



UNIVERSITÀ DEGLI STUDI DI PADOVA

DIPARTIMENTO DI INGEGNERIA DELL'INFORMAZIONE
CORSO DI LAUREA IN INGEGNERIA DELL'INFORMAZIONE

Esercizio sul controllo di assetto di un satellite

Laureando:
Federico Antonio Pancino

Relatore:
Ch.mo Prof. Sandro Zampieri

Anno accademico 2010/2011

Indice

Introduzione	v
1 Satellite artificiale	1
1.1 Strumentazione e dispositivi	3
1.2 Manovre	4
2 Esercizio	5
2.1 Testo	5
2.2 Domande	6
3 Soluzione	7
3.1 Punto (a)	7
3.2 Punto (b)	9
3.3 Punto (c)	10
3.3.1 Collocazione zero	10
3.3.2 Luogo delle Radici	10
3.3.3 Valore di K_1	12
3.4 Punto (d)	13
3.5 Punto (e)	14
3.6 Punto (f)	14
3.7 Punto (g)	15
3.7.1 Diagramma di Bode in catena aperta	15
3.7.2 Diagramma di Bode in catena chiusa	15
3.8 Punto (h)	17
3.8.1 Equazioni in catena aperta	17
3.8.2 Guadagni controllore state-feedback	18
Bibliografia	19

Introduzione

Lo scopo di questa tesina è lo studio del sistema di controllo di assetto di un generico satellite artificiale tramite un esercizio che propone diverse soluzioni per quanto riguarda la compensazione di errori dovuti a disturbi di vario genere.

Dopo aver formulato una composizione generica del sistema di controllo, si procederà alla simulazione dei vari sistemi di compensazione attraverso un'analisi in frequenza fatta con i diagrammi di Bode, l'utilizzo del luogo delle radici e della risposta al gradino, selezionando, in base ai parametri (stabilità, errore a regime, complessità) la tipologia che meglio soddisfa le specifiche di progetto a ciclo chiuso.

Nella prima parte della tesina viene fatto un cappello introduttivo sulle tipologie di satelliti descrivendone la strumentazione, le varie manovre attuabili e i dispositivi (sensori, attuatori) di cui esso dispone, mentre nella seconda parte viene proposto l'esercizio in cui viene svolta la progettazione del suddetto esempio di controllore.

La simulazione (luogo delle radici e diagrammi di Bode) e la misurazione dei parametri viene fatta tramite Matlab.

Capitolo 1

Satellite artificiale

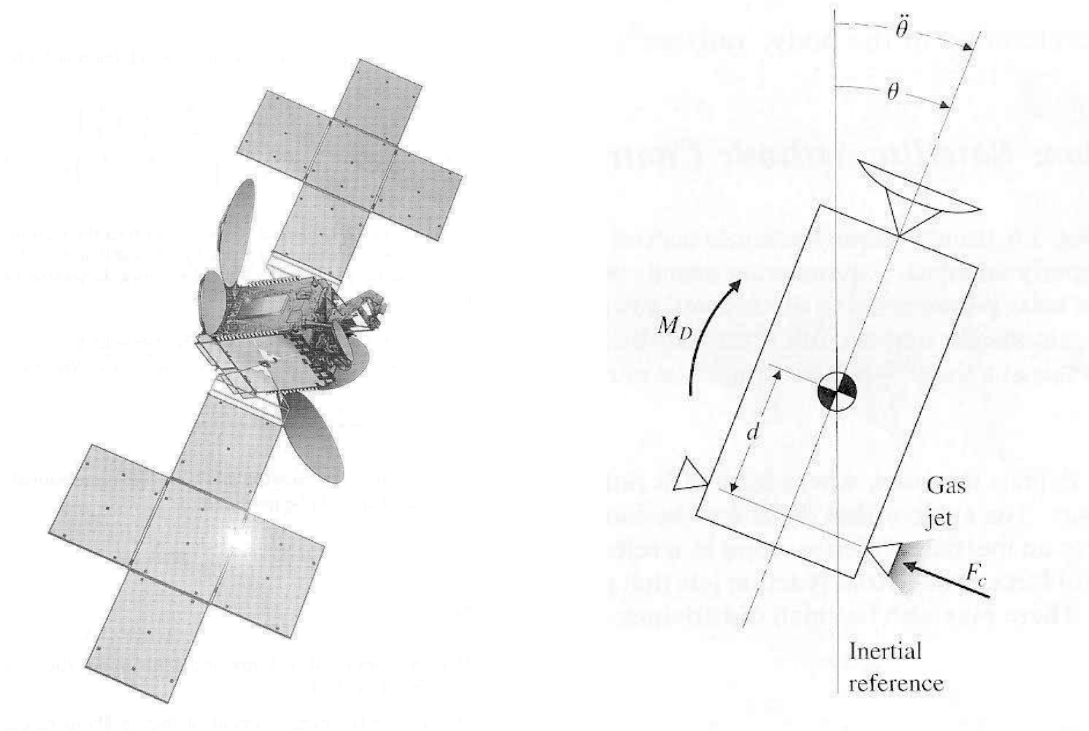


Figura 1.1: Satellite per le telecomunicazioni (*Courtesy Space System/Loral*) - Schema di un generico satellite artificiale.

Con il termine *satellite artificiale* si intendono tutti gli oggetti orbitanti intorno ad un corpo celeste che sono stati posti volutamente in quell'orbita con varie finalità.

I satelliti artificiali si possono suddividere in:

- *satelliti scientifici*, destinati alla ricerca pura nel campo dell'astronomia o della geofisica (es. Telescopio Spaziale Hubble o Lageos);
- *satelliti applicativi*, destinati a scopi militari o ad usi commerciali civili. Questi satelliti si possono suddividere ulteriormente in:
 - *satelliti per le telecomunicazioni* (es. i Satelliti COSPAS/SARSAT), solitamente posizionati in un'orbita geostazionaria e in numero tale da formare una rete satellitare;
 - *satelliti meteorologici*, posizionati sia in orbita geostazionaria (es. METEOSAT) sia in orbita polare (es. NOAA);

- *satelliti per telerilevamento*, costruiti per il telerilevamento, la cartografia e l'osservazione sistematica della superficie terrestre (es. IKONOS o RapidEye);
- *satelliti per la navigazione*, come quelli della rete GPS (Global Positioning System);
- *satelliti militari* sia a scopo offensivo che difensivo (es. la rete di satelliti di monitoraggio nucleare Vela o l'americano Geosat);
- *stazioni orbitanti* (es. Stazione Spaziale Internazionale);

Inoltre, i satelliti in generale, sono caratterizzati in base all'orbita (moto o traiettoria di un corpo nello spazio) che percorrono. Le orbite principali sono:

- *orbita polare*, che permette al satellite che la percorre di passare sopra entrambi i poli;
- *orbita equatoriale*, il cui piano orbitale coincide con il piano equatoriale dell'attrattore (pianeta);
- *orbita geostazionaria* (in inglese Geosynchronous orbit) o GEO, circolare ed equatoriale, situata ad una altezza tale che il periodo di rivoluzione di un satellite che la percorre coincide con il periodo di rotazione della Terra;
- *orbita terrestre bassa* (in inglese low Earth orbit) o LEO, è un'orbita attorno al globo terrestre di altitudine compresa tra i 160 km ed 2000 km;
- *orbita terrestre media* (in inglese medium Earth orbit) o MEO, è un'orbita attorno al globo terrestre di altitudine compresa tra i 2000 km ed i 35786 km.
- *orbita terrestre alta* (in inglese high Earth orbit) o HEO, è un'orbita ellittica attorno al globo terrestre con altitudine massima (apogeo) della GEO e altitudine minima (perigeo) della LEO.

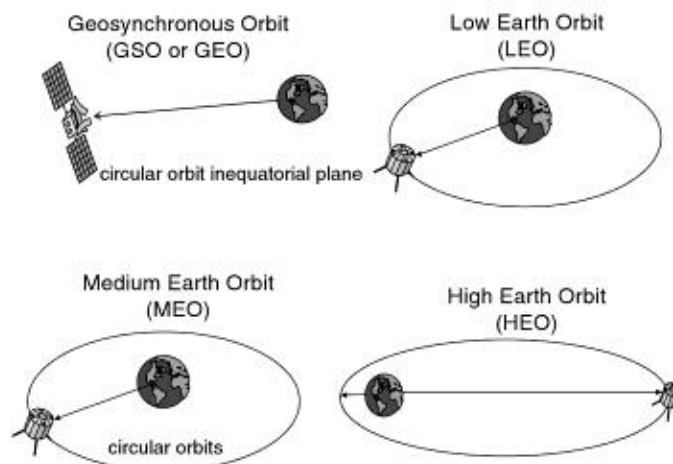


Figura 1.2: Orbite di un satellite artificiale.

Per i satelliti artificiali, così come per quelli naturali, valgono delle regole per calcolare la loro velocità. Tuttavia, per la semplificazione dei calcoli, generalmente, sono presi in considerazione i seguenti punti:

- a) l'orbita del satellite viene considerata come circolare;
- b) il satellite si muove attorno ad un corpo puntiforme con una certa massa;
- c) il satellite è un corpo puntiforme.

1.1 Strumentazione e dispositivi

La parte principale di un satellite che svolge le funzioni per cui esso è stato posto in orbita è detto *carico utile*, mentre la trasmissione/ricezione dei dati da e verso il centro di controllo è fatta attraverso antenne. Tali operazioni sono possibili in quanto i satelliti artificiali possiedono dei pannelli fotovoltaici che attraverso opportuni sensori, vengono regolati costantemente per fornire energia elettrica per l'elaborazione e/o la trasmissione dei dati.

Le principali tipologie di sensori utilizzati sono:

- *sensori di Sole*: vengono utilizzati per orientare i pannelli solari, in quanto attraverso l'intensità delle correnti generate dal materiale si risale all'inclinazione dei raggi solari. Si suddividono in:
 - sensori di presenza di Sole;
 - sensori di posizione di Sole;
- *sensori di Terra*;
- *sensori di campo magnetico*;
- *sensori di stelle* con due varianti:
 - Star Tracker: satellite e sensore si muovono indipendentemente in modo da puntare sempre nello zero la stella di riferimento;
 - Star Mapper: il sensore è fisso e ricostruisce la mappa del cielo osservato;
- *ricevitori GPS*;
- *sensori giroscopici* di tipo meccanico, laser o piezoelettrico.

I satelliti non sono perfettamente fermi rispetto al moto della Terra a causa dell'influenza gravitazionale degli altri corpi celesti, ma oscillano nella loro posizione e sono dunque necessarie manovre di correzione perfettamente automatizzate, una per ciascuna direzione di moto. Tali manovre sono gestite da attuatori magnetici o a combustibile e al cessare del carburante a bordo cessa la vita operativa del satellite ed esso si disperde in altre orbite diventando parte della cosiddetta "spazzatura spaziale" oppure ricade sulla superficie terrestre.

I principali attuatori di un satellite sono:

- *razzi per il controllo d'assetto*: il controllo d'assetto richiede spinte molto basse, dell'ordine dei mN e non si possono utilizzare motori chimici in quanto danno spinte di almeno 1N, perciò si utilizza la propulsione elettrica dovuta a campi magnetici che, però, hanno consumi elevati;
- *ruote d'inerzia e di reazione*: sono attuatori che si basano su accelerazioni e decelerazioni di rotori, scambiando momento della quantità di moto con il satellite in quanto tutte le coppie applicate sulle ruote vengono applicate uguali e contrarie sul satellite;
- *attuatori magnetici*: composti da bobine, non hanno bisogno di combustibile ma possono interferire con la strumentazione.

1.2 Manovre

La manovra orbitale di un satellite è definita come il cambio di orbitale o di assetto per compiere le azioni presabilite del suo utilizzo.

Il satellite deve raggiungere e/o mantenere una determinata orbita operativa ed un ben definito orientamento rispetto ad un riferimento inerziale. I motivi per i quali queste manovre sono indispensabili sono sia la necessità di contrastare i disturbi, sia il raggiungimento dell'orbita operativa.

Altri casi tipici nei quali è indispensabile agire con manovre orbitali sono quando due satelliti devono praticare un rendezvous (un incontro/scontro) oppure per controllare la fase di rientro di un veicolo.

In generale si possono suddividere le manovre in:

- a) *manovre orbitali classiche (impulsive)*, dove la variazione del moto avviene per variazioni finite di velocità;
- b) *manovre non impulsive*, dove piccole spinte prodotte da motori elettrici o a ioni determinano la variazione dell'orbita;
- c) *manovre di correzione d'assetto*, per mantenere l'orientamento della sonda rispetto ad un riferimento considerato inerziale (Sole o stelle fisse).

Capitolo 2

Esercizio

2.1 Testo

Il sistema di controllo di assetto di un satellite, spesso usa una rotazione di reazione per fornire un movimento angolare.

Le equazioni del moto di un tale sistema sono:

$$\textit{Satellite} : I\ddot{\phi} = T_c + T_{ex},$$

$$\textit{Rotazione} : Jr = -T_c,$$

$$\textit{Misurazione} : \dot{Z} = \phi - aZ,$$

$$\textit{Controllo} : T_c = -D(s)(Z - Z_d).$$

dove,

J = momento di inerzia della rotazione,

r = velocità di rotazione,

T_c = controllo di torsione,

T_{ex} = disturbo di torsione,

ϕ = angolo da controllare,

Z = misura del sensore,

Z_d = angolo di riferimento,

I = inerzia del satellite (1000 kg/m^2),

a = costante del sensore (1 rad/sec),

$D(s)$ = compensazione.

2.2 Domande

- (a) Supposto $D(s) = K_0$, costante, disegnare il Luogo delle Radici rispetto a K_0 per il sistema in catena chiusa.
- (b) Per quale range di K_0 il sistema in catena chiusa è stabile?
- (c) Aggiungere una lead network con polo $s = -1$ cosicchè il sistema in catena chiusa abbia una banda-passante $\omega_{BW} = 0.04$ e smorzamento $\xi = 0.5$; il compensatore è dato da

$$D(s) = K_1 \frac{s + z}{s + 1}$$

Dove è collocato lo zero della lead network? Disegnare il Luogo delle Radici per il sistema con compensazione e dare il valore di K_1 affinché siano rispettate le specifiche date.

- (d) Per quale range di K_1 il sistema è stabile?
- (e) Qual'è l'errore a regime (la differenza tra Z e il riferimento d'ingresso Z_d), per un disturbo di torsione costante T_{ex} , per il sistema del punto (c)?
- (f) Qual è il tipo del sistema rispetto alla reiezione di T_{ex} ?
- (g) Disegnare il diagramma di Bode per il sistema in catena aperta, con il guadagno pari al valore di K_1 calcolato nel punto (c). Aggiungere il compensatore del punto (c) e calcolare il margine di fase del sistema in catena chiusa.
- (h) Scrivere le equazioni per il sistema in catena aperta, usando le variabili di stato ϕ , $\dot{\phi}$, e Z . Calcolare il guadagno del controllore state-feedback $T_c = -K_\phi \phi - K_{\dot{\phi}} \dot{\phi}$ per collocare i poli in catena chiusa in $s = -0.02 \pm j0.02\sqrt{3}$.

Capitolo 3

Soluzione

Innanzitutto, dalle equazioni date, tramite Trasformata di Laplace, si può ricavare il seguente schema a blocchi:

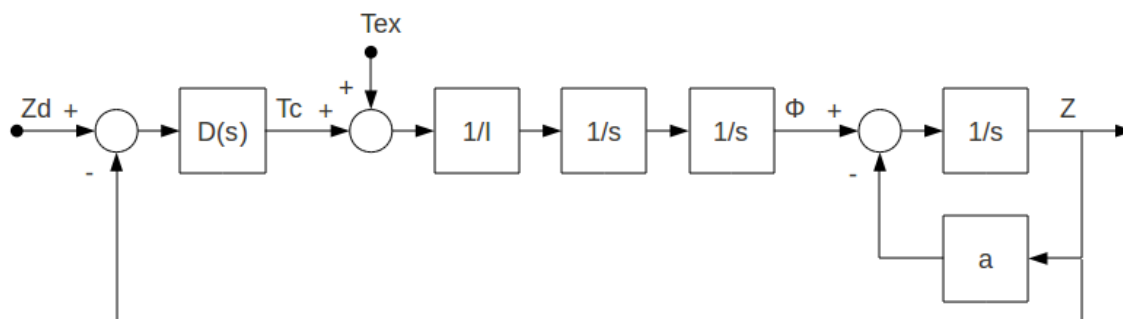


Figura 3.1: Schema a blocchi.

in cui:

$$\begin{cases} Z_d = \text{input,} \\ Z = \text{output,} \\ \phi = \frac{1}{s^2} \frac{T_c + T_{ex}}{I}, \\ Z = \frac{1}{s+a} \phi \longleftrightarrow Z = \frac{1}{s} (\phi - aZ). \end{cases}$$

3.1 Punto (a)

Per disegnare il Luogo delle Radici del sistema in catena chiusa, occorre ricavare la sua Funzione di Trasferimento:

$$W_{Z_d, Z}(s) = \frac{DG}{1 + DGH} = \frac{0,001K_0}{s^2(s+1) + 0,001K_0} \quad (3.1)$$

in cui:

$$DGH = \frac{K_0}{I} \frac{1}{s^2} \frac{1/s}{1+a/s} = \frac{K_0}{I} \frac{1}{s^2} \frac{1}{s+a} = \frac{K_0}{1000} \frac{1}{s^2} \frac{1}{s+1} = \frac{0,001K_0}{s^2(s+1)}$$

dove:

- $D = K_0$,
- $G = \frac{1}{I} \frac{1}{s^2(s+1)}$,
- $a = 1$,
- $I = 1000$.

Il Luogo delle Radici Positivo si costruisce sul polinomio $f(s) = \alpha(s) + K\beta(s)$ per $K \geq 0$ che in questo caso è: $f(s) = s^2(s+1) + 0,001K_0$ in cui $\alpha(s) = s^2(s+1)$ e $\beta(s) = 0,001$.

- Il polinomio non ha zeri z_i (punti in cui si annulla il polinomio $\beta(s)$) e ha due poli \bar{z}_i (punti in cui si annulla il polinomio $\alpha(s)$): $s = 0$ con molteplicità 2 e $s = -1$.

- I punti doppi sono:

$$\begin{cases} s^3 + s^2 + 0,001K_0 = 0 \\ 3s^2 + 2s = 0 \end{cases} \quad \begin{cases} s^3 + s^2 + 0,001K_0 = 0 \\ s(3s+2)=0 \end{cases} \quad \begin{cases} s = 0 \\ s = -\frac{2}{3} \end{cases}$$

$$\begin{cases} s = 0 & \Rightarrow K_0 = 0 \\ s = -\frac{2}{3} & \Rightarrow K_0 = 1000(-s^3 - s^2) = 1000\left(\frac{8}{27} - \frac{4}{9}\right) = -\frac{4000}{27} < 0 \end{cases}$$

Solo $s = 0$ è punto doppio per il Luogo delle Radici Positivo.

- Il Luogo ha $n - m = 3 - 0 = 3$ asintoti dove $n =$ grado del polinomio $\alpha(s)$ e $m =$ grado del polinomio $\beta(s)$.

Il centro degli asintoti è nel punto:

$$\sigma_a = \frac{\sum_{i=1}^m \bar{z}_i - \sum_{i=1}^n z_i}{n - m} = \frac{(-1 - 0 - 0) - 0}{3 - 0} = -\frac{1}{3}$$

L'angolo di inclinazione degli asintoti è:

$$\varphi_h^+ = \frac{\pi}{n - m} + \frac{2\pi}{n - m} h = \begin{cases} \frac{\pi}{3} \\ \pi \\ \frac{5}{3}\pi \end{cases}$$

Il Luogo delle Radici Positivo di (3.1) è rappresentato nella seguente figura:

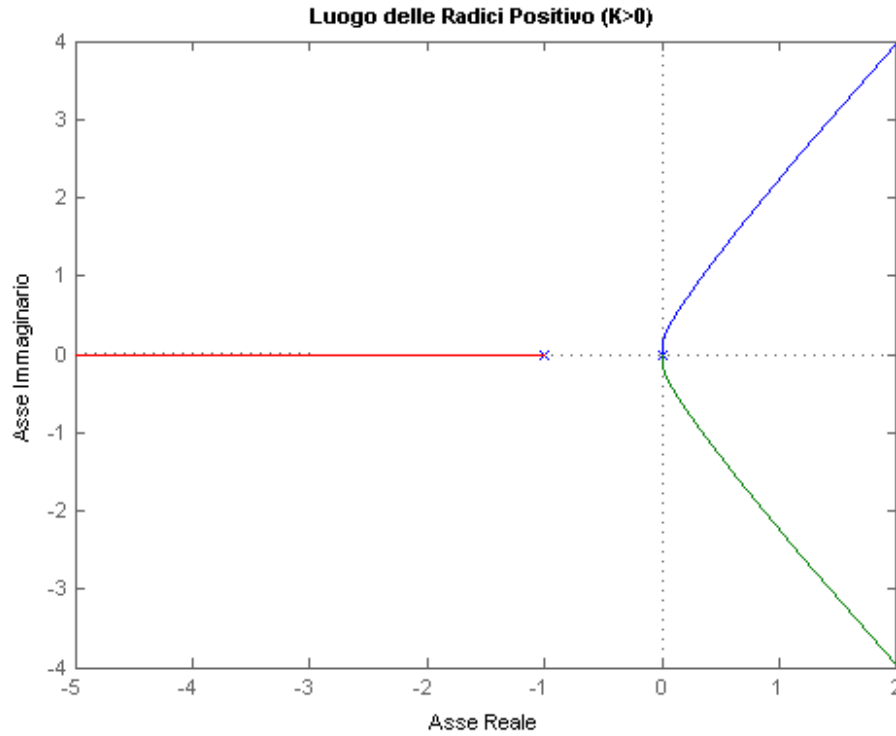


Figura 3.2: Luogo delle Radici Positivo di $W_{Z_d, Z}(s)$.

3.2 Punto (b)

Per vedere per quali valori di K_0 il sistema in catena chiusa (3.1) rimane stabile, si utilizza la *Tabella di Routh* in quanto il polinomio a denominatore della funzione di trasferimento è di terzo grado e quindi non analizzabile direttamente con il Criterio di Cartesio.

Il polinomio in questione è $a(s) = s^3 + s^2 + 0,001K_0$, la cui tabella è:

Grado	Coefficienti	
3	1	0
2	1	$0,001K_0$
1	$-0,001K_0$	
0	$0,001K_0$	

Tabella 3.1: Tabella di Routh del sistema in catena chiusa (3.1).

in cui il coefficiente di grado 1 è: $-1 \cdot \det \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 1 & 0,001K_0 \end{bmatrix} = -0,001K_0$.

Si può vedere che nella prima colonna dei coefficienti c'è sempre almeno una variazione di segno dovuta all'ultima e alla penultima riga per qualsiasi valore di K_0 , positivo o negativo. Ciò implica che il sistema è *instabile* per *qualsiasi valore* di K_0 .

3.3 Punto (c)

3.3.1 Collocazione zero

Dato il compensatore $D(s) = K_1 \frac{s+z}{s+1}$, i parametri di banda-passante $\omega_{BW} = 0,04 \text{ rad/sec}$ e smorzamento $\xi = 0,5$ indicano che i poli del sistema sono dati dal polinomio $\frac{s^2}{\omega_{BW}^2} + \frac{2\xi}{\omega_{BW}}s + 1 = 0$ ovvero, sostituendo i valori numerici: $s^2 + 0,04s + (0,04)^2 = 0$.

I poli in catena chiusa ottenuti sono:

$$s_{1,2} = -0,02 \pm \sqrt{0,0004 - 0,00016} = -0,02 \pm \sqrt{(-0,0012)} = -0,02 \pm j0,02\sqrt{3}$$

Valutando l'andamento del Luogo delle Radici nell'intorno del polo $s_1 = -0,02 + j0,02\sqrt{3}$, considero la condizione di fase per il Luogo Positivo:

$$\sum_{i=1}^m \angle(s_1 - z_i) - \sum_{i=1}^n \angle(s_1 - \bar{z}_i) = -\pi$$

in quanto s_1 è il polo alla frequenza di attraversamento ω_{BW} .

Quindi:

$$\angle(s_1 - z) - \angle(s_1 + 1) - \angle(s_1 + 1) - 2\angle(s_1) = -180^\circ,$$

$$\angle(s_1 - z) - 2\angle(-0,02 + j0,02\sqrt{3} + 1) - 2\angle(-0,02 + j0,02\sqrt{3}) = -180^\circ,$$

$$\angle(s_1 - z) - 2\angle(0,98 + j0,02\sqrt{3}) - 2\angle(-0,02 + j0,02\sqrt{3}) = -180^\circ,$$

$$\angle(s_1 - z) = -180^\circ + 2\text{tg}^{-1}\left(\frac{0,02\sqrt{3}}{0,98}\right) + 2\text{tg}^{-1}\left(\frac{-0,02\sqrt{3}}{0,02}\right) = -180^\circ + 2 \cdot 2^\circ + 2 \cdot 120^\circ = 64^\circ.$$

Perciò:

$$\angle(s_1 - z) = \angle(-0,02 + j0,02\sqrt{3} + z) = \text{tg}^{-1}\left(\frac{0,02\sqrt{3}}{-0,02 - z}\right) = 64^\circ,$$

$$\frac{0,02\sqrt{3}}{-0,02 - z} = \text{tg}64^\circ, \quad \frac{0,02\sqrt{3}}{\text{tg}64^\circ} = -0,02 - z,$$

$$\Rightarrow z = -\left(\frac{0,02\sqrt{3}}{\text{tg}64^\circ} + 0,02\right) = -0,0369.$$

3.3.2 Luogo delle Radici

Il compensatore equivale a: $D(s) = K_1 \frac{s + 0,0369}{s + 1}$,

con cui:

$$DGH = \frac{K_1 s + 0,0369}{I s^2 (s + 1)^2}$$

e la funzione di trasferimento del sistema in catena chiusa, il cui Luogo delle Radici è riportato nella pagina seguente, diventa:

$$W_{Z_d, Z}(s) = \frac{0,001K_1(s + 0,0369)}{s^2(s + 1)^2 + 0,001K_1(s + 0,0369)} \quad (3.2)$$

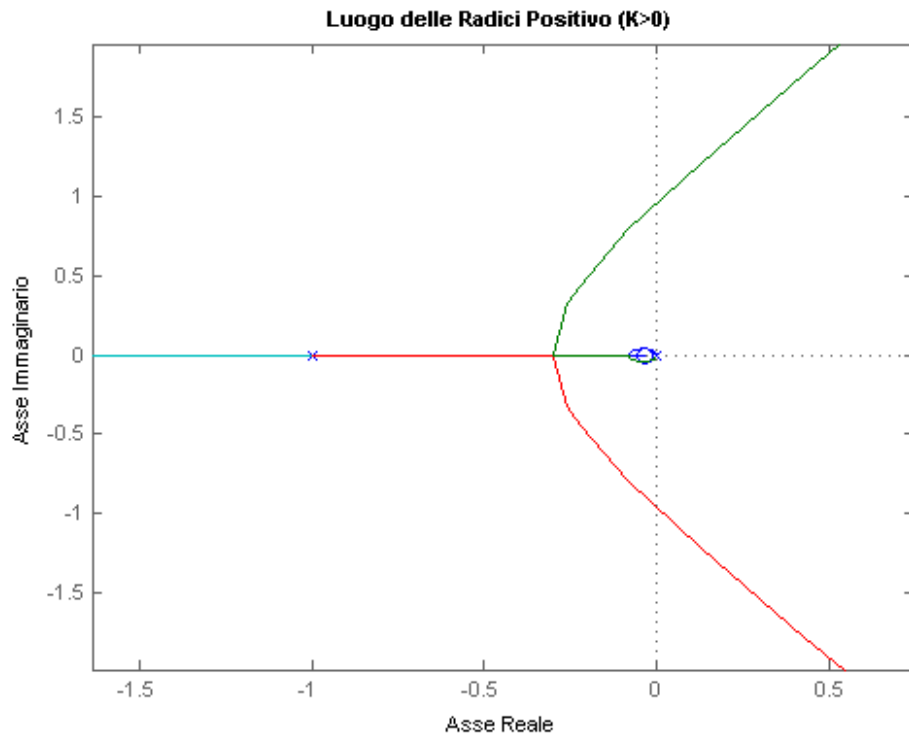


Figura 3.3: Luogo delle Radici Positivo di $W_{Z_d, Z}(s)$.

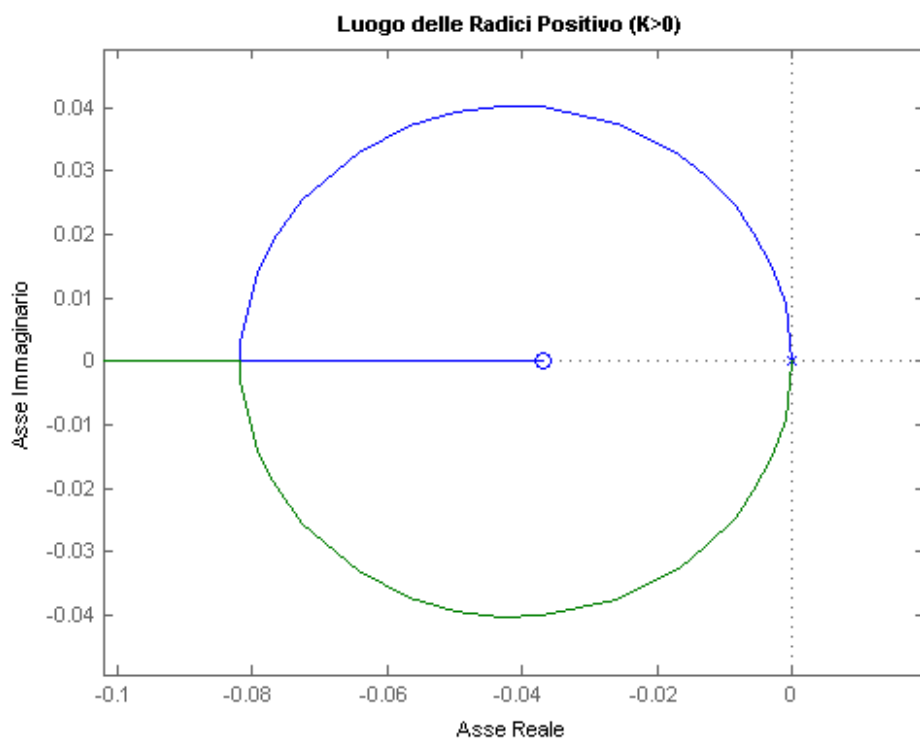


Figura 3.4: Particolare del Luogo delle Radici nell'intorno dello zero $z = -0,0369$.

3.3.3 Valore di K_1

Per trovare il valore di K_1 che soddisfa le specifiche poniamo:

$$|DGH|_{s=-0,02+j0,02\sqrt{3}} = 1 \Rightarrow \text{modulo della funzione di trasferimento}$$

$$\text{alla pulsazione di attraversamento.}$$

In quanto per una generica $f(s) = 1 + \frac{2\xi}{\omega_{BW}}s + \frac{s^2}{\omega_{BW}^2}$, il modulo è:

$$|f(s)| = \left| 1 + \frac{2\xi}{\omega_{BW}}s + \frac{s^2}{\omega_{BW}^2} \right|$$

$$\xrightarrow{\text{per } s=j\omega} |f(j\omega)| = \left| 1 + \frac{2\xi}{\omega_{BW}}j\omega - \frac{\omega^2}{\omega_{BW}^2} \right|$$

$$\xrightarrow[\xi=0,5]{\text{per } \omega=\omega_{BW}} |f(j\omega_{BW})| = \left| 1 + \frac{2\xi}{\omega_{BW}}j\omega_{BW} - \frac{\omega_{BW}^2}{\omega_{BW}^2} \right| = |1 + j - 1| = 1$$

Quindi:

$$|DGH| = \left| \frac{K_1}{I} \frac{s + 0,0369}{s^2(s+1)^2} \right| = \frac{K_1}{I} \frac{|s + 0,0369|}{|s|^2|s+1|^2}$$

$$|DGH|_{s=-0,02+j0,02\sqrt{3}} = \frac{K_1}{1000} \cdot \frac{|-0,02 + j0,02\sqrt{3} + 0,0369|}{|-0,02 + j0,02\sqrt{3}|^2 |-0,02 + j0,02\sqrt{3} + 1|^2} =$$

$$= \frac{K_1}{1000} \cdot \frac{|0,0169 + j0,02\sqrt{3}|}{|-0,02 + j0,02\sqrt{3}|^2 |0,98 + j0,02\sqrt{3}|^2} =$$

$$= \frac{K_1}{1000} \cdot \frac{\sqrt{(0,0169)^2 + (0,02\sqrt{3})^2}}{[(0,02)^2 + (0,02\sqrt{3})^2][(0,98)^2 + (0,02\sqrt{3})^2]} =$$

$$= \frac{K_1}{1000} \cdot \frac{0,0385}{0,0016 \cdot 0,9616} = 1$$

$$\Rightarrow K_1 = 1000 \cdot \frac{0,0016 \cdot 0,9616}{0,0385} = 39,92.$$

3.4 Punto (d)

Come in precedenza per K_0 , si utilizza la Tabella di Routh per trovare i valori di K_1 per cui il sistema in catena chiusa rimane stabile.

Dalla funzione di traferimento $W_{Z_d, Z}(s)$ (3.2) precedentemente calcolata nella sottosezione 3.3.2, si analizza il polinomio $f(s) = s^4 + 2s^3 + s^2 + \frac{K_1}{I}s + 0,0369\frac{K_1}{I}$:

Grado		Coefficienti	
4	1	1	$0,0369\frac{K_1}{I}$
3	2	$\frac{K_1}{I}$	
2	x	$0,0369\frac{K_1}{I}$	
1	y		
0	$0,0369\frac{K_1}{I}$		

Tabella 3.2: Tabella di Routh del sistema in catena chiusa (3.2).

in cui:

$$x = -\frac{1}{2} \det \begin{bmatrix} 1 & 1 \\ 2 & \frac{K_1}{I} \end{bmatrix} = 1 - \frac{K_1}{2I},$$

$$y = -\frac{1}{1 - \frac{K_1}{2I}} \det \begin{bmatrix} 2 & \frac{K_1}{I} \\ 1 - \frac{K_1}{2I} & 0,0369\frac{K_1}{I} \end{bmatrix} = \frac{2I}{K_1 - 2I} \left(0,0738\frac{K_1}{I} - \frac{K_1}{I} + \frac{K_1^2}{2I^2} \right).$$

Affinchè il sistema sia stabile la prima colonna dei coefficienti non deve avere variazione di segno, quindi:

- dalla riga di grado 0 : $0,0369\frac{K_1}{I} > 0 \Rightarrow K_1 > 0$,
- dalla riga di grado 2 : $1 - \frac{K_1}{2I} > 0 \Rightarrow K_1 < 2I = 2000$,
- dalla riga di grado 1 :

$$\text{a) } \frac{2I}{K_1 - 2I} > 0 \Rightarrow K_1 - 2I > 0 \Rightarrow K_1 > 2I$$

non è accettabile per la condizione di grado 2;

$$\text{b) } \bullet \frac{2I}{K_1 - 2I} < 0 \Rightarrow K_1 - 2I < 0 \Rightarrow K_1 < 2I$$

$$\bullet \frac{K_1^2}{2I^2} - \frac{K_1}{I} + 0,0738\frac{K_1}{I} < 0$$

$$\frac{K_1^2}{2I^2} + \frac{K_1}{I}(0,0738 - 1) < 0$$

$$K_1^2 + 2IK_1(-0,9262) < 0$$

$$K_1(K_1 - 1852, 4) < 0 \left\{ \begin{array}{l} \Rightarrow \begin{cases} K_1 < 0 \\ K_1 > 1852, 4 \end{cases} \Rightarrow \text{n.a. per condizione di grado 0;} \\ \Rightarrow \begin{cases} K_1 > 0 \\ K_1 < 1852, 4 \end{cases} \end{array} \right.$$

Quindi il range di K_1 per cui il sistema in catena chiusa rimane stabile è: $0 < K_1 < 1852, 4$.

3.5 Punto (e)

Per valutare l'errore a regime E si possono fare le seguenti considerazioni:

$$\text{con } G_1 = \frac{1}{I} \frac{1}{s^2}, G_2 = \frac{1}{s+1} \text{ e } D = K_1 \frac{s+0,0369}{s+1} :$$

$$\left. \begin{array}{l} \phi = G_1(T_{ex} + DE) \\ E = Z_d - Z = Z_d - \phi G_2 = Z_d - G_1 G_2 T_{ex} - G_1 G_2 DE \end{array} \right\} \Rightarrow E(1 + G_1 G_2 D) = Z_d - G_1 G_2 T_{ex}$$

$$\Rightarrow E = (1 + G_1 G_2 D)^{-1} Z_d - (1 + G_1 G_2 D)^{-1} G_1 G_2 T_{ex}$$

Per il *Teorema del Valore Finale* con $Z_d = \frac{1}{s}$ e $T_{ex} = \frac{1}{s}$ (funzioni gradino):

$$\begin{aligned} e_\infty &= \lim_{t \rightarrow \infty} e(t) = \lim_{s \rightarrow 0} sE(s) = \lim_{s \rightarrow 0} s \frac{1}{1 + G_1 G_2 D} \frac{1}{s} - \lim_{s \rightarrow 0} s \frac{G_1 G_2}{1 + G_1 G_2 D} \frac{1}{s} = \\ &= \lim_{s \rightarrow 0} \frac{1}{1 + G_1 G_2 D} - \lim_{s \rightarrow 0} \frac{G_1 G_2}{1 + G_1 G_2 D} = \\ &= \lim_{s \rightarrow 0} \frac{1}{1 + \frac{K_1}{I} \frac{1}{s^2} \frac{(s+0,0369)}{(s+1)^2}} - \lim_{s \rightarrow 0} \frac{\frac{1}{I} \frac{1}{s^2} \frac{1}{(s+1)}}{1 + \frac{K_1}{I} \frac{1}{s^2} \frac{(s+0,0369)}{(s+1)^2}} = \\ &= 0 - \lim_{s \rightarrow 0} \frac{s+1}{I s^2 (s+1)^2 + K_1 (s+0,0369)} = \\ &= -\frac{1}{K_1 \cdot 0,0369} = -\frac{1}{39,92 \cdot 0,0369} = -0,679 \end{aligned}$$

3.6 Punto (f)

Il sistema, rispetto a T_{ex} costante (cioè approssimabile come un segnale a gradino come nella sezione 3.5) è di *tipo 0*. Ciò si può dire in quanto, considerando il sistema ipoteticamente composto solo dall'ingresso T_{ex} , da un compensatore D e da un blocco amplificatore G , l'errore diventa:

$$E_{T_{ex}} = T_{ex} - \frac{DG}{1 + DG} T_{ex} = \frac{1}{1 + DG} T_{ex}$$

e quindi:

$$\lim_{t \rightarrow \infty} e(t) = \lim_{s \rightarrow 0} sE_{T_{ex}}(s) = \lim_{s \rightarrow 0} s \frac{1}{1 + DG} \frac{1}{s} = \frac{1}{1 + [DG](0)}.$$

3.7 Punto (g)

3.7.1 Diagramma di Bode in catena aperta

Il diagramma di Bode del sistema in catena aperta è basato sulla seguente funzione di trasferimento:

$$DG = \frac{K_1 (s + 0,0369)}{I s^2 (s + 1)^2} = \frac{0,03992(s + 0,0369)}{s^2 (s + 1)^2}$$

ed è rappresentato nella seguente figura:

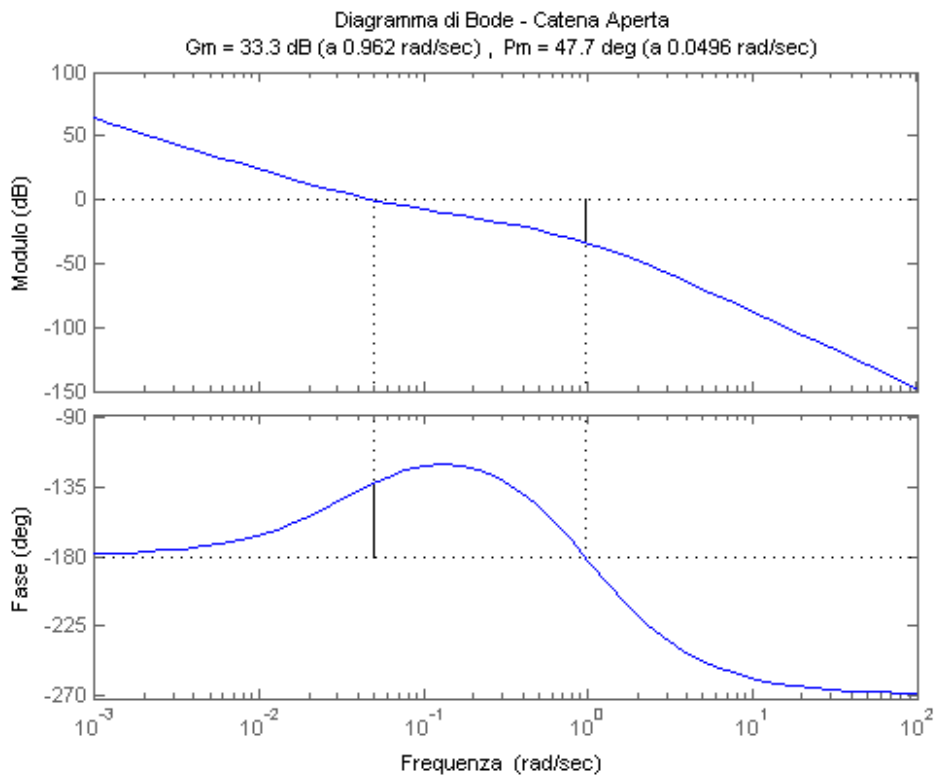


Figura 3.5: Diagramma di Bode in catena aperta.

In cui:

- Margine di Ampiezza: $m_a \simeq 33,3\text{dB}$ alla frequenza $\omega_B \simeq 1\text{rad/sec}$;
- Margine di Fase: $m_\varphi \simeq 47,7\text{deg}$ alla frequenza $\omega_A \simeq 0,05\text{rad/sec}$.

3.7.2 Diagramma di Bode in catena chiusa

Il diagramma di Bode del sistema in catena chiusa è basato sulla funzione di trasferimento (3.2) calcolata nella sottosezione 3.3.2:

$$\begin{aligned} W_{Z_d,Z}(s) &= \frac{DG}{1 + DGH} = \frac{0,001K_1(s + 0,0369)}{s^2(s + 1)^2 + 0,001K_1(s + 0,0369)} = \\ &= \frac{0,03992(s + 0,0369)}{s^4 + 2s^3 + s^2 + 0,03992s + 0,03992 \cdot 0,0369} \end{aligned}$$

ed è rappresentato nella seguente figura:

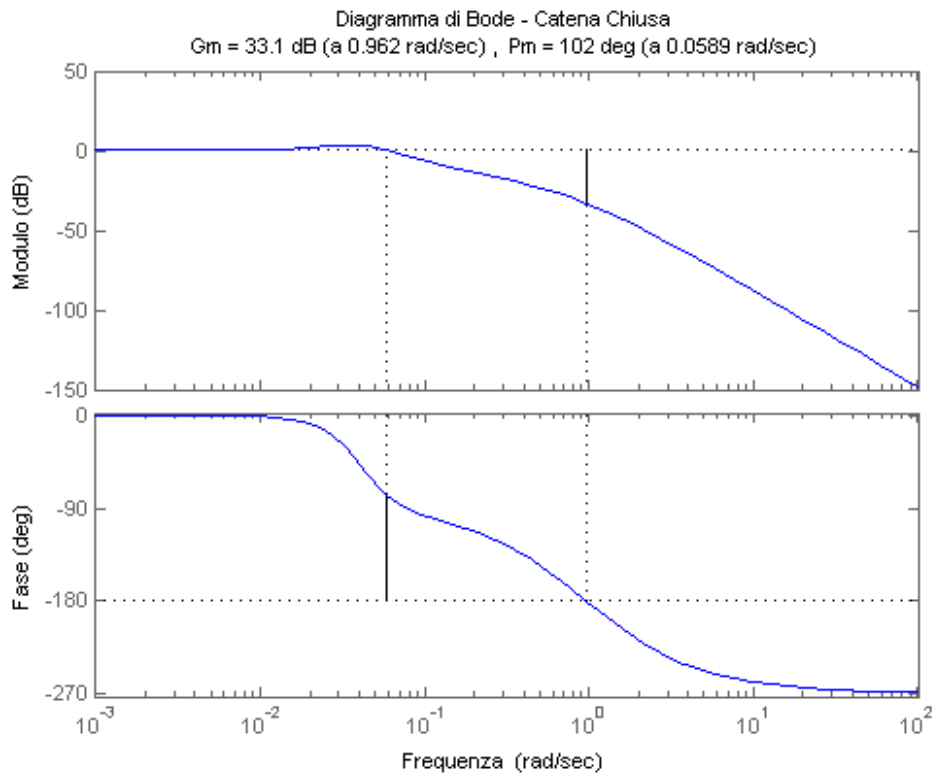


Figura 3.6: Diagramma di Bode in catena chiusa

In cui:

- Margine di Ampiezza: $m_a \simeq 33\text{dB}$ alla frequenza $\omega_B \simeq 1\text{rad/sec}$;
- Margine di Fase: $m_\varphi \simeq 102\text{deg}$ alla frequenza $\omega_A \simeq 0,06\text{rad/sec}$.

3.8 Punto (h)

3.8.1 Equazioni in catena aperta

Le equazioni in forma matriciale del sistema in catena aperta sono:

$$\begin{cases} \dot{x} = Fx + Gu + G_1w \\ y = Hx \end{cases}$$

con:

$$\bullet x = \begin{bmatrix} \phi \\ \dot{\phi} \\ Z \end{bmatrix}$$

$$\bullet u = T_c$$

$$\bullet w = T_{ex}$$

$$\bullet F = \begin{bmatrix} 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \\ 1 & 0 & -1 \end{bmatrix}$$

$$\bullet G = G_1 = \begin{bmatrix} 0 \\ \frac{1}{I} \\ 0 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 \\ 1 \\ 1000 \\ 0 \end{bmatrix}$$

$$\bullet H = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \end{bmatrix}$$

in cui:

$$\dot{x} = \begin{bmatrix} \dot{\phi} \\ \ddot{\phi} \\ \dot{Z} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \\ 1 & 0 & -1 \end{bmatrix} \cdot \begin{bmatrix} \phi \\ \dot{\phi} \\ Z \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} 0 \\ \frac{1}{I} \\ 0 \end{bmatrix} \cdot T_c + \begin{bmatrix} 0 \\ \frac{1}{I} \\ 0 \end{bmatrix} \cdot T_{ex}$$

porta alle equazioni:

$$\begin{bmatrix} \dot{\phi} \\ \ddot{\phi} \\ \dot{Z} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \dot{\phi} \\ \frac{T_c + T_{ex}}{I} \\ (\dot{\phi} - \dot{Z}) \end{bmatrix} \Rightarrow \begin{cases} \dot{\phi} = \dot{\phi} \\ \ddot{\phi} = \frac{T_c + T_{ex}}{I} \\ \dot{Z} = \dot{\phi} - \dot{Z} \end{cases}$$

e:

$$y = H = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \end{bmatrix} \cdot \begin{bmatrix} \phi \\ \dot{\phi} \\ Z \end{bmatrix}$$

3.8.2 Guadagni controllore state-feedback

Per dare i valori K_ϕ e $K_{\dot{\phi}}$ di $T_c = -K_\phi\phi - K_{\dot{\phi}}\dot{\phi}$, per collocare i poli del sistema in catena chiusa in $s = -0,02 \pm j0,02\sqrt{3}$, occorre calcolare l'equazione caratteristica $\det[sI - (Fx + GT_c)] = 0$ la quale ritorna gli autovalori della matrice che, appunto, sono i poli della funzione di trasferimento:

$$\begin{aligned} Fx + GT_c &= \begin{bmatrix} 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \\ 1 & 0 & -1 \end{bmatrix} \cdot \begin{bmatrix} \phi \\ \dot{\phi} \\ Z \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} 0 \\ \frac{1}{I} \\ 0 \end{bmatrix} \cdot \begin{bmatrix} -K_\phi & -K_{\dot{\phi}} & 0 \end{bmatrix} \cdot \begin{bmatrix} \phi \\ \dot{\phi} \\ Z \end{bmatrix} = \\ &= \begin{bmatrix} \dot{\phi} \\ 0 \\ (\phi - Z) \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} 0 \\ \frac{1}{I} \\ 0 \end{bmatrix} \cdot (-K_\phi\phi - K_{\dot{\phi}}\dot{\phi}) = \\ &= \begin{bmatrix} \dot{\phi} \\ -\frac{K_\phi}{I}\phi - \frac{K_{\dot{\phi}}}{I}\dot{\phi} \\ (\phi - Z) \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 & 1 & 0 \\ -\frac{K_\phi}{I} & -\frac{K_{\dot{\phi}}}{I} & 0 \\ 1 & 0 & -1 \end{bmatrix} \cdot \begin{bmatrix} \phi \\ \dot{\phi} \\ Z \end{bmatrix} \end{aligned}$$

$$\det[sI - (Fx + GT_c)] = \begin{vmatrix} s & -1 & 0 \\ \frac{K_\phi}{I} & s + \frac{K_{\dot{\phi}}}{I} & 0 \\ -1 & 0 & s + 1 \end{vmatrix} = (s + 1)\left(s^2 + s\frac{K_{\dot{\phi}}}{I} + \frac{K_\phi}{I}\right) = 0$$

In cui si ha il polo $s = -1$ e dall'equazione di secondo grado $s^2 + s\frac{K_{\dot{\phi}}}{I} + \frac{K_\phi}{I} = 0$ devono risultare i due poli $s = -0,02 \pm j0,02\sqrt{3}$.

Per avere tale risultato, bisogna che tale equazione sia del tipo:

$$\alpha(s) = s^2 + 2\xi\omega_{BW}s + \omega_{BW}^2 = s^2 + 0,04s + 0,0016$$

come visto in precedenza nella sottosezione 3.3.1.

Si ha quindi:

$$\begin{cases} \frac{K_{\dot{\phi}}}{I} = 0,04 & \Rightarrow \begin{cases} K_{\dot{\phi}} = 0,04 \cdot I = 0,04 \cdot 1000 = 40 \\ K_\phi = 0,0016 \cdot I = 0,0016 \cdot 1000 = 1,6 \end{cases} \\ \frac{K_\phi}{I} = 0,0016 & \Rightarrow \end{cases}$$

Bibliografia

- [1] Gene F. Franklin, J.David Powell, Abbas Emami-Naeini, *Feedback Control of Dynamic Systems* - Quarta Edizione. Prentice Hall International Education, 2002.
- [2] Sandro Zampieri, *dispensa di Controlli Automatici*. Edizioni Libreria Progetto Padova, 2011.
- [3] Gérard Maral, Michel Bousquet, Zhili Sun, *Satellite Communications Systems: Systems, Techniques and Technology* - Quinta Edizione. John Wiley and Sons, 2009.
- [4] Anil K. Maini, Varsha Agrawal, *Satellite Technology: Principles and Applications* - Seconda Edizione. John Wiley and Sons, 2010.
- [5] Louis J. Ippolito, *Satellite communications systems engineering: atmospheric effects, satellite link design and system performance*. John Wiley and Sons, 2008.