



UNIVERSITÀ
DEGLI STUDI
DI PADOVA



DIPARTIMENTO DI INGEGNERIA DELL'INFORMAZIONE

CORSO DI LAUREA IN INGEGNERIA BIOMEDICA

“Sintesi di un controllore per il modello di stato di un pendolo inverso”

Relatore: Prof. Augusto Ferrante

Laureando: Nicolò Fusari

ANNO ACCADEMICO 2022–2023

Data di laurea 27/09/2023

Indice

1 Introduzione	2
2 Modello di stato	3
2.1 Il sistema fisico	3
2.2 Fisica del modello	4
2.3 Scelta delle variabili di stato	6
2.4 Calcolo dei punti di equilibrio.....	7
2.5 Linearizzazione	7
2.5.1 Calcolo simbolico per le derivate parziali	8
2.6 Funzione di trasferimento	10
3 Analisi della stabilità.....	11
3.1 Analisi asintotica.....	11
3.2 Analisi stabilità BIBO	11
3.2.1 Risposta indiciale	12
4 Sintesi del controllore	13
4.1 Sintesi tramite luogo delle radici.....	15
4.2 Controllore PID	19
4.3 Taratura di un controllore PID	20
4.4 Taratura di un PID reale.....	23
5 Simulazione in ambiente Simulink	26
5.1 Test dei controllori sintetizzati.....	27
5.2 Conclusioni	29
Bibliografia	31

Capitolo 1

Introduzione

Lo scopo che l'elaborato in oggetto si propone di realizzare è in primo luogo di formulare un modello di stato SISO (Single Input Single Output) che descriva il sistema fisico 'pendolo inverso incernierato ad un carrello' e di linearizzarlo attorno ad un suo punto di equilibrio; in secondo luogo di sintetizzare un controllore che, integrato in uno schema feedback, soddisfi dei vincoli di progetto per la posizione del pendolo. Il controllore sviluppato sarà di tipo PID o implementato tramite l'analisi del luogo delle radici con l'ausilio del software di calcolo Matlab. Infine seguiranno delle simulazioni implementate tramite il software Simulink in cui verranno testati i vari controllori precedentemente sintetizzati applicati in retroazione al sistema non linearizzato.

Capitolo 2

Modello di stato

Il processo di astrazione dei modelli matematici che utilizziamo per descrivere i sistemi fisici di interesse è uno dei punti focali dell'ingegneria di controllo; questo processo, che regola il passaggio dal mondo fisico al mondo matematico, comporta inevitabilmente delle approssimazioni ed è quindi fondamentale raggiungere un buon compromesso fra le due esigenze contrapposte di semplicità e di aderenza alla realtà del modello (più miglioriamo il modello più esso descrive in modo fedele la realtà, ma ciò ha un prezzo: le equazioni che lo descrivono risultano più complesse). Lo scopo di questo capitolo è, quindi, di formulare un modello che descriva adeguatamente il sistema pendolo inverso senza eccedere in approssimazioni o in raffinatezze non necessarie alle tecniche di controllo di base utilizzate in questo elaborato.

2.1 Il sistema fisico

Il sistema fisico in esame è composto da un pendolo inverso incernierato al centro di un carrello mobile mosso da una forza F (Figura 2.1.1).

Le grandezze fisiche che caratterizzano il sistema sono:

- M massa del carrello;
- m massa dell'asta del pendolo;
- $2L$ lunghezza dell'asta del pendolo;
- J momento di inerzia dell'asta rispetto al baricentro;
- φ angolo fra l'asta del pendolo e l'asse verticale passante per il baricentro;

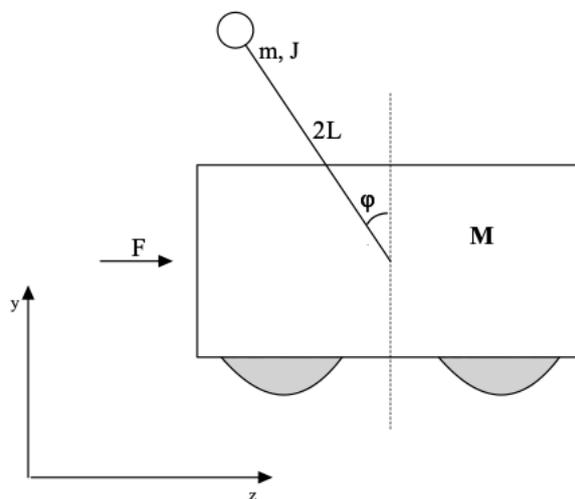


Figura (2.1.1): pendolo incernierato ad un carrello

Le forze in gioco nel sistema sono (figura 2.1.2):

- mg forza peso dell'asta del pendolo;
- N, P forze agenti sull'asta del pendolo;
- $-N, -P$: reazioni vincolari agenti sul carrello;
- $u(t)$ forza agente sul carrello;
- Forza di attrito viscoso del carrello (l'attrito viscoso del pendolo è supposto trascurabile), indichiamo con α il coefficiente di attrito;

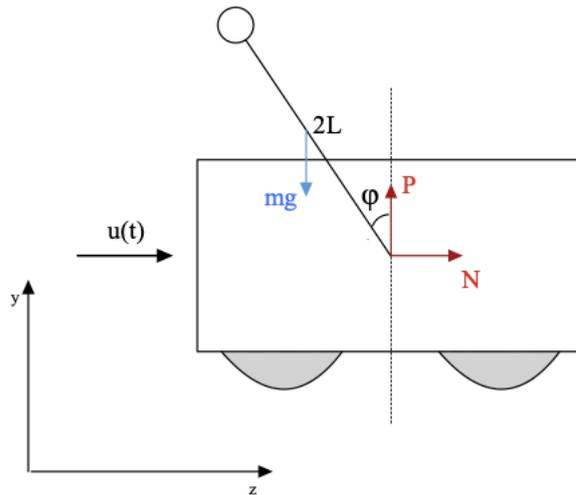


Figura (2.1.2): forze in gioco nel sistema

2.2 Fisica del modello

Le equazioni che descrivono il sistema sono le equazioni del moto del corpo rigido:

$$\bullet \quad \sum_i \vec{F}_i = m\vec{a} \quad (2.2.a)$$

$$\bullet \quad \sum_i \vec{M}_i = J\vec{\alpha} \quad (2.2.b)$$

Indichiamo con F_i e a rispettivamente i vettori forza i -esima e accelerazione che possono essere scomposti nelle loro componenti scalari in z e in y . Indichiamo invece con M_i il vettore momento della forza F_i agente rispetto al baricentro del corpo rigido, con J il momento di inerzia del corpo rigido rispetto ad un asse fisso di rotazione (direzione assiale rispetto al piano zy), con α il vettore accelerazione angolare.

Possiamo scomporre il sistema fisico principale (composto da carrello e pendolo) in due sottosistemi e applicare le leggi del moto a ciascun corpo singolarmente considerando le reazioni vincolari che si scambiano reciprocamente.

Il carrello possiede un solo grado di libertà (non è concessa né traslazione verticale né rotazione), scriviamo dunque la prima equazione del moto (2.2.a) lungo la direzione z

$$u(t) - N - \alpha\dot{z}(t) = M\ddot{z}(t) \quad (2.2.1)$$

Dove indichiamo con $z(t)$, $\dot{z}(t)$, $\ddot{z}(t)$ rispettivamente posizione, velocità e accelerazione del centro di massa del carrellino.

L'asta del pendolo possiede tre gradi di libertà (rotazione e traslazione in z e in y). L'equazione (2.2.a) (scomposta lungo la direzione y e la direzione z) e l'equazione (2.2.b) danno

$$N = m\ddot{z}_{cm}(t) \quad (2.2.2)$$

$$P - mg = m\ddot{y}_{cm}(t) \quad (2.2.3)$$

$$LP\sin\varphi(t) + LN\cos\varphi(t) = J\ddot{\varphi}(t) \quad (2.2.4)$$

Dove con $z_{cm}(t)$ e $y_{cm}(t)$ indichiamo rispettivamente la posizione del centro di massa dell'asta del pendolo:

$$z_{cm}(t) = z(t) - L\sin\varphi(t)$$

$$y_{cm}(t) = L\cos\varphi(t)$$

Da cui ricaviamo $\ddot{z}_{cm}(t)$, $\ddot{y}_{cm}(t)$ accelerazione del centro di massa dell'asta del pendolo

$$\ddot{z}_{cm}(t) = \ddot{z}(t) + L\sin\varphi(t)\dot{\varphi}^2(t) - L\cos\varphi(t)\ddot{\varphi}(t) \quad (2.2.5)$$

$$\ddot{y}_{cm}(t) = -L\cos\varphi(t)\dot{\varphi}^2(t) - L\sin\varphi(t)\ddot{\varphi}(t) \quad (2.2.6)$$

Sostituiamo l'Equazione (2.2.2) in (2.2.1) utilizzando l'espressione (2.2.5) appena calcolata per $\ddot{z}_{cm}(t)$, otteniamo quindi

$$\mathbf{u}(t) - (\mathbf{m} + \mathbf{M})\ddot{\mathbf{z}}(t) - \mathbf{m}L\sin\varphi(t)\dot{\varphi}^2(t) + \mathbf{m}L\cos\varphi(t)\ddot{\varphi}(t) - \alpha\dot{\mathbf{z}}(t) = \mathbf{0} \quad (2.2.7)$$

Riscriviamo (2.2.2) sostituendo a $\ddot{z}_{cm}(t)$ l'equazione (2.2.5)

$$N = m\ddot{z}(t) + mL\sin\varphi(t)\dot{\varphi}^2(t) - mL\cos\varphi(t)\ddot{\varphi}(t)$$

moltiplichiamo per $L\cos\varphi(t)$

$$LN\cos\varphi(t) = mL\ddot{z}(t)\cos\varphi(t) + mL^2\cos\varphi(t)\sin\varphi(t)\dot{\varphi}^2(t) - mL^2\cos^2\varphi(t)\ddot{\varphi}(t) \quad (2.2.8)$$

Riscriviamo (2.2.3) sostituendo a $\ddot{y}_{cm}(t)$ l'equazione (2.2.6)

$$P = mg - mL\cos\varphi(t)\dot{\varphi}^2(t) - mL\sin\varphi(t)\ddot{\varphi}(t)$$

moltiplichiamo per $L\sin\varphi(t)$

$$LP\sin\varphi(t) = mgL\sin\varphi(t) - mL^2\sin\varphi(t)\cos\varphi(t)\dot{\varphi}^2(t) - mL^2\sin^2\varphi(t)\ddot{\varphi}(t) \quad (2.2.9)$$

Sommiamo successivamente l'equazione (2.2.8) a (2.2.9) e utilizziamo l'equazione (2.2.4), otteniamo:

$$(\mathbf{J} + \mathbf{m}L^2)\ddot{\varphi}(t) - \mathbf{m}\ddot{\mathbf{z}}(t)L\cos\varphi(t) - \mathbf{m}gL\sin\varphi(t) = \mathbf{0} \quad (2.2.10)$$

Ora assumendo

$$J_t = J + mL^2$$

$$M_t = M + m$$

Risolviamo il sistema di due equazioni (2.2.7) e (2.2.10) nelle due variabili $\ddot{z}(t)$ e $\ddot{\varphi}(t)$ (omettiamo la dipendenza dal tempo)

$$\ddot{\varphi} = \frac{mgL\sin(\varphi)}{J_t} + \frac{m^3L^3g\cos^2(\varphi)\sin(\varphi)}{J_t(M_tJ_t - m^2L^2\cos^2(\varphi))} - \frac{mL\alpha\cos(\varphi)\dot{z}}{M_tJ_t - m^2L^2\cos^2(\varphi)} - \frac{mL^2\cos(\varphi)\sin(\varphi)\dot{\varphi}^2}{M_tJ_t - m^2L^2\cos^2(\varphi)} + \frac{mL\alpha\cos(\varphi)}{M_tJ_t - m^2L^2\cos^2(\varphi)}$$

$$\ddot{z} = \frac{m^2L^2g\cos(\varphi)\sin(\varphi)}{M_tJ_t - m^2L^2\cos^2(\varphi)} - \frac{\alpha J_t \dot{z}}{M_tJ_t - m^2L^2\cos^2(\varphi)} - \frac{mLJ_t\sin(\varphi)\dot{\varphi}^2}{M_tJ_t - m^2L^2\cos^2(\varphi)} + \frac{uJ_t}{M_tJ_t - m^2L^2\cos^2(\varphi)}$$

Abbiamo così ricavato un sistema di due equazioni differenziali che descrive l'intera dinamica del sistema fisico in esame.

2.3 Scelta delle variabili di stato

Scegliamo come stato del sistema il segnale vettoriale $x(t) = [x_1(t), x_2(t), x_3(t), x_4(t)]^T = [\varphi(t), \dot{\varphi}(t), z(t), \dot{z}(t)]^T$, come ingresso $u(t)$ una forza F applicata al carrello, mentre come uscita $y(t) = x_1(t)$ la posizione del pendolo.

Otteniamo un sistema del quarto ordine non lineare la cui equazione di stato risulta:

$$\dot{x}(t) = f(x(t), u(t)) = \begin{bmatrix} x_2 \\ f_2(x_1, x_2, x_3, x_4, u) \\ x_4 \\ f_4(x_1, x_2, x_3, x_4, u) \end{bmatrix} \quad (2.3.1)$$

con

$$f_2 = \ddot{\varphi} = \frac{mgL\sin(x_1)}{J_t} + \frac{m^3L^3g\cos^2(x_1)\sin(x_1)}{J_t(M_tJ_t - m^2L^2\cos^2(x_1))} - \frac{mL\alpha\cos(x_1)x_4}{M_tJ_t - m^2L^2\cos^2(x_1)} - \frac{mL^2\cos(x_1)\sin(x_1)x_2^2}{M_tJ_t - m^2L^2\cos^2(x_1)} + \frac{mL\alpha\cos(x_1)}{M_tJ_t - m^2L^2\cos^2(x_1)}$$

$$f_4 = \ddot{z} = \frac{m^2L^2g\cos(x_1)\sin(x_1)}{M_tJ_t - m^2L^2\cos^2(x_1)} - \frac{\alpha J_t x_4}{M_tJ_t - m^2L^2\cos^2(x_1)} - \frac{mLJ_t\sin(x_1)x_2^2}{M_tJ_t - m^2L^2\cos^2(x_1)} + \frac{uJ_t}{M_tJ_t - m^2L^2\cos^2(x_1)}$$

mentre l'equazione di uscita del sistema risulta:

$$y(t) = h(x(t), u(t)) = x_1(t) \quad (2.3.2)$$

In conclusione, il sistema pendolo inverso è descritto dal seguente set di equazioni

$$\begin{cases} \dot{x}(t) = f(x(t), u(t)) = \begin{bmatrix} x_2 \\ f_2(x_1, x_2, x_3, x_4, u) \\ x_4 \\ f_4(x_1, x_2, x_3, x_4, u) \end{bmatrix} \\ y(t) = h(x(t), u(t)) = x_1(t) \end{cases} \quad (2.3.3)$$

con f_2 e f_4 calcolate in precedenza

2.4 Calcolo dei punti di equilibrio

L'idea fondamentale è quella di approssimare localmente la dinamica di un sistema non lineare, il quale è difficilmente trattabile con le teorie classiche dei controlli, con la dinamica di un sistema lineare. Per fare ciò basterà trovare dei punti (\bar{x}, \bar{u}) per i quali il sistema non lineare è in uno stato stazionario e successivamente linearizzarlo attorno ad essi. Definito \bar{u} un ingresso costante ed \bar{x} lo stato di equilibrio corrispondente all'ingresso \bar{u} sarà sufficiente risolvere l'equazione $f(\bar{x}, \bar{u}) = 0$ per verificare che effettivamente \bar{x} è uno stato di equilibrio relativo ad \bar{u} costante nel tempo. Posto $u = \bar{u} = 0$ il sistema (2.3.1) risulta

$$\begin{cases} x_2 = 0 \\ \frac{mgL\sin(x_1)}{J_t} + \frac{m^3L^3g\cos^2(x_1)\sin(x_1)}{J_t(M_tJ_t - m^2L^2\cos^2(x_1))} - \frac{mL\alpha\cos(x_1)x_4}{M_tJ_t - m^2L^2\cos^2(x_1)} - \frac{mL^2\cos(x_1)\sin(x_1)x_2^2}{M_tJ_t - m^2L^2\cos^2(x_1)} = 0 \\ x_4 = 0 \\ \frac{m^2L^2g\cos(x_1)\sin(x_1)}{M_tJ_t - m^2L^2\cos^2(x_1)} - \frac{\alpha J_t x_4}{M_tJ_t - m^2L^2\cos^2(x_1)} - \frac{mLJ_t\sin(x_1)x_2^2}{M_tJ_t - m^2L^2\cos^2(x_1)} = 0 \end{cases} \quad (2.4.1)$$

risolvendo per $\bar{x}_2, \bar{x}_4 = 0$ il calcolo dei punti di equilibrio si riduce a calcolare

$$\begin{cases} \frac{mgL\sin(x_1)}{J_t} + \frac{m^3L^3g\cos^2(x_1)\sin(x_1)}{J_t(M_tJ_t - m^2L^2\cos^2(x_1))} = 0 \\ \frac{m^2L^2g\cos(x_1)\sin(x_1)}{M_tJ_t - m^2L^2\cos^2(x_1)} = 0 \end{cases} \quad (2.4.2)$$

Dalla seconda equazione del sistema (2.4.2) otteniamo

$$\cos(\bar{x}_1)\sin(\bar{x}_1) = 0 \Rightarrow \sqrt{1 - \sin^2(\bar{x}_1)}\sin(\bar{x}_1) = 0 \Rightarrow \sin(\bar{x}_1) = 0 \vee \sin(\bar{x}_1) = \pm 1$$

ovvero quando

$$\bar{x}_1 = 0 + k\pi \quad \vee \quad \bar{x}_1 = \pm \frac{\pi}{2} + k\pi$$

Tuttavia, solo la soluzione $\bar{x}_1 = 0 + k\pi$ risolve anche la prima equazione del sistema (2.4.2); In

definitiva il punto $(\bar{x}, \bar{u}) = \left(\begin{bmatrix} 0 \\ 0 \\ a \\ 0 \end{bmatrix}, 0 \right)$ trovato è un punto di equilibrio del sistema corrispondente alla

posizione verticale del pendolo. La posizione x_3 del carrello non compare nel modello di stato pertanto possiamo sceglierla arbitrariamente.

2.5 Linearizzazione

Consideriamo ora il sistema non lineare in esame (2.3.3) scritto nella forma

$$\begin{cases} \dot{x}(t) = f(x(t), u(t)) \\ y(t) = h(x(t), u(t)) \end{cases} \quad (2.5.1)$$

una volta trovati i punti di equilibrio del sistema non lineare è possibile sviluppare in serie di Taylor al primo ordine le funzioni f e h attorno ad essi

$$\begin{aligned} \dot{x}(t) = f(x(t), u(t)) &\simeq \left. \frac{\partial f}{\partial x} \right|_{\substack{x=\bar{x} \\ u=\bar{u}}} (x(t) - \bar{x}) + \left. \frac{\partial f}{\partial u} \right|_{\substack{x=\bar{x} \\ u=\bar{u}}} (u(t) - \bar{u}) \\ y(t) = h(x(t), u(t)) &\simeq \left. \frac{\partial h}{\partial x} \right|_{\substack{x=\bar{x} \\ u=\bar{u}}} (x(t) - \bar{x}) + \left. \frac{\partial h}{\partial u} \right|_{\substack{x=\bar{x} \\ u=\bar{u}}} (u(t) - \bar{u}) \end{aligned}$$

Se gli scostamenti da questi punti sono sufficientemente piccoli, possiamo approssimare la dinamica del sistema non lineare alla dinamica del sistema lineare scritto nella forma

$$\begin{cases} \dot{\delta}_x(t) = A\delta_x(t) + b\delta_u(t) \\ \delta_y(t) = c\delta_x(t) + d\delta_u(t) \end{cases}$$

dove

$$\delta_x(t) := x(t) - \bar{x}, \quad \delta_u(t) := u(t) - \bar{u}, \quad \delta_y(t) := y(t) - \bar{y}$$

rappresentano i segnali di scostamento dello stato e dell'uscita del sistema, corrispondenti ad un ingresso $u(t)$, dallo stato e dall'uscita di equilibrio corrispondente ad un ingresso costante \bar{u} , mentre

$$A := \left. \frac{\partial f}{\partial x} \right|_{\substack{x=\bar{x} \\ u=\bar{u}}} \in \mathbb{R}^{n \times n}, \quad b := \left. \frac{\partial f}{\partial u} \right|_{\substack{x=\bar{x} \\ u=\bar{u}}} \in \mathbb{R}^{n \times 1}, \quad c := \left. \frac{\partial h}{\partial x} \right|_{\substack{x=\bar{x} \\ u=\bar{u}}} \in \mathbb{R}^{1 \times n}, \quad d := \left. \frac{\partial h}{\partial u} \right|_{\substack{x=\bar{x} \\ u=\bar{u}}} \in \mathbb{R}$$

rappresentano le matrici di stato e le matrici di uscita del sistema lineare associato.

Lo sviluppo della linearizzazione si riduce quindi al calcolo di

$$A = \left[\begin{array}{ccc} \left. \frac{\partial f_1}{\partial x_1} \right|_{\substack{x=\bar{x} \\ u=\bar{u}}} & \dots & \left. \frac{\partial f_1}{\partial x_4} \right|_{\substack{x=\bar{x} \\ u=\bar{u}}} \\ \vdots & \ddots & \vdots \\ \left. \frac{\partial f_4}{\partial x_1} \right|_{\substack{x=\bar{x} \\ u=\bar{u}}} & \dots & \left. \frac{\partial f_4}{\partial x_4} \right|_{\substack{x=\bar{x} \\ u=\bar{u}}} \end{array} \right], \quad b = \left[\begin{array}{c} \left. \frac{\partial f_1}{\partial u} \right|_{\substack{x=\bar{x} \\ u=\bar{u}}} \\ \vdots \\ \left. \frac{\partial f_4}{\partial u} \right|_{\substack{x=\bar{x} \\ u=\bar{u}}} \end{array} \right], \quad c = \left[\frac{\partial h}{\partial x_1} \quad \dots \quad \frac{\partial h}{\partial x_4} \right]_{\substack{x=\bar{x} \\ u=\bar{u}}}, \quad d = \left[\frac{\partial h}{\partial u} \right]_{\substack{x=\bar{x} \\ u=\bar{u}}}$$

$$\text{per } (\bar{x}, \bar{u}) = \left(\begin{bmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \\ 0 \end{bmatrix}, 0 \right) \text{ posto } x_3 = 0$$

2.5.1 Calcolo simbolico per le derivate parziali

Per calcolare le derivate parziali che costituiscono le matrici A , b , C e d definite in precedenza utilizzeremo il *Symbolic Math Toolbox*, un set di istruzioni fornito dal software di calcolo Matlab, il quale permette di valutare espressioni analitiche e non solo operazioni numeriche; potremo dunque manipolare delle variabili come simboli e non come numeri e quindi, di valutare funzioni e rispettive derivate in determinati punti di interesse.

A questo scopo utilizziamo il seguente codice Matlab:

```
% definiamo la funzione simbolica f(x(t),u(t)) con x(t) segnale vettoriale
syms f1(X1,X2,X3,X4,U) f2(X1,X2,X3,X4,U) f3(X1,X2,X3,X4,U) f4(X1,X2,X3,X4,U)
% definiamo le variabili simboliche che caratterizzano il sistema fisico in esame. In questo modo possiamo
valutare funzioni e variabili simbolicamente e non numericamente
syms m g L Jt Mt alpha
% assegniamo ad f(x(t),u(t)) l'espressione analitica
f1(X1,X2,X3,X4,U) = X2;
f2(X1,X2,X3,X4,U) = (m*g*L*sin(X1))/(Jt)...
- (m*L*alpha*cos(X1)*X4)/(Mt*Jt-m^2*L^2*(cos(X1))^2)...
+ (m^3*L^3*g*(cos(X1))^2*sin(X1))/(Jt*(Mt*Jt-m^2*L^2*(cos(X1))^2))...
+ (m*L*U*cos(X1))/(Mt*Jt-m^2*L^2*(cos(X1))^2)...
- (m*L^2*cos(X1)*sin(X1)*X2^2)/(Mt*Jt-m^2*L^2*(cos(X1))^2);
f3(X1,X2,X3,X4,U) = X4;
f4(X1,X2,X3,X4,U) = -(alpha*Jt*X4)/(Mt*Jt-m^2*L^2*(cos(X1))^2)...
+ (m^2*L^2*g*cos(X1)*sin(X1))/((Mt*Jt-m^2*L^2*(cos(X1))^2))...
+ (U*Jt)/(Mt*Jt-m^2*L^2*(cos(X1))^2)...
- (m*L*Jt*sin(X1)*X2^2)/(Mt*Jt-m^2*L^2*(cos(X1))^2);
% calcolo delle derivate di f2 rispetto a x=(x1,x2,x3,x4) ed a u(t)
df2_X1 = diff(f2,X1);
df2_X2 = diff(f2,X2);
df2_X3 = diff(f2,X3);
df2_X4 = diff(f2,X4);
df2_U = diff(f2,U);
% calcolo delle derivate di f4 rispetto a x=(x1,x2,x3,x4) ed a u(t)
df4_X1 = diff(f4,X1);
df4_X2 = diff(f4,X2);
df4_X3 = diff(f4,X3);
df4_X4 = diff(f4,X4);
df4_U = diff(f4,U);
% sviluppo delle matrici di stato ottenute valutando le derivate di
f(x(t),u(t)) e h(x(t),u(t)) rispetto ad x(t) (segnale vettoriale) e u(t)
% segnale di ingresso valutate nel punto di equilibrio (x,u)=(0,0,0,0,0)
A = [0 1 0 0; df2_X1(0,0,0,0,0) df2_X2(0,0,0,0,0) df2_X3(0,0,0,0,0) df2_X4(0,0,0,0,0);...
0 0 0 1; df4_X1(0,0,0,0,0) df4_X2(0,0,0,0,0) df4_X3(0,0,0,0,0) df4_X4(0,0,0,0,0)]
b = [0; df2_U(0,0,0,0,0); 0; df4_U(0,0,0,0,0)]
c = [1 0 0 0]
d = 0
```

Possiamo infine rappresentare il sistema linearizzato nella seguente forma matriciale

$$\begin{cases} \dot{x}(t) = f(x(t), u(t)) = Ax(t) + bu(t) \\ y(t) = h(x(t), u(t)) = cx(t) + du(t) \end{cases} \quad (2.5.2)$$

dove

$$A = \begin{bmatrix} 0 & 1 & 0 & 0 \\ Lgm & -\frac{L^3 m^3 g}{J_t(L^2 m^2 - J_t M_t)} & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \\ -\frac{L^2 m^2 g}{(L^2 m^2 - J_t M_t)} & 0 & 0 & \frac{J_t \alpha}{(L^2 m^2 - J_t M_t)} \end{bmatrix}, \quad b = \begin{bmatrix} 0 \\ \frac{L \alpha m}{(L^2 m^2 - J_t M_t)} \\ 0 \\ -\frac{J_t}{(L^2 m^2 - J_t M_t)} \end{bmatrix}$$

$$c = [1 \ 0 \ 0 \ 0], \quad d = [0]$$

2.6 Funzione di trasferimento

Fissato lo stato iniziale $x(0) = x_0 = 0$ e l'andamento futuro dell'ingresso $u(t) = F(t), t \geq 0$, possiamo calcolare la funzione di trasferimento del sistema ora linearizzato (2.5.2) che modella la relazione tra ingresso $u(t)$ e l'uscita $y(t)$; per farlo utilizziamo la formula di Lagrange per calcolare l'evoluzione dello stato $x(t)$ per $t \geq 0$

$$x(t) = e^{At}x_0 + \int_0^t e^{A(t-\tau)}bu(\tau) d\tau$$

l'evoluzione dell'uscita $y(t)$ per $t \geq 0$ è data da

$$y(t) = ce^{At}x_0 + c \int_0^t e^{A(t-\tau)}bu(\tau) d\tau + du(t)$$

Infine, nel dominio di Laplace per $x_0 = 0$ la funzione di trasferimento risulta perciò:

$$G(s) = \frac{Y(s)}{U(s)} = c(SI - A)^{-1}b + d$$

Eseguiamo il seguente codice Matlab:

```
% calcolo della funzione di trasferimento
```

```
syms s
```

```
Gs = simplify(c*inv(s*eye(4)-A)*b)
```

otteniamo

$$G(s) = \frac{Lms}{(J_t M_t - L^2 m^2)s^3 + (J_t \alpha)s^2 - (M_t g L m)s - \alpha g L m} \quad (2.6.1)$$

Capitolo 3

Analisi della stabilità

Un problema di fondamentale interesse della teoria dei controlli è quella di rendere stabili i sistemi fisici, pertanto, il primo passo per il progetto di un buon controllore che rispetti dei vincoli di progetto è di studiare la stabilità del sistema di cui vogliamo controllare l'andamento.

3.1 Analisi asintotica

Tramite il seguente codice Matlab:

```
% polinomio caratteristico della matrice di stato A
```

```
pol_A=simplify(charpoly(A,s))
```

otteniamo il polinomio caratteristico della matrice di stato A

$$\pi_A(s) = \frac{s}{(J_t M_t - L^2 m^2)} [(J_t M_t - L^2 m^2)s^3 + (J_t \alpha)s^2 - (M_t g L m)s - \alpha g L m] \quad (3.1.1)$$

osserviamo subito che $\pi_A(s)$ presenta uno zero nell'origine, pertanto, possiamo immediatamente concludere che il sistema linearizzato (2.5.2) non è asintoticamente stabile. Inoltre, alcuni coefficienti di $\pi_A(s)$ hanno segno negativo, ragion per cui (2.5.2) non è semplicemente stabile. In conclusione, il sistema linearizzato è instabile.

3.2 Analisi stabilità BIBO

Se con la stabilità semplice e la stabilità asintotica riusciamo a valutare come differenti stati iniziali x_0 influenzano diversamente l'evoluzione dello stato del sistema (è possibile, infatti, che dato un punto di equilibrio, se lo stato iniziale x_0 non è sufficientemente vicino al corrispondente stato di equilibrio il sistema evolva instabilmente), con la stabilità BIBO valutiamo invece il modo in cui variazioni dell'ingresso influiscono sull'evoluzione dell'uscita del sistema.

Costruiamo la tabella di Routh relativa al denominatore di G(s) (2.6.1)

$$\begin{array}{l|ll} 3 & J_t M_t - L^2 m^2 & -M_t g L m \\ 2 & J_t \alpha & -\alpha g L m \\ 1 & \frac{L^3 m^3 g}{J_t} & 0 \\ 0 & -\alpha g L m & \end{array}$$

I coefficienti del denominatore di G(s) (2.6.1) non hanno tutti strettamente lo stesso segno (i parametri del modello sono vincolati ad essere tutti positivi), pertanto, il polinomio non soddisfa la condizione

necessaria ma non sufficiente di hurwitzianità. Ciò è confermato dalla costruzione della prima colonna della tabella di Routh, la quale presenta due permanenze e una variazione di segno. Possiamo concludere che $G(s)$ ha un polo con $Re[P_1] > 0$ e due poli con $Re[P_{1,2}] < 0$ e che quindi il sistema con $G(s)$ (2.6.1) risulta non BIBO stabile.

Assumiamo i seguenti valori per le grandezze fisiche in gioco:

- $M = 0.5 \text{ kg}$;
- $m = 0.2 \text{ kg}$;
- $\alpha = 1 \text{ N/m/sec}$
- $L = 0.3 \text{ m}$
- $g = 9.9 \text{ m/s}^2$
- $J = 0.006 \text{ kg} \times \text{m}^2$

Possiamo valutare zeri, poli e guadagno di Evans di una trasferimento di cui conosciamo le matrici di stato e di uscita attraverso il comando Matlab:

```
% zero-poli-guadagno di W(s)
[z,p,k_Evans]=ss2zp(A,b,c,d)
```

Fornendo le matrici A, B, C e D trovate in precedenza a cui sostituiamo i parametri appena definiti, otteniamo:

- $z = 0$
- $p_1 = 5.4602 \quad p_2 = -5.8758 \quad p_3 = -1.4026$
- $k_{Evans} = 4.5455$

dove k_{Evans} è il guadagno di $G(s)$ (2.6.1) scritta in forma di Evans. Ciò conferma la presenza di un polo positivo che rende non BIBO stabile il sistema in esame.

3.2.1 Risposta indiciale

Sostituendo i parametri nella funzione di trasferimento $G(s)$ (2.6.1) calcolata in precedenza otteniamo

$$G(s) = \frac{4.545s}{s^3 + 1.818s^2 - 31.5s - 45} \quad (3.2.1)$$

Con i comandi:

```
% calcolo funzione di trasferimento
num = [m*L/(M*t*Jt-(m*L)^2) 0];
den = [1 a*Jt/(M*t*Jt-(m*L)^2) -M*t*m*g*L/(M*t*Jt-(m*L)^2) -a*m*g*L/(M*t*Jt- ... (m*L)^2)];
sys=tf(num,den)
```

definiamo il sistema sys descritto dalla funzione di trasferimento (3.2.1).

Possiamo ora facilmente visualizzare la risposta indiciale del sistema con il comando:

```
step(sys)
```

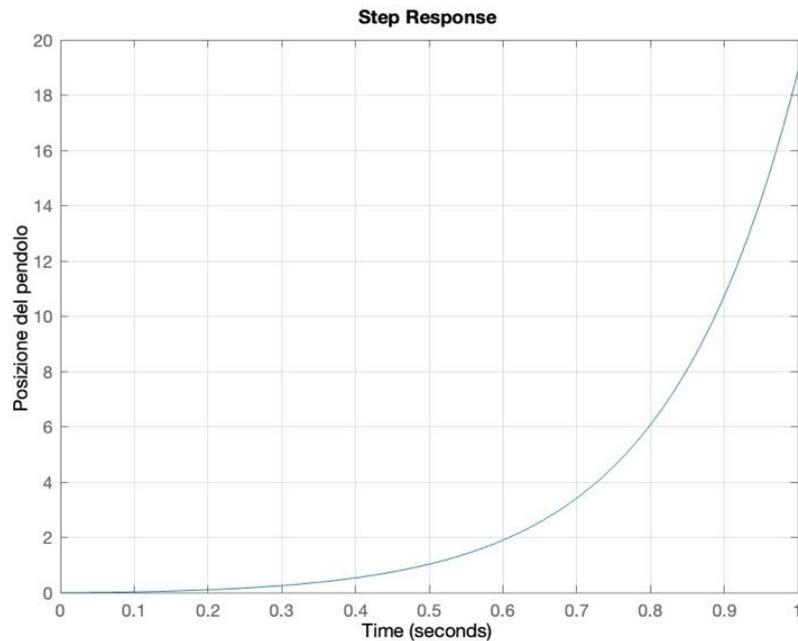


Figura (3.2.1): risposta indiciale di $W(s)$

Il diagramma (3.2.1) evidenzia la non BIBO stabilità del sistema, infatti, per un ingresso limitato (gradino unitario) l'uscita risulta non limitata.

Capitolo 4

Sintesi del controllore

Lo scopo di questo capitolo è quello di sintetizzare un controllore che mantenga il pendolo inverso nella sua posizione di equilibrio verticale e che quindi inseguia un riferimento $y_0(t) = \varphi_0$ nullo, compensando con errore asintotico nullo un disturbo a gradino $d(t) = -0.5$ che si aggiunge all'uscita del sistema. Il disturbo agisce direttamente sulla posizione del pendolo spostandolo costantemente a -28.75° ; spetterà al controllore, inserito successivamente in uno schema a catena chiusa, il compito di generare un ingresso $u(t)$ che ristabilizzerà il sistema nella posizione verticale iniziale.

Fissato il vettore $x(0) = x_0 = [0 \ 0 \ 0 \ 0]^T$ come stato iniziale in cui si trova il pendolo inverso al tempo t_0 , vorremmo che il sistema inseguia il riferimento rispettando i seguenti vincoli:

- Tempo di assestamento t_s inferiore a 5 secondi
- L'angolo del pendolo φ non si discosti più di $0.15 [rad]$ dalla verticale (massima sovralongazione del 15%)

Uno schema di controllo che ben si presta a problemi di questo tipo è lo schema di controllo a retroazione negativa che risulta molto più robusto (in termini di variazioni parametriche del modello)

e più efficace nella compensazione dei disturbi rispetto ad uno schema a catena aperta, il quale offre prestazioni molto modeste perché essendo basato puramente sul modello non è in grado di gestire delle variazioni fra gli effettivi segnali di uscita e quelli invece previsti dal modello.

Nello schema in figura (4.1) indichiamo con:

- $y_0(t)$ il riferimento nullo che si vuole inseguire
- $e(t) = y_0(t) - y(t)$ il segnale di errore $e(t)$ fornito come ingresso al controllore $C(s)$
- $C(s)$ la funzione di trasferimento del controllore
- $u(t)$ il segnale generato dal controllore e fornito come ingresso al sistema
- $G(s)$ la funzione di trasferimento del sistema da controllare
- $y(t)$ il segnale di uscita
- $d(t) = -0.5(t)$ disturbo canonico di ordine 0

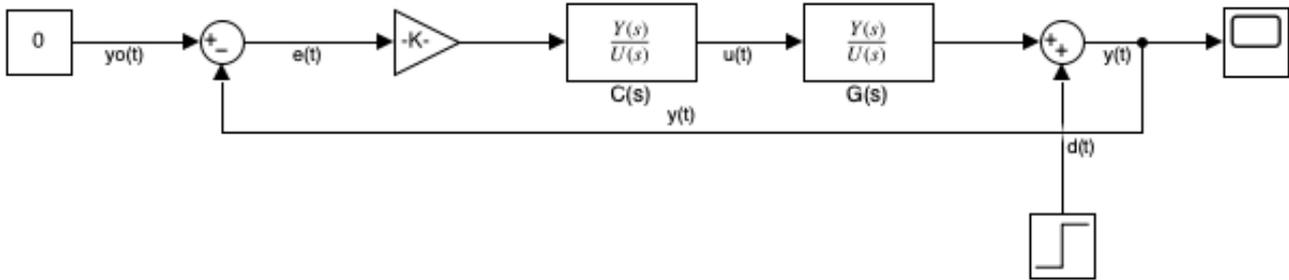


Figura (4.1): schema a retroazione negativa

Il segnale di errore $e(t)$ che vogliamo rendere nullo per $t \rightarrow \infty$ nel dominio di Laplace risulta

$$E(s) = W_d(s)Y_0(s) - W_d(s)D(s)$$

dove con $W_d(s)$ indichiamo la funzione di sensibilità

$$W_d(s) = \frac{1}{1 + C(s)G(s)}$$

Dato che il riferimento che vogliamo inseguire è nullo

$$E(s) = -W_d(s)D(s)$$

Nella sola ipotesi di **BIBO stabilità** della catena chiusa possiamo applicare il teorema del valore finale per funzioni a trasformata di Laplace razionale e ottenere nel dominio del tempo il risultato seguente:

$$e(t)_\infty \stackrel{\text{def}}{=} \lim_{t \rightarrow \infty} e(t) = \lim_{s \rightarrow 0} sE(s) = \lim_{s \rightarrow 0} -sW_d(s)D(s)$$

Osserviamo subito che i due contributi dell'errore si riducono alla sola componente legata al disturbo $d(t)$. In ogni caso progettare un controllore in modo da ottenere una catena chiusa BIBO stabile ed una catena ad azione diretta $H(s) = C(s)G(s)$ di tipo k **superiore** al massimo tra l'ordine l del segnale canonico di riferimento e l'ordine l del segnale canonico di disturbo, compenserebbe sia il

contributo legato al riferimento sia il contributo legato al disturbo. In particolare nel nostro problema in esame, **sempre ammesso che la catena chiusa sia BIBO stabile**, richiedere al sistema a catena chiusa di inseguire il riferimento con errore a regime nullo equivale identicamente a richiedere che l'uscita a regime $y(t)_\infty$ sia nulla. Nel dominio di Laplace

$$Y(s) = W(s)Y_0(s) + W_d(s)D(s)$$

per $y_0 = 0$ risulta

$$Y(s) = W_d(s)D(s)$$

e per il teorema del valor finale

$$y(t)_\infty \stackrel{\text{def}}{=} \lim_{t \rightarrow \infty} y(t) = \lim_{s \rightarrow 0} sY(s) = \lim_{s \rightarrow 0} sW_d(s)D(s)$$

4.1 Sintesi tramite luogo delle radici

Il luogo delle radici è uno strumento matematico che ci permette di visualizzare nel piano complesso come variano i poli della funzione di trasferimento del sistema retroazionato al variare di k , un controllore puramente proporzionale, figura (4.1.1). Nei casi più semplici è sufficiente far variare il guadagno k e spostare i poli della funzione di trasferimento $G(s)$ del sistema nelle zone del piano complesso che meglio soddisfano i vincoli di progetto, sia nel dominio tempo che nel dominio della frequenza.

In riferimento alle specifiche di progetto nel dominio tempo, tradotte nel dominio di Laplace risulta che:

- I poli dominanti della catena chiusa devono trovarsi a sinistra di una retta verticale di ascissa $-\sigma' = -\frac{4.6}{t_s'} = -0.92$
- I poli dominanti della catena chiusa devono trovarsi all'interno di un settore corrispondente a

$$\text{un angolo } \varphi = \arccos \left[\frac{|\ln(M_p')|}{\sqrt{\pi^2 + \ln^2(M_p')}} \right] = 59^\circ \text{ ovvero corrispondente ad uno smorzamento di}$$

$$\text{almeno } \xi = \cos(\varphi) = 0.52$$

A tal proposito utilizziamo il comando Matlab che ci permette di tracciare il luogo delle radici del sistema in esame:

`rlocus(sys_pendolo)`

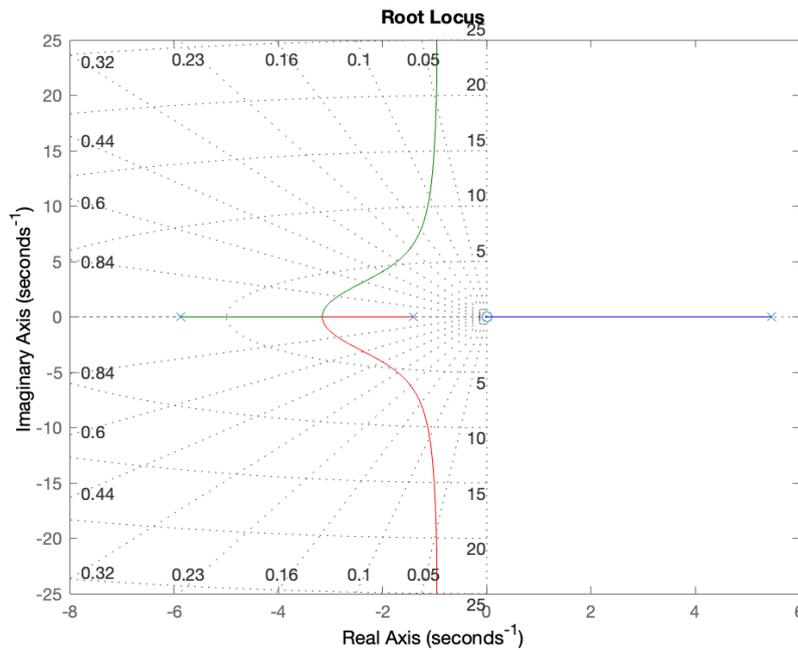


Figura 4.1.1: luogo delle radici del sistema retroazionato con controllore k

Otteniamo il diagramma (4.1.1), il quale evidenzia che un controllore puramente proporzionale non è sufficiente nemmeno a rendere la catena chiusa BIBO stabile, infatti, per $k \geq 0$ crescenti due rami divergono lungo l'asse immaginario, mentre un ramo converge nell'origine rimanendo sempre positivo; quindi, per qualsiasi valore del guadagno k , ci sarà sempre un polo che renderà la catena chiusa instabile.

La scelta immediata di arricchire il controllore $C(s) = k$ in modo da cancellare il polo instabile di $G(s)$ e rendere BIBO stabile la catena chiusa è da escludere, di fatto bastano variazioni minime dei parametri del modello e non avremmo più la cancellazione zero-polo instabile desiderata (in generale cancellare i poli della trasferimento di un sistema di cui si vuole controllare l'andamento risulta essere una scelta disastrosa). L'idea è di cominciare con un controllore $C(s) = \frac{k}{s^2}$ e, nella sola ipotesi di **BIBO stabilità**, ottenere una catena ad azione diretta $H(s) = C(s)G(s)$ di tipo 1 (così facendo $H(s)$ presenterà un polo nell'origine con molteplicità 1); in questo modo cancelliamo lo zero nell'origine di $G(s)$ e riusciamo a compensare tutti i disturbi canonici di ordine inferiore al tipo con errore asintotico nullo (nel diagramma (4.1.2) seguente introduciamo la retta $-\sigma'$ relativa al vincolo su t_s).

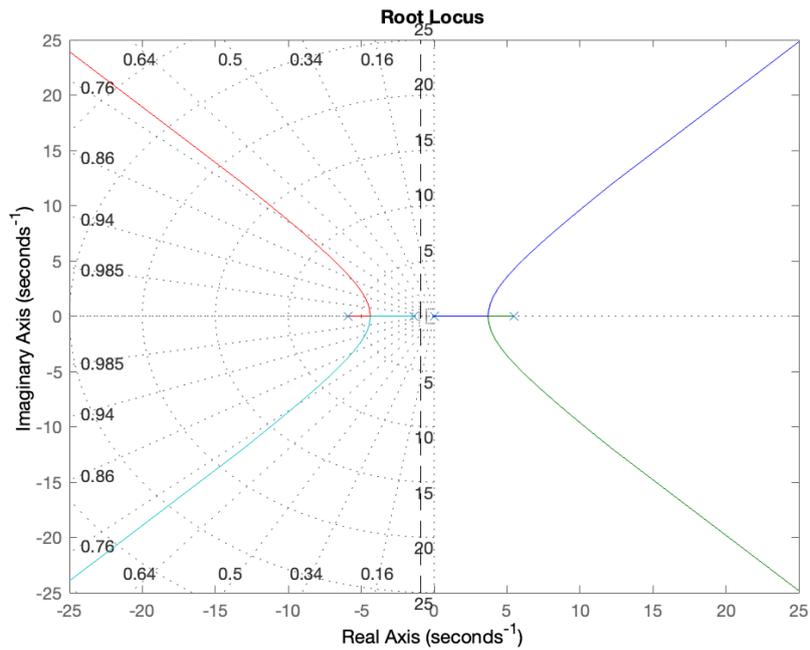


Figura 4.1.2: luogo delle radici con controllore $C(s) = \frac{k}{s^2}$

Successivamente arricchiamo il controllore con uno zero in -1 così da attirare il polo in -1.4026 di $G(s)$ e altri due zeri in -3 e -4 per far convergere i due rami instabili in un punto doppio a sinistra dell'asse immaginario; infine aggiungiamo un polo molto distante in -60 che non influisce sulla dinamica del sistema e rende propria la funzione di trasferimento del controllore. Otteniamo il luogo seguente:

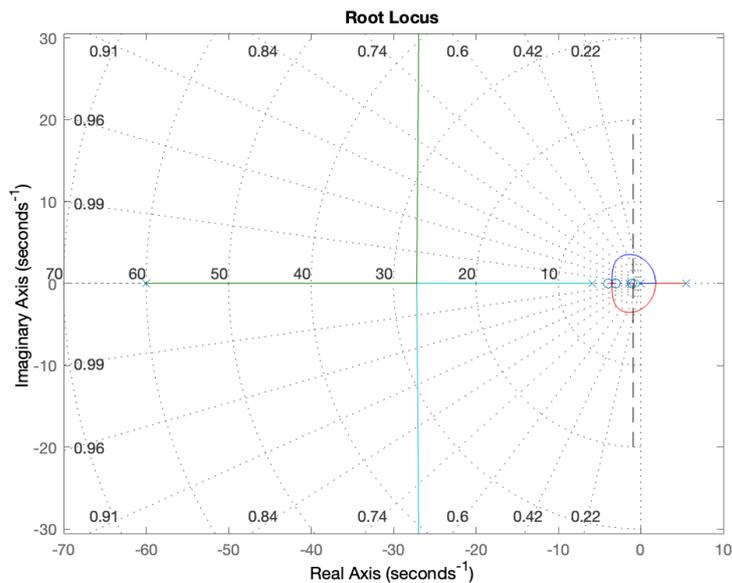


Figura (4.1.3a): luogo delle radici con $C(s) = k \frac{(s+1)(s+4)(s+3)}{s^3+60s^2}$

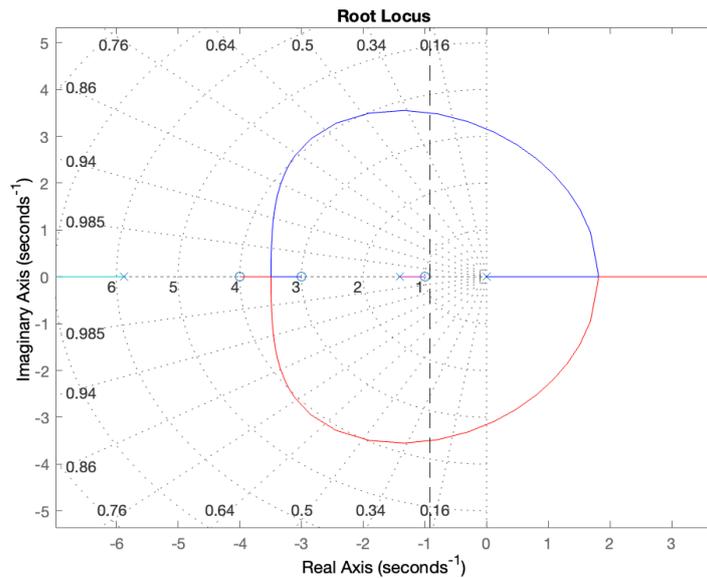


Figura (4.1.3b): ingrandimento del luogo nell'origine

Come evidenzia il grafico in figura (4.1.3b) l'aggiunta di uno zero in -1 garantisce che per qualsiasi valore di k il polo in -1.4026 rimanga a sinistra della retta verticale $-\sigma' = -0.92$. Sarà sufficiente scegliere un guadagno di Evans abbastanza elevato in modo da spostare i due poli instabili a sinistra di $-\sigma'$ e posizionarli in un settore corrispondente ad uno smorzamento di almeno $\xi = 0.52$.

Con un $k = 500$ otteniamo un polo reale in $p_1 = -1.0523$ e due coppie di poli complesso coniugato in $p_{2,3} = -3.4466 \pm 1.3235i$ e $p_{4,5} = -26.9364 \pm 34.2918i$ riuscendo a rendere BIBO stabile la catena chiusa e a soddisfare le specifiche richieste.

Otteniamo la seguente funzione di trasferimento per il controllore

$$C(s) = 500 \frac{(s + 1)(s + 4)(s + 3)}{s^2(s + 60)}$$

La risposta del sistema a catena chiusa (4.1) con l'aggiunta del controllore $C(s)$ e di un segnale di disturbo $d(t) = -0.5(t)$ che si somma all'uscita $y(t)$ risulta:

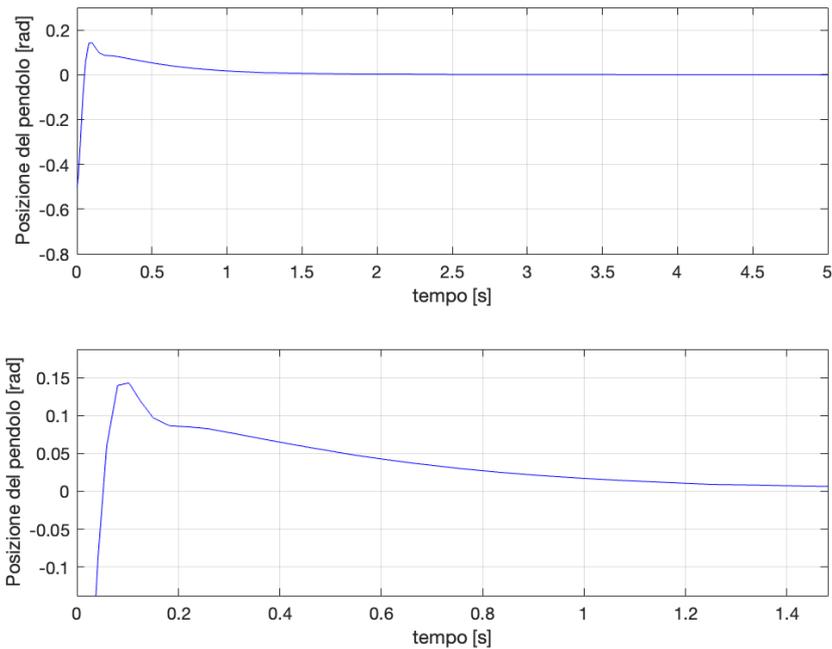


Figura (4.1.4): risposta del sistema a catena chiusa

Notiamo che il disturbo posiziona l'angolo φ a -0.5 [rad], mentre il controllore genera un ingresso che riposiziona verticalmente il pendolo con una sovralongazione inferiore a 0.15 [rad]. Ciò significa che il pendolo inizialmente posizionato a -28.65° supera la posizione verticale iniziale a 0° oscillando non più di 9° (l'angolo φ è preso positivo in senso antiorario) per poi assestarsi con un $t_s \cong 1$ s al riferimento $y_0(t)$ con errore asintotico nullo come da specifiche.

4.2 Controllore PID

I controllori PID appartengono ad una classe di controllori molto comuni che generalmente offrono delle buone prestazioni in rapporto al loro basso costo. Spesso, tuttavia, se il sistema da controllare è instabile danno dei risultati modesti. L'acronimo PID sta per Proporzionale, Integrabile e Derivativo ed identifica le tre azioni combinate che il controllore compie sull'errore $e(t)$. Infatti la funzione di trasferimento di un PID è

$$C_{PID}(s) = K_P + \frac{K_I}{s} + K_D s$$

Prendendo come riferimento lo schema (4.1), il segnale $u(t)$ prodotto da un PID a cui viene fornito come ingresso un segnale di errore è

$$U(s) = C_{PID}(s)E(s) = \left[K_P + \frac{K_I}{s} + K_D s \right] E(s)$$

e quindi nel dominio del tempo

$$u(t) = K_P e(t) + K_I \int_0^t e(\tau) d\tau + K_D \dot{e}(t)$$

Notiamo che il controllore PID produce un ingresso proporzionale all'errore, un ingresso proporzionale all'integrale dell'errore che permette di inseguire riferimenti a gradino con errore asintotico nullo (nella sola ipotesi di BIBO stabilità della catena chiusa), un ingresso proporzionale alla derivata dell'errore che in generale migliora il margine di fase e rende la catena chiusa più pronta. Tuttavia, la presenza di tutti e tre i contributi produce una funzione di trasferimento impropria $C_{PID}(s) = \frac{K_D s^2 + K_P s + K_I}{s}$ che non è fisicamente realizzabile, pertanto, un PID reale utilizza come azione derivativa $\frac{K_D s}{1+sc}$ con c costante di tempo molto piccola così poter approssimare $\frac{K_D s}{1+sc} \sim K_D s$.

4.3 Taratura di un controllore PID

Tarare un controllore PID significa scegliere i parametri K_P , K_I , K_D **reali e non negativi** in modo da poter soddisfare in vincoli di progetti che il sistema di controllo deve rispettare.

A questo scopo riscriviamo la $G(s)$ (3.2.1) in forma di Bode

$$\begin{aligned} G(s) &= \frac{4.545s}{(s-p_1)(s-p_2)(s-p_3)} = \frac{4.545s}{(s-5.4602)(s+5.8758)(s+1.4026)} \\ &= \frac{4.545}{(-5.4602)(5.8758)(1.4026)} \left[\frac{s}{\left(1-\frac{s}{p_1}\right)\left(1-\frac{s}{p_2}\right)\left(1-\frac{s}{p_3}\right)} \right] \\ &= K_B \left[\frac{s}{(1-\tau_1 s)(1+\tau_2 s)(1+\tau_3 s)} \right] \end{aligned}$$

con:

- $p_1 = 5.4602$ $p_2 = -5.8758$ $p_3 = -1.4026$
- $K_B = -0.101$ guadagno di Bode reale negativo
- $\tau_1 := \frac{1}{p_1}$ $\tau_2 := -\frac{1}{p_2}$ $\tau_3 := -\frac{1}{p_3}$ reali positivi

Riscriviamo la funzione di trasferimento del PID

$$C_{PID}(s) = \frac{K_D s^2 + K_P s + K_I}{s} = \frac{K_I \left(\frac{K_D}{K_I} s^2 + \frac{K_P}{K_I} s + 1 \right)}{s}$$

e scegliamo i parametri K_D e K_P in modo da ottenere

$$\left(\frac{K_D}{K_I} s^2 + \frac{K_P}{K_I} s + 1 \right) = (1 + \tau_2 s)(1 + \tau_3 s)$$

Quindi la catena ad azione diretta risulta

$$H(s) := C_{PID}(s)G(s) = K_B K_I \left(\frac{1}{1 - s\tau_1} \right)$$

Osserviamo subito che avviene una cancellazione tra lo zero nell'origine di $G(s)$ e il polo di $C_{PID}(s)$ dovuto all'azione integrale la quale rende la catena ad azione diretta di tipo 0. Ciò implica che sicuramente il sistema retroazionato presenterà un errore a regime non nullo a prescindere dalla scelta dei parametri K_p, K_I, K_D del PID. L'unico modo in cui possiamo agire è quello di rendere $e(t)_\infty$ il più piccolo possibile compatibilmente alle spese in termini di energia di controllo.

Calcoliamo la funzione di sensibilità e riscriviamola in forma di Bode

$$W_d(s) := \frac{1}{1 + C_{PID}(s)G(s)} = \frac{1}{1 + \frac{K_B K_I}{1 - s\tau_1}} = \frac{1 - s\tau_1}{1 - s\tau_1 + K_B K_I} = \frac{1 - s\tau_1}{(1 + K_B K_I)(1 + s \frac{-\tau_1}{1 + K_B K_I})}$$

sostituiamo il valore di K_B calcolato in precedenza

$$W_d(s) = K_{Bd} \frac{1 - s\tau_1}{(1 + s \frac{-\tau_1}{1 - 0.101K_I})}$$

con $K_{Bd} = \frac{1}{(1 - 0.101K_I)}$

Per come abbiamo definito τ_1 in precedenza rendere BIBO stabile il sistema a catena chiusa significa porre

$$1 - 0.101K_I < 0$$

e ciò implica che K_I è vincolato ad essere $K_I > 9.9$; pertanto, l'unico modo in cui possiamo agire è di scegliere un K_I sufficientemente elevato che, oltre a rendere BIBO stabile la catena chiusa e a rendere l'unico polo di $W_d(s)$ molto grande riducendone l'influenza sulla dinamica del sistema, riduce l'errore a regime.

Calcoliamo la risposta a regime del sistema retroazionato

$$y(t)_\infty = \lim_{s \rightarrow 0} +s W_d(s) D(s) = -\frac{0.5}{1 + H(0)} = -\frac{0.5}{1 - 0.101K_I}$$

nei diagrammi (4.2) seguenti visualizziamo le risposte del sistema a catena chiusa per diversi valori di K_I :

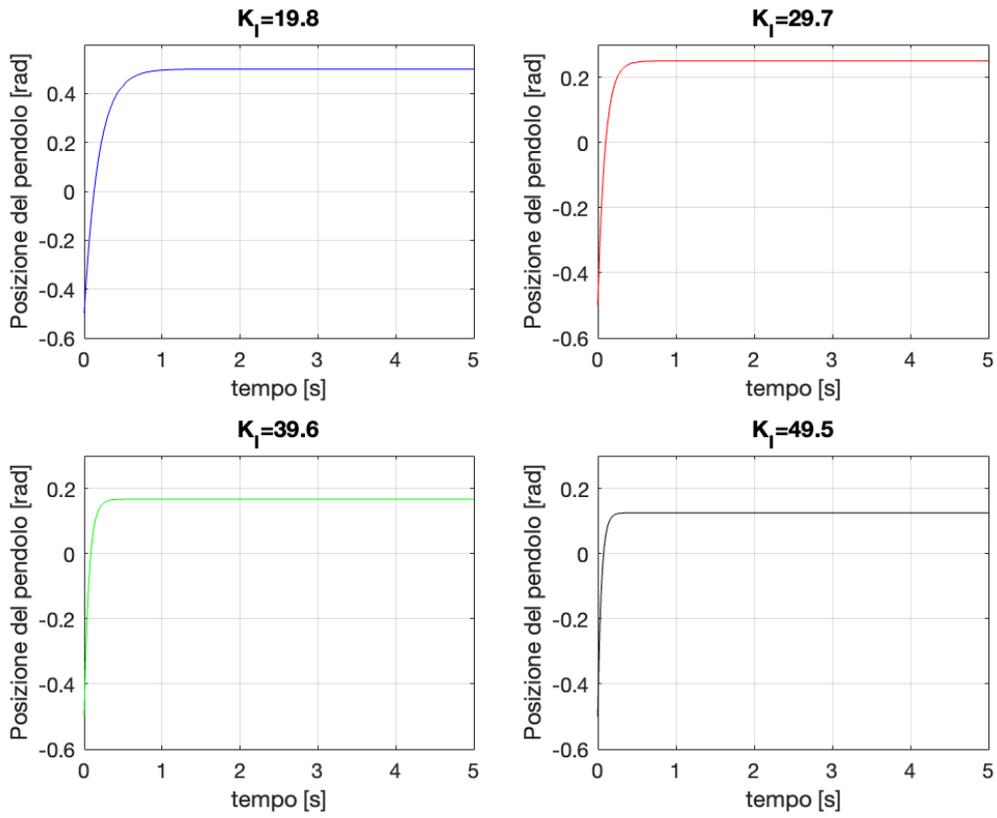


Figura (4.2): risposta del sistema a catena chiusa per diversi K_I

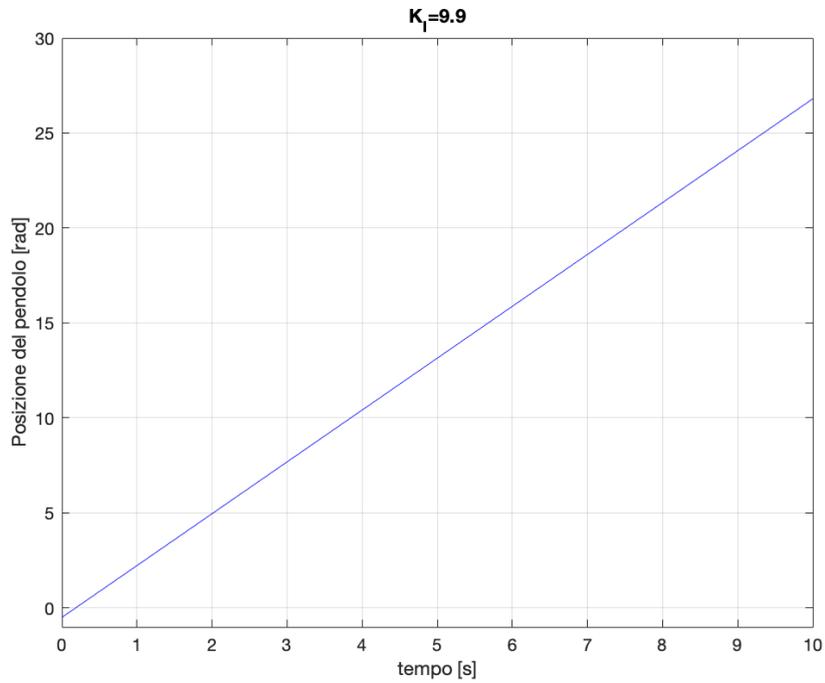


Figura (4.2.1): catena chiusa non BIBO stabile per $K_I \leq 9.9$

Notiamo come aumentando K_I miglioriamo la prontezza del sistema e riduciamo l'errore a regime. Dopo aver scelto opportunamente il parametro K_I possiamo calcolare i valori dei parametri K_P e K_D sulla base dell'assunzione precedentemente fatta per la funzione di trasferimento del PID, ovvero

$$\begin{aligned}\left(\frac{K_D}{K_I}s^2 + \frac{K_P}{K_I}s + 1\right) &= (1 + \tau_2s)(1 + \tau_3s) \\ \left(\frac{K_D}{K_I}s^2 + \frac{K_P}{K_I}s + 1\right) &= \tau_2\tau_3s^2 + (\tau_2 + \tau_3)s + 1 \\ \left(\frac{K_D}{K_I}s^2 + \frac{K_P}{K_I}s + 1\right) &= 0.1213s^2 + 0.8831s + 1\end{aligned}$$

da cui:

- $K_D = 0.1213K_I$
- $K_P = 0.8831K_I$

4.4 Taratura di un PID reale

Ricordiamo, tuttavia, che la funzione di trasferimento di un PID per essere reale deve essere una funzione propria. A questo scopo introduciamo un fattore $1 + sc$ al denominatore dell'azione derivativa

$$C_{PID}(s) = K_P + \frac{K_I}{s} + \frac{K_D s}{1 + sc} = \frac{K_I[(\frac{K_D}{K_I} + \frac{K_P}{K_I}c)s^2 + \frac{K_P}{K_I}s + 1]}{s(1 + sc)}$$

assumiamo ancora

$$\left(\frac{K_D}{K_I} + \frac{K_P}{K_I}c\right)s^2 + \frac{K_P}{K_I}s + 1 = (1 + \tau_2s)(1 + \tau_3s)$$

da cui

$$H(s) = C_{PID}(s)G(s) = K_B K_I \left(\frac{1}{1 - s\tau_1}\right) \left(\frac{1}{1 + sc}\right)$$

infine calcoliamo $W_d(s)$

$$W_d(s) = \frac{1}{1 + H(s)} = \frac{1}{1 + K_B K_I \left(\frac{1}{1 - s\tau_1}\right) \left(\frac{1}{1 + sc}\right)} = \frac{(1 - s\tau_1)(1 + sc)}{-(\tau_1 c)s^2 + (c - \tau_1)s + K_B K_I + 2}$$

La nuova funzione di sensibilità presenta un polinomio di secondo grado al denominatore che possiamo facilmente rendere BIBO stabile. Posta $c = 0.02$ la costante di tempo, per ottenere la BIBO stabilità della catena chiusa basterà imporre

$$K_B K_I + 2 = -0.101K_I + 2 < 0$$

ovvero

$$K_I > 19.8$$

in questo modo tutti i coefficienti del denominatore di $W_d(s)$ risultano negativi (per come abbiamo definito le quantità τ_1 e c anche i coefficienti di s^2 e s sono vincolati ad essere negativi). Tramite il criterio di Cartesio possiamo concludere che il denominatore di $W_d(s)$ è un polinomio di Hurwitz e quindi BIBO stabile.

Dopo aver scelto opportunamente K_I calcoliamo K_P e K_D

$$\left(\frac{K_D}{K_I} + \frac{K_P}{K_I}c\right)s^2 + \frac{K_P}{K_I}s + 1 = \tau_2\tau_3s^2 + (\tau_2 + \tau_3)s + 1$$

$$\left(\frac{K_D}{K_I} + \frac{K_P}{K_I}c\right)s^2 + \frac{K_P}{K_I}s + 1 = 0.1213s^2 + 0.8831s + 1$$

da cui

- $K_P = 0.8831K_I$
- $K_D = 0.1036K_I$

Visualizziamo le risposte del sistema a catena chiusa (4.1) per diversi parametri K_P , K_I , K_D del PID:

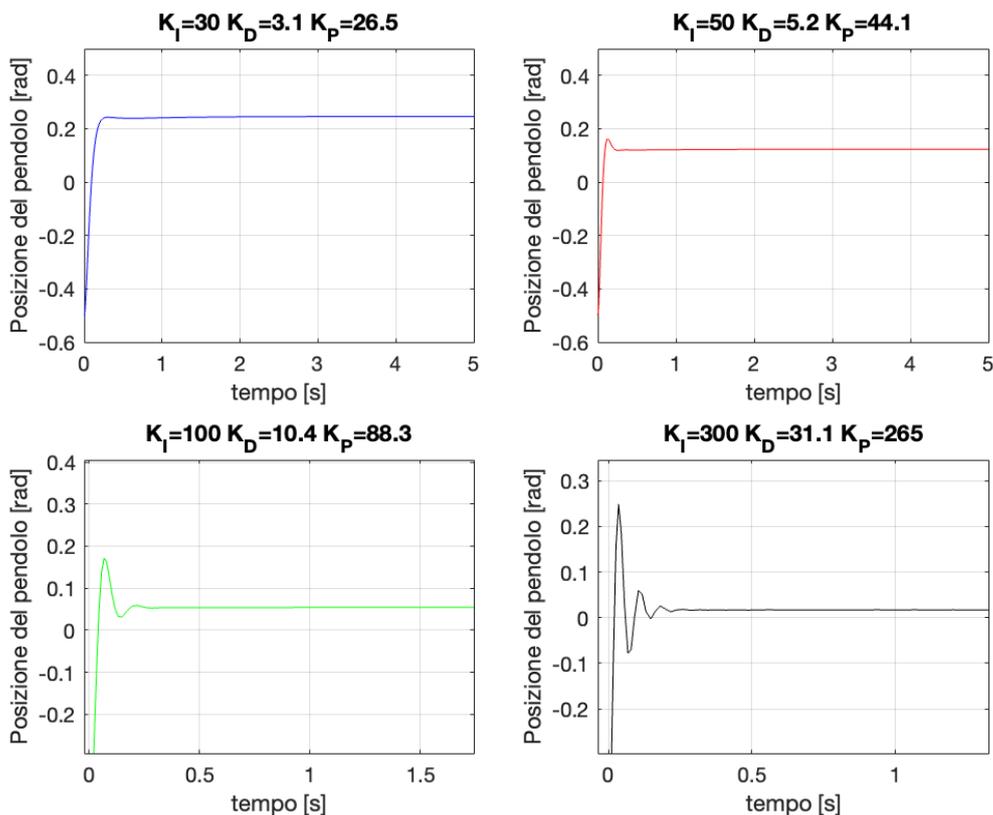


Figura (4.2.2): risposta del sistema a catena chiusa per diversi K_I , K_D , K_P

Generalmente una volta scelti i parametri nominali del PID possiamo rifinirli con una procedura detta taratura fine che consiste nell'eseguire delle piccole variazioni rispetto ai valori nominali fino a quando ogni modifica porta un peggioramento nelle prestazioni del PID. Nel nostro caso finezze di questo tipo produrrebbero migliorie inefficaci rispetto alle specifiche assegnate.

Come mostrano i diagrammi in figura (4.2.2) tutti e quattro i PID sintetizzati permettono di assestare il sistema retroazionato in meno di 0.5 secondi. Tuttavia, per come abbiamo vincolato i parametri K_p e K_D a K_I , cercare di diminuire l'errore a regime aumentando K_I aumenterebbe inutilmente la sovraelongazione e con questo le oscillazioni del pendolo. Scegliere $K_I = 100$ è sicuramente il miglior compromesso in termine di rapporto sovraelongazione-errore a regime della risposta del sistema (sovraelongazione inferiore al 15% con un errore a regime poco superiore a 0.5 [rad]).

Otteniamo la seguente funzione di trasferimento per il PID

$$C_{PID}(s) = 88.3 + \frac{100}{s} + \frac{10.4s}{1 + 0.02s}$$

osserviamo che qualunque sia la scelta di K_I , K_D e K_p del PID l'uscita del sistema a catena chiusa non sarà adeguata alle specifiche imposte per $e(t)_\infty$ in seguito alla cancellazione zero-polo avvenuta nell'origine.

Va fortemente sottolineato che entrambi gli sviluppi dei controllori proposti (sia il controllore sintetizzato tramite l'analisi del luogo delle radici che il controllore PID) sono da considerarsi **una pura soluzione teorica di primo tentativo**, in quanto nella pratica la cancellazione zero-polo nell'origine avvenuta tra $C(s)$ e $G(s)$ potrebbe rivelarsi pericolosissima. Una soluzione più realistica dovrà evitare questa cancellazione. Tuttavia, per come abbiamo impostato il problema di controllo (il sistema a catena chiusa deve compensare disturbi canonici di ordine zero con errore a regime nullo, $d(t) = -0.5 t$), osserviamo che evitando questa cancellazione e quindi evitando in prima analisi un controllore del tipo $C(s) = \frac{k}{s^t}$ con $t > 0$ il sistema retroazionato produrrebbe sempre una risposta con errore a regime uguale all'ampiezza del disturbo a gradino e non in linea con le specifiche imposte in questo progetto.

Infatti, definito $d(t) = A 1(t)$ con $A \neq 0$ ampiezza del segnale a gradino, per un generico $C(s)$ **razionale proprio**

$$C(s) = K \frac{\prod_{i=1}^m (s + z_i)}{\prod_{i=1}^n (s + p_i)}$$

con $-z_i$ zeri reali e con $-p_i$ poli reali di $C(s)$, otteniamo

$$e(t)_\infty \stackrel{\text{def}}{=} \lim_{t \rightarrow \infty} e(t) = \lim_{s \rightarrow 0} sE(s) = \lim_{s \rightarrow 0} -sW_d(s)D(s) = \lim_{s \rightarrow 0} -s \frac{1}{1 + C(s)G(s)} \frac{A}{s}$$

ma $G(s)$ (3.2.1) presenta uno zero nell'origine, per cui $G(0) = 0$. Otteniamo infine

$$e(t)_\infty = -A$$

Pertanto, è effettivamente impossibile coniugare l'idea di escludere controllori con un polo nell'origine (semplice o doppio che sia) al riportare il pendolo in posizione verticale (o almeno prossima alla verticale) quando questo è disturbato da un segnale a gradino.

Capitolo 5

Simulazione in ambiente Simulink

Simulink è un ambiente di calcolo integrato a Matlab che permette di modellare ed analizzare sistemi dinamici risolvendo direttamente le equazioni differenziali che li descrivono. Nel nostro caso i controllori sono stati sintetizzati nel limite di linearità del sistema, ovvero solo quando gli scostamenti dal punto di equilibrio (nel quale abbiamo linearizzato il sistema) erano sufficientemente piccoli da poter approssimare la dinamica del sistema non lineare (2.3.3) alla dinamica del sistema linearizzato (2.5.2). Grazie a Simulink possiamo osservare come i controllori sintetizzati nell'ipotesi di linearità si comportano applicati al sistema descritto da equazioni differenziali non lineari.

Riferendoci al sistema di equazioni (2.3.3) che descrive il pendolo inverso possiamo costruire il corrispettivo diagramma a blocchi in Simulink:

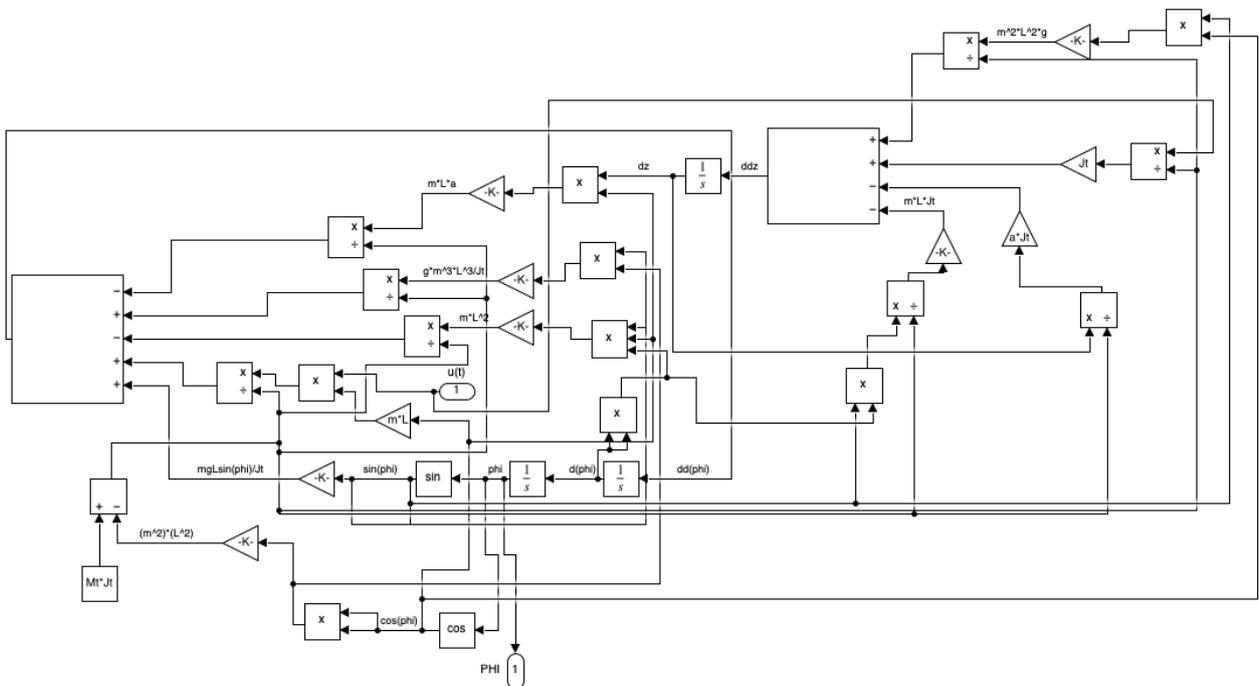


Figura (5.1): schema Simulink pendolo inverso

Ora che abbiamo costruito il sistema non lineare è interessante visualizzarne la risposta libera e confrontarla al sistema lineare. Se fissiamo come stato iniziale il vettore $x(0) = \left[\frac{\pi}{21} \ 0 \ 0 \ 0 \right]^T$ (il pendolo si trova inizialmente a circa 0.15 [rad]) otteniamo la seguente evoluzione libera dell'uscita:

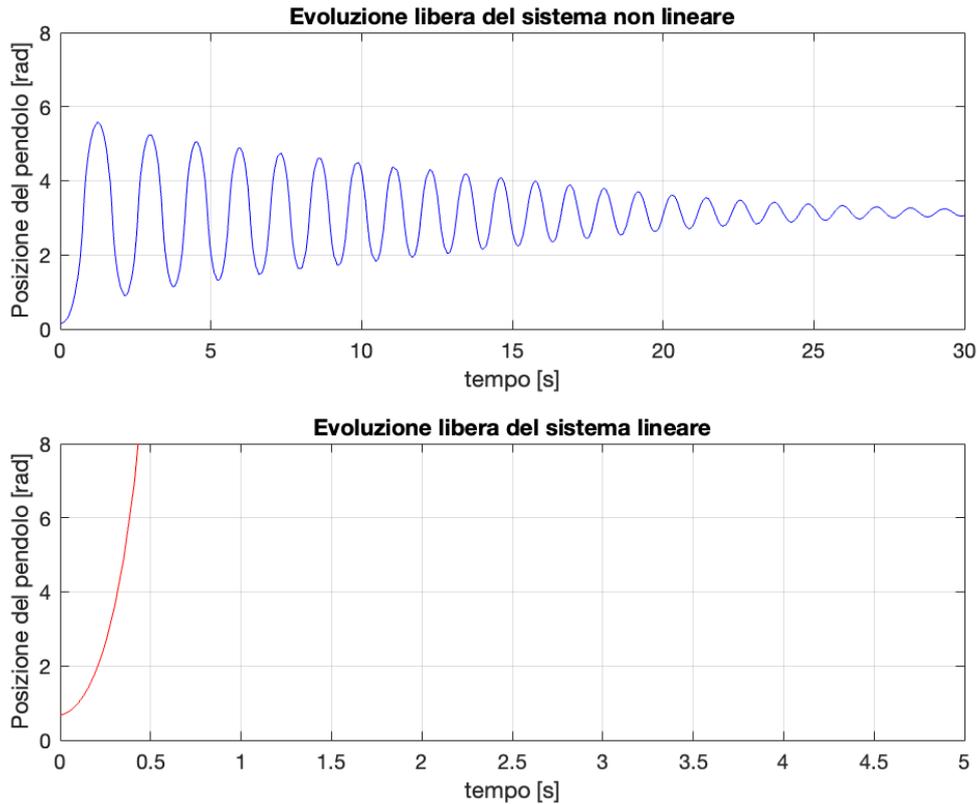


Figura (5.2): confronto evoluzione libera

Notiamo intuitivamente che, quando soggetto alla sola forza di gravità e quando lo stato iniziale in cui si trova non è punto di equilibrio, il sistema reale si assesta nel suo punto di equilibrio stabile in $\varphi = \pi$. Al contrario, l'evoluzione libera del sistema lineare diverge a $+\infty$ discostandosi totalmente da quella reale.

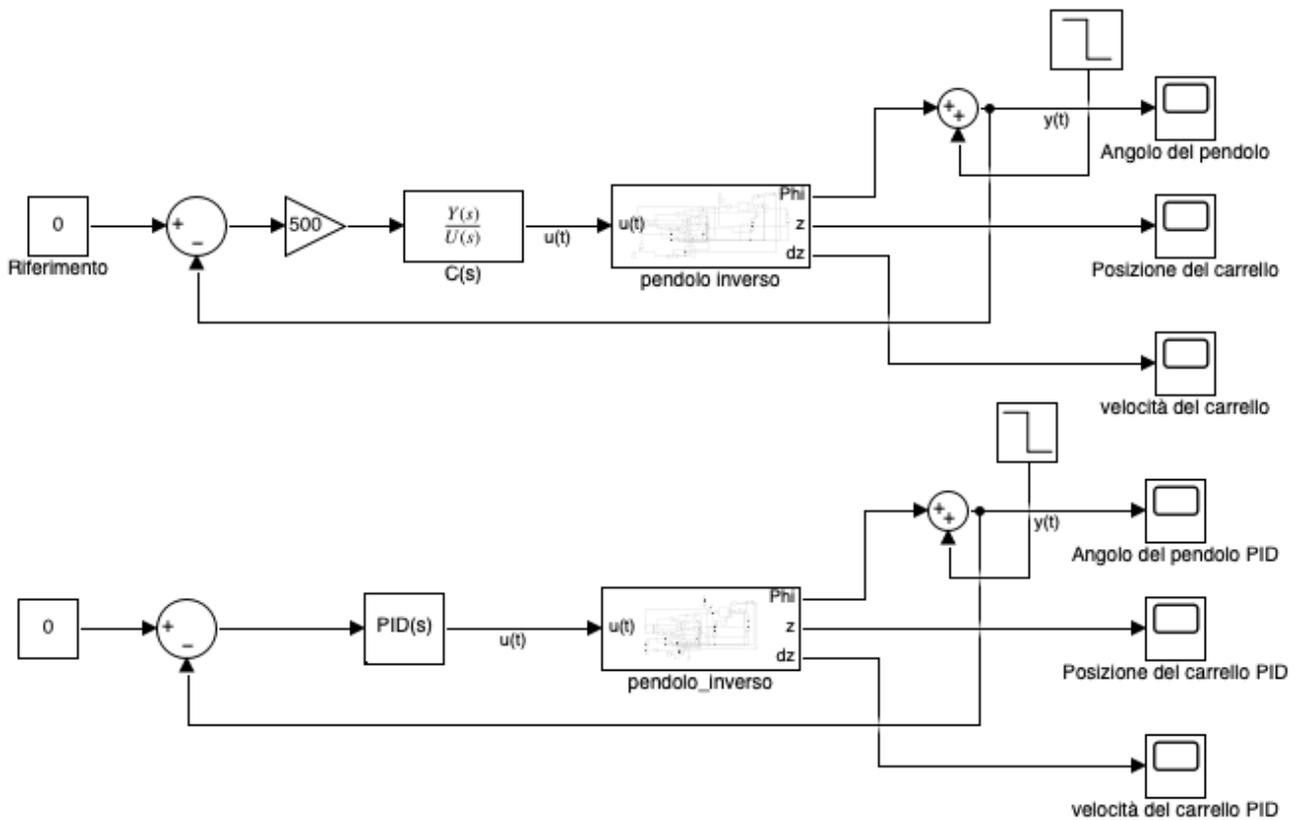
5.1 Test dei controllori sintetizzati

In riferimento allo schema feedback in figura (4.1) inseriamo in serie al blocco Subsystem (5.1) modellato in precedenza i controllori

$$C(s) = 500 \frac{(s + 1)(s + 4)(s + 3)}{s^2(s + 60)}$$

$$C_{PID}(s) = 88.3 + \frac{100}{s} + \frac{10.4s}{1 + 0.02s}$$

nel modo seguente:



aggiungiamo infine tre finestre di Scope per visualizzare la posizione del pendolo, la velocità e la posizione del carrello.

La risposta del sistema non lineare controllato dal PID risulta:

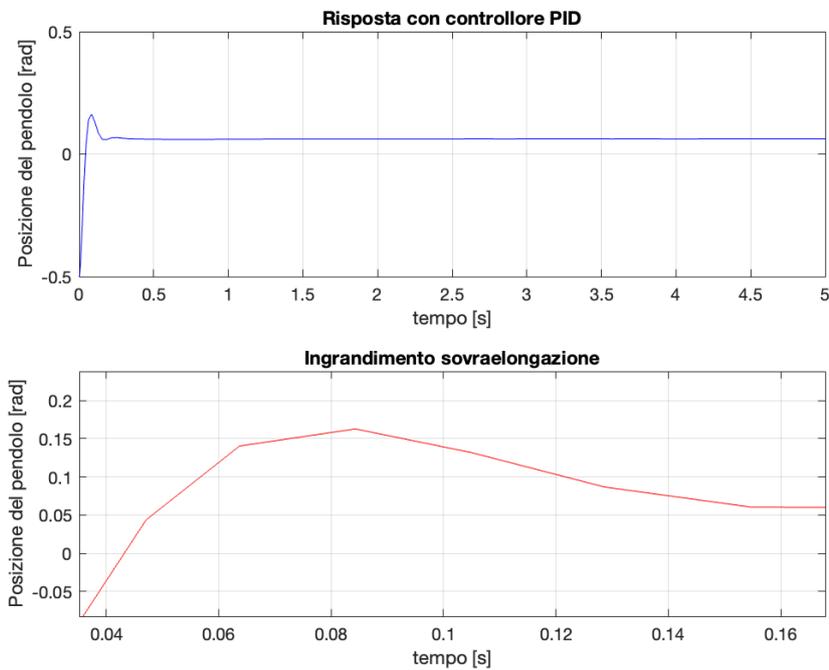


Figura (5.1.1): risposta del sistema non lineare a catena chiusa con controllore PID

Osserviamo che, pur avendo degli ottimi risultati in termini di massima sovravelongazione e di tempo di assestamento, il PID non è in grado di riposizionare il pendolo in asse come da specifiche.

Se inseriamo il controllore $C(s)$ nello schema a catena chiusa otteniamo invece:

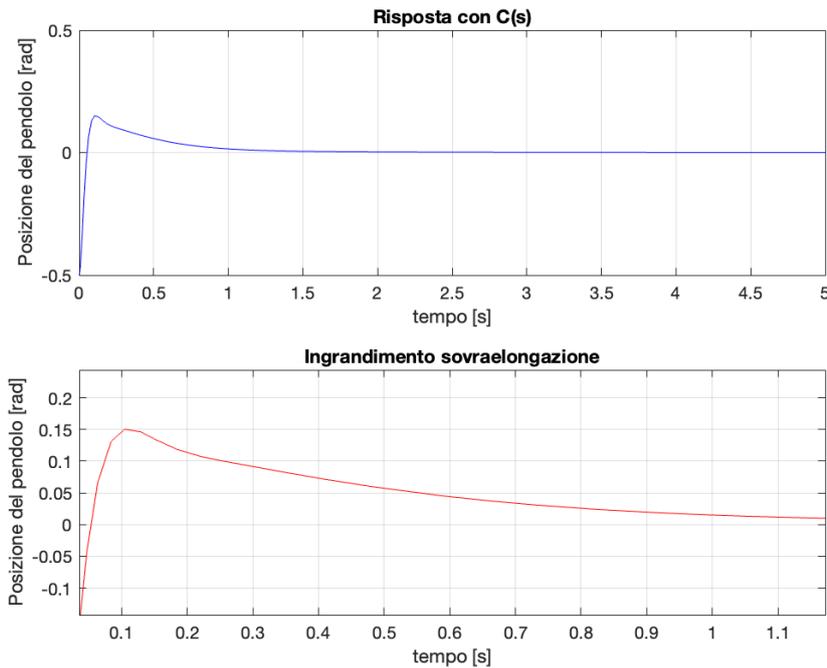


Figura (5.1.2): risposta del sistema non lineare a catena chiusa con controllore $C(s)$

Come evidenzia l'ingrandimento in figura (5.1.2) l'utilizzo di $C(s)$ si è rivelata essere la scelta migliore ai fini della simulazione. Il sistema non lineare retroazionato insegue il riferimento nullo senza errore a regime, con un tempo di assestamento $t_s < 1.5$ [s] e con una massima sovralongazione $M_p \leq 15\%$ rispetto al valore di regime.

5.2 Conclusioni

In conclusione, sintetizzare il controllore mediante l'analisi del luogo delle radici si è rivelata essere la tecnica più efficace. Il controllore prodotto con questa tecnica mostra degli ottimi risultati (rispetto alle specifiche assegnate) anche se sottoposto al controllo del sistema non lineare. Va sottolineato che in questo elaborato il sistema pendolo inverso è stato trattato come un sistema SISO (Single-Input Single-Output), quando questo invece appartiene alla classe dei sistemi denominati MIMO (Multi-Input Multi-Output). Pertanto, eseguire il controllo solamente sulla posizione del pendolo produce un sistema fisico irrealizzabile: il controllore (qualsiasi esso sia), per gestire la posizione del pendolo disturbato da un segnale costante, produce una forza direttamente applicata al carrello che se non soggetto anch'esso ad un'azione di controllo aumenta indefinitamente la sua velocità oltre che alla sua posizione (5.2.1).

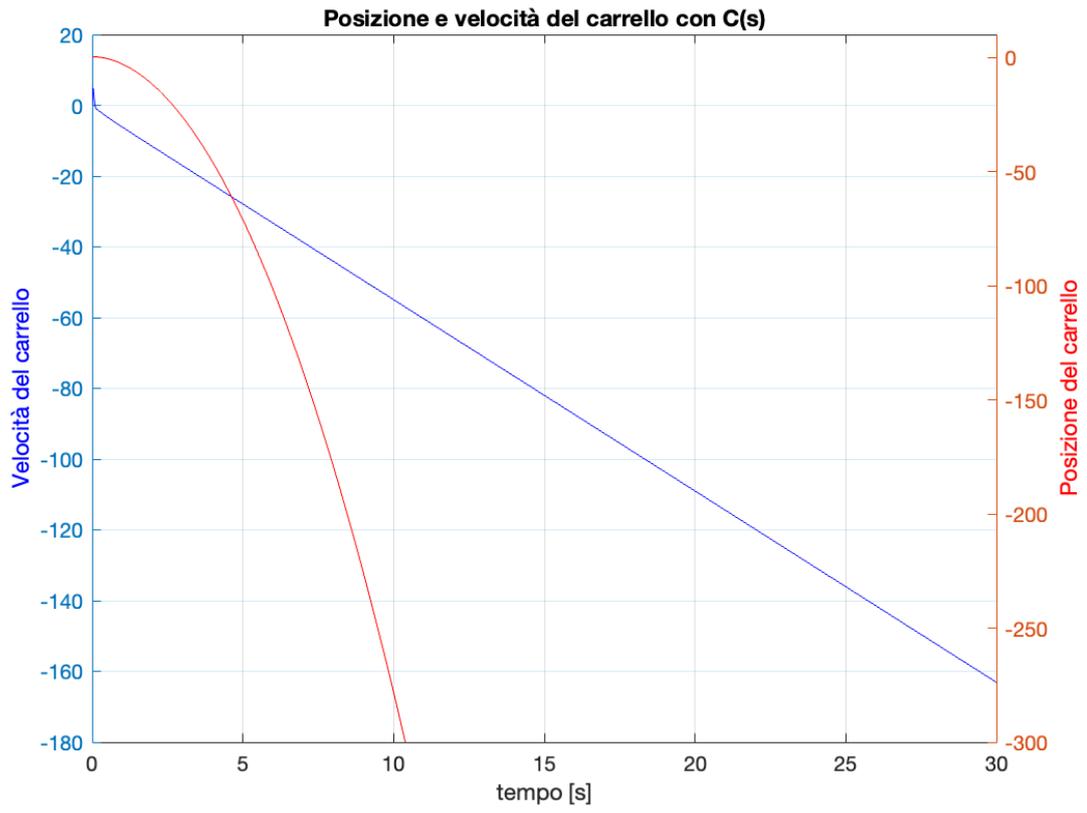


Figura (5.2.1): posizione e velocità del carrello

Bibliografia

[1] **Augusto Ferrante**, Appunti di Automatica per Ingegneria Biomedica con esercizi svolti.

[2] **Maria Elena Valcher**, “Modellistica e controllo pid di un pendolo inverso,” 2009. [Online].
Disponibile: <http://www.dei.unipd.it/~meme/AppuntiPendoloInv.pdf>

[3] **Augusto Ferrante, Antonio Lepschy, Umberto Viaro**, Introduzione ai controlli automatici.
CittàStudi edizioni, 2008 Torino