

UNIVERSITÀ
DEGLI STUDI
DI PADOVA

UNIVERSITA' DEGLI STUDI DI PADOVA

Dipartimento di Ingegneria Industriale DII

Corso di Laurea Magistrale in Ingegneria Aerospaziale

Valutazione dell'incertezza di propagazione orbitale per un satellite LEO

Relatore: Prof. Alessandro Francesconi

Correlatore: Prof. Carlo Bettanini Fecia Di Cossato

Laureando: Mattia Peruffo

N° matricola: 1179107

Anno Accademico 2018/2019

INDICE

SOMMARIO	VII
1. INTRODUZIONE	1
1.1 Introduzione alle perturbazioni orbitali	4
1.2 Tipologie di perturbazioni orbitali	6
1.3 Metodi di risoluzione	8
1.3.1 Special perturbation techniques	9
1.3.2 General perturbation techniques	10
1.3.3 Semianalytical techniques	12
2. PERTURBAZIONI ORBITALI	15
2.1 Campo gravitazionale terrestre	15
2.2 Attrito atmosferico	23
2.2.1 Attività solare	25
2.2.2 Modello di densità atmosferica	31
2.3 Pressione di radiazione solare	35
3. GENERAZIONE DEL CODICE	39
3.1 Ipotesi assunte	40
3.2 Struttura del codice	43
3.2.1 Struttura del codice: parte I	43
3.2.2 Struttura del codice: parte II	45
3.2.3 Struttura del codice: parte III	49
3.2.4 Struttura del codice: parte IV	51
3.2.5 Struttura del codice: parte V	52
3.2.6 Struttura del codice: parte VI	53
3.2.7 Struttura del codice: parte VII	57
4. RISULTATI DELLE SIMULAZIONI	59
4.1 Risultati delle simulazioni singole	59
4.1.1 Risultati simulazione singola: perturbazione di attrito atmosferico	59
4.1.2 Risultati simulazione singola: perturbazione di pressione di radiazione solare	69
4.1.3 Risultati simulazione singola: errore misura GPS	82
4.2 Risultati della simulazione completa	87
5. CONCLUSIONI	91
Nomenclatura	93
Bibliografia	97
Ringraziamenti	99
Appendice	101

LISTA DELLE FIGURE

Figura 1.1	Elementi orbitali	5
Figura 1.2	Effetto delle perturbazioni sul generico elemento orbitale c	8
Figura 2.1	Ellissoide con assi rispettivamente di valori $a=1$, $b=2$, $c=3$	15
Figura 2.2	Rappresentazione schematica della posizione relativa tra elemento generico di massa e punto di interesse	16
Figura 2.3	Esempio di armoniche zonali	21
Figura 2.4	Esempio di armoniche settoriali	21
Figura 2.5	Esempio di armoniche tesserali	22
Figura 2.6	Visione delle macchie solari	26
Figura 2.7	Andamento temporale del numero di macchie solari nel corso del ciclo attuale (ciclo 24)	27
Figura 2.8	Andamento temporale dell'indice $F_{10.7}$ nel corso del ciclo solare attuale (ciclo 24)	29
Figura 2.9	Relazione tra i valori dell'indice k_p ed i valori dell'indice a_p	30
Figura 2.10	Andamento temporale dell'indice A_p nel corso del ciclo solare attuale (ciclo 24)	31
Figura 3.1	Rappresentazione schematica della struttura del satellite. Nel caso riportato $a=1$, $b=2$, $c=3$	41
Figura 3.2	Definizione delle costanti terrestri ed astronomiche all'interno del codice	44
Figura 3.3	Struttura del file SOLFSMY.txt assunta all'interno del codice	45
Figura 3.4	Struttura del file DTCfile.txt assunta all'interno del codice	45
Figura 3.5	Struttura del codice per la generazione delle varie combinazioni possibili di parametri	53
Figura 3.6	Struttura del comando <code>ode113</code> interno a MATLAB	53
Figura 4.1	Valori di C_D impiegati nella simulazione singola	60
Figura 4.2	Risultati ottenuti in termini di azimuth ed elevazione per ciascun valore di C_D dalla simulazione singola con tempo di propagazione pari ad 8 ore	61
Figura 4.3	Rappresentazione grafica dei risultati di deviazione standard riportati in tabella 4.1 in funzione dell'altitudine considerata	62
Figura 4.4	Rappresentazione grafica dei risultati di deviazione standard riportati in tabella 4.2 in funzione dell'altitudine considerata	62

Figura 4.5	Rappresentazione grafica dei risultati di deviazione standard riportati in tabella 4.3 in funzione dell'altitudine considerata	63
Figura 4.6	Valori di A_{drag} impiegati nella simulazione singola	63
Figura 4.7	Risultati ottenuti in termini di azimuth ed elevazione per ciascun valore di A_{drag} dalla simulazione singola con tempo di propagazione pari ad 8 ore	64
Figura 4.8	Rappresentazione grafica dei risultati di deviazione standard riportati in tabella 4.4 in funzione dell'altitudine considerata	65
Figura 4.9	Rappresentazione grafica dei risultati di deviazione standard riportati in tabella 4.5 in funzione dell'altitudine considerata	66
Figura 4.10	Rappresentazione grafica dei risultati di deviazione standard riportati in tabella 4.6 in funzione dell'altitudine considerata	66
Figura 4.11	Rappresentazione grafica dei risultati di deviazione standard combinata riportati in tabella 4.7, 4.8 e 4.9 in funzione del tempo di propagazione imposto per ciascuna altitudine considerata. Rispettivamente azimuth (sopra) ed elevazione (sotto)	68
Figura 4.12	Valori di C_r impiegati nella simulazione singola	69
Figura 4.13	Risultati ottenuti in termini di azimuth ed elevazione per ciascun valore di C_r dalla simulazione singola con tempo di propagazione pari ad 8 ore	70
Figura 4.14	Rappresentazione grafica dei risultati di deviazione standard riportati in tabella 4.10 in funzione dell'altitudine considerata	71
Figura 4.15	Rappresentazione grafica dei risultati di deviazione standard riportati in tabella 4.11 in funzione dell'altitudine considerata	71
Figura 4.16	Rappresentazione grafica dei risultati di deviazione standard riportati in tabella 4.12 in funzione dell'altitudine considerata	72
Figura 4.17	Valori di A_{sr} impiegati nella simulazione singola	72
Figura 4.18	Risultati ottenuti in termini di azimuth ed elevazione per ciascun valore di A_{sr} dalla simulazione singola con tempo di propagazione pari ad 8 ore	73
Figura 4.19	Rappresentazione grafica dei risultati di deviazione standard riportati in tabella 4.13 in funzione dell'altitudine considerata	74
Figura 4.20	Rappresentazione grafica dei risultati di deviazione standard riportati in tabella 4.14 in funzione dell'altitudine considerata	75
Figura 4.21	Rappresentazione grafica dei risultati di deviazione standard riportati in tabella 4.15 in funzione dell'altitudine considerata	75
Figura 4.22	Valori di p_{sr} impiegati nella simulazione singola	76
Figura 4.23	Risultati ottenuti in termini di azimuth ed elevazione per ciascun valore di p_{sr} dalla simulazione singola con tempo di propagazione pari ad 8 ore	77

Figura 4.24	Rappresentazione grafica dei risultati di deviazione standard riportati in tabella 4.16 in funzione dell'altitudine considerata	78
Figura 4.25	Rappresentazione grafica dei risultati di deviazione standard riportati in tabella 4.17 in funzione dell'altitudine considerata	78
Figura 4.26	Rappresentazione grafica dei risultati di deviazione standard riportati in tabella 4.18 in funzione dell'altitudine considerata	79
Figura 4.27	Rappresentazione grafica dei risultati di deviazione standard combinata riportati in tabella 4.19, 4.20 e 4.21 in funzione del tempo di propagazione imposto per ciascuna altitudine considerata. Rispettivamente azimut (sopra) ed elevazione (sotto)	81
Figura 4.28	Valori delle componenti (x,y,z) impiegate nella simulazione singola a rappresentare l'errore GPS	82
Figura 4.29	Rappresentazione grafica del confronto tra i risultati di deviazione standard riportati in tabella 4.7, 4.8 e 4.9 in funzione del tempo di propagazione imposto ed i risultati riportati in tabella 4.22 per ciascuna altitudine considerata. Rispettivamente azimut (sopra) ed elevazione (sotto)	84
Figura 4.30	Figura 4.30 riportati in tabella 4.19, 4.20 e 4.21 in funzione del tempo di propagazione imposto ed i risultati riportati in tabella 4.23 per ciascuna altitudine considerata. Rispettivamente azimut (sopra) ed elevazione (sotto)	86
Figura 4.31	Valori dei parametri associati alle perturbazioni orbitali impiegati nella simulazione completa	87
Figura 4.32	Rappresentazione grafica dei risultati di deviazione standard riportati in tabella 4.24 in funzione dell'altitudine considerata	88

LISTA DELLE TABELLE

Tabella 4.1	Deviazione standard di azimuth ed elevazione per la simulazione singola con tempo di propagazione pari a 2 ore	62
Tabella 4.2	Deviazione standard di azimuth ed elevazione per la simulazione singola con tempo di propagazione pari a 8 ore	62
Tabella 4.3	Deviazione standard di azimuth ed elevazione per la simulazione singola con tempo di propagazione pari a 24 ore	63
Tabella 4.4	Deviazione standard di azimuth ed elevazione per la simulazione singola con tempo di propagazione pari a 2 ore	65
Tabella 4.5	Deviazione standard di azimuth ed elevazione per la simulazione singola con tempo di propagazione pari a 8 ore	66
Tabella 4.6	Deviazione standard di azimuth ed elevazione per la simulazione singola con tempo di propagazione pari a 24 ore	66
Tabella 4.7	Deviazione standard combinata di azimuth ed elevazione per la simulazione singola con tempo di propagazione pari a 2 ore	67
Tabella 4.8	Deviazione standard combinata di azimuth ed elevazione per la simulazione singola con tempo di propagazione pari a 8 ore	67
Tabella 4.9	Deviazione standard combinata di azimuth ed elevazione per la simulazione singola con tempo di propagazione pari a 24 ore	68
Tabella 4.10	Deviazione standard di azimuth ed elevazione per la simulazione singola con tempo di propagazione pari a 2 ore	71
Tabella 4.11	Deviazione standard di azimuth ed elevazione per la simulazione singola con tempo di propagazione pari a 8 ore	71
Tabella 4.12	Deviazione standard di azimuth ed elevazione per la simulazione singola con tempo di propagazione pari a 24 ore	72
Tabella 4.13	Deviazione standard di azimuth ed elevazione per la simulazione singola con tempo di propagazione pari a 2 ore	74
Tabella 4.14	Deviazione standard di azimuth ed elevazione per la simulazione singola con tempo di propagazione pari a 8 ore	75
Tabella 4.15	Deviazione standard di azimuth ed elevazione per la simulazione singola con tempo di propagazione pari a 24 ore	75
Tabella 4.16	Deviazione standard di azimuth ed elevazione per la simulazione singola con tempo di propagazione pari a 2 ore	78
Tabella 4.17	Deviazione standard di azimuth ed elevazione per la simulazione singola con tempo di propagazione pari a 8 ore	78

Tabella 4.18	Deviazione standard di azimut ed elevazione per la simulazione singola con tempo di propagazione pari a 24 ore	79
Tabella 4.19	Deviazione standard combinata di azimut ed elevazione per la simulazione singola con tempo di propagazione pari a 2 ore	80
Tabella 4.20	Deviazione standard combinata di azimut ed elevazione per la simulazione singola con tempo di propagazione pari a 8 ore	80
Tabella 4.21	Deviazione standard combinata di azimut ed elevazione per la simulazione singola con tempo di propagazione pari a 24 ore	80
Tabella 4.22	Deviazione standard di azimut ed elevazione per la simulazione singola dedicata all'errore GPS comprensiva della perturbazione di attrito atmosferico	83
Tabella 4.23	Deviazione standard di azimut ed elevazione per la simulazione singola dedicata all'errore GPS comprensiva della perturbazione di pressione di radiazione solare	85
Tabella 4.24	Deviazione standard di azimut ed elevazione per la simulazione completa	88
Tabella 4.25	Deviazione standard di azimut ed elevazione per la simulazione completa priva di moti secolari di precessione e nutazione	89
Tabella 4.26	Deviazione standard di azimut ed elevazione per la simulazione completa comprensiva i moti secolari di precessione e nutazione	89

SOMMARIO

Che sia stabilire la possibilità di impatto tra un satellite operativo ed un detrito spaziale, valutare le tempistiche di rientro in atmosfera, programmare una missione oppure a supporto delle attività di tracking di satelliti dedicati a missioni di carattere scientifico nel campo della geodesia, la predizione orbitale presenta un'ampia diffusione in molti campi della meccanica celeste.

Determinare tuttavia con accurata precisione la posizione che occuperà un corpo, sia esso di origine artificiale oppure di origine naturale, lungo la propria orbita non rappresenta una sfida semplice. La presenza di differenti termini perturbativi che influenzano il moto del satellite lungo la propria orbita con maggiore o minore intensità, nonché una non perfetta conoscenza dell'intero ambiente spaziale terrestre, incrementa le difficoltà di modellare precisamente la reale condizione a cui il satellite risulta ad operare, influenzando di conseguenza la precisione della stima ottenuta.

Il lavoro corrente prevede la generazione di un codice di propagazione orbitale al fine di valutare l'incertezza al termine del tempo di propagazione della posizione, espressa in termini angolari di azimut ed elevazione rispetto al sito della *ground station*, di un satellite posto in orbita LEO. Il satellite in questione, dedicato ad operazioni di comunicazione ottica, è posto in un intervallo di altitudini comprese tra 500 km e 700 km in una configurazione *nadir-pointing*. È stata assunta una condizione di massima attività solare, ponendosi dunque nella condizione più critica. Tre differenti contributi perturbativi sono stati presi in esame: non sfericità del campo gravitazionale terrestre, attrito atmosferico e pressione di radiazione solare. In aggiunta è stata considerata l'incertezza sulla conoscenza delle condizioni ad inizio propagazione dovuta ad un errore insito nella misura GPS. Due tipologie di simulazioni sono state generate: simulazioni singole, in cui viene considerato esclusivamente un unico contributo perturbativo alla volta al fine di determinare l'influenza che i singoli parametri che lo caratterizzano presentano sui risultati ottenuti; simulazione completa, finalizzata alla determinazione dell'effetto complessivo prodotto considerando tutti i contributi perturbativi contemporaneamente.

I risultati ottenuti dalle simulazioni singole evidenziano come, per l'intervallo di altitudini considerate e nelle condizioni assunte, l'attrito atmosferico costituisca il contributo perturbativo maggiormente preponderante sull'incertezza della stima prodotta. Dagli stessi risultati è possibile dedurre anche come all'incrementare del tempo di propagazione corrisponda in generale una riduzione dell'accuratezza con cui è possibile determinare la posizione che andrà ad occupare il satellite. Conoscere con precisione la posizione del satellite ad inizio propagazione costituisce, inoltre, una prerogativa essenziale, dal momento che incide addirittura in termini maggiori rispetto alle

perturbazioni stesse, almeno per il tempo di propagazione impiegato. La simulazione completa ha infine evidenziato come considerare contemporaneamente differenti contributi perturbativi determini un peggioramento della precisione della stima prodotta.

CAPITOLO 1

INTRODUZIONE

Determinare con precisione la posizione orbitale di un corpo nello spazio, sia esso di origine artificiale oppure di origine naturale, rappresenta uno degli aspetti fondamentali per ogni missione spaziale. Ancora prima dell'avvio dell'era spaziale, la cui data viene fatta convenzionalmente coincidere con il lancio dello *Sputnik I* [1], primo satellite artificiale mandato in orbita il 4 Ottobre 1957, molti studiosi, per lo più matematici ed astronomi, hanno fornito il proprio contributo nella formulazione di differenti metodologie al fine di definire con precisione, mediante l'impiego di dati ottenuti da osservazioni sperimentali, l'orbita descritta da un corpo nello spazio. Queste metodologie hanno costituito le basi fondamentali di quanto viene applicato tutt'oggi per tale tipologia di problemi [2]. Ovviamente il campo di applicazione verteva inizialmente su problemi associati a corpi celesti, quali pianeti, comete o satelliti naturali, mentre ora, oltre a questi, viene anche inglobata la moltitudine di oggetti artificiali che sono stati lanciati in orbita nel susseguirsi delle varie missioni.

Di tali oggetti, tra quelli che effettivamente risultano tracciabili da parte della *US Space Surveillance Network (SSN)* e costituiscono dunque ciò che viene definita *popolazione catalogata*, solamente una piccola percentuale pari al 6% rappresenta sistemi ancora effettivamente operativi mentre il restante 94% costituisce ciò che viene denominato comunemente come *space debris*. Secondo la definizione adottata dalla *Inter-Agency Debris Coordination Committee (IADCC)* [3], gli *space debris* sono oggetti di origine artificiale comprensivi frammenti di satelliti o satelliti interi che, in orbita attorno alla Terra oppure in fase di rientro attraverso l'atmosfera, non risultano più funzionali. Classificati in base a dimensione media e peso, circa 20000 presentano dimensioni tali (superiore ai 10 cm) da poter risultare tracciabili mentre il restante, che costituisce il contributo maggiore in termini numerici, non risulta né osservabile né tracciabile [4]. Gli *space debris* rappresentano una seria problematica per le attività spaziali odierne, dal momento che l'impatto di questi con satelliti attivi potrebbero compromettere parzialmente oppure completamente la funzionalità del satellite stesso, e conseguentemente la riuscita della missione. Risulta evidente come tenere traccia delle varie orbite di tali oggetti, così come dei satelliti attivi stessi, sia un aspetto molto importante e necessario al fine di evitare un evento che possibilmente potrebbe risultare catastrofico. Tuttavia, la determinazione orbitale (OD) mediante l'impiego di strumentazione opportunamente dedicata (telescopi, RADAR, laser) non risulta sufficiente per tenere traccia dei vari oggetti artificiali, operativi e non, che circondano l'ambiente spaziale terrestre, dato il preponderante numero di questi in confronto alle

stazioni adibite a tale scopo. Assume un ruolo fondamentale dunque la previsione orbitale (OP): conoscere preventivamente con un determinato livello di accuratezza la posizione che sarà occupata da un corpo nel moto lungo la propria orbita.

Gli *space debris* costituiscono forse il campo più evidente in cui tale attività risulta essenziale. Predire con un determinato livello di accuratezza l'orbita percorsa da un detrito spaziale permette di determinare se vi sia un possibile rischio di impatto con il satellite di interesse e dunque poter attuare in anticipo alcune manovre evasive mediante l'impiego del sistema di propulsione, che richiedono tuttavia il consumo di propellente, al fine di evitare l'impatto. Recentemente sono state proposte invece tecniche che prevedono di agire direttamente sul detrito spaziale stesso al fine di modificarne l'orbita ed evitare conseguentemente l'impatto [5] [6]. Le tecniche proposte richiedono l'applicazione di un sistema laser che, situato su una *ground station* sulla superficie terrestre oppure residente su un satellite, viene puntato nella posizione di interesse ed impiegato per deviare lo *space debris* e modificarne così la traiettoria. Predire con precisione la posizione in cui si troverà il detrito spaziale risulta dunque essenziale al fine di puntare con determinata accuratezza il sistema laser stesso.

Altri ambiti tuttavia, non meno importanti, richiedono un'accurata previsione orbitale.

Si prendano in considerazione alcune missioni di carattere scientifico finalizzate all'ottenimento di una migliore comprensione nel campo della geodesia, scienza dedicata allo studio della forma, dell'orientazione e del campo gravitazionale della Terra, e nel campo della fisica. LAGEOS 1 e LAGEOS 2, dedicati alla determinazione degli *Earth Orientation Parameter (EOP)* ed alla valutazione dell'effetto Lense-Thirring predetto dalla relatività generale, sono due satelliti praticamente identici: completamente passivi, privi di sistemi di comunicazione, potenza e propulsione. Costituiti in alluminio, presentano entrambi una configurazione sferica e sono dotati di 426 *cubic corner reflectors (CCR)* [7].

LARES, dedicato ad incrementare la precisione con cui è possibile determinare l'effetto Lense-Thirring predetto dalla relatività generale, come i due satelliti precedentemente introdotti presenta una configurazione sferica ed è completamente passivo. Costituito in tungsteno, è dotato di 92 *cubic corner reflectors (CCR)* [8].

GRACE [9] e GOCE [10] [11], satelliti dedicati alla mappatura del campo gravitazionale terrestre ed ormai non più operativi, erano dotati di *corner reflectors* [12].

L'accurata determinazione orbitale rappresenta una prerogativa essenziale per tali missioni di carattere scientifico [13]. L'impiego della tecnica di *satellite laser ranging (SLR)*, sfruttando i *corner reflectors* posizionati sul satellite, permette di definire la posizione di questo con precisione millimetrica [14]. Dato tuttavia il limitato tempo di visibilità del satellite da parte delle stazioni

dedicate, un'accurata previsione orbitale risulta necessaria per permettere alla stazione di acquisire tempestivamente il satellite stesso e tracciarne l'orbita.

Nell'ottica di programmazione di una missione interplanetaria, la previsione orbitale risulta necessaria nel poter stabilire l'intervallo temporale utile dedicato al lancio del satellite in orbita nonché nel poter valutare le differenti manovre di assist gravitazionale (*fly-by*) da attuare per il raggiungimento del pianeta del sistema solare obiettivo della missione, cosa che con gli attuali sistemi di propulsione risulterebbe proibitivo in termini temporali e di consumo di propellente. Si prendano ad esempio in considerazione le due missioni ESA *BepiColombo* [15] e *JUICE* [16]: la prima avviata recentemente (2018) e dedicata all'esplorazione di Mercurio mentre la seconda programmata per il 2022 e dedicata all'analisi di Giove e delle sue lune. Entrambi i casi richiedono differenti manovre di *fly-by*. L'attività di propagazione orbitale ha permesso di definire la migliore strategia per il raggiungimento del pianeta di interesse.

Si consideri un satellite al termine del proprio periodo operativo posto ad un'altitudine tale per cui l'azione di attrito atmosferico sia sufficiente a permettere il rientro in atmosfera. Determinare il tempo di caduta richiede l'impiego della propagazione orbitale al fine di fornirne un'accettabile valutazione [17]. Uno degli esempi più recenti è rappresentato dal rientro della stazione spaziale cinese *Tiangong 1*, avvenuto il 2 Aprile 2018 [18].

Quelli proposti rappresentano solamente alcuni dei principali campi che necessitano di un'attività di propagazione orbitale. Tuttavia, nonostante il vasto impiego, predire con precisione la posizione di un corpo in moto lungo la propria orbita dopo un certo tempo di propagazione definito non rappresenta una sfida così semplice [19]. Differenti contributi perturbativi di diversa natura incidono sul moto del corpo considerato con maggiore o minore intensità e la scelta del numero di questi da prendere in esame va ad influire sui risultati prodotti [20]. L'attività solare, in quanto non facilmente prevedibile con determinata accuratezza, rappresenta un'ulteriore fonte di incertezza che influisce su molti aspetti dell'ambiente spaziale stesso e conseguentemente sui contributi perturbativi. Inoltre, la scelta di uno tra i differenti modelli rappresentativi di uno stesso aspetto può incidere pesantemente sui risultati ottenuti. Si pensi ad esempio ai vari modelli formulati nel corso degli anni per valutare la densità atmosferica terrestre [2] [21].

Il lavoro prodotto consiste nella generazione di un codice di propagazione orbitale al fine di produrre una valutazione della stima di incertezza con cui è possibile stabilire, al termine del tempo di propagazione, la posizione di un satellite. Nel caso in esame il satellite considerato, dedicato ad attività di comunicazione ottica, risulta essere posto in un'orbita bassa LEO, con altitudini comprese tra 500 km e 700 km, in una configurazione *nadir-pointing*.

Dopo una breve introduzione all'argomento delle perturbazioni orbitali nel corso del capitolo corrente, si prosegue con il capitolo 2 alla descrizione delle perturbazioni effettivamente prese in esame nel modello. Nel capitolo 3 viene descritta la struttura del codice generato, mentre il capitolo 4 riassume i risultati ottenuti dalle simulazioni prodotte. Nel capitolo 5 infine vengono tratte le dovute conclusioni.

1.1 Introduzione alle perturbazioni orbitali

L'equazione del problema dei due corpi rappresenta il punto di partenza da cui è necessario iniziare per riuscire ad ottenere una chiara comprensione dell'influenza delle perturbazioni orbitali sul moto di un satellite.

$$\ddot{\mathbf{r}} = -\frac{\mu}{r^3} \mathbf{r} \quad (1.1)$$

La relazione precedentemente riportata descrive il moto di un corpo (*secondario*) rispetto ad un altro corpo (*primario*) a seguito della sola forza di attrazione gravitazionale tra essi, espresso in un sistema di riferimento inerziale che presenta l'origine coincidente con il centro di massa del primario. Nel caso in esame i ruoli di corpo primario e corpo secondario sono assunti rispettivamente da Terra e satellite. Considerando i parametri riportati:

- μ : rappresenta la costante gravitazionale terrestre
- \mathbf{r} : rappresenta il vettore posizione relativo del secondario rispetto al primario

L'equazione (1.1) rappresenta un sistema di tre equazioni differenziali non lineari del secondo ordine. Esplicitando le differenti componenti lungo i tre assi.

$$\ddot{x} = -\frac{\mu}{x^2} \quad (1.2a)$$

$$\ddot{y} = -\frac{\mu}{y^2} \quad (1.2b)$$

$$\ddot{z} = -\frac{\mu}{z^2} \quad (1.2c)$$

Sono dunque necessarie sei differenti costanti di integrazione per la definizione di un *set* di condizioni iniziali \mathbf{y}_0 .

Queste possono essere riportate in termini cartesiani attraverso posizione e velocità iniziali:

$$\mathbf{y}_0 = (\mathbf{r}_0, \dot{\mathbf{r}}_0) \quad (1.3)$$

dove:

- \mathbf{r}_0 : rappresenta il vettore posizione iniziale all'istante t_0
- $\dot{\mathbf{r}}_0$: rappresenta il vettore velocità iniziale all'istante t_0

In alternativa possono essere riportate in termini kepleriani attraverso gli elementi orbitali

$$\mathbf{y}_0 = (a, e, i, \Omega, \omega, \theta) \quad (1.4)$$

dove:

- a : rappresenta il semiasse maggiore dell'orbita
- e : rappresenta l'eccentricità dell'orbita
- i : rappresenta l'inclinazione dell'orbita
- Ω : rappresenta la longitudine del nodo ascendente
- ω : rappresenta l'argomento di perigeo
- θ : rappresenta l'anomalia vera del satellite lungo la propria orbita

I primi due termini forniscono informazioni sulla forma dell'orbita; i tre termini successivi, invece, forniscono informazioni sulla sua orientazione nello spazio; l'ultimo termine, infine, permette di identificare la posizione del satellite lungo la propria orbita [2] [22]. In alternativa al semiasse maggiore a può venire impiegato il momento angolare specifico h , mentre in alternativa all'anomalia vera θ possono essere impiegati l'anomalia media M oppure il tempo dal passaggio attraverso il perigeo t .

Per una migliore comprensione dei termini precedentemente presentati si faccia riferimento alla figura di seguito riportata.

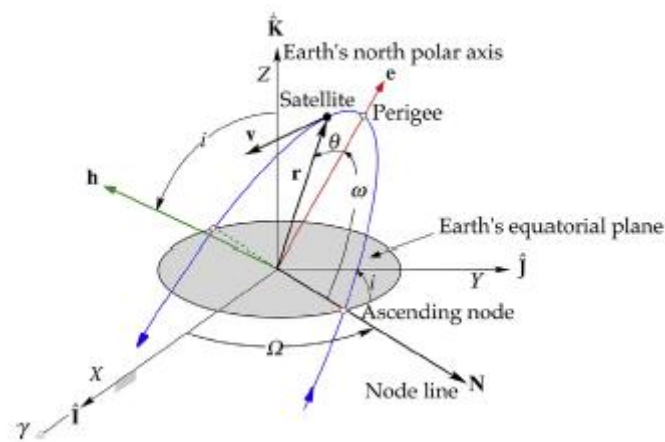


Figura 1.1 Elementi orbitali [23]

Sia la relazione (1.3) che quella (1.4) sono forme alternative di ciò che viene comunemente definito vettore di stato, valutato all'istante t_0 . Il vettore di stato rappresenta un *set* di sei parametri differenti che permettono di descrivere in modo completo il moto del satellite lungo la propria orbita ad un generico istante t di interesse.

Definite le dovute condizioni iniziali, la risoluzione dell'equazione (1.1) può essere ottenuta in forma chiusa: l'orbita del satellite può venire rappresentata da una delle tre differenti tipologie di coniche (ellisse, parabola, iperbole) ed assume la denominazione di *orbita kepleriana*. Bisogna tuttavia tenere in considerazione come l'equazione (1.1) valga esclusivamente sotto l'assunzione di alcune ipotesi restrittive [2]:

- la massa del secondario risulta trascurabile in confronto a quella del primario
- sia il primario che il secondario sono rappresentati da punti materiali
- la forza di attrazione gravitazionale reciproca tra i due corpi rappresenta l'unica forza agente

Difficilmente tali condizioni vengono soddisfatte nel caso di applicazioni reali: la presenza di differenti perturbazioni orbitali determina una deviazione rispetto al moto del satellite lungo la propria orbita kepleriana. La relazione (1.1) rappresenta una semplice approssimazione del moto reale del satellite e deve dunque essere modificata al fine di poter includere il contributo dovuto alle differenti perturbazioni orbitali.

$$\ddot{\mathbf{r}} = -\frac{\mu}{r^3}\mathbf{r} + \mathbf{a}_p \quad (1.5)$$

dove, al secondo membro dell'equazione:

- il primo termine rappresenta il contributo di accelerazione ottenuto nelle ipotesi dell'equazione dei due corpi
- il secondo termine rappresenta il contributo di accelerazione perturbativa dovuto alle differenti perturbazioni prese in esame

La risoluzione dell'equazione (1.5) permette di descrivere il moto che il satellite, soggetto alle perturbazioni prese in esame, effettivamente compie.

1.2 Tipologie di perturbazioni orbitali

Il termine di accelerazione perturbativa \mathbf{a}_p presente all'interno dell'equazione (1.5) è costituito dai differenti contributi dovuti alle perturbazioni che possono essere presi in esame. In forma estesa:

$$\mathbf{a}_p = \mathbf{a}_{\text{aspherical}} + \mathbf{a}_{\text{drag}} + \mathbf{a}_{\text{3-body}} + \mathbf{a}_{\text{sr}} + \mathbf{a}_{\text{thrust}} + \mathbf{a}_{\text{other}} \quad (1.6)$$

dove:

- $a_{\text{spherical}}$: rappresenta il contributo dovuto alla parte non sferica del campo gravitazionale terrestre
- a_{drag} : rappresenta il contributo dovuto all'attrito atmosferico
- $a_{\text{3-body}}$: rappresenta il contributo dovuto alla presenza di un terzo corpo, quali possono essere il Sole e la Luna
- a_{sr} : rappresenta il contributo dovuto alla pressione di radiazione solare
- a_{thrust} : rappresenta il contributo dovuto all'emissione di propellente a seguito di una manovra orbitale
- a_{other} : rappresenta il contributo dovuto a perturbazioni di ordine minore, quali possono essere le maree terrestri (solide ed oceaniche), la radiazione emessa dalla Terra (radiazione di albedo e radiazione infrarossa), gli effetti relativistici

Esistono in generale due differenti tipologie di classificazione per distinguere i vari contributi [2] [22].

La prima tipologia di classificazione permette di suddividere le differenti perturbazioni in:

- **gravitazionali**: perturbazioni definite in tale maniera sono dovute alla forza di attrazione gravitazionale. La non sfericità del campo gravitazionale terrestre e la presenza di un terzo corpo costituiscono esempi che appartengono a tale categoria
- **non gravitazionali**: perturbazioni definite in tale maniera non sono dovute alla forza di attrazione gravitazionale. L'attrito atmosferico, la pressione di radiazione solare e la spinta dovuta a manovre orbitali costituiscono esempi che appartengono a tale categoria

La seconda tipologia di classificazione permette di suddividere le differenti perturbazioni in:

- **conservative**: per perturbazioni definite in tale maniera l'energia totale rimane invariata. Il contributo di accelerazione perturbativa può inoltre essere espresso mediante il gradiente di una funzione potenziale Φ

$$\mathbf{a} = \nabla\Phi \quad (1.7)$$

La non sfericità del campo gravitazionale terrestre e la presenza di un terzo corpo costituiscono esempi che appartengono a tale categoria

- **non conservative**: per perturbazioni definite in tale maniera l'energia totale non rimane invariata. A differenza del caso precedente, il contributo di accelerazione perturbativa non può venire espresso mediante il gradiente di una funzione potenziale Φ . L'attrito atmosferico,

la pressione di radiazione solare e la spinta dovuta a manovre orbitali costituiscono esempi che appartengono a tale categoria

Indipendentemente dalla tipologia considerata, in generale gli effetti prodotti dalle perturbazioni sui singoli parametri orbitali possono essere suddivisi in secolari e periodici [2]. Mentre gli effetti secolari tendono ad accumularsi nel tempo, quelli periodici presentano una certa ripetibilità. Per quanto concerne questi ultimi, infatti, si possono individuare due differenti tipologie: effetti di breve periodo, per cui il periodo di ripetizione è comparabile con quello del moto del satellite lungo la propria orbita; effetti di lungo periodo, per cui il periodo di ripetizione è superiore, in generale di alcuni ordini di grandezza, rispetto a quello del moto del satellite lungo la propria orbita.

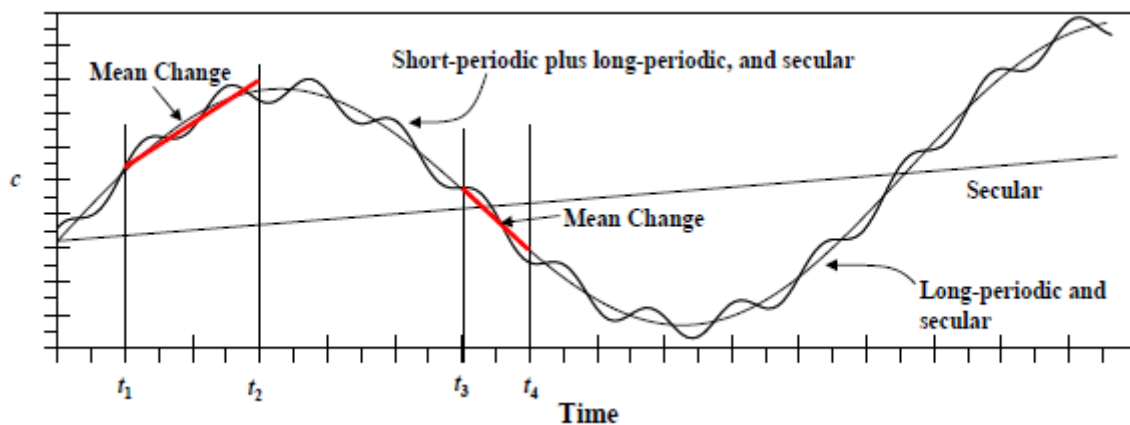


Figura 1.2 Effetto delle perturbazioni sul generico elemento orbitale c [2]

La figura 1.2 mette in evidenza il contributo dei singoli effetti su un generico parametro orbitale c .

Il numero di contributi inclusi all'interno della relazione (1.5) incide sul livello di accuratezza con cui è possibile descrivere le condizioni a cui risulta essere sottoposto il satellite.

1.3 Metodi di risoluzione

A differenza dell'equazione del problema dei due corpi, la relazione (1.5) non presenta una soluzione ottenibile in forma chiusa. Al fine di descrivere il moto del satellite lungo la propria orbita tenendo in considerazione l'effetto delle perturbazioni, sono state sviluppate in generale tre differenti metodologie di approccio al problema [2] [21] [22] [23]:

- *special perturbation techniques*
- *general perturbation techniques*
- *semianalytical techniques*

1.3.1 Special perturbation techniques

La *special perturbation techniques* consiste in un'integrazione numerica diretta dell'equazione del moto (1.5). Generalmente questa viene riadattata in un sistema di sei equazioni differenziali del primo ordine.

$$\dot{\mathbf{y}} = \mathbf{f}(t, \mathbf{y}) \quad (1.8)$$

dove:

- $\mathbf{y} = (\mathbf{r}, \dot{\mathbf{r}})^T = (x, y, z, \dot{x}, \dot{y}, \dot{z})^T$ rappresenta un vettore colonna di sei componenti definite da posizione e velocità
- $\dot{\mathbf{y}} = (\dot{\mathbf{r}}, \ddot{\mathbf{r}}) = (\dot{x}, \dot{y}, \dot{z}, \ddot{x}, \ddot{y}, \ddot{z})^T$ rappresenta un vettore colonna di sei componenti definite da velocità ed accelerazione

Il vantaggio principale della *special perturbation techniques* risiede nella propria facilità di formulazione: i vari contributi di accelerazione perturbativa possono essere semplicemente combinati tra loro in maniera lineare, secondo la (1.6), e di seguito numericamente integrati. Sono state formulate differenti modalità di integrazione numerica, che possono essere raggruppate in due differenti categorie principali:

- *single-step*: conosciuti generalmente come metodi *Runge-Kutta*, prevedono di valutare la funzione all'interno di uno stesso *step* di integrazione in più punti interni, a seconda dell'ordine del metodo considerato, ed impiegare tali valutazioni esclusivamente un'unica volta
- *multi-step*: definiti anche metodi *predictor-corrector*, prevedono in una prima fase di eseguire una stima della funzione da valutare (*predictor*) che viene successivamente impiegata per raffinare i risultati ottenuti (*corrector*)

I metodi *multi-step*, sebbene presentino una complessità superiore in termini di formulazione, risultano rispetto ai metodi *single-step* più accurati ed efficienti in termini di costo computazionale.

In riferimento alle due altre metodologie elencate la *special perturbation techniques*, nonostante il costo computazionale richiesto sia superiore, permette di ottenere risultati maggiormente accurati. Vengono inoltre inclusi indiscriminatamente sia gli effetti secolari che quelli periodici.

1.3.2 General perturbation techniques

La *general perturbation techniques* prevede di esprimere i contributi di accelerazione perturbativa attraverso un'espansione in serie e procedere successivamente all'integrazione delle equazioni del moto in maniera analitica. Dal momento che la serie rappresentativa i termini perturbativi viene troncata ad un certo ordine finito, il costo computazionale richiesto risulta essere ridotto rispetto al caso precedentemente descritto a discapito, tuttavia, dell'accuratezza ottenuta. L'ordine di espansione della serie incide inoltre sulla tipologia di effetti presi in esame: ordini inferiori permetteranno di includere solamente effetti secolari e periodici di lungo periodo mentre ordini superiori permetteranno di includere anche effetti periodici di breve periodo. L'equazione del moto viene generalmente convertita in una forma alternativa che permetta di esprimere la variazione temporale dei parametri orbitali.

$$\frac{d\mathbf{c}}{dt} = f(\mathbf{c}, t) \quad (1.9)$$

dove $\mathbf{c} = (a, e, i, \Omega, \omega, \vartheta)$ rappresenta il *set* di parametri orbitali considerato.

La relazione (1.9), che rappresenta un sistema di sei equazioni differenziali del primo ordine non lineari, viene definita come l'equazione del moto nella forma *variation of parameters* (VOP). Dal momento che i parametri orbitali forniscono informazioni su forma ed orientazione dell'orbita nello spazio, risulta chiaro come una relazione del tipo (1.9) permetta di evidenziare in maniera più esplicita l'effettiva influenza che le perturbazioni orbitali esercitano sull'orbita stessa.

Esistono in generale due differenti metodologie per l'analisi del problema delle perturbazioni orbitali attraverso la formulazione VOP. Prima di definirle, per una migliore comprensione di quanto verrà esposto in seguito, risulta necessario riportare la relazione che sussiste tra il set di parametri che descrivono l'orbita \mathbf{c} ed il contributo di accelerazione perturbativa \mathbf{a}_p .

Si consideri il vettore posizione \mathbf{r} espresso in termini del *set* di parametri orbitali \mathbf{c} .

$$\mathbf{r} = \mathbf{r}(a, e, i, \Omega, \omega, \vartheta, t) = \mathbf{r}(\mathbf{c}, t) \quad (1.10)$$

Le equazioni del moto nel caso del problema dei due corpi e nel caso comprensivo le perturbazioni orbitali vengono rispettivamente espresse come:

$$\ddot{\mathbf{r}}(\mathbf{c}, t) + \frac{\mu \mathbf{r}(\mathbf{c}, t)}{|\mathbf{r}(\mathbf{c}, t)|^3} = 0 \quad (1.11^a)$$

$$\ddot{\mathbf{r}}(\mathbf{c}, t) + \frac{\mu \mathbf{r}(\mathbf{c}, t)}{|\mathbf{r}(\mathbf{c}, t)|^3} = \mathbf{a}_p \quad (1.11^b)$$

Assumendo l'ipotesi di perturbazioni orbitali di limitata entità, il punto chiave della *general perturbation techniques* risiede nel fatto di poter esprimere la soluzione del moto perturbato attraverso quella del moto non perturbato. Ad ogni istante generico t l'orbita del moto perturbato viene descritta da un *set* di parametri orbitali tempo-varianti che rappresenta quella che viene definita *orbita osculatrice*: l'orbita kepleriana, tangente a quella del moto perturbato, definita all'istante t considerato che il satellite percorrerebbe nel caso venissero meno le perturbazioni orbitali.

Si calcoli il vettore velocità $\dot{\mathbf{r}}$. In generale risulta esprimibile come:

$$\dot{\mathbf{r}}(\mathbf{c}, t) = \frac{d\mathbf{r}(\mathbf{c}, t)}{dt} = \frac{\partial \mathbf{r}(\mathbf{c}, t)}{\partial t} + \sum_{i=1}^6 \frac{\partial \mathbf{r}(\mathbf{c}, t)}{\partial c_i} \frac{dc_i}{dt} \quad (1.12)$$

Nel caso di moto non perturbato l'equazione precedentemente riportata si riduce a:

$$\dot{\mathbf{r}}(\mathbf{c}, t) = \frac{d\mathbf{r}(\mathbf{c}, t)}{dt} = \frac{\partial \mathbf{r}(\mathbf{c}, t)}{\partial t} \quad (1.13)$$

in quanto vale la condizione $dc_i/dt = 0$ per ogni i -esimo parametro considerato.

Dal momento che al generico istante t l'orbita nel caso di moto perturbato e la corrispettiva orbita kepleriana osculatrice definita all'istante t considerato devono coincidere tra loro, il vettore velocità $\dot{\mathbf{r}}$ assume la stessa rappresentazione in entrambi i casi. Tale condizione di uguaglianza tra le due orbite (*osculation condition*) viene tradotta analiticamente attraverso la seguente relazione:

$$\sum_{i=1}^6 \frac{\partial \mathbf{r}(\mathbf{c}, t)}{\partial c_i} \frac{dc_i}{dt} = 0 \quad (1.14)$$

che rappresenta un sistema di tre equazioni differenziali del primo ordine non lineari.

Si calcoli il vettore accelerazione $\ddot{\mathbf{r}}$. In generale risulta esprimibile come:

$$\ddot{\mathbf{r}}(\mathbf{c}, t) = \frac{d^2 \mathbf{r}(\mathbf{c}, t)}{dt^2} = \frac{\partial^2 \mathbf{r}(\mathbf{c}, t)}{\partial t^2} + \sum_{i=1}^6 \frac{\partial \dot{\mathbf{r}}(\mathbf{c}, t)}{\partial c_i} \frac{dc_i}{dt} \quad (1.15)$$

Introducendo la relazione (1.15) all'interno dell'equazione (1.11b), questa diviene:

$$\frac{\partial^2 \mathbf{r}(\mathbf{c}, t)}{\partial t^2} + \sum_{i=1}^6 \frac{\partial \dot{\mathbf{r}}(\mathbf{c}, t)}{\partial c_i} \frac{dc_i}{dt} + \frac{\mu \mathbf{r}(\mathbf{c}, t)}{|\mathbf{r}(\mathbf{c}, t)|^3} = \mathbf{a}_p \quad (1.16)$$

Al generico istante t considerato l'orbita osculatrice deve soddisfare l'equazione (1.11a), in quanto corrispettiva orbita kepleriana del moto perturbato all'istante t considerato. Combinando dunque tra loro la (1.16) e la (1.11a), si ottiene:

$$\sum_{i=1}^6 \frac{\partial \dot{\mathbf{r}}(\mathbf{c}, t)}{\partial c_i} \frac{dc_i}{dt} = \mathbf{a}_p \quad (1.17)$$

che rappresenta un sistema di tre equazioni differenziali del primo ordine non lineari.

Riassumendo i risultati ottenuti:

$$\begin{cases} \sum_{i=1}^6 \frac{\partial \mathbf{r}(\mathbf{c}, t)}{\partial c_i} \frac{dc_i}{dt} = 0 \\ \sum_{i=1}^6 \frac{\partial \dot{\mathbf{r}}(\mathbf{c}, t)}{\partial c_i} \frac{dc_i}{dt} = \mathbf{a}_p \end{cases} \quad (1.18)$$

La (1.18) rappresenta un sistema di sei equazioni differenziali del primo ordine non lineari che descrive la relazione che sussiste tra il *set* di parametri orbitali \mathbf{c} ed il contributo di accelerazione perturbativa \mathbf{a}_p . Come precedentemente affermato, esistono due principali metodologie per l'analisi del problema delle perturbazioni orbitali attraverso la formulazione VOP, a seconda di come viene espresso il termine \mathbf{a}_p all'interno dell'equazione (1.18).

La prima metodologia viene attribuita a Lagrange. Viene impiegata solamente in presenza di perturbazioni conservative. Prevede di esprimere il termine \mathbf{a}_p mediante il gradiente di una funzione potenziale Φ , attraverso la relazione (1.7).

La seconda metodologia viene attribuita a Gauss. A differenza del caso precedente, può venire impiegata indipendentemente sia nel caso di perturbazioni conservative sia nel caso di perturbazioni non conservative. Il termine \mathbf{a}_p viene direttamente espresso in termini di accelerazione perturbativa. Indipendentemente dalla formulazione presentata, l'equazione (1.18) può essere ricondotta in una forma del tipo (1.9) al fine di esprimere esplicitamente la variazione temporale dei parametri che descrivono l'orbita.

1.3.3 Semianalytical techniques

La *semianalytical techniques* rappresenta una combinazione tra l'approccio numerico e quello analitico al fine di ottenere risultati accurati con un costo computazionale non troppo elevato. Punto fondamentale di tale metodologia consiste nel separare il contributo dovuto agli effetti periodici di breve periodo da quello dovuto agli effetti secolari e periodici di lungo periodo.

Le equazioni del moto, in una formulazione espressa mediante la (1.9), vengono dapprima integrate numericamente comprendendo esclusivamente gli effetti secolari e periodici di lungo periodo. Tale fatto permette di adoperare un *time step* di integrazione maggiore, riducendo così il costo computazionale richiesto ed ottenendo una variazione temporale dei parametri orbitali medi. Gli effetti di breve periodo vengono in secondo luogo valutati in maniera analitica attraverso un'espansione in serie e successivamente sovrapposti al moto medio precedentemente ottenuto. Il generico parametro orbitale c risulterà espresso nella maniera seguente:

$$c(t) = c_{mean}(t) + \delta c \quad (1.19)$$

dove:

- c_{mean} : rappresenta il valore medio associato agli effetti secolari e periodici di lungo periodo
- δc : rappresenta il valore associato agli effetti periodici di breve periodo

La tecnica precedentemente descritta assume la denominazione di *averaging* e rappresenta un buon *trade off* tra i livelli di accuratezza ottenuti ed il costo computazionale richiesto.

CAPITOLO 2

PERTURBAZIONI ORBITALI

Come descritto precedentemente all'interno del Capitolo 1, la complessità di un modello di propagazione orbitale dipende dal numero di perturbazioni tenute in considerazione. Nel seguito verranno descritti quei contributi che effettivamente sono stati inclusi all'interno dell'equazione (1.5) a costituire il termine a_p . Più nello specifico, verranno presentate:

- perturbazione dovuta alla non sfericità del campo gravitazionale terrestre
- perturbazione dovuta all'attrito atmosferico
- perturbazione dovuta alla pressione di radiazione solare

2.1 Campo gravitazionale terrestre

La Terra, a differenza di quanto generalmente viene assunto in maniera semplificativa, non presenta una forma sferica perfetta, dal momento che vi è una lieve differenza tra il raggio equatoriale e quello polare pari a circa 20 km [2]. Data questa discrepanza, un modello ad ellissoide è più consono ad una rappresentazione, seppur sempre approssimata, dell'effettiva forma della Terra.

In generale un ellissoide presenta tre assi differenti (a, b, c), come riportato in figura 2.1.

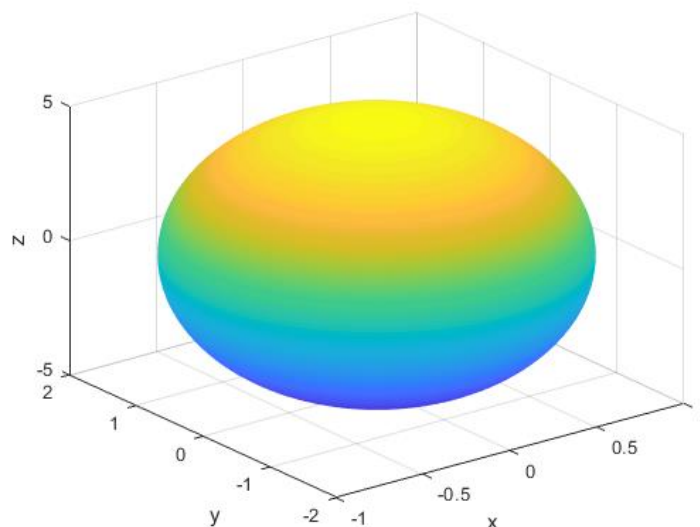


Figura 2.1 Ellissoide con assi rispettivamente di valori $a=1$, $b=2$, $c=3$

Caso particolare è rappresentato dagli ellissoidi di rivoluzione (sferoidi), che presentano due assi uguali. Si possono identificare due differenti tipologie:

- sferoide oblato (a, a, b): ottenuto dalla rotazione di un'ellisse attorno all'asse minore a
- sferoide prolato (a, b, b): ottenuto dalla rotazione di un'ellisse attorno all'asse maggiore b

La Terra può essere discretamente rappresentata da uno sferoide oblato (a, a, b) in cui il semiasse minore è pari al raggio polare terrestre mentre il semiasse maggiore è pari al raggio equatoriale terrestre. Tale rappresentazione tuttavia rimane pur sempre un'approssimazione della reale forma della Terra.

Una corretta rappresentazione della forma della Terra, così come la distribuzione di massa all'interno di questa, rappresenta una prerogativa essenziale per poter considerare l'effettiva influenza che il campo gravitazionale terrestre esercita sul moto di un satellite in orbita attorno alla Terra.

Come precedentemente riportato, il contributo di accelerazione dovuto al campo gravitazionale viene classificato come conservativo e risulta dunque esprimibile mediante una funzione potenziale U attraverso l'equazione (1.7). Risulta dunque necessario dover definire la funzione potenziale gravitazionale U .

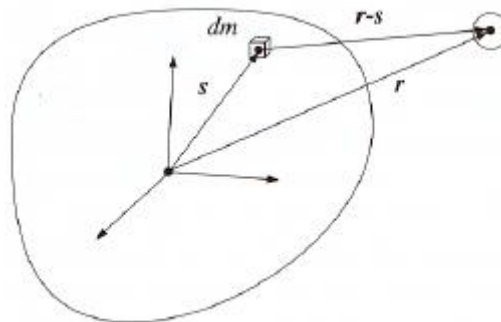


Figura 2.2 Rappresentazione schematica della posizione relativa tra elemento generico di massa e punto di interesse [12]

Data la distribuzione di massa del corpo considerato (nel caso in esame la Terra), la funzione potenziale gravitazionale è esprimibile come somma di tutti i contributi dovuti alle singole masse infinitesime. Dal punto di vista analitico:

$$U = \int dU = G \int \frac{\rho(\mathbf{s})}{|\mathbf{r} - \mathbf{s}|} d^3s \quad (2.1)$$

dove:

- U : rappresenta la funzione potenziale gravitazionale
- dU : rappresenta il contributo infinitesimo alla funzione potenziale gravitazionale
- G : rappresenta la costante di gravitazione universale

- $\rho(\mathbf{s})$: rappresenta la densità
- \mathbf{s} : rappresenta il vettore posizione in cui è presente l'elemento di massa infinitesimo
- \mathbf{r} : rappresenta il vettore posizione in cui si intende valutare la funzione potenziale gravitazionale

Applicando il teorema di Carnot per esprimere la distanza $|\mathbf{r} - \mathbf{s}|$:

$$U = G \int \frac{\rho(\mathbf{s})}{\sqrt{r^2 + s^2 - 2rs \cos \gamma}} d^3s \quad (2.2)$$

dove:

- r : rappresenta il modulo del vettore \mathbf{r}
- s : rappresenta il modulo del vettore \mathbf{s}
- γ : rappresenta l'angolo compreso tra i vettori \mathbf{r} ed \mathbf{s}

Al fine di valutare l'integrale definito dall'equazione (2.2), risulta più comodo esprimere l'inverso della distanza $|\mathbf{r} - \mathbf{s}|$ attraverso un'espansione in serie di polinomi di Legendre.

$$\frac{1}{|\mathbf{r} - \mathbf{s}|} = \frac{1}{r} \sum_{n=0}^{\infty} \left(\frac{s}{r}\right)^n P_n(\cos \gamma) \quad (2.3)$$

dove $P_n(\cos \gamma)$ rappresenta il polinomio di Legendre di ordine n ed argomento $\cos \gamma$. Più in generale, il polinomio di Legendre di grado n con argomento x è definito come:

$$P_n(x) = \frac{1}{2^n n!} \frac{d^n}{dx^n} (x^2 - 1)^n \quad (2.4)$$

Sostituendo l'equazione (2.3) all'interno della (2.1) si ottiene:

$$U = \frac{G}{r} \int \left(\sum_{n=0}^{\infty} \left(\frac{s}{r}\right)^n P_n(\cos \gamma) \right) \rho(\mathbf{s}) d^3s \quad (2.5)$$

Si esprimano i vettori \mathbf{r} ed \mathbf{s} mediante coordinate sferiche:

$$\mathbf{r} = \begin{pmatrix} r \cos \varphi \cos \lambda \\ r \cos \varphi \sin \lambda \\ r \sin \varphi \end{pmatrix} \quad (2.6a)$$

$$\mathbf{s} = \begin{pmatrix} s \cos \varphi' \cos \lambda' \\ s \cos \varphi' \sin \lambda' \\ s \sin \varphi' \end{pmatrix} \quad (2.6b)$$

dove:

- φ : rappresenta la latitudine geocentrica del punto individuato dal vettore \mathbf{r}
- λ : rappresenta la longitudine del punto individuato dal vettore \mathbf{r}
- φ' : rappresenta la latitudine geocentrica del punto individuato dal vettore \mathbf{s}
- λ' : rappresenta la longitudine del punto individuato dal vettore \mathbf{s}

Applicando la legge dei coseni della trigonometria sferica, l'angolo γ tra i vettori \mathbf{r} e \mathbf{s} può essere espresso in funzione delle coordinate sferiche appena introdotte.

$$\cos \gamma = \sin \varphi' \sin \varphi + \cos \varphi' \cos \varphi \cos(\lambda' - \lambda) \quad (2.7)$$

Tenendo in considerazione il risultato appena ottenuto, attraverso il teorema di addizione delle armoniche sferiche (altresì denominato formula di decomposizione) [2] [21] è possibile esprimere il generico polinomio di Legendre di grado n ed argomento $\cos \gamma$ presente all'interno dell'equazione (2.5) nella maniera seguente:

$$P_n(\cos \gamma) = \sum_{m=0}^n (2 - \delta_{0m}) \frac{(n-m)!}{(n+m)!} P_{nm}(\sin \varphi) P_{nm}(\sin \varphi') \cos(m(\lambda - \lambda')) \quad (2.8)$$

dove:

- δ_{0m} : rappresenta il delta di Kronecker
- P_n : rappresenta il polinomio di Legendre di grado n
- P_{nm} : rappresenta il polinomio associato di Legendre di grado n ed ordine m

Più in generale, il polinomio associato di Legendre di grado n ed ordine m con argomento x è definito come:

$$P_{nm}(x) = (1 - x^2)^{m/2} \frac{d^m}{dx^m} P_n(x) \quad (2.9)$$

dove:

- P_n : rappresenta il polinomio di Legendre di grado n
- P_{nm} : rappresenta il polinomio associato di Legendre di grado n ed ordine m

Con i risultati ottenuti risulta ora possibile esprimere la funzione potenziale gravitazionale attraverso un'espansione in serie di armoniche sferiche.

L'equazione (2.5) assume la seguente formulazione:

$$U = \frac{\mu}{r} \sum_{n=0}^{\infty} \sum_{m=0}^n \left(\frac{R_E}{r}\right)^n P_{nm}(\sin \varphi) (C_{nm} \cos(m\lambda) + S_{nm} \sin(m\lambda)) \quad (2.10)$$

in cui i coefficienti gravitazionali C_{nm} e S_{nm} sono definiti rispettivamente:

$$C_{nm} = \frac{2 - \delta_{0m} (n - m)!}{M_E (n + m)!} \int \left(\frac{s}{R_E}\right)^n P_{nm}(\sin \varphi') \cos(m\lambda') \rho(\mathbf{s}) d^3s \quad (2.11a)$$

$$S_{nm} = \frac{2 - \delta_{0m} (n - m)!}{M_E (n + m)!} \int \left(\frac{s}{R_E}\right)^n P_{nm}(\sin \varphi') \sin(m\lambda') \rho(\mathbf{s}) d^3s \quad (2.11b)$$

e dove:

- μ : rappresenta la costante gravitazionale terrestre
- R_E : rappresenta il raggio equatoriale medio terrestre
- M_E : rappresenta la massa della Terra

Dal momento che non si è a conoscenza della corretta distribuzione della massa interna della Terra, la funzione $\rho(\mathbf{s})$ non è precisamente definita. Non risulta dunque possibile valutare i coefficienti gravitazionali C_{nm} e S_{nm} direttamente attraverso le definizioni soprariportate. Tuttavia, l'impiego di misure ed osservazioni sperimentali del campo gravitazionale terrestre hanno permesso la determinazione di tali informazioni. Tra le tecniche impiegate è possibile citare [21] [12]:

- **tracking dei satelliti**: misura indiretta del campo gravitazionale terrestre attraverso l'osservazione del moto dei satelliti lungo la propria orbita. Tra le metodologie impiegate risultano degni di nota i sistemi RADAR (DORIS e PRARE), i sistemi di *satellite laser ranging* (SLR) e l'impiego di tecniche di *satellite to satellite tracking* (missione GRACE)
- **gravimetria superficiale**: misura del campo gravitazionale terrestre alla superficie attraverso l'impiego di un gravimetro. Nonostante l'elevata accuratezza delle misure, questa metodologia fornisce solamente una mappatura locale
- **gradiometria da satellite**: misura diretta ad elevata risoluzione ed accuratezza del campo gravitazionale terrestre attraverso l'impiego di un gradiometro (missione GOCE)

Ritornando all'equazione (2.10), i risultati ottenuti rappresentano la funzione potenziale gravitazionale terrestre a seguito di una distribuzione irregolare di massa. Esistono inoltre formulazioni alternative per esprimerla che, nonostante siano leggermente più estese, permettono di trarre utili conclusioni.

La prima formulazione alternativa è rappresentata dall'equazione (2.12):

$$U = \frac{\mu}{r} \left(1 + \sum_{n=2}^{\infty} \sum_{m=0}^n \left(\frac{R_E}{r} \right)^n P_{nm}(\sin \varphi) (C_{nm} \cos(m\lambda) + S_{nm} \sin(m\lambda)) \right) \quad (2.12)$$

in cui vengono messi in evidenza al primo termine il contributo dovuto alla parte sferica della funzione potenziale gravitazionale mentre al secondo termine il contributo dovuto alla parte asferica della funzione potenziale gravitazionale.

La seconda formulazione alternativa è rappresentata dall'equazione (2.13):

$$U = \frac{\mu}{r} \left(1 - \sum_{n=2}^{\infty} \left(\frac{R_E}{r} \right)^n J_n P_{n0}(\sin \varphi) + \sum_{n=2}^{\infty} \sum_{m=1}^n \left(\frac{R_E}{r} \right)^n P_{nm}(\sin \varphi) (C_{nm} \cos(m\lambda) + S_{nm} \sin(m\lambda)) \right) \quad (2.13)$$

in cui il contributo dovuto alla parte asferica della funzione potenziale gravitazionale associato alle armoniche di grado superiore viene suddiviso nelle tre differenti tipologie:

- armoniche zonali
- armoniche settoriali
- armoniche tesserali

La prima tipologia di armoniche presenta ordine $m=0$ ed è definita dal secondo termine all'interno della parentesi dell'equazione (2.13), dove:

$$J_n = -C_{n0} \quad (2.14)$$

rappresenta il coefficiente gravitazionale zonale di grado n .

Dal momento che viene meno la dipendenza dalla longitudine λ , le armoniche zonali presentano una simmetria cilindrica (altrimenti definita a banda) rispetto all'asse di rotazione terrestre.

Data la generica armonica zonale di grado n , si vengono a identificare:

- n linee circolari in latitudine (paralleli) in cui il termine P_{n0} risulta nullo
- $(n+1)$ bande in latitudine

La concentrazione di massa alternativamente cambia segno nel passaggio da una banda all'altra, come viene riportato a titolo di esempio in figura 2.3.

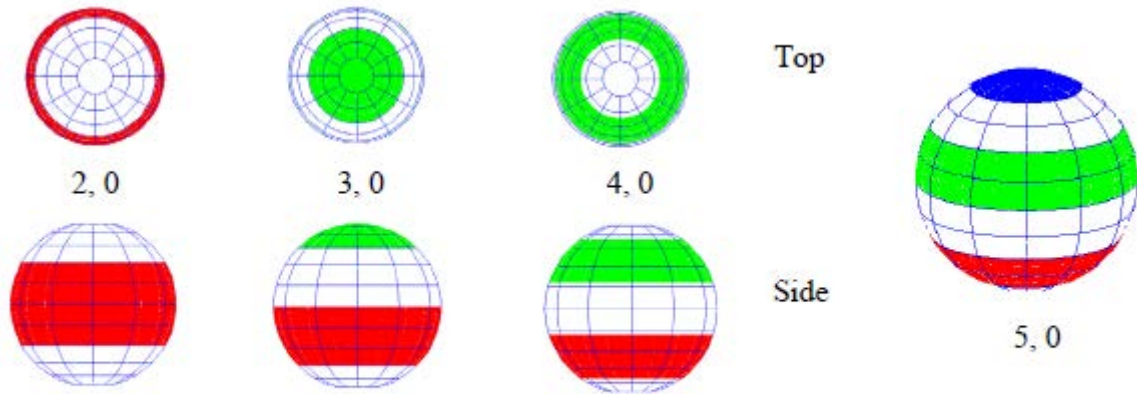


Figura 2.3 Esempio di armoniche zonali [2]

La seconda tipologia di armoniche è definita dal terzo termine all'interno della parentesi dell'equazione (2.13) nel caso in cui venga soddisfatta la condizione di uguaglianza tra grado n ed ordine m . A differenza della tipologia precedentemente descritta, le armoniche settoriali presentano una dipendenza sia dalla longitudine λ che dalla latitudine φ .

Data la generica armonica settoriale di grado n ed ordine $m = n$, si vengono a identificare:

- $2n$ linee meridiane in longitudine in cui il termine $(C_{nn} \cos(n\lambda) + S_{nn} \sin(n\lambda))$ risulta nullo
- $2n$ bande in longitudine con configurazione a forma di spicchi

La concentrazione di massa alternativamente cambia segno nel passaggio da una banda all'altra, come viene riportato a titolo di esempio in figura 2.4.

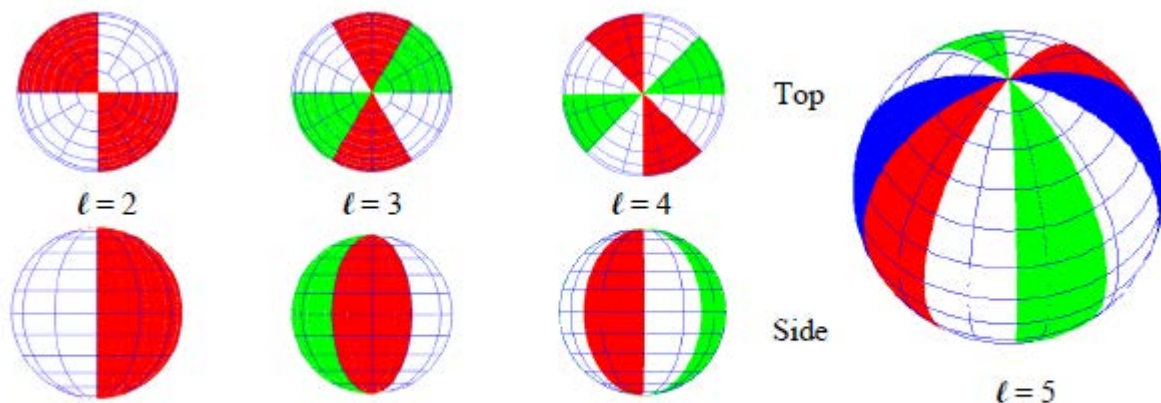


Figura 2.4 Esempio di armoniche settoriali [2]

La terza tipologia di armoniche è definita dal terzo termine all'interno della parentesi dell'equazione (2.13) nel caso in cui venga soddisfatta la condizione di disuguaglianza tra grado n ed ordine m . Come le armoniche settoriali, le armoniche tesserali presentano una dipendenza sia dalla longitudine λ che dalla latitudine φ .

Data la generica armonica tesserale di grado n ed ordine $m \neq n$, si vengono a identificare:

- $(l-m)$ linee circolari in latitudine (paralleli) in cui il termine P_{nm} risulta nullo
- $2m$ linee meridiane in longitudine in cui il termine $(C_{nm} \cos(m\lambda) + S_{nm} \sin(m\lambda))$ risulta nullo
- $2m(l-m+1)$ tessere con configurazione a forma di scacchiera

La concentrazione di massa alternativamente cambia segno nel passaggio da una tessera all'altra, come viene riportato a titolo di esempio in figura 2.5.

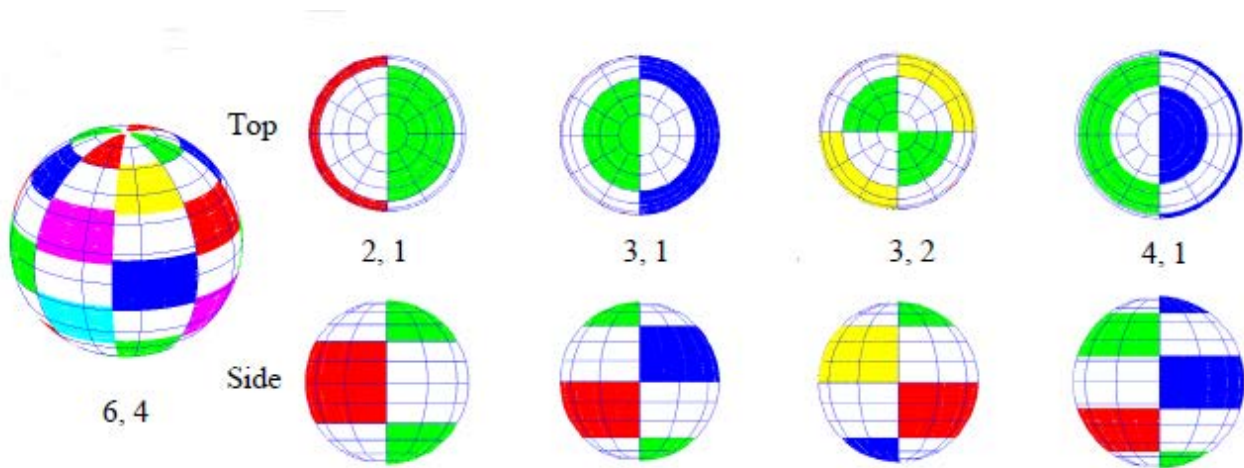


Figura 2.5 Esempio di armoniche tesserali [2]

Con i risultati evidenziati dalle equazioni (2.10), (2.12) oppure (2.13) risulta ora possibile esprimere il contributo di accelerazione di perturbazione orbitale dovuto alla non sfericità del campo gravitazionale terrestre. Per eseguire ciò, tuttavia, risulta necessario riscrivere la funzione potenziale gravitazionale nella maniera seguente

$$U = U_{2-body} + U_{aspherical} \tag{2.15}$$

in cui vengono differenziati tra loro:

- il contributo dovuto alla parte sferica della funzione potenziale gravitazionale U_{2-body}
- il contributo dovuto alla parte asferica della funzione potenziale gravitazionale $U_{aspherical}$

Ricordando la relazione che sussiste tra accelerazione e funzione potenziale (equazione (1.7)), il contributo di accelerazione di perturbazione orbitale dovuto alla non sfericità del campo gravitazionale terrestre risulta essere pari a

$$\mathbf{a}_{aspherical} = \nabla U_{aspherical} = \nabla(U - U_{2-body}) = \nabla\left(U - \frac{\mu}{r}\right) \quad (2.16)$$

dove il contributo dovuto alla parte sferica del potenziale gravitazionale terrestre rappresenta effettivamente l'accelerazione subita dal satellite nel problema kepleriano dei due corpi.

2.2 Attrito atmosferico

L'attrito atmosferico rappresenta, assieme alla non sfericità del campo gravitazionale terrestre, uno dei fattori più influenti sull'orbita di un satellite LEO. Tuttavia, a differenza di quest'ultima, l'attrito atmosferico è una perturbazione non conservativa e dunque non sussiste una relazione simile alla (1.7) che coinvolga una funzione potenziale.

Il contributo di accelerazione perturbativa dovuto all'attrito atmosferico viene espresso attraverso la relazione seguente.

$$\mathbf{a}_{drag} = -\frac{1}{2} \frac{C_D A_{drag}}{m} \rho v_{rel}^2 \frac{\mathbf{v}_{rel}}{|\mathbf{v}_{rel}|} \quad (2.17)$$

dove:

- C_D : rappresenta il coefficiente di attrito aerodinamico
- A_{drag} : rappresenta l'area effettiva esposta normale al flusso aerodinamico (*cross section*)
- m : rappresenta la massa del satellite
- ρ : rappresenta la densità dell'atmosfera
- v_{rel} : rappresenta la velocità relativa del satellite rispetto all'atmosfera

Risulta evidente come il contributo di accelerazione perturbativa dovuto all'attrito atmosferico sia opposto al vettore velocità relativa \mathbf{v}_{rel} del satellite rispetto all'atmosfera.

Nonostante la relativa semplicità presentata dall'equazione (2.17), non poche difficoltà sorgono nella valutazione dei singoli parametri che la costituiscono.

Si consideri C_D .

Il coefficiente di attrito aerodinamico è un parametro adimensionale che fornisce un'indicazione di quanto il satellite sia influenzato dall'attrito aerodinamico. Non risulta semplicemente valutabile in quanto dipende da un insieme di differenti fattori, tra cui:

- interazione tra materiale costituente la superficie esterna del satellite e particelle dell'atmosfera
- configurazione del satellite
- condizione di assetto del satellite (stabilizzato, spinnante, tombolante)

Valori tipici ricadono all'interno dell'intervallo di estremi 2.0 e 2.3. Un valore pari a 2.2 viene generalmente assunto per considerazioni di natura conservativa [21] [22].

Si consideri A_{drag} .

Come per il parametro precedente, una precisa valutazione della *cross section* richiederebbe la conoscenza della corretta condizione di assetto del satellite.

Si consideri m .

In generale la massa del satellite può essere ritenuta costante. Sussistono tuttavia casi in cui tale assunzione non può venire mantenuta. Per esempio nell'eventualità di manovre di rientro in bassa atmosfera, per cui si potrebbe avere variazione di massa a seguito della possibile perdita di parti del satellite, oppure nell'eventualità di manovre orbitali, per cui si potrebbe avere variazione di massa a seguito del consumo di propellente [2].

Si consideri v_{rel} .

Per una corretta determinazione di tale parametro sarebbe necessario tenere in considerazione il moto dell'atmosfera, costituito da:

- un moto medio dovuto alla rotazione terrestre
- un moto sovrapposto al moto medio dovuto alle correnti

Trascurando questo secondo contributo, assumendo dunque che l'atmosfera ruoti insieme alla Terra, il vettore velocità relativa può essere espresso nella maniera seguente.

$$\mathbf{v}_{rel} = \mathbf{v} - \mathbf{w}_E \wedge \mathbf{r} \quad (2.18)$$

dove:

- \mathbf{v} : rappresenta il vettore velocità inerziale del satellite
- \mathbf{w}_E : rappresenta il vettore velocità angolare terrestre
- \mathbf{r} : rappresenta il vettore posizione inerziale del satellite

Si consideri ρ .

La densità atmosferica rappresenta uno degli aspetti più critici nella valutazione del contributo perturbativo di accelerazione dovuto all'attrito aerodinamico. Continue variazioni sono dovute alla

forte dipendenza che la densità atmosferica presenta nei confronti dell'attività solare.

Nel corso degli anni sono stati generati numerosi modelli che presentassero differenti livelli di accuratezza, con conseguente implicazione sul costo computazionale, e diverse assunzioni in merito al considerare l'attività solare al fine di valutare la densità atmosferica alla posizione richiesta [2] [21].

Risulta dunque opportuno, prima di procedere con la presentazione del modello di densità impiegato, richiamare alcuni concetti riguardanti l'attività solare.

2.2.1 Attività solare

L'attività solare può venire suddivisa in due differenti categorie [12]:

- attività solare di lungo periodo
- attività solare di breve periodo

Si consideri la prima categoria [24].

L'attività solare di lungo periodo presenta un andamento ciclico che si ripete all'incirca ogni 11 anni, alternando tra loro periodi di massima attività solare (*solar maximum*), in cui il flusso di radiazioni solari risulta superiore alla media, e periodi di minima attività solare (*solar minimum*), in cui il flusso di radiazioni solari risulta inferiore alla media

Il principale responsabile che determina questo contributo è rappresentato dal flusso solare associato alle radiazioni EUV (*Extreme Ultra-Violet radiation*) F_{EUV} che hanno origine nella parte superiore della cromosfera e nella parte inferiore della corona solare. La misura dell'effettiva quantità che impatta sull'ambiente spaziale che circonda la Terra risulta tuttavia difficilmente valutabile, in quanto l'atmosfera non permette la trasmissione della radiazione EUV ed inoltre è presente un numero limitato di sistemi spaziali con strumentazione dedicata a tale scopo (missione SOHO [30]). In alternativa sono presenti due differenti indicatori dell'attività solare di lungo periodo tra loro strettamente correlati che possono sopperire alla difficoltà precedentemente presentata, ossia:

- numero di macchie solari
- indice $F_{10.7}$

Le macchie solari sono delle aree scure della fotosfera, più dense e meno calde rispetto alla zona a loro circostante, caratterizzate da un'elevata attività magnetica.

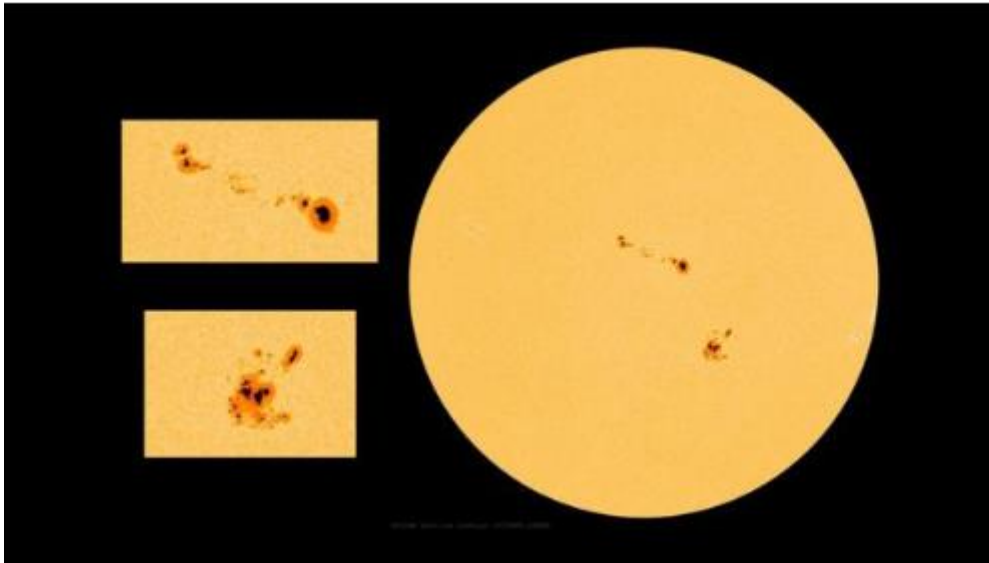


Figura 2.6 Visione delle macchie solari [24]

La figura precedentemente riportata permette di trarre alcune considerazioni.

Innanzitutto si noti la variabilità in termini di forma e dimensione. Inoltre, all'aumentare di quest'ultima, è possibile individuare la presenza di due differenti zone all'interno della macchia solare:

- una zona più scura definita *umbrae*
- una zona limitrofa alla precedente e meno scura definita *penumbrae*

Risulta infine evidente come le macchie solari possano originarsi in maniera isolata oppure organizzarsi in gruppi di differente fisionomia.

Alle macchie solari che risultano effettivamente osservabili, classificate in base a dimensioni e complessità, viene associato un codice identificativo di 4 cifre *NOAA/SWPC* per poterne tenere traccia nel corso del ciclo. Il numero totale di macchie che risulta essere visibile sulla superficie del Sole, riportato quotidianamente e mensilmente da parte del *World Data Center-Sunspot Index and Long-term Solar Observations (WDC-SILSO)* del *Royal Observatory* in Belgio, viene ottenuto attraverso la classificazione di Zurigo [24] [25], in cui:

- ogni gruppo contribuisce con un fattore moltiplicativo pari a 10
- ogni *umbrae* contribuisce con un fattore moltiplicativo pari a 1

Trascrivendo in forma analitica quanto presentato:

$$Z = k(10g + s) \quad (2.19)$$

dove:

- Z : rappresenta il numero totale di macchie solari
- k : rappresenta un fattore correttivo dipendente dalla posizione dell'osservazione e dalla strumentazione impiegata
- g : rappresenta il numero di gruppi di macchie solari
- s : rappresenta il numero delle singole zone *umbrae*

Viene riportato in figura 2.7 l'andamento del numero di macchie solari Z per quanto riguarda il ciclo solare attualmente in corso. Oltre ai valori mensili sperimentalmente osservati è inoltre presente una breve previsione dei prossimi tre anni.

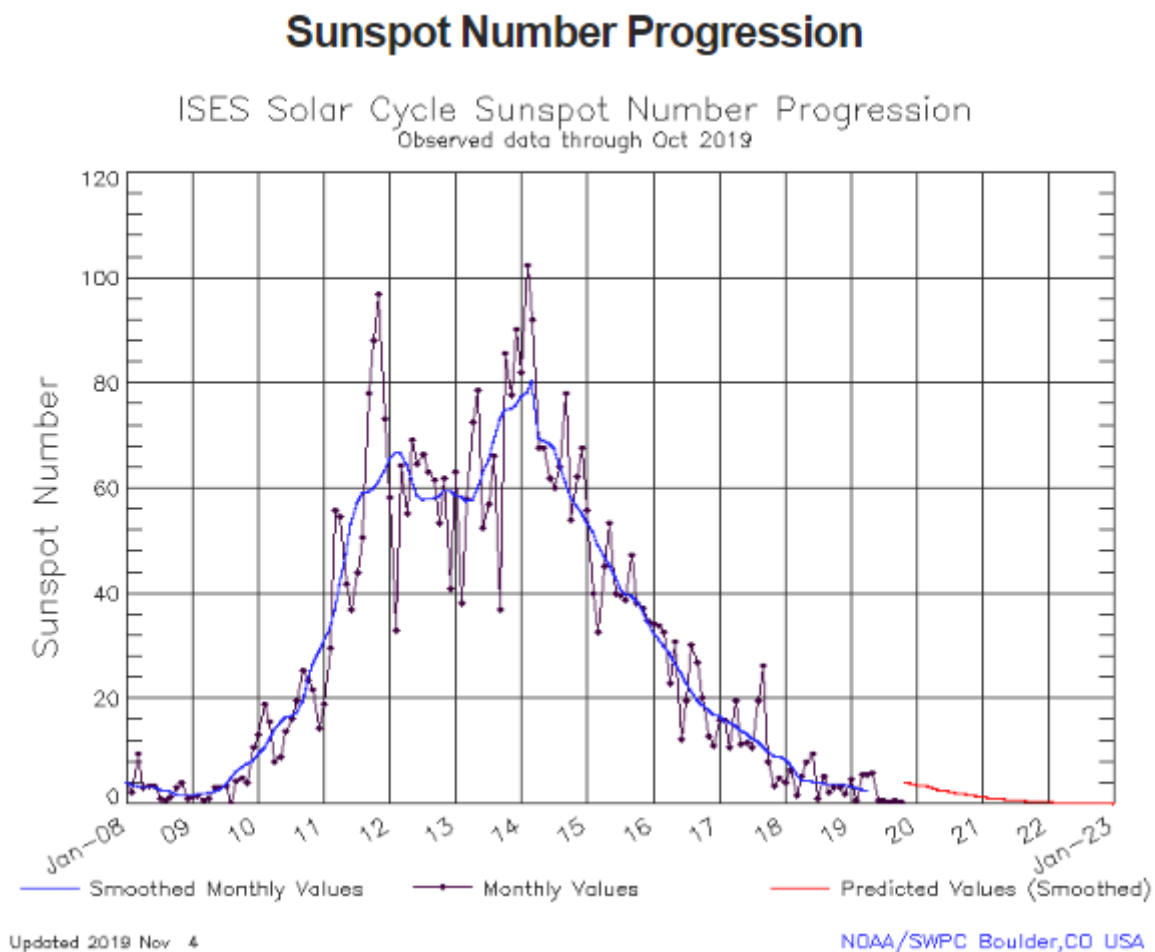


Figura 2.7 Andamento temporale del numero di macchie solari nel corso del ciclo attuale (ciclo 24) [24]

L'indice $F_{10.7}$ rappresenta l'emissione di radiazioni solari alla lunghezza d'onda di 10.7 cm e frequenza pari a 2800 Hz. Possono essere rilevate quotidianamente in quanto l'atmosfera terrestre permette la loro trasmissione in ogni condizione climatica. Le misure vengono generalmente riportate in *solar flux unit* (sfu).

$$1 \text{ sfu} = 10^{-22} \frac{W}{m^2 \text{ Hz}} \quad (2.20a)$$

$$1 \text{ sfu} = 10^4 \text{ Jy} \quad (2.20b)$$

dove il Jansky (Jy) rappresenta un'unità di misura non appartenente al sistema internazionale (SI). Le radiazioni $F_{10.7}$ hanno origine all'interno della parte superiore della cromosfera e della parte inferiore della corona solare, equivalentemente alle radiazioni EUV. La loro misura può dunque venire impiegata come indicatore dell'attività solare associato alle F_{EUV} .

Numerose misure sono state eseguite a partire dal 1947 in Canada attraverso l'impiego di strumentazioni dedicate e situate precisamente a [2] [21]:

- Algonquin Radio Observatory (ARO) in Ottawa
- Dominion Radio Astrophysical Observatory (DRAO) in Pentincton (British Columbia)

Valori di tali misure vengono inoltre forniti quotidianamente da parte di *National Oceanic and Atmospheric Administration* (NOAA) attraverso il *National Geophysical Data Center* in Boulder (Colorado) [24].

Viene riportato in figura 2.8 l'andamento dell'indice $F_{10.7}$ per quanto riguarda il ciclo solare attualmente in corso. Oltre ai valori mensili sperimentalmente osservati è inoltre presente una breve previsione dei prossimi tre anni.

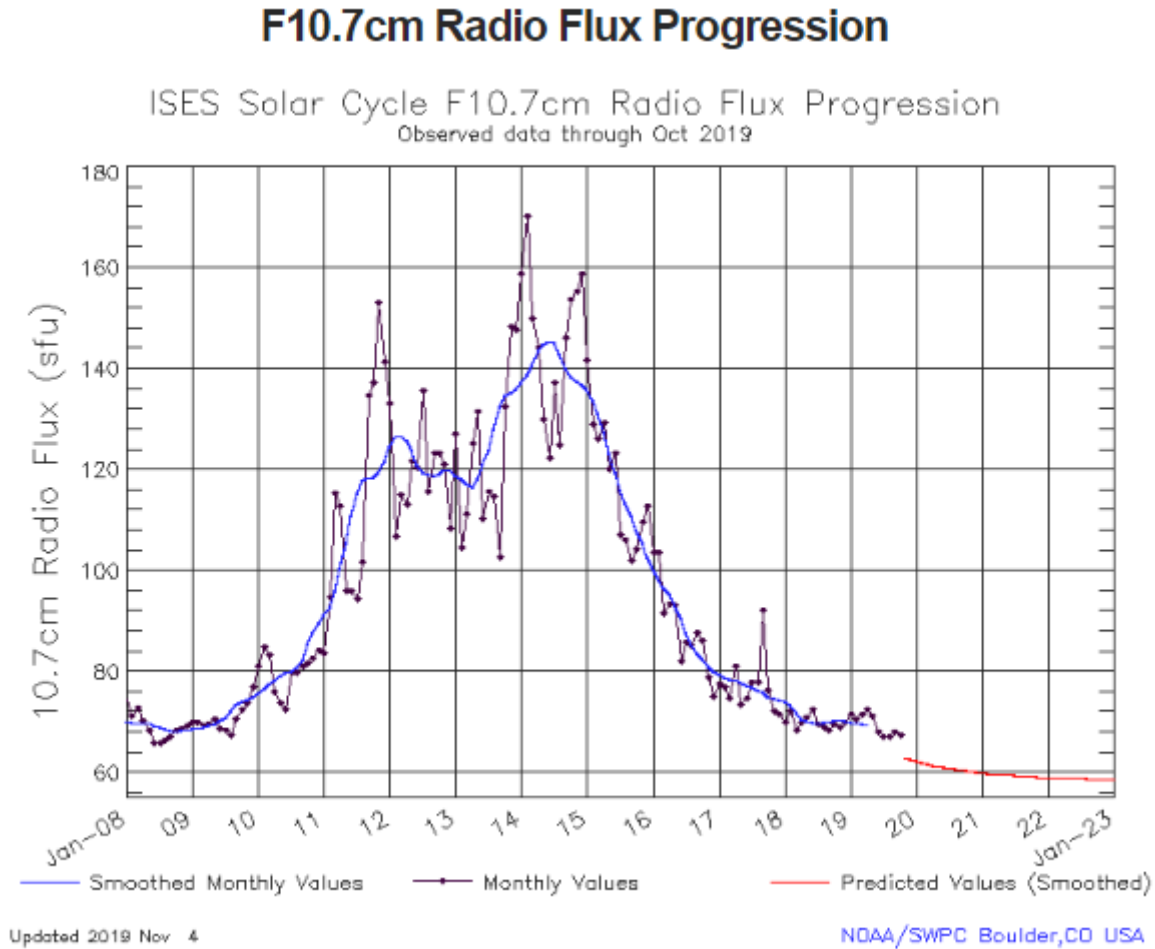


Figura 2.8 Andamento temporale dell'indice $F_{10.7}$ nel corso del ciclo solare attuale (ciclo 24) [24]

Si consideri la seconda categoria [24].

L'attività solare di breve periodo presenta una variabilità giornaliera. La causa principale di tale contributo è da attribuirsi alle tempeste geomagnetiche: variazioni nella magnetosfera terrestre dovute allo scambio energetico seguito all'interazione tra il vento solare e l'ambiente spaziale che circonda la Terra.

Il vento solare è costituito prevalentemente da un flusso di protoni ed elettroni allo stato di plasma. Differenti zone del Sole danno origine a vento solare con caratteristiche diverse in termini di densità e velocità. Tali variazioni, assieme alla direzione del campo magnetico associato al vento solare stesso, sono considerate il principale fattore di influenza dello scambio termico a cui si è accennato.

Tra le condizioni favorevoli alla generazione di tempeste geomagnetiche che è possibile citare:

- *coronal mass ejection* (CME): espulsione di elevate quantità di plasma dalla corona solare che tendono a raggiungere la Terra in un intervallo di tempo compreso tra le 15 ore e le 18 ore

- *high-speed solar wind stream* (HSS): flusso di vento solare emesso ad elevata velocità. L'interazione tra vento solare ad elevata velocità e quello a limitata velocità determina la formazione di una struttura spiraliforme caratterizzata dalle cosiddette *co-rotating interaction regions*, caratterizzate da elevata densità e campo magnetico intenso
- correnti nella magnetosfera terrestre: determinano variazioni magnetiche alla superficie e sono misurate attraverso l'impiego dell'indice *disturbance storm time* (DST)

Al fine di valutare il contributo dovuto all'attività solare di breve periodo, vengono impiegati due indici differenti:

- *geomagnetic planetary index* k_P
- *geomagnetic planetary amplitude* a_P

Il primo è definito come un indice quasi-logaritmico i cui valori, numeri interi, risultano compresi in un intervallo di estremi 0, a significare l'assenza di una tempesta geomagnetica, e 9, a significare la presenza di un'intensa tempesta geomagnetica.

Il secondo è definito come il corrispettivo lineare del primo. I valori che a_P può assumere risultano compresi in un intervallo di estremi 0, a significare l'assenza di una tempesta geomagnetica, e 400, a significare la presenza di un'intensa tempesta geomagnetica. Un valore giornaliero della *geomagnetic planetary amplitude* A_P viene ottenuto attraverso la media di otto valori consecutivi di a_P .

Entrambi gli indici k_P e a_P sono valutati attraverso una media di misure ottenute ogni tre ore da 13 differenti osservatori situati in zone diverse della superficie terrestre comprese in una banda di latitudine di estremi 40° N e 60° S [2] [21] [24]. La relazione che sussiste tra i valori dei due differenti indici viene evidenziata attraverso la figura 2.9.

$k_P = 0_0$	0_+	1_-	1_0	1_+	2_-	2_0	2_+	3_-	3_0	3_+	4_-	4_0	4_+
$a_P = 0$	2	3	4	5	6	7	9	12	15	18	22	27	32
$k_P = 5_-$	5_0	5_+	6_-	6_0	6_+	7_-	7_0	7_+	8_-	8_0	8_+	9_-	9_0
$a_P = 39$	48	56	67	80	94	111	132	154	179	207	236	300	400

Figura 2.9 Relazione tra i valori dell'indice k_p ed i valori dell'indice a_p [24]

Viene riportato in figura 2.10 l'andamento della *daily geomagnetic planetary amplitude* A_P per quanto riguarda il ciclo solare attualmente in corso.

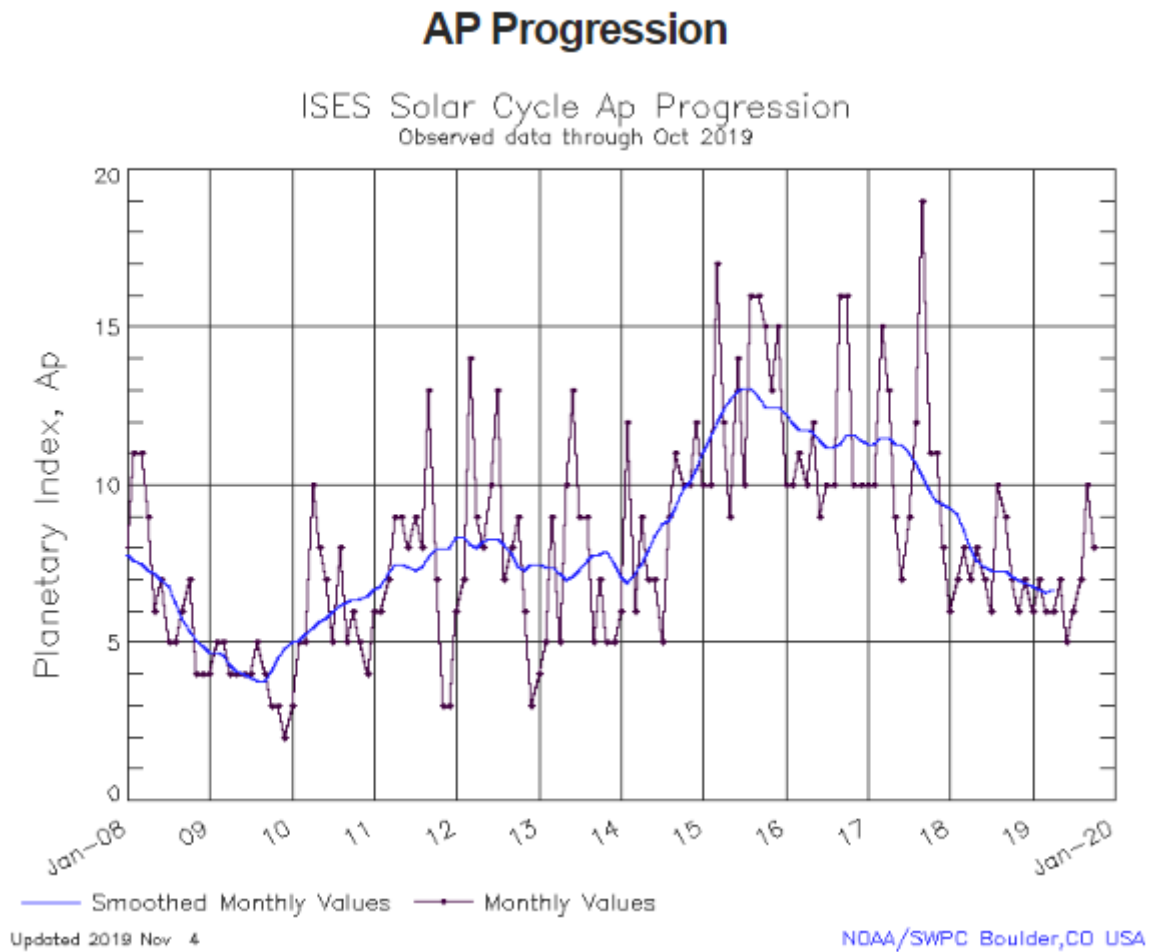


Figura 2.10 Andamento temporale dell'indice A_p nel corso del ciclo solare attuale (ciclo 24) [24]

Si noti come l'attività solare di breve periodo risulti relativamente ridotta per quanto riguarda il ciclo solare attualmente in corso.

2.2.2 Modello di densità atmosferica

La densità atmosferica rappresenta uno degli aspetti più critici da valutare con adeguata precisione. Al fine di comprendere con maggior chiarezza tale affermazione si consideri la legge di stato dei gas perfetti.

$$\rho = \frac{p_0 M}{g_0 R T} \quad (2.21)$$

dove:

- ρ : rappresenta la densità
- p_0 : rappresenta la pressione assoluta
- M : rappresenta la massa molecolare media dei costituenti l'atmosfera
- g_0 : rappresenta la costante di accelerazione gravitazionale

- R : rappresenta la costante universale dei gas
- T : rappresenta la temperatura assoluta

Nonostante la formulazione dell'equazione (2.21) risulti relativamente semplice, l'elevata variabilità della composizione dell'atmosfera, inglobata all'interno del parametro M , così come quella del profilo di temperatura T vanno ad inficiare su una precisa determinazione del valore della densità ρ . Tra i fattori che presentano una maggiore influenza su tali variabilità si possono elencare [2]:

- posizione considerata: data la non perfetta simmetria sferica della superficie terrestre, il passaggio al di sopra di differenti zone di longitudine e latitudine determina una variazione della quota, con conseguente variazione di densità
- variazioni giornaliere: a seguito della rotazione terrestre, differenti parti dell'atmosfera vengono esposte in direzione del Sole in tempi diversi. Tale fatto determina una variazione continua della densità, con una zona di massimo situata all'incirca al meridiano identificato dall'ora locale 2 P.M. ed una zona di minimo situata all'incirca al meridiano identificato dall'ora locale 4 A.M.
- attività solare: influisce principalmente sul profilo di temperatura. Condizioni di intensa attività solare favoriscono lo scambio di energia con l'atmosfera, riscaldandola. Tale fenomeno risulta in un'espansione degli strati inferiori con conseguente aumento di densità per una data quota
- condizioni climatiche: la presenza del vento atmosferico determina principalmente variazioni nel profilo di temperatura, con conseguenti variazioni nella densità. Tale contributo risulta tuttavia difficilmente valutabile

Nel corso degli anni sono stati generati numerosi modelli di densità che presentano differenti caratteristiche in termini di complessità ed accuratezza, con conseguente incidenza sul costo computazionale richiesto. Tipiche differenze tra i valori di densità calcolati mediante vari modelli risultano nell'ordine del 20% per un'altitudine di circa 300 km, ma che possono aumentare nel caso di altitudini maggiori [2] [21]. Tra i modelli maggiormente conosciuti è possibile citare:

- modello esponenziale: modello statico che prevede una riduzione di natura esponenziale della densità all'incremento della quota
- modello Harris-Priester: modello prevalentemente statico basato sulla risoluzione dell'equazione di scambio termico conduttivo in condizioni quasi-idrostatiche. Pur essendo un modello statico, diverse condizioni di attività solare sono tenute in considerazione attraverso l'impiego di differenti valori tabulati

- modello Jacchia: modello tempo-variante basato sulla determinazione della densità attraverso l'integrazione dell'equazione barometrica (per quote comprese tra 90 km e 100 km) oppure dell'equazione di diffusione (per quote superiori a 100 km) a seguito della valutazione della temperatura exosferica T_{∞} , attraverso relazioni analitiche dipendenti dalle condizioni di attività solare, e dell'assunzione di un certo profilo di temperatura
- modello MSIS (*Mass Spectrometer and Incoherent Scatterometer*): modello tempo-variante basato su misure *in situ* oppure ottenute mediante scatterometria laser

Le diverse tipologie descritte presentano differenti prestazioni, tuttavia non risulta che un modello sia migliore rispetto ad un altro in ogni condizione di utilizzo: modelli statici permettono di ottenere risultati in un tempo relativamente ridotto a discapito dell'accuratezza mentre modelli tempo-varianti permettono di ottenere risultati maggiormente accurati che tuttavia richiedono un costo computazionale più elevato. Un *trade off* tra i livelli di accuratezza richiesti ed il costo computazionale concesso deve essere eseguito in funzione dei requisiti ricercati:

Nel caso del lavoro svolto si è optato per la scelta del modello *Jacchia-Bowman 2008 (JB2008)*, una revisione dell'omonima versione precedente del 2006 (*JB2006*) [26]. Modello empirico basato sulle equazioni di diffusione del modello Jacchia, il *JB2008* presenta l'introduzione di [27]:

- nuove equazioni per la determinazione della temperatura exosferica
- nuove equazioni per la valutazione del contributo fornito dalle variazioni stagionali/semiannuali
- nuovi indici impiegati per la rappresentazione dell'attività solare di lungo e breve periodo

L'ultimo punto risulta particolarmente importante. In totale sono stati introdotti sei differenti indici: quattro definiti *solar index* e due definiti *geomagnetic index* [28] [29].

I *solar index*, rappresentativi dell'attività solare di lungo periodo dovuta al flusso di radiazioni emesse, sono stati introdotti per poter distinguere i contributi associati alle diverse tipologie di radiazioni all'interno dello spettro: radiazione EUV (*Extreme Ultra Violet*), radiazione FUV (*Far Ultra Violet*), radiazione MUV (*Mid Ultra Violet*), raggi X e radiazioni *Lyman- α* .

Gli indici introdotti presentano la seguente descrizione:

- $F_{10.7}$: rappresentativo del flusso di radiazioni caratterizzate da una lunghezza d'onda pari a 10.7 nm. Come precedentemente descritto, data la stretta correlazione con le radiazioni EUV costituiscono un ottimo candidato per la loro rappresentazione
- $S_{10.7}$: rappresentativo del flusso di radiazioni caratterizzate da una lunghezza d'onda che rientra nell'intervallo di estremi 26 nm e 34 nm. Vengono valutate attraverso l'impiego del

Solar Extreme-ultraviolet Monitor (SEM) presente su SOHO (*Solar and Heliospheric Observatory*), satellite finalizzato all'osservazione del Sole ottenuto da una missione congiunta tra NASA ed ESA [30]

- $M_{10.7}$: rappresentativo del flusso di radiazioni caratterizzate da una lunghezza d'onda che rientra in un intorno di 280 nm. Vengono valutate attraverso l'impiego del *Solar Backscatter Ultraviolet spectrometer* (SBUV), strumento residente sui satelliti della serie NOAA [31] finalizzato, in primo luogo, al monitorare la quantità di ozono negli strati inferiori dell'atmosfera e, in secondo luogo, ad eseguire misure delle radiazioni UV
- $Y_{10.7}$: rappresentativo del flusso di raggi X e delle radiazioni *Lyman- α* . La prima tipologia di radiazioni viene valutata attraverso l'impiego del *X-ray Spectrometer* (XRS), strumento residente sui satelliti della serie GOES [32]. La seconda tipologia di radiazioni viene valutata attraverso l'impiego del *Solar Stellar Irradiance Comparison Experiment* (SOLSTICE), strumento residente sui satelliti UARS (*Upper Atmosphere Research Satellite*) [33] e SORCE (*Solar Radiation and Climate Experiment*) [34], e del *Solar Extreme-ultraviolet Experiment* (SEE), strumento residente sul satellite TIMED (*Thermosphere Ionosphere Mesosphere Energetics and Dynamics*) [35]. L'indice introdotto è rappresentativo di una combinazione delle due differenti tipologie di radiazione descritte dal momento che, pur influenzando sui medesimi strati dell'atmosfera, la prima risulta preponderante in condizioni di intensa attività solare mentre la seconda in condizioni di media/ridotta attività solare

Tutti gli indici descritti vengono espressi in termini di *solar flux unit* (sfu). In aggiunta al valore giornaliero, un corrispettivo valore mediato nell'arco di un periodo di 81 giorni è stato introdotto, rispettivamente: $\bar{F}_{10.7}$, $\bar{S}_{10.7}$, $\bar{M}_{10.7}$, $\bar{Y}_{10.7}$.

I *geomagnetic index*, rappresentativi dell'attività solare di breve periodo, permettono di tenere in considerazione l'effetto che le tempeste geomagnetiche presentano sulla variazione della densità atmosferica.

Il primo indice introdotto è definito *amplitude geomagnetic index ap*. Come precedentemente descritto, è valutato ogni tre ore attraverso la misura combinata di 13 differenti osservatori situati sulla superficie terrestre in una banda di latitudine compresa tra 40° N e 60° S. Il secondo indice introdotto è definito *disturbance storm time index Dst*. È rappresentativo dell'intensità delle correnti presenti nelle zone interne della magnetosfera. Viene valutato ogni ora attraverso la misura combinata di quattro differenti osservatori situati in prossimità dell'equatore terrestre e distribuito attraverso il *World Data Center* (WDC) di Kyoto, in Giappone [36]. Data la maggior frequenza temporale con cui viene determinato, al fine della valutazione del contributo

associato alle tempeste geomagnetiche sulla variazione della densità atmosferica, l'indice Dst risulta più accurato rispetto all'indice a_p , che fornisce invece un'indicazione generale dell'attività magnetica stessa.

Il modello $JB2008$ è stato ampiamente validato da coloro che l'anno definito [27].

A tale scopo sono state impiegate principalmente quattro fonti di dati:

- valori di densità giornalieri ottenuti tra il 1997 ed il 2007 da parte di *Air Force Space Command* attraverso l'analisi di numerosi satelliti con un'altezza di perigeo compresa tra 175 km e 1000 km
- valori di densità valutati attraverso l'impiego di *High Accuracy Satellite Drag Model* (HASDM) dell'*Air Force Space Command* tra il 2001 ed il 2005
- misure accelerometriche del satellite CHAMP (*Challenging Minisatellite Payload*) [37], ottenute mediante l'accelerometro STAR, da cui è possibile derivare la valutazione della densità atmosferica
- misure accelerometriche del satellite GRACE (*Gravity Recovery and Climate Experiment*) [38], ottenute mediante l'accelerometro SuperSTAR, da cui è possibile derivare la valutazione della densità atmosferica

Al fine di un'ulteriore verifica, inoltre, i risultati ottenuti attraverso il modello $JB2008$ sono stati comparati con quelli ottenuti attraverso modelli già esistenti, rispettivamente: modello *Jacchia-Bowman 2006*, modello *Jacchia 1970*, modello *NRLMSIS 2000*.

Per tali motivazioni il *Jacchia-Bowmann 2008* è stato selezionato come modello da impiegare per la valutazione della densità atmosferica nel corso delle simulazioni svolte.

2.3 Pressione di radiazione solare

La pressione di radiazione solare è dovuta al trasferimento della quantità di moto dei fotoni emessi attraverso i raggi solari che vengono assorbiti o riflessi dalle superfici che costituiscono il satellite. Come la perturbazione precedentemente descritta, la pressione di radiazione solare risulta essere non conservativa. Il contributo di accelerazione perturbativa a questa associato non può dunque venire espresso mediante la (1.7), che coinvolge una funzione potenziale, ma richiede la relazione seguente.

$$\mathbf{a}_{sr} = -\nu p_{sr} \frac{C_r A_{sr}}{m} \frac{\mathbf{r}_{sat_sun}}{|\mathbf{r}_{sat_sun}|} \quad (2.22)$$

dove:

- ν : rappresenta la *shadow function*

- p_{sr} : rappresenta la pressione di radiazione solare
- C_r : rappresenta il coefficiente di pressione di radiazione solare
- A_{sr} : rappresenta l'area effettiva esposta in direzione normale ai raggi solari
- m : rappresenta la massa del satellite
- $\mathbf{r}_{\text{sat_sun}}$: rappresenta il vettore posizione del Sole relativo al satellite

Anche in questo caso, nonostante la relativa semplicità presentata dall'equazione (2.22), alcune difficoltà sorgono nella valutazione dei parametri che la costituiscono.

Si consideri v .

La *shadow function* fornisce un'indicazione sulla condizione di visibilità tra Sole e satellite. Nel caso in cui il satellite sia completamente in eclissi (*umbra*), i raggi solari non presentano la possibilità di incidere sulla sua superficie e v assume il proprio valore minimo pari a 0. Nel caso in cui il satellite sia completamente visibile, i raggi solari incidono sulla sua superficie e v assume il proprio valore massimo pari a 1. Valori intermedi possono venire assunti nel caso nel modello si tengano in considerazione condizioni di parziale eclissi (*penumbra*). Risulta chiaro come la shadow function rappresenti un parametro che possa cambiare continuamente lungo l'orbita, dipendendo dalla posizione relativa tra Sole e satellite nonché dalla possibile presenza di corpi che possano produrre un effetto di eclissi (nel caso in esame la Terra).

Si consideri p_{sr} .

La pressione di radiazione solare può essere determinata attraverso la relazione seguente.

$$p_{sr} = \frac{SC}{c} \quad (2.23)$$

dove:

- SC : rappresenta la costante solare, che definisce l'intensità del flusso solare, con un valore medio pari a 1367 W/m^2 valutato ad una distanza di 1 AU (*Astronomical Unit*)
- c : rappresenta la velocità della luce valutata nel vuoto, pari a 299792458 m/s

Il valore medio assunto dalla pressione di radiazione solare, valutato attraverso la relazione precedente, risulta dunque essere circa pari a $4.56 \mu\text{Pa}$. Bisogna tuttavia tenere in considerazione due fattori che determinano uno scostamento da tale valore medio:

- la variazione della distanza relativa Terra-Sole, che assume valori compresi tra un minimo pari a 147098446.9 km nella condizione di perielio ed un massimo pari a 152097599.1 km

nella condizione di afelio, a seguito della leggera eccentricità dell'orbita terrestre determina una variabilità della pressione di radiazione solare pari a circa il $\pm 3.3\%$ [21]

- l'intensità dell'attività solare determina una leggera variabilità della pressione di radiazione solare inferiore ad 1% [22]

Si consideri C_r .

Il coefficiente di pressione di radiazione solare è un parametro adimensionale che fornisce un'indicazione sulla modalità di riflessione dei raggi solari da parte delle superfici che costituiscono il satellite. I valori che possono essere assunti rientrano in un intervallo di estremi pari a 0 e 2, dove:

- C_r pari a 0 definisce un corpo trasparente alla radiazione incidente
- C_r pari a 1 definisce un corpo per cui la radiazione incidente viene completamente assorbita (corpo nero)
- C_r pari a 2 definisce un corpo per cui la radiazione incidente viene completamente riflessa

La precisa determinazione di tale parametro richiederebbe un'accurata conoscenza della condizione di assetto del satellite, nonché della tipologia di superfici esposte alla radiazione solare. Il satellite può essere infatti costituito da materiali che presentano una riflessione speculare così come da materiali che presentano una riflessione diffusiva. Tuttavia, per l'analisi di quest'ultima tipologia, sarebbe necessario un modello di dettaglio della configurazione del satellite [21].

Si consideri A_{sr} .

Come per il parametro precedente, una precisa determinazione dell'area effettiva esposta in direzione normale rispetto alla radiazione solare incidente richiederebbe la conoscenza della corretta condizione di assetto.

È necessario sottolineare come la relazione (2.23), sebbene fornisca una buona rappresentazione del fenomeno analizzato, risulti essere una semplificazione. Infatti, la combinazione di superfici costituite da materiali che presentano differenti valori di riflettività, nonché la tipologia stessa della riflessione per i vari materiali considerati, contribuiscono al non perfetto allineamento tra il contributo di accelerazione perturbativa dovuto alla pressione di radiazione solare e la congiungente satellite-Sole. La relazione (2.23) viene comunque generalmente impiegata in programmi di simulazione numerica per la propagazione orbitale [2] [21].

CAPITOLO 3

Generazione del codice

Il codice di propagazione orbitale è stato generato impiegando MATLAB come linguaggio di programmazione. Risulta essere finalizzato alla valutazione di una stima dell'incertezza con cui è possibile conoscere, al termine del tempo di propagazione imposto t_{prop} , la posizione del satellite rispetto al sito della *ground station* in termini di azimuth ed elevazione.

Definito un *set* di parametri orbitali iniziali, che descrive le condizioni dell'orbita all'avvio della propagazione e dal quale è possibile inferire le condizioni di posizione e velocità iniziali del satellite, nonché definiti i differenti parametri che caratterizzano il satellite in relazione alle perturbazioni prese in esame (C_D , A_{drag} , C_r , A_{sr}), il codice permette di ottenere, mediante un processo di integrazione numerica delle equazioni del moto considerate, le condizioni di posizione e velocità del satellite al termine della propagazione. Da tali risultati, una volta stabilita la posizione del sito della *ground station*, è possibile ottenere le informazioni angolari di azimuth ed elevazione richieste. Dal momento che alcuni parametri non risultano noti con precisione a priori, al fine di ottenere la stima richiesta, si è proceduto all'applicazione del metodo di Monte Carlo. Per ogni j -esimo parametro non conosciuto con precisione viene generato, con una legge di distribuzione gaussiana, un campione di N_j elementi, i cui valori assumibili rientrano all'interno di un dominio preventivamente definito. Per ciascuna combinazione di valori assunti dai differenti parametri il codice procede all'attuazione della propagazione orbitale. Vengono così analizzate differenti casistiche che potrebbero descrivere le condizioni a cui il satellite può risultare ad operare. Tale metodologia permette di ottenere un insieme di possibili risultati che costituisce il campione degli *output* richiesti (azimuth ed elevazione), di cui è possibile in un secondo momento valutare l'incertezza in termini di deviazione standard.

Sono state generate in generale due differenti tipologie di modello:

- modello di simulazione singola
- modello di simulazione completa

La prima tipologia prevede di includere all'interno delle equazioni del moto esclusivamente un unico contributo di accelerazione perturbativa. Per ogni simulazione computata viene inoltre presa in esame la variabilità di un singolo parametro j -esimo per volta, attuata attraverso la generazione di un campione di N_j valori assunti. Tra i parametri considerati, si possono distinguere:

- parametri che caratterizzano direttamente il satellite in relazione alle perturbazioni orbitali, quali sono: il coefficiente di attrito C_D ; l'area effettiva che il satellite espone al flusso aerodinamico A_{drag} ; il coefficiente di pressione di radiazione solare C_r ; l'area effettiva che il satellite espone alla radiazione solare A_{sr}
- parametri che non caratterizzano direttamente il satellite in relazione alle perturbazioni orbitali, quali sono: l'effettivo valore della pressione di radiazione solare p_{sr} ; l'incertezza sulla condizione iniziale di posizione a seguito dell'errore della misura GPS

Tale simulazione risulta finalizzata alla valutazione dell'influenza che ciascun parametro j -esimo presenta sui risultati ottenuti.

La seconda tipologia prevede di includere contemporaneamente all'interno delle equazioni del moto tutti i contributi di accelerazione perturbativa presi in esame. Per ogni simulazione computata viene inoltre presa in esame la variabilità di ciascun parametro j -esimo, attuata attraverso la generazione di un campione di N_j valori assunti per ciascuno. Vengono così indagate differenti possibili combinazioni a cui il satellite può risultare ad operare. Tale simulazione risulta finalizzata alla valutazione dei risultati richiesti ottenuti a seguito della combinazione delle differenti perturbazioni orbitali prese in esame.

Prima di procedere con la descrizione delle differenti parti che costituiscono il codice, la cui struttura risulta sostanzialmente medesima per le varie tipologie di simulazione elencate, si ritiene opportuno riportare le ipotesi assunte per il problema analizzato.

3.1 Ipotesi assunte

Il satellite considerato presenta una forma prismatica, definita in generale da:

- prima dimensione caratteristica pari ad a
- seconda dimensione caratteristica pari a b
- terza dimensione caratteristica pari a c

La figura 3.1 ne riporta schematicamente la struttura.

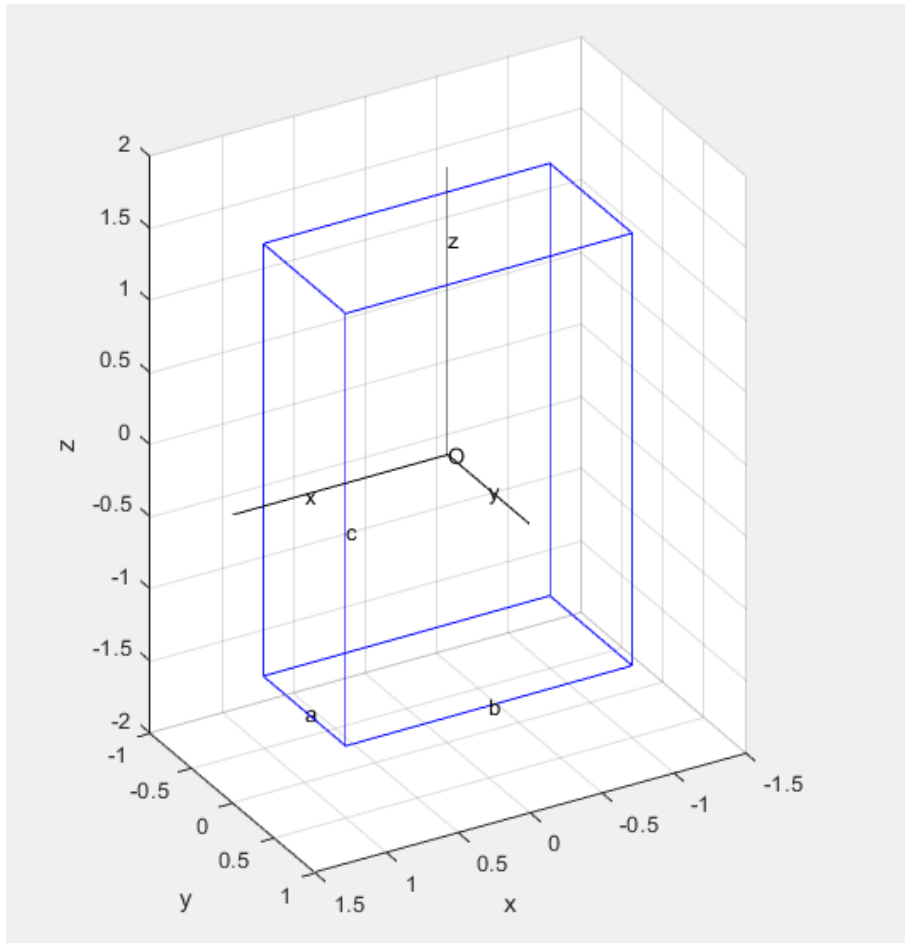


Figura 3.1 Rappresentazione schematica della struttura del satellite. Nel caso riportato $a=1$, $b=2$, $c=3$

In riferimento alla figura precedente, i momenti d'inerzia lungo i tre assi differenti sono valutati come segue.

$$I_x = \frac{m(a^2 + c^2)}{12} \quad (3.1a)$$

$$I_y = \frac{m(b^2 + c^2)}{12} \quad (3.1b)$$

$$I_z = \frac{m(a^2 + b^2)}{12} \quad (3.1c)$$

dove m rappresenta la massa del sistema. L'asse di minima inerzia viene assunto allineato lungo la verticale locale.

Il satellite risulta operativo ad un'altitudine definita all'interno di un intervallo di estremi pari a 500 km e 700 km, valutata in riferimento alla superficie terrestre: si sta dunque parlando di un satellite in bassa LEO. Ad inizio propagazione l'orbita è stata assunta circolare, ipotesi che viene tradotta in termini di parametri orbitali attraverso un valore nullo di eccentricità e . Si è inoltre posto nullo

l'argomento di perigeo ω al fine di non far sorgere una condizione di ambiguità sulla definizione della posizione del perigeo stesso.

Sono state prese in esame orbite sun-sincrone. Un'orbita di tale tipologia prevede che il piano orbitale presenti un'orientazione costante rispetto alla direzione del Sole.

Si consideri la variazione temporale secolare della longitudine del nodo ascendente $\dot{\Omega}$, dovuta principalmente al secondo termine zonale J_2 del campo gravitazionale terrestre. Risulta esprimibile come riportato di seguito.

$$\dot{\Omega} = -\frac{3}{2} \left(\frac{\sqrt{\mu} J_2 R_E^2}{(1-e^2)^2 a^{7/2}} \right) \cos i \quad (3.2)$$

dove:

- μ : rappresenta la costante gravitazionale terrestre
- J_2 : rappresenta il coefficiente della seconda armonica zonale
- R_E : rappresenta il raggio equatoriale terrestre
- e : rappresenta l'eccentricità dell'orbita
- a : rappresenta il semiasse maggiore dell'orbita
- i : rappresenta l'inclinazione dell'orbita

Per soddisfare la condizione di orientazione costante del piano orbitale rispetto alla direzione del Sole è necessario che la variazione temporale secolare della longitudine del nodo ascendente $\dot{\Omega}$ coincida con la velocità angolare media del Sole lungo il proprio moto apparente attorno alla Terra $\dot{\Omega}_{sun}$, il cui valore risulta essere pari a $1.991063853443720 \cdot 10^{-7}$ rad/s. Introducendo tale condizione all'interno dell'equazione (3.2) si ottiene:

$$\dot{\Omega}_{sun} = -\frac{3}{2} \left(\frac{\sqrt{\mu} J_2 R_E^2}{(1-e^2)^2 a^{7/2}} \right) \cos i \quad (3.3)$$

Riadattando l'equazione precedentemente riportata, è possibile esprimere l'inclinazione dell'orbita:

$$i = \arccos \left(-\frac{2}{3} \frac{(1-e^2)^2 a^{7/2} \dot{\Omega}_{sun}}{\sqrt{\mu} J_2 R_E^2} \right) \quad (3.4)$$

Si noti come l'argomento della funzione che permette di determinare i risulti essere negativo. L'inclinazione i può dunque assumere valori compresi tra $\pi/2$ e π . Un'orbita così caratterizzata viene definita retrograda.

Si ricordi come l'orbita sia stata assunta inizialmente circolare ($e = 0$). Diretta conseguenza di tale

condizione è rappresentata dalla coincidenza tra raggio orbitale r e semiasse maggiore a . Questo viene dunque determinato semplicemente sommando tra loro il raggio equatoriale terrestre R_E e l'altitudine considerata. Tenendo in considerazione quanto appena riportato, l'equazione (3.4) diviene:

$$i = \arccos\left(-\frac{2}{3} \frac{r^{7/2} \dot{\Omega}_{sun}}{\sqrt{\mu} J_2 R_E^2}\right) \quad (3.5)$$

dove r rappresenta il raggio orbitale.

Come evidenziato dalle figure 2.7, 2.8 e 2.10 riportate nel capitolo precedente, l'attuale ciclo solare (ciclo 24) è proiettato verso una situazione di minima attività [24]. Nonostante ciò, le simulazioni sono state generate in una condizione di massima attività solare al fine di considerare la condizione più gravosa a cui il satellite può trovarsi ad operare, ottenendo così risultati maggiormente conservativi.

Gli effetti secolari sull'orbita terrestre dovuti a precessione luni-solare, precessione planetaria e nutazione non sono stati considerati nel corso delle simulazioni. Dal momento che tali fenomeni presentano un periodo molto elevato [2], rispettivamente circa di 26000 anni (precessione) e di 18 anni (nutazione), e di gran lunga superiore rispetto ai tempi di propagazione impiegati, che risultano dell'ordine di alcune ore, non è stato ritenuto necessario includerli all'interno delle analisi eseguite. In ogni caso, una simulazione dedicata comprensiva di tali contributi è stata eseguita al fine di confermare la ridotta influenza che presentano sulla valutazione della stima di posizione del satellite richiesta per il limitato tempo di propagazione t_{prop} impiegato.

3.2 Struttura del codice

Il codice generato presenta una struttura ben definita e sostanzialmente suddividibile in sette parti distinte. Tale suddivisione risulta riscontrabile in entrambe le tipologie di simulazioni computate, rispettivamente denominate *singola* oppure *completa*. In tale paragrafo si procede alla presentazione e descrizione di ciascuna parte.

3.2.1 Struttura del codice: parte I

La prima parte del codice è dedicata alla definizione delle costanti terrestri ed astronomiche impiegate nel corso della simulazione.

Per le prime è stata preso a riferimento il modello gravitazionale terrestre *EGM2008*. Oltre ai vari coefficienti di Legendre C_{nm} ed S_{nm} necessari per la formulazione dell'espansione in serie per la rappresentazione del campo gravitazionale terrestre in armoniche sferiche, tale modello ha permesso di definire il valore di:

- parametro gravitazionale terrestre μ , posto pari a $398600.4418 \text{ km}^3/\text{s}^2$
- raggio equatoriale terrestre R_E , posto pari a 6378.17 km
- fattore di *oblateness* terrestre f_E , posto pari a 298.257223563 , mediante cui risulta possibile determinare il valore di eccentricità ecc che caratterizza la forma della Terra
- velocità angolare terrestre attorno al proprio asse di rotazione ω_E , valutata pari a $7.292114884322618 \cdot 10^{-5} \text{ rad/s}$

È stato inoltre posto pari a 20 il grado massimo considerato nell'espansione in serie in armoniche sferiche del campo gravitazionale terrestre *maxdeg*.

Per quanto concerne le seconde, invece, sono stati definiti i valori di:

- unità astronomica *AU*, posta pari a 149597870.691 km , rappresentativa della distanza media tra Sole e Terra durante il moto di rivoluzione di quest'ultima lungo la propria orbita
- costante solare *SC*, posta pari a 1367 W/m^2 , rappresentativa della quantità di potenza solare emessa che attraversa l'unità d'area alla distanza di 1 AU ed utile per la determinazione del valore di pressione di radiazione solare p_{sr}
- velocità della luce nel vuoto c , posta pari a 299792458 m/s
- velocità angolare media del Sole lungo il proprio moto apparente attorno alla Terra $\dot{\Omega}_{sun}$, valutata pari a $1.991063853443720 \cdot 10^{-7} \text{ rad/s}$
- *Julian Day* valutato alle ore 0 UT del giorno 1/1/2000, posto pari a 2451545 giorni, impiegato come riferimento temporale per il calcolo del *modified Julian Day (MJD)*

La figura sottostante riporta quanto appena descritto tradotto nel linguaggio del codice.

```
%% definizione delle costanti
mu=398600.4418; %costante gravitazionale terra [km^3/s^2]
Re=Re/1000; %raggio equatoriale terra [km]
we=(2*pi + 2*pi/365.26)/(24*3600); %velocità angolare terra [rad/s]
fe=1/298.257223563; %oblateness terra
ecc=sqrt(2*fe-fe^2); %eccentricità terra
AU=149597870.691; %Astronomical Unit [km]
J2000=2451545; %Julian Day 0 UT 1 Gennaio 2000
SC=1367; %costante solare [W/m^2]
c=299792458; %velocità della luce nel vuoto [m/s]
p_sr_mean=SC/c; %pressione di radiazione solare [Pa]
J2=0.0010826269; %coefficiente della seconda armonica zonale
Omega_sun=(360/365.2421897/24/3600)*(pi/180); %velocità angolare media del moto del sole [rad/s]
maxdeg=20; %grado massimo armoniche sferiche
```

Figura 3.2 Definizione delle costanti terrestri ed astronomiche all'interno del codice

Nella prima parte inoltre, dove richiesto, vengono caricati i file con i valori degli indici necessari per la valutazione dell'attività solare utili ai fini della determinazione della densità atmosferica con il modello *Jacchia-Bowmann* [27]. Vengono impiegati due differenti file.

Nel primo denominato *SOLFSMY.txt* vengono riportati in colonne distinte i valori degli indici che descrivono l'attività solare di lungo periodo. Per ognuno, oltre al valore giornaliero (F_{10} , S_{10} , M_{10} , Y_{10}), è riportato il corrispettivo valore mediato in un arco di tempo di 81 giorni e centrato alla data di riferimento (F_{81c} , S_{81c} , M_{81c} , Y_{81c}). La struttura assunta all'interno del codice è riportata nella figura sottostante.

```
-----
YYYY DDD   JulianDay  F10   F81c  S10   S81c  M10   M81c  Y10   Y81c
-----
```

Figura 3.3 Struttura del file *SOLFSMY.txt* assunta all'interno del codice

Le prime tre colonne rappresentano rispettivamente l'anno, il giorno dell'anno ed il corrispettivo *Julian Day* valutato alle ore 12 UT. Vengono impiegate per identificare il periodo a cui far corrispondere il valore degli indici precedentemente riportati.

Nel secondo denominato *DTCfile.txt* vengono riportati in colonne distinte i valori dell'indice che descrive l'attività solare di breve periodo. Dal momento che il *disturbance storm time index (Dst)* viene valutato ad intervalli regolari di un'ora, per ogni periodo di riferimento vi è un totale di 24 valori, a seconda dell'orario considerato. La struttura assunta all'interno del codice è riportata nella figura sottostante.

```
-----
DTC YYYY DDD   DTC1 to DTC24
-----
```

Figura 3.4 Struttura del file *DTCfile.txt* assunta all'interno del codice

Le prime due colonne rappresentano rispettivamente l'anno ed il giorno dell'anno. Come per il caso precedente, vengono impiegate per identificare il periodo a cui far corrispondere i valori dell'indice precedentemente riportati.

3.2.2 Struttura del codice: parte II

Nella seconda parte del codice vengono definiti i vari parametri che caratterizzano il problema analizzato.

Si consideri innanzitutto il satellite. Come precedentemente riportato, il satellite preso in considerazione presenta una forma prismatica. In riferimento alla figura 3.1, le misure impiegate nel corso delle simulazioni sono state rispettivamente poste pari a:

- 0.35 m per quanto riguarda a
- 0.35 m per quanto riguarda b
- 0.75 m per quanto riguarda c

Tenendo a mente l'ipotesi di allineamento dell'asse di minima inerzia con la verticale locale, la faccia quadrata di lato $a = b$, che costituisce la base del prisma, risulta normale alla verticale locale stessa. L'area laterale del prisma viene dunque esposta alle possibili perturbazioni orbitali prese in esame di attrito atmosferico e pressione di radiazione solare. L'area del satellite che risulta effettivamente esposta a tali perturbazioni è definita all'interno di un intervallo di valore minimo e massimo rispettivamente calcolati come:

$$A_{MIN} = ac \quad (3.6a)$$

$$A_{MAX} = \sqrt{2}ac \quad (3.6b)$$

In riferimento alle dimensioni impiegate, i valori assunti da A_{MIN} ed A_{MAX} risultano rispettivamente pari a 0.2625 m^2 ed a 0.3712 m^2 , rappresentando 4 cifre significative.

La massa del satellite è stata assunta costante e posta pari a 75 kg.

Si considerino ora i parametri del problema non noti con precisione a priori. Come precedentemente riportato è stato impiegato il metodo Monte Carlo. Per ogni j -esimo parametro che rientra nella categoria che sta venendo descritta, è stato generato un campione di N_j elementi, ciascuno ottenuto attraverso la relazione seguente:

$$x = \bar{x} + \delta x \quad (3.7)$$

dove:

- \bar{x} : rappresenta il valore medio posto del j -esimo parametro
- δx : rappresenta il valore associato all'incertezza del j -esimo parametro che ne determina uno scostamento dal valore medio

Per la determinazione del valore x è stata assunta una distribuzione di probabilità gaussiana centrata al valore medio \bar{x} posto. La dispersione dei valori assumibili dal j -esimo parametro è stata definita attraverso il triplo della deviazione standard σ_j , espresso in termini di percentuale del valore medio.

In forma analitica:

$$3\sigma_j = (inc\%_j)\bar{x} \quad (3.8)$$

con $inc\%_j$ la percentuale del valore medio impostata.

Ottenendo il valore della deviazione standard σ_j dalla relazione precedente, risulta possibile determinare il valore δx :

$$\delta x = \sigma_j(random)_j \quad (3.9)$$

dove $(random)_j$ rappresenta un valore generato in maniera casuale da una distribuzione di probabilità gaussiana con valore medio nullo e deviazione standard σ unitaria.

Introducendo la relazione (3.9) all'interno della (3.7) si ottiene infine:

$$x = \bar{x} + \sigma_j(random)_j \quad (3.10)$$

Verranno ora presentati i valori imposti a ciascun j -esimo parametro in termini di valore medio \bar{x} ed incertezza percentuale $inc\%_j$. Si tenga a mente come, a seconda dell'analisi computata, non tutti i parametri di seguito riportati potrebbero necessitare di una loro definizione per la simulazione richiesta.

Si consideri il coefficiente di attrito atmosferico C_D .

Il valore medio $\overline{C_D}$ assunto è pari a 2.2, mentre l'incertezza percentuale $inc\%_{C_D}$ è stata posta pari al 20% del valore medio.

Si consideri l'area effettiva esposta al flusso aerodinamico A_{drag} .

Il valore medio $\overline{A_{drag}}$ è stato ottenuto attraverso una media aritmetica tra A_{MIN} ed A_{MAX} . In tale maniera $\overline{A_{drag}}$ risulta pari a 0.3169 m². L'incertezza percentuale $inc\%_{A_{drag}}$ risulta invece valutabile attraverso la relazione seguente:

$$inc\%_{A_{drag}} = \frac{(A_{MAX} - A_{MIN})}{2\overline{A_{drag}}} \quad (3.11)$$

L'incertezza percentuale così calcolata rappresenterebbe il 17.1573% del valore medio. In un'ottica di tipo conservativo, è stata tuttavia posta pari al 20% del valore medio.

Si consideri il coefficiente di pressione di radiazione solare C_r .

Il valore medio $\overline{C_r}$ assunto è pari a 1, rappresentativo di un corpo nero. Dal momento che non risultano noti con chiarezza le differenti modalità di riflessione delle superfici che caratterizzano il satellite, è stato posto un valore di incertezza percentuale $inc\%_{C_r}$ pari all'80% del valore medio al fine di poter considerare un maggiore intervallo di variabilità per tale parametro.

Si consideri l'area effettiva esposta alla radiazione solare A_{sr} .

Come nel caso riguardante A_{drag} , il valore medio $\overline{A_{sr}}$ è stato ottenuto attraverso una media aritmetica tra A_{MIN} ed A_{MAX} . In tale maniera $\overline{A_{sr}}$ risulta pari a 0.3169 m². Anche per questo parametro l'incertezza percentuale $inc\%_{A_{sr}}$ è stata posta pari al 20% del valore medio in un'ottica di tipo conservativo, sebbene, calcolata attraverso una relazione identica alla (3.11), rappresenti in realtà il 17.1573% del valore medio.

Si consideri la pressione di radiazione solare p_{sr} .

Il valore medio $\overline{p_{sr}}$ è stato ottenuto attraverso la relazione (2.23), eseguendo il rapporto tra la costante solare SC e la velocità della luce nel vuoto c . Tenendo in considerazione quanto esposto nel capitolo precedente, l'incertezza percentuale $inc\%_{p_{sr}}$ è stata posta, in un'ottica di tipo conservativo, pari al 5% del valore medio.

Il numero di elementi N_j che costituiscono il campione generato per ciascun parametro j -esimo è stato selezionato in base alla tipologia di simulazione richiesta.

Quelli appena introdotti rappresentano parametri che definiscono la variabilità del problema analizzato in termini delle perturbazioni orbitali prese in esame. Pur influenzando sulla determinazione dell'orbita nel corso della propagazione, non vanno ad incidere sui parametri orbitali inizialmente imposti che la descrivono all'avvio della propagazione. Questo viene invece ottenuto includendo all'interno della simulazione l'errore sulla misura GPS. Tale errore è rappresentato da un vettore di tre componenti da sovrapporre al vettore posizione del satellite.

In forma analitica:

$$\mathbf{r}_{0_GPS} = \mathbf{r}_0 + \mathbf{r}_{GPS} \quad (3.12)$$

dove:

- \mathbf{r}_{0_GPS} : rappresenta il vettore posizione ad inizio propagazione comprensivo dell'errore sulla misura GPS
- \mathbf{r}_0 : rappresenta il vettore posizione ad inizio propagazione non comprensivo dell'errore sulla misura GPS
- \mathbf{r}_{GPS} : rappresenta il vettore associato all'errore sulla misura GPS

Dal momento che sussiste una stretta correlazione tra il vettore di stato ed il *set* di parametri orbitali, risulta chiaro come l'incertezza sulla misura GPS si rispecchi sull'incertezza delle condizioni iniziali poste in termini di parametri orbitali.

Per esprimere \mathbf{r}_{GPS} sono stati eseguiti tre differenti passaggi. È stato innanzitutto formato un vettore con ciascuna delle tre componenti ottenuta attraverso la generazione di un valore casuale a partire da una distribuzione gaussiana di valore medio nullo e deviazione standard unitaria. Si è poi proceduto alla normalizzazione del vettore precedentemente ottenuto. Il versore è stato per ultimo moltiplicato per σ_{GPS} , al fine di imporre tale valore come il modulo del vettore \mathbf{r}_{GPS} . Si noti come la generazione casuale delle componenti al primo passaggio non vada ad influire solamente su ciascun contributo lungo ogni asse ma anche sull'orientazione spaziale di \mathbf{r}_{GPS} . A differenza dei parametri scalari

precedentemente presentati associati alle perturbazioni orbitali, il campione generato per l'errore sulla misura GPS risulta dunque comprensivo di un numero N_{GPS} di elementi vettoriali, ciascuno dotato di tre componenti. Dal momento che ciascuna componente del generico elemento rappresentativo il campione è stata ottenuta attraverso una relazione del tipo (3.9), il valore medio risulta nullo mentre il valore di incertezza, espressa in termini di 3σ , è stata posta pari ad 3 m [12].

3.2.3 Struttura del codice: parte III

Nella terza parte del codice vengono impostati:

- l'istante di inizio propagazione
- il tempo di propagazione
- la posizione del sito della *ground station*.

L'istante di inizio propagazione viene definito in termini di data ed orario. Per ciascuna delle simulazioni generate, la propagazione è stata fatta partire alle ore 00:00:00 del 1 Giugno 2020. Dal momento che tuttavia tale formato risulta scomodo dal punto di vista computazionale, al fine di inglobare all'interno di una stessa variabile le informazioni di natura temporale è stato impiegato il *Julian Day*: il numero di giorni trascorsi dalle ore 12:00:00 del 1 Gennaio 4713 a.C.

Tenendo in considerazione esclusivamente le informazioni riguardanti la data:

$$JD_0 = 367y - \text{INT} \left(\frac{7 \left(y + \text{INT} \left(\frac{m+9}{12} \right) \right)}{4} \right) + \text{INT} \left(\frac{275m}{9} \right) + d + 1721013.5 \quad (3.13)$$

dove:

- JD_0 : rappresenta il *Julian Day* alle ore 0 UT della data selezionata
- y : rappresenta l'anno, che può assumere valori compresi tra gli estremi inclusi 1901 e 2099
- m : rappresenta il mese, che può assumere valori compresi tra gli estremi inclusi 1 e 12
- d : rappresenta il giorno, che può assumere valori compresi tra gli estremi inclusi 1 e 31

L'operatore INT rappresenta un'operazione di troncamento reale.

Volendo tenere in considerazione anche le informazioni riguardanti l'orario:

$$JD = JD_0 + \frac{UT}{24} \quad (3.14)$$

dove:

- JD : rappresenta il *Julian Day* ad orario e data selezionati
- JD_0 : rappresenta il *Julian Day* alle ore 0 UT della data selezionata
- UT : rappresenta l'orario selezionato espresso in termini di ore

A causa dell'origine del riferimento per il *Julian Day*, i valori ottenuti applicando la (3.14) possono risultare di gran lunga elevati. Per ovviare a questo, spesso viene impiegata una formulazione alternativa:

$$MJD = JD - J2000 \quad (3.15)$$

dove:

- MJD : rappresenta il *Modified Julian Day*
- JD : rappresenta il *Julian Day* ad orario e data selezionati
- $J2000$: rappresenta il *Julian Day* alle ore 12 UT del giorno 1 Gennaio 2000

Attraverso la (3.15) le informazioni temporali vengono dunque espresse in riferimento ad un istante temporale più recente, cosa che fornisce valori maggiormente ridotti per quanto concerne la data.

Il tempo di propagazione, come chiaramente si può dedurre, rappresenta il tempo per cui la propagazione viene fatta procedere a partire da data ed orario impostati. Nel corso delle simulazioni eseguite sono stati selezionati in generale un valore pari a 2 ore ed uno pari 8 ore.

La posizione del sito della *ground station* viene identificata andando a definire le informazioni di longitudine, latitudine geodetica ed altezza rispetto all'ellissoide di riferimento. Nel caso delle simulazioni generate è stato scelto di porre la *ground station* alle coordinate in prossimità di Matera. Sono dunque stati assunti, nel caso in esame, i seguenti valori:

- longitudine λ pari a 16.6022 deg
- latitudine geodetica φ pari a 40.6694 deg
- altezza h_{ell} rispetto all'ellissoide di riferimento pari a 0.401 km

Con tali informazioni risulta dunque possibile esprimere il raggio vettore \mathbf{r}_{site} che identifica la posizione del sito della *ground station*.

Andando ad esprimere le componenti del vettore \mathbf{r}_{site} nel sistema di riferimento ECEF:

$$x_{site} = \left(\frac{R_E}{\sqrt{1 - (2f_E - f_E^2)^2 \sin^2 \varphi}} + h_{ell} \right) \cos \varphi \cos \lambda \quad (3.16a)$$

$$y_{site} = \left(\frac{R_E}{\sqrt{1 - (2f_E - f_E^2)^2 \sin^2 \varphi}} + h_{ell} \right) \cos \varphi \sin \lambda \quad (3.16b)$$

$$z_{site} = \left(\frac{R_E(1 - f_E)^2}{\sqrt{1 - (2f_E - f_E^2)^2 \sin^2 \varphi}} + h_{ell} \right) \sin \varphi \quad (3.16c)$$

con R_E e f_E ad indicare rispettivamente il raggio equatoriale ed il fattore di eccentricità terrestre. Andando ad esprimere le componenti del vettore \mathbf{r}_{site} nel sistema di riferimento ECI:

$$x_{site} = \left(\frac{R_E}{\sqrt{1 - (2f_E - f_E^2)^2 \sin^2 \varphi}} + h_{ell} \right) \cos \varphi \cos \theta \quad (3.17a)$$

$$y_{site} = \left(\frac{R_E}{\sqrt{1 - (2f_E - f_E^2)^2 \sin^2 \varphi}} + h_{ell} \right) \cos \varphi \sin \theta \quad (3.17b)$$

$$z_{site} = \left(\frac{R_E(1 - f_E)^2}{\sqrt{1 - (2f_E - f_E^2)^2 \sin^2 \varphi}} + h_{ell} \right) \sin \varphi \quad (3.17c)$$

con θ ad indicare il *local sidereal time* del sito, l'angolo che ne individua la posizione nel piano equatoriale rispetto al punto d'Ariete γ . Tale valore è ottenuto andando a sommare tra loro il *Greenwich mean sidereal time* θ_{GM} , che individua la posizione del meridiano di Greenwich rispetto al punto d'Ariete γ , e la longitudine λ , che individua la posizione del sito rispetto al meridiano di Greenwich. Il significato dei termini R_E e f_E risulta equivalente al caso precedente.

3.2.4 Struttura del codice: parte IV

La quarta parte del codice è dedicata ai parametri che descrivono l'orbita ad inizio propagazione. Nello specifico devono essere definiti:

- altitudine alt_0 valutata rispetto alla superficie terrestre
- eccentricità e_0
- argomento di perigeo ω_0
- longitudine del nodo ascendente Ω_0
- anomalia vera θ_0

Per quanto concerne il primo parametro sono stati presi in esame tre differenti valori di riferimento, rispettivamente pari a 500 km, 600 km e 700 km. Tenendo a mente l'ipotesi di orbita di partenza circolare, all'eccentricità ed all'argomento di perigeo è stato associato un valore nullo. Per quanto concerne la longitudine del nodo ascendente e l'anomalia vera, è stato assunto un unico valore nullo. Si noti la mancanza di un sesto termine necessario per definire completamente l'orbita. Ricordando

tuttavia l'ipotesi di sun-sincronismo, è possibile determinare l'inclinazione dell'orbita attraverso la relazione (3.4), andando a completare il *set* di parametri che la descrive. Con i valori selezionati il satellite ad inizio propagazione risulta essere situato sul piano equatoriale terrestre in corrispondenza della linea degli equinozi. Il numero totale di combinazioni dei parametri che descrivono la condizione iniziale dell'orbita risulta essere pari a tre. È possibile in ogni caso considerare ulteriori valori differenti al fine di indagare diverse condizioni iniziali. In generale, infatti, il numero di combinazioni di parametri iniziali N_{comb_init} è ottenuto attraverso la produttoria seguente:

$$N_{comb_init} = \prod_{i=1}^5 N_i \quad (3.18)$$

con N_i ad indicare il numero di valori considerati per ciascun parametro orbitale precedentemente presentato.

3.2.5 Struttura del codice: parte V

La quinta parte del codice è finalizzata alla determinazione delle differenti combinazioni possibili tra i vari valori assunti dai parametri descritti precedentemente nella parte II e nella parte IV. Ciascuna singola combinazione costituisce una differente condizione da propagare all'interno della medesima simulazione. Il numero totale di combinazioni possibili N_{tot} può essere valutato attraverso la relazione seguente:

$$N_{tot} = \prod_{i=1}^5 N_i \prod_{j=1}^k N_j \quad (3.19)$$

dove, avendo separato i contributi in due produttorie differenti per chiarezza:

- N_i : rappresenta il numero di valori assunti dall' i -esimo parametro che descrive la condizione iniziale dell'orbita (parte IV)
- N_j : rappresenta il numero di valori assunti dal j -esimo parametro associato alle perturbazioni orbitali o all'incertezza della misura GPS (parte II)

Da notare come l'estremo superiore della seconda produttoria non sia fissato a priori come accade invece per la prima. Il valore assunto da k dipende infatti dal numero di perturbazioni prese in esame nella medesima simulazione.

L'ottenimento delle varie combinazioni possibili è stato implementato nel codice attraverso una serie di cicli *for* tra loro concatenati, uno per ogni i -esimo e j -esimo parametro considerato. La figura 3.5 ne riporta la struttura.

esame all'interno della simulazione.

Il secondo, $[t_0, t_f]$, rappresenta l'intervallo temporale per cui integrare le equazioni del moto: t_0 definisce l'istante iniziale dell'integrazione, generalmente posto nullo, mentre t_f definisce l'istante di fine integrazione, pari al tempo di propagazione posto espresso in secondi.

Il terzo, y_0 , rappresenta le condizioni iniziali impiegate nel processo di integrazione. Nel caso in esame, y_0 è rappresentato da un vettore colonna costituito da sei componenti: le prime tre definiscono la posizione iniziale \mathbf{r}_0 mentre le restanti tre definiscono la velocità iniziale $\dot{\mathbf{r}}_0$. Queste sono ottenute a partire dal *set* di parametri orbitali kepleriani che descrivono la condizione dell'orbita all'inizio della propagazione.

Il quarto, *options*, rappresenta un insieme di condizioni, definibili attraverso il comando *odeset*, che devono venire soddisfatte durante il processo di integrazione numerica. Nelle simulazioni eseguite sono stati posti una tolleranza relativa di 10^{-12} ed una tolleranza assoluta di 10^{-14} .

Si considerino gli *output* forniti.

Il primo, t , rappresenta un vettore colonna i cui elementi costituiscono i diversi istanti temporali a cui l'equazione è stata risolta e valutata.

Il secondo, y , rappresenta le soluzioni dell'equazione valutate ad ogni corrispettivo istante presente all'interno del vettore colonna t . Nel caso in esame, y è definita come una matrice di sei colonne in cui ciascuna riga rappresenta la soluzione delle equazioni del moto associate al corrispettivo istante di valutazione: le prime tre colonne rappresentano le componenti del vettore posizione \mathbf{r} mentre le restanti tre colonne rappresentano le componenti del vettore velocità $\dot{\mathbf{r}}$. Dal momento che le equazioni del moto sono state espresse in un sistema di riferimento inerziale, i risultati ottenuti rappresentano il vettore di stato nello stesso sistema.

L'ultima riga della matrice y fornisce le condizioni di posizione \mathbf{r} e velocità $\dot{\mathbf{r}}$ del satellite al termine del tempo di propagazione. Risulta tuttavia più comodo e di facile interpretazione, dal punto di vista applicativo, esprimere la posizione del satellite in termini angolari.

Si consideri innanzitutto la posizione del satellite in relazione al centro della Terra. È possibile proiettare le componenti del vettore \mathbf{r} in due differenti sistemi di riferimento comunemente impiegati: sistema ECI (*Earth Centered Inertial*) e sistema ECEF (*Earth Centered Earth Fixed*).

Il primo rappresenta un sistema di riferimento geocentrico inerziale non solidale alla Terra con l'asse x allineato lungo la linea degli equinozi nel verso del punto d'Ariete γ , l'asse z allineato lungo l'asse di rotazione terrestre e l'asse y a completare la terna. Proiettando il vettore \mathbf{r} in tale sistema di riferimento è possibile determinare:

- ascensione retta α : rappresenta l'angolo che individua il satellite lungo il piano equatoriale terrestre rispetto al punto d'Ariete γ . Viene misurato positivo verso est in senso antiorario e può assumere valori compresi tra 0° e 360°
- declinazione δ : rappresenta l'angolo che individua il satellite rispetto al piano equatoriale celeste. Viene misurato a partire dall'equatore e può assumere valori compresi tra -90° e 90° . Valori positivi corrispondono a posizioni nell'emisfero boreale mentre valori negativi corrispondono a posizioni nell'emisfero australe.

Il secondo rappresenta un sistema di riferimento geocentrico solidale alla Terra con l'asse x allineato con il meridiano di Greenwich, l'asse z allineato lungo l'asse di rotazione terrestre e l'asse y a completare la terna. Proiettando il vettore \mathbf{r} in tale sistema di riferimento è possibile determinare:

- longitudine λ : rappresenta l'angolo che individua il satellite lungo il piano equatoriale terrestre rispetto al meridiano di riferimento. Viene misurato positivo verso est in senso antiorario a partire dal meridiano di Greenwich e può assumere valori compresi tra 0° e 360°
- latitudine φ : rappresenta l'angolo che individua il satellite rispetto all'equatore terrestre. Viene misurato a partire dall'equatore e può assumere valori compresi tra -90° e 90° . Valori positivi corrispondono a posizioni nell'emisfero boreale mentre valori negativi corrispondono a valori nell'emisfero australe

La forma più opportuna in cui riportare i risultati dipende dall'applicazione di interesse. Per passare da una rappresentazione all'altra, trascurando gli effetti dovuti ai moti secolari, le componenti del vettore \mathbf{r} vengono così convertite mediante le relazioni di seguito riportate:

$$\mathbf{r}_{\text{ECEF}} = [\mathbf{R}_3(\theta_{GM})]\mathbf{r}_{\text{ECI}} \quad (3.20a)$$

$$\mathbf{r}_{\text{ECI}} = [\mathbf{R}_3(-\theta_{GM})]\mathbf{r}_{\text{ECEF}} \quad (3.20b)$$

dove:

- \mathbf{r}_{ECEF} : rappresenta il vettore posizione del satellite proiettato nel sistema ECEF
- \mathbf{r}_{ECI} : rappresenta il vettore posizione del satellite proiettato nel sistema ECI
- \mathbf{R}_3 : rappresenta la matrice di rotazione attorno all'asse z
- θ_{GM} : rappresenta il *Greenwich mean sidereal time*, angolo equivalente all'ascensione retta che identifica la posizione del meridiano di Greenwich rispetto al punto d'Ariete γ

Bisogna tenere tuttavia in considerazione come il sito della *ground station* dedicata ad osservazione e tracciamento del satellite non coincida con l'origine dei sistemi di riferimento precedentemente

presentati. Esprimendo dunque il vettore che individua la posizione del satellite rispetto al sito della *ground station*, si ottiene:

$$\mathbf{r}_{\text{rel}} = \mathbf{r}_{\text{ECI}} - \mathbf{r}_{\text{site}} \quad (3.21)$$

dove:

- \mathbf{r}_{rel} : rappresenta il vettore posizione del satellite rispetto al sito della *ground station*
- \mathbf{r}_{ECI} : rappresenta il vettore posizione del satellite proiettato nel sistema di riferimento ECI
- \mathbf{r}_{site} : rappresenta il vettore posizione del sito della *ground station* valutato attraverso la relazione (3.17)

Dalla conoscenza del vettore \mathbf{r}_{rel} è ora possibile determinare le informazioni che definiscono la posizione del satellite rispetto alla *ground station* in termini angolari. Come per il caso precedente, sono stati considerati due differenti sistemi di riferimento comunemente impiegati: topocentrico equatoriale ed orizzonte locale. Per entrambi l'origine del sistema di riferimento è collocata in corrispondenza della posizione del sito della *ground station*.

Il primo rappresenta un sistema di riferimento con assi paralleli a quelli del sistema ECI, ottenuto da questo mediante una semplice traslazione dell'origine. L'asse x è allineato parallelamente alla linea degli equinozi nel verso del punto d'Ariete γ mentre il piano xy risulta parallelo al piano equatoriale terrestre. Proiettando il vettore \mathbf{r}_{rel} in tale sistema di riferimento è possibile determinare:

- ascensione retta topocentrica α_t : rappresenta l'angolo che individua il satellite lungo il piano xy rispetto all'asse x. Viene misurato positivo verso est in senso antiorario e può assumere valori compresi tra 0° e 360°
- declinazione topocentrica δ_t : rappresenta l'angolo che individua il satellite rispetto al piano xy. Viene misurata a partire dal piano stesso e può assumere valori compresi tra -90° e 90° . Valori positivi corrispondono a posizioni situate in zone superiori al piano di riferimento xy mentre valori negativi corrispondono a posizioni situate in zone inferiori al piano di riferimento xy

Il secondo rappresenta un sistema di riferimento con il piano xy coincidente con il piano dell'orizzonte locale. Gli assi x e y risultano rispettivamente orientati verso sud ed est mentre l'asse z è allineato lungo lo zenit della verticale locale. Proiettando il vettore \mathbf{r}_{rel} in tale sistema di riferimento è possibile determinare:

- azimut az : rappresenta l'angolo che individua il satellite lungo il piano dell'orizzonte locale rispetto alla direzione nord. Viene misurato positivo in senso orario e può assumere valori compresi tra 0° e 360°

- elevazione el : rappresenta l'angolo che individua il satellite rispetto al piano dell'orizzonte locale. Viene misurato a partire dal piano stesso e può assumere valori compresi tra -90° e 90° . Valori positivi corrispondono a posizioni situate in zone superiori al piano dell'orizzonte locale mentre valori negativi corrispondono a posizioni situate in zone inferiori al piano dell'orizzonte locale

Come per il caso precedente, la forma più opportuna in cui riportare i risultati dipende dall'applicazione di interesse. Per passare da una rappresentazione all'altra le componenti del vettore \mathbf{r}_{rel} vengono così convertite mediante le relazioni di seguito riportate:

$$\mathbf{r}_{SEZ} = \left[\mathbf{R}_2 \left(\frac{\pi}{2} - \varphi_{gd} \right) \right] \left[\mathbf{R}_3(\theta_{LST}) \right] \mathbf{r}_{top} \quad (3.22a)$$

$$\mathbf{r}_{top} = \left[\mathbf{R}_3(-\theta_{LST}) \right] \left[\mathbf{R}_2 \left(\varphi_{gd} - \frac{\pi}{2} \right) \right] \mathbf{r}_{SEZ} \quad (3.22b)$$

dove:

- \mathbf{r}_{SEZ} : rappresenta il vettore posizione del satellite rispetto al sito della *ground station* proiettato nel sistema di riferimento dell'orizzonte locale
- \mathbf{r}_{top} : rappresenta il vettore posizione del satellite rispetto al sito della *ground station* proiettato nel sistema di riferimento topocentrico equatoriale
- \mathbf{R}_2 : rappresenta la matrice di rotazione attorno all'asse y
- \mathbf{R}_3 : rappresenta la matrice di rotazione attorno all'asse z
- φ_{gd} : rappresenta la latitudine geodetica della posizione in cui la *ground station* è collocata
- θ_{LST} : rappresenta il *local sidereal time* della *ground station*, angolo equivalente all'ascensione retta che ne identifica la posizione lungo il piano equatoriale rispetto al punto d'Ariete γ

Tutti i parametri angolari precedentemente descritti sono stati determinati al termine di ciascuna propagazione eseguita all'interno della medesima simulazione. I vari valori così ottenuti sono stati inoltre raccolti in matrici dedicate per ogni tipologia di risultato.

3.2.7 Struttura del codice: parte VII

L'ultima parte del codice è dedicata alla valutazione dei parametri statistici utili alla valutazione della stima dell'incertezza con cui è possibile determinare la posizione del satellite al termine della propagazione. Nello specifico vengono determinati, per ogni grandezza angolare descritta nella parte precedente, valore medio e deviazione standard.

Sia x_i la i -esima grandezza angolare di interesse. Fissato il *set* di elementi orbitali che descrive la condizione dell'orbita ad inizio propagazione, il numero di risultati ottenuti per la grandezza x_i

considerata a partire dalle medesime condizioni iniziali risulta essere pari a N_{output} , valutabile attraverso la seguente relazione:

$$N_{output} = \prod_{j=1}^k N_j \quad (3.23)$$

con N_j a rappresentare il numero di valori assunti dal j -esimo parametro associato alle perturbazioni nel corso della simulazione, così come descritto nella parte II del codice. Si noti come l'indice superiore k della produttoria non sia stato definito a priori, in quanto dipendente dal numero di perturbazioni prese in esame.

Associato al *set* di parametri orbitali stabilito, viene dunque generato per la i -esima grandezza angolare x_i un campione di risultati costituito da un numero di elementi pari proprio a N_{output} . Tale campione rappresenta l'insieme dei differenti valori, ottenuti a partire dalle medesime condizioni iniziali, che la i -esima grandezza angolare x_i assume a seguito della variazione dei parametri che caratterizzano la situazione operativa del satellite.

Per il campione così definito vengono valutati valore medio \bar{x}_i e deviazione standard σ_{x_i} attraverso funzioni interne a MATLAB. Il comando *mean* viene impiegato per la determinazione del primo mentre il comando *std* viene impiegato per la determinazione della seconda. In entrambi i casi è sufficiente definire come *input* il campione di risultati precedentemente descritto.

Tale procedura, applicata a ciascuna i -esima grandezza angolare x_i di interesse, viene ripetuta per ogni *set* di elementi orbitali che definiscono la condizione dell'orbita ad inizio propagazione.

Al termine della simulazione i parametri statistici determinati con la procedura precedentemente descritta vengono raccolti in due differenti matrici per ogni i -esima grandezza angolare x_i . Ogni elemento della matrice è associato ad una differente combinazione di elementi orbitali che costituiscono le condizioni dell'orbita ad inizio propagazione. Più nello specifico ad ogni riga è associata una diversa combinazione di parametri $(e, \omega, \Omega, \theta)$ mentre ad ogni colonna è associato un differente valore di altitudine. In tale maniera risulta possibile visualizzare lungo la medesima riga, per una stessa combinazione di $(e, \omega, \Omega, \theta)$, l'andamento del parametro statistico considerato in funzione della variazione di altitudine iniziale dell'orbita. Entrambe le matrici, dedicate rispettivamente a valore medio e deviazione standard, presentano la medesima struttura.

CAPITOLO 4

Risultati delle simulazioni

Nel capitolo corrente vengono presentati i risultati ottenuti per ciascuna simulazione computata. Sebbene siano state determinate differenti grandezze per identificare al termine del periodo di propagazione la posizione del satellite in termini angolari, come presentato nella descrizione della parte VI del codice nel capitolo precedente, i risultati vengono qui posti in termini di azimut ed elevazione rispetto alla posizione del sito in cui è collocata la *ground station*. Una scelta di questo genere viene motivata dal fatto che nelle operazioni di osservazione e tracking orbitale tali tipologie di informazioni angolari vengono principalmente impiegate.

Verranno dapprima introdotti i risultati delle varie simulazioni denominate *singole*, per poi passare in un secondo momento a quelli della simulazione denominata *completa*.

4.1 Risultati delle simulazioni singole

Le simulazioni singole sono state computate includendo all'interno del termine \mathbf{a}_p presente nelle equazioni del moto (1.5) un unico contributo di accelerazione perturbativa alla volta. Per ciascun *set* di condizioni iniziali impostate nella medesima simulazione viene inoltre fatto variare un singolo j -esimo parametro, associato alla perturbazione orbitale stessa, al fine di valutarne l'influenza sui risultati ottenuti. Il numero di elementi N_j che costituisce il campione di differenti valori assunti dal j -esimo parametro è stato posto pari a 100. Sono stati selezionati tre differenti tempi di propagazione t_{prop} , rispettivamente pari a 2 ore, a 8 ore ed a 24 ore. L'influenza dell'errore della misura GPS sui risultati ottenuti è stata valutata con una simulazione opportunamente dedicata. Si ricorda che i risultati sono stati ottenuti assumendo una condizione di massima attività solare.

4.1.1 Risultati simulazione singola: perturbazione di attrito atmosferico

Nel caso in cui il termine \mathbf{a}_p sia definito esclusivamente dal contributo di accelerazione perturbativa dovuto all'attrito atmosferico, l'equazione del moto (1.5) assume la seguente formulazione.

$$\ddot{\mathbf{r}} = -\frac{\mu}{r^3}\mathbf{r} - \frac{1}{2}\frac{C_D A_{drag}}{m}\rho v_{rel}^2 \frac{\mathbf{v}_{rel}}{|\mathbf{v}_{rel}|} \quad (4.1)$$

Per tale relazione i j -esimi parametri per cui si è generato un campione di N_j elementi sono rappresentati dal coefficiente di attrito atmosferico C_D e dall'area effettiva esposta alla perturbazione

di attrito atmosferico A_{drag} , in quanto non essendo noti con precisione a priori risultano di difficile determinazione. Il valore di densità ρ è stato valutato alla condizione di massima attività solare.

Si consideri la simulazione dedicata alla variabilità del coefficiente di attrito atmosferico C_D . Gli N_{C_D} elementi che costituiscono il campione generato per tale parametro sono evidenziati in figura 4.1, dove ciascun punto individua un differente valore assunto da C_D nel corso della simulazione e rappresenta dunque, per il medesimo *set* di elementi orbitali inizialmente imposti, una diversa condizione a cui il satellite risulta operare.

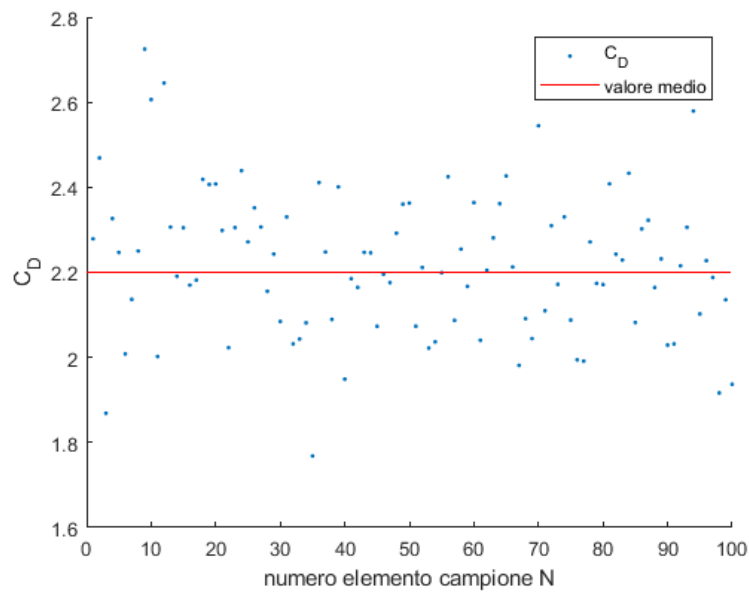


Figura 4.1 Valori di C_D impiegati nella simulazione singola

A ciascun valore assunto da C_D corrisponde una coppia (az, el) che descrive in termini angolari la posizione del satellite alla fine del periodo di propagazione. Per ognuna delle tre altitudini considerate è stato dunque generato, rispettivamente per azimuth ed elevazione, un campione di risultati costituito da appunto N_{C_D} elementi, come riportato di seguito presentando a titolo di esempio i risultati della simulazione con tempo di propagazione pari a 8 ore.

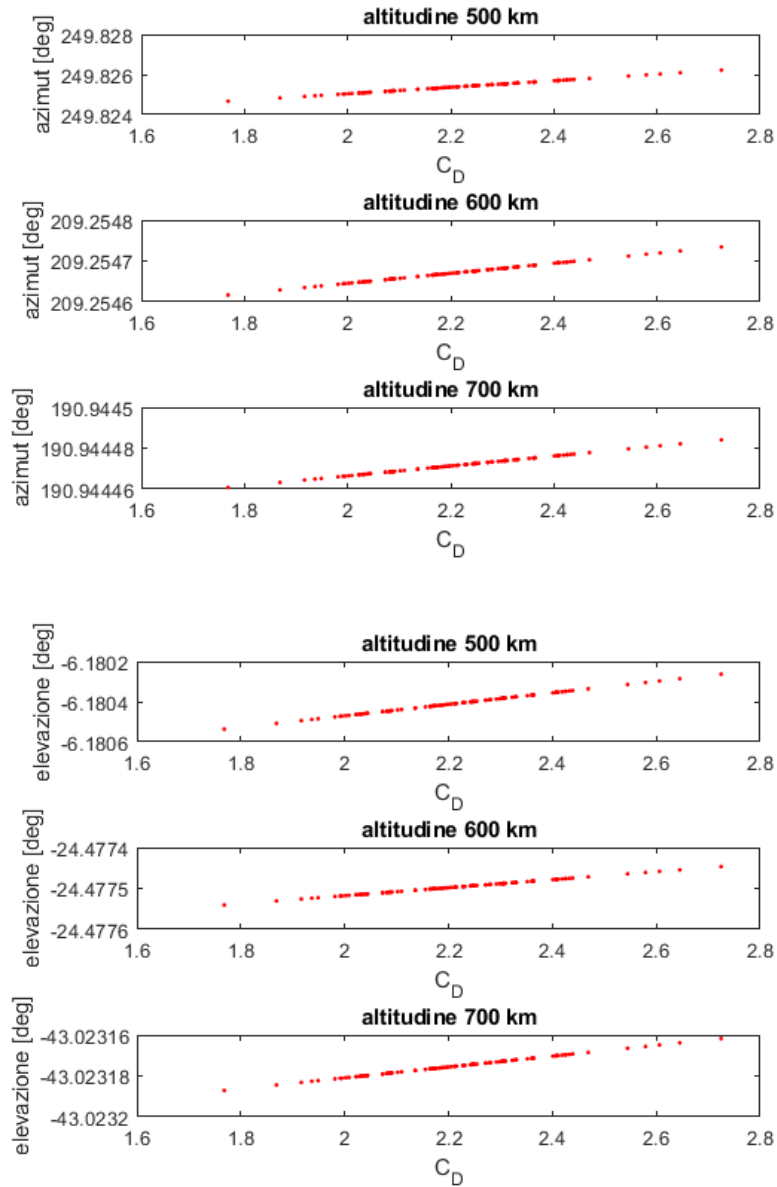


Figura 4.2 Risultati ottenuti in termini di azimut ed elevazione per ciascun valore di C_D dalla simulazione singola con tempo di propagazione pari ad 8 ore

La determinazione della deviazione standard per ogni campione di N_{C_D} elementi alla quota di riferimento ha permesso di stabilire una valutazione della dispersione dei risultati ottenuti a seguito della variazione del coefficiente di attrito C_D .

I valori di deviazione standard σ_{az} e σ_{el} ottenuti al termine della simulazione vengono raccolti rispettivamente in tabella 4.1 per il tempo di propagazione di 2 ore, in tabella 4.2 per il tempo di propagazione di 8 ore ed in tabella 4.3 per il tempo di propagazione di 24 ore. I risultati tabulati vengono inoltre riportati graficamente in funzione dell'altitudine orbitale considerata.

Tabella 4.1 Deviazione standard di azimut ed elevazione per la simulazione singola con tempo di propagazione pari a 2 ore

	500 km	600 km	700 km
deviazione standard azimut [μrad]	0.1923	0.0550	0.0180
deviazione standard elevazione [μrad]	0.0900	0.0201	0.0047

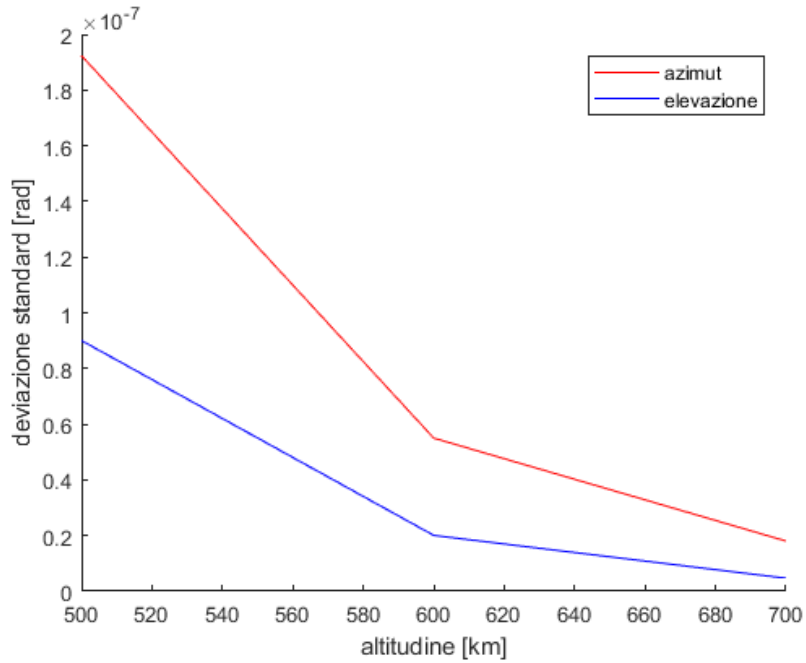


Figura 4.3 Rappresentazione grafica dei risultati di deviazione standard riportati in tabella 4.1 in funzione dell'altitudine considerata

Tabella 4.2 Deviazione standard di azimut ed elevazione per la simulazione singola con tempo di propagazione pari a 8 ore

	500 km	600 km	700 km
deviazione standard azimut [μrad]	4.8227	0.3657	0.0724
deviazione standard elevazione [μrad]	0.8512	0.2915	0.0789

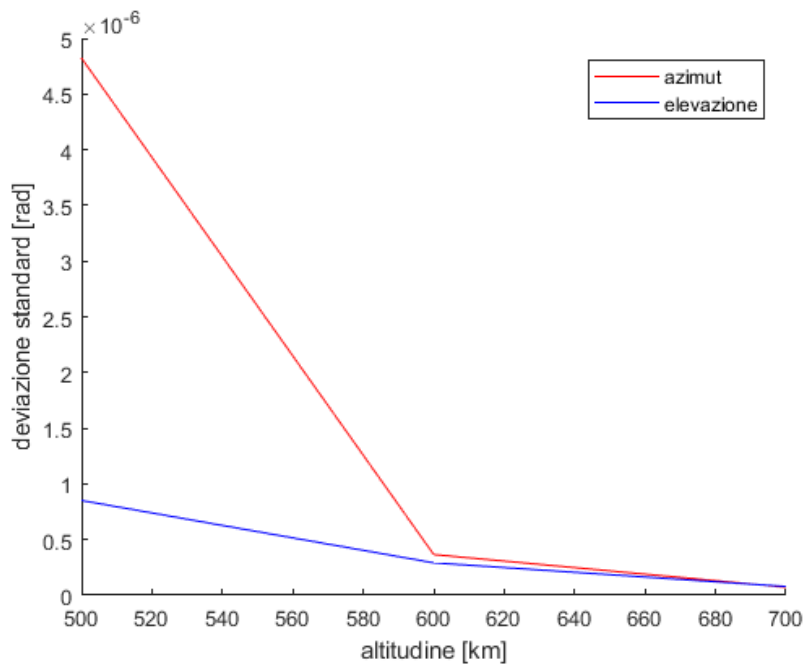


Figura 4.4 Rappresentazione grafica dei risultati di deviazione standard riportati in tabella 4.2 in funzione dell'altitudine considerata

Tabella 4.3 Deviazione standard di azimut ed elevazione per la simulazione singola con tempo di propagazione pari a 24 ore

	500 km	600 km	700 km
deviazione standard azimut [μrad]	30.7381	4.3127	0.9816
deviazione standard elevazione [μrad]	3.1905	1.6876	0.5235

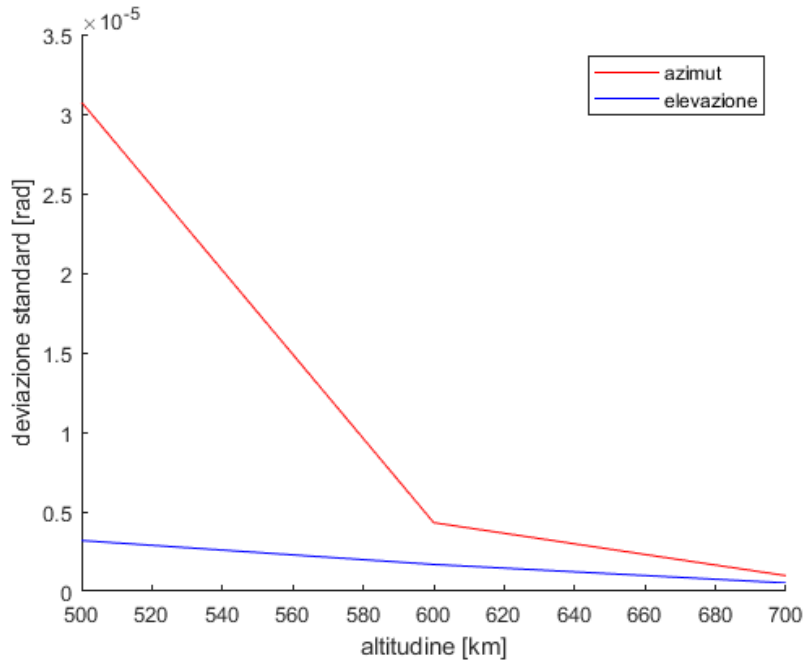


Figura 4.5 Rappresentazione grafica dei risultati di deviazione standard riportati in tabella 4.3 in funzione dell'altitudine considerata

Si consideri la simulazione dedicata alla variabilità dell'area effettiva esposta A_{drag} .

Gli $N_{A_{drag}}$ elementi che costituiscono il campione generato per tale parametro sono evidenziati in figura 4.6, dove ciascun punto individua un differente valore assunto da A_{drag} nel corso della simulazione e rappresenta dunque, per il medesimo set di elementi orbitali inizialmente imposti, una diversa condizione a cui il satellite risulta operare.

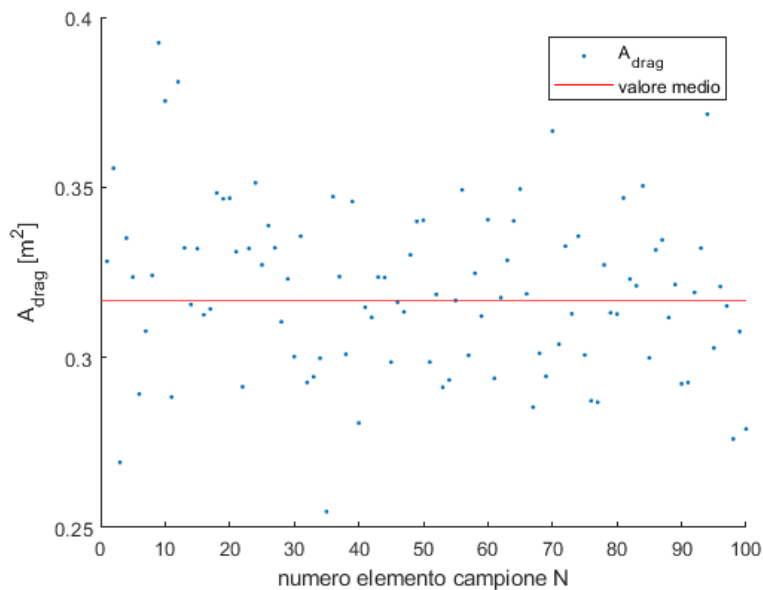


Figura 4.6 Valori di A_{drag} impiegati nella simulazione singola

A ciascun valore assunto da A_{drag} corrisponde una coppia (az, el) che descrive in termini angolari la posizione del satellite alla fine del periodo di propagazione. Per ognuna delle tre altitudini considerate è stato dunque generato, rispettivamente per azimuth ed elevazione, un campione di risultati costituito da appunto $N_{A_{drag}}$ elementi, come riportato di seguito presentando a titolo di esempio i risultati della simulazione con tempo di propagazione pari a 8 ore.

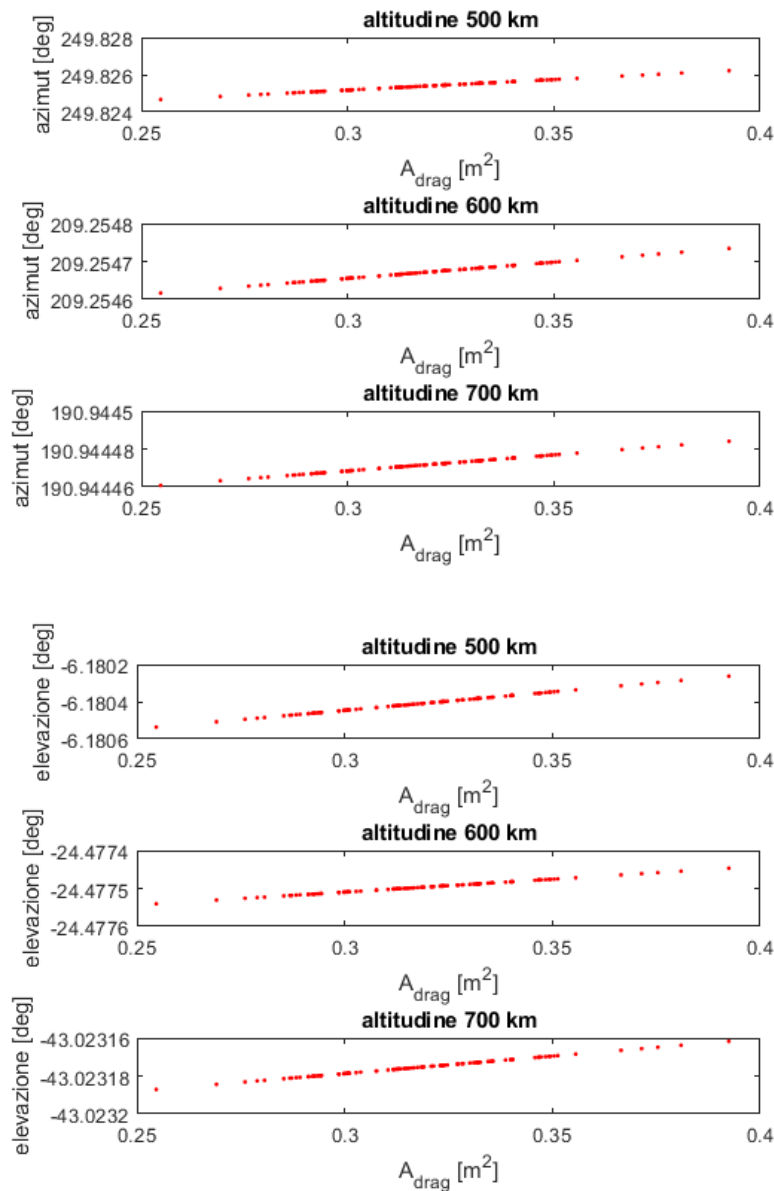


Figura 4.7 Risultati ottenuti in termini di azimuth ed elevazione per ciascun valore di A_{drag} dalla simulazione singola con tempo di propagazione pari ad 8 ore

La determinazione della deviazione standard per ogni campione di $N_{A_{drag}}$ elementi alla quota di riferimento ha permesso di stabilire una valutazione della dispersione dei risultati ottenuti a seguito della variazione dell'area effettiva esposta A_{drag} .

I valori di deviazione standard σ_{az} e σ_{el} ottenuti al termine della simulazione vengono raccolti

rispettivamente in tabella 4.4 per il tempo di propagazione di 2 ore, in tabella 4.5 per il tempo di propagazione di 8 ore ed in tabella 4.6 per il tempo di propagazione di 24 ore. I risultati tabulati vengono inoltre riportati graficamente in funzione dell'altitudine orbitale considerata.

Tabella 4.4 Deviazione standard di azimut ed elevazione per la simulazione singola con tempo di propagazione pari a 2 ore

	500 km	600 km	700 km
deviazione standard azimut [μrad]	0.1923	0.0550	0.0180
deviazione standard elevazione [μrad]	0.0900	0.0201	0.0047

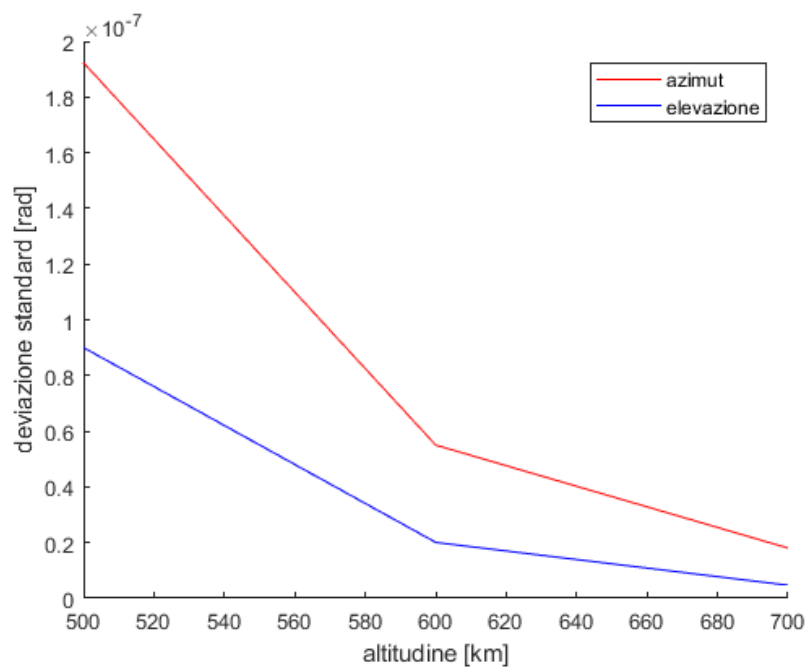


Figura 4.8 Rappresentazione grafica dei risultati di deviazione standard riportati in tabella 4.4 in funzione dell'altitudine considerata

Tabella 4.5 Deviazione standard di azimut ed elevazione per la simulazione singola con tempo di propagazione pari a 8 ore

	500 km	600 km	700 km
deviazione standard azimut [μrad]	4.8227	0.3657	0.0724
deviazione standard elevazione [μrad]	0.8512	0.2915	0.0789

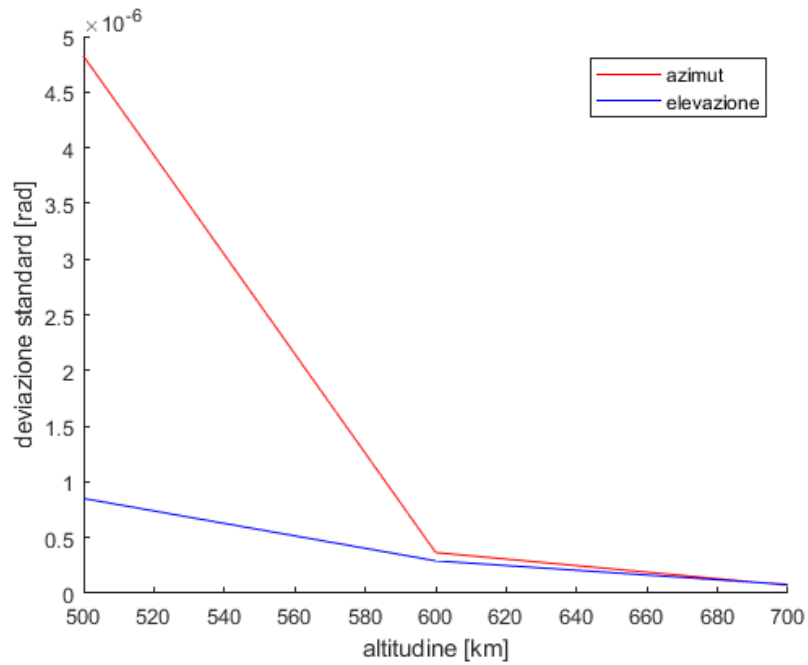


Figura 4.9 Rappresentazione grafica dei risultati di deviazione standard riportati in tabella 4.5 in funzione dell'altitudine considerata

Tabella 4.6 Deviazione standard di azimut ed elevazione per la simulazione singola con tempo di propagazione pari a 24 ore

	500 km	600 km	700 km
deviazione standard azimut [μrad]	30.7381	4.3127	0.9816
deviazione standard elevazione [μrad]	3.1905	1.6876	0.5235

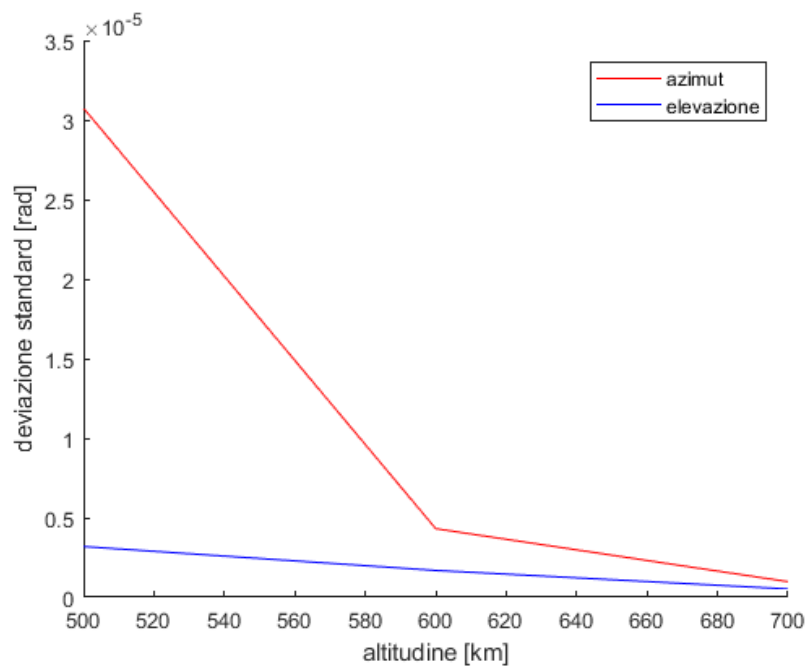


Figura 4.10 Rappresentazione grafica dei risultati di deviazione standard riportati in tabella 4.6 in funzione dell'altitudine considerata

Essendo presenti sia C_D che A_{drag} al numeratore del contributo di accelerazione perturbativa all'interno dell'equazione (4.1), una variazione percentuale equivalente dell'uno o dell'altra determina la stessa influenza sui risultati ottenuti. Dal momento che l'intervallo di incertezza imposto in termini percentuali del valore medio risulta analogo per entrambi i parametri C_D e A_{drag} , e siccome all'avvio di ogni simulazione MATLAB riproduce lo stesso schema nell'algoritmo di generazione di valori random secondo le impostazioni di default [40], i risultati ottenuti risultano i medesimi. Analizzando i grafici proposti si può notare come l'aumento di t_{prop} determini un incremento di alcuni ordini di grandezza per i valori assunti dalla deviazione standard σ , indice di un peggioramento della precisione con cui è possibile determinare la posizione del satellite al termine della propagazione. Per ciascun tempo di propagazione selezionato inoltre la deviazione standard σ presenta un andamento monotono decrescente in funzione dell'altitudine orbitale iniziale: all'incrementare della quota dunque la perturbazione di attrito atmosferico tende ad essere meno influente sulla determinazione del moto del satellite.

Si combinino linearmente i risultati secondo la relazione di seguito riportata:

$$\sigma_{tot} = \sqrt{\sum_{i=1}^k \sigma_i^2} \quad (4.2)$$

dove:

- σ_{tot} : rappresenta la deviazione standard combinata
- σ_i : rappresenta la deviazione standard singola

Si noti come l'indice k non risulti definito a priori in quanto dipendente dal numero di simulazioni generate per ciascuna tipologia di perturbazione. Nel caso corrente l'indice k assume un valore pari a 2. La tabella 4.7, la tabella 4.8 e la tabella 4.9 riportano i valori ottenuti rispettivamente per un tempo di propagazione di 2 ore, di 8 ore e di 24 ore.

Tabella 4.7 Deviazione standard combinata di azimuth ed elevazione per la simulazione singola con tempo di propagazione pari a 2 ore

	500 km	600 km	700 km
deviazione standard azimuth [μ rad]	0.2720	0.0778	0.0255
deviazione standard elevazione [μ rad]	0.1273	0.0284	0.0066

Tabella 4.8 Deviazione standard combinata di azimuth ed elevazione per la simulazione singola con tempo di propagazione pari a 8 ore

	500 km	600 km	700 km
deviazione standard azimuth [μ rad]	6.8203	0.5172	0.1024
deviazione standard elevazione [μ rad]	1.2038	0.4123	0.1116

Tabella 4.9 Deviazione standard combinata di azimut ed elevazione per la simulazione singola con tempo di propagazione pari a 24 ore

	500 km	600 km	700 km
deviazione standard azimut [μrad]	43.4703	6.0990	1.3881
deviazione standard elevazione [μrad]	4.5120	2.3867	0.7403

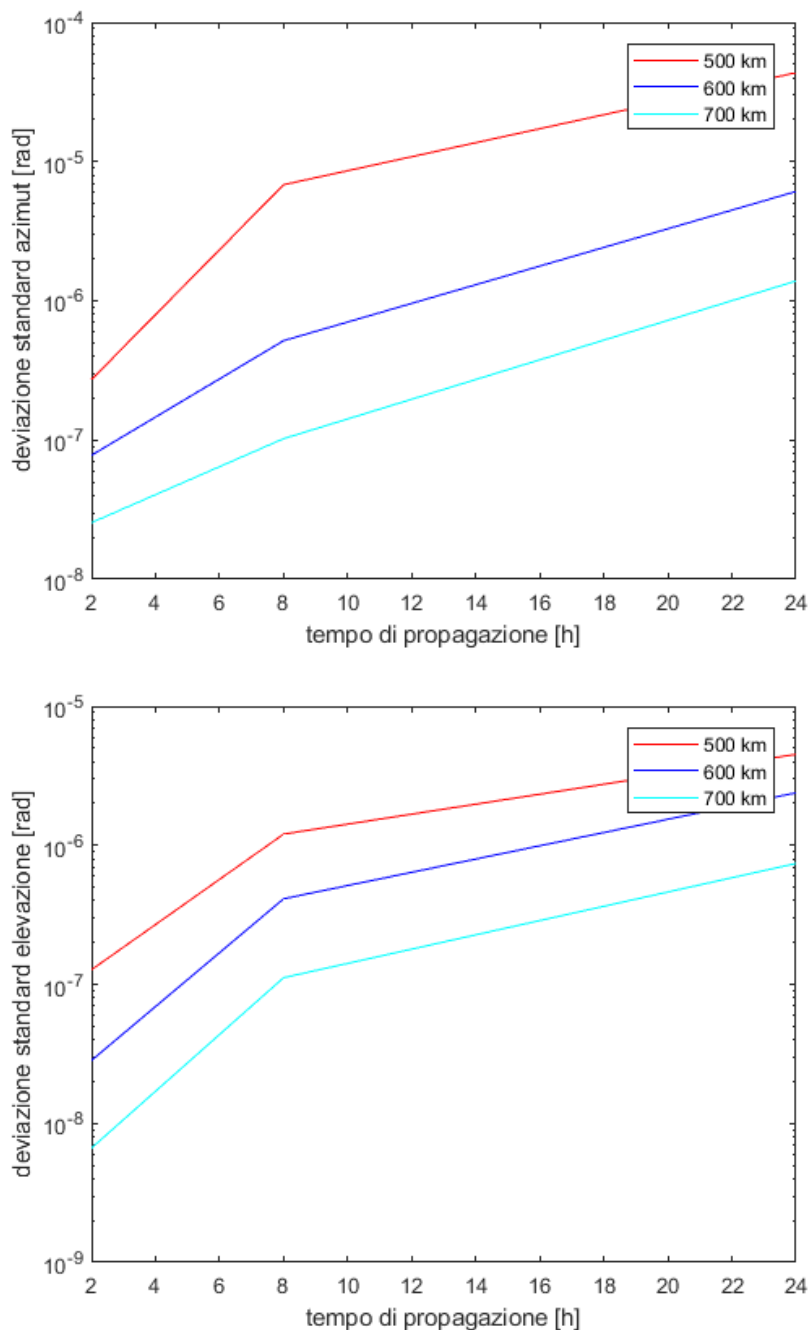


Figura 4.11 Rappresentazione grafica dei risultati di deviazione standard combinata riportati in tabella 4.7, 4.8 e 4.9 in funzione del tempo di propagazione imposto per ciascuna altitudine considerata. Rispettivamente azimut (sopra) ed elevazione (sotto)

La figura 4.11 riassume l'andamento della deviazione standard combinata all'incrementare del tempo di propagazione, rispettivamente per quanto riguarda azimut ed elevazione.

4.1.2 Risultati simulazione singola: perturbazione di pressione di radiazione solare

Nel caso in cui il termine \mathbf{a}_p sia definito esclusivamente dal contributo di accelerazione perturbativa dovuto alla pressione di radiazione solare, l'equazione del moto (1.5) assume la seguente formulazione.

$$\ddot{\mathbf{r}} = -\frac{\mu}{r^3}\mathbf{r} - \nu p_{sr} \frac{C_r A_{sr}}{m} \frac{\mathbf{r}_{\text{sat_sun}}}{|\mathbf{r}_{\text{sat_sun}}|} \quad (4.3)$$

Per tale relazione i j -esimi parametri per cui si è generato un campione di N_j elementi sono rappresentati da coefficiente di pressione di radiazione solare C_r ed area effettiva esposta alla radiazione solare A_{sr} , in quanto non noti con precisione a priori risultano di difficile determinazione, e da pressione solare p_{sr} , lievemente influenzata dalla distanza Terra-Sole e dalla condizione di attività solare.

Si consideri la simulazione dedicata alla variabilità del coefficiente di pressione di radiazione solare C_r .

Gli N_{C_r} elementi che costituiscono il campione generato per tale parametro sono evidenziati in figura 4.12, dove ciascun punto individua un differente valore assunto da C_r nel corso della simulazione e rappresenta dunque, per il medesimo set di elementi orbitali inizialmente imposti, una diversa condizione a cui il satellite risulta operare.

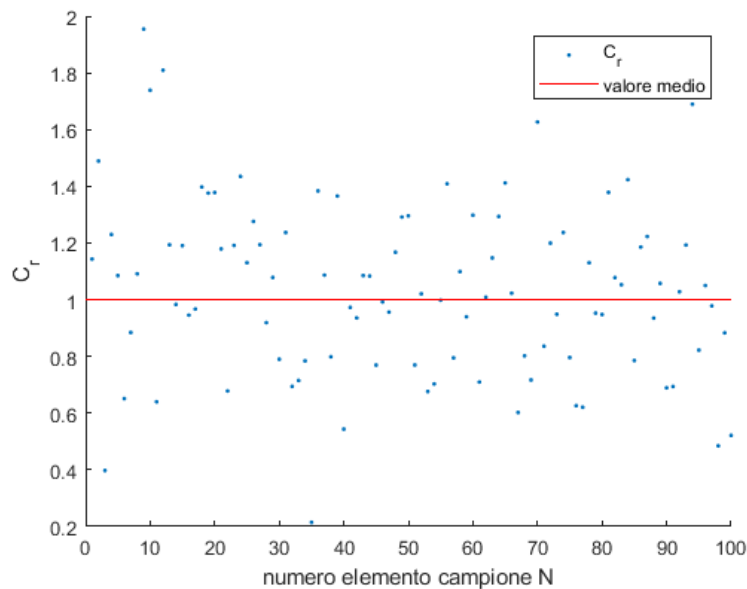


Figura 4.12 Valori di C_r impiegati nella simulazione singola

A ciascun valore assunto da C_r corrisponde una coppia (az, el) che descrive in termini angolari la posizione del satellite alla fine del periodo di propagazione. Per ognuna delle tre altitudini considerate è stato dunque generato, rispettivamente per azimut ed elevazione, un campione di risultati costituito

da appunto N_{C_r} elementi, come riportato di seguito presentando a titolo di esempio i risultati della simulazione con tempo di propagazione pari a 8 ore.

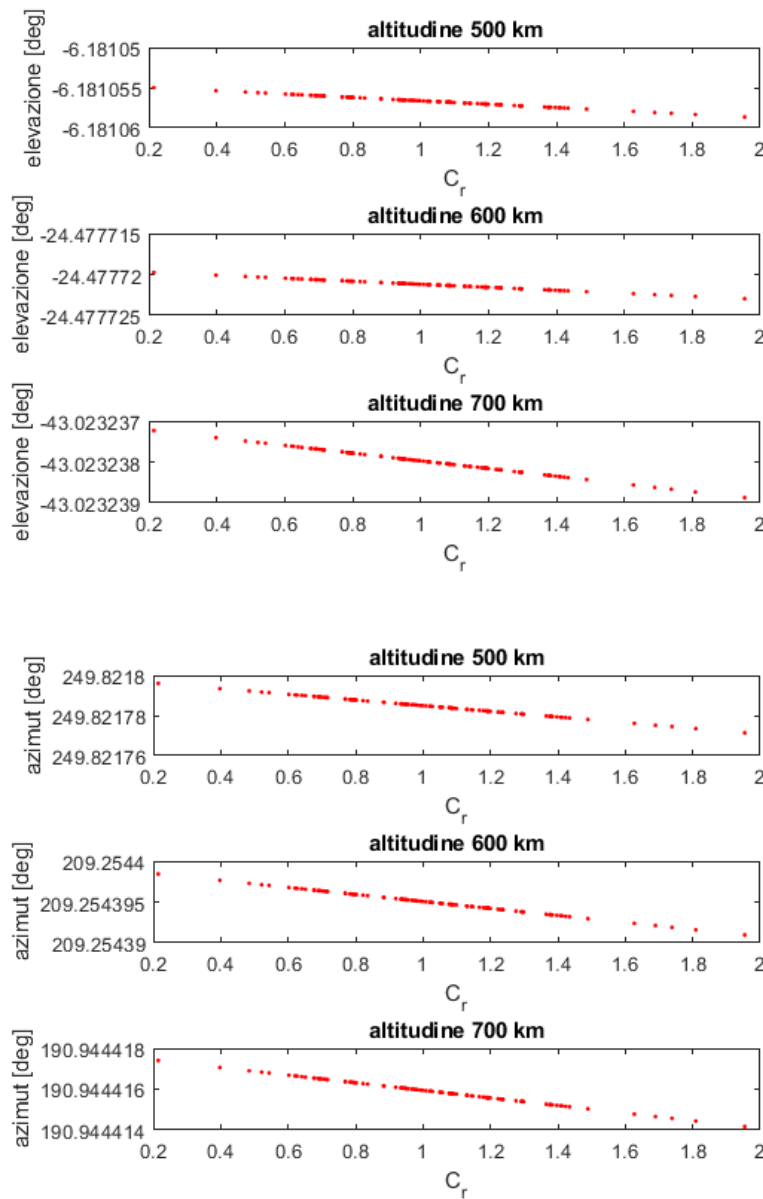


Figura 4.13 Risultati ottenuti in termini di azimut ed elevazione per ciascun valore di C_r dalla simulazione singola con tempo di propagazione pari ad 8 ore

La determinazione della deviazione standard per ogni campione di N_{C_r} elementi alla quota di riferimento ha permesso di stabilire una valutazione della dispersione dei risultati ottenuti a seguito della variazione del coefficiente di pressione di radiazione solare C_r .

I valori di deviazione standard σ_{az} e σ_{el} ottenuti al termine della simulazione vengono raccolti rispettivamente in tabella 4.10 per il tempo di propagazione di 2 ore, in tabella 4.11 per il tempo di propagazione di 8 ore ed in tabella 4.12 per il tempo di propagazione di 24 ore. I risultati tabulati vengono inoltre riportati graficamente in funzione dell'altitudine orbitale considerata.

Tabella 4.10 Deviazione standard di azimuth ed elevazione per la simulazione singola con tempo di propagazione pari a 2 ore

	500 km	600 km	700 km
deviazione standard azimuth [μrad]	0.0057	0.0094	0.0134
deviazione standard elevazione [μrad]	0.0001	0.0003	0.0008

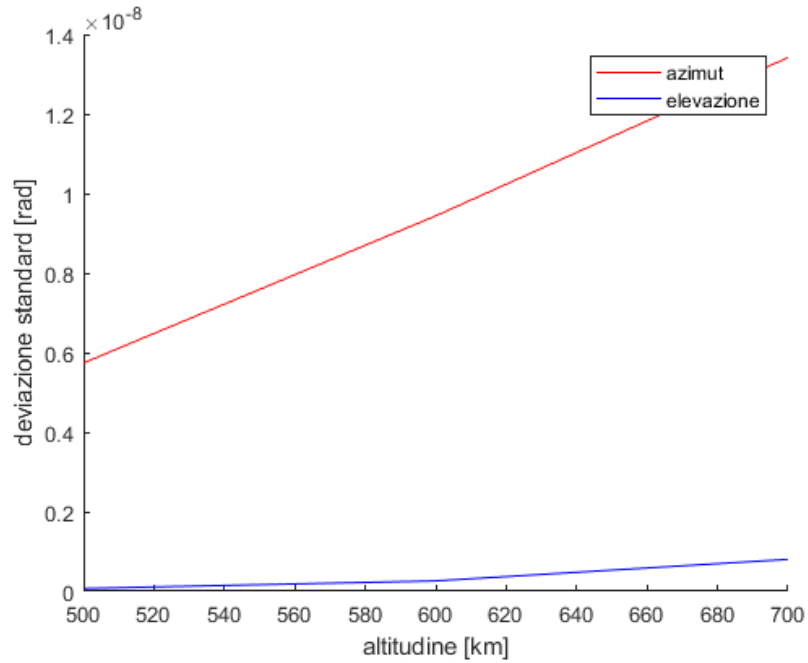


Figura 4.14 Rappresentazione grafica dei risultati di deviazione standard riportati in tabella 4.10 in funzione dell'altitudine considerata

Tabella 4.11 Deviazione standard di azimuth ed elevazione per la simulazione singola con tempo di propagazione pari a 8 ore

	500 km	600 km	700 km
deviazione standard azimuth [μrad]	0.0767	0.0232	0.0101
deviazione standard elevazione [μrad]	0.0114	0.0100	0.0051

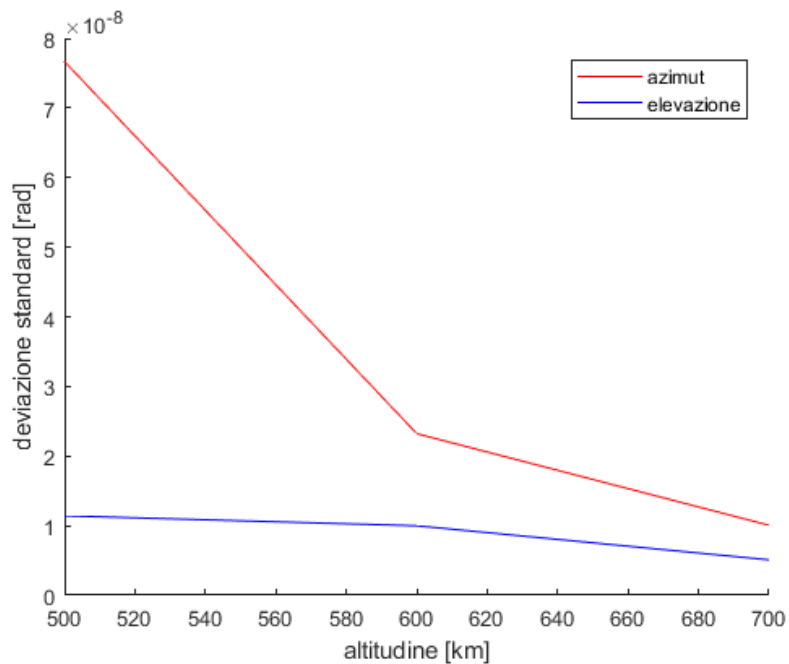


Figura 4.15 Rappresentazione grafica dei risultati di deviazione standard riportati in tabella 4.11 in funzione dell'altitudine considerata

Tabella 4.12 Deviazione standard di azimut ed elevazione per la simulazione singola con tempo di propagazione pari a 24 ore

	500 km	600 km	700 km
deviazione standard azimut [μrad]	0.1588	0.0706	0.0115
deviazione standard elevazione [μrad]	0.0435	0.0177	0.0071

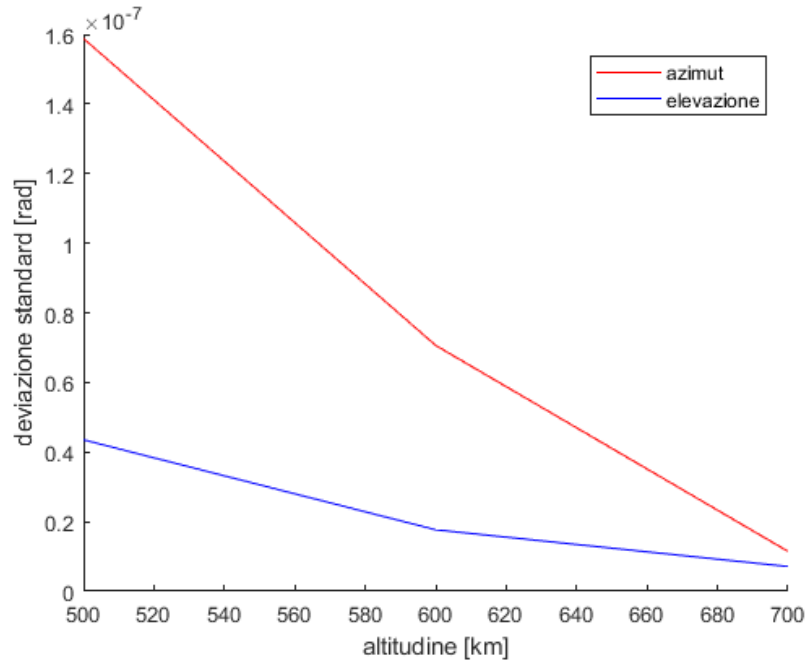


Figura 4.16 Rappresentazione grafica dei risultati di deviazione standard riportati in tabella 4.12 in funzione dell'altitudine considerata

Si consideri la simulazione dedicata alla variabilità dell'area effettiva esposta A_{sr} . Gli $N_{A_{sr}}$ elementi che costituiscono il campione generato per tale parametro sono evidenziati in figura 4.17, dove ciascun punto individua un differente valore assunto da A_{sr} nel corso della simulazione e rappresenta dunque, per il medesimo set di elementi orbitali inizialmente imposti, una diversa condizione a cui il satellite risulta operare.

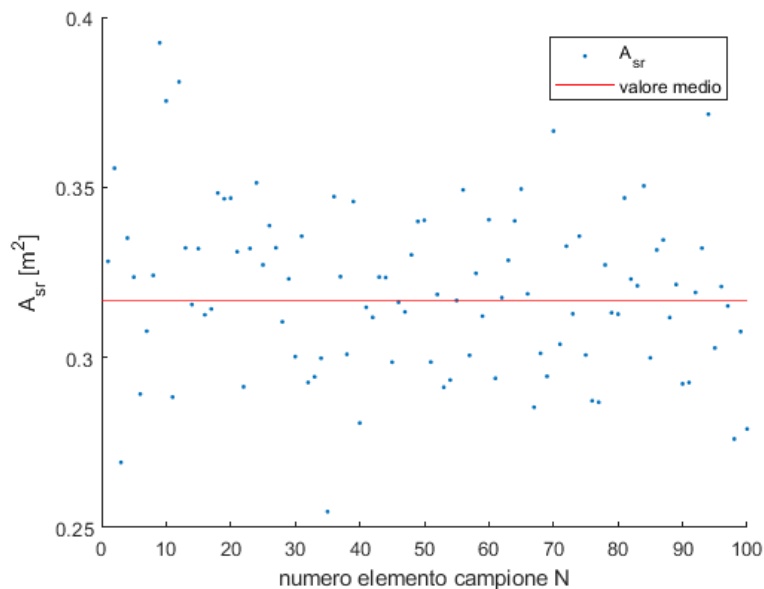


Figura 4.17 Valori di A_{sr} impiegati nella simulazione singola

A ciascun valore assunto da A_{sr} corrisponde una coppia (az , el) che descrive in termini angolari la posizione del satellite alla fine del periodo di propagazione. Per ognuna delle tre altitudini considerate è stato dunque generato, rispettivamente per azimuth ed elevazione, un campione di risultati costituito da appunto $N_{A_{sr}}$ elementi, come riportato di seguito presentando a titolo di esempio i risultati della simulazione con tempo di propagazione pari a 8 ore.

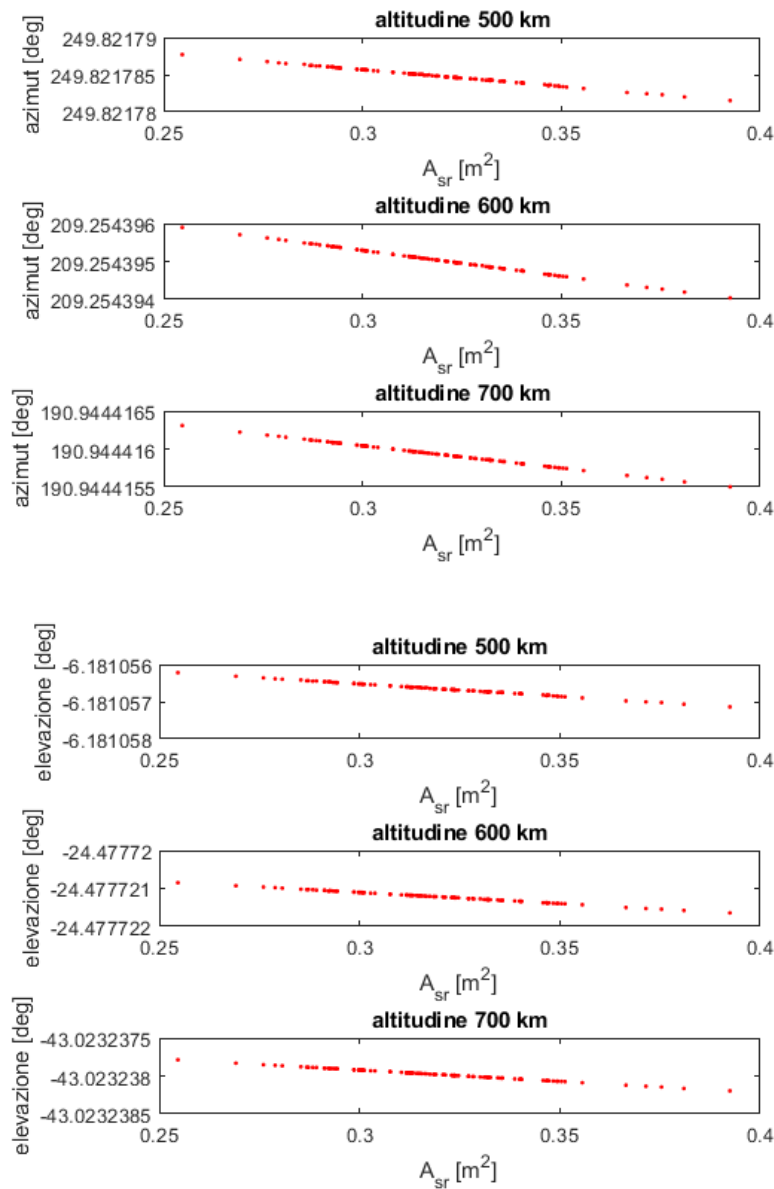


Figura 4.18 Risultati ottenuti in termini di azimuth ed elevazione per ciascun valore di A_{sr} dalla simulazione singola con tempo di propagazione pari ad 8 ore

La determinazione della deviazione standard per ogni campione di $N_{A_{sr}}$ elementi alla quota di riferimento ha permesso di stabilire una valutazione della dispersione dei risultati ottenuti a seguito della variazione dell'area effettiva esposta A_{sr} .

I valori di deviazione standard σ_{az} e σ_{el} ottenuti al termine della simulazione vengono raccolti

rispettivamente in tabella 4.13 per il tempo di propagazione di 2 ore, in tabella 4.14 per il tempo di propagazione di 8 ore ed in tabella 4.15 per il tempo di propagazione di 24 ore. I risultati tabulati vengono inoltre riportati graficamente in funzione dell'altitudine orbitale considerata.

Tabella 4.13 Deviazione standard di azimuth ed elevazione per la simulazione singola con tempo di propagazione pari a 2 ore

	500 km	600 km	700 km
deviazione standard azimuth [μrad]	0.0014	0.0024	0.0034
deviazione standard elevazione [μrad]	0.0000	0.0001	0.0002

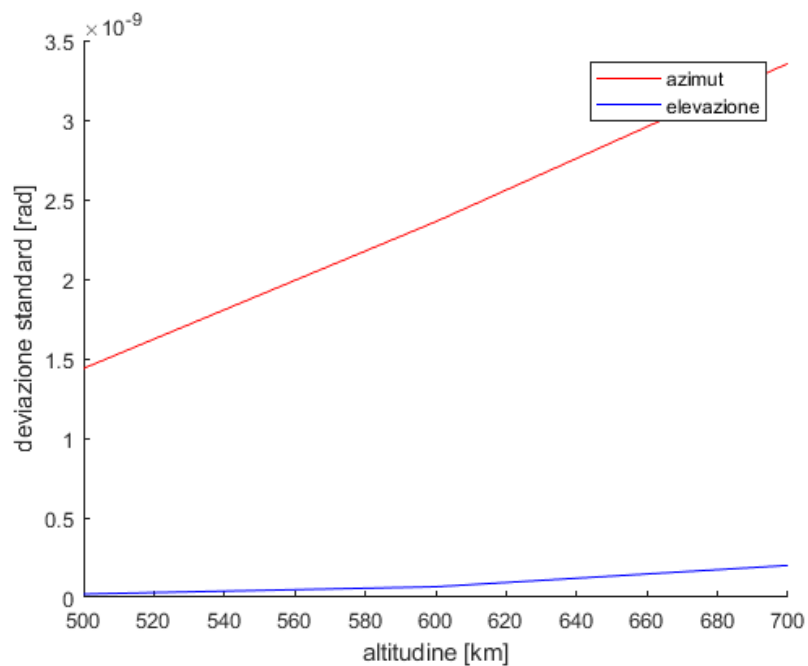


Figura 4.19 Rappresentazione grafica dei risultati di deviazione standard riportati in tabella 4.13 in funzione dell'altitudine considerata

Tabella 4.14 Deviazione standard di azimuth ed elevazione per la simulazione singola con tempo di propagazione pari a 8 ore

	500 km	600 km	700 km
deviazione standard azimuth [μrad]	0.0192	0.0058	0.0025
deviazione standard elevazione [μrad]	0.0029	0.0025	0.0013

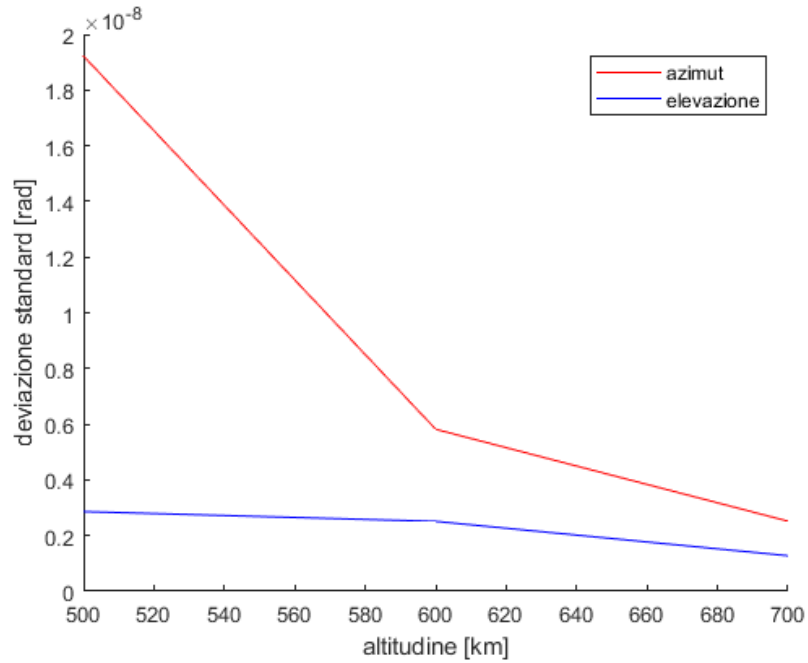


Figura 4.20 Rappresentazione grafica dei risultati di deviazione standard riportati in tabella 4.14 in funzione dell'altitudine considerata

Tabella 4.15 Deviazione standard di azimuth ed elevazione per la simulazione singola con tempo di propagazione pari a 24 ore

	500 km	600 km	700 km
deviazione standard azimuth [μrad]	0.0397	0.0178	0.0028
deviazione standard elevazione [μrad]	0.0109	0.0045	0.0018

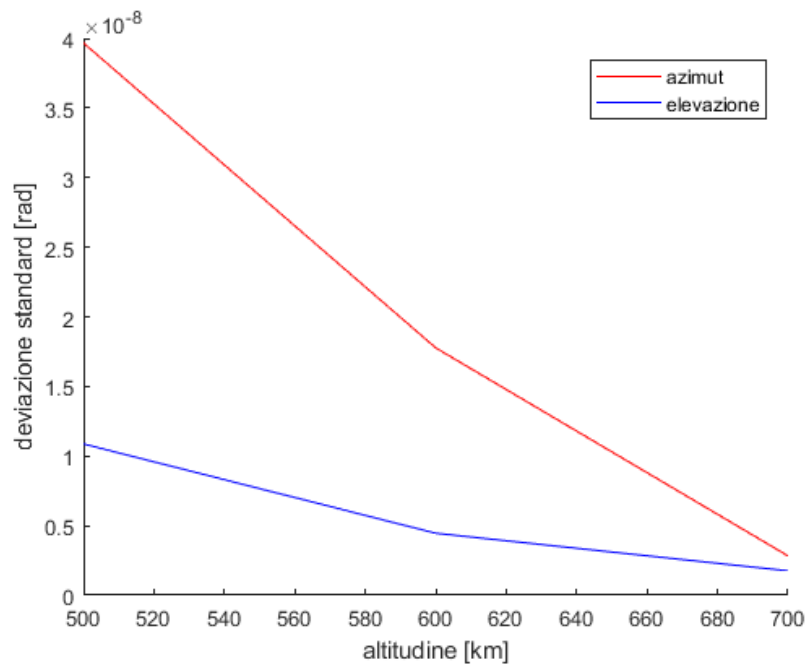


Figura 4.21 Rappresentazione grafica dei risultati di deviazione standard riportati in tabella 4.15 in funzione dell'altitudine considerata

Si consideri la simulazione dedicata alla variabilità della pressione di radiazione solare p_{sr} . Gli $N_{p_{sr}}$ elementi che costituiscono il campione generato per tale parametro sono evidenziati in figura 4.22, dove ciascun punto individua un differente valore assunto da p_{sr} nel corso della simulazione e rappresenta dunque, per il medesimo *set* di elementi orbitali inizialmente imposti, una diversa condizione a cui il satellite risulta operare.

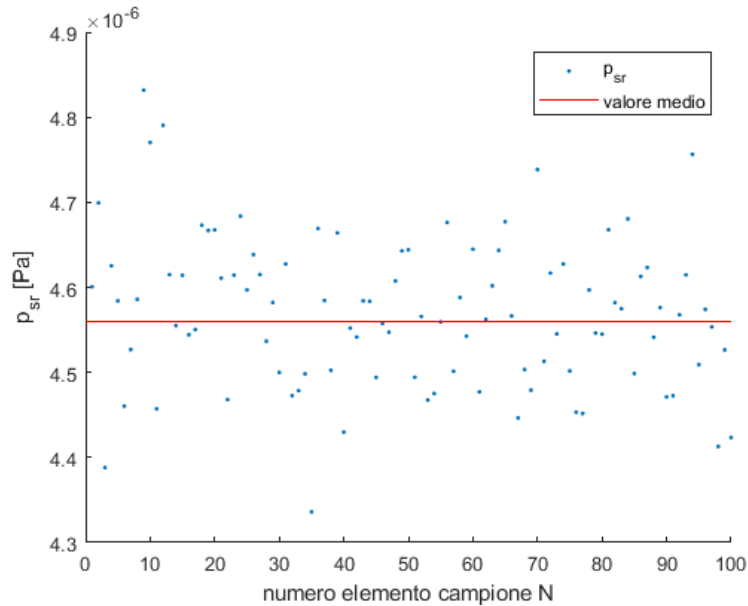


Figura 4.22 Valori di p_{sr} impiegati nella simulazione singola

A ciascun valore assunto da p_{sr} corrisponde una coppia (az, el) che descrive in termini angolari la posizione del satellite alla fine del periodo di propagazione. Per ognuna delle tre altitudini considerate è stato dunque generato, rispettivamente per azimuth ed elevazione, un campione di risultati costituito da appunto $N_{p_{sr}}$ elementi, come riportato di seguito presentando a titolo di esempio i risultati della simulazione con tempo di propagazione pari a 8 ore.

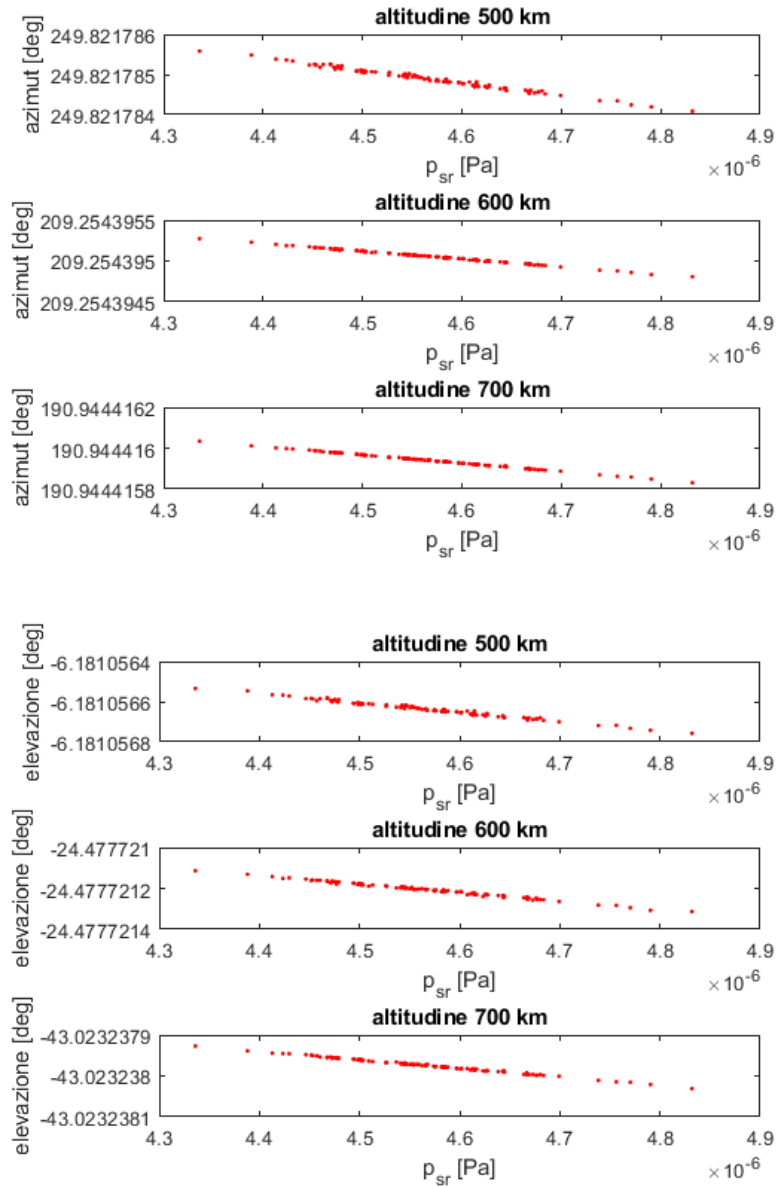


Figura 4.23 Risultati ottenuti in termini di azimuth ed elevazione per ciascun valore di p_{sr} dalla simulazione singola con tempo di propagazione pari ad 8 ore

La determinazione della deviazione standard per ogni campione di $N_{p_{sr}}$ elementi alla quota di riferimento ha permesso di stabilire una valutazione della dispersione dei risultati ottenuti a seguito della variazione del valore di pressione di radiazione solare p_{sr} .

I valori di deviazione standard σ_{az} e σ_{el} ottenuti al termine della simulazione vengono raccolti rispettivamente in tabella 4.16 per il tempo di propagazione di 2 ore, in tabella 4.17 per il tempo di propagazione di 8 ore ed in tabella 4.18 per il tempo di propagazione di 24 ore. I risultati tabulati vengono inoltre riportati graficamente in funzione dell'altitudine orbitale considerata.

Tabella 4.16 Deviazione standard di azimut ed elevazione per la simulazione singola con tempo di propagazione pari a 2 ore

	500 km	600 km	700 km
deviazione standard azimut [μrad]	0.0004	0.0006	0.0008
deviazione standard elevazione [μrad]	0.0000	0.0000	0.0001

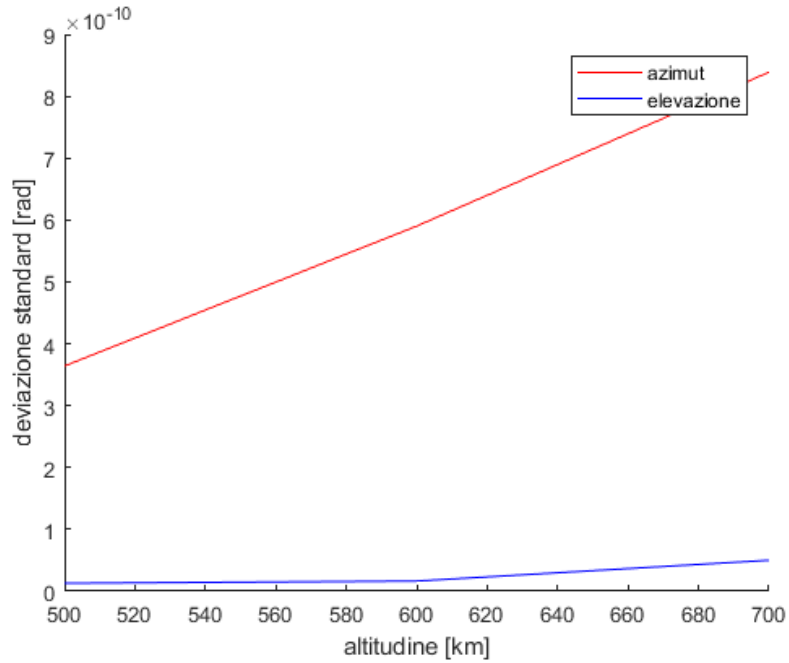


Figura 4.24 Rappresentazione grafica dei risultati di deviazione standard riportati in tabella 4.16 in funzione dell'altitudine considerata

Tabella 4.17 Deviazione standard di azimut ed elevazione per la simulazione singola con tempo di propagazione pari a 8 ore

	500 km	600 km	700 km
deviazione standard azimut [μrad]	0.0048	0.0015	0.0006
deviazione standard elevazione [μrad]	0.0007	0.0006	0.0003

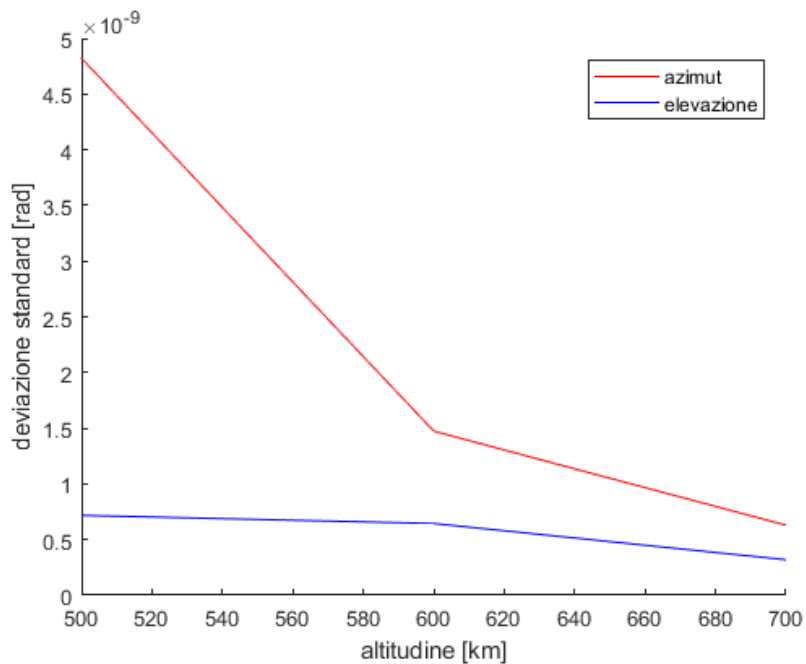


Figura 4.25 Rappresentazione grafica dei risultati di deviazione standard riportati in tabella 4.17 in funzione dell'altitudine considerata

Tabella 4.18 Deviazione standard di azimut ed elevazione per la simulazione singola con tempo di propagazione pari a 24 ore

	500 km	600 km	700 km
deviazione standard azimut [μrad]	0.0103	0.0046	0.0007
deviazione standard elevazione [μrad]	0.0027	0.0012	0.0005

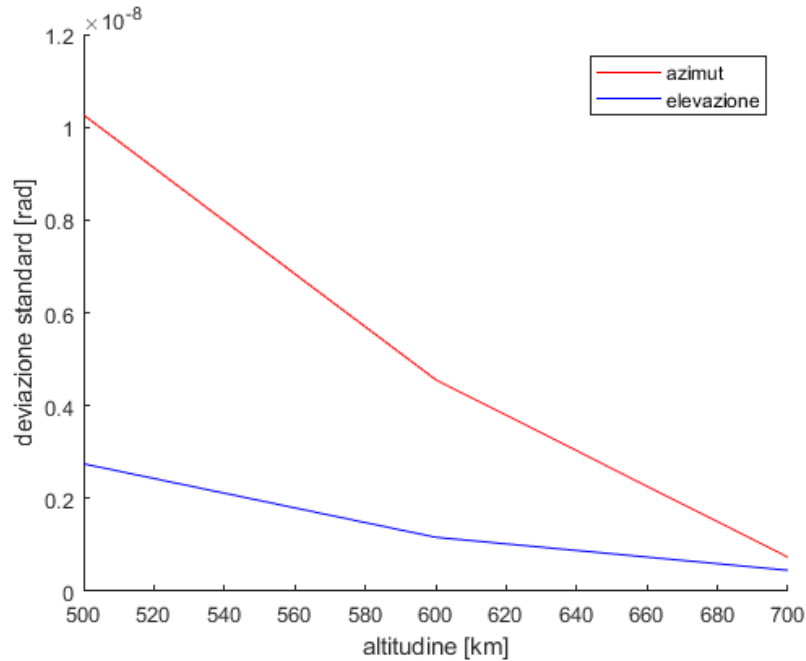


Figura 4.26 Rappresentazione grafica dei risultati di deviazione standard riportati in tabella 4.18 in funzione dell'altitudine considerata

Essendo C_r , A_{drag} e p_{sr} collocati al numeratore del contributo di accelerazione perturbativa all'interno dell'equazione (4.3), un'equivalente variazione percentuale di ciascuno dei tre parametri determina la stessa influenza sui risultati ottenuti. Tuttavia, dal momento che l'intervallo di incertezza in termini percentuali del valore medio risulta il più ampio per quanto riguarda il coefficiente di pressione di radiazione solare C_r , i corrispettivi risultati prodotti dalle simulazioni a questo dedicati risultano maggiormente dispersivi in termini di deviazione standard. D'altro canto, dato, siccome la pressione di radiazione solare p_{sr} presenta l'intervallo di incertezza in termini percentuali del valore medio più limitato tra i tre parametri considerati, i corrispettivi risultati prodotti dalle simulazioni a questa dedicate risultano meno dispersivi in termini di deviazione standard.

Analizzando i grafici proposti, anche in questo caso in generale l'aumento di t_{prop} determina un incremento dei valori di deviazione standard σ assunti. Osservando inoltre per ciascuno dei tre parametri i risultati ottenuti per i tempi di propagazione selezionati, a differenza della perturbazione precedente, non risulta evidente un andamento definito della deviazione standard σ in funzione dell'altitudine orbitale iniziale, in quanto per la simulazione di 2 ore è monotono crescente mentre per le altre due è monotono decrescente.

Si combinino linearmente i risultati secondo la relazione (4.2). Nel caso in esame l'indice k assume un valore pari a 3. La tabella 4.19, la tabella 4.20 e la tabella 4.21 riportano i valori ottenuti rispettivamente per un tempo di propagazione di 2 ore, di 8 ore e di 24 ore.

Tabella 4.19 Deviazione standard combinata di azimuth ed elevazione per la simulazione singola con tempo di propagazione pari a 2 ore

	500 km	600 km	700 km
deviazione standard azimuth [μrad]	0.0059	0.0097	0.0139
deviazione standard elevazione [μrad]	0.0001	0.0003	0.0008

Tabella 4.20 Deviazione standard combinata di azimuth ed elevazione per la simulazione singola con tempo di propagazione pari a 8 ore

	500 km	600 km	700 km
deviazione standard azimuth [μrad]	0.0792	0.0240	0.0104
deviazione standard elevazione [μrad]	0.0118	0.0103	0.0053

Tabella 4.21 Deviazione standard combinata di azimuth ed elevazione per la simulazione singola con tempo di propagazione pari a 24 ore

	500 km	600 km	700 km
deviazione standard azimuth [μrad]	0.1640	0.0730	0.0118
deviazione standard elevazione [μrad]	0.0449	0.0183	0.0073

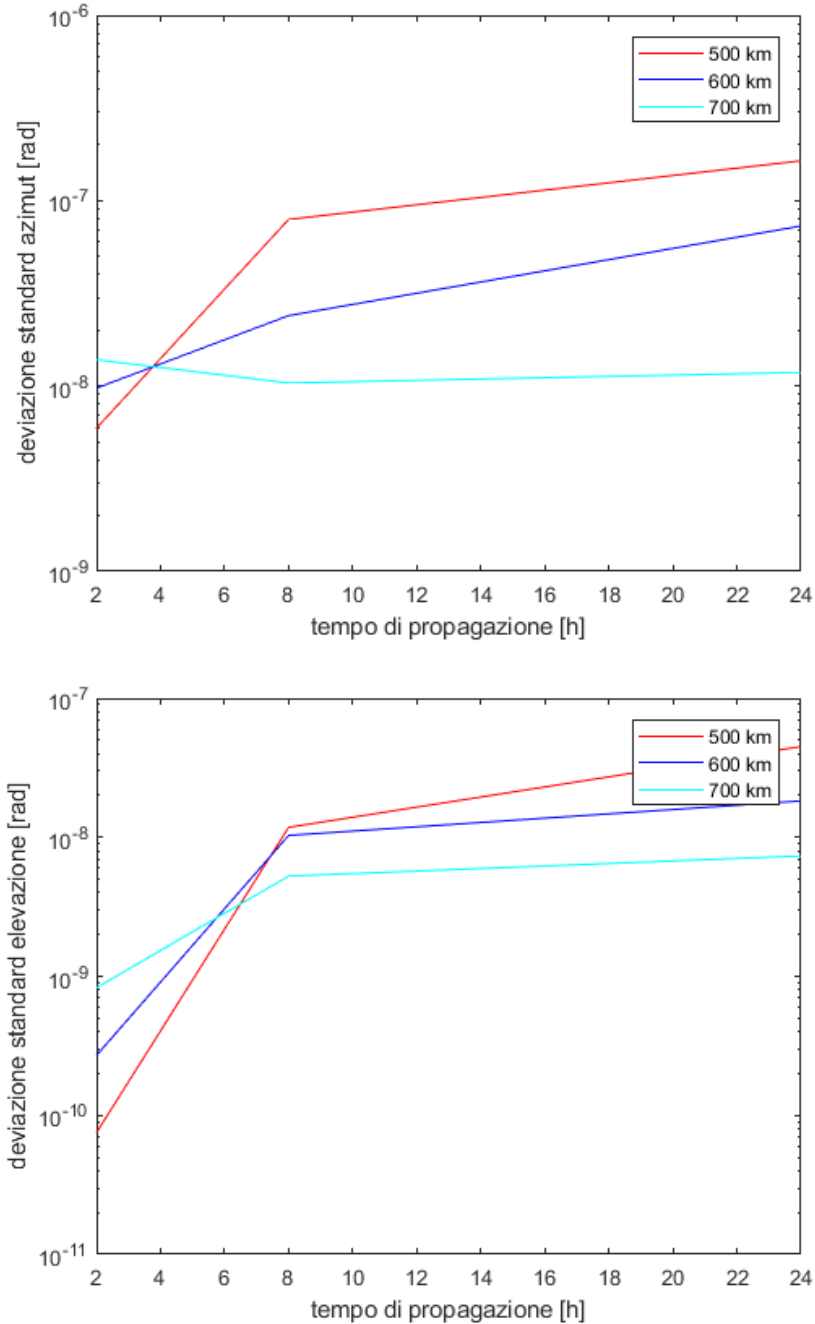


Figura 4.27 Rappresentazione grafica dei risultati di deviazione standard combinata riportati in tabella 4.19, 4.20 e 4.21 in funzione del tempo di propagazione imposto per ciascuna altitudine considerata. Rispettivamente azimuth (sopra) ed elevazione (sotto)

La figura 4.27 riassume l'andamento della deviazione standard combinata all'incrementare del tempo di propagazione, rispettivamente per quanto riguarda azimuth ed elevazione.

Da un confronto tra i valori tabulati ottenuti dalle simulazioni per le due differenti tipologie di perturbazione, si può dedurre come l'attrito atmosferico risulti tra i due, per l'intervallo di altitudini orbitali considerato e nelle condizioni di massima attività solare, il contributo che maggiormente influisce sull'incertezza della determinazione della posizione del satellite al termine della propagazione. I valori di σ ottenuti dalle simulazioni comprensive la perturbazione di attrito

atmosferico risultano infatti di alcuni ordini di grandezza superiori rispetto a quelli ottenuti dalle simulazioni comprensive la perturbazione di pressione di radiazione solare.

4.1.3 Risultati simulazione singola: errore misura GPS

Sono state generate due simulazioni singole per valutare l'influenza che l'incertezza sulle condizioni orbitali ad inizio propagazione, correlate ad un'errata determinazione dello stato iniziale del satellite a seguito dell'incertezza sulla misura GPS, presenta sui risultati ottenuti.

La prima è stata prodotta considerando l'attrito atmosferico come unico contributo di accelerazione perturbativa. Le equazioni del moto impiegate corrispondono alla formulazione presentata mediante la relazione (4.1).

La seconda è stata prodotta considerando la pressione di radiazione solare come unico contributo di accelerazione perturbativa. Le equazioni del moto impiegate corrispondono alla formulazione presentata mediante la relazione (4.3).

Per entrambi i casi i vari parametri associati alla perturbazione presa in esame assumono il proprio valore medio. È stato inoltre selezionato un tempo di propagazione pari a 8 ore. In ogni simulazione il numero di elementi vettoriali N_{GPS} che costituiscono il campione generato per rappresentare l'errore dovuto alla misura GPS è stato posto pari a 100. I differenti valori delle tre componenti che costituiscono ciascun elemento \mathbf{r}_{GPS} del campione vengono riportati in figura 4.28.

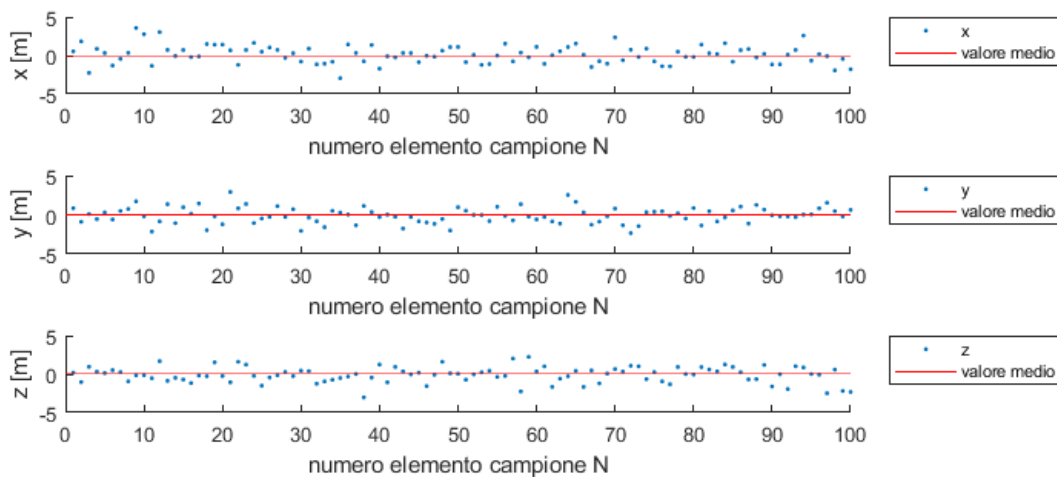


Figura 4.28 Valori delle componenti (x,y,z) impiegate nella simulazione singola a rappresentare l'errore GPS

I risultati di deviazione standard ottenuti al termine della simulazione comprensiva il contributo di accelerazione perturbativa dovuto all'attrito atmosferico vengono raccolti in tabella 4.22.

Tabella 4.22 Deviazione standard di azimuth ed elevazione per la simulazione singola dedicata all'errore GPS comprensiva della perturbazione di attrito atmosferico

	500 km	600 km	700 km
deviazione standard azimuth [μrad]	14.4704	4.6637	3.3222
deviazione standard elevazione [μrad]	2.8751	3.8521	3.6347

Da un confronto con i valori riportati in tabella 4.8 si può dedurre come l'errore associato alla misura GPS che definisce le condizioni iniziali dell'orbita, per il tempo di propagazione di 8 ore imposto, risulti più influente sulla dispersione dei risultati ottenuti rispetto al contributo di accelerazione perturbativa dovuto all'attrito atmosferico. Comparando sempre i risultati ottenuti, si nota inoltre che la differenza tra gli ordini di grandezza dei valori di deviazione standard ottenuti dalla simulazione dedicata all'errore della misura GPS e di quelli ottenuti dalle simulazioni dedicate alla valutazione dell'influenza dei singoli parametri associati alla perturbazione stessa tende ad aumentare all'incrementare dell'altitudine iniziale di riferimento considerata. La figura 4.29 riassume graficamente quanto esposto, rispettivamente per azimuth ed elevazione.

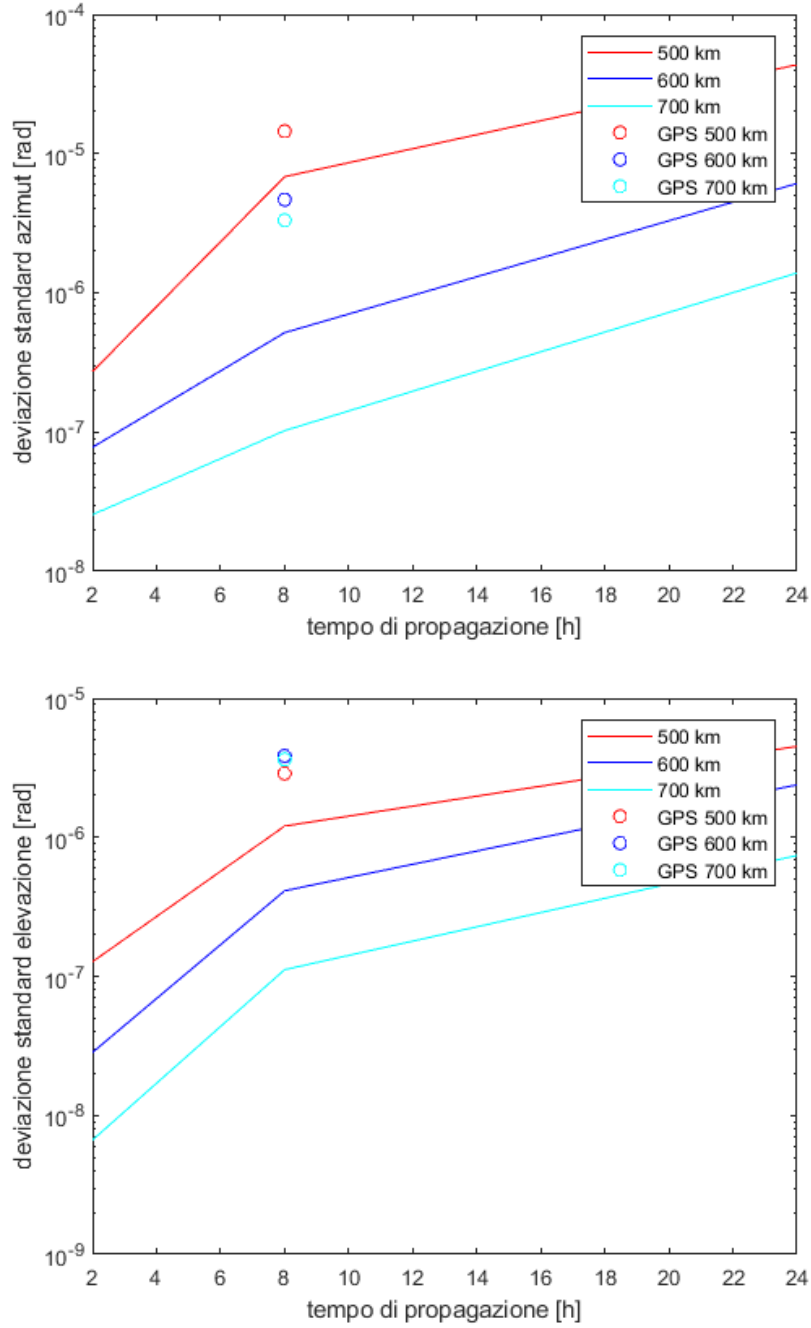


Figura 4.29 Rappresentazione grafica del confronto tra i risultati di deviazione standard riportati in tabella 4.7, 4.8 e 4.9 in funzione del tempo di propagazione imposto ed i risultati riportati in tabella 4.22 per ciascuna altitudine considerata. Rispettivamente azimut (sopra) ed elevazione (sotto)

I risultati di deviazione standard ottenuti al termine della simulazione comprensiva il contributo di accelerazione perturbativa dovuto alla pressione di radiazione solare vengono raccolti in tabella 4.23.

Tabella 4.23 Deviazione standard di azimut ed elevazione per la simulazione singola dedicata all'errore GPS comprensiva della perturbazione di pressione di radiazione solare

	500 km	600 km	700 km
deviazione standard azimut [μ rad]	7.6832	2.4762	1.7643
deviazione standard elevazione [μ rad]	1.5279	2.0463	1.9307

Da un confronto con i valori riportati in tabella 4.20 si può dedurre come, anche in questa circostanza, l'errore associato alla misura GPS che definisce le condizioni iniziali dell'orbita, per il tempo di propagazione di 8 ore impostato, risulti più influente sulla dispersione dei risultati ottenuti rispetto al contributo di accelerazione perturbativa dovuto alla pressione di radiazione solare. Sempre comparando i risultati ottenuti, si nota inoltre in maniera più evidente rispetto al caso precedente che la differenza tra gli ordini di grandezza dei valori di deviazione standard ottenuti dalla simulazione dedicata all'errore della misura GPS e di quelli ottenuti dalle simulazioni dedicate alla valutazione dell'influenza dei singoli parametri associati alla perturbazione stessa tende ad aumentare all'incrementare dell'altitudine iniziale di riferimento considerata. La figura seguente riassume graficamente quanto esposto, rispettivamente per azimut ed elevazione.

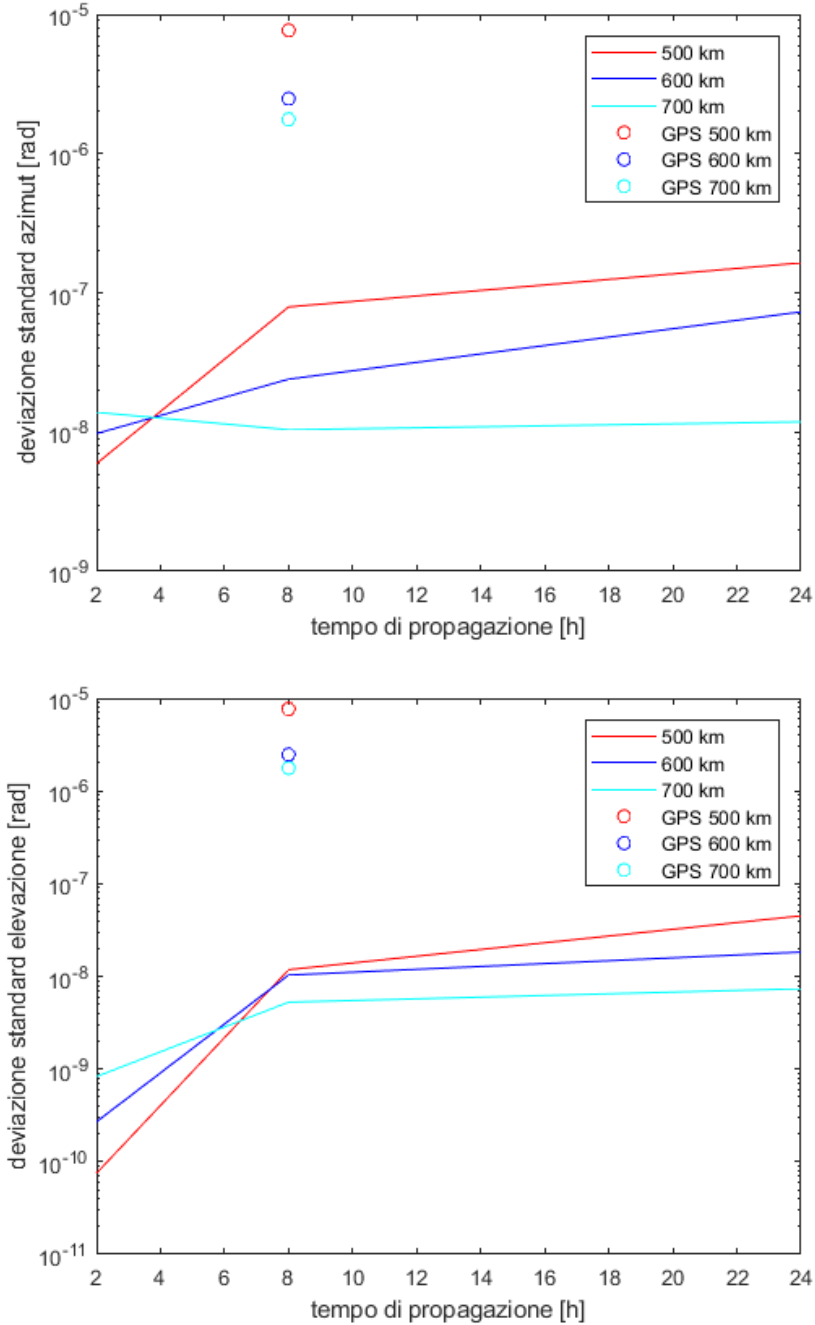


Figura 4.30 Rappresentazione grafica del confronto tra i risultati di deviazione standard riportati in tabella 4.19, 4.20 e 4.21 in funzione del tempo di propagazione imposto ed i risultati riportati in tabella 4.23 per ciascuna altitudine considerata. Rispettivamente azimut (sopra) ed elevazione (sotto)

Una precisa conoscenza delle condizioni iniziali che descrivono l'orbita ed identificano lo stato del satellite rappresenta una prerogativa fondamentale per poter ottenere risultati meno dispersivi in termini di deviazione standard.

4.2 Risultati della simulazione completa

La simulazione definita *completa* è stata computata includendo contemporaneamente all'interno del termine \mathbf{a}_p delle equazioni del moto ogni contributo di accelerazione perturbativa preso in esame. Nello specifico le equazioni del moto (1.5) assumono la seguente formulazione:

$$\ddot{\mathbf{r}} = -\frac{\mu}{r^3}\mathbf{r} + \nabla U_{aspherical} - \frac{1}{2} \frac{C_D A_{drag}}{m} \rho v_{rel}^2 \frac{\mathbf{v}_{rel}}{|\mathbf{v}_{rel}|} - v p_{sr} \frac{C_r A_{sr}}{m} \frac{\mathbf{r}_{sat_sun}}{|\mathbf{r}_{sat_sun}|} \quad (4.3)$$

dove, al secondo membro dell'equazione:

- il secondo termine rappresenta il contributo di accelerazione perturbativa dovuto alla non sfericità del campo gravitazionale terrestre
- il terzo termine rappresenta il contributo di accelerazione perturbativa dovuto all'attrito atmosferico
- il quarto termine rappresenta il contributo di accelerazione perturbativa dovuto alla pressione di radiazione solare

Per quanto concerne il contributo di accelerazione perturbativa dovuto alla non sfericità del campo gravitazionale terrestre, si è scelto di considerare un grado n per l'espansione in serie in armoniche sferiche pari a 20 dal momento che gli effetti perturbativi più rilevanti sono associati ai primi termini dell'espansione [2] [21] [12]. Per quanto concerne i due contributi restanti, invece, i j -esimi parametri per cui si è generato un campione costituito da N_j elementi sono analoghi a quelli delle simulazioni singole precedentemente presentati I valori assunti vengono evidenziati in figura 4.31.

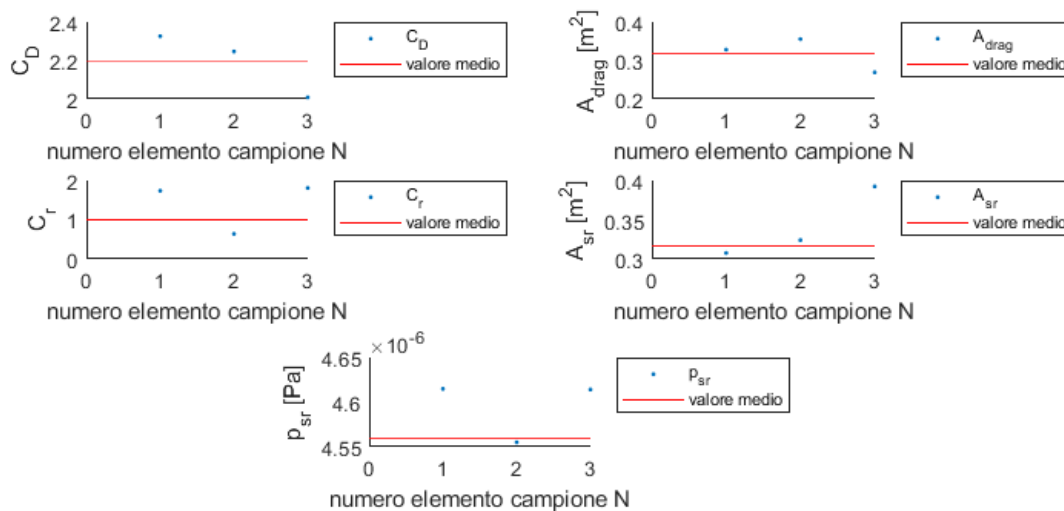


Figura 4.31 Valori dei parametri associati alle perturbazioni orbitali impiegati nella simulazione completa

Non è stato preso in considerazione l'errore dovuto alla misura GPS al fine di valutare esclusivamente l'effetto complessivo dovuto alla compartecipazione delle perturbazioni orbitali.

La simulazione completa permette di ottenere una descrizione un po'più realistica della possibile condizione a cui risulta operare il satellite, dal momento che vengono presi in esame contemporaneamente differenti fattori che incidono sulla determinazione del moto di questo. I risultati ottenuti in termini di deviazione standard al termine di una propagazione di 8 ore vengono raccolti in tabella 4.24. La figura 4.32 ne riporta l'andamento in funzione dell'altitudine orbitale iniziale considerata.

Tabella 4.24 Deviazione standard di azimut ed elevazione per la simulazione completa

	500 km	600 km	700 km
deviazione standard azimut [μ rad]	8.9615	0.6560	0.1296
deviazione standard elevazione [μ rad]	1.6663	0.5396	0.1442

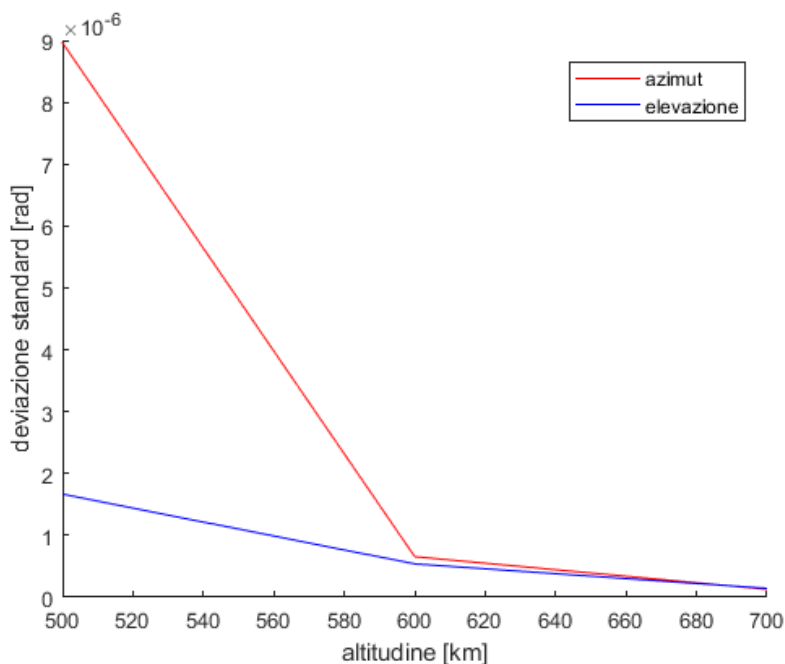


Figura 4.32 Rappresentazione grafica dei risultati di deviazione standard riportati in tabella 4.24 in funzione dell'altitudine considerata

I valori tabulati sono superiori rispetto a quelli ottenuti per le varie simulazioni *singole*: la compartecipazione contemporanea di differenti tipologie di perturbazione orbitale sulla determinazione del moto del satellite rende la valutazione della posizione di questo al termine del tempo di propagazione più incerta. Si noti inoltre come l'ordine di grandezza dei risultati riportati sia comparabile con quello dei risultati ottenuti per la simulazione singola dedicata alla perturbazione di attrito atmosferico. Ciò conferma come tale contributo costituisca assieme alla non sfericità del campo gravitazionale terrestre, per l'intervallo di altitudini considerate e nelle condizioni assunte di massima attività solare, una delle maggiori fonti di influenza del moto del satellite.

Bisogna tuttavia tenere in considerazione come il caso analizzato, seppur fornisca una descrizione più realistica della condizione a cui possibilmente risulta ad operare il satellite rispetto ai casi di singola perturbazione, rappresenti sostanzialmente una semplificazione della situazione reale.

Differenti altri termini perturbativi, di cui non si è tenuto conto nel corso della trattazione di tale lavoro, influiscono infatti, sebbene con un livello di intensità inferiore, sul moto del satellite, producendo così una deviazione dai risultati riportati. Si ritiene comunque che quelli ottenuti, per l'intervallo di altitudini considerate, siano ben rappresentativi dell'ordine di incertezza con cui è possibile determinare la posizione del satellite al termine della propagazione, avendo preso in esame i contributi più influenti.

Vengono ora posti a confronto i risultati ottenuti in termini di deviazione standard per due differenti simulazioni complete: una non comprensiva dei moti secolari di precessione-nutazione mentre l'altra comprensiva dei moti secolari di precessione-nutazione. La tabella 4.25 e la tabella 4.26 ne raccolgono rispettivamente i risultati.

Tabella 4.25 Deviazione standard di azimuth ed elevazione per la simulazione completa priva di moti secolari di precessione e nutazione

	500 km	600 km	700 km
deviazione standard azimuth [μrad]	8.9615	0.6560	0.1296
deviazione standard elevazione [μrad]	1.6663	0.5396	0.1442

Tabella 4.26 Deviazione standard di azimuth ed elevazione per la simulazione completa comprensiva i moti secolari di precessione e nutazione

	500 km	600 km	700 km
deviazione standard azimuth [μrad]	9.0398	0.6566	0.1299
deviazione standard elevazione [μrad]	1.6763	0.5394	0.1439

È possibile notare come i valori riportati siano sostanzialmente simili. Per il tempo di propagazione impiegato il contributo dovuto ai moti secolari di precessione e nutazione risulta praticamente ininfluenza.

CAPITOLO 5

Conclusioni

Prevedere con precisione la posizione del satellite al termine del tempo di propagazione imposto non rappresenta certo una problematica di semplice risoluzione. Varie ipotesi devono essere assunte nella generazione del modello rappresentativo la condizione a cui il satellite può risultare ad operare: il numero di perturbazioni orbitali prese in esame, le condizioni di attività solare, il modello di densità atmosferica terrestre, il modello del campo gravitazionale terrestre, la configurazione del satellite, l'orientazione del satellite, i parametri caratterizzanti il satellite associati alle perturbazioni stesse. Quelli enunciati rappresentano alcuni dei differenti aspetti da prendere in esame, ma ciascuno influisce direttamente sui livelli di accuratezza con cui è possibile definire la posizione orbitale del satellite al termine della propagazione.

Il satellite oggetto del lavoro prodotto è stato posto in un'orbita bassa LEO in una configurazione *nadir-pointing*. Per l'intervallo di altitudini considerate e nelle condizioni di massima attività solare assunte, le simulazioni singole generate hanno sicuramente posto in evidenza come l'attrito atmosferico rappresenti, tra quelli presi in esame, il contributo perturbativo che maggiormente incide sull'incertezza con cui è possibile determinare la posizione del satellite stesso al termine della propagazione. È possibile inoltre dedurre dai risultati ottenuti come incrementando il tempo di propagazione la stima prodotta tenda a peggiorare: tracciare ripetutamente il satellite ad intervalli di tempo limitati rappresenterebbe dunque la scelta più consona per poter prevedere con precisione la futura posizione del satellite, sebbene tale scelta spesso non risulti attuabile a causa del limitato numero di *ground station* impiegate per tale tipologia di operazioni.

Altro aspetto non secondario è rappresentato da una corretta conoscenza delle condizioni ad inizio propagazione. Conoscere con precisione la posizione del satellite ad inizio propagazione rappresenta una prerogativa essenziale. Le simulazioni singole dedicate all'errore della misura GPS hanno infatti sottolineato come l'incertezza sulla posizione del satellite ad inizio propagazione influenzi i risultati ottenuti in maniera addirittura superiore rispetto alle perturbazioni orbitali stesse, perlomeno per il tempo di propagazione considerato.

La simulazione completa, rappresentativa già di una situazione più reale a cui può trovarsi ad operare il satellite, ha infine permesso di determinare come il contributo contemporaneo di più perturbazioni presenti un effetto peggiorativo sull'accuratezza della stima prodotta.

Bisogna tuttavia sottolineare come in realtà l'effettiva situazione a cui il satellite risulta ad operare sia differente da quella rappresentata nel modello prodotto. Già limitarsi a considerare esclusivamente la non sfericità del campo gravitazionale terrestre, l'attrito atmosferico e la pressione di radiazione solare come unici contributi perturbativi semplifica certamente il modello ma d'altro canto si discosta dalla reale condizione a cui è sottoposto il satellite. Altre perturbazioni orbitali di cui non si è tenuto conto, infatti, forniscono il proprio contributo, in maniera più o meno intensa, ed influiscono così sul moto orbitale del satellite stesso. Si ritiene tuttavia che, nell'intervallo di altitudini selezionato e nelle condizioni di massima attività solare assunte, i tre differenti contributi presi in esame rappresentino quelli maggiormente preponderanti, rendendo trascurabili quelli non considerati. I risultati ottenuti forniscono dunque un'accettabile stima dell'ordine di grandezza con cui è possibile definire al termine del tempo di propagazione la posizione del satellite.

Nomenclatura

a	semiasse maggiore [km]
a	dimensione caratteristica struttura del satellite [m]
\mathbf{a}	vettore accelerazione
\mathbf{a}_p	vettore accelerazione perturbativa
alt_0	altitudine dell'orbita ad inizio propagazione [km]
az	azimut [rad]
b	dimensione caratteristica struttura del satellite [m]
c	generico parametro orbitale
c	velocità della luce nel vuoto [m/s]
c	dimensione caratteristica struttura del satellite [m]
c_{mean}	valore medio del generico parametro orbitale c
d	giorno [d]
e	eccentricità dell'orbita
e_0	eccentricità dell'orbita ad inizio propagazione
ecc	eccentricità Terra
el	elevazione [rad]
f_E	fattore di <i>oblateness</i> terrestre
g	numero gruppi macchie solari
g_0	costante di accelerazione gravitazionale [m/s ²]
h	momento angolare [km ² /s]
h_{ell}	altitudine della posizione del sito della <i>ground station</i> [km]
i	inclinazione [rad]
i	indice sommatoria
i	indice produttoria
j	indice produttoria
$inc\%_j$	incertezza percentuale rispetto al valore medio per il j -esimo parametro
$inc\%_{A_{drag}}$	incertezza percentuale rispetto al valore medio per A_{drag}
$inc\%_{A_{sr}}$	incertezza percentuale rispetto al valore medio per A_{sr}
$inc\%_{C_D}$	incertezza percentuale rispetto al valore medio per C_D
$inc\%_{C_r}$	incertezza percentuale rispetto al valore medio per C_r
$inc\%_{p_{sr}}$	incertezza percentuale rispetto al valore medio per p_{sr}
k	fattore correttivo
k	indice sommatoria
m	massa satellite [kg]
m	grado polinomio di Legendre
m	numero del mese [m]
n	grado polinomio di Legendre
p_0	pressione totale [Pa]
r	modulo vettore posizione \mathbf{r} [km]
\mathbf{r}	vettore posizione
\mathbf{r}_{ECEF}	vettore posizione proiettato nel sistema ECEF
\mathbf{r}_{ECI}	vettore posizione proiettato nel sistema ECI
\mathbf{r}_{rel}	vettore posizione relativa del satellite rispetto al sito della <i>ground station</i>
r_{sat_sun}	modulo vettore posizione relativa del sole rispetto al satellite \mathbf{r}_{sat_sun} [km]
\mathbf{r}_{sat_sun}	vettore posizione relativa del sole rispetto al satellite
\mathbf{r}_{SEZ}	vettore posizione relativa \mathbf{r}_{rel} proiettato nel sistema dell'orizzonte locale

\mathbf{r}_{site}	vettore posizione sito della <i>ground station</i>
\mathbf{r}_{top}	vettore posizione relativa \mathbf{r}_{rel} proiettato nel sistema topocentrico equatoriale
\mathbf{r}_0	vettore posizione iniziale
\mathbf{r}_0	vettore posizione iniziale
\mathbf{r}_{0_GPS}	vettore posizione iniziale comprensivo dell'errore dovuto alla misura GPS
$\dot{\mathbf{r}}$	vettore velocità
$\ddot{\mathbf{r}}$	vettore accelerazione
s	modulo vettore posizione s [km]
s	numero zone <i>umbrae</i>
\mathbf{s}	vettore posizione
t	istante di tempo [s]
t_0	istante di tempo iniziale [s]
\mathbf{v}	vettore velocità
v_{rel}	modulo vettore velocità relativa \mathbf{v}_{rel} [km/s]
\mathbf{v}_{rel}	vettore velocità relativa
x	componente x vettore posizione [km]
x	generico parametro associato alle perturbazioni orbitali
x_{site}	componente x del vettore posizione del sito della <i>ground station</i> [km]
\bar{x}	valore medio del generico parametro x
\dot{x}	componente x vettore velocità [km/s]
\ddot{x}	componente x vettore accelerazione [km/s ²]
y	componente y vettore posizione [km]
y	anno [y]
y_{site}	componente y vettore posizione del sito della <i>ground station</i> [km]
\dot{y}	componente y vettore velocità [km/s]
\ddot{y}	componente y vettore accelerazione [km/s ²]
\mathbf{y}_0	vettore di stato iniziale
\mathbf{w}_E	vettore velocità angolare Terra [rad/s]
z	componente z vettore posizione [km]
z_{site}	componente z vettore posizione del sito della <i>ground station</i> [km]
\dot{z}	componente z vettore velocità [km/s]
\ddot{z}	componente z vettore accelerazione [km/s ²]
A_{MAX}	area massima [m ²]
A_{MIN}	area minima [m ²]
A_{drag}	area effettiva esposta al flusso aerodinamico [m ²]
$\overline{A_{drag}}$	valore medio di A_{drag} [m ²]
A_{sr}	area effettiva esposta alla pressione di radiazione solare [m ²]
$\overline{A_{sr}}$	valore medio di A_{sr} [m ²]
AU	unità astronomica [km]
C_D	coefficiente di attrito atmosferico
$\overline{C_D}$	valore medio di C_D
C_{nm}	coefficienti gravitazionali
C_r	coefficiente di pressione di radiazione solare
$\overline{C_r}$	valore medio di C_r
I_x	momento d'inerzia rispetto all'asse x [kg m ²]
I_y	momento d'inerzia rispetto all'asse y [kg m ²]
I_z	momento d'inerzia rispetto all'asse z [kg m ²]
G	costante di gravitazione universale [Nm ² /kg ²]

J_n	coefficienti gravitazionali zonali
J_2	coefficiente gravitazionale della seconda armonica zonale
JD	Julian Day [d]
JD_0	Julian Day alle ore 0 UT [d]
$J2000$	Julian Day alle ore 12 UT del 1 Gennaio 2000 [d]
M	anomalia media [rad]
M	massa molecolare [g/N _p]
M_E	massa Terra [kg]
$N_{A_{drag}}$	numero elementi campione per A_{drag}
$N_{A_{sr}}$	numero elementi campione per A_{sr}
N_{comb_init}	numero combinazioni parametri iniziali
N_{C_D}	numero elementi campione per C_D
N_{C_r}	numero elementi campione per C_r
N_{GPS}	numero elementi campione per GPS
N_i	numero campione del parametro i -esimo
N_j	numero campione del parametro j -esimo
N_{out}	numero <i>output</i>
$N_{p_{sr}}$	numero elementi campione per p_{sr}
N_{tot}	numero di combinazioni totali
P_n	polinomio di Legendre di ordine n
P_{nm}	polinomio associato di Legendre di ordine n e grado m
p_{sr}	pressione di radiazione solare [Pa]
$\overline{p_{sr}}$	valore medio di p_{sr} [Pa]
R	costante universale dei gas perfetti [J/mol K]
R_E	raggio equatoriale Terra [km]
R₂	matrice di rotazione attorno all'asse y
R₃	matrice di rotazione attorno all'asse z
SC	costante solare [W/m ²]
S_{nm}	coefficienti gravitazionali
T	temperatura [K]
U	funzione potenziale gravitazionale [km ² /s ²]
$U_{aspherical}$	contributo asferico della funzione potenziale gravitazionale [km ² /s ²]
U_{2-body}	contributo sferico della funzione potenziale gravitazionale [km ² /s ²]
UT	universal time [h]
Z	numero macchie solari
α	ascensione retta [rad]
α_t	ascensione retta topocentrica [rad]
γ	angolo [rad]
δ_{0m}	delta di Kronecker di indici 0 ed m
δ	declinazione [rad]
δ_t	declinazione topocentrica [rad]
δc	variazione del generico parametro orbitale c dal valore medio
δx	variazione del generico parametro x dal valore medio
θ	anomalia vera [rad]
θ	<i>local sidereal time</i> [rad]
θ_{GM}	<i>Greenwich local sidereal time</i> [rad]
θ_0	anomalia vera ad inizio propagazione [rad]

λ	longitudine [rad]
λ'	longitudine [rad]
μ	parametro gravitazionale [km ³ /s ²]
ν	shadow function
ρ	densità [kg/m ³]
σ_{az}	deviazione standard azimut [rad]
σ_{el}	deviazione standard elevazione [rad]
σ_j	deviazione standard della j -esima simulazione
σ_{tot}	deviazione standard combinata
φ	latitudine [rad]
φ'	latitudine [rad]
φ_{gd}	latitudine geodetica [rad]
Φ	funzione potenziale
ω	argomento di perigeo [rad]
ω_0	argomento di perigeo ad inizio propagazione [rad]
Ω	longitudine del nodo ascendente [rad]
Ω_0	longitudine del nodo ascendente ad inizio propagazione [rad]
$\dot{\Omega}$	velocità di variazione della longitudine del nodo ascendente [rad/s]
$\dot{\Omega}_{sun}$	velocità angolare media del moto apparente del Sole [rad/s]

Bibliografia

1. https://en.wikipedia.org/wiki/Sputnik_1
2. D. A. Vallado, *Fundamentals of Astrodynamics and Applications*, Second Edition, Space Technology Library
3. H. Klinkrad, *Protecting the space debris environment and protecting against it*, 11th Hypervelocity Impact Symposium
4. A. Francesconi, Appunti delle lezioni del corso di *Impianti e Sistemi Aerospaziali I*, AA 2016/2017
5. J.C. Bennett, J. Sang, C.H. Smith, K. Zhang, *Accurate orbit predictions for debris orbit manoeuvre using ground-based lasers*, Elsevier, 2013
6. Bin Li, J. Sang, J. Chen, *Achievable orbit determination and prediction accuracy using short-arc space-based observations of space debris*, Elsevier, 2018
7. <https://lagesos.cddis.eosdis.nasa.gov/>
8. <https://www.asi.it/scienze-della-terra/lares/>
9. Z. Kang, P. Nagell, R. Pastor, *Precise orbit determination for GRACE*, Elsevier, 2003
10. A. Jäggi, H. Bock, R. Floberghagen, *GOCE orbit predictions for SLR tracking*, Springer-Verlag, 2010
11. D. Strugarek, K. Sośnica a, A. Jäggi, *Characteristics of GOCE orbits based on Satellite Laser Ranging*, Elsevier, 2018
12. E. Lorenzini, Appunti delle lezioni del corso di *Strumentazione Aerospaziale*, AA 2018/2019
13. S. Jina, T. van Damb, S. Wdowinskic, *Observing and understanding the Earth system variations from spacegeodesy*, Elsevier, 2013
14. <https://ilrs.cddis.eosdis.nasa.gov/>
15. <https://sci.esa.int/web/bepicolombo>
16. <https://sci.esa.int/web/juice>
17. C. Keeschull, S. K. Flegel, V. Braun, J. Gelhaus, M. Möckel, C. Wiedemann, P. Vörsmann, *Reducing variability in short term orbital time prediction*, Elsevier, 2012
18. <https://en.wikipedia.org/wiki/Tiangong-1>
19. Y. Luo, Z. Yang, *A review of uncertainty prediction in orbital mechanics*, Elsevier, 2016
20. K. Roh, S. M. Kopeikin, J.Cho, *Numerical simulation of the post-Newtonian equations of motion for the near Earth satellite with an application to the LARES satellite*, Elsevier, 2016
21. O. Montenbruck, E. Gill, *Satellite Orbits: Models, Methods, Applications*, Springer
22. V. A: Chobotov, *Orbital Mechanics*, Third Edition, AIAA Education Series
23. H. D. Curtis, *Orbital Mechanics for Engineering Students*, Third Edition, Elsevier
24. <https://www.swpc.noaa.gov/>
25. https://en.wikipedia.org/wiki/Wolf_number
26. <http://sol.spacenvironment.net/jb2008/>
27. B. R. Bowman, W. K. Tobiska, F. A. Marcos, C. Y. Huang, C. S. Lin, W. J. Burke, *A New Empirical Thermospheric Density Model JB2008 Using New Solar and Geomagnetic Indices*, AIAA/AAS Astrodynamics Specialist Conference, 2008
28. W. K. Tobiska, B. R. Bowman, S. D. Bouwer, *Solar and geomagnetic indices for the JB2008 thermosphere density model*
29. W. K. Tobiska, *The solar and geomagnetic inputs into the JB2008 thermospheric density model for use by CIRA08 and ISO 14222*, Paper C01-0003-10, 2010
30. https://www.nasa.gov/mission_pages/soho/index.html

31. https://www.nasa.gov/mission_pages/noaa-n/main/index.html
32. <https://www.nasa.gov/content/goes>
33. <https://uars.gsfc.nasa.gov/>
34. <http://lasp.colorado.edu/home/sorce/>
35. <http://www.timed.jhuapl.edu/WWW/index.php>
36. <http://wdc.kugi.kyoto-u.ac.jp/wdc/Sec3.html>
37. <https://www.gfz-potsdam.de/en/section/geomagnetism/infrastructure/champ/>
38. <https://grace.jpl.nasa.gov/>
39. <https://it.mathworks.com/help/matlab/ref/ode113.html>
40. <https://it.mathworks.com/help/matlab/ref/rng.html>

Ringraziamenti

Vorrei ringraziare inizialmente la mia famiglia che mi ha sempre seguito fin dal mio ingresso nell'ambiente universitario. In particolar modo il ringraziamento più caloroso è destinato alle persone che maggiormente mi sono state accanto durante questo percorso: la mia mamma Antonella, costante presenza che mi ha sempre sostenuto nei momenti di tensione ma anche sopportato in quelli di paranoia; mio fratello Michele che, sopportandomi come la mamma in più di un'occasione tra un litigio e l'altro, mi ha fornito distrazioni e momenti di svago nei periodi in cui maggiormente ne necessitavo; il mio papà Stefano, riferimento per disperdere i continui dubbi che affioravano mediante una seconda opinione, oltre ovviamente a quella della mamma, e che si è sempre interessato agli sviluppi di questo percorso.

Colgo inoltre l'occasione per ringraziare il mio relatore, il professore Francesconi, per avermi seguito durante questi mesi ed il mio correlatore, il professore Bettanini, per i consigli distribuiti ed il tempo dedicatomi.

Struttura del codice: parte II

```
%% definizione dei parametri del satellite
a1=0.35; %lunghezza [m]
a2=0.35; %larghezza [m]
a3=0.75; %altezza [m]

A_drag_MIN=min([a1,a2])*a3; %area frontale MIN [m^2]
A_drag_MAX=sqrt(a1^2+a2^2)*a3; %area frontale MAX [m^2]
A_drag_mean=(A_drag_MIN+A_drag_MAX)/2; %area frontale media [m^2]

A_sr_MIN=min([a1,a2])*a3; %area solar radiation pressure MIN [m^2]
A_sr_MAX=sqrt(a1^2+a2^2)*a3; %area solar radiation pressure MAX [m^2]
A_sr_mean=(A_sr_MIN+A_sr_MAX)/2; %area solar radiation pressure media[m^2]

mass=75; %massa [kg]
CD_mean=2.2; %coefficiente di attrito atmosferico medio
Cr_mean=1; %coefficiente di pressione di radiazione solare

%% definizione incertezza parametri
inc_A_drag_perc=0.2; %incertezza percentuale A_drag
inc_A_sr_perc=0.2; %incertezza percentuale A_sr
inc_CD_perc=0.2; %incertezza percentuale CD
inc_Cr_perc=0.8; %incertezza percentuale Cr
inc_p_sr_perc=0.05; %incertezza percentuale p_sr

inc_A_drag_3sigma=inc_A_drag_perc*A_drag_mean; %incertezza A_drag a 3 sigma
[m^2]
inc_A_sr_3sigma=inc_A_sr_perc*A_sr_mean; %incertezza A_sr a 3 sigma [m^2]
inc_CD_3sigma=inc_CD_perc*CD_mean; %incertezza CD a 3 sigma
inc_Cr_3sigma=inc_Cr_perc*Cr_mean; %incertezza Cr a 3 sigma
inc_p_sr_3sigma=inc_p_sr_perc*p_sr_mean; %incertezza p_sr a 3 sigma [Pa]

inc_A_drag=inc_A_drag_3sigma/3; %incertezza A_drag [m^2]
inc_A_sr=inc_A_sr_3sigma/3; %incertezza A_sr [m^2]
inc_CD=inc_CD_3sigma/3; %incertezza CD
inc_Cr=inc_Cr_3sigma/3; %incertezza Cr
inc_p_sr=inc_p_sr_3sigma/3; %incertezza p_sr [Pa]

%% definizione numero campioni
N_A_drag=3; %numero campioni A_drag
N_A_sr=3; %numero campioni A_sr
N_CD=3; %numero campioni CD
N_Cr=3; %numero campioni Cr
N_p_sr=3; %numero di campioni p_sr

A_drag0=A_drag_mean+inc_A_drag*randn(N_A_drag,1);
CD0=CD_mean+inc_CD*randn(N_CD,1);
A_sr0=A_sr_mean+inc_A_sr*randn(N_A_sr,1);
Cr0=Cr_mean+inc_Cr*randn(N_Cr,1);
p_sr0=p_sr_mean+inc_p_sr*randn(N_p_sr,1);
```

Struttura del codice: parte III

```
%% definizione della data di inizio propagazione
year=2020; %anno [y]
month=6; %mese [m]
day=1; %giorno [d]
hour=0; %ora [h]
minute=0; %minuti [min]
```



```

second=0; %secondi [s]

%%definizione tempo di propagazione
t0=0; %istante di tempo di inizio propagazione [s]
tf=8*3600; %istante di tempo di fine propagazione [s]

%% definizione di UT
UT=hour+minute/60+second/3600; %Universal Time [h]
%calcolo di Julian Day a 0 UT
[J0]=j0(year, month, day);
%calcolo di Julian Day a UT
JD0=J0+UT/24;
%calcolo di Modified Julian Day per modello Jacchia-Bowman
MJD0=JD0-2400000.5;
%calcolo di Julian Century a 0 UT
JC0=(J0-J2000)/36525;

%% calcolo del Greenwich sidereal time
GWst0_0UT=100.4606184+36000.77004*JC0+0.000387933*JC0^2-2.583e-8*JC0^3;
%Greenwich sidereal time 0 UT [deg]
[GWst0_0UT]=zero_to_360(GWst0_0UT); %GWst0_0UT nel range tra 0 deg e 360 deg
GWst0_UT=GWst0_0UT+360.98564724*UT/24; %Greenwich sidereal time UT [deg]
[GWst0_UT]=zero_to_360(GWst0_UT); %GWst0_UT nel range tra 0 deg e 360 deg

%% definizione della posizione del sito
long_site_cell={16,36,8}; % cell array longitudine sito con °,', "
lat_site_cell={40,40,10}; % cell array latitudine sito con °,', "
long_site=long_site_cell{1}+long_site_cell{2}/60+long_site_cell{3}/3600;
%longitudine sito [deg]
lat_site=lat_site_cell{1}+lat_site_cell{2}/60+lat_site_cell{3}/3600; %latitudine
sito [deg]
alt_site=0.401; %altitudine sito rispetto alla superficie terrestre [km]

%% conversione delle misure angolari da [deg] a [rad]
GWst0_UT=GWst0_UT*pi/180; %[rad]
long_site=long_site*pi/180; %[rad]
lat_site=lat_site*pi/180; %[rad]

Struttura del codice: parte IV

%% definizione dei parametri iniziali dell'orbita
alt0=(500:100:700); %altitudine dell'orbita rispetto alla superficie della terra
ad inizio propagazione [km]
e0=0; %eccentricità dell'orbita ad inizio propagazione
w0=0; %argomento di perigeo dell'orbita ad inizio propagazione [deg]
RAAN0=0; %longitudine del nodo ascendente dell'orbita ad inizio propagazione
[deg]
theta0=0; %anomalia vera ad inizio propagazione [deg]

%% lunghezza vettori condizioni iniziali
N_alt0=length(alt0);
N_e0=length(e0);
N_w0=length(w0);
N_RAAN0=length(RAAN0);
N_theta0=length(theta0);

N_tot=N_alt0*N_e0*N_w0*N_RAAN0*N_theta0*N_A_drag*N_CD*N_A_sr*N_Cr*N_p_sr;

%% conversione delle misure angolari da [deg] a [rad]
w0=w0*pi/180; %[rad]

```

```

RAAN0=RAAN0*pi/180; %[rad]
theta0=theta0*pi/180; %[rad]

```

Struttura del codice: parte V

```

%% matrici risultati
matrix_RA_ECI=zeros(N_tot,1);
matrix_decl_ECI=zeros(N_tot,1);
matrix_RA_ECEF=zeros(N_tot,1);
matrix_decl_ECEF=zeros(N_tot,1);
matrix_RA_top=zeros(N_tot,1);
matrix_decl_top=zeros(N_tot,1);
matrix_az=zeros(N_tot,1);
matrix_el=zeros(N_tot,1);

%% matrice combinazioni
matrix0=zeros(N_tot,11);
coe0=zeros(N_tot,6);
j_matrix=1;
%%
for j_e0=1:N_e0
    for j_w0=1:N_w0
        for j_RAAN0=1:N_RAAN0
            for j_theta0=1:N_theta0
                for j_alt0=1:N_alt0
                    for j_A_drag=1:N_A_drag
                        for j_CD=1:N_CD
                            for j_A_sr=1:N_A_sr
                                for j_Cr=1:N_Cr
                                    for j_p_sr=1:N_p_sr
                                        %calcolo parametri orbitali
                                        r0=Re+alt0(j_alt0);

h0=sqrt(r0*mu*(1+e0(j_e0)*cos(theta0(j_theta0)))); %momento angolare [km^2/s]
                                        rp0=h0^2/mu/(1+e0(j_e0)); %raggio al
perigeo [km]
                                        ra0=h0^2/mu/(1-e0(j_e0)); %raggio
all'apogeo [km]
                                        a0=(ra0+rp0)/2; %semiasse maggiore [km]
                                        incl0=acos((-2*Omega_sun*(1-
e0(j_e0)^2)^2*a0^3.5)/(3*sqrt(mu)*J2*Re^2)); %inclinazione [rad]
                                        %definizione matrice parametri iniziali
                                        matrix0(j_matrix,1)=e0(j_e0);
                                        matrix0(j_matrix,2)=w0(j_w0);
                                        matrix0(j_matrix,3)=RAAN0(j_RAAN0);
                                        matrix0(j_matrix,4)=theta0(j_theta0);
                                        matrix0(j_matrix,5)=incl0;
                                        matrix0(j_matrix,6)=alt0(j_alt0);
                                        matrix0(j_matrix,7)=A_drag0(j_A_drag);
                                        matrix0(j_matrix,8)=CD0(j_CD);
                                        matrix0(j_matrix,9)=A_sr0(j_A_sr);
                                        matrix0(j_matrix,10)=Cr0(j_Cr);
                                        matrix0(j_matrix,11)=p_sr0(j_p_sr);
                                        %definizione matrice coe0
                                        coe0(j_matrix,1)=h0;
                                        coe0(j_matrix,2)=e0(j_e0);
                                        coe0(j_matrix,3)=RAAN0(j_RAAN0);
                                        coe0(j_matrix,4)=incl0;
                                        coe0(j_matrix,5)=w0(j_w0);
                                        coe0(j_matrix,6)=theta0(j_theta0);
                                        j_matrix=j_matrix+1;
                                    end
                                end
                            end
                        end
                    end
                end
            end
        end
    end
end

```

```

end
end
end
end
end
end
end
end
end
end

```

Struttura del codice: parte VI

```

%%definizione dei parametri per ode113
%%definizione delle options per ode113
options=odeset('RelTol',1e-12,'AbsTol',1e-14);

%integrazione
for j_m=1:N_tot
    coe=coe0(j_m,:); %common orbit elements
    [r0_ECI, v0_ECI]=sv_from_coe(coe,mu); %vettori colonna
    %parametri satellite
    A_drag=matrix0(j_m,7);
    CD=matrix0(j_m,8);
    A_sr=matrix0(j_m,9);
    Cr=matrix0(j_m,10);
    p_sr=matrix0(j_m,11);
    %condizioni iniziali ode113
    y0=[r0_ECI; v0_ECI];
    %integrazione ode113
    [t, y]=ode113(@rates, [t0, tf], y0, options);
    %definizione del vettore posizione orbitale in ECI
    x_ECI=y(end,1); %[km]
    y_ECI=y(end,2); %[km]
    z_ECI=y(end,3); %[km]
    vx_ECI=y(end,4); %[km/s]
    vy_ECI=y(end,5); %[km/s]
    vz_ECI=y(end,6); %[km/s]
    r_ECI=[x_ECI; y_ECI; z_ECI]; %vettore colonna
    v_ECI=[vx_ECI; vy_ECI; vz_ECI]; %vettore colonna
    %determinazione del vettore posizione orbitale in ECEF
    GWst=GWst0_UT+we*t(end); %[rad]
    R3_GWst=[cos(GWst), sin(GWst), 0; -sin(GWst), cos(GWst), 0; 0, 0, 1];
    r_ECEF=R3_GWst*r_ECI; %vettore colonna
    %determinazione del vettore posizione del sito
    lst=GWst+long_site; %[rad]
    x_site=(Re/sqrt(1-(2*fe-
fe^2)*sin(lat_site)^2)+alt_site)*cos(lat_site)*cos(lst); %[km]
    y_site=(Re/sqrt(1-(2*fe-
fe^2)*sin(lat_site)^2)+alt_site)*cos(lat_site)*sin(lst); %[km]
    z_site=(Re*(1-fe)^2/sqrt(1-(2*fe-
fe^2)*sin(lat_site)^2)+alt_site)*sin(lat_site); %[km]
    r_site=[x_site; y_site; z_site]; %vettore colonna
    %determinazione del vettore posizione relativo rispetto alla posizione del
    sito
    r_rel=r_ECI-r_site; %vettore colonna
    %determinazione di RA e decl in ECI
    [RA_ECI, decl_ECI]=ra_and_decl_from_r(r_ECI); %[deg]
    %determinazione di RA e decl in ECEF
    [RA_ECEF, decl_ECEF]=ra_and_decl_from_r(r_ECEF); %[deg]
    %determinazione di RA e decl in sistema topocentrico equatoriale
    [RA_top, decl_top]=ra_and_decl_from_r(r_rel); %[deg]
    %determinazione di azimuth ed elevazione

```

```

[az, el]=az_el(r_ECI, v_ECI, r_site, lst, lat_site); %[deg]
%matrici risultati ottenuti
matrix_RA_ECI(j_m,1)=RA_ECI;
matrix_decl_ECI(j_m,1)=decl_ECI;
matrix_RA_ECEF(j_m,1)=RA_ECEF;
matrix_decl_ECEF(j_m,1)=decl_ECEF;
matrix_RA_top(j_m,1)=RA_top;
matrix_decl_top(j_m,1)=decl_top;
matrix_az(j_m,1)=az;
matrix_el(j_m,1)=el;
%annullamento t ed y
clear t;
clear y;
end
matrix_RA_ECI=[matrix0, matrix_RA_ECI];
matrix_decl_ECI=[matrix0, matrix_decl_ECI];
matrix_RA_ECEF=[matrix0, matrix_RA_ECEF];
matrix_decl_ECEF=[matrix0, matrix_decl_ECEF];
matrix_RA_top=[matrix0, matrix_RA_top];
matrix_decl_top=[matrix0, matrix_decl_top];
matrix_az=[matrix0, matrix_az];
matrix_el=[matrix0, matrix_el];

```

Struttura del codice: parte VII

```

%% calcolo valore medio e deviazione standard
%matrici deviazione standard
std_matrix_RA_ECI=zeros(N_e0*N_w0*N_RAAN0*N_theta0, N_alt0);
std_matrix_decl_ECI=zeros(N_e0*N_w0*N_RAAN0*N_theta0, N_alt0);
std_matrix_RA_ECEF=zeros(N_e0*N_w0*N_RAAN0*N_theta0, N_alt0);
std_matrix_decl_ECEF=zeros(N_e0*N_w0*N_RAAN0*N_theta0, N_alt0);
std_matrix_RA_top=zeros(N_e0*N_w0*N_RAAN0*N_theta0, N_alt0);
std_matrix_decl_top=zeros(N_e0*N_w0*N_RAAN0*N_theta0, N_alt0);
std_matrix_az=zeros(N_e0*N_w0*N_RAAN0*N_theta0, N_alt0);
std_matrix_el=zeros(N_e0*N_w0*N_RAAN0*N_theta0, N_alt0);

%matrici valore medio
mean_matrix_RA_ECI=zeros(N_e0*N_w0*N_RAAN0*N_theta0, N_alt0);
mean_matrix_decl_ECI=zeros(N_e0*N_w0*N_RAAN0*N_theta0, N_alt0);
mean_matrix_RA_ECEF=zeros(N_e0*N_w0*N_RAAN0*N_theta0, N_alt0);
mean_matrix_decl_ECEF=zeros(N_e0*N_w0*N_RAAN0*N_theta0, N_alt0);
mean_matrix_RA_top=zeros(N_e0*N_w0*N_RAAN0*N_theta0, N_alt0);
mean_matrix_decl_top=zeros(N_e0*N_w0*N_RAAN0*N_theta0, N_alt0);
mean_matrix_az=zeros(N_e0*N_w0*N_RAAN0*N_theta0, N_alt0);
mean_matrix_el=zeros(N_e0*N_w0*N_RAAN0*N_theta0, N_alt0);

%vettori di cui calcolare valore medio e deviazione standard
N_comb=N_A_drag*N_A_sr*N_CD*N_Cr*N_p_sr; %%%
RA_ECI_vett=zeros(N_comb,1);
decl_ECI_vett=zeros(N_comb,1);
RA_ECEF_vett=zeros(N_comb,1);
decl_ECEF_vett=zeros(N_comb,1);
RA_top_vett=zeros(N_comb,1);
decl_top_vett=zeros(N_comb,1);
az_vett=zeros(N_comb,1);
el_vett=zeros(N_comb,1);

%indici matrici e vettori
jr=1;
jc=1;
j_vett=1;

```

```

for j_m=1:N_tot
%RA_ECI
RA_ECI_vett(j_vett,1)=matrix_RA_ECI(j_m, end);
%decl_ECI
decl_ECI_vett(j_vett,1)=matrix_decl_ECI(j_m, end);
%RA_ECEF
RA_ECEF_vett(j_vett,1)=matrix_RA_ECEF(j_m, end);
%decl_ECEF
decl_ECEF_vett(j_vett,1)=matrix_decl_ECEF(j_m, end);
%RA_top
RA_top_vett(j_vett,1)=matrix_RA_top(j_m, end);
%decl_top
decl_top_vett(j_vett,1)=matrix_decl_top(j_m, end);
%az
az_vett(j_vett,1)=matrix_az(j_m, end);
%el
el_vett(j_vett,1)=matrix_el(j_m, end);
if j_vett==N_comb
%valore medio e deviazione standard RA_ECI
mean_RA_ECI=mean(RA_ECI_vett);
std_RA_ECI=std(RA_ECI_vett);
% valore medio e deviazione standard decl_ECI
mean_decl_ECI=mean(decl_ECI_vett);
std_decl_ECI=std(decl_ECI_vett);
% valore medio e deviazione standard RA_ECEF
mean_RA_ECEF=mean(RA_ECEF_vett);
std_RA_ECEF=std(RA_ECEF_vett);
% valore medio e deviazione standard decl_ECEF
mean_decl_ECEF=mean(decl_ECEF_vett);
std_decl_ECEF=std(decl_ECEF_vett);
% valore medio e deviazione standard RA_top
mean_RA_top=mean(RA_top_vett);
std_RA_top=std(RA_top_vett);
% valore medio e deviazione standard decl_top
mean_decl_top=mean(decl_top_vett);
std_decl_top=std(decl_top_vett);
% valore medio e deviazione standard azimuth
mean_az=mean(az_vett);
std_az=std(az_vett);
% valore medio e deviazione standard elevation
mean_el=mean(el_vett);
std_el=std(el_vett);
if jc>N_alt0
jr=jr+1;
jc=1;
%valore medio
mean_matrix_RA_ECI(jr, jc)=mean_RA_ECI;
mean_matrix_decl_ECI(jr, jc)=mean_decl_ECI;
mean_matrix_RA_ECEF(jr, jc)=mean_RA_ECEF;
mean_matrix_decl_ECEF(jr, jc)=mean_decl_ECEF;
mean_matrix_RA_top(jr, jc)=mean_RA_top;
mean_matrix_decl_top(jr, jc)=mean_decl_top;
mean_matrix_az(jr, jc)=mean_az;
mean_matrix_el(jr, jc)=mean_el;
%deviazione standard
std_matrix_RA_ECI(jr, jc)=std_RA_ECI;
std_matrix_decl_ECI(jr, jc)=std_decl_ECI;
std_matrix_RA_ECEF(jr, jc)=std_RA_ECEF;
std_matrix_decl_ECEF(jr, jc)=std_decl_ECEF;
std_matrix_RA_top(jr, jc)=std_RA_top;
std_matrix_decl_top(jr, jc)=std_decl_top;
std_matrix_az(jr, jc)=std_az;
std_matrix_el(jr, jc)=std_el;

```

```

else
    %valore medio
    mean_matrix_RA_ECI(jr, jc)=mean_RA_ECI;
    mean_matrix_decl_ECI(jr, jc)=mean_decl_ECI;
    mean_matrix_RA_ECEF(jr, jc)=mean_RA_ECEF;
    mean_matrix_decl_ECEF(jr, jc)=mean_decl_ECEF;
    mean_matrix_RA_top(jr, jc)=mean_RA_top;
    mean_matrix_decl_top(jr, jc)=mean_decl_top;
    mean_matrix_az(jr, jc)=mean_az;
    mean_matrix_el(jr, jc)=mean_el;
    %deviazione standard
    std_matrix_RA_ECI(jr, jc)=std_RA_ECI;
    std_matrix_decl_ECI(jr, jc)=std_decl_ECI;
    std_matrix_RA_ECEF(jr, jc)=std_RA_ECEF;
    std_matrix_decl_ECEF(jr, jc)=std_decl_ECEF;
    std_matrix_RA_top(jr, jc)=std_RA_top;
    std_matrix_decl_top(jr, jc)=std_decl_top;
    std_matrix_az(jr, jc)=std_az;
    std_matrix_el(jr, jc)=std_el;
end
    jc=jc+1;
    j_vett=0;
end
    j_vett=j_vett+1;
end

std_matrix_az=pi/180*std_matrix_az; %[rad]
std_matrix_el=pi/180*std_matrix_el; %[rad]

```