a destra, le sbarre al centro e i due trasformatori in basso. I moduli compatti sono quelli collegati alle sbarre e ne sono presenti uno per l'arrivo linea ed uno per ogni trasformatore.

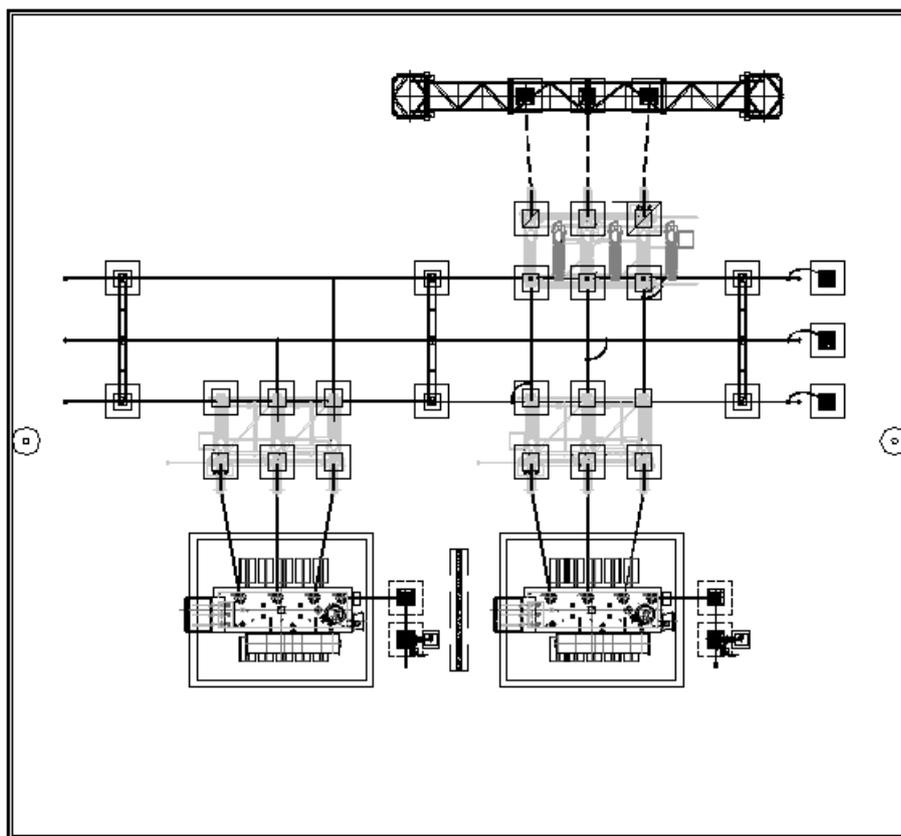


Figura 7.2 Planimetria della sottostazione

7.1. Calcolo della corrente di cortocircuito

Per l'utilizzo dei programmi è necessario conoscere la corrente di cortocircuito che si ha nell'alta tensione, che è la parte in cui sono presenti le sbarre e i conduttori flessibili. Si devono considerare il caso di guasto trifase e di guasto bifase. Il guasto monofase non è interessante dai punti di vista degli sforzi, in quanto l'elevato campo magnetico prodotto dal conduttore guasto non induce grandi forze negli altri in perché in essi circolano correnti nominali, che sono basse rispetto a quelle di cortocircuito. Il calcolo delle correnti di cortocircuito deve essere fatto in base alla norma CEI EN 60909-0. Per svolgerlo è stato scelto di utilizzare il programma NEPLAN (versione 5.4.3).

7.1.1. Dati degli impianti connessi alla sottostazione

L'impianto di Bele1 è costituito da due turbine Francis collegate ai corrispondenti generatori sincroni. Questo impianto è unito a quello di Topojan2, che possiede due turbine Pelton collegate ai corrispondenti generatori sincroni. La busbar a 20 kV di questi due impianti è collegata alla sottostazione tramite due linee connesse ai trasformatori MT/AT. Sempre dalla busbar a 20 kV di questo impianto partono tre linee che connettono gli impianti rimanenti, cioè Topojan1, Bele2 e Orgjost. Topojan1, come Topojan2, possiede due turbine Pelton collegate ai corrispondenti generatori sincroni. Mentre Bele2 e Orgjost possiedono rispettivamente tre e due turbine Francis collegate ai corrispondenti generatori sincroni.

Per capire meglio la disposizione ed i collegamenti elettrici si può osservare il seguente schema elettrico unifilare di Figura 7.3 realizzato tramite NEPLAN, che servirà poi per il calcolo, comprendente la sottostazione e tutti gli impianti collegati. Per indicare i vari impianti di produzione Bele1, Bele2, Topojan1, Topojan2 e Orgjost, si utilizzano queste rispettive sigle B1, B2, TP1, TP2 e OJ.

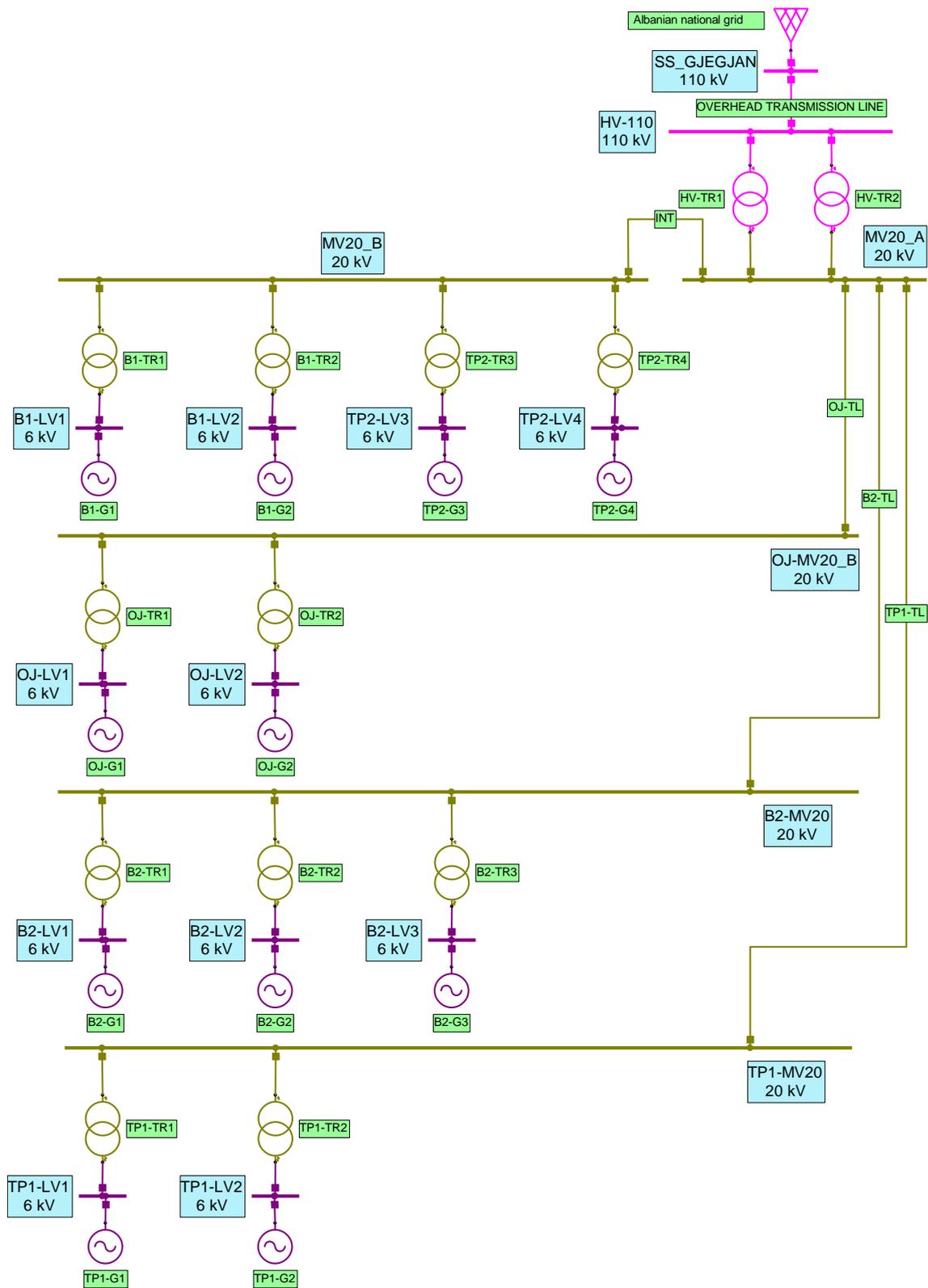


Figura 7.3 Schema elettrico unifilare della sottostazione e degli impianti di generazione collegati

I dati di targa di ogni trasformatore e generatore, i dati della linea esterna e delle linee di trasmissione che servono nel calcolo delle correnti di cortocircuito secondo normativa sono qui di seguito riportati.

TABELLA 7.1 RETE ESTERNA

Corrente di cortocircuito massima I_k''	1.093 kA
Corrente di cortocircuito massima I_k''	0.982 kA
Rapporto R/X	0.1

TABELLA 7.2 LINEE DI TRASMISSIONE

	OVERHEAD TRANSMISSION LINE	B2-TL	OJ-TL	TP1-TL
Conduttore	ACSR	ACSR	ACSR	ACSR
Sezione nominale	120 mm ²	120 mm ²	50 mm ²	50 mm ²
Tensione nominale	110 kV	20 kV	20 kV	20 kV
Frequenza nominale	50 Hz	50 Hz	50 Hz	50 Hz
Portata nominale	190 A	375 A	168 A	104 A
Resistenza R (20° C)	0.19 Ω/km	0.19 Ω/km	0.59 Ω/km	0.59 Ω/km
Reattanza X	0.35 Ω/km	0.325 Ω/km	0.36 Ω/km	0.365 Ω/km
Capacità C	n.d.	n.d.	n.d.	n.d.
Resistenza sequenza zero R0	0.026 Ω/km	0.097 Ω/km	0.72 Ω/km	0.237 Ω/km
Reattanza sequenza zero X0	0.044 Ω/km	0.12 Ω/km	0.40 Ω/km	0.040 Ω/km
Capacità sequenza zero C0	n.d.	n.d.	n.d.	n.d.
Lunghezza	9 km	3.2km	2.2 km	2 km

TABELLA 7.3 TRASFORMATORI

	HV-TR1 HV-TR2	B1-TR1 B1-TR2	TP2-TR3 TP2-TR4	OJ-TR1 OJ-TR2	TP1-TR1 TP1-TR2	B2-TR1 B2-TR2 B2-TR3
Potenza apparente	17.5 MVA	3 MVA	3.5 MVA	2.9 MVA	1.8 MVA	4.3 MVA
Alta tensione	110 kV	20 kV	20 kV	20 kV	20 kV	20 kV
Bassa tensione	20 kV	6 kV	6 kV	6 kV	6 kV	6 kV
Gruppo	YNd11	Yd11	Yd11	Yd11	Yd11	Yd11
Perdite a vuoto	13 kW	2.5 kW	2.8 kW	2.35 kW	1.55 kW	3.3 kW
Corrente a vuoto	0.3 %	0.8 %	0.8 %	0.8 %	0.8 %	0.8 %
Tensione di cortocircuito	10 %	6 %	6 %	6 %	6 %	6 %
Perdite nel rame	90 kW	21.5 kW	23.5 kW	21 kW	15 kW	41.5 kW
Impedenza sequenza 0	10 %	6 %	6 %	6 %	6 %	6 %
Connessione centro stella	Francamente a terra	Isolato	Isolato	Isolato	Isolato	Isolato

TABELLA 7.4 GENERATORI

	B1-G1 B1-G2	TP2-G3 TP2-G4	OJ-G1 OJ-G2	TP1-G1 TP2-G2	B2-G1 B2-G2 B3-G3
Potenza apparente	2.9 MVA	3.4 MVA	2.8 MVA	1.7 MVA	4.2 MVA
Tensione nominale	6 kV	6 kV	6 kV	6 kV	6 kV
Fattore di potenza nominale	0.9	0.9	0.9	0.9	0.9
Corrente nominale	279 A	327 A	269 A	164 A	404 A
Frequenza nominale	50 Hz	50 Hz	50 Hz	50 Hz	50 Hz

Velocità nominale	750 r.p.m.	600 r.p.m.	750 r.p.m.	600 r.p.m.	750 r.p.m.
Connessione statorica	YN	YN	YN	YN	YN
Connessione centro stella	A terra con R=340Ω	Francamente a terra	A terra con R=340Ω	A terra con R=340Ω	A terra con R=340Ω
X_d	1.96 p.u.	1.65 p.u.	1.89 p.u.	1.30 p.u.	2.12 p.u.
X_q	1.13 p.u.	0.96 p.u.	1.09 p.u.	0.77 p.u.	1.22 p.u.
X_d'	0.334 p.u.	0.32 p.u.	0.322 p.u.	0.3 p.u.	0.382 p.u.
X_d'' (satura)	0.209 p.u.	0.21 p.u.	0.202 p.u.	0.21 p.u.	0.242 p.u.
X_0	0.063 p.u.	0.06 p.u.	0.061 p.u.	0.07 p.u.	0.869 p.u.
X_2	0.205 p.u.	0.22 p.u.	0.198 p.u.	0.218 p.u.	0.238 p.u.
Resistenza avvolgimento statorico	0.062 p.u.	0.04 p.u.	0.03 p.u.	0.04 p.u.	0.035 p.u.

7.1.2. Risultati delle correnti di cortocircuito

Inserendo i dati in NEPLAN sono stati ottenuti i valori di corrente in tabella 7.5 per i tre tipi di guasto, cioè: trifase, bifase e bifase terra. C'è da notare che i risultati ottenuti non tengono conto dell'impedenze dei collegamenti dei vari elementi tra loro, più precisamente i collegamenti tra generatore e trasformatore e fra trasformatore e sbarra. Non si è tenuto conto di queste impedenze poiché trascurabili, ottenendo così dei risultati più cautelativi con valori di corrente leggermente superiori a quelli realmente esistenti.

TABELLA 7.5 VALORI DELLA CORRENTE DI CORTOCIRCUITO

	Guasto trifase	Guasto bifase	Guasto bifase terra
I_k''	1.547 kA	1.339 kA	2.307 kA
i_p	3.757 kA	3.253 kA	5.604 kA

Si osserva dalla tabella che il caso di corrente maggiore è quello bifase terra. Nel caso di sbarre complanari equi spaziate e di uguale lunghezza si è già dimostrato la forza elettrodinamica, a parità di corrente di picco, è maggiore nel guasto bifase di una quantità di $\frac{\sqrt{3}}{2}$ rispetto a quella del guasto trifase. Inoltre nel guasto bifase terra la corrente è maggiore di quella del guasto trifase, per cui questo caso è quello che possiede i maggiori sforzi elettrodinamici. È opportuno verificare gli sforzi anche per il caso trifase per completezza, soprattutto quando la geometria è diversa e la corrente è maggiore.

7.2. Calcolo degli sforzi elettrodinamici utilizzando i programmi

7.2.1. Calcolo degli sforzi elettrodinamici nelle sbarre

Si inizia il calcolo partendo dalle sbarre. Esse sono nello stesso piano, ed hanno la stessa sezione utilizzata nell'esempio dei programmi, ovvero sezione tubolare con $D_e=0.1$ m e $D_i = 0.086$ m. Come prima cosa sono necessarie le dimensioni delle sbarre, che sono riportate in figura 7.4.

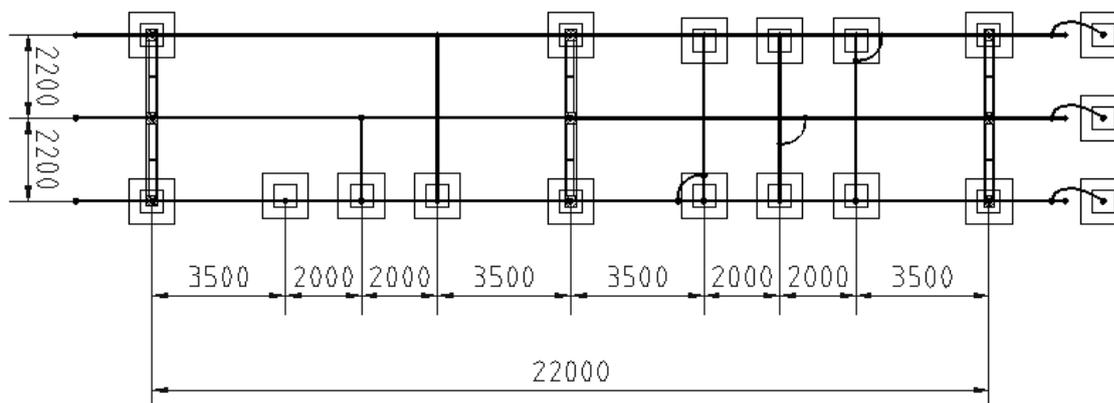


Figura 7.4 Dimensioni delle sbarre

Si osserva dalla Figura 7.4 che le sbarre sono vincolate agli estremi e al centro. Nel funzionamento normale la corrente nelle sbarre è la stessa del secondo trasformatore, che si trova in basso nella Figura 7.4. Quindi essa non circola in tutta la lunghezza delle sbarre. Inizialmente si fa l'ipotesi semplificativa cautelativa che la corrente circoli per tutta la sbarra e di valore pari a quella di cortocircuito (e non solo il contributo di cortocircuito del secondo trasformatore). Inoltre si trascura il vincolo centrale, che è un'altra ipotesi semplificativa cautelativa. Con queste ipotesi le sbarre sono della stessa lunghezza di 22 metri e sono equi spaziate di 2.2 metri nello stesso piano, questo consente di applicare il primo programma di calcolo. Esso è più semplice del secondo e dunque permette di avere un tempo di calcolo ridotto.

Si calcolano prima gli sforzi nel caso di guasto bifase terra. I dati da inserire nella parte iniziale del programma sono le lunghezze e le correnti. Quest'ultime sono uguali in modulo ma diverse in segno per le fasi guaste, mentre si è scelto di porre a zero la corrente nel terzo conduttore poiché la corrente nominale è trascurabile rispetto a quella di cortocircuito.

```

%maschera di inserimento dati=====

L=22;           %lunghezza di sbarra [m]
m0=4*pi*1e-7;  %permeabilità magnetica[H/m]
Dest=0.1;       %diametro esterno sbarra[m]
Dint=0.086;    %diametro interno sbarra[m]

%correnti [A]

ir=5604;       %corrente nella fase R
is=-5604;      %corrente nella fase S
it=0;          %corrente nella fase T
h1=2.2;        %distanza tra la sbarra R e la sbarra S
h2=h1;         %distanza tra la sbarra S e la sbarra T

dl=0.055;     %lunghezza dei segmenti in cui dividere la linea

```

Dei risultati si considera solo l'andamento della massima tensione interna, che è il seguente di Figura 7.5.

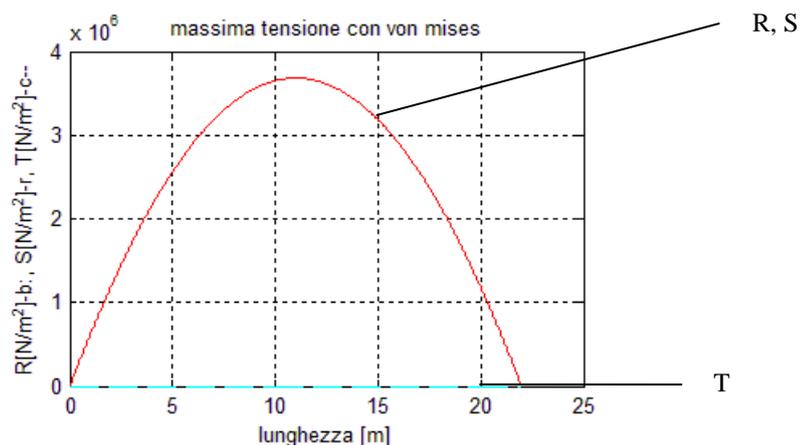


Figura 7.5 Andamento della tensione massima nelle tre sbarre in un guasto bifase terra

Dal grafico si vede che il conduttore T (curva di colore ciano e tratteggiata a segmenti) non ha sollecitazioni perché non è attraversato da corrente, in realtà possiede solo le sollecitazioni dovute alla forza peso. Gli altri due conduttori hanno andamento della tensione coincidente, il cui valore massimo si trova al centro. Esso vale 3.682 MPa. Si vede che molto minore dello snervamento, quindi la situazione di guasto non è pericolosa anche con le ipotesi cautelative fatte. Tuttavia, data la grande lunghezza delle sbarre, le tensioni prodotte dalla forza peso sono molto maggiori di quelle prodotte dalla corrente al punto di rendere quest'ultime trascurabili.

Si procede con il calcolo delle tensioni prodotte dalla forza peso, trovando prima il peso per unità di lunghezza q moltiplicando l'area della sbarra per la densità dell'alluminio e per l'accelerazione di gravità g .

$$q = \rho_{Al} \left(\frac{\pi D_{est}^2}{4} - \frac{\pi D_{int}^2}{4} \right) g = 2700 \frac{\pi}{4} (0.1^2 - 0.086^2) 9.81 = 54.17 \text{ N/m}$$

Ora si trova il momento M nel punto centrale, dove è massimo, applicando l'equazione già ricavata in precedenza nell'analisi della normativa, ovvero la 3.17.

$$M = \frac{Fl}{8} = \frac{ql^2}{8} = \frac{54.17 \cdot 22^2}{8} = 3278 \text{ Nm}$$

Da qui è possibile applicare la formula di Navier 2.5 ed ottenere la massima tensione presente nella sbarra nel punto centrale.

$$\sigma = \frac{M D_{est}}{I_x} = \frac{M D_{est}}{\frac{\pi}{64} (D_{est}^4 - D_{int}^4)} = \frac{3278 \cdot 0.1}{\frac{\pi}{64} (0.1_{est}^4 - 0.086_{int}^4) \cdot 2} = 73.71 \text{ MPa}$$

Come si può osservare la tensione interna dovuta alla sola forza peso, senza considerare le forze elettrodinamiche, supera quella di snervamento: la struttura non può ritenersi sicura. Essendo presente un sostegno centrale, che si è trascurato, le sollecitazioni che devono sopportare le sbarre in realtà sono minori. Il sostegno centrale divide le sbarre in due tratti uguali lunghi 11 metri, come si vede dalla 3.17 il momento è proporzionale a l^2 quindi dividendo per 2 la lunghezza il momento si riduce a $\frac{1}{4}$ e così anche la tensione interna che è proporzionale al momento:

$$\sigma = \frac{73.71}{4} = 18.43 \text{ MPa}$$

si nota che considerando anche il sostegno centrale la tensione interna massima è minore di quella di snervamento.

Riutilizzando il programma di calcolo ponendo la nuova lunghezza a 11 metri si ottiene l'andamento della massima tensione interna come evidenziato in figura 7.6.

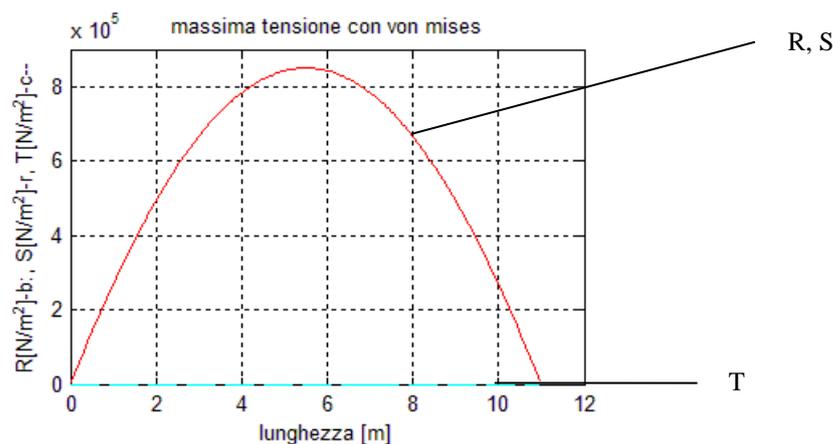


Figura 7.6 Andamento della tensione massima nelle tre sbarre con L=11 metri in un guasto bifase terra

Il massimo è di 0.8498 MPa, che è meno di un decimo di quello prodotto dalla forza peso. La tensione di snervamento non viene superata neppure facendo la somma delle due tensioni, pertanto si può considerare sicura la situazione.

Dal fatto che la forza peso è ortogonale alla forza elettrodinamica, per ottenere la tensione complessiva è lecito utilizzare il teorema di Pitagora. Lo si utilizza ora per vedere di quanto dovrebbe essere la tensione

limite prodotta dalle forze elettrodinamiche σ_{ed} per avere una tensione complessiva (considerando anche quella della forza peso σ_{fp}) pari a quella critica, che si è preso lo snervamento f_y .

$$\sigma_{ed} = \sqrt{f_y^2 - \sigma_{fp}^2} = \sqrt{40^2 - 18.43^2} = 35.5 \text{ MPa}$$

Procedendo per tentativi, per ottenere una tale tensione di dovrebbe avere una corrente di guasto bifase di circa 36220 A, che è impossibile da ottenere nella realtà osservato lo schema elettrico di tutti gli impianti connessi alla sottostazione.

È possibile fare un calcolo più preciso utilizzando il secondo programma di calcolo, quello che non possiede vincoli di posizione e lunghezza. Con esso è possibile considerare l'inizio della sbarra proprio nel collegamento dell'arrivo linea e la fine nel collegamento con il secondo trasformatore. Osservando la figura 7.4 si vede che la prima sbarra da sinistra inizia 2 metri prima della seconda e finisce 2 metri prima della seconda, stessa cosa si può dire per la seconda con la terza: complessivamente sono tutte lunghe 11 metri. La corrente di guasto che circola sulle sbarre dipende dalla posizione del guasto, se si trova nella rete esterna circola solo il contributo del secondo trasformatore, se è in corrispondenza del secondo trasformatore circolano i contributi della rete esterna più il contributo del primo trasformatore. Per il calcolo si fa sempre l'ipotesi cautelativa che nelle sbarre circoli la corrente di guasto complessiva. La matrice in ingresso da inserire nei dati del programma è quindi la seguente.

```
%maschera di inserimento dati=====
%I=matrice in ingresso:
I=[...
    1  0  0  0  11  0  0  5604
    2  2  2.2  0  13  2.2  0  -5604
    3  4  4.4  0  15  4.4  0  0];
Dest=0.1; %diametro esterno sbarra[m]
Dint=0.086; %diametro interno sbarra[m]

dl=0.055; %lunghezza dei segmenti in cui scomporre la sbarra
```

Dei risultati si osservano solo la posizione nello spazio (Figura 7.7) e la tensione complessiva nelle sbarre percorse da corrente (Figura 7.8).

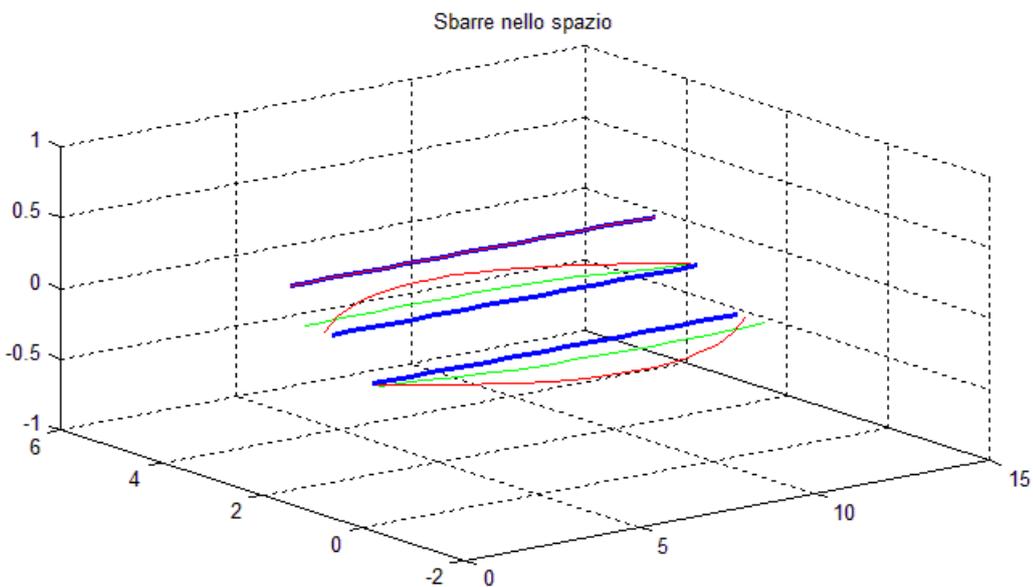


Figura 7.7 Posizione delle sbarre nello spazio con andamento della forza e del momento flettente in un guasto bifase terra

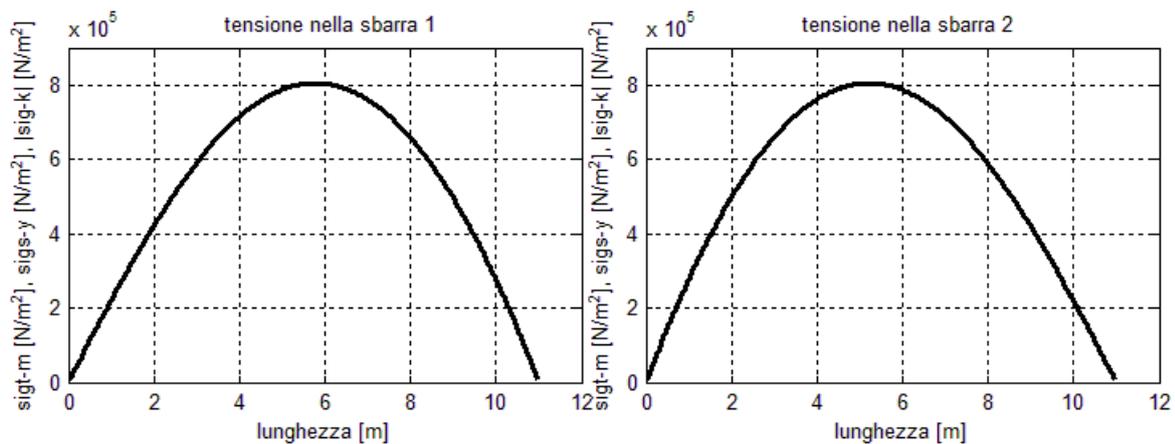


Figura 7.8 Andamento della tensione nelle sbarre percorse da corrente in un guasto bifase terra con il secondo programma di calcolo

Il valore massimo della tensione è praticamente lo stesso nelle due sbarre e vale 0.8048 MPa, molto simile a quello del programma precedente, ma leggermente minore per il fatto che le sbarre sono spostate di 2 metri lungo l'asse l'una dall'altra nel piano in cui si trovano.

Si calcolano ora gli sforzi nel caso di guasto trifase. Come prima inizialmente si utilizza il programma che opera su sbarre complanari aventi stessa lunghezza, tenendo conto del vincolo centrale (quindi la lunghezza è metà e pari a 11 metri). I dati si inseriscono considerando la corrente i_p uguale a quella di picco di un sistema trifase e ci si pone all'istante in cui la forza è massima, come già ricavato e qui riportato.

```
%maschera di inserimento dati=====
L=11;           %lunghezza di sbarra [m]
m0=4*pi*1e-7;  %permeabilità magnetica[H/m]
Dest=0.1;      %diametro esterno sbarra[m]
Dint=0.086;    %diametro interno sbarra[m]

%correnti [A]

ipicco=3757;   %corrente di picco in un sistema trifase

ir=ipicco*sin(5*pi/12); %corrente nella fase R
is=ipicco*sin(5*pi/12-2*pi/3); %corrente nella fase S
it=ipicco*sin(5*pi/12-4*pi/3); %corrente nella fase T
h1=2.2;        %distanza tra la sbarra R e la sbarra S
h2=h1;         %distanza tra la sbarra S e la sbarra T

dl=0.055;      %lunghezza dei segmenti in cui dividere la linea
```

Successivamente si avvia il programma e si osserva il seguente grafico della tensione interna in funzione della lunghezza (Figura 7.9).

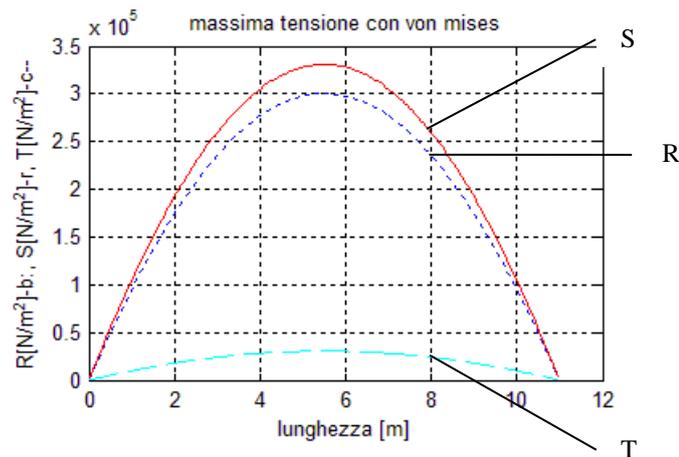


Figura 7.9 Andamento della tensione nelle sbarre percorse da corrente in un guasto trifase

Dal grafico si vede che tutti i conduttori sono sollecitati. Il conduttore S (curva di colore rosso e continua) è quello che ha la sollecitazione maggiore: il suo massimo è di 0.3308 MPa. Questo valore è trascurabile rispetto alla tensione dovuta alla forza peso di 18.43 MPa, quindi anche questa situazione di guasto è sicura.

Come prima si è proceduto per tentativi per ottenere la corrente di picco che produce una tensione interna di 35.5 MPa tale da provocare lo snervamento sommata vettorialmente a quella della forza peso. Essa vale circa 38930 A, come ci si aspettava, è più grande di quella richiesta dal guasto bifase terra.

Si procede ora con il calcolo più preciso con il programma che non possiede vincoli di posizione e lunghezza, Utilizzando la stessa disposizione delle sbarre precedente. La parte dei dati del programma è qui riportata.

```
%maschera di inserimento dati=====
ipicco=3757; %corrente di picco in un sistema trifase

ir=ipicco*sin(5*pi/12); %corrente nella fase R
is=ipicco*sin(5*pi/12-2*pi/3); %corrente nella fase S
it=ipicco*sin(5*pi/12-4*pi/3); %corrente nella fase T

I=[...
  1  0  0  0  11  0  0  ir
  2  2  2.2  0  13  2.2  0  is
  3  4  4.4  0  15  4.4  0  it];

Dest=0.1; %diametro esterno sbarra[m]
Dint=0.086; %diametro interno sbarra[m]

dl=0.055; %lunghezza dei segmenti in cui scomporre la sbarra
```

I risultati di posizione nello spazio e di tensione complessiva nelle sbarre percorse da corrente sono i seguenti nelle Figure 7.10 e 7.11.

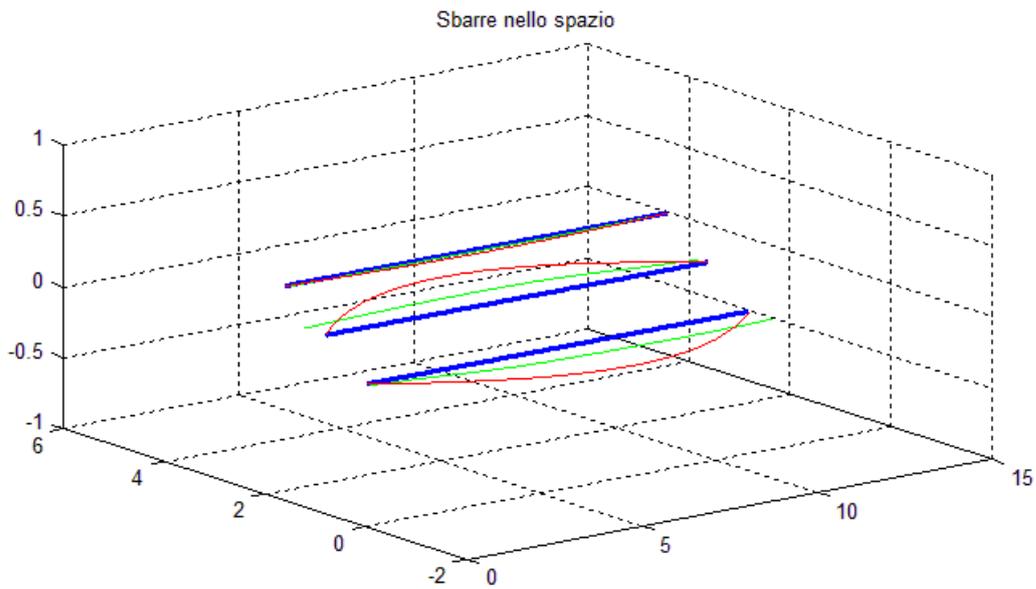


Figura 7.10 Posizione delle sbarre nello spazio con andamento della forza e del momento flettente in un guasto trifase

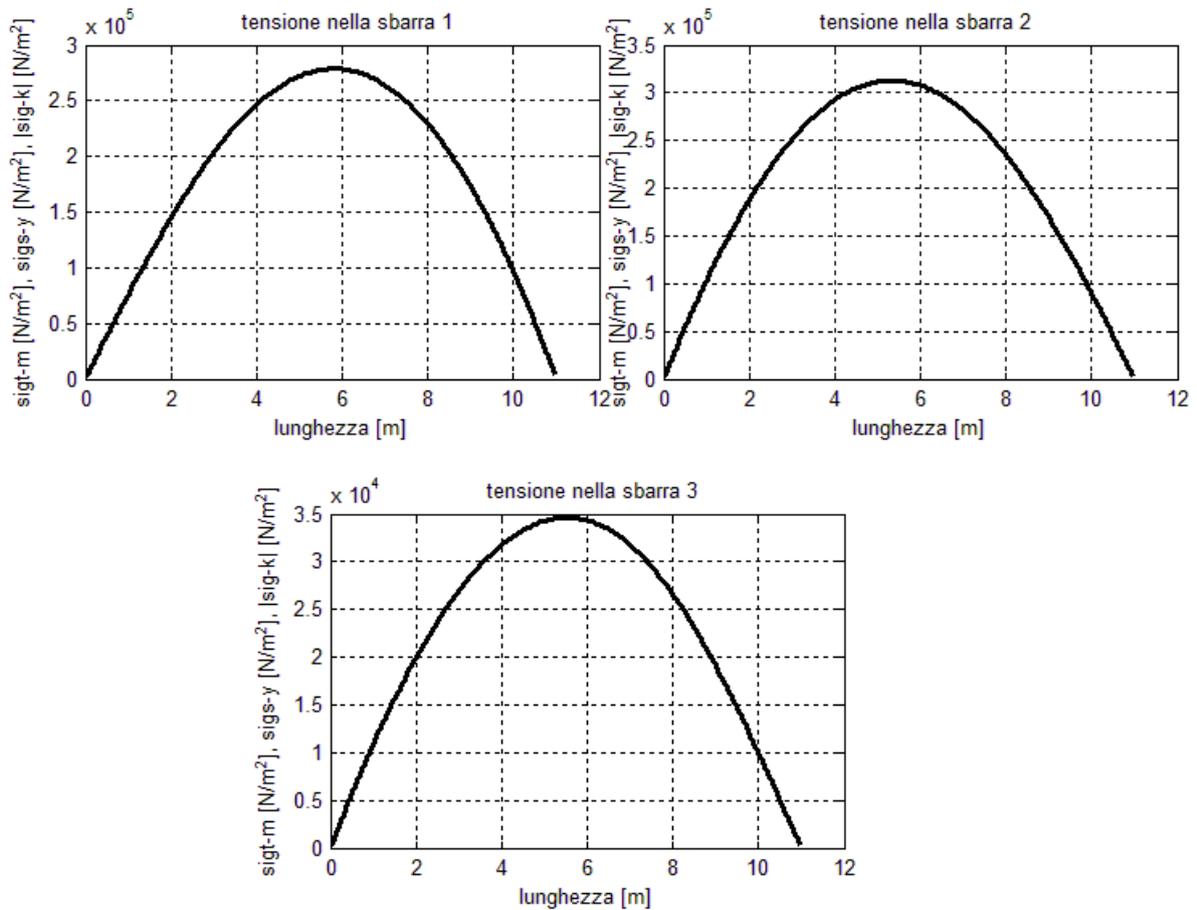


Figura 7.11 Andamento della tensione nelle sbarre in un guasto trifase con il secondo programma di calcolo

La tensione massima la si ha nella sbarra centrale ed è pari a 0.3127 MPa molto simile a quello del programma precedente, ma leggermente minore sempre per il fatto che le sbarre sono spostate di 2 metri lungo l'asse l'una dall'altra nel piano in cui si trova.

7.2.2. Calcolo degli sforzi nei conduttori flessibili

Si procede con il calcolo degli sforzi nei conduttori flessibili. Ci sono quattro collegamenti realizzati con conduttori flessibili da studiare. Il primo è il collegamento tra primo modulo compatto, arrivo linea e sbarre. Il secondo tra primo modulo compatto e primo trasformatore, il terzo tra sbarre e secondo modulo compatto, l'ultimo tra secondo modulo compatto e secondo trasformatore. Ci sarebbe anche il collegamento tra arrivo linea e modulo compatto di linea, ma si è scelto di non considerarlo in quanto parte integrante della linea e non della sottostazione. Queste connessioni si possono vedere nelle Figure 7.12, 7.13 e 7.14.

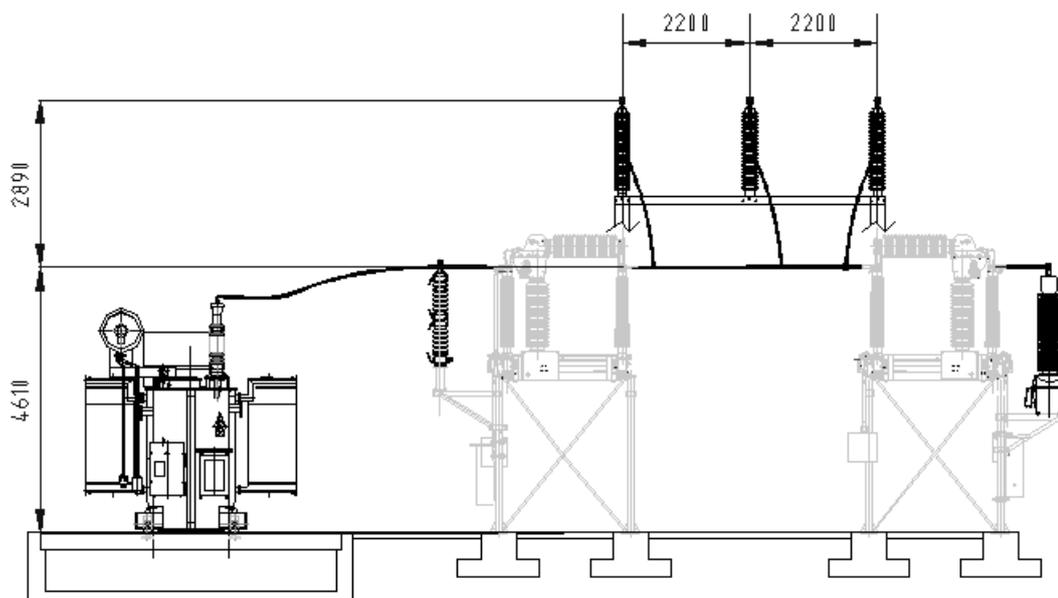


Figura 7.12 Quote dei collegamenti del primo trasformatore, del primo modulo compatto e delle sbarre

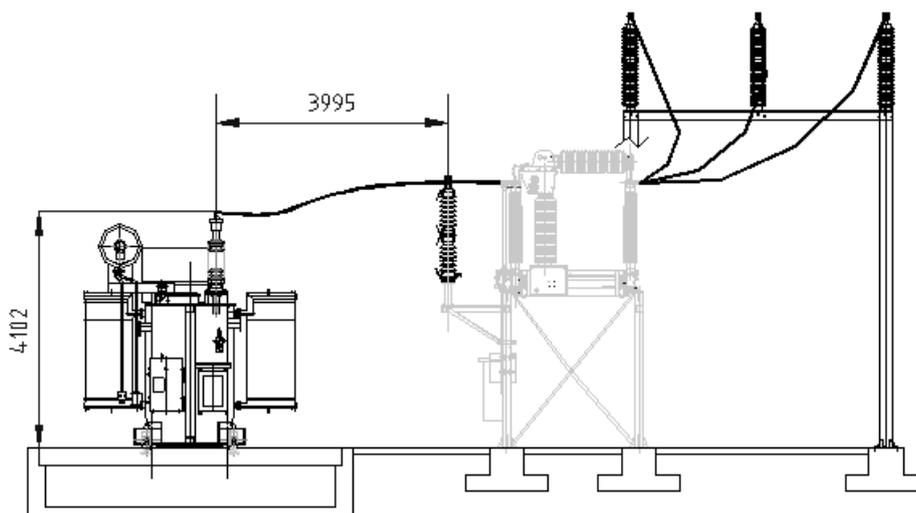


Figura 7.13 Quote dei collegamenti del secondo trasformatore, del secondo modulo compatto e delle sbarre

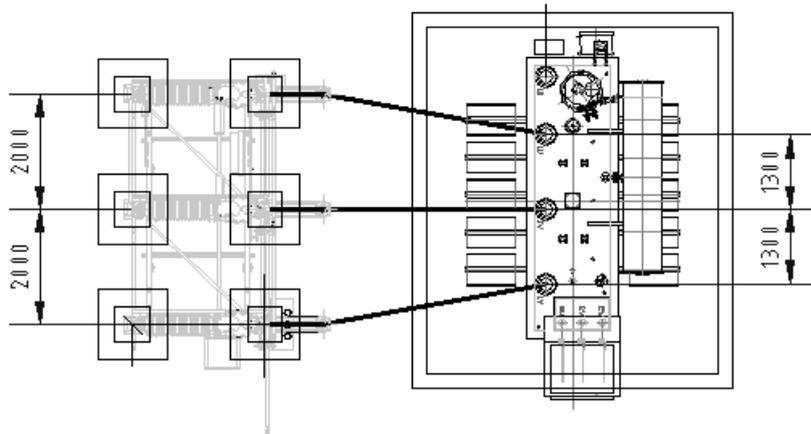


Figura 7.14 Dettaglio del collegamento tra un trasformatore ed il suo modulo compatto

Dalle Figure 7.13 e 7.14 si nota che il collegamento del trasformatore al proprio modulo compatto è uguale per entrambi, quindi basterà analizzarlo solo una volta.

Si parte proprio da questo caso, il conduttore è di alluminio nudo di sezione circolare avente diametro di 0.036 metri. La prima cosa da calcolare è quindi il peso per unità di lunghezza.

$$p = \rho_{Al} \left(\frac{\pi D^2}{4} \right) g = 2700 \left(\frac{\pi 0.036^2}{4} \right) 9.81 \cong 27 \frac{N}{m}$$

Per le coordinate dei punti finali ed iniziali si è scelto di porre in corrispondenza dell'origine l'estremo sinistro del conduttore in basso nella figura 7.13: le coordinate degli altri punti si ottengono seguendo le quote delle precedenti figure. Le lunghezze dei conduttori sono di 4.3 metri per i conduttori laterali e di 4.25 metri per quello centrale. Il tiro di ciascun conduttore è di 140 N. Per le correnti si fa sempre l'ipotesi cautelativa semplificativa che circoli la totale corrente di cortocircuito. I dati da inserire quindi all'inizio del programma sono qui riportati.

```
%maschera di inserimento dati=====
dl=0.125; %lunghezza di ogni tratto con cui si suddivide i
conduttori
D=0.036; %diametro esterno dei conduttori
ipicco=5604; %corrente di picco
I=[...
  1  0  0  0  3.995  0.7  -0.508  140  27  4.3  +ipicco
  2  0  2  0  3.995  2  -0.508  140  27  4.25  -ipicco
  3  0  4  0  3.995  3.3  -0.508  140  27  4.3  0];
```

I risultati di posizione nello spazio e di tensione complessiva in tutti i conduttori sono i seguenti nelle Figure 7.15 e 7.16.

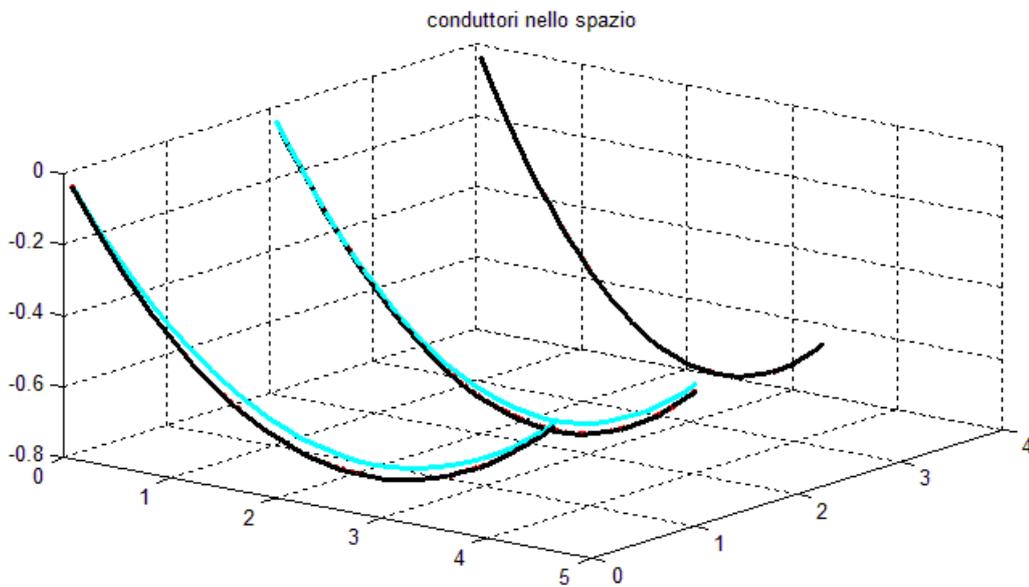


Figura 7.15 Disposizione dei conduttori nello spazio in un guasto bifase terra: la curva ciano rappresenta la disposizione dovuta alla sola forza peso, la curva nera rappresenta la disposizione finale

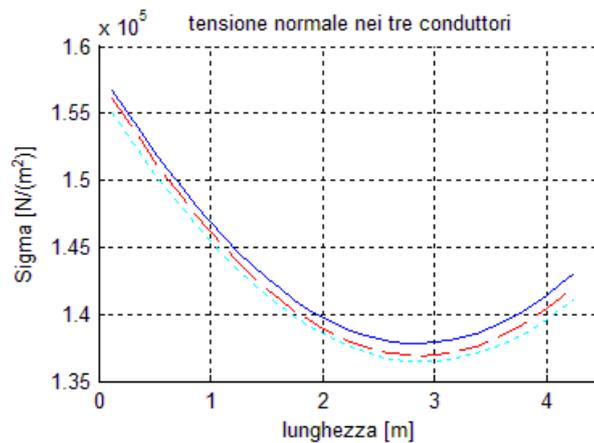


Figura 7.16 Tensione complessiva nei conduttori in un guasto bifase terra

Come si può vedere dalle Figura 7.15 la posizione finale del conduttore è molto vicina a quella iniziale. In Figura 7.16 si osserva che la tensione massima di 0.1568 MPa rimane molto al di sotto dei 40 MPa della tensione di snervamento. Questo programma considera anche la forza peso, quindi la situazione non costituisce un pericolo. Il programma fornisce anche l'andamento della trazione nei conduttori in funzione della lunghezza dovuta alla forza peso, che è il seguente di Figura 7.17.

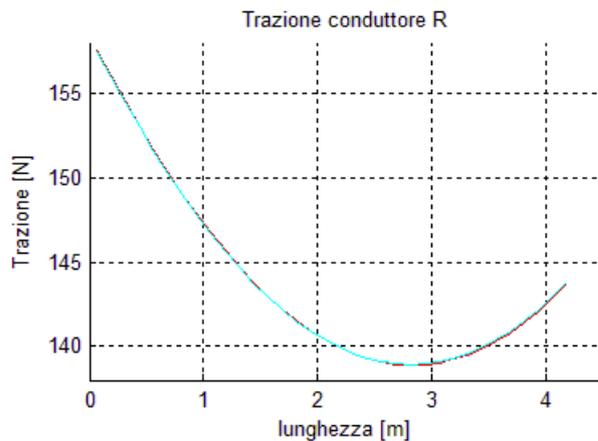


Figura 7.17 Trazione nei conduttori dovuta alla sola forza peso

Come si può notare l'andamento è circa lo stesso per tutti e tre i conduttori. Il valore massimo di trazione è di 157.6 N. La tensione prodotta da questa trazione si ottiene con la 6.1, ovvero dividendo per la sezione del conduttore:

$$\sigma = \frac{F}{A} = \frac{F}{\frac{\pi D^2}{4}} = \frac{4 \cdot 157.6}{\pi \cdot 0.036^2} = 0.1548 \text{ MPa}$$

si vede che la maggior parte della tensione in Figura 7.16 è prodotta dalla forza peso e non dalle forze elettrodinamiche.

Si calcolano ora gli sforzi nel caso di guasto trifase. I dati si inseriscono sempre considerando la corrente i_p uguale a quella di picco di un sistema trifase e ci si pone all'istante in cui la forza è massima, come fatto per il calcolo nelle sbarre. I dati da inserire quindi all'inizio del programma sono qui riportati.

```
%maschera di inserimento dati=====
dl=0.125; %lunghezza di ogni tratto con cui si suddivide i
conduttori
D=0.036; %diametro esterno dei conduttori
ipicco=3757; %corrente di picco
ir=ipicco*sin(5*pi/12); %corrente nella fase R
is=ipicco*sin(5*pi/12-2*pi/3); %corrente nella fase S
it=ipicco*sin(5*pi/12-4*pi/3); %corrente nella fase T
I=[...
  1  0  0  0  3.995  0.7  -0.508  140  27  4.3  ir
  2  0  2  0  3.995  2  -0.508  140  27  4.25  is
  3  0  4  0  3.995  3.3  -0.508  140  27  4.3  it];
```

I risultati di posizione nello spazio e di tensione complessiva in tutti i conduttori sono i seguenti nelle Figure 7.18 e 7.19.

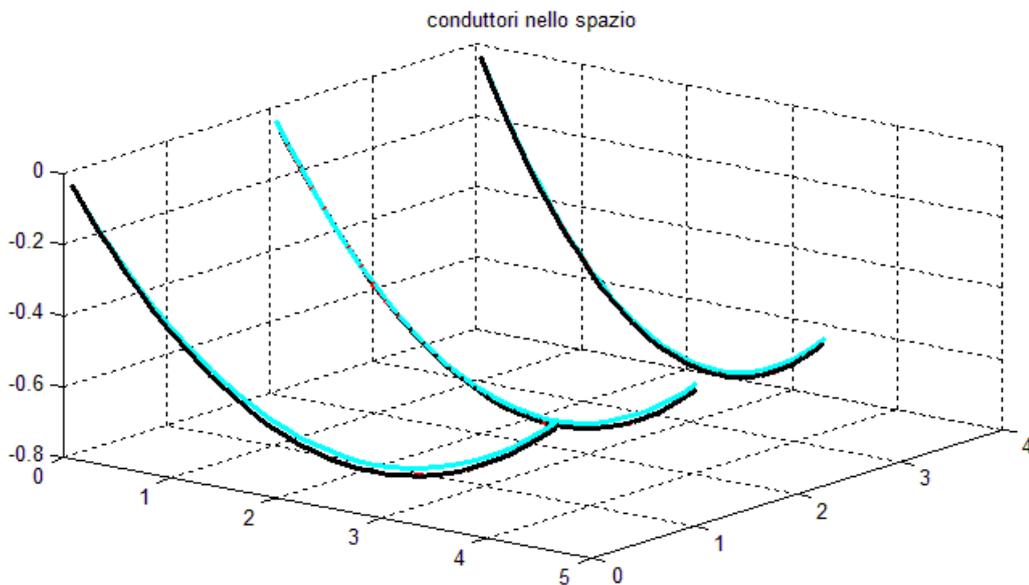


Figura 7.18 Disposizione dei conduttori nello spazio in un guasto trifase: la curva ciano rappresenta la disposizione dovuta alla sola forza peso, la curva nera rappresenta la disposizione finale

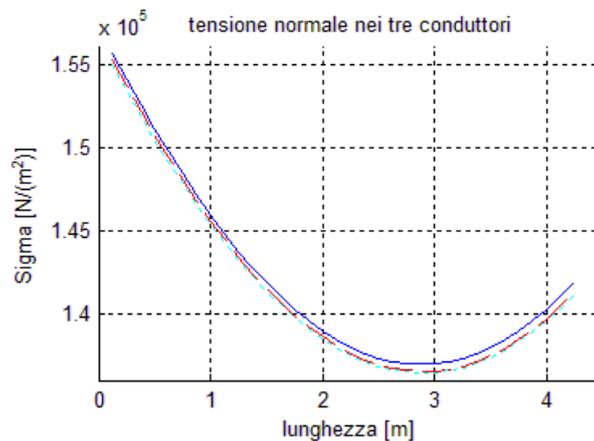


Figura 7.19 Tensione complessiva nei conduttori in un guasto trifase

Come si può vedere dalle Figura 7.18 la posizione finale del conduttore è molto vicina a quella iniziale. In Figura 7.19 si osserva che la tensione massima complessiva è di 0.1557 MPa, molto al di sotto dei 40 MPa della tensione di snervamento. Questo programma considera anche la forza peso, quindi la situazione non costituisce un pericolo. Il programma fornisce anche l'andamento della trazione nei conduttori in funzione della lunghezza dovuta alla forza peso, che è già stato ricavato per il calcolo precedente in Figura 7.17. Si può sempre notare da quest'ultimo che la maggior parte della tensione è dovuta alla forza peso.

Ora si procede con il calcolo degli sforzi elettrodinamici in nel collegamento tramite conduttori flessibili del secondo modulo compatto alle sbarre. Il conduttore è sempre di alluminio nudo di sezione circolare avente diametro di 0.036 metri, e quindi come già ricavato possiede un peso per unità di lunghezza $p = 27 \frac{N}{m}$. Per le coordinate dei punti finali ed iniziali si è scelto di porre in corrispondenza dell'origine l'estremo sinistro del conduttore in basso nella Figura 7.14: quello lato sbarra e non lato trasformatore. Le coordinate degli altri punti si ottengono sempre seguendo le quote delle figure. Per le correnti si fa sempre l'ipotesi cautelativa semplificativa che circoli la totale corrente di cortocircuito.

SI inizia sempre dal guasto bifase terra. I dati da inserire quindi all'inizio del programma contenenti la posizione, la corrente, il tiro e la lunghezza sono qui riportati.

```

%maschera di inserimento dati=====

dl=0.125; %lunghezza di ogni tratto con cui si suddivide i
conduttori

D=0.036; %diametro esterno dei conduttori

ipicco=5604; %corrente di picco

I=[...
  1  0 0 0  0.15 0 2.89  140  27  3  +ipicco
  2  0 2 0  2.35 2 2.89  140  27  3.9 -ipicco
  3  0 4 0  4.55 4 2.89  140  27  5.7  0];

```

I risultati di posizione nello spazio e di tensione complessiva in tutti i conduttori sono i seguenti nelle Figure 7.20 e 7.21.

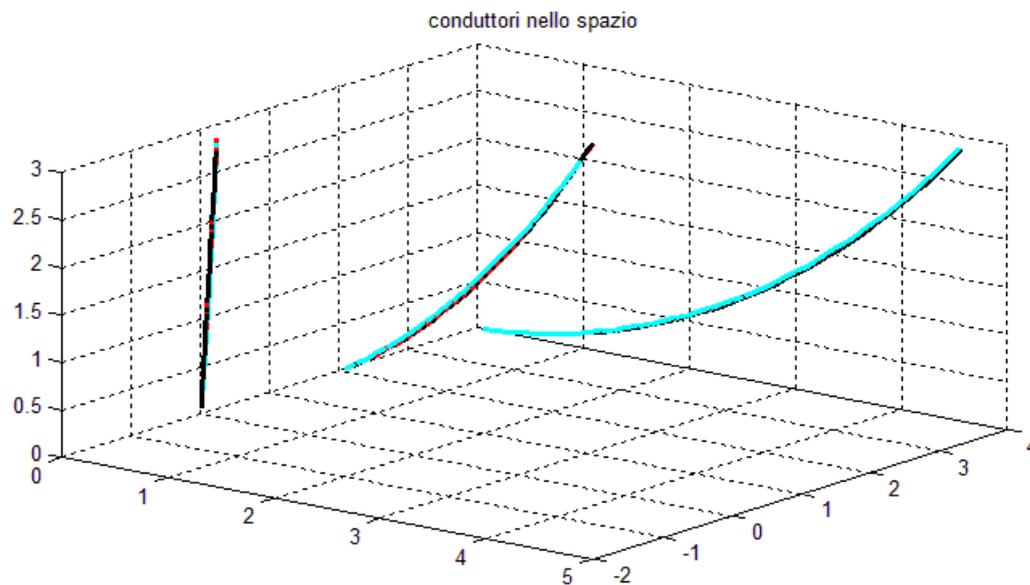


Figura 7.20 Disposizione dei conduttori nello spazio in un guasto bifase terra tra i conduttori R e S: la curva ciano rappresenta la disposizione dovuta alla sola forza peso, la curva nera rappresenta la disposizione finale

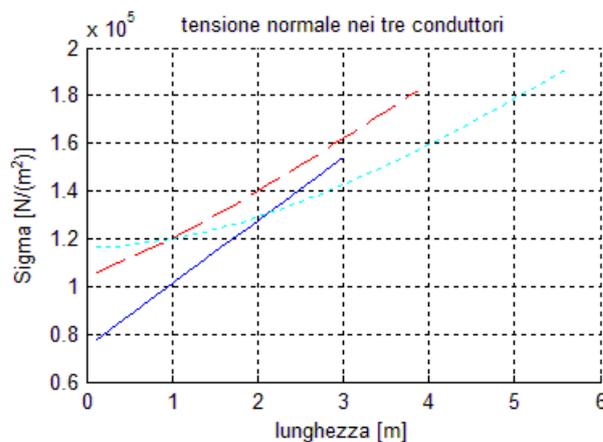


Figura 7.21 Tensione complessiva nei conduttori in un guasto bifase terra tra i conduttori R e S

Come si può vedere dalle Figura 7.20, anche in questo caso la posizione finale del conduttore è molto vicina a quella iniziale. In Figura 7.21 la curva blu continua è quella del conduttore *R*, quella rossa tratteggiata a segmenti al conduttore *S* e quella ciano tratteggiata a punti è relativa al conduttore *T*. Si osserva che il punto a massima tensione si trova nel conduttore *T*, dove l'unica forza che agisce è quella peso. Occorre quindi rifare il calcolo considerando questo conduttore percorso da corrente. I grafici delle posizioni e delle tensioni che si riottengono sono i seguenti nelle Figure 7.22 e 7.23.

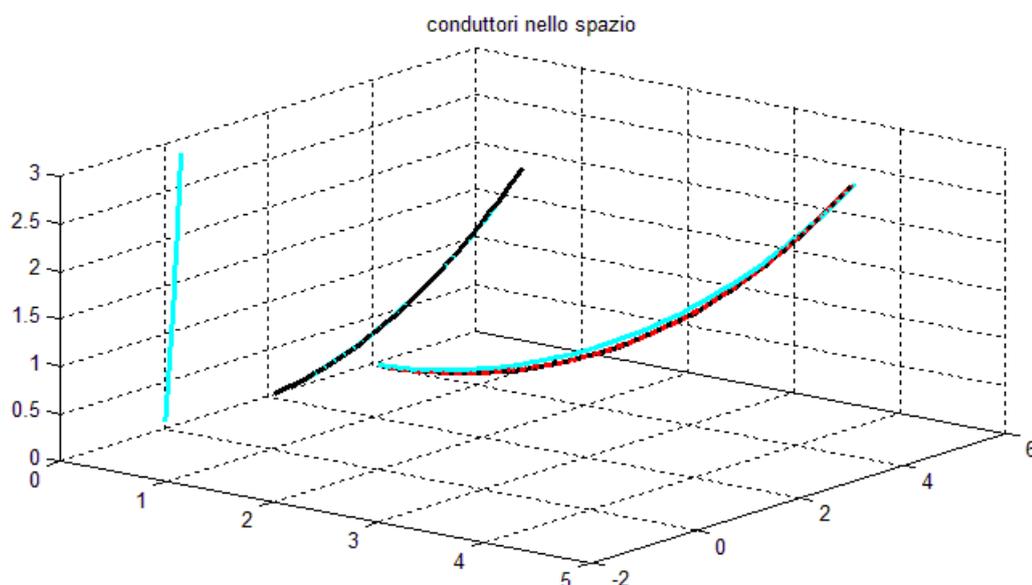


Figura 7.22 Disposizione dei conduttori nello spazio in un guasto bifase terra tra i conduttori *S* e *T*: la curva ciano rappresenta la disposizione dovuta alla sola forza peso, la curva nera rappresenta la disposizione finale

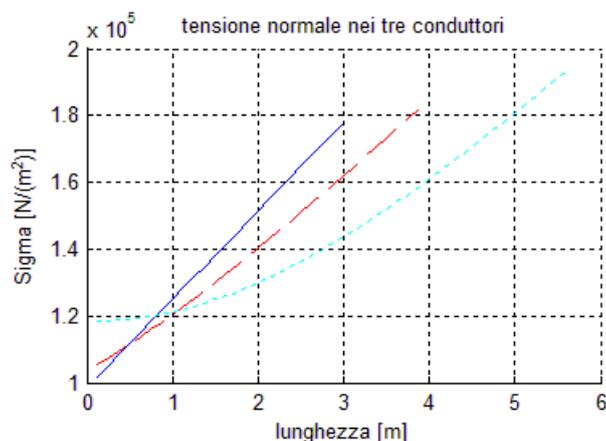


Figura 7.23 Tensione complessiva nei conduttori in un guasto bifase terra tra i conduttori *S* e *T*

Il valore massimo della tensione complessiva (ricavata considerando anche la forza peso nel conduttore *T* in questo guasto è di 0.194 MPa, molto al di sotto di quella di snervamento). Anche questa situazione di guasto quindi non costituisce un pericolo.

SI passa ora, come in precedenza, al calcolo degli sforzi nel caso di guasto trifase. I dati si inseriscono sempre considerando la corrente i_p uguale a quella di picco di un sistema trifase e ci si pone all'istante in cui la forza è massima, come fatto per il calcolo nelle sbarre. I dati da inserire quindi all'inizio del programma sono qui riportati.

```

%maschera di inserimento dati=====

dl=0.125; %lunghezza di ogni tratto con cui si suddivide i
conduttori

D=0.036; %diametro esterno dei conduttori

ipicco=3757; %corrente di picco

ir=ipicco*sin(5*pi/12); %corrente nella fase R
is=ipicco*sin(5*pi/12-2*pi/3); %corrente nella fase S
it=ipicco*sin(5*pi/12-4*pi/3); %corrente nella fase T

I=[...
  1  0 0 0  0.15 0 2.89  140  27  3  ir
  2  0 2 0  2.35 2 2.89  140  27  3.9 is
  3  0 4 0  4.55 4 2.89  140  27  5.7 it];

```

Come si osserva dai dati si è scelto di mettere la corrente ir (che è istantaneamente la più elevata) nel primo conduttore che possiede la minore sollecitazione dovuta a forza peso. Successivamente si rifarà il calcolo posizionandola sul conduttore T . I risultati di posizione nello spazio e di tensione complessiva in tutti i conduttori, con i dati sopra elencati, sono i seguenti nelle Figure 7.24 e 7.35.

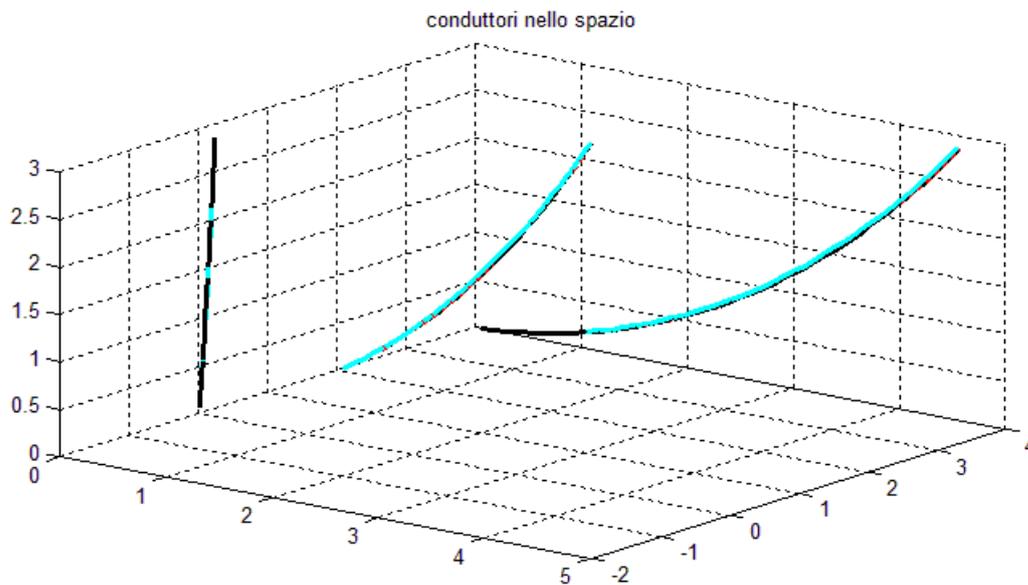


Figura 7.24 Disposizione dei conduttori nello spazio in un guasto trifase con sequenza RST: la curva ciano rappresenta la disposizione dovuta alla sola forza peso, la curva nera rappresenta la disposizione finale

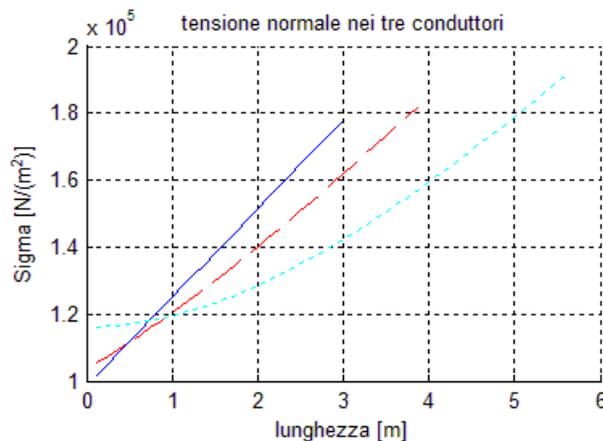


Figura 7.27 Tensione complessiva nei conduttori in un guasto trifase con sequenza TSR

Il valore massimo della tensione è sempre nel conduttore T , e in questo caso è leggermente maggiore e vale 0.192 MPa. Anche se leggermente maggiore del precedente rimane comunque molto al di sotto dello snervamento, quindi anche questa situazione di guasto quindi non costituisce un pericolo.

Dati i bassi risultati di tensione calcolati nei casi precedenti è stato scelto di non calcolare gli sforzi nel collegamento tra sbarre e primo modulo e arrivo linea. Questo perché il tratto è più corto degli altri, ed essendo le forze (sia peso sia elettrodinamica) dipendenti dalla lunghezza in questo tratto si hanno tensioni minori degli altri tratti.

7.3. Calcolo degli sforzi elettrodinamici utilizzando il metodo della norma CEI EN 60865-1

7.3.1. Calcolo degli sforzi elettrodinamici nelle sbarre

Nel calcolo degli sforzi elettrodinamici nelle sbarre, come nel programmi, si considera il vincolo centrale: questo comporta di considerare come lunghezza la metà ovvero $L = 11 m$. Si inizia sempre dal guasto bifase terra, la formula della forza secondo norma è la 3.2. Sostituendo i dati del caso in considerazione si ottiene:

$$F_{m2} = \frac{\mu_0 i_p^2 l}{2\pi a} = \frac{\mu_0 5604^2 \cdot 11}{2\pi \cdot 2.2} = 31.40 N$$

dalla forza si ricava la tensione interna massima utilizzando la formula 3.15. Il coefficiente β dipende dai tipi di vincolo, in questo caso si ha un appoggio ed una cerniera: dalle tabelle della norma si ottiene $\beta = 1$. I coefficienti $V_{\sigma m}$ e $V_{r m}$ tengono conto se è presente la richiusura automatica. In questa sottostazione non è presente la richiusura automatica in quanto, essendo collegata a gruppi di generazione di bassa potenza e bassa inerzia, una apertura dell'interruttore provoca una irrecuperabile perdita del sincronismo. Non essendoci la richiusura automatica, il prodotto dei due coefficienti è unitario. Sostituendo i dati si ottiene:

$$\sigma_{m,d} = V_{\sigma m} V_{r m} \beta \frac{F_m l}{8W_m} = \frac{F_m l}{8 \frac{I_x}{y}} = \frac{F_m l}{\frac{8}{D_{est}} \frac{2\pi}{64} (D_{est}^4 - D_{int}^4)} = \frac{31.40 \cdot 11}{8 \cdot 4.447 \cdot 10^{-5}} = 0.9708 MPa$$

Passando ora al caso di guasto trifase, la formula della forza secondo norma è la 3.3. Sostituendo i dati del caso in considerazione si ottiene:

$$F_{m3} = \frac{\sqrt{3} \mu_0 i_p^2 l}{2 \cdot 2\pi a_m} = \frac{\sqrt{3} \mu_0 3757^2 \cdot 11}{4\pi \cdot 2.2} = 12.22 N$$

dalla forza si ricava la tensione interna massima utilizzando sempre la formula 3.15. Come prima si pone il coefficiente $\beta = 1$ ed unitario il prodotto dei due coefficienti ($V_{\sigma m}$ e $V_{r m}$). Sostituendo i dati si ottiene:

$$\sigma_{m,d} = V_{\sigma m} V_{r m} \beta \frac{F_m l}{8 W_m} = \frac{12.22 \cdot 11}{8 \cdot 4.447 \cdot 10^{-5}} = 0.3778 \text{ MPa}$$

7.3.2. Calcolo degli sforzi elettrodinamici nei conduttori flessibili

Nel calcolo degli sforzi elettrodinamici nei conduttori flessibili la norma fa riferimento a conduttori disposti in orizzontale. Nella sottostazione non sono presenti collegamenti di questo tipo, però il collegamento tra modulo compatto e trasformatore è possibile approssimarlo con un collegamento orizzontale.

Si inizia dal collegamento nel guasto bifase terra e si calcola la trazione durante l'oscillazione $F_{t,d}$. Si adopera la 3.24 per calcolare la forza per unità di lunghezza e poi la si moltiplica per la lunghezza F' , ottenendo la forza F_{st} .

$$F_{st} = F' l = \frac{\mu_0}{2\pi} 0.75 \frac{(I_k'')^2}{a} l_c$$

l_c è la lunghezza del conduttore ed è 4.3 metri e a è la distanza tra i punti medi dei conduttori, osservando la figura 7.13, si vede che è 1.65 metri. In questa equazione viene richiesto il valore efficace iniziale della corrente di cortocircuito, a differenza delle precedenti che richiedevano il valore di picco. Sostituendo i dati risulta:

$$F_{st} = \frac{\mu_0}{2\pi} 0.75 \frac{2307^2}{1.65} 4.3 = 2.08 \text{ N}$$

ora si calcola il rapporto r utilizzando la 3.26 sapendo che il prodotto $m'_s g$ è il peso lineare p che, come già calcolato è di 27 N/m, che $l = 4,1 \text{ m}$ (lunghezza campata) e che n numero di conduttori in parallelo è uguale a 1.

$$r = \frac{F'}{nm'_s g} = \frac{F'}{p} = \frac{F_{st}}{lp} = \frac{2.08}{4.1 \cdot 27} = 0.01879$$

Da qui si ricava subito l'angolo della direzione della forza:

$$\delta_1 = \text{atan}(r) = \text{atan}(0.01879) = 0.01879 \text{ rad}$$

poi si calcola l'abbassamento del conduttore in mezzeria utilizzando la formula 3.27:

$$f_{es} = \frac{nm'_s g l^2}{8 F_{st}} = \frac{p l^2}{8 F_{st}} = \frac{27 \cdot 4.1^2}{8 \cdot 2.08} = 27.27 \text{ m}$$

adesso si trova il periodo di oscillazione del conduttore quando non è percorso da corrente utilizzando la 3.28:

$$T = 2\pi \sqrt{0.8 \frac{f_{es}}{g}} = 2\pi \sqrt{0.8 \frac{27.27}{9.81}} = 9.37 \text{ s}$$

successivamente si trova il periodo di oscillazione del conduttore quando è percorso da corrente utilizzando la 3.29. Avendo scritto δ_1 in radianti, occorre dividerlo per $\frac{\pi}{2}$ anziché 90°

$$T_{res} = \frac{T}{\sqrt[4]{1+r^2} \left[1 - \frac{\pi^2}{64} \left(\frac{2\delta_1}{\pi} \right)^2 \right]} = \frac{9.37}{\sqrt[4]{1+0.01879^2} \left[1 - \frac{0.01879^2}{16} \right]} = 9.369 \text{ s}$$

Per il calcolo del modulo di Young effettivo occorre prima conoscere il rapporto $\frac{F_{st}}{A_s}$. Come prima cosa quindi si trova l'area del conduttore A_s e poi il rapporto.

$$A_s = \frac{\pi D^2}{4} = \frac{\pi 0.036^2}{4} = 0.001018 \text{ m}^2$$

$$\frac{F_{st}}{A_s} = \frac{2.08}{0.001018} = 2043 \text{ Pa}$$

Il rapporto ottenuto è minore della σ_{fin} (valore minimo della tensione del cavo per cui il modulo di Young diventa costante), per cui il modulo di Young effettivo si deve calcolare con la prima equazione della 3.31. Per l'alluminio il valore di E è di 70000 MPa.

$$E_{eff} = E \left[0.3 + 0.7 \sin \left(\frac{F_{st}}{n A_s \sigma_{fin}} \frac{\pi}{2} \right) \right] = (7 \cdot 10^{10}) \left[0.3 + 0.7 \sin \left(\frac{2.08}{0.001018 \cdot 50 \cdot 10^6} \frac{\pi}{2} \right) \right] \\ = 21000 \text{ MPa}$$

Si procede con il calcolo della costante elastica del conduttore. Questa è data dal prodotto tra modulo di Young effettivo e area del conduttore diviso la sua lunghezza.

$$S = \frac{E_{eff} A_s}{l_c} = \frac{0.001018 \cdot 21000 \cdot 10^6}{4.3} = 4.972 \cdot 10^6 \frac{N}{m}$$

Questa costante elastica permette di calcolare la norma di rigidità con la 3.30:

$$N = \frac{1}{Sl} + \frac{1}{n E_{eff} A_s} = \frac{1}{4.972 \cdot 4.1 \cdot 10^6} + \frac{1}{21000 \cdot 0.001018 \cdot 10^6} = 0.09583 \cdot 10^{-6} \frac{1}{N}$$

dopo di che si hanno tutti i dati necessari per ricavare il fattore di stress ζ con la 3.38.

$$\zeta = \frac{(pl)^2}{24 F_{st}^3 N} = \frac{(27 \cdot 4.1)^2}{24 \cdot 2.08^3 \cdot 0.09583 \cdot 10^{-6}} = 592 \cdot 10^6$$

Per procedere nel calcolo dell'angolo del conduttore δ_{end} alla fine del cortocircuito di durata $T_{k1} = 0.3$ s, occorre prima calcolare il rapporto $\frac{T_{k1}}{T_{res}}$, per scegliere quale equazione della 3.33 usare.

$$\frac{T_{k1}}{T_{res}} = \frac{0.3}{9.369} = 0.03202$$

Il rapporto è minore di 0.5, quindi occorre utilizzare la prima equazione della 3.33 per il calcolo dell'angolo δ_{end} alla fine del cortocircuito:

$$\delta_{end} = \delta_1 \left[1 - \cos \left(2\pi \frac{T_{k1}}{T_{res}} \right) \right] = 0.01879 [1 - \cos(2\pi \cdot 0.03202)] = 0.000379 \text{ rad}$$

per il calcolo del fattore φ si utilizza la seconda formula della 3.36, dal momento che $\frac{T_{res}}{4} = 2.342$ s è maggiore della durata del guasto $T_{k1} = 0.3$ s.

$$\varphi = 3(r \sin \delta_{end} + \cos \delta_{end} - 1) = 3(0.01879 \sin 0.000379 + \cos 0.000379 - 1) = 21.15 \cdot 10^{-6}$$

Il fattore ψ lo si ricava dalla Figura 3.3 contenuta nella norma. Per i valori calcolati di φ e di ζ si ricava che $\psi \cong 1$. La forza di trazione nel cortocircuito durante l'oscillazione è quindi ottenibile con la 3.37:

$$F_{t,d} = F_{st}(1 + \varphi\psi) = 2.08(1 + 1 \cdot 21.15 \cdot 10^{-6}) = 2.081 \text{ N}$$

infine si trova la tensione dividendo per l'area del conduttore A_s

$$\sigma_{t,d} = \frac{F_{t,d}}{A_s} = \frac{2.081}{0.001018} = 2044 \text{ Pa} = 0.002044 \text{ MPa}$$

Lo stesso procedimento si applica al guasto trifase, l'unico dato che cambia è la corrente I_k'' . Si ottengono i seguenti risultati.

$$F_{st} = \frac{\mu_0}{2\pi} 0.75 \frac{1547^2}{1.65} 4.3 = 0.9355 \text{ N}$$

$$r = \frac{F_{st}}{lp} = \frac{2.08}{4.1 \cdot 27} = 0.008451$$

$$\delta_1 = \text{atan}(r) = \text{atan}(0.008451) = 0.008451 \text{ rad}$$

$$f_{es} = \frac{pl^2}{8F_{st}} = \frac{27 \cdot 4.1^2}{8 \cdot 0.9355} = 60.64 \text{ m}$$

$$T = 2\pi \sqrt{0.8 \frac{f_{es}}{g}} = 2\pi \sqrt{0.8 \frac{60.64}{9.81}} = 13.97 \text{ s}$$

$$T_{res} = \frac{T}{\sqrt[4]{1+r^2} \left[1 - \frac{\delta_1^2}{16}\right]} = \frac{13.97}{\sqrt[4]{1+0.008451^2} \left[1 - \frac{0.008451^2}{16}\right]} = 13.97 \text{ s}$$

$$A_s = \frac{\pi D^2}{4} = \frac{\pi 0.036^2}{4} = 0.001018 \text{ m}^2$$

$$\frac{F_{st}}{A_s} = \frac{0.9355}{0.001018} = 919 \text{ Pa}$$

$$E_{eff} = E \left[0.3 + 0.7 \sin \left(\frac{F_{st}}{nA_s \sigma_{fin}} \frac{\pi}{2} \right) \right] = (7 \cdot 10^{10}) \left[0.3 + 0.7 \sin \left(\frac{0.9355}{0.001018 \cdot 50 \cdot 10^6} \frac{\pi}{2} \right) \right] \\ = 21000 \text{ MPa}$$

$$S = \frac{E_{eff} A_s}{l_c} = \frac{0.001018 \cdot 21000 \cdot 10^6}{4.3} = 4.972 \cdot 10^6 \frac{\text{N}}{\text{m}}$$

$$N = \frac{1}{Sl} + \frac{1}{nE_{eff} A_s} = \frac{1}{4.972 \cdot 4.1 \cdot 10^6} + \frac{1}{21000 \cdot 0.001018 \cdot 10^6} = 0.09583 \cdot 10^{-6} \frac{1}{\text{N}}$$

$$\zeta = \frac{(pl)^2}{24F_{st}^3 N} = \frac{(27 \cdot 4.1)^2}{24 \cdot 0.9355^3 \cdot 0.09583 \cdot 10^{-6}} = 6508 \cdot 10^6$$

$$\frac{T_{k1}}{T_{res}} = \frac{0.3}{13.97} = 0.02147$$

$$\delta_{end} = \delta_1 \left[1 - \cos \left(2\pi \frac{T_{k1}}{T_{res}} \right) \right] = 0.008451 [1 - \cos(2\pi \cdot 0.02147)] = 0.00007678 \text{ rad}$$

$$\varphi = 3(r \sin \delta_{end} + \cos \delta_{end} - 1) = 3(0.008451 \sin 0.00007678 + \cos 0.00007678 - 1) \\ = 1.937 \cdot 10^{-6}$$

$\psi \cong 1$ (ricavato dalla figura 3.3)

$$F_{t,d} = F_{st}(1 + \varphi\psi) = 0.9355 (1 + 1 \cdot 1.937 \cdot 10^{-6}) = 0.9355 \text{ N}$$

$$\sigma_{t,d} = \frac{F_{t,d}}{A_s} = \frac{0.9355}{0.001018} = 919 \text{ Pa} = 0.000919 \text{ MPa}$$

Il collegamento tra modulo compatto e sbarre è molto diverso da un collegamento orizzontale, una possibile approssimazione con un collegamento orizzontale sarebbe troppo pesante. Per questo motivo è stato scelto di non calcolare gli sforzi secondo norma in esso.

7.3.3. Confronto dei risultati

Per poter fare un corretto confronto tra i risultati, in particolare quelli dei conduttori flessibili ottenuti con i programmi, è necessario sottrarre ad essi la parte di tensione dovuta alla forza peso. Questo poiché le formule della norma non considerano la forza peso ma solo la forza magnetica.

La tensione massima dovuta alla sola forza peso è già stata calcolata nel capitolo 7.2.2. e vale

$$\sigma_{fp} = 0.1548 \text{ MPa}$$

Nel caso di guasto bifase terra la tensione massima dovuta alle forze elettrodinamiche σ_{fe} è data dalla differenza tra la σ fornita dal programma e la σ_{fp} , ottenendo così:

$$\sigma_{fe} = \sigma - \sigma_{fp} = 0.1568 - 0.1548 = 0.0020 \text{ MPa}$$

Allo stesso modo si calcola la tensione massima dovuta alle forze elettrodinamiche σ_{fe} nel guasto trifase:

$$\sigma_{fe} = \sigma - \sigma_{fp} = 0.1557 - 0.1548 = 0.0009 \text{ MPa}$$

Adesso che si conoscono le tensioni dovute solo alle forze elettrodinamiche è possibile raggruppare in una tabella i risultati ottenuti sia con i programmi sia con il procedimento della norma nelle sbarre e nei conduttori flessibili nei due tipi di guasto considerati.

TABELLA 7.6 Risultati di tensione ottenuti con i programmi ed il procedimento della norma negli elementi della sottostazione considerati

	Tensione ottenuta con i programmi di calcolo	Tensione ottenuta con il procedimento della norma
Guasto bifase terra nelle sbarre	0.8048 MPa	0.9708 MPa
Guasto trifase nelle sbarre	0.3127 MPa	0.3778 MPa
Guasto bifase terra nel collegamento tra modulo compatto e trasformatore	0.002 MPa	0.002044 MPa
Guasto bifase terra nel collegamento tra modulo compatto e trasformatore	0.0009 MPa	0.000919 MPa

I risultati ottenuti con il procedimento della norma sono di poco superiori a quelli ottenuti con i programmi. Per i conduttori flessibili la differenza è del 2%. Per le sbarre la differenza è del 17%, ed è dovuto all'approssimazione di conduttore rettilineo uniforme contenuta nel procedimento della norma, se si dovessero avere delle sbarre con lunghezza maggiore questa differenza si riduce.

Come si vede la norma ha fornito formule cautelative, questo perché verificando la struttura per valori più elevati si ha la certezza della resistenza dei vari elementi. Il programma, invece, da risultati più vicini alla realtà in quanto sono state formulate meno ipotesi per il calcolo.

Conclusioni

In questa tesi sono stati sviluppati degli algoritmi in ambiente MATLAB per il calcolo degli sforzi elettrodinamici in conduttori rigidi o flessibili arbitrariamente disposti nello spazio. L'attendibilità dei risultati ottenuti dai programmi è stata verificata risolvendo casi specifici sia con metodi analitici e sia con gli algoritmi sviluppati.

È stato anche presentato il procedimento di calcolo definito nella normativa CEI EN 60865-1, il quale, rispetto ai programmi scritti, contiene ipotesi cautelative e semplificative, in particolare per quanto riguarda la disposizione dei conduttori nello spazio.

Si sono applicati questi due metodi di calcolo ad una sottostazione realmente esistente e si è potuto osservare che i risultati sono comparabili. Il metodo della normativa ha dato dei valori leggermente superiori a quelli dei programmi, rispettivamente del +17 % per le sbarre e del +2 % per i conduttori flessibili. Il motivo che ha portato alla sensibile sovrastima per quanto riguarda le sbarre, è riconducibile al fatto che il procedimento della normativa trascura la distanza tra i conduttori rispetto alla loro lunghezza. In generale, i risultati di tensione ottenuti sono molto al di sotto del valore critico di snervamento, scelto come limite per non avere deformazioni non elastiche dei conduttori.

La sottostazione presa in esame, per i bassi valori di corrente di cortocircuito, non presenta tensioni da forze elettrodinamiche problematiche, risultando addirittura minori di quelle prodotte dalla forza peso. Utilizzando i programmi si è visto che le forze elettrodinamiche acquistano rilevanza quando le correnti guasto sono dell'ordine delle decine di migliaia di ampere, ovvero quando la sottostazione è connessa a reti forti.

I programmi di calcolo per le sbarre contengono l'ipotesi semplificativa di vincoli solo alle due estremità, il cui tipo è di appoggio, il primo, e di cerniera, il secondo. Un eventuale sviluppo futuro sarebbe quello di realizzare un programma che non possieda questa ipotesi, avendo quindi la possibilità di scegliere il numero di vincoli, il loro tipo e la loro posizione nella sbarra. Inoltre si potrebbe strutturare il programma considerando la variazione di corrente nel tempo, che può provocare risonanza con la struttura di sostegno.

Il programma di calcolo per i conduttori flessibili considera solo tre conduttori. Un eventuale sviluppo futuro sarebbe quello di modificarlo in modo da considerare un qualsiasi numero di conduttori. Questo programma inoltre considera un regime stazionario in cui la corrente che circola sui conduttori è continua, pari al valore massimo e la disposizione è quella a regime, quindi dopo lo smorzamento delle oscillazioni. Un altro sviluppo futuro sarebbe quello di scrivere un programma che consideri la dinamica del conduttore tenendo conto anche della variazione della corrente nel tempo.

Bibliografia

- [1] M. Andriollo, G. Martinelli, A. Morini, "I trasformatori – II edizione", Padova [IT], LIBRERIA CORTINA, 2010
- [2] R. Bennato, L. Fellin, "Impianti elettrici", Torino [IT], UTET scienze tecnologiche 2011
- [3] S. Bing, Z. Xiaofeng, Z. Dahua, "Analysis and Calculation of Short-Circuit Electro-dynamic Forces on Rectangular Bus Bars", Power Electronics and Motion Control conference, IEEE 9th international, pp. 2618-2621, 2009
- [4] M. Guarnieri. A. Stella, "Principi ed applicazioni di elettrotecnica – volume primo – terza edizione", Padova [IT], Edizioni Progetto 2004
- [5] Z. Guo, Y. Zhu, "Short Circuit Mechanical Force Withstand Ability Test", Electrical Machines and System, Proceeding of the Fifth International Conference, vol.1 pp. 215-219, 2001
- [6] T. J. Higgins, "Formulas for Calculating Short-Circuit Forces Between conductors of structural shape", Electrical Engineering, vol. 62, pp. 659-663, 1943
- [7] T. J. Higgins, "Formulas for the calculating Short-Circuit forces between channel located back to back", Electrical engineering, vol. 63, pp. 710-711, 1944
- [8] A. H. Isfahani, S. Vaez-Zadeh, "Accurate Determination of Electromagnetic Forces in Isolated Phase Buses under Short Circuit Conditions", Power Engineering Society General Meeting, IEEE, pp. 1-5, 2007
- [9] Y. Kanno, T. Amemiya, N. Takahashi, N. Kobayashi, "The short circuit electromagnetic force of the tree-phase encapsulated gas insulated bus-bar", Power engineering review, IEEE, vol. PER-4, pp. 51-52, 1984
- [10] M. R. Krakowski, G.S. Szymaski, "Method of calculation of force on conductor parallel to shielded magnetic solid due to short-circuit current", Electrical Engineering, proceedings of the institution of vol. 126, pp.139-140, 1979
- [11] M. Landry, R. Beauchemin, A. Venne, "De-icing ehv overhead transmission lines using electromagnetic forces generated by moderate short-circuit currents", Transmission and distribution construction, operation and live-line maintenance proceedings, IEEE 9th international conference, pp. 94-100, 2000
- [12] S. Lenci, "Lezioni di meccanica strutturale", Bologna [IT], Pitagora Editrice 2009
- [13] J.W. Maier, T.J. Higgins, "Equations For the Inductance and Short Circuit Forces of 3-Phase Busses Comprised of 120-Degree Angles", American institute of Electrical Engineering, vol 74 part I, pp. 334-339, 1955
- [14] P. Mazzoldi, M. Nigro, C. Voci, "Elementi di fisica – Elettromagnetismo · Onde – II edizione", Perugia [IT], EdiSES 2008
- [15] S. Mori, S. Imai, K. Ninomiya, H. Hata, K. Itaka, T. Hara, "Characteristics of GAS Insulated Transmission Lines Bonded at Both Ends in Relation to Short-Circuit Forces", Power engineering review, IEEE, vol. PER-1, pp. 31, 1981
- [16] A. Paolucci, "Lezioni di impianti elettrici – Parte Prima", Padova [IT], CLEUP, 1997
- [17] A. Paolucci, "Lezioni di impianti elettrici – Parte Seconda", Padova [IT], CLEUP, 1997
- [18] A. Paolucci, "Lezioni di trasmissione dell'energia elettrica", Padova [IT], CLEUP, 1998
- [19] T. A. Pinkham, N.D. Killeen, "Short circuit forces on station post insulators" Power apparatus and System, IEEE transaction, vol. PAS-90, pp. 1688-1697, 1971
- [20] M. Siegel, T.J. Higgins, "Equations for the Inductance and Short-Circuit Forces of Busses Comprised or Double-Channel Conductors", Power Apparatus and System, Transaction of the American institute of Electrical Engineering, vol. 71, part III, 1952
- [21] W. R. Wilson, L.L. Mankoff, "Short-Circuit Forces in Isolated-Phase Busses", Power Apparatus and System, Transaction of the American institute of Electrical Engineering, vol. 73, part III-A, pp. 382-396, 1954
- [22] F.M. Yusop, M.K.M. Jamil, D. Ishak, S. Masri, "Study on the Electromagnetic Force Affected by Short-Circuit Current in Vertical and Horizontal Arrangement of Busbar System", Electrical, Control and computer engineering, International conference, pp. 196-200, 2011
- [23] F.M. Yusop, M.K.M. Jamil, D. Ishak, M. Husaini, S. Masri, "Investigation of Electromagnetic Force During Short-Circuit Test in Three-Phase Busbar System", Humanities, Science and Engineering, IEEE, pp. 340-344, 2011


```

for k=1:size(Br,1)
    %campi nelle tre sbarre nel k-esimo segmento
    for g=1:size(lr,1)
        %calcolo del contributo di campo di ogni g-esimo tratto

        %calcolo di B nella fase R
        %raggio dalla fase S
        r1=sqrt((ls(g,1)-lr(k,1))^2+(ls(g,2)-lr(k,2))^2);
        %raggio dalla fase T
        r2=sqrt((lt(g,1)-lr(k,1))^2+(lt(g,2)-lr(k,2))^2);
        Br(k)=Br(k)+(m0*is*dl*h1/(4*pi))*(1/(r1)^3)+...
            (m0*it*dl*(h1+h2)/(4*pi))*(1/(r2)^3);

        %calcolo di B nella fase S
        %raggio dalla fase R
        r1=sqrt((lr(g,1)-ls(k,1))^2+(lr(g,2)-ls(k,2))^2);
        %raggio dalla fase T
        r2=sqrt((lt(g,1)-ls(k,1))^2+(lt(g,2)-ls(k,2))^2);
        Bs(k)=Bs(k)-(m0*ir*dl*h1/(4*pi))*(1/(r1)^3)+...
            (m0*it*dl*h2/(4*pi))*(1/(r2)^3);

        %calcolo di B nella fase T
        %raggio dalla fase R
        r1=sqrt((lr(g,1)-lt(k,1))^2+(lr(g,2)-lt(k,2))^2);
        %raggio dalla fase S
        r2=sqrt((ls(g,1)-lt(k,1))^2+(ls(g,2)-lt(k,2))^2);
        Bt(k)=Bt(k)-(m0*ir*dl*(h1+h2)/(4*pi))*(1/(r1)^3)-...
            (m0*is*dl*h2/(4*pi))*(1/(r2)^3);

    end
end

%grafico del campo magnetico su ogni sbarra in funzione della
%lunghezza

figure(1)
x=(dl:dl:L)-dl/2;
plot(x,Br,':',x,Bs,'r',x,Bt,'c--')
ylabel('Br[T]-b:, Bs[T]-r, Bt[T]-c--')
xlabel('lunghezza [m]')
title('campo magnetico in funzone della lunghezza')
grid

%calcolo delle forze magnetiche=====

Fr=ir*dl*Br; %forza magnetica in R
Fs=is*dl*Bs; %forza magnetica in S
Ft=it*dl*Bt; %forza magnetica in T

%grafico della forza magnetica su ogni sbarra in funzione della
%lunghezza

figure(2)
plot(x,Fr,':',x,Fs,'r',x,Ft,'c--')
ylabel('Fr[N]-b:, Fs[N]-r, Ft[N]-c--')

```

```

xlabel('lunghezza [m]')
title('forza magnetica in funzione della lunghezza')
grid

Frm=sum(Fr); %forza magnetica totale in R
Fsm=sum(Fs); %forza magnetica totale in S
Ftm=sum(Ft); %forza magnetica totale in T

%REAZIONI VINCOLARI = calcolate considerando il baricentro della
%forza distribuita al centro della barra appoggiata ai due
%estremi. Risulta quindi che la reazione vale metà della forza
%totale su ciascun appoggio

%tensioni interne=====

%calcolo del taglio=====

for k=1:size(Fr)
    %calcolo del taglio in ogni k-esimo segmento nelle tre sbarre
    Tr(k)=(Frm/2)-sum(Fr(1:k)); %taglio fase R
    Ts(k)=(Fsm/2)-sum(Fs(1:k)); %taglio fase S
    Tt(k)=(Ftm/2)-sum(Ft(1:k)); %taglio fase T
end

%grafico del taglio su ogni sbarra in funzione della
%lunghezza

figure(3)
plot(x,Tr,':',x,Ts,'r',x,Tt,'c--')
ylabel('Tr[N]-b:, Ts[N]-r, Tt[N]-c--')
xlabel('lunghezza [m]')
title('taglio in funzione della lunghezza')
grid

%momento flettente=====

for k=1:size(Fr)
    %calcolo del momento in ogni k-esimo segmento nelle tre sbarre

    %momento fase R: Mreazione vincolare + Msomma forze distribuite
    %moltiplicate distanza dal punto k-esimo
    Mr(k)=(Frm/2)*((k-1)*dl+(dl/2))-dl*sum(Fr(1:(k-1)).*...
        [(k-1):-1:1]');

    %momento fase S: Mreazione vincolare + Msomma forze distribuite
    %moltiplicate distanza dal punto k-esimo
    Ms(k)=(Fsm/2)*((k-1)*dl+(dl/2))-dl*sum(Fs(1:(k-1)).*...
        [(k-1):-1:1]');

    %momento fase T: Mreazione vincolare + Msomma forze distribuite
    %moltiplicate distanza dal punto k-esimo
    Mt(k)=(Ftm/2)*((k-1)*dl+(dl/2))-dl*sum(Ft(1:(k-1)).*...
        [(k-1):-1:1]');

end

```

```

end

%grafico del momento su ogni sbarra in funzione della
%lunghezza

figure(4)
plot(x,Mr,':',x,Ms,'r',x,Mt,'c--')
ylabel('Mr[Nm]-b:, Ms[Nm]-r, Mt[Nm]-c--')
xlabel('lunghezza [m]')
title('momento in funzione della lunghezza')
grid

% verifica sollecitazioni con il criterio di von Mises=====

nsv=100; %numero di punti di verifica sollecitazione
R2=Dest/2; %raggio esterno sbarra
R1=Dint/2; %raggio interno sbarra

%vettore che indica a quale distanza dal centro verificare
%la sollecitazione
h=0:R2/nsv:R2-R2/nsv;

%momento d'inerzia della sbarra rispetto a x perpendicolare
%all'asse della sbarra
Ix=(pi/64)*((Dest^4)-Dint^4);

%calcolo del momento statico e della corda sottesa
%in ogni punto di verifica che serviranno poi per il calcolo
%delle sollecitazioni di taglio con la formula di Jourawski

for k=1:size(h,2)
    %per ogni punto indicato da y
    if abs(h)<(R1)
        %se il punto in esame è minore del raggio interno
        %momento statico o del primo ordine
        S(k)=(2/3)*((R2*R2-h(k)*h(k))^3/2-(R1*R1-h(k)*h(k))^3/2);

        %corda sottesa
        b(k)=2*(sqrt(R2*R2-h(k)*h(k))-sqrt(R1*R1-h(k)*h(k)));

    else

        %se il punto in esame è maggiore del raggio interno
        %momento statico o del primo ordine
        S(k)=(2/3)*((R2*R2-h(k)*h(k))^3/2);

        %corda sottesa
        b(k)=2*(sqrt(R2*R2-h(k)*h(k)));
    end
end

% fase R
for k=1:size(lr,1)
    sig=(Mr(k)*h)/Ix; %tensione dovuta a flessione
    t=(Tr(k).*S)/(Ix.*b); %tensione dovuta a taglio
end

```

```

%si prende il valore massimo di sollecitazione calcolato
%con il metodo von Mises
sigvmr(k)=max(sqrt(sig.*sig+3*t.*t));

%valore senza considerare il taglio
sigvmr1(k)=max(abs(sig));
end

% fase S
for k=1:size(ls,1)
sig=(Ms(k)*h)/Ix;          %tensione dovuta a flessione
t=(Ts(k).*S)/(Ix.*b); %tensione dovuta a taglio

%si prende il valore massimo di sollecitazione calcolato
%con il metodo von Mises
sigvms(k)=max(sqrt(sig.*sig+3*t.*t));

%valore senza considerare il taglio
sigvms1(k)=max(abs(sig));
end

% fase T
for k=1:size(lt,1)
sig=(Mt(k)*h)/Ix;          %tensione dovuta a flessione
t=(Tt(k).*S)/(Ix.*b); %tensione dovuta a taglio

%si prende il valore massimo di sollecitazione calcolato
%con il metodo von Mises
sigvmt(k)=max(sqrt(sig.*sig+3*t.*t));

%valore senza considerare il taglio
sigvmt1(k)=max(abs(sig));
end

%grafico della sollecitazione massima in funzione
%della lunghezza

figure(5)
plot(x,sigvmr,':',x,sigvms,'r',x,sigvmt,'c--')
hold on
title('massima tensione con von mises')
ylabel('R[N/m^2]-b:, S[N/m^2]-r, T[N/m^2]-c--')
xlabel('lunghezza [m]')
%grafico senza considerare il taglio
plot(x,sigvmr1,':',x,sigvms1,'r',x,sigvmt1,'c--')
grid

```

A2 Programma principale completo di calcolo degli sforzi su n sbarre senza vincoli di posizione e lunghezza

```

%programmata di calcolo degli sforzi su n sbarre senza vincoli di
%posizione e lunghezza, dati i punti iniziali e finali e il
%valore della corrente su ciascuna

clear all
close all
clc

%maschera di inserimento dati=====

%I=matrice in ingresso:
%righe: k-esima riga=k-esima sbarra
%colonne: n°sbarra - punto iniziale - punto finale - corrente
%il verso della corrente è considerato dal punto iniziale a quello
%finale

ipicco=43000; %corrente di picco in un sistema trifase

ir=ipicco*sin(5*pi/12); %corrente nella fase R
is=ipicco*sin(5*pi/12-2*pi/3); %corrente nella fase S
it=ipicco*sin(5*pi/12-4*pi/3); %corrente nella fase T

I=[...
    1  0  0  0  11  0  0  ir
    2  0  2.2  0  11  2.2  0  is
    3  0  4.4  0  11  4.4  0  it];

Dest=0.1; %diametro esterno sbarra[m]
Dint=0.086; %diametro interno sbarra[m]

dl=0.055; %lunghezza dei segmenti in cui scomporre la sbarra

N=zeros(size(I,1),1); %vettore del n°segmenti per ogni sbarra
T=zeros(size(I,1),3); %matrice vettori sbarre (stesso modulo e
%verso)
v=zeros(size(I,1),3); %matrice versori sbarre (stesso verso,
%modulo=1)
L=N; %vettore delle lunghezze di ogni sbarra

for k=1:size(I,1) %per ogni barra
    T(k,1)=I(k,5)-I(k,2); %componente in x k-esima sbarra
    T(k,2)=I(k,6)-I(k,3); %componente in y k-esima sbarra
    T(k,3)=I(k,7)-I(k,4); %componente in z k-esima sbarra
    L(k)=norm(T(k,:)); %lunghezza k-esima sbarra
    N(k)=round(L(k)/dl); %n°intero di segmenti k-esima sbarra
    v(k,:)=(T(k,:))./L(k);
end

%matrice del campo magnetico=====
%righe: k-esima riga=k-esima sbarra
%colonne: 3 colonne per ogni punto(componenti del vettore B) quindi
%n°colonne=3 volte il massimo valore di N

```

```

B=zeros(size(I,1),3*max(N));

%ogni sbarra è divisa in segmenti lunghi dl, per ciascuno il campo
%magnetico è dato dalla somma di tutti i contributi di tutti gli
%altri segmenti sia della stessa sbarra che delle altre sbarre.
%Essendo delle barre rettilinee il contributo dei segmenti della
%stessa sbarra dovrebbe essere nullo

for k=1:size(I,1)
    %per ogni k-esima sbarra in cui si sta calcolando B

    for g=1:N(k)
        %per ogni g-esimo segmento della k-esima sbarra in cui si
        %sta calcolando B

        for m=1:size(I,1)
            %per ogni m-esima sbarra in cui c'è il segmento
            %h-esimo in esame che produce il contributo del campo
            %nel g-esimo segmento della k-esima sbarra in cui si
            %sta calcolando B

            for h=1:N(m)
                %per ogni h-esimo segmento della m-esima sbarra
                %che produce il contributo del campo nel g-esimo
                %segmento della k-esima sbarra in cui si sta
                %calcolando B

                if k==m
                    %se la sbarra che produce è stessa che
                    %osserva = non fare nulla, perché non è
                    %necessario ed inoltre il contributo del campo
                    %prodotto dallo stesso segmento (quando h=g)
                    %è indefinito
                else
                    B(k,(3*g-2):1:(3*g))=B(k,(3*g-2):1:(3*g))+...
                    (FBP(I(k,2:1:4)+(g*dl-dl/2)*v(k,1:1:3),...
                    I(m,2:1:4)+(h*dl-dl/2)*v(m,1:1:3),...
                    v(m,:),I(m,8),dl));
                end
            end
        end
    end
end

%calcolo della forza magnetica F=I*dl*(v x B)=====
%matrice delle forze magnetiche uguale a quella di B
F=B;

for k=1:size(I,1)
    %per ogni sbarra

    for g=1:N(k)
        %per ogni segmento della k-esima sbarra

```

```

F(k, (3*g-2):1:(3*g))=I(k,8)*dl*cross(v(k,:),...
B(k, (3*g-2):1:(3*g)));

    end
end

%sezione di verifica=====

%calcolo della forza totale su x
Fx=zeros(size(I,1),1);
for k=1:size(I,1)
    %per ogni sbarra

    for g=1:N(k)
        %per ogni segmento della k-esima sbarra
        Fx(k)=Fx(k)+(F(k,3*g-2));
    end
end

%calcolo della forza totale su y
Fy=zeros(size(I,1),1);
for k=1:size(I,1)
    %per ogni sbarra

    for g=1:N(k)
        %per ogni segmento della k-esima sbarra

        Fy(k)=Fy(k)+(F(k,3*g-1));
    end
end

%calcolo della forza totale su z
Fz=zeros(size(I,1),1);
for k=1:size(I,1)
    %per ogni sbarra

    for g=1:N(k)
        %per ogni segmento della k-esima sbarra
        Fz(k)=Fz(k)+(F(k,3*g));
    end
end

%calcolo del sistema di versori orientati secondo le sbarre=====
t=zeros(size(v)); %matrice dei versori perpendicolari alla sbarra

%matrice dei versori perpendicolari alla sbarra tale che (t x s)=v
s=t;
for k=1:size(I,1)
    P=VTS(v(k,:)); %funzione che ricava i versori

    %versore t
    t(k,:)=P(1:1:3);
    %versore s
    s(k,:)=P(4:1:6);
end

```

```

%calcolo del campo magnetico nel sistema di vettori orientati
%secondo le sbarre
Bvts=zeros(size(B));

for k=1:size(I,1)
    %per ogni sbarra
    for g=1:N(k)
        %per ogni tratto

        %campo magnetico lungo la direzione v per le tre sbarre
        Bvts(k,3*g-2)=B(k,3*g-2:1:3*g)*v(k,:);
        %campo magnetico lungo la direzione t per le tre sbarre
        Bvts(k,3*g-1)=B(k,3*g-2:1:3*g)*t(k,:);
        %campo magnetico lungo la direzione s per le tre sbarre
        Bvts(k,3*g)=B(k,3*g-2:1:3*g)*s(k,:);

    end
end

%calcolo della forza nel sistema di vettori orientati secondo
%le sbarre
Fvts=zeros(size(F));

for k=1:size(I,1)
    %per ogni sbarra
    for g=1:N(k)
        %per ogni tratto

        %forza lungo la direzione v
        %(dovrebbe essere zero a meno di errori di troncamento)
        Fvts(k,3*g-2)=F(k,3*g-2:1:3*g)*v(k,:);
        %forza lungo la direzione t
        Fvts(k,3*g-1)=F(k,3*g-2:1:3*g)*t(k,:);
        %forza lungo la direzione s
        Fvts(k,3*g)=F(k,3*g-2:1:3*g)*s(k,:);

    end
end

%calcolo della forza totale nelle direzioni vts=====
Fvm=zeros(size(I,1),1); %forza totale lungo v delle varie sbarre
Ftm=zeros(size(I,1),1); %forza totale lungo t delle varie sbarre
Fsm=zeros(size(I,1),1); %forza totale lungo s delle varie sbarre

for k=1:size(I,1)
    for g=1:N(k)
        Fvm(k)=Fvm(k)+(Fvts(k,3*g-2));
        Ftm(k)=Ftm(k)+(Fvts(k,3*g-1));
        Fsm(k)=Fsm(k)+(Fvts(k,3*g));
    end
end

%grafico del campo magnetico nel sistema di vettori orientati
%secondo le sbarre

```

```

for k=1:size(I,1)
    %per ogni sbarra

    %campo magnetico lungo la direzione v
    Bv=Bvts(k,1:3:size(Bvts,2));
    %campo magnetico lungo la direzione t per le tre sbarre
    Bs=Bvts(k,2:3:size(Bvts,2));
    %campo magnetico lungo la direzione s per le tre sbarre
    Bt=Bvts(k,3:3:size(Bvts,2));
    %modulo del campo magnetico
    Btot=sqrt(Bv.*Bv+Bt.*Bt+Bs.*Bs);

    x=(dl/2):dl:(dl*max(N)-dl/2); %asse x dei grafici=lunghezza

    figure(k)
    %grafico del campo lungo le direzioni v,t,s
    plot(x,Bv,':',x,Bt,'r',x,Bs,'c--')
    hold on
    %grafico del campo complessivo in modulo
    plot(x,Btot,'k','LineWidth',2)
    title(['Campo magnetico sbarra ',num2str(k)])
    ylabel('Bv-b: [T], Bt-r [T], Bs-c-- [T], |Btot-k| [T]')
    xlabel('lunghezza [m]')
    grid

end

%grafico della forza nel sistema di vettori orientati
%secondo le sbarre
for k=1:size(I,1) %per ogni sbarra

    %forza lungo la direzione v
    Fv=Fvts(k,1:3:size(Fvts,2));
    %forza lungo la direzione t per le tre sbarre
    Fs=Fvts(k,2:3:size(Fvts,2));
    %forza lungo la direzione s per le tre sbarre
    Ft=Fvts(k,3:3:size(Fvts,2));
    %modulo della forza
    Ftot=sqrt(Fv.*Fv+Ft.*Ft+Fs.*Fs);

    x=(dl/2):dl:(dl*max(N)-dl/2); %asse x dei grafici=lunghezza

    figure(size(I,1)+k)
    %grafico della forza lungo le direzioni v,t,s
    plot(x,Fv,':',x,Ft,'r',x,Fs,'c--')
    hold on
    %grafico della forza complessiva in modulo
    plot(x,Ftot,'k','LineWidth',2)
    title(['Forza nella sbarra ',num2str(k),])
    ylabel('Fv-b: [N], Ft-r [N], Fs-c-- [N], |Ftot-k| [N]')
    xlabel('lunghezza [m]')
    grid

end

```

```

%calcolo del momento flettente e tensioni interne=====

%matrice momenti flettenti nei vari tratti delle k sbarre asse t
Mt=zeros(size(I,1),max(N));
%matrice momenti flettenti nei vari tratti delle k sbarre asse s
Ms=Mt;
%matrice momenti flettenti nei vari tratti delle k sbarre
Mtot=Mt;
%vettore reazioni vincolari delle k sbarre asse t nel primo appoggio
Rt=zeros(size(I,1),1);
%vettore reazioni vincolari delle k sbarre asse s nel primo appoggio
Rs=Rt;
%vettore reazioni vincolari complessive nel primo appoggio
R1=Rt;
%vettore reazioni vincolari complessive nel secondo appoggio
R2=Rt;
%matrice della tensione interna massima nei vari tratti delle
% sbarre dovuta al momento di asse t
sigt=zeros(size(I,1),max(N));
%matrice della tensione interna massima nei vari tratti delle
% sbarre dovuta al momento di asse s
sigs=sigt;
%matrice della tensione interna massima nei vari tratti delle sbarre
sig=sigt;

%momento d'inerzia della sbarra rispetto alla linea perpendicolare
%all'asse della sbarra
Ix=(pi/64)*((Dest^4)-Dint^4);

for k=1:size(I,1)
    %per ogni sbarra

    %calcolo delle reazioni vincolari

    %definizioni momento statico lungo assi t,s
    Sft=0;
    Sfs=0;

    for h=1:N(k)
        %per ogni tratto

        %momento del primo ordine direzione t
        Sft=Sft+((h-1)*dl+dl/2)*Fvts(k,3*h-1);
        %momento del primo ordine direzione s
        Sfs=Sfs+((h-1)*dl+dl/2)*Fvts(k,3*h);

    end

    %reazione vincolare lungo t
    if Ftm(k)==0% se la forza è nulla non calcolare la reazione
        Rt(k)=0;
    else
        %distanza della risultante dal primo ammpoggio asse t
        Hbt=Sft/Ftm(k);
        %reazione vincolare lungo t
        Rt(k)=Ftm(k)*(L(k)-Hbt)/L(k);
    end
end

```

```

end

%reazione vincolare lungo s
if Fsm(k)==0% se la forza è nulla non calcolare la reazione
    Rs(k)=0;
else
    Hbs=Sfs/Fsm(k); %distanza baricentro di s
    Rs(k)=Fsm(k)*(L(k)-Hbs)/L(k); %reazione vincolare lungo s
end

%reazioni vincolari complessive nel primo appoggio
R1(k)=sqrt(Rt(k)*Rt(k)+Rs(k)*Rs(k));
%reazioni vincolari complessive nel secondo appoggio
R2(k)=sqrt(Ftm(k)*Ftm(k)+Fsm(k)*Fsm(k))-R1(k);

end

%momento flettente e tensione interna per ogni sbarra (trascurando
%l'effetto del taglio)

for k=1:size(I,1)
    %per ogni sbarra

    for g=1:N(k)

        %asse t
        %momento fase k lungo t: Mreazione vincolare + Msomma forze
        %distribuite moltiplicate distanza dal punto g-esimo
        Mt(k,g)=(Rt(k)*((g-1)*dl+dl/2)-...
            dl*(sum(Fvts(k,2:3:3*(g-1)).*((g-1):-1:1))));
        %tensione interna massima dovuta al momento di asse t
        %nel punto g della sbarra k
        sigt(k,g)=(Mt(k,g)/Ix)*(Dest/2);

        %asse s
        %momento fase k lungo s: Mreazione vincolare + Msomma forze
        %distribuite moltiplicate distanza dal punto g-esimo
        Ms(k,g)=(Rs(k)*((g-1)*dl+dl/2)-...
            dl*(sum(Fvts(k,3:3:3*(g-1)).*((g-1):-1:1))));
        %tensione interna massima dovuta al momento di asse t
        %nel punto g della sbarra k
        sigs(k,g)=(Ms(k,g)/Ix)*(Dest/2);

        %momento e sforzo complessivo
        Mtot(k,g)=sqrt(Ms(k,g)*Ms(k,g)+Mt(k,g)*Mt(k,g));
        sig(k,g)=(Mtot(k,g)/Ix)*(Dest/2);

    end

    %grafici del momento nelle direzioni t s
    x=(dl/2):dl:(dl*max(N)-dl/2); %asse x
    figure(2*size(I,1)+2*k-1)
    %grafico del momento lungo le direzioni ts
    plot(x,Mt(k,:), 'r', x, Ms(k,:), 'c--')
    hold on

```

```

%grafico del momento complessivo in modulo
plot(x,Mtot(k,:), 'k', 'LineWidth',2)
title(['momento nella sbarra ', num2str(k),])
ylabel('Mt-r [Nm], Ms-c-- [Nm], |Mtot-k| [Nm]')
xlabel('lunghezza [m]')
grid

%grafici delle tensioni interne nelle direzioni t s
figure(2*size(I,1)+2*k)
%grafico della tensione interna lungo le direzioni ts
plot(x, sigt(k,:), 'm', x, sigs(k,:), 'y--')
hold on
%grafico delle tensione interna complessiva in modulo
plot(x, sig(k,:), 'k', 'LineWidth',2)
title(['tensione nella sbarra ', num2str(k),])
ylabel('sigt-m [N/m^2], sigs-y-- [N/m^2], |sig-k| [N/m^2]')
xlabel('lunghezza [m]')
grid

end

%disegno delle sbarre nello spazio=====

for k=1:size(I,1)
    %per ogni sbarra

    %matrice contenente le coordinate xyz di ogni punto sulla sbarra
    D=zeros(N(k),3);
    %matrice che indicherà la forza su ogni punto
    F3d=D;
    %matrice che indicherà il momento sull'asse t ogni punto
    Mbt=D;
    %matrice che indicherà il momento sull'asse s ogni punto
    Mbs=D;
    %matrice che indicherà il momento complessivo per ogni punto
    M3d=D;

    for g=1:N(k)
        %per ogni punto sulla sbarra

        %posizione del punto sulla sbarra
        D(g,:)=I(k,2:4)+(g*dl-dl/2)*v(k,:);

        %curva della forza
        %posizione dei punti indicanti la forza ridotta di 5
        F3d(g,:)=D(g,:)+F(k,3*g-2:1:3*g)/5;

        %curva dei momenti
        %posizione dei punti indicanti il momento flettente ridotto
        %di 1000 lungo l'asse t
        Mbt(g,:)=D(g,:)+Mt(k,g).*t(k,:)./1000;
        %posizione dei punti indicanti il momento flettente ridotto
        %di 1000 lungo l'asse s
        Mbs(g,:)=D(g,:)+Ms(k,g).*s(k,:)./1000;
        %posizione dei punti indicanti il momento flettente
    end
end

```

```

        %complessivo ridotto di 1000
        M3d(g,:) = Mbt(g,:) + Mbs(g,:) - D(g,:);

    end

    figure(4*size(I,1)+1)
    title('Sbarre nello spazio')
    %disegno sbarre
    plot3(D(:,1),D(:,2),D(:,3),'LineWidth',2)
    hold on
    %disegno forze
    plot3(F3d(:,1),F3d(:,2),F3d(:,3),'g')
    %disegno momento flettente
    plot3(M3d(:,1),M3d(:,2),M3d(:,3),'r')
end
grid

%cancellazione delle variabile ausiliarie=====
clear k
clear g
clear m
clear h

clear x

```

A2.1. Function FBP

```

function [db] = FBP(A,B,t,I,d1)
%function [db] = FBP(A,B,t,I,d1)
%calcola il valore di db[3,1] in un punto di osservazione A[3,1]
%dovuto alla corrente I in un punto B[3,1] che segue la direzione
%del vettore t[3,1] in un segmento di lunghezza d1

m0=4*pi*1e-7; %permeabilità magnetica
AB=A-B;      %vettore raggio
r=norm(AB);  %distanza tra i due punti
vr=AB./r;    %versore tra i due punti
db=(m0*I*d1/(r*r*4*pi)).*cross(t,vr);
end

```

A2.2. Function VTS

```

function [P] = VTS(v)
%function [P] = VTS(v)
%calcola una matrice P[6,1] contenente i due versori t[3,1] ed
%s[3,1] perpendicolari tra loro e il loro prodotto vettoriale
%(t x s) è uguale al versore di v. P=[t[3,1] s[3,1]]

%componenti vettore in x,y a cui deve essere perpendicolare
vx=v(1);
vy=v(2);

%versore t
%componente lungo z
tz=0; %posto uguale a zero per semplificare il calcolo

```

```

%componenti lungo x,y
if vx==0
    %se vx=0 il vettore t è [1 0 0]
    tx=1;
    ty=0;
else
    %calcolo delle componenti di t se vx non è zero
    ty=1/sqrt((vy*vy/(vx*vx)+1));
    tx=-(vy/vx)*ty;
end

%costruzione del versore t dalle componenti
t=[tx ty tz];

%calcolo del versore s perpendicolare a t e a v
s=cross(v,t)/norm(v);

%matrice in uscita con i due versori nella stessa riga
P=[t s];

end

```

A3 Programma principale completo per il calcolo degli sforzi in conduttori flessibili

```

%Programma per il calcolo degli sforzi in conduttori flessibili:
%ricava la forma assunta da tre conduttori flessibili e la
%loro tensione senza vincoli di posizione

clear all
close all
clc

%maschera di inserimento dati=====

dl=0.125; %lunghezza di ogni tratto con cui si suddivide i
conduttori

D=0.022; %diametro esterno dei conduttori

%correnti
ipicco=43000; %corrente di picco in un sistema trifase

ir=ipicco*sin(5*pi/12); %corrente nella fase R
is=ipicco*sin(5*pi/12-2*pi/3); %corrente nella fase S
it=ipicco*sin(5*pi/12-4*pi/3); %corrente nella fase T

%I=matrice in ingresso:
%righe: conduttore
%colonne: n° - primo punto - secondo punto - tiro - peso lineare -
%lunghezza - corrente

I=[...
    1  0  0  0  0  5.2  2.6  60  10  6  ir
    2  2.2  0  0  2.2  5.2  2.6  60  10  6  is
    3  4.4  0  0  4.4  5.2  2.6  60  10  6  it];

%1° colonna = numero del conduttore
%2°-3°-4° colonna = punto iniziale in x,y,z conduttore
%5°-6°-7° colonna = punto finale ipotizzato del conduttore in x,y,z
%Non si raggiunga questo valore, ma un punto distante da esso un
%certo errore. E' bene che l'errore sia minore della distanza dl
%altrimenti non è corretto il punto scelto come ad esempio se è più
%distante della lunghezza massima
%8° colonna = tiro ipotizzato del conduttore (se necessario
%viene incrementato nella function per rimanere vicino al punto
%finale scelto
%9° colonna = peso specifico del conduttore per unità di
%lunghezza
%10° colonna = lunghezza totale conduttore conduttore
%11° colonna = corrente del conduttore

%lettura dei dati=====

%conduttore R
LR=I(1,10); %lunghezza totale conduttore conduttore R

```

```

P0R=I(1,2:1:4);           %punto iniziale in x,y,z conduttore R
PfR=I(1,5:1:7);         %punto finale in x,y,z conduttore R
HR=I(1,8);              %tiro del conduttore R
pR=I(1,9);              %peso conduttore R per unità di lunghezza
NR=size((dl:dl:LR),2);  %numero di tratti

%conduttore S
LS=I(2,10);             %lunghezza totale conduttore conduttore S
P0S=I(2,2:1:4);         %punto iniziale in x,y,z conduttore S
PfS=I(2,5:1:7);         %punto finale in x,y,z conduttore S
HS=I(2,8);              %tiro del conduttore S
pS=I(2,9);              %peso conduttore S per unità di lunghezza
NS=size((dl:dl:LS),2);  %numero di tratti

%conduttore T
LT=I(3,10);             %lunghezza totale conduttore conduttore T
P0T=I(3,2:1:4);         %punto iniziale in x,y,z conduttore T
PfT=I(3,5:1:7);         %punto finale in x,y,z conduttore T
HT=I(3,8);              %tiro del conduttore T
pT=I(3,9);              %peso conduttore T per unità di lunghezza
NT=size((dl:dl:LT),2);  %numero di tratti

%disposizione dovuta alla sola forza peso=====
%la forza peso è diretta lungo z senza inclinazioni

%Vettori lungo la direzione dei punti iniziali e finali

%conduttore R
hR=[PfR(1)-P0R(1) PfR(2)-P0R(2) PfR(3)-P0R(3)];
%conduttore S
hS=[PfS(1)-P0S(1) PfS(2)-P0S(2) PfS(3)-P0S(3)];
%conduttore T
hT=[PfT(1)-P0T(1) PfT(2)-P0T(2) PfT(3)-P0T(3)];

%il versore è ricavabile dividendo per il rispettivo modulo:
%sqrt(h(1)*h(1)+h(2)*h(2))

%calcolo della matrice P[3 x N]:
%matrice P[3 x N] dei punti centrali presenti (con z=P0R(3)) nel
%conduttore = un punto si trova al centro di ogni tratto lungo dl:
%colonna: punto in esame
%righe: 1°e2°riga: coordinate x,y del punto in esame,
%3°riga: coordinata z del punto iniziale, uguale per tutti i punti
%conduttore R
PR=[...
    P0R(1)+((dl:dl:LR)-dl/2)*hR(1)/sqrt(hR(1)*hR(1)+hR(2)*hR(2))
    P0R(2)+((dl:dl:LR)-dl/2)*hR(2)/sqrt(hR(1)*hR(1)+hR(2)*hR(2))
    P0R(3)*ones(1,NR)];
%conduttore S
PS=[...
    P0S(1)+((dl:dl:LS)-dl/2)*hS(1)/sqrt(hS(1)*hS(1)+hS(2)*hS(2))
    P0S(2)+((dl:dl:LS)-dl/2)*hS(2)/sqrt(hS(1)*hS(1)+hS(2)*hS(2))
    P0S(3)*ones(1,NS)];
%conduttore T
PT=[...
    P0T(1)+((dl:dl:LT)-dl/2)*hT(1)/sqrt(hT(1)*hT(1)+hT(2)*hT(2))

```

```

POT(2)+( (dl:dl:LT)-dl/2)*hT(2)/sqrt(hT(1)*hT(1)+hT(2)*hT(2))
POT(3)*ones(1,NT)];

%calcolo della matrice V[6 x N]:

%colonna: tratto in esame

%1°-2°-3°riga: componenti x,y,z del vettore intermedio che congiunge
%il punto estremo precedente (quello all'inizio del tratto lungo dl)
%con il punto in esame (che è al centro del tratto lungo dl).
%la norma di esso è metà della lunghezza dl del tratto

%3°-4°-5°riga: coordinate x,y,z del punto estremo successivo
%ricavate grazie al vettore intermedio. Il primo punto estremo è P0

%conduttore R
VR=zeros(6,NR);
for g=1:NR
    %per ogni tratto
    if g==1
        %se il tratto è il primo
        VR(1:1:3,g)=PR(:,g)-P0R';           %vettore intermedio
        VR(4:1:6,g)=PR(:,g)+VR(1:1:3,g);   %punto intermedio
    else
        VR(1:1:3,g)=PR(:,g)-VR(4:1:6,g-1); %vettore intermedio
        VR(4:1:6,g)=PR(:,g)+VR(1:1:3,g);   %punto intermedio
    end
end

%conduttore S
VS=zeros(6,NS);
for g=1:NS
    %per ogni tratto
    if g==1
        %se il tratto è il primo
        VS(1:1:3,g)=PS(:,g)-P0S';           %vettore intermedio
        VS(4:1:6,g)=PS(:,g)+VS(1:1:3,g);   %punto intermedio
    else
        VS(1:1:3,g)=PS(:,g)-VS(4:1:6,g-1); %vettore intermedio
        VS(4:1:6,g)=PS(:,g)+VS(1:1:3,g);   %punto intermedio
    end
end

%conduttore T
VT=zeros(6,NT);
for g=1:NT
    %per ogni tratto
    if g==1
        %se il tratto è il primo
        VT(1:1:3,g)=PT(:,g)-P0T';           %vettore intermedio
        VT(4:1:6,g)=PT(:,g)+VT(1:1:3,g);   %punto intermedio
    else
        VT(1:1:3,g)=PT(:,g)-VT(4:1:6,g-1); %vettore intermedio
        VT(4:1:6,g)=PT(:,g)+VT(1:1:3,g);   %punto intermedio
    end
end
end

```

```

%conduttore con solo forza peso
%calcolo della forza peso

%matrice forza conduttore R
FR=zeros(3,NR);
for g=1:NR
    FR(3,g)=-2*pR*norm(VR(1:1:3,g));
end

%matrice forza conduttore S
FS=zeros(3,NS);
for g=1:NS
    FS(3,g)=-2*pS*norm(VS(1:1:3,g));
end

%matrice forza conduttore T
FT=zeros(3,NT);
for g=1:NT
    FT(3,g)=-2*pT*norm(VT(1:1:3,g));
end

%calcolo della disposizione con solo forza peso

%conduttore R
P1V1S1R=DISPOSIZIONEFP(FR,P0R,PfR,HR,d1);
%divisione delle sottomatrici
P1R=P1V1S1R(1:1:3,:);
V1R=P1V1S1R(4:1:9,:);

%conduttore S
P1V1S1S=DISPOSIZIONEFP(FS,P0S,PfS,HS,d1);
%divisione delle sottomatrici
P1S=P1V1S1S(1:1:3,:);
V1S=P1V1S1S(4:1:9,:);

%conduttore T
P1V1S1T=DISPOSIZIONEFP(FT,P0T,PfT,HT,d1);
%divisione delle sottomatrici
P1T=P1V1S1T(1:1:3,:);
V1T=P1V1S1T(4:1:9,:);

%grafico trazione forza peso
figure(2)
hold on
grid on
plot((dl:dl:LR)-dl/2, P1V1S1R(10,:), 'b')
title('Trazione conduttore R')
ylabel('Trazione [N]')
xlabel('lunghezza [m]')
% plot((dl:dl:LR)-dl/2, P1V1S1S(10,:), 'r')
% plot((dl:dl:LR)-dl/2, P1V1S1T(10,:), 'c')

%calcolo del campo magnetico, della forza magnetica e della=====
%disposizione successiva

```

```

%matrici del campo per i tre conduttori
BR=zeros(3,NR);
BS=zeros(3,NS);
BT=zeros(3,NT);

%CONDUTTORE R
for gr=1:NR
    %campo magnetico
    %campo generato dal conduttore R
    for grr=1:NR
        if grr==gr
            else
                BR(1:1:3,gr)=BR(1:1:3,gr)+FBP(P1R(1:1:3,gr),...
                    P1R(1:1:3,grr),V1R(1:1:3,grr)/(dl/2),I(1,11),dl);
            end
        end
    end
    %campo generato dal conduttore S
    for gs=1:NS
        BR(1:1:3,gr)=BR(1:1:3,gr)+FBP(P1R(1:1:3,gr),...
            P1S(1:1:3,gs),V1S(1:1:3,gs)/(dl/2),I(2,11),dl);
    end
    %campo generato dal conduttore T
    for gt=1:NT
        BR(1:1:3,gr)=BR(1:1:3,gr)+FBP(P1R(1:1:3,gr),...
            P1T(1:1:3,gt),V1T(1:1:3,gt)/(dl/2),I(3,11),dl);
    end
    %forza magnetica
    FR(1:1:3,gr)=FR(1:1:3,gr)+I(1,11)*dl*...
        cross(V1R(1:1:3,gr)/(dl/2),BR(1:1:3,gr));
end

%CONDUTTORE S
for gs=1:NS
    %campo magnetico
    %campo generato dal conduttore R
    for gr=1:NR
        BS(1:1:3,gs)=BS(1:1:3,gs)+FBP(P1S(1:1:3,gs),...
            P1R(1:1:3,gr),V1R(1:1:3,gr)/(dl/2),I(1,11),dl);
    end
    %campo generato dal conduttore S
    for gss=1:NS
        if gss==gs
            else
                BS(1:1:3,gs)=BS(1:1:3,gs)+FBP(P1S(1:1:3,gs),...
                    P1S(1:1:3,gss),V1S(1:1:3,gss)/(dl/2),I(2,11),dl);
            end
        end
    end
    %campo generato dal conduttore T
    for gt=1:NT
        BS(1:1:3,gs)=BS(1:1:3,gs)+FBP(P1S(1:1:3,gs),...
            P1T(1:1:3,gt),V1T(1:1:3,gt)/(dl/2),I(3,11),dl);
    end
    %forza magnetica
    FS(1:1:3,gs)=FS(1:1:3,gs)+I(2,11)*dl*...
        cross(V1S(1:1:3,gs)/(dl/2),BS(1:1:3,gs));
end

```

```

%CONDUTTORE T
for gt=1:NT
    %campo magnetico
    %campo generato dal conduttore R
    for gr=1:NR
        BT(1:1:3,gt)=BT(1:1:3,gt)+FBP(P1T(1:1:3,gt),...
            P1R(1:1:3,gr),V1R(1:1:3,gr)/(dl/2),I(1,11),dl);
    end
    %campo generato dal conduttore S
    for gs=1:NS
        BT(1:1:3,gt)=BT(1:1:3,gt)+FBP(P1T(1:1:3,gt),...
            P1S(1:1:3,gs),V1S(1:1:3,gs)/(dl/2),I(2,11),dl);
    end
    %campo generato dal conduttore T
    for gtt=1:NT
        if gtt==gt
            else
                BT(1:1:3,gt)=BT(1:1:3,gt)+FBP(P1T(1:1:3,gt),...
                    P1T(1:1:3,gtt),V1T(1:1:3,gtt)/(dl/2),I(3,11),dl);
            end
        end
    end
    %forza magnetica
    FT(1:1:3,gt)=FT(1:1:3,gt)+I(3,11)*dl*...
        cross(V1T(1:1:3,gt)/(dl/2),BT(1:1:3,gt));
end

%ricalcolo della posizione=====
%CONDUTTORE R
P2V2S2R=DISPOSIZIONE(FR,P0R,PfR,HR,dl);
P2R=P2V2S2R(1:1:3,:);
V2R=P2V2S2R(4:1:9,:);

%CONDUTTORE S
P2V2S2S=DISPOSIZIONE(FS,P0S,PfS,HS,dl);
P2S=P2V2S2S(1:1:3,:);
V2S=P2V2S2S(4:1:9,:);

%CONDUTTORE T
P2V2S2T=DISPOSIZIONE(FT,P0T,PfT,HT,dl);
P2T=P2V2S2T(1:1:3,:);
V2T=P2V2S2T(4:1:9,:);

%=====
figure(1)
hold on
grid on

%conduttore R
%grafico disposizione solo forza peso
plot3(P1R(1,:),P1R(2,:),P1R(3:,:), 'c', 'LineWidth',2)
%grafico disposizione forza peso e magnetica
plot3(P2R(1,:),P2R(2,:),P2R(3:,:), 'r:', 'LineWidth',2)

%conduttore S
%grafico disposizione solo forza peso
plot3(P1S(1,:),P1S(2,:),P1S(3:,:), 'c', 'LineWidth',2)

```

```

%grafico disposizione forza peso e magnetica
plot3(P2S(1,:),P2S(2,:),P2S(3,),'r','LineWidth',2)

%conduttore T
%grafico disposizione solo forza peso
plot3(P1T(1,:),P1T(2,:),P1T(3,),'c','LineWidth',2)
%grafico disposizione forza peso e magnetica
plot3(P2T(1,:),P2T(2,:),P2T(3,),'r','LineWidth',2)

% iterazioni successive=====
for qq=1:6
%iterazione q-esima

%riscrizione delle matrici di posizione
%conduttore R
P1R=P2R;
V1R=V2R;
%conduttore S
P1S=P2S;
V1S=V2S;
%conduttore T
P1T=P2T;
V1T=V2T;

%azzeramento delle matrici della forza e del campo magnetico
%matrice forza e campo magnetico hanno le stesse dimensioni per ogni
%conduttore: Le righe sono le componenti x,y,z, le colonne i tratti
%conduttore R
FR=zeros(3,NR);
BR=zeros(3,NR);
%conduttore S
FS=zeros(3,NS);
BS=zeros(3,NS);
%conduttore T
FT=zeros(3,NT);
BT=zeros(3,NT);

%ricalcolo della forza peso
%conduttore R
for g=1:NR
    FR(3,g)=-2*pR*norm(V1R(1:1:3,g));
end
%conduttore S
for g=1:NS
    FS(3,g)=-2*pS*norm(V1S(1:1:3,g));
end
%conduttore T
for g=1:NT
    FT(3,g)=-2*pT*norm(V1T(1:1:3,g));
end

%CONDUTTORE R
for gr=1:NR
    %campo generato dal conduttore R
    for grr=1:NR
        if grr==gr

```

```

else
    BR(1:1:3,gr)=BR(1:1:3,gr)+FBP(P1R(1:1:3,gr),...
        P1R(1:1:3,grr),V1R(1:1:3,grr)/(dl/2),I(1,11),dl);
end
end
%campo generato dal conduttore S
for gs=1:NS
    BR(1:1:3,gr)=BR(1:1:3,gr)+FBP(P1R(1:1:3,gr),...
        P1S(1:1:3,gs),V1S(1:1:3,gs)/(dl/2),I(2,11),dl);
end
%campo generato dal conduttore T
for gt=1:NT
    BR(1:1:3,gr)=BR(1:1:3,gr)+FBP(P1R(1:1:3,gr),...
        P1T(1:1:3,gt),V1T(1:1:3,gt)/(dl/2),I(3,11),dl);
end
FR(1:1:3,gr)=FR(1:1:3,gr)+I(1,11)*dl*...
    cross(V1R(1:1:3,gr)/(dl/2),BR(1:1:3,gr));
end

%CONDUTTORE S
for gs=1:NS
    %campo generato dal conduttore R
    for gr=1:NR
        BS(1:1:3,gs)=BS(1:1:3,gs)+FBP(P1S(1:1:3,gs),...
            P1R(1:1:3,gr),V1R(1:1:3,gr)/(dl/2),I(1,11),dl);
    end
    %campo generato dal conduttore S
    for gss=1:NS
        if gss==gs
        else
            BS(1:1:3,gs)=BS(1:1:3,gs)+FBP(P1S(1:1:3,gs),...
                P1S(1:1:3,gss),V1S(1:1:3,gss)/(dl/2),I(2,11),dl);
        end
    end
    %campo generato dal conduttore T
    for gt=1:NT
        BS(1:1:3,gs)=BS(1:1:3,gs)+FBP(P1S(1:1:3,gs),...
            P1T(1:1:3,gt),V1T(1:1:3,gt)/(dl/2),I(3,11),dl);
    end
    FS(1:1:3,gs)=FS(1:1:3,gs)+I(2,11)*dl*...
        cross(V1S(1:1:3,gs)/(dl/2),BS(1:1:3,gs));
end

%CONDUTTORE T
for gt=1:NT
    %campo generato dal conduttore R
    for gr=1:NR
        BT(1:1:3,gt)=BT(1:1:3,gt)+FBP(P1T(1:1:3,gt),...
            P1R(1:1:3,gr),V1R(1:1:3,gr)/(dl/2),I(1,11),dl);
    end
    %campo generato dal conduttore S
    for gs=1:NS
        BT(1:1:3,gt)=BT(1:1:3,gt)+FBP(P1T(1:1:3,gt),...
            P1S(1:1:3,gs),V1S(1:1:3,gs)/(dl/2),I(2,11),dl);
    end
    %campo generato dal conduttore T
    for gtt=1:NT

```

```

        if gtt==gt
        else
            BT(1:1:3,gt)=BT(1:1:3,gt)+FBP(P1T(1:1:3,gt),...
                P1T(1:1:3,gtt),V1T(1:1:3,gtt)/(dl/2),I(3,11),dl);
        end
    end
    FT(1:1:3,gt)=FT(1:1:3,gt)+I(3,11)*dl*...
        cross(V1T(1:1:3,gt)/(dl/2),BT(1:1:3,gt));
end
toc
%ricalcolo della posizione
%CONDUTTORE R
P2V2S2R=DISPOSIZIONE(FR,P0R,PfR,HR,dl);
P2R=P2V2S2R(1:1:3,:);
V2R=P2V2S2R(4:1:9,:);

%CONDUTTORE S
P2V2S2S=DISPOSIZIONE(FS,P0S,PfS,HS,dl);
P2S=P2V2S2S(1:1:3,:);
V2S=P2V2S2S(4:1:9,:);
%CONDUTTORE T

P2V2S2T=DISPOSIZIONE(FT,P0T,PfT,HT,dl);
P2T=P2V2S2T(1:1:3,:);
V2T=P2V2S2T(4:1:9,:);

end

%grafico della posizione finale=====
figure(1)
hold on
grid on
title('conduttori nello spazio')
plot3(P2R(1,:),P2R(2,:),P2R(3,),'k','LineWidth',2)
plot3(P2S(1,:),P2S(2,:),P2S(3,),'k','LineWidth',2)
plot3(P2T(1,:),P2T(2,:),P2T(3,),'k','LineWidth',2)

%calcolo dello tensione normale=====
A=D*D*pi/4; %sezione del conduttore

%conduttore R
sigmaR=P2V2S2R(10,)/A;
%conduttore S
sigmaS=P2V2S2S(10,)/A;
%conduttore T
sigmaT=P2V2S2T(10,)/A;
%grafico dello sforzo
figure(3)
hold on
grid on
title('tensione normale nei tre conduttori')
ylabel('Sigma [N/(m^2)]')
xlabel('lunghezza [m]')
plot(dl*(1:1:NR), sigmaR)
plot(dl*(1:1:NS), sigmaS,'r--')
plot(dl*(1:1:NT), sigmaT,'c:')

```

A3.1. Function DISPOSIZIONEFP

```
function [P1V1S1] = DISPOSIZIONEFP(F,P0,Pf,H,dl)
%function [P1V1S1] = DISPOSIZIONEFP(F,P0,vh,H,dl) %SOLO FORZA PESO
%ricava la disposizione di un conduttore nello spazio e la forza di
%trazione ricevendo in ingresso:
%F[3,n]=matrice delle forze in x,y,z nel punto centrale di ogni
%tratto
%P0[1,3]=coordinate del punto iniziale in cui si considerano le
%reazioni in tutte le direzioni oltre al tiro
%Pf[1,3]=coordinate del punto finale in cui si considerano le
%reazioni in tutte le direzioni oltre al tiro
%H=tiro della direzione del conduttore
%dl=lunghezza di ogni tratto con cui si suddivide il conduttore

%n° di tratti dalla matrice della forza
N=size(F,2);

%definizione delle matrici impiegate
P1=zeros(3,N); %matrice P dopo la prima iterazione
V1=zeros(6,N); %matrice V dopo la prima iterazione
S1=zeros(1,N); %vettore S1 che contiene la trazione

%forza totale nelle tre direzioni
Ftot=zeros(3,1);
Ftot(1)=sum(F(1,:));
Ftot(2)=sum(F(2,:));
Ftot(3)=sum(F(3,:));

%reazione vincolare nel primo appoggio nelle tre direzioni
Rz1=-Ftot(3);
Ry1=-Ftot(2);
Rx1=-Ftot(1);

%versore nel piano x,y,z del tiro
v=(Pf(1:1:3)-P0(1:1:3))/norm((Pf(1:1:3)-P0(1:1:3)));

%coefficiente ki che indica di quanto aumentare la reazione per
%i tentativi successivi
ki=0.05;
%numero di tentativi
Nc=1/ki;

%matrice E con l'errore in funzione del coefficiente kz
%(l'errore è la distanza tra il punto finale indicato e quello
%calcolato)
E=zeros(Nc+1,2);

for z=1:(Nc+1)

%calcolo della nuova disposizione

%coefficiente che permette di trovare la reazione
%(posto inizialmente, per z=1, kz=0)
```

```

kz=(z-1)*ki;
%calcolo nuova reazione vincolare lungo z
Rz=Rz1*kz;

for g=1:N
    %per ogni tratto

    %modulo della trazione nel tratto g-esimo lungo l'asse x
    Tx=Rx1+sum(F(1,1:1:g-1))-H*v(1);
    %modulo della trazione nel tratto g-esimo lungo l'asse y
    Ty=Ry1+sum(F(2,1:1:g-1))-H*v(2);
    %modulo della trazione nel tratto g-esimo lungo l'asse z
    Tz=Rz+sum(F(3,1:1:g-1))-H*v(3);

    %modulo della trazione nel tratto g-esimo
    r=sqrt(Tz*Tz+Ty*Ty+Tx*Tx);

    %calcolo degli angoli in cui agisce la trazione nel tratto
    teta=acos(Tz/r); %angolo rispetto all'asse z
    fi=atan2(Ty,Tx); %angolo rispetto all'asse x

    %calcolo del vettore intermedio per ogni tratto
    %componente x del vettore
    V1(1,g)=-(dl/2)*(sin(teta)*cos(fi));
    %componente y del vettore
    V1(2,g)=-(dl/2)*sin(teta)*sin(fi);
    %componente z del vettore
    V1(3,g)=-(dl/2)*cos(teta);

    if g==1 %se è il primo tratto usa P0
        P1(:,g)=P0'+V1(1:1:3,g); %punti centrali tratto
        V1(4:1:6,g)=P0'+2*V1(1:1:3,g); %punti intermedi tratto
    else
        P1(:,g)=V1(4:1:6,g-1)+V1(1:1:3,g); %punti centrali tratto
        V1(4:1:6,g)=P1(:,g)+V1(1:1:3,g); %punti intermedi tratto
    end
end

%calcolo della distanza lungo z
e=norm(V1(4:1:6,N)-[Pf(1) Pf(2) Pf(3)]');
E(z,:)= [kz e];

end

%estrazione del valore di kz che ha errore minore
emin=min(E(:,2));
%indice a cui si trova l'errore minore
ind=find(E(:,2) == emin);
%coefficiente di reazione per l'errore minore
kz=E(ind(1),1);

%calcola la disposizione con il minor errore=====

%calcolo nuova reazione vincolare lungo z
Rz=Rz1*kz;

```

```

for g=1:N
    %per ogni tratto

    %modulo della trazione nel tratto g-esimo lungo l'asse x
    Tx=Rx1+sum(F(1,1:1:g-1))-H*v(1);
    %modulo della trazione nel tratto g-esimo lungo l'asse y
    Ty=Ry1+sum(F(2,1:1:g-1))-H*v(2);
    %modulo della trazione nel tratto g-esimo lungo l'asse z
    Tz=Rz+sum(F(3,1:1:g-1))-H*v(3);

    %modulo della trazione nel tratto g-esimo
    r=sqrt(Tz*Tz+Ty*Ty+Tx*Tx);
    S1(g)=r;
    %calcolo degli angoli in cui agisce la trazione nel tratto
    teta=acos(Tz/r); %angolo rispetto all'asse z
    fi=atan2(Ty,Tx); %angolo rispetto all'asse x

    %calcolo del vettore intermedio per ogni tratto
    %componente x del vettore
    V1(1,g)=-(dl/2)*(sin(teta)*cos(fi));
    %componente y del vettore
    V1(2,g)=-(dl/2)*sin(teta)*sin(fi);
    %componente z del vettore
    V1(3,g)=-(dl/2)*cos(teta);

    if g==1 %se è il primo tratto usa P0
        P1(:,g)=P0'+V1(1:1:3,g); %punti centrali tratto
        V1(4:1:6,g)=P0'+2*V1(1:1:3,g); %punti intermedi tratto
    else
        P1(:,g)=V1(4:1:6,g-1)+V1(1:1:3,g); %punti centrali tratto
        V1(4:1:6,g)=P1(:,g)+V1(1:1:3,g); %punti intermedi tratto
    end
end

%assegnazione dell'uscita
P1V1S1=[...
    P1
    V1
    S1];

end

```

A3.2. Function DISPOSIZIONE

```

%function [P1V1S1] = DISPOSIZIONE(F,P0,vh,H,dl)
%ricava la disposizione di un conduttore nello spazio e la forza di
%trazione ricevendo in ingresso:
%F[3,n]=matrice delle forze in x,y,z nel punto centrale di ogni
%tratto
%P0[1,3]=coordinate del punto iniziale in cui si considerano le
%reazioni in tutte le direzioni oltre al tiro
%Pf[1,3]=coordinate del punto finale in cui si considerano le
%reazioni in tutte le direzioni oltre al tiro
%H=tiro della direzione del conduttore
%dl=lunghezza di ogni tratto con cui si suddivide il conduttore

```

```

%n° di tratti dalla matrice della forza
N=size(F,2);

%definizione delle matrici impiegate
P1=zeros(3,N); %matrice P dopo la prima iterazione
V1=zeros(6,N); %matrice V dopo la prima iterazione
S1=zeros(1,N); %vettore S1 che contiene la trazione

%forza totale nelle tre direzioni
Ftot=zeros(3,1);
Ftot(1)=sum(F(1,:));
Ftot(2)=sum(F(2,:));
Ftot(3)=sum(F(3,:));

%reazione vincolare nel primo appoggio nelle tre direzioni
Rz1=-Ftot(3);
Ry1=-Ftot(2);
Rx1=-Ftot(1);

%versore nel piano x,y,z del tiro
v=(vh(1:1:3)-P0(1:1:3))/norm((vh(1:1:3)-P0(1:1:3)));

%coefficiente ki che indica di quanto aumentare la reazione per
%i tentativi successivi
ki=0.05;
%numero di tentativi
Nc=1/ki;

%matrice E con l'errore in funzione dei coefficienti kx ky kz kh e
%(l'errore è la distanza tra il punto finale indicato e quello
%calcolato)
E=zeros((Nc+1)*(Nc+1)*(Nc+1)*(40),5);
ind=0; %indice matrice E per i cicli

for x=1:(Nc+1)
%per ogni coefficiente di reazione lungo l'asse x posto inizialmente
%nullo per avere zero al primo tentativo
kx=(x-1)*ki;

    for y=1:(Nc+1)
%per ogni coefficiente di reazione lungo l'asse y posto
%inizialmente nullo per avere zero al primo tentativo
ky=(y-1)*ki;

        for z=1:(Nc+1)
%per ogni coefficiente di reazione lungo l'asse z posto
%inizialmente nullo per avere zero al primo tentativo
kz=(z-1)*ki;

            for hh=1:40
%per ogni coefficiente di tiro posto inizialmente
%uguale ad uno per avere il tiro ipotizzato
kh=hh;

                %calcolo reazioni vincolari primo estremo e tiro

```

```

Rx=Rx1*kx;
Ry=Ry1*ky;
Rz=Rz1*kz;
Rh=H*kh;

%calcolo disposizione con nuova reazione vincolare e tiro

for g=1:N
    %per ogni tratto

    %modulo della trazione nel tratto g-esimo lungo l'asse x
    Tx=Rx+sum(F(1,1:1:g-1))-Rh*v(1);
    %modulo della trazione nel tratto g-esimo lungo l'asse y
    Ty=Ry+sum(F(2,1:1:g-1))-Rh*v(2);
    %modulo della trazione nel tratto g-esimo lungo l'asse z
    Tz=Rz+sum(F(3,1:1:g-1))-Rh*v(3);

    %modulo della trazione nel tratto g-esimo
    r=sqrt(Tz*Tz+Ty*Ty+Tx*Tx);

    %calcolo degli angoli in cui agisce la trazione nel
    %tratto
    teta=acos(Tz/r); %angolo rispetto all'asse z
    fi=atan2(Ty,Tx); %angolo rispetto all'asse x

    %calcolo del vettore intermedio per ogni tratto
    %componente x del vettore
    V1(1,g)=- (dl/2) * (sin(teta)*cos(fi));
    %componente y del vettore
    V1(2,g)=- (dl/2) * sin(teta)*sin(fi);
    %componente z del vettore
    V1(3,g)=- (dl/2) * cos(teta);

    if g==1
        %se è il primo tratto usa P0
        P1(:,g)=P0'+V1(1:1:3,g); %punti centrali
        V1(4:1:6,g)=P0'+2*V1(1:1:3,g); %punti intermedi
    else
        P1(:,g)=V1(4:1:6,g-1)+V1(1:1:3,g); %punti centrali
        V1(4:1:6,g)=P1(:,g)+V1(1:1:3,g); %punti intermedi
    end

end

%calcolo dell'errore della distanza lungo z
e=norm(V1(4:1:6,N)-[vh(1) vh(2) vh(3)]');
ind=ind+1; %riga della matrice e in cui inserire l'errore
E(ind,:)= [kx ky kz kh e];

end
end
end

%estrazione dei coefficienti kx ky kz kh che producono errore minore

```

```

emin=min(E(:,5))
%indice a cui si trova l'errore minore
ind=find(E(:,5) == emin);

kx=E(ind(1),1)
ky=E(ind(1),2)
kz=E(ind(1),3)
kh=E(ind(1),4)

%calcola la disposizione con il minor errore=====
%reazioni
Rx=Rx1*kx;
Ry=Ry1*ky;
Rz=Rz1*kz;
Rh=H*kh;

%calcolo disposizione con nuova reazione vincolare e tiro
for g=1:N
    %per ogni tratto

    %modulo della trazione nel tratto g-esimo lungo l'asse x
    Tx=Rx+sum(F(1,1:1:g-1))-Rh*v(1);
    %modulo della trazione nel tratto g-esimo lungo l'asse y
    Ty=Ry+sum(F(2,1:1:g-1))-Rh*v(2);
    %modulo della trazione nel tratto g-esimo lungo l'asse z
    Tz=Rz+sum(F(3,1:1:g-1))-Rh*v(3);

    %modulo della trazione nel tratto g-esimo
    r=sqrt(Tz*Tz+Ty*Ty+Tx*Tx);
    S1(g)=r;
    %calcolo degli angoli in cui agisce la trazione nel tratto
    teta=acos(Tz/r); %angolo rispetto all'asse z
    fi=atan2(Ty,Tx); %angolo rispetto all'asse x

    %calcolo del vettore intermedio per ogni tratto
    %componente x del vettore
    V1(1,g)=- (dl/2) * (sin(teta)*cos(fi));
    %componente y del vettore
    V1(2,g)=- (dl/2) * sin(teta)*sin(fi);
    %componente z del vettore
    V1(3,g)=- (dl/2) * cos(teta);

    if g==1
        %se è il primo tratto usa P0
        P1(:,g)=P0'+V1(1:1:3,g); %punti centrali
        V1(4:1:6,g)=P0'+2*V1(1:1:3,g); %punti intermedi
    else
        P1(:,g)=V1(4:1:6,g-1)+V1(1:1:3,g); %punti centrali
        V1(4:1:6,g)=P1(:,g)+V1(1:1:3,g); %punti intermedi
    end
end
P1V1S1=[...
    P1
    V1
    S1];

end

```