

UNIVERSITÀ DEGLI STUDI DI PADOVA

DIPARTIMENTO DI FISICA E ASTRONOMIA "GALILEO GALILEI"

CORSO DI LAUREA TRIENNALE IN FISICA

TESI DI LAUREA

Variabili nascoste e teorema di Kochen-Specker

Relatore:

PROF. ROBERTO VOLPATO

Laureando:

GUIDO COSTAGLIOLA
MATRICOLA 2007993

Anno Accademico 2022/2023

Abstract

Le disuguaglianze di Bell-CHSH mostrano come i fenomeni previsti dalla Meccanica Quantistica non possano essere riprodotti esattamente da una teoria con variabili nascoste locale e realistica. Tali disuguaglianze lasciano però aperta la possibilità di assegnare in ogni istante alle osservabili quantistiche dei valori ben definiti che soddisfino ad ipotesi apparentemente deboli (non-contestualità). Questa tesi ha lo scopo di descrivere il teorema di Kochen-Specker, che mostra come tali teorie siano comunque incompatibili con la Meccanica Quantistica.

Indice

| | | |
|----------|--|-----------|
| 1 | Introduzione | 1 |
| 2 | Basi concettuali e formalismo | 3 |
| 2.1 | Operatori di proiezione | 3 |
| 2.2 | Prodotto tensore ed entanglement | 4 |
| 3 | Contestualità e teorie non-contestuali a variabili nascoste | 7 |
| 3.1 | Il concetto di contestualità | 7 |
| 3.2 | Teorie non-contestuali a variabili nascoste | 8 |
| 3.2.1 | Struttura matematica dei modelli NCHV | 9 |
| 3.3 | Definizione operativa di contesto | 10 |
| 4 | Teorema di Kochen-Specker | 13 |
| 4.1 | Argomento originale del teorema | 13 |
| 4.2 | Dimostrazione del teorema in uno spazio 4D | 14 |
| 4.3 | Dimostrazione del teorema in uno spazio 3D | 15 |
| 5 | Violazioni di diseuguaglianze non-contestuali | 18 |
| 5.1 | Il quadrato di Peres-Mermin | 18 |
| 5.2 | Ulteriori esempi di diseuguaglianze non-contestuali | 19 |
| 6 | Applicazioni della contestualità quantistica | 23 |
| 7 | Conclusioni | 24 |

1 Introduzione

In un mondo prettamente *classico*, le nuove teorie della *Meccanica Quantistica* e della *Relatività* einsteiniana, sorte agli inizi del '900 e sviluppatasi in tutto il corso del secolo, cambiarono irrimediabilmente i paradigmi scientifici e i modi di intendere la realtà che ci circonda. Agli inizi del secolo scorso, difatti, ci si è resi conto che per dare spiegazione a determinati fenomeni fisici, la Meccanica Classica, che sino ad allora era stata sufficiente per una descrizione coerente e definita dei processi naturali che viviamo quotidianamente, non era più esaustiva: in particolare essa perdeva di validità nel momento in cui si andavano a considerare sistemi le cui dimensioni tipiche erano quelle atomiche, oppure sistemi in cui le velocità raggiungevano valori prossimi a c , velocità della luce nel vuoto. Per la descrizione completa di questa varietà di fenomeni si è dovuti ricorrere a nuovi formalismi e nuove teorie, intrinsecamente non classiche. Sebbene questi nuovi principi potessero sembrare in totale disaccordo con il senso comune, grazie ad essi sono stati raggiunti risultati eccezionali, supportati da evidenze sperimentali inequivocabili. È importante sottolineare che sino ad ora nessun esperimento ha confutato le ipotesi della Meccanica Quantistica, la quale, anzi, nel tempo ha vissuto un'evoluzione continua, sino alle più moderne teorie della *Quantum Field Theory*.

Concentrandoci adesso proprio sulla Meccanica Quantistica, negli anni della sua nascita non erano poche le perplessità e gli scetticismi sulle fondamenta stesse di tale teoria, argomento di discussione di moltissimi fisici e pensatori anche negli anni successivi. Basti pensare all'equazione di Schrödinger, nuovo pilastro teorico che sostituì la classica equazione del moto di Newton:

$$i\hbar \frac{\partial \psi}{\partial t} = \hat{H}\psi. \quad (1)$$

Da essa si possono evincere caratteristiche fondamentali della teoria che rappresentano un punto di svolta rispetto alle precedenti. Innanzitutto, la natura complessa dell'equazione, in cui è presente da una parte l'unità immaginaria e dall'altra una *funzione d'onda* prettamente complessa che racchiude in sé la totalità delle informazioni del sistema fisico cui è associata. Utilizzare una funzione complessa per descrivere lo stato di un sistema fisico reale sembra paradossale, tanto che la discussione sulla natura della funzione d'onda fu molto articolata e impegnò molti famosi fisici: alcuni di essi la consideravano solo un mero strumento matematico per la previsione di risultati fisicamente apprezzabili, altri tentarono di attribuirle un significato ontologico reale. Nonostante gli sforzi dialettici e metafisici sulla natura di ψ , resta il fatto che la teoria quantistica si sviluppa nel campo complesso \mathbb{C} .

Un altro carattere della nuova teoria che si discosta totalmente da quelle precedenti è la natura intrinsecamente probabilistica delle previsioni prodotte dalla Meccanica Quantistica. Tale perdita di determinismo non è da ricercare nell'equazione (1), che al contrario descrive in modo deterministico l'evoluzione temporale della funzione d'onda ψ associata al sistema, ma nella funzione stessa, che porta in sé, secondo il postulato di Born, solo le probabilità che un determinato valore di una misura di un'osservabile si manifesti. Dunque, nel mondo quantistico, in generale non si può prevedere l'esito di una misura senza che questa venga effettuata.

Restando sul tema osservabili e relative misure, un altro salto concettuale rispetto alla Meccanica Classica, per la quale era sempre teoricamente possibile misurare simultaneamente diverse proprietà di un sistema, come posizione e momento lineare di un corpo per risalire alla sua traiettoria, in Meccanica Quantistica ciò è possibile solo se gli operatori associati

alle osservabili fisiche in questione commutano, cioè se sono compatibili. Se la relazione di commutazione non è soddisfatta, così come implica il principio di indeterminazione di Heisenberg, vi sarà sempre una componente di incertezza ineliminabile nella misura delle due osservabili.

Inoltre, la teoria quantistica sembra essere incompatibile con alcuni attributi che secondo il senso comune dovrebbero stare alla base di ogni teoria fisica, come la *località* e la *non-contestualità*.

Per quanto riguarda la prima, essa pare venir meno in alcuni fenomeni quantistici con protagonisti sistemi *entangled* (lett: "intrecciati"), per i quali l'azione su una parte del sistema influenza immediatamente l'altra parte, nonostante le due si trovino molto distanti tra loro, tanto che Einstein coniò il termine "spooky action at a distance" a riguardo di tale fenomeno.

Per quanto riguarda la seconda - che sarà uno degli argomenti principali di questo lavoro -, è fattuale che in Meccanica Quantistica, generalmente, non sia possibile attribuire a priori dei valori associati a certe osservabili, poiché questi dipendono dal "contesto" in cui vengono effettuate le misure, ove per contesto si intende l'insieme delle altre osservabili fisiche che vengono misurate insieme a quella presa in considerazione.

Questi fatti portarono a pensare, a partire dagli anni '30 del secolo scorso, che la Meccanica Quantistica non fosse una teoria *completa*, ovvero che non tutti gli elementi di realtà avessero una controparte nel modello teorico. Furono per primi i fisici A.Einstein, B.Podolsky e N.Rosen ad inferire che la teoria quantistica non potesse essere completa, nel loro celebre articolo del 1935 intitolato "Can Quantum-Mechanical Description of Physical Reality Be Considered Complete?" [1]. Pertanto, sebbene Einstein fu uno tra i padri della teoria quantistica, egli era convinto che esistesse una teoria più fondamentale che riuscisse a spiegare tutti quei fenomeni paradossali che scaturivano dai principi quantistici al tempo formulati.

Negli anni successivi alla pubblicazione dell'articolo, si è postulata l'esistenza di alcune *variabili nascoste* che portassero a compimento la teoria quantistica. Tale idea fu veicolata dalle cosiddette *Teorie a Variabili Nascoste*. Tuttavia, nel corso degli anni sono stati raggiunti molti risultati teorici che posero dei limiti a questi tipi di congetture, con dimostrazioni che mostrarono che delle teorie a variabili nascoste portavano a risultati diversi rispetto alla Meccanica Quantistica. Per esempio, la violazione delle disuguaglianze di Bell, con l'esperimento che valse il premio Nobel per la Fisica a A.Aspect, J.F.Clauser e A.Zeilinger nel 2022, pose dei limiti alle teorie a variabili nascoste che ripristinassero il principio di località.

In questa tesi ci si concentrerà maggiormente sul secondo aspetto, la contestualità, andando a presentare ed analizzare alcuni risultati che invece pongono dei limiti alle teorie non-contestuali a variabili nascoste. Il principale risultato a tal proposito è il *Teorema di Kochen-Specker*, che verrà diffusamente analizzato nel prosieguo.

2 Basi concettuali e formalismo

In questa prima parte, verranno definiti e presentati alcuni concetti preliminari essenziali che saranno ampiamente adoperati nei capitoli successivi. Per quanto riguarda il formalismo utilizzato, verrà indicato con \mathcal{H} un generico spazio di Hilbert associato ad un sistema fisico e sarà inoltre impiegata la notazione di Dirac, indicando con $|\psi\rangle \in \mathcal{H}$ un generico stato del sistema fisico in questione.

2.1 Operatori di proiezione

Dal momento che nella dimostrazione del Teorema di Kochen-Specker verranno diffusamente adoperati, si definisce adesso una classe di operatori molto utili in Meccanica Quantistica con delle importanti peculiarità.

Definizione. Un *proiettore* $\mathcal{P} : \mathcal{D}(\mathcal{P}) \rightarrow \mathcal{H}$, con $\overline{\mathcal{D}(\mathcal{P})} = \mathcal{H}$, è un operatore lineare densamente definito tale che $\mathcal{P}^\dagger = \mathcal{P}$ e $\mathcal{P}^2 = \mathcal{P}$.

Così definito, anche l'operatore $\overline{\mathcal{P}} = \mathbb{1} - \mathcal{P}$ è un proiettore.

Importante proprietà dei proiettori è di essere operatori limitati con spettro $\sigma = \{0, 1\}$. Infatti, sfruttando la caratteristica idempotenza:

$$\mathcal{P}(\mathcal{P}|\psi\rangle) = \mathcal{P}^2|\psi\rangle = \mathcal{P}|\psi\rangle,$$

ossia $\mathcal{P}|\psi\rangle$ è un autovettore di \mathcal{P} con autovalore uguale ad 1, ed inoltre:

$$\mathcal{P}(\mathbb{1} - \mathcal{P})|\psi\rangle = (\mathcal{P} - \mathcal{P}^2)|\psi\rangle = 0,$$

ossia $(\mathbb{1} - \mathcal{P})|\psi\rangle$ è un autovettore di \mathcal{P} con autovalore pari a 0. In generale si avrà allora che:

$$|\psi\rangle = \underbrace{\mathcal{P}|\psi\rangle}_{\in \mathcal{H}_1} + \underbrace{\overline{\mathcal{P}}|\psi\rangle}_{\in \mathcal{H}_0},$$

ove sono stati indicati con \mathcal{H}_1 e \mathcal{H}_0 gli autospazi generati dagli autovettori relativi rispettivamente agli autovalori 1 e 0 dell'operatore di proiezione \mathcal{P} .

Dato un generico spazio di Hilbert \mathcal{H} e uno stato $|\psi\rangle \in \mathcal{H}$, supposto normalizzato $\|\psi\| = 1$, si può definire un operatore di proiezione lungo la direzione del vettore $|\psi\rangle$ come:

$$\mathcal{P} = |\psi\rangle\langle\psi|.$$

Ancora, dato un $\tilde{\mathcal{H}} \subset \mathcal{H}$ con base ortonormale $\{|n\rangle\} \subset \tilde{\mathcal{H}}$, allora

$$\mathcal{P}_{\tilde{\mathcal{H}}} = \sum_{n=1}^{\dim(\tilde{\mathcal{H}})} |n\rangle\langle n|$$

è un proiettore lungo le direzioni identificate dai vettori di base.

In forma matriciale, nella base dei suoi autostati, un operatore di proiezione si presenta come segue:

$$\mathcal{P} = \begin{pmatrix} \mathbb{1} & \vdots & \mathbb{0} \\ \cdots & \tilde{\mathcal{H}} & \cdots \\ \mathbb{0} & \vdots & \mathbb{0} \end{pmatrix}.$$

Sia ora \mathcal{A} un operatore autoaggiunto su \mathcal{H} con $\{|a, i\rangle\}_{a \in \sigma(\mathcal{A})}$ base ortonormale di autostati di \mathcal{A} , ove i è l'indice che tiene conto dell'eventuale degenerazione degli autovalori dell'operatore, $i = 1, \dots, d(a)$, e $\sigma(\mathcal{A})$ è lo spettro di \mathcal{A} , ovvero l'insieme di tutti i possibili risultati di una misura di tale osservabile, o analogamente l'insieme dei suoi autovalori, allora, nell'ulteriore ipotesi di spettro puramente discreto:

$$\mathcal{P}_a = \sum_{i=1}^{d(a)} |a, i\rangle \langle a, i|$$

è il proiettore sull'autospazio \mathcal{H}_a generato dagli autovettori associati all'autovalore a di \mathcal{A} . E visto che vale $\mathcal{H} = \bigoplus_{a \in \sigma(\mathcal{A})} \mathcal{H}_a$, allora segue in modo diretto che

$$\sum_{a \in \sigma(\mathcal{A})} \mathcal{P}_a = \mathbb{1}, \quad (2)$$

relazione che tornerà molto utile in seguito.

Un'ultima proprietà importante dei proiettori riguarda il loro legame con la probabilità di trovare un certo valore a dalla misura di un'osservabile \mathcal{A} . In particolare, considerando uno stato normalizzato $|\psi\rangle$ per semplicità, si ha:

$$P_\psi(a) = \|\mathcal{P}_a |\psi\rangle\|^2,$$

ovvero la probabilità $P_\psi(a)$ di osservare un certo risultato a , dato lo stato $|\psi\rangle$, è uguale alla norma quadra del proiettore sull'autospazio \mathcal{H}_a applicato a $|\psi\rangle$. Difatti:

$$\|\mathcal{P}_a |\psi\rangle\|^2 = \langle \mathcal{P}_a \psi | \mathcal{P}_a \psi \rangle \stackrel{(*)}{=} \langle \psi | \mathcal{P}_a | \psi \rangle = \sum_{i=1}^{d(a)} \langle \psi | a, i \rangle \langle a, i | \psi \rangle = \sum_{i=1}^{d(a)} |\langle a, i | \psi \rangle|^2,$$

ove in (*) è stata sfruttata l'autoaggiuntezza e l'idempotenza di \mathcal{P}_a .

2.2 Prodotto tensore ed entanglement

Il fenomeno dell'*entanglement quantistico* rappresenta un punto di svolta rispetto al precedente modo classico di interpretare il mondo fisico ed è uno degli elementi più caratteristici della nuova teoria. Mentre da un punto di vista genuinamente classico e di stampo riduzionista, la massima conoscenza di un sistema fisico si ha quando si ha la massima conoscenza sugli elementi che lo compongono, in Meccanica Quantistica tale proprietà può venir meno e potremmo perciò avere informazioni massimali su un sistema complessivo (\rightarrow *Stato Puro*), pur avendo a disposizione informazioni parziali sulle componenti di esso (\rightarrow *Stati Misti*). Ciò accade proprio quando lo stato $|\psi\rangle$ del sistema in esame è entangled. Prima di entrare nel merito dell'entanglement, è necessario dare la seguente definizione.

Definizione. Dati due spazi di Hilbert \mathcal{H}_1 e \mathcal{H}_2 associati a due sistemi fisici isolati \mathcal{S}_1 e \mathcal{S}_2 , dato lo spazio di Hilbert \mathcal{H} associato al sistema composto $\mathcal{S} = \mathcal{S}_1 \cup \mathcal{S}_2$, si definisce **prodotto tensore** l'applicazione $\otimes : \mathcal{H}_1, \mathcal{H}_2 \longrightarrow \mathcal{H}$ tale per cui, $\forall |\psi_1\rangle \in \mathcal{H}_1$ e $\forall |\psi_2\rangle \in \mathcal{H}_2$, $|\psi_1\rangle \otimes |\psi_2\rangle \in \mathcal{H}$ e valgono le seguenti proprietà:

- $\forall \lambda \in \mathbb{C}, (\lambda |\psi_1\rangle) \otimes |\psi_2\rangle = |\psi_1\rangle \otimes (\lambda |\psi_2\rangle) = \lambda(|\psi_1\rangle \otimes |\psi_2\rangle)$;
- $\forall |\phi_1\rangle \in \mathcal{H}_1, (|\psi_1\rangle + |\phi_1\rangle) \otimes |\psi_2\rangle = |\psi_1\rangle \otimes |\psi_2\rangle + |\phi_1\rangle \otimes |\psi_2\rangle$;
- $\forall |\phi_2\rangle \in \mathcal{H}_2, |\psi_1\rangle \otimes (|\psi_2\rangle + |\phi_2\rangle) = |\psi_1\rangle \otimes |\psi_2\rangle + |\psi_1\rangle \otimes |\phi_2\rangle$;
- Date $\{|1, i\rangle\}_i$ e $\{|2, j\rangle\}_j$ basi ortonormali rispettivamente di \mathcal{H}_1 e \mathcal{H}_2 , allora $\{|1, i\rangle \otimes |2, j\rangle\}_{i,j}$ è una base ortonormale di \mathcal{H} .

Data tale definizione, possiamo ora andare ad esaminare come possono essere scritti gli elementi di \mathcal{H} . Supponendo ora che $\mathcal{H}_1 = \mathbb{C}^N$ e $\mathcal{H}_2 = \mathbb{C}^M$ siano gli spazi cui appartengono rispettivamente gli stati $|\psi_1\rangle$ e $|\psi_2\rangle$, per gli stati delle singole componenti vale:

$$|\psi_1\rangle = \sum_{i=1}^N \alpha_i |1, i\rangle, \quad |\psi_2\rangle = \sum_{j=1}^M \beta_j |2, j\rangle.$$

E lo stato dato dal prodotto tensore sarà:

$$|\psi\rangle = |\psi_1\rangle \otimes |\psi_2\rangle = \sum_{i=1}^N \sum_{j=1}^M \alpha_i \beta_j |1, i\rangle \otimes |2, j\rangle.$$

Lo spazio cui appartiene tale stato sarà $\mathcal{H} = \mathbb{C}^N \otimes \mathbb{C}^M \cong \mathbb{C}^{N \cdot M}$.

Tuttavia, tale scrittura non esaurisce tutti i possibili stati appartenenti allo spazio di Hilbert \mathcal{H} . Difatti, la forma più generale di uno $|\psi\rangle \in \mathcal{H}$ è:

$$|\psi\rangle = \sum_{i=1}^N \sum_{j=1}^M c_{i,j} |1, i\rangle \otimes |2, j\rangle,$$

ove i coefficienti $c_{i,j}$ potrebbero non essere dati dal prodotto di α_i e β_j : ciò significa che non tutti gli elementi di \mathcal{H} possono essere espressi come prodotto tensore di un elemento di \mathcal{H}_1 e uno di \mathcal{H}_2 . Nel caso in cui l'ultima affermazione sia verificata, lo stato fisico $|\psi\rangle$ si dice **entangled**, nel caso contrario, lo stato si definisce **separabile**.

Per quanto riguarda gli operatori, invece, dati \mathcal{A}_1 e \mathcal{B}_2 , i quali agiscono rispettivamente sugli spazi di Hilbert \mathcal{H}_1 e \mathcal{H}_2 , è possibile estendere tali operatori allo spazio prodotto tensore \mathcal{H} nel seguente modo:

$$\tilde{\mathcal{A}}_1 = \mathcal{A}_1 \otimes \mathbb{1}_{\mathcal{H}_2}, \quad \tilde{\mathcal{B}}_2 = \mathbb{1}_{\mathcal{H}_1} \otimes \mathcal{B}_2.$$

Cosicché:

$$\tilde{\mathcal{A}}_1 \tilde{\mathcal{B}}_2 |\psi\rangle = \mathcal{A}_1 \otimes \mathcal{B}_2 |\psi\rangle = \sum_{i=1}^N \sum_{j=1}^M c_{i,j} (\mathcal{A}_1 |1, i\rangle) \otimes (\mathcal{B}_2 |2, j\rangle),$$

ovvero gli operatori agiscono sui vettori di base dei rispettivi spazi.

Un caso specifico di prodotto tensore tra matrici che risulterà utile nel seguito è il **prodotto di Kronecker**. Date due matrici \mathcal{V} , di dimensioni $m \times n$, e \mathcal{W} , di dimensioni $p \times q$, il prodotto di Kronecker $\mathcal{V} \otimes \mathcal{W}$ è definito come segue:

$$\mathcal{V} \otimes \mathcal{W} = \begin{pmatrix} v_{11}\mathcal{W} & \dots & v_{1n}\mathcal{W} \\ \vdots & \ddots & \vdots \\ v_{m1}\mathcal{W} & \dots & v_{mn}\mathcal{W} \end{pmatrix}.$$

Il risultato è dunque una matrice a blocchi di dimensioni $mp \times nq$.

Per chiarezza, illustriamo adesso un'applicazione del suddetto prodotto, la quale verrà ripresa nel Paragrafo 5.1, considerando le *matrici di Pauli*:

$$\sigma_x = \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix}, \quad \sigma_y = \begin{pmatrix} 0 & -i \\ i & 0 \end{pmatrix}, \quad \sigma_z = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & -1 \end{pmatrix}. \quad (3)$$

Applicando la definizione ed effettuando il conto si trova che:

$$\sigma_x \otimes \sigma_x = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 \\ 1 & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}, \quad \sigma_y \otimes \sigma_y = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 & -1 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 \\ -1 & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}, \quad \sigma_z \otimes \sigma_z = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & -1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & -1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}.$$

Si può facilmente notare che i tre operatori commutano vicendevolmente ed in particolare che:

$$(\sigma_z \otimes \sigma_z) \cdot (\sigma_x \otimes \sigma_x) \cdot (\sigma_y \otimes \sigma_y) = -\mathbb{1}.$$

Risultati che verranno ripresi nel prosieguo.

3 Contestualità e teorie non-contestuali a variabili nascoste

In questo Capitolo verrà introdotta la nozione di *contestualità*, con particolare attenzione al caso quantistico, dopo aver delineato le assunzioni basilari e preliminari che stanno alla base di una generale teoria fisica classica. In particolare si andrà a vedere come tali assunzioni divengano contraddittorie nella teoria quantistica. Dopodiché si prenderanno in esame le teorie non-contestuali a variabili nascoste, delineando quali siano i loro obiettivi e quali le strutture matematiche su cui si basano. Infine, l'ultima parte del Capitolo è dedicata alla definizione operativa di contesto, necessaria nel momento in cui si volessero mettere a confronto diverse teorie, come la Meccanica Quantistica e le teorie non-contestuali a variabili nascoste, e anche testare sperimentalmente i risultati teorici che saranno presentati nel resto del lavoro.

3.1 Il concetto di contestualità

Il termine "*contestualità*" in ambito quantomeccanico fu per la prima volta adoperato dai fisici italiani Beltrametti e Cassinelli (1981) in seguito ad un articolo di Shimony del 1971 in cui egli chiamò "contestualistiche" quelle particolari classi di teorie a variabili nascoste in cui «il valore di una osservabile \mathcal{O} può dipendere non solo dallo stato nascosto λ , ma anche dall'insieme \mathcal{C} di osservabili compatibili misurate insieme ad \mathcal{O} »[2]. Da quel momento in poi il termine fu utilizzato unanimemente dalla comunità dei fisici, tanto che negli anni '90 Peres denominò uno dei capitoli del proprio libro sulla teoria quantistica proprio "Contextuality" [3].

Per definire e comprendere appieno il concetto di contestualità in Meccanica Quantistica, partiamo da una situazione classica e definiamo quali siano i requisiti minimi e concettualmente ovvi che una teoria debba possedere. Prima di far ciò, diamo la seguente definizione generale, attribuita ad Einstein.

Definizione. *Elemento di realtà*: è una proprietà intrinseca di un sistema fisico che si può dedurre a priori con probabilità unitaria senza eseguirne una misura diretta o indiretta.

Consideriamo adesso un sistema fisico generico, sul quale vorremmo costruire una teoria che descriva il suo comportamento e lo caratterizzi. Per farlo, dovremo intuitivamente richiedere le seguenti quattro condizioni.

1. **Realismo:** ogni elemento della teoria, rappresentato generalmente in meccanica classica da una funzione f sullo spazio delle fasi, deve corrispondere ad una proprietà fisica osservabile del sistema. Detto in altre parole, vi deve essere una precisa corrispondenza tra componenti della teoria e proprietà reali del sistema fisico;
2. **Definitezza:** il modello teorico che descrive il sistema fisico in esame deve permettere di calcolare il valore di ciascuna proprietà di esso e tale valore, pur evolvendo nel tempo, deve sempre rimanere attribuibile;
3. **Coerenza:** date delle funzioni dipendenti dalle suddette proprietà, è necessario associare loro senza alcuna ambiguità valori in maniera precisa;
4. **Non-Contestualità:** la definitezza dei valori associati a ciascuna proprietà del sistema non deve dipendere dal contesto della misurazione, cioè, per esempio, dall'ordine in cui le proprietà vengono misurate o dall'insieme delle osservabili che si prendono in considerazione durante l'atto di misura.

Tali assunzioni appaiono sensate e sono rispettate in un quadro fisico prettamente classico. Tuttavia, se le stesse prerogative vengono richieste anche in una teoria di tipo quantistico, traslitterandole opportunamente nel suo nuovo linguaggio matematico, si può dimostrare - e il teorema di Kochen-Specker ne è una prova - che si arriva ad una contraddizione. A questo punto si deve rinunciare ad una, o più, delle assunzioni fatte per rendere la teoria coerente dal punto di vista logico; dunque, o si ammette che non sia possibile far corrispondere ad ogni proprietà fisica reale del sistema un elemento della teoria o si ammette che la teoria fisica sia contestuale.

Pertanto, riassumendo quanto finora detto, mentre nell'ambito della fisica classica è sempre possibile assumere l'esistenza di valori per proprietà intrinseche di un sistema fisico e un'indeterminazione di essi è causata solamente da procedure imperfette di misura o preparazioni non ottimali del sistema, in ambito quantistico è impossibile avere descrizioni indipendenti dal contesto.

La contestualità quantistica è un fenomeno che combina molti aspetti interessanti relativi ai fondamenti della teoria stessa, come l'incompatibilità tra diverse misure, l'entanglement e la non-località di Bell. Inoltre alcune proprietà delle correlazioni contestuali sono legate alla teoria dell'informazione quantistica e alla computazione quantistica. Alcune di queste applicazioni verranno brevemente affrontate nell'ultimo capitolo.

La semplice trattazione svolta finora, tuttavia, presenta alcune lacune legate all'assunzione implicita di *misure proiettive* o *ideali* in Meccanica Quantistica.

Definizione. Misura Ideale (di prima specie): dato un sistema fisico e un'osservabile fisica \mathcal{A} , una misura effettuata al tempo t si dice ideale di prima specie se è istantanea, se al tempo $t + dt$ effettuando una nuova misura di \mathcal{A} si riottiene lo stesso valore con certezza e se la perturbazione portata al sistema è minima.

Assumere che la perturbazione sia minima significa affermare che, in seguito all'operazione di misura, lo stato del sistema sia rappresentato da un autovettore $|\psi_a\rangle = \mathcal{P}_a |\psi\rangle$ relativo all'autovalore misurato.

Se consideriamo il caso di misure generali, eventualmente non proiettive, le nozioni di commutatività, misurabilità simultanea e imperturbabilità non sono più da considerarsi equivalenti. Ciò implica inoltre che, date due osservabili \mathcal{A} e \mathcal{B} , anche se fossero rispettate le relazioni di commutazione, non sarebbe vero che, effettuata prima una misura di \mathcal{A} , in successione di \mathcal{B} ed infine un'altra misura di \mathcal{A} , si ritroverebbe con certezza lo stesso valore. Fatta questa considerazione, segue che è impensabile ricreare degli esperimenti che dimostrino la fattualità della contestualità quantistica senza fare delle assunzioni preliminari ed in effetti sono state, nel corso del tempo, proposte alcune teorie che quantificano la componente di disturbo di una misura su un sistema fisico e che stimano il distacco dall'idealità di una misurazione [7].

Alcune di queste idee saranno presentate nel seguito ed in particolare verrà anche data una definizione operativa di contesto, delineando quali siano i passaggi sperimentali da svolgere per una possibile verifica della contestualità.

3.2 Teorie non-contestuali a variabili nascoste

Nel precedente paragrafo abbiamo chiarito cosa si intende per contestualità e abbiamo specificato come la Meccanica Quantistica sia intrinsecamente una teoria contestuale. Tale risultato, tuttavia, fece aumentare gli scetticismi riguardo alla completezza di tale teoria fisica, così come era analogamente capitato con l'osservazione del carattere non-locale della Meccanica Quantistica.

Per tale ragione, per provare a giustificare una caratteristica della teorica quantistica che è così lontana dal senso comune, molti fisici supposero, seguendo i passi di Einstein, Podolsky e Rosen, che la Meccanica Quantistica non fosse una *teoria completa* e dunque che esistesse una teoria ancora più profonda che avrebbe risolto i paradossi della non-località e della contestualità quantistica. Cominciarono così a nascere, tra la prima e la seconda metà del secolo scorso, le prime teorie fisiche a *variabili nascoste*, volte a superare i paradossi della descrizione quantistica, pur riproducendo tutti i risultati di questa teoria.

Tali modelli, tuttavia, non riuscirono a raggiungere i propri scopi. Difatti, con il teorema di Bell, verificato anche sperimentalmente, si è dimostrato che nessuna teoria fisica locale a variabili nascoste può riprodurre le predizioni della Meccanica Quantistica. D'altro canto, si dimostra tramite il teorema di Kochen-Specker che nemmeno una teoria a variabili nascoste non-contestuale produce gli stessi risultati della Meccanica Quantistica. Entrambi i risultati rappresentano dunque degli esempi di *"no-go theorem"*, ovvero teoremi che affermano che una certa situazione non sia fisicamente possibile.

La trattazione del teorema KS è riservata al Capitolo successivo. Ci si concentrerà adesso, invece, sui modelli matematici alla base delle teorie non-contestuali a variabili nascoste.

3.2.1 Struttura matematica dei modelli NCHV

Data un'introduzione generale, procediamo adesso con la presentazione della formulazione matematica alla base dei modelli non-contestuali a variabili nascoste (NCHV). Tali modelli sono stati proposti per cercare di porre rimedio alla caratteristica peculiare della Meccanica Quantistica di essere una teoria contestuale e si basano sull'assunzione dell'esistenza di alcune variabili λ dalle quali dipendono tanto gli stati fisici $|\psi(\lambda)\rangle$, quanto le osservabili $\mathcal{O}(\lambda)$, e per le quali non è possibile effettuare una misurazione diretta né indiretta; per tale ragione vengono proprio dette "nascoste", cionondimeno sono basilari per l'esistenza di questa categoria di teorie.

In letteratura esistono diverse definizioni di modelli non-contestuali a variabili nascoste, tutti formalmente equivalenti tra di loro ma con strutture matematiche differenti. La minima struttura matematica richiesta per la costruzione di tali modelli è la seguente.

Dato un insieme di osservabili $\mathcal{S} = \{\mathcal{A}_1, \dots, \mathcal{A}_n\}$, un gruppo di *contesti* è un qualsiasi sottoinsieme \mathcal{M} , denominato anche *"scenario marginale"*, dell'insieme delle parti di \mathcal{S} , ove, però, le osservabili che appartengono allo stesso contesto sono tra loro compatibili, ovvero simultaneamente misurabili. L'attributo *"marginale"* deriva dal fatto che i dati osservati dalle misurazioni in ciascun contesto derivano dalla marginalizzazione di una distribuzione globale di probabilità estesa a tutte le osservabili. Per ogni contesto considerabile, indicato con $\{\mathcal{A}_i\}_{i \in C} \in \mathcal{M}$, ove $C \subset \{1, \dots, n\}$ è un insieme di indici, si ha una distribuzione di probabilità p_C che sovrintende i possibili risultati delle misure delle osservabili in questione, appartenenti al contesto stesso. Tali distribuzioni di probabilità sono utili nel caso in cui non si vogliono assegnare in modo deterministico certi valori a diverse osservabili, ma solo delle probabilità che tengano conto della variabilità statistica dei risultati di misura da un punto di vista "classico" e non quantistico, dovuta ad incertezze di misura di tipo statistico. Una condizione necessaria, ma non sufficiente, per l'esistenza di una distribuzione di probabilità globale, cioè estesa a tutte le diverse osservabili, è la cosiddetta *consistenza locale*: dati due insiemi di indici C e C' , deve valere l'uguaglianza

$$p_{C|C \cap C'} = p_{C'|C \cap C'},$$

ovvero le distribuzioni relative ai due contesti devono coincidere se ristrette al sottoinsieme dato dall'intersezione di C e C' . Tale condizione è detta anche di *non-disturbo*.

Nei modelli NCHV, si assume l'esistenza di alcune variabili nascoste, le quali predicano i risultati di misura di ciascuna osservabile indipendentemente dal contesto in cui essa è inserita. In particolare, denotati con $\{a_i\}_{i \in C}$ i possibili risultati di misura delle osservabili $\{\mathcal{A}_i\}_{i \in C}$, le distribuzioni di probabilità possono essere scritte come segue:

$$p_C(\{a_i\}_{i \in C}) = \sum_{\lambda \in \Omega} p(\lambda) \prod_{i \in C} p(a_i | \lambda), \quad (4)$$

dove devono valere le usuali condizioni - positività e normalizzazione - su p affinché sia una ben definita funzione di densità di probabilità: $p(\lambda) \geq 0$ e $\sum_{\lambda} p(\lambda) = 1$, $p(a_i | \lambda) \geq 0$ e $\sum_{a_i} p(a_i | \lambda) = 1$ e dove $\Omega \subset \mathbb{R}$ è l'insieme dei valori che possono assumere le variabili nascoste, genericamente indicate con λ . La (4) implica che ogni risultato di misura dipenda unicamente dalla variabile nascosta λ e non dallo specifico contesto in cui l'osservabile viene misurata.

Si può dimostrare che la definizione (4) per le distribuzioni di probabilità p_C è equivalente all'esistenza di una distribuzione di probabilità p_S estesa a tutte le osservabili $\{\mathcal{A}_1, \dots, \mathcal{A}_n\}$, indipendentemente dal contesto in cui esse sono inserite, tale che ciascuna p_C è ottenuta sommando su tutti i possibili risultati di misura delle altre osservabili negli altri contesti:

$$p_C(\{a_i\}_{i \in C}) = \sum_{a_s : s \notin C} p_S(a_1, \dots, a_n).$$

Tale risultato prende il nome di *teorema di Fine* [11] e sebbene sia stato formulato solo nel caso dello scenario CHSH, Suppes e Zanotti [12] ne hanno fornito una dimostrazione in un caso del tutto generale. Non verrà qui data una dimostrazione di tale risultato, rimandando ai riferimenti bibliografici per degli approfondimenti.

3.3 Definizione operativa di contesto

Sino a questo momento è stata utilizzata una nozione semplice e astratta di ciò che si intende per "contesto" e questa è stata e sarà anche nel prosieguo sufficiente per presentare tutti i risultati teorici illustrati, concernenti i modelli non-contestuali a variabili nascoste, il teorema di Kochen-Specker e la derivazione di diseguaglianze non-contestuali. Tuttavia, tale definizione di contesto non è più sufficiente nel momento in cui si voglia andare a confrontare diversi tipi di teorie in cui tale nozione deve essere applicata. A tal proposito è necessario dare una definizione di contesto che sia al contempo precisa e che, in particolare, non dipenda dal tipo di teoria. Per questa ragione è fondamentale avere una definizione di ciò che si intende per contesto puramente operativa, applicabile perciò anche in ambito sperimentale. Tale passaggio è fondamentale per testare sperimentalmente il fenomeno della contestualità, difatti le implicazioni fisiche della violazione di una generica diseguaglianza non-contestuale a variabili nascoste dipendono dalle particolari assunzioni fisiche che vengono fatte nella definizione stessa di contesto e tali assunzioni devono sempre essere ben verificate per confermare o meno la loro consistenza con il modello NCHV che si vuole testare.

Pertanto, l'obiettivo di questo paragrafo è quello di dare una *definizione operativa* di contesto, in modo tale da poterla applicare nelle verifiche sperimentali della contestualità. Ci si concentrerà soprattutto sul concetto di *misure congiunte* e di non-disturbo per misure sequenziali, sia nel caso di misure ideali, sia nel caso di misure che si discostano dall'idealità.

Per descrivere la realizzazione sperimentale di prove per la contestualità, resteremo in primo luogo nel caso più generale possibile, non presupponendo la validità della Meccanica

Quantistica, ma attuando una descrizione delle misure di tipo *"scatola nera"*. In tale visione, un generico apparato sperimentale è visto come una *black-box* che prende in input un sistema fisico che si trova in un certo stato e dà in output il risultato classico della misurazione e, ancora, il sistema, eventualmente in un nuovo stato. È assolutamente necessario a questo punto effettuare delle assunzioni sul modo in cui combinare diversi apparati strumentali che compiono misure di osservabili distinte sullo stesso sistema, per poter definire distribuzioni di probabilità congiunte, cioè relative ai risultati di misura di più osservabili. Difatti, uno dei prerequisiti fondamentali per la contestualità è la possibilità di effettuare due o più misure all'unisono. In un contesto quantistico ciò è possibile solo per osservabili tra loro compatibili.

Nella discussione originale del teorema da parte di Kochen e Specker, essi utilizzarono la nozione di *"commisurabilità"* sostituendo quella di compatibilità. Affermare che un insieme $\{\mathcal{A}_1, \dots, \mathcal{A}_n\}$ si tratta di un insieme di osservabili "commisurabili" significa dire che esiste un singolo osservabile \mathcal{B} , funzione delle altre osservabili $\{\mathcal{A}_i\}_{i=1}^n$, tale per cui, attraverso una sua misura, è possibile risalire a tutte le misure delle n osservabili appartenenti all'insieme. In Meccanica Quantistica, per *misure ideali*, come precedentemente definite, ciò equivale alla vicendevole commutatività di tutte le osservabili prese in considerazione. Quindi, nello scenario originale KS, un contesto è definito come un insieme di osservabili commisurabili.

Si può dunque asserire che gli oggetti base della contestualità sono le osservabili e le loro relazioni di compatibilità. Un modello NCHV generale assegna valori a ciascuna osservabile indipendentemente dall'insieme di osservabili misurate simultaneamente in cui essa si ritrova, ossia dal contesto in cui è inserita. Potremmo domandarci, a questo punto, cosa succede quando le misurazioni che effettuiamo non sono ideali - cosa che di norma accade in un contesto sperimentale - e che cosa possiamo fare per tener conto di ciò. Si procederà, allora, adesso a tradurre queste nozioni in passaggi pratici da effettuare in laboratorio.

Prima di tutto, la richiesta minima che un contesto deve soddisfare è la possibilità di effettuare una misurazione congiunta, ove per "congiunta", come vedremo, non si intende necessariamente una misurazione simultanea, ma una per cui i risultati di misura delle osservabili possano essere descritte da una distribuzione di probabilità congiunta. Un modo per farlo è semplicemente effettuare misurazioni in successione, tecnica adottata in molti esperimenti volti a testare la contestualità (Amselem et al., 2009 [13]). Nell'implementazione sequenziale di una misurazione congiunta, è chiaro come identificare la stessa osservabile in contesti differenti: a ciascuna di esse è associata una procedura pratica di misura.

Effettuare una misura dopo l'altra, tuttavia, non è sufficiente per parlare di una misurazione congiunta: è necessario infatti richiedere che le misure non si disturbino a vicenda. In altre parole, la misura di una osservabile \mathcal{B} non deve essere alterata da una misura precedente di una osservabile \mathcal{A} e viceversa. Dunque in un contesto devono apparire solo osservabili le cui misurazioni non si disturbino vicendevolmente. Si richiede pertanto che i risultati di misura di una stessa osservabile siano gli stessi e siano indipendenti dall'ordine. Un semplice test preliminare, pur non esauriente, da poter compiere a tal proposito è quello della *auto-ripetibilità*: se si esegue la stessa misurazione due volte di seguito, bisogna ottenere lo stesso risultato, altrimenti non ha senso parlare di disturbo tra diverse osservabili.

Nel caso quantistico, che, in fin dei conti, è quello per noi di maggior interesse, la condizione di non-disturbo per misure in successione è la seguente: la misura dell'osservabile fisica

\mathcal{A} non disturba quella di \mathcal{B} se è impossibile identificare tramite una misura di \mathcal{B} se \mathcal{A} è stata misurata o meno. Un dato insieme di osservabili $\{\mathcal{A}, \mathcal{B}, \mathcal{C}, \dots\}$ soddisfa la proprietà di ripetibilità dei risultati se, per ogni possibile sequenza di tali osservabili, in qualunque ordine, eventualmente ripetute, il risultato di misura di ciascuna grandezza è lo stesso di quello che risulta la prima volta. Nei veri esperimenti, tale condizione non è mai verificata esattamente, a causa della risoluzione finita degli strumenti che si utilizzano e altre possibili imperfezioni sperimentali. Cionondimeno, conoscendo i background teorici delle grandezze che si misurano, è possibile attuare dei metodi pratici per trattare e quantificare tali imperfezioni.

In conclusione, riassumendo brevemente quanto illustrato in questo paragrafo, i passi da seguire sperimentalmente per effettuare una verifica di contestualità sono i seguenti:

1. Definire delle procedure sperimentali di misura delle osservabili prese in considerazione per lo svolgimento dell'esperimento ed associare a ciascuna di queste una variabile che può assumere gli stessi valori dei suoi possibili risultati di misura;
2. Identificare i contesti in termini di misurazioni con risultati ripetibili e senza disturbo statistico;
3. Effettuare misure con sequenze diverse delle osservabili, in accordo con i diversi contesti. La stessa procedura di misura va ripetuta per ciascuna osservabile nei contesti differenti;
4. Confrontare i campioni statistici osservati con quelli predetti dai modelli NCHV per le corrispondenti variabili classiche.

4 Teorema di Kochen-Specker

Nel precedente Capitolo è stata introdotta la nozione di contestualità, sia da un punto di vista più concettuale, sia da un punto di vista pratico, e si è discusso circa le teorie non-contestuali a variabili nascoste, che rappresentano un tentativo di superare il carattere contestualistico della Meccanica Quantistica.

In questo Capitolo ci si soffermerà sul teorema di Kochen-Specker, che pone dei limiti a tali tipi di teorie. Il teorema KS esclude tutte le teorie a variabili nascoste che assumono che tutti gli elementi fisici di realtà possano essere rappresentati simultaneamente nel formalismo quantistico trascurando il contesto in cui essi sono inseriti. Tale risultato dunque sottolinea come la Meccanica Quantistica sia una teoria intrinsecamente contestuale e come essa non possa essere completata da una teoria a variabili nascoste di tipo non-contestuale e realistica. Nel seguito, verrà per prima cosa presentata la versione originale del teorema di Kochen-Specker, dopodiché esso sarà dimostrato in due casi particolari, rispettivamente in quattro e in tre dimensioni

4.1 Argomento originale del teorema

Si andrà adesso a presentare uno dei risultati più fondamentali a riguardo della contestualità quantistica: il *teorema di Kochen-Specker*. Esso rappresenta il punto di partenza della ricerca svolta nell'ambito della contestualità, in quanto afferma che un generale modello non-contestuale è in conflitto con la teoria quantistica. Il risultato può essere dimostrato soltanto per spazi di Hilbert \mathcal{H} di dimensione $d \geq 3$, in quanto in dimensione minore non viene riscontrata contestualità.

Come si vedrà nel seguito, per l'enunciato e la dimostrazione del teorema, si utilizzano i proiettori di rango-1 come osservabili fisiche, associati ciascuno ad un vettore $|v\rangle \in \mathbb{C}^d$, in quanto caratterizzati da uno spettro dicotomico $\sigma = \{0, 1\}$, come dimostrato in precedenza. In particolare, il proiettore lungo la direzione del vettore normalizzato $|v\rangle$, che agisce sullo spazio \mathbb{C}^d , sarà definito dal prodotto *ket-bra* $\mathcal{P}_{|v\rangle} = |v\rangle \langle v|$. Una proprietà fondamentale degli operatori di proiezione così definiti è il fatto che essi commutano tra loro se i vettori che li determinano sono tra loro ortogonali. Difatti, siano $|v\rangle, |w\rangle \in \mathbb{C}^d$ vettori normalizzati tali per cui $\langle v|w\rangle = 0 = \langle w|v\rangle$, cioè soddisfano alle relazioni di ortogonalità, allora:

$$[\mathcal{P}_{|v\rangle}, \mathcal{P}_{|w\rangle}] = \mathcal{P}_{|v\rangle}\mathcal{P}_{|w\rangle} - \mathcal{P}_{|w\rangle}\mathcal{P}_{|v\rangle} = |v\rangle \langle v|w\rangle \langle w| - |w\rangle \langle w|v\rangle \langle v| = 0.$$

Di seguito, per enunciato e relative dimostrazioni del teorema, si lavorerà in spazi reali e non complessi, senza per questo perdere di generalità. Difatti, dato che $\mathbb{R} \subset \mathbb{C}$, allora anche $\mathbb{R}^d \subset \mathbb{C}^d$, pertanto, se due vettori sono ortogonali nello spazio reale, saranno ortogonali anche in quello complesso.

Supponendo allora di lavorare in uno spazio tridimensionale reale, tenendo conto del fatto che i ragionamenti possono essere facilmente generalizzati ad una dimensione maggiore ed al campo complesso, l'assegnazione di uno dei due valori $\{0, 1\}$ ad un proiettore può essere intesa come una funzione $f: I \rightarrow \{0, 1\}$, ove $I \subset \mathbb{R}^3$ è un qualsiasi sottoinsieme di vettori in \mathbb{R}^3 , sfruttando la mutua relazione che c'è tra proiettori-vettori. Per ogni set di tre vettori mutuamente ortogonali, che dunque formano una base per lo spazio \mathbb{R}^3 e a cui corrispondono tre proiettori che commutano vicendevolmente, vale

$$\sum_{i=1}^3 \mathcal{P}_{v_i} = \mathbb{1}_3,$$

ove \mathcal{P}_{v_i} è il proiettore lungo la direzione di $\vec{v}_i \in \mathbb{R}^3$, in virtù della proprietà (2) illustrata in precedenza. Affinché la somma dei corrispondenti valori assegnati ai medesimi proiettori $v(\mathcal{P}_{v_i})$ sia uguale ad 1, può essere assegnato in modo non-contestuale il valore +1 ad uno solo dei tre proiettori, mentre agli altri dovrà essere assegnato il valore 0. Si dimostra che tale assegnazione non è sempre possibile da effettuare in modo non-contestuale per ogni insieme massimale di vettori ortogonali, e ciò è proprio il risultato del teorema di Kochen-Specker.

La versione originale del teorema è la seguente [7].

Teorema. Kochen-Specker (1967): *Esiste un insieme finito $I \subset \mathbb{R}^3$ per il quale non esiste alcuna funzione $f : I \rightarrow \{0, 1\}$ che soddisfi alla condizione:*

$$f(\vec{v}) + f(\vec{u}) + f(\vec{w}) = 1$$

per ogni terna di vettori mutuamente ortogonali $\vec{v}, \vec{u}, \vec{w} \in I$.

In generale, in d dimensioni l'uguaglianza che non viene soddisfatta è $\sum_{|\psi\rangle \in V} f(|\psi\rangle) = 1$ per ogni sottoinsieme $V \subset \mathbb{R}^d$ di d vettori ortogonali.

La dimostrazione originale del teorema implicava un insieme di ben 117 vettori. Negli anni, sono state fornite nuove dimostrazioni che hanno fortemente diminuito il numero di vettori, semplificando la dimostrazione e rendendo possibile l'attuazione di verifiche sperimentali. Per esempio, in dimensione $d = 4$, l'insieme di vettori si è ridotto a 18 elementi [8], mentre in dimensione $d = 3$ è possibile dimostrare il teorema partendo da un insieme di 33 vettori [6]. Saranno queste le dimostrazioni del teorema KS che si andranno ora ad analizzare.

4.2 Dimostrazione del teorema in uno spazio 4D

Si illustrerà adesso una dimostrazione del teorema di Kochen-Specker in $d = 4$. In particolare, la dimostrazione descritta è quella fornita da D.Tong in [5].

In generale, tutte le prove di questo teorema, in dimensione generica, seguono gli stessi passi logici: a partire da un insieme di vettori, ciascuno associato ad un proiettore di rango-1 in uno spazio d-dimensionale, si costruiscono dei sottoinsiemi d-dimensionali, chiamati *contesti*, di vettori mutuamente ortogonali - o analogamente di proiettori che commutano vicendevolmente - ed infine si mostra come non sia possibile associare in modo coerente a ciascuno di essi un determinato valore, 0 o 1, che non dipenda dal particolare contesto.

La dimostrazione che prendiamo ora in considerazione coinvolge un insieme di 18 vettori $\psi_i \in \mathbb{R}^4$, cui sono associati altrettanti operatori di proiezione di rango-1. Tale insieme di vettori $\{\psi_i\}_{i=1,\dots,18}$ verrà denominato insieme KS. Esso consta dei seguenti elementi.

$$\begin{aligned} \psi_1 &= (0, 0, 0, 1), & \psi_2 &= (0, 0, 1, 0), & \psi_3 &= (1, 1, 0, 0), & \psi_4 &= (1, -1, 0, 0) \\ \psi_5 &= (0, 1, 0, 0), & \psi_6 &= (1, 0, 1, 0), & \psi_7 &= (1, 0, -1, 0), & \psi_8 &= (1, -1, 1, -1) \\ \psi_9 &= (1, -1, -1, 1), & \psi_{10} &= (0, 0, 1, 1), & \psi_{11} &= (1, 1, 1, 1), & \psi_{12} &= (0, 1, 0, -1) \\ \psi_{13} &= (1, 0, 0, 1), & \psi_{14} &= (1, 0, 0, -1), & \psi_{15} &= (0, 1, -1, 0), & \psi_{16} &= (1, 1, -1, 1) \\ \psi_{17} &= (1, 1, 1, -1), & \psi_{18} &= (-1, 1, 1, 1). \end{aligned}$$

Definendo ciascun operatore di proiezione così come visto prima, eventualmente dividendo per la norma dei vettori non normalizzati, si può notare come, ovviamente, non tutti gli

operatori commutino tra di loro, tuttavia si possono costruire dei sottoinsiemi, ciascuno composto da 4 elementi, di proiettori che commutano vicendevolmente e la cui somma restituisce l'identità. Per esempio, considerando i primi 4 vettori, si ha:

$$\mathcal{P}_1 + \mathcal{P}_2 + \mathcal{P}_3 + \mathcal{P}_4 = \mathbb{1}_4.$$

Per le richieste del teorema di Kochen-Specker, solo ad uno di tali operatori di proiezione potrà essere assegnato il valore $p = 1$, mentre gli altri saranno associati al valore $p = 0$. Ora, a partire dai 18 proiettori, si possono formare 9 sottoinsiemi di 4 operatori che commutino vicendevolmente e ciascuno di tali sottoinsiemi formerà un *contesto*. I sottoinsiemi utili alla dimostrazione del teorema sono i seguenti.

| | | | | |
|-------------------------|--------------------|--------------------|--------------------|--------------------|
| Primo Contesto | \mathcal{P}_1 | \mathcal{P}_2 | \mathcal{P}_3 | \mathcal{P}_4 |
| Secondo Contesto | \mathcal{P}_1 | \mathcal{P}_5 | \mathcal{P}_6 | \mathcal{P}_7 |
| Terzo Contesto | \mathcal{P}_2 | \mathcal{P}_5 | \mathcal{P}_{13} | \mathcal{P}_{14} |
| Quarto Contesto | \mathcal{P}_8 | \mathcal{P}_9 | \mathcal{P}_3 | \mathcal{P}_{10} |
| Quinto Contesto | \mathcal{P}_8 | \mathcal{P}_{11} | \mathcal{P}_7 | \mathcal{P}_{12} |
| Sesto Contesto | \mathcal{P}_9 | \mathcal{P}_{11} | \mathcal{P}_{14} | \mathcal{P}_{15} |
| Settimo Contesto | \mathcal{P}_{16} | \mathcal{P}_{17} | \mathcal{P}_4 | \mathcal{P}_{10} |
| Ottavo Contesto | \mathcal{P}_{16} | \mathcal{P}_{18} | \mathcal{P}_6 | \mathcal{P}_{12} |
| Nono Contesto | \mathcal{P}_{17} | \mathcal{P}_{18} | \mathcal{P}_{13} | \mathcal{P}_{15} |

È importante notare come i precedenti contesti hanno la proprietà che ciascun operatore di proiezione appare esattamente in due di essi, ovvero in due differenti righe. Cercando ora di associare ad un solo proiettore per contesto il valore $p = 1$ e a tutti gli altri dello stesso $p = 0$, ci si potrà rendere conto che tale assegnazione risulta impossibile. Difatti, dato che ogni operatore compare due volte e in due contesti diversi, se si assegnasse il valore $p = 1$ a ciascun \mathcal{P}_i e poi si andasse a ritroso cambiando l'assegnazione del valore ad un operatore alla volta, si terminerebbe comunque con un numero pari di proiettori a cui è associato il valore $p = 1$. Ciò è in chiara contraddizione con l'obiettivo che si era posto, poiché in totale si dovrebbe avere un numero dispari, in particolare 9, di proiettori cui è associato il valore $p = 1$. Questo dimostra il teorema di Kochen-Specker in uno spazio quadridimensionale.

4.3 Dimostrazione del teorema in uno spazio 3D

Terminato il caso quadridimensionale, si passa adesso a trattare il teorema nel caso tridimensionale, illustrandone una dimostrazione anche in questo scenario. In particolare la dimostrazione del teorema KS nello spazio \mathbb{R}^3 che verrà qui esposta è quella fornita dal fisico A. Peres in un suo articolo del 1991 [6].

In tale dimostrazione vengono adoperati solo 33 vettori, molti di meno rispetto ai 117 della dimostrazione originale. L'insieme di vettori considerato, come si vedrà, possiede delle proprietà di simmetria molto importanti che renderanno la dimostrazione più semplice. Dato che ai fini di quest'ultima non sarà importante la lunghezza dei vettori, ma solo la loro direzione nello spazio, non si considereranno normalizzati: ciò non ha alcun effetto sulle loro relazioni di ortogonalità, che sono l'unica cosa che conta in questo caso.

I 33 vettori che si considerano per la dimostrazione del teorema sono quelli per cui i quadrati dei coseni direttori, ovvero dei coseni degli angoli che i vettori formano con i tre assi cartesiani \hat{x} , \hat{y} e \hat{z} in \mathbb{R}^3 , generano una delle seguenti combinazioni:

$$0 + 0 + 1 = 0 + \frac{1}{2} + \frac{1}{2} = 0 + \frac{1}{3} + \frac{2}{3} = \frac{1}{4} + \frac{1}{4} + \frac{1}{2},$$

e tutte le loro permutazioni.

Tali vettori possono essere ottenuti collegando l'origine dello spazio \mathbb{R}^3 con i punti $(x, y, z) \in \mathbb{R}^3$ tali per cui x, y e z possono assumere i valori $\{0, 1, -1, \sqrt{2}, -\sqrt{2}\}$. Vettori opposti, come $(1, 0, 0)$ e $(-1, 0, 0)$, sono contati una volta sola.

Un'importante proprietà di simmetria di cui gode tale set di vettori è l'invarianza sotto l'interscambio degli assi \hat{x} , \hat{y} e \hat{z} e sotto l'inversione di ciascuno di essi (trasformazione di *parità*). Tale caratteristica permette di assegnare arbitrariamente e senza perdere di generalità i valori 0 e 1 ad alcuni vettori - e di conseguenza ai proiettori ad essi associati - poiché qualsiasi altra assegnazione sarebbe equivalente a patto di rinominare gli assi o invertire uno di essi. Un esempio chiarificatore è dato dalla terna $\{(1, 0, 0), (0, 1, 0), (0, 0, 1)\}$, per cui a qualsiasi di essi può essere associato il valore 1, scegliendo un generico dei tre assi.

Per la dimostrazione del teorema, consideriamo i seguenti 10 insiemi (contesti) di tre vettori mutuamente ortogonali, tali da formare ciascuno una base di \mathbb{R}^3 . In ognuno degli insiemi, al primo vettore, evidenziato in grassetto, è associato il valore 1, mentre agli altri due lo 0. Oltre ai tre vettori, sono anche aggiunti per ogni riga ulteriori vettori ortogonali al primo, ai quali dunque sarà associato il valore 0. Inoltre, i vettori posti in corsivo sono vettori a cui è associato il valore 0, già elencati in un insieme precedente. La scelta delle assegnazioni, come detto in precedenza, può cambiare senza perdere di generalità grazie alla simmetria dell'insieme. Per semplificarne la lettura, nella seguente tabella verrà modificata la notazione, sottintendendo la radice quadrata ($\bar{2} \equiv \sqrt{2}$) e indicando il segno meno con $\bar{1} \equiv -1$.

| Terna di vettori ortogonali | Altri vettori ortogonali al primo |
|--|--|
| (0, 0, 1) (1, 0, 0) (0, 1, 0) | (1, 1, 0) (1, $\bar{1}$, 0) |
| (1, 0, 1) ($\bar{1}$, 0, 1) (<i>0, 1, 0</i>) | - |
| (0, 1, 1) (0, $\bar{1}$, 1) (<i>1, 0, 0</i>) | - |
| (1, $\bar{1}$, 2) ($\bar{1}$, 1, 2) (<i>1, 1, 0</i>) | ($\bar{2}$, 0, 1) (0, 2, 1) |
| (1, 0, 2) ($\bar{2}$, 0, 1) (<i>0, 1, 0</i>) | ($\bar{2}$, 1, 1) |
| (2, 1, 1) (0, $\bar{1}$, 1) ($\bar{2}$, 1, 1) | ($\bar{1}$, 0, 2) |
| (2, 0, 1) (0, 1, 0) ($\bar{1}$, 0, 2) | ($\bar{1}$, $\bar{1}$, 2) |
| (1, 1, 2) (1, $\bar{1}$, 0) ($\bar{1}$, $\bar{1}$, 2) | (0, $\bar{2}$, 1) |
| (0, 1, 2) (1, 0, 0) (0, $\bar{2}$, 1) | (1, $\bar{2}$, 1) |
| (1, 2, 1) ($\bar{1}$, 0, 1) (1, $\bar{2}$, 1) | (0, $\bar{1}$, 2) |

Come si può notare dalla tabella, i vettori $(1, 0, 0)$, $(0, 2, 1)$ e $(0, \bar{1}, 2)$, contenuti rispetti-

vamente nella prima, quarta e decima riga, sono ortogonali tra loro, ma comunque a tutti loro è stato assegnato il valore 0. Ciò è una contraddizione, difatti ad almeno uno di essi, che formano una terna di vettori ortogonali, ai quali sono associati tre proiettori che commutano vicendevolmente, dovrebbe essere associato il valore 1 per soddisfare le identità presentate in precedenza.

Si può notare che eliminando anche uno solo dei vettori dall'insieme dei 33, tale contraddizione scompare e possono essere assegnati valori in modo non-contestuale a tutti i proiettori di rango-1 associati ai vettori. Tale fatto è riconducibile ad un motivo prettamente geometrico: nel momento in cui uno dei qualsiasi vettori dell'insieme di partenza viene sottratto, la simmetria dell'insieme sotto interscambio degli assi e parità viene infranta e con questa anche l'arbitrarietà dell'assegnazione dei valori ad alcuni vettori.

Ciò termina la dimostrazione del teorema KS in uno spazio tridimensionale.

Per il teorema di Kochen-Specker in uno spazio tridimensionale è possibile fornire un'interpretazione fisica per i proiettori di rango-1 e furono proprio gli autori del teorema i primi ad illustrarla. In particolare, essi interpretarono i proiettori in uno spazio di Hilbert di dimensione $d = 3$ come *operatori di spin* per una particella di spin $s = 1$. Per una particella di questo genere, gli operatori di spin lungo le consuete direzioni cartesiane \hat{x} , \hat{y} e \hat{z} , ovvero rispettivamente \mathcal{S}_x , \mathcal{S}_y e \mathcal{S}_z , hanno autovalori, in unità di \hbar , $\Sigma_1 = \{-1, 0, 1\}$. Dunque i quadrati di tali operatori, dati dal prodotto scalare dell'operatore di spin con se stesso, \mathcal{S}_x^2 , \mathcal{S}_y^2 e \mathcal{S}_z^2 , hanno spettro dicotomico $\Sigma_2 = \{0, 1\}$. Inoltre, essi commutano vincendevolmente:

$$[\mathcal{S}_x^2, \mathcal{S}_y^2] = [\mathcal{S}_x^2, \mathcal{S}_z^2] = [\mathcal{S}_y^2, \mathcal{S}_z^2] = 0.$$

Pertanto le direzioni in uno spazio euclideo corrispondono a misurazioni di spin e possono essere identificate con le direzioni di uno spazio di Hilbert. Inoltre, data una direzione $\vec{v} \in \mathbb{R}^3$, si può definire il seguente proiettore di rango-1

$$\mathcal{P}_{\vec{v}} = \mathbb{1} - \mathcal{S}_{\vec{v}}^2,$$

di spettro dicotomico $\sigma = \{0, 1\}$, a seconda del risultato di misurazione dello spin $\mathcal{S}_{\vec{v}}^2$ lungo la direzione identificata da \vec{v} .

In conclusione, si sottolinea che le dimostrazioni del teorema KS fornite sono soltanto due esempi delle molteplici presenti in letteratura. Nel corso degli anni ne sono state proposte molte, in diverse dimensioni $d \geq 3$, ciascuna con caratteristiche peculiari tali da renderne più adatta l'applicazione in alcuni contesti piuttosto che in altri. Ad ogni modo, indipendentemente dal tipo di dimostrazione, il risultato fondamentale del teorema è sempre lo stesso: il carattere contestuale della teoria quantistica.

5 Violazioni di disequaglianze non-contestuali

Conclusa l'analisi del teorema di Kochen-Specker, si può adesso passare ad illustrare ulteriori risultati, più recenti, a riguardo, prendendo in considerazione alcuni esempi di *disequaglianze KS*. Per circoscrivere e altresì confutare alcune delle suddette teorie non-contestuali a variabili nascoste, così come nel caso delle disequaglianze di Bell riguardanti la non-località della teoria quantistica, sono state proposte diverse *disequaglianze non-contestuali*, soddisfatte da tutti i modelli NCHV, ma violate da sistemi quantomeccanici. Il risultato principale della violazione di tali disequaglianze è la dimostrazione da un punto di vista sperimentale che la Meccanica Quantistica sia una teoria contestuale incompatibile con i modelli NCHV. Infatti, la loro violazione in laboratorio rappresenta una prova pratica del risultato di Kochen e Specker. Si sottolinea che in questo lavoro non si parlerà delle verifiche sperimentali della violazione di tali disequaglianze, rimandando ad articoli più specifici in letteratura, ma si discuterà solo circa la loro derivazione formale. Pertanto, mentre il risultato dei fisici Kochen e Specker rappresenta la pietra miliare dello studio della contestualità quantistica da un punto di vista maggiormente teorico, le disequaglianze non-contestuali possono essere testate in modo pratico, e con loro può essere verificata sperimentalmente la contestualità quantistica. Di esse ne saranno presentati diversi esempi. Per prima cosa, verrà esposto uno dei più semplici esempi illustrativi della contestualità quantistica: il *quadrato di Peres-Mermin*. Da esso, si dedurrà una disequaglianza non-contestuale che risulta violata da un particolare sistema quantistico.

Dopodiché, verranno presentate due ulteriori disequaglianze non-contestuali e si discuterà circa la loro violazione.

5.1 Il quadrato di Peres-Mermin

Mostriamo adesso uno degli esempi più semplici della *contestualità quantistica*, illustrando il cosiddetto "*Quadrato di Peres-Mermin*" [3][4]. Si considerino 9 osservabili quantistiche, rappresentate da altrettanti operatori, dicotomiche, ovvero tali per cui una misura di esse può dare solo due valori, che, senza perdere di generalità, assumiamo essere $\Gamma = \{+1, -1\}$. Riorganizziamo tali osservabili nel quadrato come segue:

$$\begin{array}{|ccc|} \hline A & B & C \\ \hline a & b & c \\ \hline \alpha & \beta & \gamma \\ \hline \end{array}. \quad (5)$$

Denotiamo ciascuna delle righe o ciascuna delle colonne come un "*contesto*", cioè un insieme di osservabili compatibili che possono essere misurate insieme senza problemi legati al principio di indeterminazione di Heisenberg. Ciò vuol dire che, prendendo come esempio la prima colonna, $[A, a] = [a, \alpha] = [A, \alpha] = 0$, ove con la notazione $[*, *]$ si è indicato il commutatore tra due operatori. Classicamente, ciascuna osservabile, relativa ad una proprietà del sistema, assume un valore ben definito, o $+1$ o -1 , indipendentemente dal contesto in cui è inserita, così come i prodotti tra le grandezze sulle medesime righe o colonne. Raccogliamo ciascuno di questi prodotti in un insieme: $\{ABC, abc, \alpha\beta\gamma, Aa\alpha, Bb\beta, Cc\gamma\}$. Per tale insieme, solo un numero pari di prodotti può assumere il valore positivo $+1$, dal momento che l'assegnazione del valore positivo a tutte le osservabili restituisce 6 prodotti positivi e cambiare il segno ad una qualsiasi assegnazione modifica il segno di due prodotti. A partire da questa osservazione, può essere ricavata una disequaglianza sempre verificata

sotto ipotesi di non-contestualità. In particolare, definiamo il valore di aspettazione di ciascun prodotto come:

$$\langle ABC \rangle = \text{Prob}(ABC = 1) - \text{Prob}(ABC = -1).$$

Ovvero esso assumerà o valore $+1$ se $\text{Prob}(ABC = 1) = 1$ e $\text{Prob}(ABC = -1) = 0$ o -1 viceversa.

Data tale definizione, segue la seguente diseuguaglianza:

$$\langle S \rangle = \langle ABC \rangle + \langle abc \rangle + \langle \alpha\beta\gamma \rangle + \langle Aa\alpha \rangle + \langle Bb\beta \rangle - \langle Cc\gamma \rangle \leq 4. \quad (6)$$

Tale diseuguaglianza, rispettata da un qualsiasi sistema fisico classico e non-contestuale, si può dimostrare essere violata da un semplice sistema quantistico di due particelle di spin $s = \frac{1}{2}$. Difatti, considerando gli operatori di spin di Pauli $\{\sigma_x, \sigma_y, \sigma_z\}$ in uno spazio di Hilbert $\mathcal{H} \cong \mathbb{C}^2$, precedentemente definiti, si può costruire il seguente Quadrato di Peres-Mermin:

$$\begin{vmatrix} \sigma_z \otimes \mathbb{1} & \mathbb{1} \otimes \sigma_z & \sigma_z \otimes \sigma_z \\ \mathbb{1} \otimes \sigma_x & \sigma_x \otimes \mathbb{1} & \sigma_x \otimes \sigma_x \\ \sigma_z \otimes \sigma_x & \sigma_x \otimes \sigma_z & \sigma_y \otimes \sigma_y \end{vmatrix}. \quad (7)$$

Tutte le osservabili nella stessa riga o colonna commutano vicendevolmente, ovvero sono compatibili. È possibile una verifica immediata tramite conto diretto, ricordando la definizione del prodotto di Kronecker tra matrici. Dunque è possibile misurarle simultaneamente ed associare un valore di aspettazione al loro prodotto. In particolare tale valore di aspettazione è indipendente dallo stato $|\psi\rangle$ che si considera, dato che ogni prodotto è uguale all'identità $\mathbb{1}$, eccetto quello dell'ultima colonna, per cui $Cc\gamma = -\mathbb{1}$. Date tali relazioni, risulta che il valore di aspettazione di ogni prodotto nel set sia uguale a $+1$, eccetto quello dell'ultima colonna, che risulta uguale a -1 .

Sommando tali valori di aspettazione si ottiene un $\langle S \rangle = 6$, che chiaramente viola la diseuguaglianza (6). A partire dall'assunzione di non-contestualità, ovvero che sia possibile associare ad ogni osservabile un preciso valore indipendentemente dal contesto all'interno del quale essa si trovi, si è giunti ad una contraddizione. Ciò significa che o non è possibile a priori associare dei valori a tali osservabili oppure che tale assegnazione dipenda proprio dal contesto e dunque si verifica il fenomeno della *contestualità quantistica*.

5.2 Ulteriori esempi di diseuguaglianze non-contestuali

Si andranno ora a prendere in considerazione due ulteriori esempi illustrativi di diseuguaglianze non-contestuali: il primo riguarda uno scenario dipendente dallo stato ("*state-dependent contextuality*"), il secondo invece prende in esame uno scenario indipendente dal particolare stato considerato ("*state-independent contextuality*").

Illustriamo il primo dei due, prendendo in esame lo scenario KCBS (Klyachko, Can, Biniocglu, Shumovsky)[10], in cui, in dimensione $d=3$, dei *qutrits*, cioè dei sistemi a tre livelli, generano contestualità. Si considerino cinque osservabili $\{\mathcal{A}_0, \mathcal{A}_1, \mathcal{A}_2, \mathcal{A}_3, \mathcal{A}_4\}$, con spettro discreto tale per cui $\sigma = \{-1, +1\}$, e tali che $[\mathcal{A}_i, \mathcal{A}_{i+1}] = 0 = [\mathcal{A}_0, \mathcal{A}_4]$ con $i \in \{0, 1, 2, 3\}$, in modo tale da garantire la simultanea misurabilità. Sotto queste semplici ipotesi, vale la

Si considerino i seguenti 13 vettori appartenenti allo spazio \mathbb{R}^3 :

$$\begin{aligned}
y_1^- &= (0, 1, -1), & h_1 &= (-1, 1, 1), & z_1 &= (1, 0, 0), \\
y_2^- &= (1, 0, -1), & h_2 &= (1, -1, 1), & z_2 &= (0, 1, 0), \\
y_3^- &= (1, -1, 0), & h_3 &= (1, 1, -1), & z_3 &= (0, 0, 1), \\
y_1^+ &= (0, 1, 1), & h_0 &= (1, 1, 1), \\
y_2^+ &= (1, 0, 1), \\
y_3^+ &= (1, 1, 0).
\end{aligned}$$

È possibile rappresentare tali vettori come vertici in un grafico in cui due di essi sono collegati se e solo se i vettori a loro associati sono ortogonali tra di loro. Il risultato che si ottiene è il seguente.

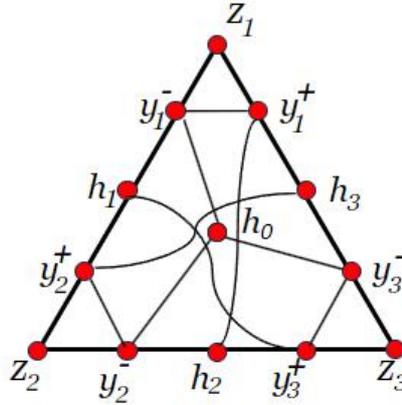


Figura 2: Grafico ottenuto mediante le relazioni di ortogonalità dei vettori definiti in precedenza. Ciascun punto rosso rappresenta un vettore, due vertici sono tra loro collegati quando i rispettivi vettori risultano ortogonali.

Definiamo allora il seguente insieme di vettori $V = \{y_k^\sigma, h_\alpha, z_k \mid k = 1, 2, 3; \sigma = \pm; \alpha = 0, 1, 2, 3\}$ e la *matrice delle adiacenze* Γ , ovvero una matrice con elementi sulla diagonale nulli e tale per cui $\Gamma_{uv} = 1$ se i due vertici del grafico, rappresentati dai vettori $u, v \in V$, sono collegati tra loro e $\Gamma_{uv} = 0$ viceversa. Per 13 variabili arbitrarie $a_v = \pm 1$ con $v \in V$, vale la seguente disuguaglianza:

$$\sum_{v \in V} a_v - \frac{1}{4} \sum_{u, v \in V} \Gamma_{uv} a_v a_u \leq 8, \quad (9)$$

la quale può essere verificata in modo diretto esaurendo tutte le diverse 2^{13} possibilità di assegnazione dei valori ± 1 in modo non-contestuale alle variabili a_v .

Tale disuguaglianza può essere generalizzata al caso operatoriale definendo $\{\mathcal{A}_v \mid v \in V\}$ come insieme di osservabili dicotomiche con spettro dato da $a_v^\lambda = \{-1, +1\}$. Si arriva in particolare a

$$\sum_{v \in V} \langle \mathcal{A}_v \rangle - \frac{1}{4} \sum_{u, v \in V} \Gamma_{uv} \langle \mathcal{A}_v \mathcal{A}_u \rangle \leq 8, \quad (10)$$

ove i valori di aspettazione delle osservabili sono definiti come in precedenza.

Sebbene in un modello non-contestuale a variabili nascoste il valore di aspettazione del prodotto di due osservabili è sempre ben definito, indipendentemente dal fatto che esse siano compatibili o meno, per confrontare il risultato della disuguaglianza con le predizioni della Meccanica Quantistica è necessario che le osservabili associate ai vertici tra loro collegati nel grafico in Fig. 2 commutino. Si definiscono allora tredici osservabili $\mathcal{A}_v = \mathbb{1} - 2\hat{v}$, ove i \hat{v} sono i proiettori lungo la relativa direzione $v \in V$, definiti tramite il prodotto *ket-bra* dei vettori precedentemente elencati, opportunamente normalizzato: $\hat{v} = |v\rangle\langle v| / \langle v|v\rangle$. Se $u, v \in V$ sono due vettori associati a vertici collegati tra loro, allora i proiettori definiti a partire da essi commutano, essendo i vettori mutuamente ortogonali, difatti:

$$\langle v|u\rangle = 0 \quad \Rightarrow \quad \hat{v}\hat{u} = |v\rangle\langle v|u\rangle\langle u| = 0 = \hat{u}\hat{v}.$$

Si ricorda che nel caso di due vertici non connessi $\Gamma_{uv} = 0$, dunque la commutatività non è richiesta in questo caso.

Dalla proprietà di linearità della teoria quantistica, segue che il lato sinistro della disuguaglianza (10) rappresenta il valore di aspettazione dell'operatore

$$\mathcal{L} = \sum_{v \in V} \mathcal{A}_v - \frac{1}{4} \sum_{u, v \in V} \Gamma_{uv} \mathcal{A}_v \mathcal{A}_u. \quad (11)$$

Ma, notando preliminarmente che valgono le relazioni

$$\hat{y} = \sum_{k=1}^3 \sum_{\sigma=\pm} \hat{y}_k^\sigma = 2\mathbb{1}, \quad \hat{h} = \sum_{\alpha=0}^3 \hat{h}_\alpha = \frac{4}{3}\mathbb{1}, \quad \hat{z} = \sum_{k=1}^3 \hat{z}_k = \mathbb{1},$$

tramite conto diretto si dimostra che

$$\mathcal{L} = \frac{25}{3}\mathbb{1}.$$

Ma allora, per qualunque stato quantistico ρ a tre livelli, vale che

$$\langle \mathcal{L} \rangle_\rho = \frac{25}{3} > 8,$$

il che viola la disuguaglianza non-contestuale.

La disuguaglianza (10) ha il vantaggio, rispetto alla disuguaglianza KCBS (8), di essere indipendente dallo stato, dunque, per la realizzabilità di un esperimento a verifica della sua violazione, non è importante la preparazione del sistema in questione in uno stato particolare, visto che tale relazione è verificata per qualunque di essi.

Attraverso questi due esempi, si è potuto notare come la violazione delle disuguaglianze non-contestuali, verificate per tutti i sistemi fisici sotto ipotesi di non-contestualità, occlude le possibilità di formulare una teoria di questo tipo per la descrizione di sistemi fisici quantistici, per i quali esse non sono rispettate.

6 Applicazioni della contestualità quantistica

Come si è potuto evincere dalla precedente parte del lavoro, la *contestualità* è una caratteristica fondamentale ed imprescindibile della teoria quantistica e, in quanto tale, le sue conseguenze sono state nel corso degli anni un importante argomento di studio. Da questo studio sono nate molte e diverse applicazioni del fenomeno della contestualità quantistica. In questa ultima parte, senza addentrarsi nei particolari specifici, verranno citate alcune di queste applicazioni, fornendo referenze ad articoli più specifici in cui tali applicazioni sono descritte nel dettaglio.

Prima di tutto, la contestualità gioca un ruolo chiave nella *computazione quantistica* e a tal proposito sono stati proposti molti approcci per superare i limiti dei super-computer classici. I primi lavori nei quali si è investigata la relazione tra contestualità e computazione sono quelli di Raussendorf e Briegel [14], nel contesto della computazione quantistica *measurement-based*, in cui il calcolo viene eseguito in modo adattivo effettuando misure su singoli qubit, sistemi quantistici a due livelli considerati l'unità fondamentale della computazione quantistica, i quali si trovano in un complesso stato entangled. La domanda principale, motivo dei loro esperimenti, riguardava l'aumento effettivo o meno della potenza di calcolo. In seguito ai loro lavori, sono stati raggiunti molti altri risultati a riguardo del legame tra contestualità e computazione quantistiche.

Un'altra fondamentale applicazione della contestualità riguarda la *crittografia quantistica*. In particolare, si può dimostrare come la contestualità possa essere utilizzata per contrastare possibili attacchi che potrebbero subire dei protocolli crittografici, come lo standard *BB84*. Come la contestualità possa giocare un ruolo a favore della crittografia è uno dei principali argomenti dei lavori di Svozil [15], nei quali in particolare egli definì un proprio protocollo di *quantum key distribution*, ovvero un metodo di comunicazione sicuro il quale fa sì che due parti possano condividere una chiave randomica segreta nota solo ad esse che possono utilizzare per criptare o decriptare dei messaggi.

Quelli citati sono solo due esempi delle vaste applicazioni della contestualità quantistica, le quali oramai fanno parte integrante della *teoria dell'informazione quantistica*.

7 Conclusioni

Giunti al termine di questo lavoro, ripercorriamo brevemente il percorso logico seguito.

Per prima cosa, abbiamo avuto modo di vedere come la Meccanica Quantistica, così come è stata postulata, è intrinsecamente una teoria contestuale: ciò significa che non è possibile attribuire a priori un determinato valore ad una proprietà fisica di un sistema, rappresentata da una osservabile, senza tener conto del contesto in cui tale osservabile è inserita. Considerato il carattere controintuitivo di tale peculiarità della teoria quantistica, alcuni membri della comunità fisica del secolo scorso supposero che la Meccanica Quantistica non potesse essere una teoria completa e da tali idee cominciarono a muovere i primi passi le teorie a variabili nascoste, volte a risolvere quelli che sembravano dei paradossi quantistici. Tuttavia, i modelli non contestuali a variabili nascoste non ebbero il successo sperato, dato che fu dimostrato, grazie al teorema di Kochen e Specker, che nessuna teoria non-contestuale e realistica a variabili nascoste potesse riprodurre gli stessi risultati della teoria quantistica. Il risultato del teorema non fu soltanto un successo teorico, ma, grazie alla derivazione e alla violazione di alcune disequaglianze, analoghe alle disequaglianze di Bell concernenti la località, fu anche dimostrato sperimentalmente che la contestualità è connaturata nei sistemi quantistici. Dal grande interesse che suscitò la contestualità quantistica, nacquero molte sue applicazioni, soprattutto nella teoria dell'informazione quantistica. Ancora oggi tale settore è in continua evoluzione.

Dall'analisi di tale tratto della teoria quantistica, che va molto contro il senso comune, consolidato anche dallo studio della fisica classica, possiamo trarre un insegnamento del tutto generale: per comprendere nel profondo i meccanismi e le leggi che governano alcuni fenomeni, a volte, è necessario cambiare prospettiva e andare oltre ciò che, secondo la nostra esperienza, sembra ragionevole.

D'altronde, la Natura non smetterà mai di stupirci.

Riferimenti bibliografici

- [1] A. Einstein, B. Podolsky, N. Rosen, "*Can Quantum-Mechanical Description of Physical Reality Be Considered Complete?*", 1935, Phys. Rev. Volume 47.
- [2] A. Shimony, in Foundations of Quantum Mechanics: Proceedings of the International School of Physics "Enrico Fermi", Course IL, Varenna on Lake Como, Villa Monastero, 29th June–11th July 1970, B. D'Espagnat (Academic Press, New York) pp. 182–194, 1971.
- [3] A. Peres, "Quantum Theory: Concepts and Methods" (Kluwer, Dordrecht), 1993.
- [4] N.D. Mermin, Phys. Rev., Lett. **65** 3373, 1990.
- [5] D. Tong, "*Applications of Quantum Mechanics*", Ch.9 - "*Quantum Foundations*", University of Cambridge Part II Mathematical Tripos, 2017.
- [6] A. Peres, "*Two simple proofs of the Kochen-Specker theorem*", 1991, J. Phys. A: Math. Gen. **24** L 175.
- [7] C. Budroni, A. Cabello, O. Gühne, M. Kleinmann, J.A. Larsson, "*Kochen-Specker Contextuality*", January 10, 2023.
- [8] A. Cabello, J. M. Estebaranz, G. García-Alcaine, Phys. Lett. A **212**, **183**, 1996.
- [9] S. Yu, C.H. Oh, "*State-independent proof of Kochen-Specker theorem with 13 rays*", 20 Sep 2011, Phys. Rev. Lett. **108**, 030402 (2012).
- [10] A.A. Klyachko, M.A. Can, S. Binicioglu, A.S. Shumovsky, Phys. Rev. Lett. **101**, 020403 (2008).
- [11] A. Fine, (1982), Phys. Rev. Lett. **48**, 291.
- [12] P. Suppes, M. Zanotti (1981), Synthese **48**, 191.
- [13] E. Amsellem, M. Radmark, M. Bourennane, A. Cabello (2009), Phys. Rev. Lett. **103**, 160405.
- [14] R. Raussendorf, H. J. Briegel (2001), Phys. Rev. Lett. **86**, 5188.
- [15] K. Svozil, in Physics and Computation 2010, edito da H. Guerra (University of Azores, Ponta Delgada, Portugal) pp. 235–249.