



UNIVERSITÀ
DEGLI STUDI
DI PADOVA



DIPARTIMENTO
MATEMATICA

CORSO DI LAUREA IN MATEMATICA

DIPARTIMENTO DI MATEMATICA "TULLIO LEVI-CIVITA"

Teorema di equidistribuzione di Weyl: un incontro fra analisi e teoria dei numeri

Relatore:
Prof. Roberto Monti

Candidato:
Filippo d'Avella
Matricola 2113115

Anno accademico 2025/2026 - 17.07.2026

Indice

Indice	iii
Introduzione	1
1 Teorema di approssimazione trigonometrica	3
1.1 I polinomi trigonometrici	3
1.2 Formula di Wallis	4
1.3 Teorema di Approssimazione di Weierstrass	5
2 Teorema di Equidistribuzione di Weyl	9
2.1 La successione $\langle n\gamma \rangle$	9
2.2 Successioni equidistribuite	10
2.3 Il Teorema di Equidistribuzione di Weyl	12
2.4 Conseguenze del teorema e Criterio di Weyl	15
3 Costruzione di successioni equidistribuite	19
3.1 Teorema di Fejér	19
3.2 Teorema sulle differenze	23
3.3 Equidistribuzione quasi ovunque	25
4 Problemi	29
4.1 Esempi di soluzioni elementari	29
4.2 Esempi di applicazione del Criterio di Weyl	32
Bibliografia	39

Introduzione

La teoria dell'equidistribuzione modulo 1 fu introdotta nel 1916 da Hermann Weyl nel celebre articolo *Über die Gleichverteilung von Zahlen mod. Eins* [Wey16]. Nato come naturale sviluppo dei risultati di approssimazione ottenuti da Kronecker, tale lavoro introdusse il moderno concetto di equidistribuzione e pose le basi di una teoria che, nel corso del Novecento, ha trovato numerose applicazioni in analisi, teoria dei numeri, probabilità e sistemi dinamici. L'obiettivo di questa tesi è presentare i principali risultati classici della teoria delle successioni equidistribuite in $[0, 1)$, per poi approfondire alcuni sviluppi successivi che mettono in luce il ruolo degli strumenti analitici nello studio dell'equidistribuzione.

Il primo capitolo è dedicato alla dimostrazione del Teorema di Approssimazione di Weierstrass nella forma trigonometrica, risultato che costituisce uno strumento importante per lo sviluppo della teoria. Seguiamo l'impostazione della dimostrazione del teorema nella forma classica riportata in [Rud76].

Nel secondo capitolo vengono introdotti i risultati fondamentali della teoria dell'equidistribuzione. Si studia dapprima la successione $\langle n\gamma \rangle$, la cui equidistribuzione, nel caso in cui γ sia irrazionale, è garantita dal Teorema di Equidistribuzione di Weyl. Come conseguenza di questo risultato viene ricavato il Teorema di Approssimazione di Kronecker. Successivamente, le idee impiegate nella dimostrazione del teorema vengono estese al caso di successioni arbitrarie, conducendo al Criterio di Weyl, che fornisce una caratterizzazione dell'equidistribuzione mediante somme esponenziali. Per la presentazione dei risultati abbiamo seguito la trattazione contenuta in [SS03, Cap. 4].

Il terzo capitolo è dedicato ad alcuni risultati che utilizzano il Criterio di Weyl per ottenere condizioni sufficienti di equidistribuzione per successioni generali. Le dimostrazioni combinano strumenti di analisi reale e complessa e fanno ricorso a diversi risultati tecnici, riportati e dimostrati nel testo. Viene infine introdotto il concetto di equidistribuzione quasi ovunque per successioni di funzioni, per il cui studio sono richiamate alcune nozioni di base della teoria della misura. In questo capitolo, intendiamo offrire una panoramica di alcuni degli sviluppi che la teoria dell'equidistribuzione ha conosciuto nel corso dell'ultimo secolo. Il riferimento principale è [KN74, Cap. 1].

Nel quarto capitolo presentiamo alcuni problemi, svolti in autonomia, che illustrano tramite esempi e controesempi tecniche e ragionamenti tipicamente usati nello studio delle successioni equidistribuite.

Capitolo 1

Teorema di approssimazione trigonometrica

In questo capitolo definiamo i polinomi trigonometrici e dimostriamo il Teorema di Approssimazione di Weierstrass (Teorema 1.3), un risultato che sarà fondamentale nella dimostrazione del Teorema di Equidistribuzione di Weyl (Teorema 2.10).

1.1 I polinomi trigonometrici

Definizione 1.1 (Polinomi trigonometrici). Le funzioni 2π -periodiche $P : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$ del tipo

$$P(x) = \frac{a_0}{2} + \sum_{k=1}^n a_k \cos kx + b_k \sin kx, \quad x \in \mathbb{R}, \quad (1.1)$$

con $n \in \mathbb{N}$ e $a_k, b_k \in \mathbb{R}$ sono dette *polinomi trigonometrici*.

Osservazione 1.2. Usando la formula di Eulero

$$e^{it} = \cos(t) + i \sin(t),$$

è possibile scrivere i polinomi trigonometrici come somma di funzioni esponenziali complesse della forma

$$P(x) = \sum_{k=-n}^n \alpha_k e^{ikx}, \quad (1.2)$$

con $\alpha_k \in \mathbb{C}$.

Infatti, dato un polinomio trigonometrico come nella (1.1), definendo i coefficienti

$$\begin{cases} \alpha_k = \frac{a_k - ib_k}{2}, & k \in \mathbb{N} \\ \alpha_0 = \frac{a_0}{2}, \\ \alpha_{-k} = \frac{a_k + ib_k}{2}, & k \in \mathbb{N} \end{cases}$$

si ottiene la forma esponenziale del polinomio.

Quindi, se una proprietà vale per ogni funzione della forma (1.2), allora vale per tutti i polinomi trigonometrici.

1.2 Formula di Wallis

In questa sezione mostreremo il comportamento asintotico della successione

$$\alpha(n) = \left(\int_{-\pi}^{\pi} \cos^{2n} \left(\frac{x}{2} \right) dx \right)^{-1} \quad n \in \mathbb{N}.$$

Dalla parità della funzione coseno otteniamo

$$\int_{-\pi}^{\pi} \cos^{2n} \left(\frac{x}{2} \right) dx = 2 \int_0^{\pi} \cos^{2n} \left(\frac{x}{2} \right) dx = 4 \int_0^{\pi/2} \cos^{2n}(x) dx.$$

Studiamo allora la quantità $I_n := \int_0^{\pi/2} \cos^n(x) dx$. Integrando per parti ricaviamo

$$\begin{aligned} I_n &= \int_0^{\pi/2} \cos^n(x) dx = \int_0^{\pi/2} \cos(x) \cos^{n-1}(x) dx \\ &= \sin(x) \cos^{n-1}(x) \Big|_0^{\pi/2} - \int_0^{\pi/2} \sin(x) \cdot (n-1)(-1) \sin(x) \cos^{n-2}(x) dx \\ &= 0 + (n-1) \int_0^{\pi/2} \sin^2(x) \cos^{n-2}(x) dx \\ &= (n-1) \int_0^{\pi/2} (1 - \cos^2(x)) \cos^{n-2}(x) dx \\ &= (n-1)(I_{n-2} - I_n). \end{aligned}$$

Da cui ricaviamo

$$I_n = \frac{n-1}{n} I_{n-2} \quad \text{per } n \geq 2. \quad (1.3)$$

I termini iniziali della successione sono

$$I_0 = \frac{\pi}{2} \quad \text{e} \quad I_1 = 1.$$

Iterando la (1.3), otteniamo una formula per i termini pari e dispari della successione:

$$\begin{aligned} \text{Indici pari: } I_{2n} &= \frac{2n-1}{2n} I_{2n-2} = \frac{2n-1}{2n} \cdot \frac{2n-3}{2n-2} \cdots \frac{3}{4} \cdot \frac{1}{2} \cdot \left(\frac{\pi}{2} \right) \\ \text{Indici dispari: } I_{2n+1} &= \frac{2n}{2n+1} I_{2n-1} = \frac{2n}{2n+1} \cdot \frac{2n-2}{2n-1} \cdots \frac{4}{5} \cdot \frac{2}{3} \cdot (1). \end{aligned}$$

Poiché $0 \leq \cos(x) \leq 1$ per $x \in [0, \pi/2]$, valgono le disuguaglianze

$$\cos^{2n+1}(x) \leq \cos^{2n}(x) \leq \cos^{2n-1}(x),$$

da cui

$$I_{2n+1} \leq I_{2n} \leq I_{2n-1}.$$

Dividiamo per I_{2n+1} , così da ottenere

$$1 = \frac{I_{2n+1}}{I_{2n+1}} \leq \frac{I_{2n}}{I_{2n+1}} \leq \frac{I_{2n-1}}{I_{2n+1}} = \frac{2n+1}{2n} \rightarrow 1 \text{ per } n \rightarrow \infty.$$

Per confronto vale

$$\frac{I_{2n}}{I_{2n+1}} \rightarrow 1,$$

ovvero

$$\begin{aligned} 1 &= \lim_{n \rightarrow \infty} I_{2n} \cdot \frac{2n+1}{2n} \cdot \frac{2n-1}{2n-2} \cdots \frac{5}{4} \cdot \frac{3}{2} \\ &= \lim_{n \rightarrow \infty} I_{2n} \cdot (2n+1) I_{2n} \cdot \frac{2}{\pi} \end{aligned}$$

Quindi otteniamo

$$\lim_{n \rightarrow \infty} \sqrt{(2n+1)} \cdot I_{2n} \cdot \sqrt{\frac{2}{\pi}} = 1.$$

Allora risulta

$$\int_{-\pi}^{\pi} \cos^{2n} \left(\frac{x}{2} \right) dx = 4I_{2n} \simeq 4\sqrt{\frac{\pi}{2(2n+1)}},$$

e abbiamo

$$\alpha(n) \simeq \sqrt{\frac{2n+1}{8\pi}}. \quad (1.4)$$

1.3 Teorema di Approssimazione di Weierstrass

Il seguente teorema permette di approssimare in maniera uniforme funzioni continue e periodiche tramite polinomi trigonometrici.

Teorema 1.3 (Teorema di Approssimazione di Weierstrass trigonometrico). L'insieme dei polinomi trigonometrici è denso rispetto alla convergenza uniforme nell'insieme delle funzioni continue 2π -periodiche.

Dimostrazione. Sia $f : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$ una funzione continua e 2π -periodica. Per $n \in \mathbb{N}$ sia $\varphi_n : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$ definita nel seguente modo:

$$\varphi_n(x) := \alpha(n) \cos^{2n} \left(\frac{x}{2} \right), \quad (1.5)$$

dove la costante $\alpha(n)$ è fissata dalla condizione

$$\alpha(n) \int_{-\pi}^{\pi} \cos^{2n} \left(\frac{x}{2} \right) dx = 1. \quad (1.6)$$

Dalla periodicità di $\cos^2(x/2)$ si deduce che la funzione $\varphi_n(x)$ è 2π -periodica. Sappiamo inoltre che l'andamento asintotico di $\alpha(n)$ è come nella (1.4).

Per $x \in \mathbb{R}$ definiamo

$$f_n(x) = \int_{-\pi}^{\pi} f(\xi) \varphi_n(x - \xi) d\xi.$$

La funzione $f_n(x)$ è 2π -periodica ed è un polinomio trigonometrico nelle x per ogni $n \in \mathbb{N}$.

Fissato $\varepsilon > 0$, mostriamo che esiste $\bar{n} \in \mathbb{N}$ tale che per ogni $n \geq \bar{n}$ si ha

$$\sup_{x \in \mathbb{R}} |f(x) - f_n(x)| \leq \varepsilon.$$

Siccome entrambe le funzioni sono 2π -periodiche, basterà dimostrare

$$\sup_{x \in [-\pi, \pi]} |f(x) - f_n(x)| \leq \varepsilon. \quad (1.7)$$

La funzione f è continua e periodica. Allora è limitata, $|f(x)| \leq M$ per ogni $x \in \mathbb{R}$, ed è uniformemente continua. Dunque esiste $\delta > 0$ tale che $|f(x) - f(\xi)| \leq \varepsilon$ per ogni $|x - \xi| \leq \delta$. Sia $x \in [-\pi, \pi]$ e consideriamo

$$\begin{aligned} |f_n(x) - f(x)| &= \left| \int_{-\pi}^{\pi} f(\xi) \varphi_n(x - \xi) d\xi - f(x) \int_{-\pi}^{\pi} \varphi_n(x - \xi) d\xi \right| \\ &= \left| \int_{-\pi}^{\pi} (f(\xi) - f(x)) \varphi_n(x - \xi) d\xi \right|. \end{aligned}$$

Nella prima uguaglianza abbiamo usato che, essendo $\varphi_n(x)$ 2π -periodica, vale

$$\int_{-\pi}^{\pi} \varphi_n(x - \xi) d\xi = \int_{x-\pi}^{x+\pi} \varphi_n(t) dt = \int_{-\pi}^{\pi} \varphi_n(t) dt = 1.$$

Ora, per motivi di periodicità, possiamo supporre senza perdita di generalità che $-\pi + \delta < x < \pi - \delta$. Allora otteniamo

$$\begin{aligned} |f_n(x) - f(x)| &\leq \int_{[-\pi, \pi] \cap \{|x - \xi| < \delta\}} |f(\xi) - f(x)| \varphi_n(x - \xi) d\xi \\ &\quad + \int_{[-\pi, \pi] \cap \{|x - \xi| > \delta\}} |f(\xi) - f(x)| \varphi_n(x - \xi) d\xi. \end{aligned}$$

Per stimare il primo termine sfruttiamo l'uniforme continuità e si ha

$$\int_{[-\pi, \pi] \cap \{|x - \xi| < \delta\}} \overbrace{|f(\xi) - f(x)|}^{\leq \varepsilon} \varphi_n(x - \xi) d\xi \leq \varepsilon \int_{-\pi}^{\pi} \varphi_n(x - \xi) d\xi = \varepsilon,$$

per ogni n e per ogni x .

La stima del secondo termine è invece garantita dalla limitatezza di f . Abbiamo infatti

$$\begin{aligned} \int_{[-\pi, \pi] \cap \{|x - \xi| > \delta\}} |f(\xi) - f(x)| \varphi_n(x - \xi) d\xi &\leq 2M \int_{[-\pi, \pi] \cap \{|x - \xi| > \delta\}} \varphi_n(x - \xi) d\xi \\ &\leq 2M \cdot (2\pi) \varphi_n(\delta), \end{aligned}$$

per ogni x .

La seconda disuguaglianza è giustificata dal fatto che il massimo di $\varphi_n(\xi)$ in $[-\pi, \pi] \cap \{|\xi| > \delta\}$ si trova in $\xi = \pm\delta$ e, per simmetria, $\varphi_n(\delta) = \varphi_n(-\delta)$.

Abbiamo così ottenuto

$$|f_n(x) - f(x)| \leq \varepsilon + 4M\pi\varphi_n(\delta),$$

per ogni $n \in \mathbb{N}$. Per via dell'andamento asintotico di $\alpha(n)$ risulta che, per ogni $\delta \in (0, \pi)$, si ha

$$\lim_{n \rightarrow \infty} \varphi_n(\delta) = \lim_{n \rightarrow \infty} \alpha(n) \cos^{2n} \left(\frac{\delta}{2} \right) = 0.$$

La (1.7) è provata. □

Capitolo 2

Teorema di Equidistribuzione di Weyl

Iniziamo il percorso che ci condurrà al Teorema di Equidistribuzione di Weyl.

2.1 La successione $\langle n\gamma \rangle$

Sia x un numero reale, definiamo la *parte intera* di x come il più grande intero minore o uguale di x e la denotiamo con $[x]$, ovvero $[x] := \max\{n \in \mathbb{Z} : n \leq x\}$. Definiamo la *parte frazionaria* di x come $\langle x \rangle := x - [x]$. Si nota che $\langle x \rangle \in [0, 1)$ per ogni $x \in \mathbb{R}$.

Possiamo definire una relazione d'equivalenza su $\mathbb{R}$ nel seguente modo: $x \sim y$ se $x - y \in \mathbb{Z}$. Se $x \sim y$ scriveremo

$$x = y \pmod{\mathbb{Z}} \quad \text{oppure} \quad x = y \pmod{1}.$$

Scegliamo come rappresentante di ogni classe di equivalenza la parte frazionaria degli elementi della classe. Esso è univocamente determinato per come è stata definita la parte frazionaria.

Consideriamo ora $\gamma \in \mathbb{R}$ con $\gamma \neq 0$. A partire dalla successione $\gamma, 2\gamma, 3\gamma, \dots$ definiamo la successione delle parti frazionarie:

$$\langle \gamma \rangle, \langle 2\gamma \rangle, \langle 3\gamma \rangle, \dots$$

È possibile fare due osservazioni:

Osservazione 2.1. Se γ è razionale, allora il numero di termini distinti della successione $\langle n\gamma \rangle$ è finito.

Osservazione 2.2. Se γ è irrazionale, tutti i termini della successione $\langle n\gamma \rangle$ sono distinti.

Per convincersi della prima osservazione basta notare che, posto $\gamma = \frac{p}{q}$ con p e q interi coprimi, i primi q termini della successione saranno

$$\left\langle \frac{p}{q} \right\rangle, \left\langle \frac{2p}{q} \right\rangle, \left\langle \frac{3p}{q} \right\rangle, \dots, \left\langle \frac{qp}{q} \right\rangle = \langle p \rangle = 0,$$

e la successione inizierà a ripetersi da questo punto con periodo q , dato che

$$\left\langle \frac{(q+1)p}{q} \right\rangle = \left\langle \frac{qp+p}{q} \right\rangle = \left\langle p + \frac{p}{q} \right\rangle = \left\langle \frac{p}{q} \right\rangle,$$

e quindi il $q+1$ -esimo termine della successione è uguale al primo.

La seconda osservazione si dimostra per assurdo. Infatti se esistessero due termini uguali, allora esisterebbero n_1, n_2 tali che $\langle n_1\gamma \rangle = \langle n_2\gamma \rangle$. Ma allora $n_1\gamma \sim n_2\gamma$, da cui $n_1\gamma - n_2\gamma = (n_1 - n_2)\gamma \in \mathbb{Z}$. Questo implicherebbe $\gamma \in \mathbb{Q}$, assurdo.

In particolare nel Corollario 2.13 verrà mostrato che se γ è irrazionale allora $\langle n\gamma \rangle$ è densa nell'intervallo $[0, 1)$.

2.2 Successioni equidistribuite

Introduciamo ora la definizione centrale di questo capitolo.

Definizione 2.3 (Successione equidistribuita). Una successione $\{\xi_n\}_{n \in \mathbb{N}}$ in $[0, 1)$ si dice *equidistribuita* o *uniformemente distribuita* sull'intervallo $[0, 1)$ se per ogni coppia di numeri reali a, b con $0 \leq a < b \leq 1$ vale

$$\lim_{N \rightarrow \infty} \frac{\#\{1 \leq n \leq N : \xi_n \in (a, b)\}}{N} = b - a, \quad (2.1)$$

dove $\#A$ indica la cardinalità dell'insieme A .

D'ora in poi, se non altrimenti specificato, intenderemo che l'intervallo su cui la successione è equidistribuita sia sempre $[0, 1)$.

Questa proprietà garantisce che la successione tenda ad essere distribuita in una maniera uniforme su $[0, 1)$ all'aumentare dei termini presi in considerazione. Ciò perché, per N abbastanza grande, la proporzione di $\xi_n \in (a, b)$ con $n \leq N$ tende ad essere uguale al rapporto fra la lunghezza dell'intervallo (a, b) e la lunghezza di $[0, 1)$.

Esempio 2.4. La successione $\{a_n\}_{n \in \mathbb{N}}$ i cui primi termini sono

$$0, 0, \frac{1}{2}, 0, \frac{1}{3}, \frac{2}{3}, 0, \frac{1}{4}, \frac{2}{4}, \frac{3}{4}, 0, \frac{1}{5}, \dots$$

è equidistribuita. Per una dimostrazione di questo fatto si veda il Problema 4.1. Notiamo che la successione, tolti gli zeri, è un'enumerazione dei razionali.

Esempio 2.5. Sia $\{r\}_{n \in \mathbb{N}}$ un'enumerazione dei razionali in $[0, 1)$. Allora la successione definita da

$$\xi_n = \begin{cases} r_{n/2} & \text{se } n \text{ è pari} \\ 0 & \text{se } n \text{ è dispari} \end{cases}$$

non è equidistribuita. Infatti, scegliendo $a = 1/3$ e $b = 1$, l'intervallo $(1/3, 1)$ conterrà meno della metà dei termini della successione, dato che metà dei termini sono 0. Ma $b-a = 2/3 > 1/2$ e abbiamo trovato un intervallo (a, b) che non rispetta il limite (2.1).

Modifichiamo l'Esempio 2.5 per mostrare che la proprietà di equidistribuzione dipende dall'ordinamento della successione.

Esempio 2.6. Sia $\{a_n\}$ la successione definita nell'Esempio 2.4. Definiamo ora una nuova successione $\{\xi_n\}$ nel seguente modo:

$$\xi_n = \begin{cases} a_{n/2} & \text{se } n \text{ è pari} \\ 0 & \text{se } n \text{ è dispari.} \end{cases}$$

La successione appena definita non è equidistribuita per lo stesso ragionamento usato nell'Esempio 2.5.

Notiamo che le successioni $\{a_n\}$ e $\{\xi_n\}$ definite nell'Esempio 2.4 e nell'Esempio 2.6 sono uguali a meno di riordinamento. Infatti, i termini pari di $\{\xi_n\}$ sono esattamente i termini di $\{a_n\}$ mentre i termini dispari di $\{\xi_n\}$ sono tutti zeri e possono essere "ottenuti" dagli infiniti zeri contenuti in $\{a_n\}$. Questa osservazione mostra che l'equidistribuzione di una successione non è invariante per riordinamenti.

Nella definizione di successione equidistribuita, la scelta di considerare l'intervallo (a, b) aperto non è necessaria.

Proposizione 2.7. Nella Definizione 2.3 l'intervallo di lunghezza $b - a$ considerato può essere equivalentemente considerato aperto, chiuso o semiaperto.

Dimostrazione. Dimostriamo l'equivalenza della definizione nel caso in cui l'intervallo sia del tipo $[a, b)$, il caso $[a, b]$ si dimostra in maniera simile. Proviamo, per prima cosa, che la proprietà di equidistribuzione nella versione $[a, b)$ è implicata dalla Definizione 2.3. Mostriamo che, data una successione equidistribuita, valga

$$\lim_{N \rightarrow \infty} \frac{\#\{1 \leq n \leq N : \xi_n \in [a, b)\}}{N} = b - a. \quad (2.2)$$

Notiamo che

$$\#\{1 \leq n \leq N : \xi_n \in [a, b)\} = \#\{1 \leq n \leq N : \xi_n \in (a, b)\} + \#\{1 \leq n \leq N : \xi_n = a\}.$$

Quindi, usando il fatto che la successione è equidistribuita, basta mostrare

$$\lim_{N \rightarrow \infty} \frac{\#\{1 \leq n \leq N : \xi_n = a\}}{N} = 0.$$

Fissato $\varepsilon > 0$, avremo:

$$\limsup_{N \rightarrow \infty} \frac{\#\{1 \leq n \leq N : \xi_n = a\}}{N} \leq \lim_{N \rightarrow \infty} \frac{\#\{1 \leq n \leq N : \xi_n \in (a - \varepsilon, a + \varepsilon)\}}{N} = 2\varepsilon.$$

Dall'arbitrarietà di ε otteniamo che il limite è uguale a 0 ed è dimostrata la prima implicazione.

La dimostrazione dell'implicazione opposta, ovvero che se una successione rispetta la proprietà (2.2), allora la successione è necessariamente equidistribuita, è sostanzialmente identica a quella appena fatta. Nell'ultimo passaggio è necessario considerare gli intervalli $[a, a + \varepsilon)$ invece che $(a - \varepsilon, a + \varepsilon)$. $\square$

Proposizione 2.8. Una successione equidistribuita in $[0, 1)$ è densa in $[0, 1)$.

Dimostrazione. L'implicazione segue immediatamente dalla definizione di successione equidistribuita. Infatti, se $\{\xi_n\}$ è equidistribuita allora per ogni intervallo $(a, b) \subset [0, 1)$ esiste $\xi_{\bar{n}} \in (a, b)$, dato che in caso contrario il limite nella (2.1) sarebbe uguale a 0. $\square$

2.3 Il Teorema di Equidistribuzione di Weyl

L'Osservazione 2.1 assicura che, se γ è razionale, $\langle n\gamma \rangle$ non è equidistribuita in $[0, 1)$. La contronominale di questa affermazione è la seguente osservazione.

Osservazione 2.9. Se la successione $\langle \gamma \rangle, \langle 2\gamma \rangle, \langle 3\gamma \rangle, \dots$ è equidistribuita in $[0, 1)$ allora γ è irrazionale.

Il prossimo teorema mostra la validità dell'implicazione opposta. Otteniamo così una caratterizzazione per l'equidistribuzione della successione $\langle n\gamma \rangle$.

Teorema 2.10 (Teorema di Equidistribuzione di Weyl). Se γ è irrazionale, allora la successione $\langle \gamma \rangle, \langle 2\gamma \rangle, \langle 3\gamma \rangle, \dots$ è equidistribuita in $[0, 1)$.

Diamo una riformulazione analitica della tesi del teorema. Fissiamo $(a, b) \subset [0, 1)$ e introduciamo la funzione caratteristica dell'intervallo (a, b) indicata da $\chi_{(a,b)}(x)$. Possiamo estendere tale funzione a $\mathbb{R}$ per periodicità (con periodo 1). Quindi, notiamo che vale

$$\#\{1 \leq n \leq N : \langle n\gamma \rangle \in (a, b)\} = \sum_{n=1}^N \chi_{(a,b)}(n\gamma).$$

Infatti, i termini della sommatoria “vengono contati” solo quando $n\gamma$ appartiene all'intervallo (a, b) traslato di un intero, ovvero esattamente quando $\langle n\gamma \rangle \in (a, b)$. La tesi del teorema diventa in questo modo

$$\frac{1}{N} \sum_{n=1}^N \chi_{(a,b)}(n\gamma) \rightarrow \int_0^1 \chi_{(a,b)}(x) dx, \quad \text{per } N \rightarrow \infty. \quad (2.3)$$

Grazie a questo passaggio abbiamo ridotto un'affermazione aritmetica ad una analitica.

Il seguente lemma sarà la chiave della dimostrazione del Teorema 2.10.

Lemma 2.11. Sia $f : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$ una funzione continua e periodica di periodo 1. Se γ è un numero irrazionale, allora vale

$$\frac{1}{N} \sum_{n=1}^N f(n\gamma) \rightarrow \int_0^1 f(x) dx, \quad \text{per } N \rightarrow \infty. \quad (2.4)$$

Dimostrazione. La dimostrazione del lemma è divisa in tre passaggi e utilizza il Teorema di Approssimazione di Weierstrass nella forma trigonometrica per estendere il risultato dai polinomi trigonometrici alle funzioni continue e periodiche.

Passo 1. Controlliamo la validità della (2.4) nel caso in cui f è una funzione esponenziale del tipo $e^{2\pi i k x}$ con $k \in \mathbb{Z}$. Se $f = 1$, ovvero $k = 0$, la sommatoria converge all'integrale. Se $k \neq 0$, avremo

$$\begin{aligned} \frac{1}{N} \sum_{n=1}^N f(n\gamma) &= \frac{1}{N} \sum_{n=1}^N e^{2\pi i k (n\gamma)} = \frac{1}{N} \sum_{n=1}^N \left(e^{2\pi i k \gamma} \right)^n \\ &= \frac{e^{2\pi i k \gamma}}{N} \sum_{n=0}^{N-1} \left(e^{2\pi i k \gamma} \right)^n = \frac{e^{2\pi i k \gamma}}{N} \frac{1 - e^{2\pi i k N \gamma}}{1 - e^{2\pi i k \gamma}}, \end{aligned}$$

che tende a 0 per $N \rightarrow \infty$. Nell'ultimo passaggio abbiamo usato la formula della somma geometrica. Ciò è possibile perché, dato che γ è irrazionale, $k\gamma \notin \mathbb{Z}$ per ogni k , e di conseguenza $e^{2\pi i k \gamma} \neq 1$.

Dato che, se $f = e^{2\pi i k x}$, $\int_0^1 f(x) dx = 0$, abbiamo dimostrato la validità della (2.4) per le funzioni esponenziali ed il passo 1 è concluso.

Passo 2. È evidente che se f e g soddisfano il lemma, allora lo stesso vale per $Af + Bg$ con $A, B \in \mathbb{C}$. Segue, dal Passo 1, che la (2.4) è valida per tutti i polinomi trigonometrici.

Passo 3. Sia $\varepsilon > 0$. Dato che f è una funzione continua di periodo 1, per il Teorema 1.3, esiste un polinomio trigonometrico P tale che $\sup_{x \in \mathbb{R}} |f(x) - P(x)| < \varepsilon/3$. Inoltre, dal Passo 1, per N abbastanza grande, abbiamo

$$\left| \frac{1}{N} \sum_{n=1}^N P(n\gamma) - \int_0^1 P(x) dx \right| < \frac{\varepsilon}{3}.$$

Di conseguenza otteniamo la seguente stima:

$$\begin{aligned} \left| \frac{1}{N} \sum_{n=1}^N f(n\gamma) - \int_0^1 f(x) dx \right| &\leq \frac{1}{N} \sum_{n=1}^N |f(n\gamma) - P(n\gamma)| \\ &\quad + \left| \frac{1}{N} \sum_{n=1}^N P(n\gamma) - \int_0^1 P(x) dx \right| \\ &\quad + \int_0^1 |P(x) - f(x)| dx \\ &\leq \frac{\varepsilon}{3} + \frac{\varepsilon}{3} + \frac{\varepsilon}{3} = \varepsilon. \end{aligned}$$

Per maggiore il primo ed il terzo termine abbiamo usato il fatto che P approssima bene f , mentre per stimare il secondo abbiamo fatto uso del Passo 2. Facendo il limite per $\varepsilon \rightarrow 0$ otteniamo la tesi.

□

Ora abbiamo tutti gli strumenti per dimostrare il Teorema 2.10.

Dimostrazione. Definiamo nel seguente modo due funzioni, f_ε^- e f_ε^+ , continue e periodiche di periodo 1 che approssimano $\chi_{(a,b)}(x)$ da sopra e sotto su $[0, 1]$:

$$f_\varepsilon^-(x) = \begin{cases} 1 & \text{se } x \in (a + \varepsilon, b - \varepsilon) \\ (x - a)/\varepsilon & \text{se } x \in [a, a + \varepsilon] \\ (b - x)/\varepsilon & \text{se } x \in [b - \varepsilon, b] \\ 0 & \text{altrimenti} \end{cases} \quad f_\varepsilon^+(x) = \begin{cases} 1 & \text{se } x \in (a, b) \\ (x - (a - \varepsilon))/\varepsilon & \text{se } x \in [a - \varepsilon, a] \\ ((b + \varepsilon) - x)/\varepsilon & \text{se } x \in [b, b + \varepsilon] \\ 0 & \text{altrimenti.} \end{cases}$$

Ovvero due funzioni limitate da 1, che, in ogni intervallo $[n, n + 1]$, sono uguali a $\chi_{(a,b)}(x)$ ovunque tranne che in intervalli di lunghezza totale 2ε .

In particolare, risulta

$$f_\varepsilon^-(x) \leq \chi_{(a,b)}(x) \leq f_\varepsilon^+(x), \quad (2.5)$$

e vale

$$b - a - 2\varepsilon \leq \int_0^1 f_\varepsilon^-(x) dx \quad \text{e} \quad \int_0^1 f_\varepsilon^+(x) dx \leq b - a + 2\varepsilon. \quad (2.6)$$

Ponendo $S_N = \frac{1}{N} \sum_{n=1}^N \chi_{(a,b)}(n\gamma)$, dalla disuguaglianza (2.5) otteniamo

$$\frac{1}{N} \sum_{n=1}^N f_\varepsilon^-(n\gamma) \leq S_N \leq \frac{1}{N} \sum_{n=1}^N f_\varepsilon^+(n\gamma). \quad (2.7)$$

Possiamo ora costruire le seguenti catene di relazioni:

$$\begin{aligned} b - a - 2\varepsilon &\stackrel{(1)}{\leq} \int_0^1 f_\varepsilon^-(x) dx = \lim_{N \rightarrow \infty} \frac{1}{N} \sum_{n=1}^N f_\varepsilon^-(n\gamma) \stackrel{(2)}{\leq} \liminf_{N \rightarrow \infty} S_N \\ \limsup_{N \rightarrow \infty} S_N &\stackrel{(2)}{\leq} \lim_{N \rightarrow \infty} \frac{1}{N} \sum_{n=1}^N f_\varepsilon^+(n\gamma) = \int_0^1 f_\varepsilon^+(x) dx \stackrel{(1)}{\leq} b - a + 2\varepsilon, \end{aligned}$$

dove l'uguaglianza viene dal Lemma 2.11 applicato alle funzioni $f_\varepsilon^-(x)$ e $f_\varepsilon^+(x)$, le disuguaglianze (1) vengono dalla condizione (2.6) e le disuguaglianze (2) dalla condizione (2.7).

Dato che il risultato trovato vale per ogni $\varepsilon > 0$, il limite $\lim_{N \rightarrow \infty} S_N$ esiste e deve essere uguale a $b - a$, che è esattamente $\int_0^1 \chi_{(a,b)}(x) dx$.

Abbiamo mostrato la validità della (2.3), che è equivalente alla tesi del Teorema. □

Osservazione 2.12. La (2.3) vale anche se si considera la funzione caratteristica di un intervallo chiuso o semiaperto. Questo perché il valore dell'integrale rimane inalterato per variazioni su insiemi di misura nulla e il limite della sommatoria è uguale se la successione è equidistribuita, come visto nella Proposizione 2.7.

Corollario 2.13 (Teorema di Approssimazione di Kronecker). Se γ è irrazionale la successione $\{\langle n\gamma \rangle\}_n$ è densa nell'insieme $[0, 1]$.

Dimostrazione. Abbiamo visto che la successione è equidistribuita e dalla Proposizione 2.8 sappiamo che una successione equidistribuita è necessariamente densa. $\square$

2.4 Conseguenze del teorema e Criterio di Weyl

Le ipotesi del Lemma 2.11 possono essere indebolite a f Riemann integrabile su $[0, 1]$ e periodica di periodo 1.

Corollario 2.14. Sia f una funzione Riemann integrabile su $[0, 1]$ e periodica di periodo 1. Se γ è un numero irrazionale, allora vale

$$\frac{1}{N} \sum_{n=1}^N f(n\gamma) \rightarrow \int_0^1 f(x) dx, \quad \text{per } N \rightarrow \infty.$$

Dimostrazione. Consideriamo una partizione dell'intervallo $[0, 1]$ del tipo $0 = x_0 < x_1 < \dots < x_M = 1$. Quindi, definiamo $f_U(x) := \sup_{x_{j-1} \leq y \leq x_j} f(y)$ se $x \in [x_{j-1}, x_j]$ e $f_L(x) := \inf_{x_{j-1} \leq y \leq x_j} f(y)$ se $x \in [x_{j-1}, x_j]$.

Ovvero:

$$\begin{aligned} f_U(x) &:= \sum_{j=1}^M \left(\sup_{y \in [x_{j-1}, x_j]} f(y) \right) \chi_{[x_{j-1}, x_j]}(x) \\ f_L(x) &:= \sum_{j=1}^M \left(\inf_{y \in [x_{j-1}, x_j]} f(y) \right) \chi_{[x_{j-1}, x_j]}(x). \end{aligned} \quad (2.8)$$

Estendiamo $f_U(x)$ e $f_L(x)$ per periodicità su $\mathbb{R}$, mantenendo la stessa notazione. Chiaramente $f_L(x) \leq f(x) \leq f_U(x)$ e quindi

$$\int_0^1 f_L(x) dx \leq \int_0^1 f(x) dx \leq \int_0^1 f_U(x) dx. \quad (2.9)$$

Fissiamo $\varepsilon > 0$, rendendo la partizione sufficientemente fine, otteniamo

$$\int_0^1 f_U(x) dx - \int_0^1 f_L(x) dx \leq \varepsilon. \quad (2.10)$$

In questo passaggio abbiamo usato l'ipotesi f Riemann integrabile e il fatto che gli integrali su $[0, 1]$ di f_L e f_U sono esattamente le somme inferiori e superiori di f .

Inoltre, notiamo che per f_L e f_U , essendo combinazioni lineari finite di funzioni caratteristiche, vale la formula (2.3). Ovvero:

$$\frac{1}{N} \sum_{n=1}^N f_L(n\gamma) \rightarrow \int_0^1 f_L(x) dx \quad \text{e} \quad \frac{1}{N} \sum_{n=1}^N f_U(n\gamma) \rightarrow \int_0^1 f_U(x) dx. \quad (2.11)$$

Possiamo quindi scrivere le seguenti catene di disuguaglianze:

$$\begin{aligned} \int_0^1 f_U(x) dx - \varepsilon &\stackrel{(1)}{\leq} \int_0^1 f_L(x) dx = \lim_{N \rightarrow \infty} \frac{1}{N} \sum_{n=1}^N f_L(n\gamma) \stackrel{(2)}{\leq} \liminf_{N \rightarrow \infty} \frac{1}{N} \sum_{n=1}^N f(n\gamma) \\ \limsup_{N \rightarrow \infty} \frac{1}{N} \sum_{n=1}^N f(n\gamma) &\stackrel{(2)}{\leq} \lim_{N \rightarrow \infty} \frac{1}{N} \sum_{n=1}^N f_U(n\gamma) = \int_0^1 f_U(x) dx \stackrel{(1)}{\leq} \int_0^1 f_L(x) dx + \varepsilon, \end{aligned}$$

dove l'uguaglianza viene dai limiti (2.11), le disuguaglianze (1) dalla relazione (2.10) e le disuguaglianze (2) dalla relazione (2.9).

Per arbitrarietà di ε possiamo dire $\limsup = \liminf$, quindi esiste il limite $\lim_{N \rightarrow \infty} \frac{1}{N} \sum_{n=1}^N f(n\gamma)$ e

$$\lim_{N \rightarrow \infty} \frac{1}{N} \sum_{n=1}^N f(n\gamma) = \lim_{\varepsilon \rightarrow 0} \int_0^1 f_U(x) dx = \lim_{\varepsilon \rightarrow 0} \int_0^1 f_L(x) dx = \int_0^1 f(x) dx.$$

$\lim_{\varepsilon \rightarrow 0}$ si può intendere come $\lim_{M \rightarrow \infty}$, dove M è il numero di intervalli della partizione. L'ultima uguaglianza viene dal fatto che il limite delle somme superiori e inferiori di Riemann è uguale se f è Riemann integrabile. $\square$

Osservazione 2.15. Notiamo che le ipotesi del Corollario 2.14 non possono essere indebolite a f Lebesgue integrabile. Infatti, come controesempio, è sufficiente considerare la funzione caratteristica della successione $\{\langle n\gamma \rangle\}$ estesa per periodicità su $\mathbb{R}$, ovvero $\chi_{\{\langle n\gamma \rangle\}}(x)$. Abbiamo così

$$1 \stackrel{(1)}{=} \frac{1}{N} \sum_{n=1}^N \chi_{\{\langle n\gamma \rangle\}}(n\gamma) \not\rightarrow \int_0^1 \chi_{\{\langle n\gamma \rangle\}}(x) dx \stackrel{(2)}{=} 0,$$

dove l'uguaglianza (1) viene dal fatto che la funzione caratteristica nei punti della successione vale sempre 1 e la (2) dal fatto che la funzione vale zero q.o.

La funzione $\chi_{\{\langle n\gamma \rangle\}}(x)$ è Lebesgue integrabile ma non Riemann integrabile, quindi non rispetta le ipotesi del Corollario 2.14.

Abbiamo enunciato i principali risultati relativi alla successione $\langle n\gamma \rangle$. Dimostriamo ora un criterio che permette di studiare l'equidistribuzione di una generica successione $\{\xi_n\}$.

Teorema 2.16 (Criterio di Weyl). Una successione di numeri reali $\xi_1, \xi_2, \dots$ in $[0, 1)$ è equidistribuita se e solo se per tutti gli interi $k \neq 0$ vale

$$\frac{1}{N} \sum_{n=1}^N e^{2\pi i k \xi_n} \rightarrow 0, \quad \text{per } N \rightarrow \infty. \quad (2.12)$$

Dimostrazione. Iniziamo dimostrando l'equidistribuzione della successione a partire dalla (2.12) ($\Leftarrow$).

Se vale la proprietà (2.12), allora si possono ripercorrere tutti i passaggi della dimostrazione del Teorema 2.10. In particolare le ipotesi garantiscono quanto trovato nel Passo 1. del lemma. Possiamo quindi seguire il ragionamento fatto nel Passo 2. e nel Passo 3. e ottenere che per ogni f continua e periodica vale

$$\frac{1}{N} \sum_{n=1}^N f(\xi_n) \rightarrow \int_0^1 f(x) dx, \quad \text{per } N \rightarrow \infty.$$

Procediamo approssimando la funzione $\chi_{(a,b)}$ come fatto nella dimostrazione del Teorema 2.10 e otteniamo

$$\frac{1}{N} \sum_{n=1}^N \chi_{(a,b)}(\xi_n) \rightarrow \int_0^1 \chi_{(a,b)}(x) dx, \quad \text{per } N \rightarrow \infty, \quad (2.13)$$

che, come descritto nella dimostrazione del teorema, è una riformulazione in termini analitici della proprietà di equidistribuzione della successione ξ_n .

Occupiamoci ora dell'implicazione opposta ($\implies$). Vogliamo mostrare che, se $\{\xi_n\}$ è equidistribuita, allora per ogni $f \in C([0, 1])$ vale

$$\lim_{N \rightarrow \infty} \frac{1}{N} \sum_{n=1}^N f(\xi_n) = \int_0^1 f(x) dx. \quad (2.14)$$

Questo è sufficiente perché

$$e^{2\pi i k x} = \underbrace{\cos(2\pi k x)}_{C[0,1]} + i \underbrace{\sin(2\pi k x)}_{C[0,1]}$$

e

$$\int_0^1 \cos(2k\pi x) dx = 0 \quad \text{e} \quad i \int_0^1 \sin(2k\pi x) dx = 0.$$

Notiamo come lo studio si restringa alle $f \in C([0, 1])$ anche se $\{\xi_n\} \subset [0, 1)$. Il motivo è tecnico, dato che successivamente avremo la necessità di utilizzare l'integrabilità di f . Iniziamo dimostrando la convergenza della successione delle medie all'integrale nel caso in cui $f = \chi_{[a,b]}$ con $a, b \in [0, 1]$. Vale

$$\sum_{n=1}^N \chi_{[a,b]}(\xi_n) = \#\{1 \leq n \leq N : \xi_n \in [a, b)\}$$

e quindi

$$\lim_{N \rightarrow \infty} \frac{1}{N} \sum_{n=1}^N \chi_{[a,b]}(\xi_n) = \lim_{N \rightarrow \infty} \frac{1}{N} \#\{1 \leq n \leq N : \xi_n \in [a, b)\} \stackrel{(1)}{=} b-a = \int_0^1 \chi_{[a,b)}(x) dx,$$

dove l'uguaglianza (1) viene dalla Proposizione 2.7. Abbiamo così dimostrato la (2.14) per la funzione caratteristica di $[a, b)$.

Estendiamo il risultato a una generica $f \in C([0, 1])$. f è continua in $[0, 1]$ quindi è anche integrabile secondo Riemann.

Possiamo allora ripercorrere i passaggi della dimostrazione del Corollario 2.14 considerando una generica successione equidistribuita ξ_n invece di $n\gamma$.

L'unica ipotesi sulla successione $n\gamma$ usata nel ragionamento era che valesse

$$\frac{1}{N} \sum_{n=1}^N \chi_{[a,b)}(n\gamma) \rightarrow \int_0^1 \chi_{[a,b)}(x) dx,$$

da cui seguiva la proprietà (2.11). La stessa condizione per la successione ξ_n è quella da noi appena dimostrata.

Una considerazione da fare è che nella dimostrazione del Corollario 2.14 è richiesto che f sia periodica di periodo 1, mentre nel nostro caso f è semplicemente $C([0, 1])$. Tuttavia, la periodicità è richiesta esclusivamente perché la successione $n\gamma$ non è limitata; in questo caso ξ_n è contenuta in $[0, 1)$ per ipotesi e quindi basta richiedere la continuità in $[0, 1]$.

Otteniamo così il limite (2.14) e il criterio è dimostrato. $\square$

Osservazione 2.17. Nello studio dell'equidistribuzione di una successione $\{\langle \xi_n \rangle\}$ si può controllare la validità della (2.12) senza considerare la parte frazionaria.

Questo perché

$$e^{2\pi i k \langle \xi_n \rangle} = \underbrace{e^{2\pi i k [\xi_n]}}_{=1} \cdot e^{2\pi i k \langle \xi_n \rangle} = e^{2\pi i k \xi_n}.$$

Capitolo 3

Costruzione di successioni equidistribuite

In questo capitolo vengono presentati alcuni risultati della teoria dell'equidistribuzione modulo 1 ottenuti attraverso l'applicazione del Criterio di Weyl. Tale criterio consente di studiare l'equidistribuzione di successioni mediante strumenti propri dell'analisi, riconducendo il problema alla stima di opportune somme esponenziali.

3.1 Teorema di Fejér

Introduciamo una definizione che estende il concetto di equidistribuzione su $[0, 1)$ a successioni non necessariamente contenute nell'intervallo.

Definizione 3.1 (Successione equidistribuita modulo 1). Una successione $\{\xi_n\}_{n \in \mathbb{N}}$ si dice *equidistribuita modulo 1* se $\langle \xi_n \rangle$ è equidistribuita su $[0, 1)$.

Osservazione 3.2. Se una successione $\{\xi_n\}_{n \in \mathbb{N}}$ verifica la proprietà (2.12), allora è equidistribuita modulo 1.

Come conseguenza del Criterio di Weyl, dimostriamo un teorema che ci permetterà di discutere vari esempi di successioni equidistribuite modulo 1.

Teorema 3.3. Sia $\{f(n)\}_n$ una successione di numeri reali tale che $\Delta f(n) := f(n+1) - f(n)$ sia monotona all'aumentare di n . Se valgono:

$$\lim_{n \rightarrow \infty} \Delta f(n) = 0 \quad \text{e} \quad \lim_{n \rightarrow \infty} n |\Delta f(n)| = \infty, \quad (3.1)$$

allora $\{f(n)\}_n$ è equidistribuita modulo 1.

Serviranno due lemmi preparatori prima di dimostrare il teorema.

Lemma 3.4. Sia $\{a_n\}_n$ una successione monotona di numeri reali di segno costante. Vale

$$\sum_{n=1}^{N-1} \left| \frac{1}{a_n} - \frac{1}{a_{n+1}} \right| \leq \frac{1}{|a_N|} + \frac{1}{|a_1|}.$$

Dimostrazione. La monotonia della successione a_n garantisce che una fra le due disuguaglianze

$$\frac{1}{a_n} - \frac{1}{a_{n+1}} \geq 0 \quad \text{e} \quad \frac{1}{a_n} - \frac{1}{a_{n+1}} \leq 0$$

valga per ogni n . Tale condizione permette di portare il valore assoluto fuori dalla sommatoria e ottenere

$$\sum_{n=1}^{N-1} \left| \frac{1}{a_n} - \frac{1}{a_{n+1}} \right| = \left| \sum_{n=1}^{N-1} \frac{1}{a_n} - \frac{1}{a_{n+1}} \right| = \left| \frac{1}{a_1} - \frac{1}{a_N} \right| \leq \frac{1}{|a_N|} + \frac{1}{|a_1|}.$$

□

Lemma 3.5. Sia $\{a_n\}_n$ una successione di numeri reali tale che $\lim_{n \rightarrow \infty} a_n = l$. Allora si ha

$$\lim_{N \rightarrow \infty} \frac{1}{N} \sum_{n=1}^N a_n = l.$$

Dimostrazione. Fissiamo $\varepsilon > 0$, esiste n_0 tale che $|a_n - l| < \varepsilon$ per ogni $n \geq n_0$. Quindi

$$\begin{aligned} \limsup_{N \rightarrow \infty} \left| \left(\frac{1}{N} \sum_{n=1}^N a_n \right) - l \right| &= \limsup_{N \rightarrow \infty} \left| \frac{1}{N} \sum_{n=1}^N (a_n - l) \right| \\ &\leq \lim_{N \rightarrow \infty} \frac{1}{N} \sum_{n=1}^{n_0} |a_n - l| + \limsup_{N \rightarrow \infty} \frac{1}{N} \sum_{n=n_0+1}^N |a_n - l| \\ &\leq \underbrace{\lim_{N \rightarrow \infty} \frac{1}{N} \sum_{n=1}^{n_0} |a_n - l|}_{\rightarrow 0} + \limsup_{N \rightarrow \infty} \frac{1}{N} \sum_{n=n_0+1}^N \varepsilon \\ &= \lim_{N \rightarrow \infty} \frac{N - n_0}{N} \varepsilon = \varepsilon. \end{aligned}$$

Dall'arbitrarietà di ε ricaviamo la tesi.

□

Possiamo ora dimostrare il Teorema 3.3.

Dimostrazione. Per ogni $u, v \in \mathbb{R}$ vale

$$\left| e^{2\pi i u} - e^{2\pi i v} - 2\pi i(u - v)e^{2\pi i v} \right| = \left| e^{2\pi i(u-v)} - 1 - 2\pi i(u - v) \right|.$$

Inoltre

$$\begin{aligned}
& 4\pi^2 \left| \int_0^{u-v} (u-v-w) e^{2\pi i w} dw \right| \\
&= 4\pi^2 \left| (u-v) \int_0^{u-v} e^{2\pi i w} dw - \int_0^{u-v} w e^{2\pi i w} dw \right| \\
&\stackrel{(1)}{=} 4\pi^2 \left| (u-v) \frac{1}{2\pi i} (e^{2\pi i(u-v)} - 1) - \frac{1}{4\pi^2} [e^{2\pi i(u-v)} (1 - 2\pi i(u-v)) - 1] \right| \\
&\stackrel{(2)}{=} \left| \cancel{2\pi i(u-v)e^{2\pi i(u-v)}} - 2\pi i(u-v) + \cancel{(-2\pi i)(u-v)e^{2\pi i(u-v)}} + e^{2\pi i(u-v)} - 1 \right| \\
&= \left| e^{2\pi i(u-v)} - 1 - 2\pi i(u-v) \right|,
\end{aligned}$$

dove nell'uguaglianza (1) abbiamo usato il fatto che $e^{2\pi i x}(1 - 2\pi i x)/4\pi^2$ è una primitiva di $w e^{2\pi i w}$. Nell'uguaglianza (2), portando la costante dentro il valore assoluto, abbiamo moltiplicato per $-4\pi^2$.

Ora,

$$\begin{aligned}
4\pi^2 \left| \int_0^{u-v} (u-v-w) e^{2\pi i w} dw \right| &\leq 4\pi^2 \int_0^{u-v} |(u-v-w)| dw \\
&\stackrel{(3)}{=} 4\pi^2 \left| \int_0^{u-v} (u-v-w) dw \right| \\
&= \left| 4\pi^2 \left[(u-v)^2 - \frac{1}{2}(u-v)^2 \right] \right| \\
&= 2\pi^2 (u-v)^2.
\end{aligned}$$

L'uguaglianza (3) è giustificata dal fatto che il segno dell'integranda è costante nell'intervallo di integrazione.

Abbiamo ottenuto la disuguaglianza

$$|e^{2\pi i u} - e^{2\pi i v} - 2\pi i(u-v)e^{2\pi i v}| \leq 2\pi^2(u-v)^2,$$

che vale per qualsiasi $u, v \in \mathbb{R}$.

Ora scegliamo $u := hf(n+1)$ e $v := hf(n)$, dove $h \in \mathbb{Z} \setminus \{0\}$, così da avere $h\Delta f(n) = (u-v)$. Allora si ha

$$\left| \frac{e^{2\pi i hf(n+1)}}{\Delta f(n)} - \frac{e^{2\pi i hf(n)}}{\Delta f(n)} - 2\pi i h e^{2\pi i hf(n)} \right| \leq 2\pi^2 h^2 |\Delta f(n)|.$$

Ricaviamo, aggiungendo e sottraendo nel termine di sinistra la quantità $e^{2\pi i hf(n+1)}/\Delta f(n+1)$ ed utilizzando la disuguaglianza triangolare,

$$\left| \frac{e^{2\pi i hf(n+1)}}{\Delta f(n+1)} - \frac{e^{2\pi i hf(n)}}{\Delta f(n)} - 2\pi i h e^{2\pi i hf(n)} \right| \leq \left| \frac{1}{\Delta f(n)} - \frac{1}{\Delta f(n+1)} \right| + 2\pi^2 h^2 |\Delta f(n)|.$$

(3.2)

Usando un argomento di somma telescopica si ottiene

$$\begin{aligned}
& \left| 2\pi i h \sum_{n=1}^{N-1} e^{2\pi i h f(n)} \right| \\
&= \left| \sum_{n=1}^{N-1} \left(2\pi i h e^{2\pi i h f(n)} - \frac{e^{2\pi i h f(n+1)}}{\Delta f(n+1)} + \frac{e^{2\pi i h f(n)}}{\Delta f(n)} \right) + \frac{e^{2\pi i h f(N)}}{\Delta f(N)} - \frac{e^{2\pi i h f(1)}}{\Delta f(1)} \right| \\
&\leq \sum_{n=1}^{N-1} \left| 2\pi i h e^{2\pi i h f(n)} - \frac{e^{2\pi i h f(n+1)}}{\Delta f(n+1)} + \frac{e^{2\pi i h f(n)}}{\Delta f(n)} \right| + \frac{1}{|\Delta f(N)|} + \frac{1}{|\Delta f(1)|} \\
&\leq \sum_{n=1}^{N-1} \left| \frac{1}{\Delta f(n)} - \frac{1}{\Delta f(n+1)} \right| + 2\pi^2 h^2 \sum_{n=1}^{N-1} |\Delta f(n)| + \frac{1}{|\Delta f(N)|} + \frac{1}{|\Delta f(1)|}.
\end{aligned}$$

Nell'ultimo passaggio abbiamo applicato la disuguaglianza (3.2) $N - 1$ volte.

Il Lemma 3.4 applicato alla successione $\Delta f(n)$ ci permette di ottenere la seguente disuguaglianza:

$$\left| 2\pi i h \sum_{n=1}^{N-1} e^{2\pi i h f(n)} \right| \leq 2\pi^2 h^2 \sum_{n=1}^{N-1} |\Delta f(n)| + \frac{2}{|\Delta f(N)|} + \frac{2}{|\Delta f(1)|}.$$

Da cui segue

$$\left| \frac{1}{N} \sum_{n=1}^{N-1} e^{2\pi i h f(n)} \right| \leq \frac{\pi|h|}{N} \sum_{n=1}^{N-1} |\Delta f(n)| + \frac{1}{\pi|h|} \left(\frac{1}{N|\Delta f(N)|} + \frac{1}{N|\Delta f(1)|} \right).$$

Il primo termine di destra tende a 0 per il Lemma 3.5 grazie alla prima delle ipotesi (3.1). Il secondo, sempre per le ipotesi (3.1), è la somma di reciproci di termini che tendono a infinito, e quindi anch'esso è infinitesimo.

Per confronto

$$\lim_{N \rightarrow \infty} \frac{1}{N} \sum_{n=1}^{N-1} e^{2\pi i h f(n)} = 0$$

per ogni intero $h \neq 0$. Ora, il Criterio di Weyl garantisce l'equidistribuzione della successione. $\square$

Teorema 3.6 (Teorema di Fejér). Sia $f(x)$ una funzione definita per $x \geq 1$, differenziabile per $x \geq x_0$. Se $f'(x)$ converge in maniera monotona a 0 per $x \rightarrow \infty$ e se $\lim_{x \rightarrow \infty} x|f'(x)| = \infty$, allora la successione $\{f(n)\}_n$ è equidistribuita modulo 1.

Dimostrazione. Verifichiamo che la successione $f(n)$ rispetti le ipotesi del Teorema 3.3 per n sufficientemente grande. I finiti termini che non rispettano le ipotesi non influenzano l'equidistribuzione modulo 1 della successione.

- Dal Teorema di Lagrange, per ogni $n > x_0$ esiste un $c_n \in (n, n+1)$ tale che $\Delta f(n) = f(n+1) - f(n) = 1 \cdot f'(c_n)$. La monotonia di $f'(x)$ assicura la monotonia della successione $f'(c_n)$, ovvero $\Delta f(n)$ è monotona.

- Utilizzando nuovamente il Teorema di Lagrange, risulta

$$\lim_{n \rightarrow \infty} |\Delta f(n)| = \lim_{n \rightarrow \infty} |f'(c_n)| = \lim_{x \rightarrow \infty} |f'(x)| = 0.$$

- Dalla monotonia di f' otteniamo $|f'(c_n)| \geq |f'(n+1)|$ e ne deduciamo:

$$\begin{aligned} \lim_{n \rightarrow \infty} n |\Delta f(n)| &= \lim_{n \rightarrow \infty} n |f'(c_n)| \geq \lim_{n \rightarrow \infty} n |f'(n+1)| \\ &= \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{n}{n+1} (n+1) |f'(n+1)| \\ &= \lim_{n \rightarrow \infty} (n+1) |f'(n+1)| \\ &= \lim_{x \rightarrow \infty} (x) |f'(x)| = \infty. \end{aligned}$$

□

3.2 Teorema sulle differenze

In questa sezione discutiamo una piccola generalizzazione del Teorema di Equidistribuzione di Weyl.

Lemma 3.7. Dati due numeri reali u e v , vale la disuguaglianza

$$|e^{2\pi i u} - e^{2\pi i v}| \leq 2\pi |u - v|$$

Dimostrazione. Senza perdita di generalità assumiamo $u \geq v$. Dal Teorema Fondamentale del Calcolo Integrale sappiamo che vale

$$e^{2\pi i u} - e^{2\pi i v} = \int_v^u \frac{d}{dt}(e^{2\pi i t}) dt = \int_v^u 2\pi i e^{2\pi i t} dt.$$

Quindi possiamo stimare il modulo:

$$|e^{2\pi i u} - e^{2\pi i v}| = \left| \int_v^u 2\pi i e^{2\pi i t} dt \right| \leq \int_v^u |2\pi i e^{2\pi i t}| dt = \int_v^u 2\pi dt = 2\pi(u - v).$$

Dal fatto che $u - v = |u - v|$ ricaviamo la tesi. □

Teorema 3.8. Sia $\{\xi_n\}_n$ una successione di numeri reali tale che $\Delta\xi_n := \xi_{n+1} - \xi_n$ converga a θ irrazionale, allora ξ_n è equidistribuita modulo 1.

Dimostrazione. Sia q un intero positivo, le ipotesi su $\Delta\xi_n$ garantiscono che esiste un numero intero $m_0 = m_0(q)$ tale che, per tutti gli $n \geq m \geq m_0$, vale

$$|\xi_n - \xi_m - (n - m)\theta| = \left| \sum_{j=m}^{n-1} (\Delta\xi_j - \theta) \right| \leq \frac{n - m}{q^2}.$$

Sia h un numero intero diverso da 0. Usando la disuguaglianza appena trovata e il Lemma 3.7, otteniamo

$$\left| e^{2\pi i h \xi_n} - e^{2\pi i h (\xi_m + (n-m)\theta)} \right| \leq 2\pi|h| |\xi_n - (\xi_m + (n-m)\theta)| \leq \frac{2\pi|h|(n-m)}{q^2}.$$

Sfruttando la disuguaglianza triangolare, ricaviamo

$$\begin{aligned} \left| \sum_{n=m}^{m+q-1} e^{2\pi i h \xi_n} \right| &= \left| \sum_{n=m}^{m+q-1} e^{2\pi i h \xi_n} - e^{2\pi i h (\xi_m + (n-m)\theta)} + e^{2\pi i h (\xi_m + (n-m)\theta)} \right| \\ &\leq \underbrace{\sum_{n=m}^{m+q-1} \left| \frac{2\pi h(n-m)}{q^2} \right|}_{(\star)} + \underbrace{\left| \sum_{n=m}^{m+q-1} e^{2\pi i h (\xi_m + (n-m)\theta)} \right|}_{(\star\star)}. \end{aligned}$$

Stimiamo separatamente i due termini $(\star)$ e $(\star\star)$.

Per il termine $(\star)$ vale

$$\sum_{n=m}^{m+q-1} \left| \frac{2\pi h(n-m)}{q^2} \right| = \frac{2\pi|h|}{q^2} \sum_{n=m}^{m+q-1} (n-m) = \frac{2\pi|h|}{q^2} \sum_{j=0}^{q-1} j = \frac{2\pi|h|}{q^2} \frac{(q-1)q}{2} \leq \pi|h|.$$

Per la stima del termine $(\star\star)$, l'irrazionalità di θ permette di usare la formula della somma geometrica. Otteniamo così

$$\begin{aligned} \left| \sum_{n=m}^{m+q-1} e^{2\pi i h (\xi_m + (n-m)\theta)} \right| &= \left| e^{2\pi i h \xi_m} \right| \cdot \left| \sum_{j=0}^{q-1} e^{2\pi i h j \theta} \right| \leq \left| \sum_{j=0}^{q-1} \left(e^{2\pi i h \theta} \right)^j \right| \\ &= \left| \frac{1 - e^{2\pi i h \theta q}}{1 - e^{2\pi i h \theta}} \right| = \frac{|1 - e^{2\pi i h \theta q}|}{|1 - e^{2\pi i h \theta}|} \\ &\leq \frac{2}{|1 - e^{2\pi i h \theta}|} \leq \frac{2}{|e^{\pi i h \theta} (e^{-\pi i h \theta} - e^{\pi i h \theta})|} \\ &= \frac{2}{|e^{-\pi i h \theta} - e^{\pi i h \theta}|} = \frac{2}{|2i \sin(\pi h \theta)|} = \frac{1}{|\sin(\pi h \theta)|}. \end{aligned}$$

Definendo $K := \pi|h| + |\sin(\pi h \theta)|^{-1}$, si ha

$$\left| \sum_{n=m}^{m+q-1} e^{2\pi i h \xi_n} \right| \leq K. \quad (3.3)$$

Per ogni intero positivo H vale

$$\begin{aligned} \left| \sum_{n=m}^{m-1+Hq} e^{2\pi i h \xi_n} \right| &\leq \left| \sum_{n=m}^{m-1+q} e^{2\pi i h \xi_n} \right| + \left| \sum_{n=m+q}^{m-1+2q} e^{2\pi i h \xi_n} \right| + \dots + \left| \sum_{n=m+(H-1)q}^{m-1+Hq} e^{2\pi i h \xi_n} \right| \\ &\leq HK. \end{aligned}$$

Ogni termine può essere maggiorato usando la stima (3.3) dato che gli estremi della sommatoria sono sempre maggiori di m_0 .

Per ogni intero $N \geq m$ esiste un unico $\bar{H}$ tale che $m - 1 + \bar{H}q < N \leq m - 1 + (\bar{H} + 1)q$. Quindi si ha $\bar{H} < \frac{N-m+1}{q}$. Otteniamo la seguente stima:

$$\begin{aligned} \left| \sum_{n=1}^N e^{2\pi i h \xi_n} \right| &\leq \left| \sum_{n=1}^{m-1} e^{2\pi i h \xi_n} \right| + \left| \sum_{n=m}^{m-1+\bar{H}q} e^{2\pi i h \xi_n} \right| + \left| \sum_{n=m+\bar{H}q}^N e^{2\pi i h \xi_n} \right| \\ &\leq (m-1) + \bar{H}K + q \\ &\leq m-1 + \frac{N-m+1}{q}K + q. \end{aligned}$$

Segue che, tenendo q fisso,

$$\limsup_{N \rightarrow \infty} \left| \frac{1}{N} \sum_{n=1}^N e^{2\pi i h \xi_n} \right| \leq \frac{K}{q}.$$

Essendo q non vincolato, possiamo scegliere un intero arbitrariamente grande. Pertanto, il $\limsup$ vale 0 ed è uguale al limite. Ovvero,

$$\lim_{N \rightarrow \infty} \left| \frac{1}{N} \sum_{n=1}^N e^{2\pi i h \xi_n} \right| = 0$$

per ogni intero $h \neq 0$. Usando il Criterio di Weyl dimostriamo la tesi. $\square$

Un esempio di successione che rispetta le ipotesi del Teorema 3.8 è, banalmente, la successione $\{n\gamma\}_n$, con γ irrazionale. In questo caso $(n+1)\gamma - n\gamma$ è costantemente uguale a γ . In questo senso il teorema può essere interpretato come una piccola generalizzazione del risultato ottenuto da Weyl.

3.3 Equidistribuzione quasi ovunque

Introduciamo una definizione che permette di studiare l'equidistribuzione di successioni della forma $\{f_n(x)\}_{n \in \mathbb{N}}$ ottenute valutando una successione di funzioni in un punto fissato x .

Definizione 3.9 (Successione equidistribuita modulo 1 quasi ovunque). Sia J un intervallo contenuto in $\mathbb{R}$. Per ogni $x \in J$, sia $\{f_n(x)\}_{n \in \mathbb{N}}$ una successione di numeri reali. La successione $f_n(x)$ si dice *equidistribuita modulo 1 quasi ovunque* o *equidistribuita modulo 1 q.o.* se, per ogni $x \in J \setminus B$ con B insieme di misura di Lebesgue nulla, la successione $f_n(x)$ è equidistribuita modulo 1.

Enunciamo un risultato sulle successioni equidistribuite quasi ovunque.

Teorema 3.10. Sia $\{a_n\}_{n \in \mathbb{N}}$ una successione di numeri interi distinti. Allora la successione $\{a_n x\}_n$, definita per ogni $x \in \mathbb{R}$, è equidistribuita modulo 1 q.o.

Dimostrazione. È sufficiente dimostrare che $\{a_n x\}$ è equidistribuita modulo 1 per q.o. $x \in I = [0, 1)$. Infatti, se k è un numero intero, allora $\langle a_n(x + k) \rangle = \langle a_n x \rangle$; segue che l'insieme delle $y \in [k, k + 1)$ per le quali la successione $\{a_n y\}$ non è equidistribuita modulo 1 è il traslato di k dell'insieme delle $x \in I$ per le quali la successione non è equidistribuita modulo 1. Quindi entrambi gli insiemi sono di misura nulla. Il ragionamento si può estendere a tutti gli intervalli della forma $[k, k + 1)$, e poiché l'unione numerabile di insiemi di misura nulla è a sua volta un insieme di misura nulla si è trovato l'insieme B richiesto.

Fissiamo $h \neq 0$ intero. Definiamo

$$S(N, x) := \frac{1}{N} \sum_{n=1}^N e^{2\pi i h a_n x} \quad \text{per } N \geq 1 \quad \text{e } 0 \leq x \leq 1.$$

Allora si ha

$$|S(N, x)|^2 = S(N, x) \overline{S(N, x)} = \frac{1}{N^2} \sum_{m,n=1}^N e^{2\pi i h (a_m - a_n)x}.$$

Quindi vale

$$\int_0^1 |S(N, x)|^2 dx = \frac{1}{N^2} \sum_{m,n=1}^N \int_0^1 e^{2\pi i h (a_m - a_n)x} dx = \frac{1}{N^2} \sum_{n=1}^N \int_0^1 1 dx = \frac{1}{N}.$$

Nel penultimo passaggio abbiamo usato il fatto che $\int_0^1 e^{2\pi i h (a_m - a_n)x} dx = 0$ quando $a_n \neq a_m$, quindi gli unici contributi da contare sono quelli in cui $n = m$.

Otteniamo così la convergenza della seguente serie:

$$\sum_{N=1}^{\infty} \int_0^1 |S(N^2, x)|^2 dx = \sum_{N=1}^{\infty} \frac{1}{N^2} < \infty.$$

La positività degli addendi della sommatoria garantisce l'esistenza del limite

$$\lim_{M \rightarrow \infty} \sum_{N=1}^M |S(N^2, x)|^2.$$

Il Teorema della convergenza monotona implica

$$\int_0^1 \sum_{N=1}^{\infty} |S(N^2, x)|^2 dx = \sum_{N=1}^{\infty} \int_0^1 |S(N^2, x)|^2 dx < \infty.$$

Poiché l'integrale è finito, l'integranda deve assumere valori finiti per quasi ogni x , ovvero

$$\sum_{N=1}^{\infty} |S(N^2, x)|^2 < \infty \quad \text{per q.o. } x \in [0, 1].$$

Dalla condizione necessaria per la convergenza di una serie otteniamo

$$\lim_{N \rightarrow \infty} S(N^2, x) = 0 \quad \text{per q.o. } x \in [0, 1]. \quad (3.4)$$

Dato $N \geq 1$ esiste $m \in \mathbb{N}$ tale che $m^2 \leq N < (m+1)^2$, da cui $N \leq m^2 + 2m$. Allora,

$$\begin{aligned} |S(N, x)| &= \left| \frac{1}{N} \sum_{n=1}^N e^{2\pi i h a_n x} \right| \leq \left| \frac{1}{N} \sum_{n=1}^{m^2} e^{2\pi i h a_n x} \right| + \left| \frac{1}{N} \sum_{n=m^2+1}^N e^{2\pi i h a_n x} \right| \\ &\leq \left| \frac{1}{m^2} \sum_{n=1}^{m^2} e^{2\pi i h a_n x} \right| + \frac{2m}{N} \\ &= |S(m^2, x)| + \frac{2m}{N}. \end{aligned}$$

Usando il fatto che $m \leq \sqrt{N}$ arriviamo alla stima finale:

$$|S(m^2, x)| + \frac{2m}{N} \leq |S(m^2, x)| + \frac{2}{\sqrt{N}}.$$

Grazie alla (3.4), abbiamo

$$\lim_{N \rightarrow \infty} S(N, x) = 0 \quad \text{per q.o. } x \in [0, 1]. \quad (3.5)$$

L'insieme di punti dove la (3.5) non è verificata dipende dalla scelta di h . Sia quindi E_h l'insieme di misura nulla tale che $\lim_{N \rightarrow \infty} S(N, x) = 0$ per $x \in [0, 1] \setminus E_h$. Possiamo definire l'insieme

$$B := \bigcup_{h \neq 0} E_h.$$

La misura di Lebesgue dell'insieme B è sempre nulla in quanto esso è unione numerabile di insiemi di misura nulla. Inoltre, per ogni $h \neq 0$, vale

$$\lim_{N \rightarrow \infty} S(N, x) = 0 \quad \text{per } x \in [0, 1] \setminus B.$$

Abbiamo così dimostrato che le condizioni del Criterio di Weyl valgono per quasi ogni x , ne segue l'equidistribuzione modulo 1 quasi ovunque. $\square$

La teoria dell'equidistribuzione modulo 1 q.o. permette di raggiungere risultati come l'equidistribuzione q.o. delle successioni $\{x^n\}_n$ e $\{n \cos(nx)\}_n$. Per una trattazione più completa dell'argomento rimandiamo a [KN74, Sez. 1.4].

Capitolo 4

Problemi

Questo capitolo è dedicato alla risoluzione di cinque problemi relativi alla teoria dell'equidistribuzione. La prima sezione raccoglie problemi risolti mediante argomenti elementari, finalizzati a verificare o meno l'equidistribuzione di due successioni. Nella seconda sezione vengono invece applicati gli strumenti sviluppati nei capitoli precedenti, in particolare il Criterio di Weyl, per affrontare problemi di equidistribuzione più generali.

4.1 Esempi di soluzioni elementari

Problema 4.1. Mostrare che la successione $\{a_n\}_n$ i cui primi termini sono

$$0, 0, \frac{1}{2}, 0, \frac{1}{3}, \frac{2}{3}, 0, \frac{1}{4}, \frac{2}{4}, \frac{3}{4}, 0, \frac{1}{5}, \dots$$

è equidistribuita.

Soluzione. Scegliamo un intervallo $(a, b) \subset [0, 1)$. La definizione di successione equidistribuita permette di non considerare un numero finito di termini della successione. Vogliamo quindi mostrare che esiste $N_0 \in \mathbb{N}$ tale che vale

$$\lim_{N \rightarrow \infty} \frac{\#\{N_0 < n \leq N : a_n \in (a, b)\}}{N} = b - a. \quad (4.1)$$

Fissiamo $\varepsilon > 0$. Esiste $q_0 \in \mathbb{N}$ tale che $1/q_0 \leq \varepsilon/2$. Quindi per ogni $q \geq q_0$ vale $1/q \leq \varepsilon/2$. Per ogni $q \geq q_0$ esistono $p_1 < p_2 \leq q$ tali che sia

$$\left| \frac{p_1}{q} - a \right| \leq \frac{\varepsilon}{2} \quad \text{e} \quad \left| \frac{p_2}{q} - b \right| \leq \frac{\varepsilon}{2}.$$

Da questa stima ricaviamo

$$p_2 - p_1 - 1 \leq \#\{p \leq q : \frac{p}{q} \in (a, b)\} \leq p_2 - p_1 + 1.$$

Definendo $A(q) := \#\{p \leq q : p/q \in (a, b)\}$, otteniamo

$$|A(q) - (p_2 - p_1)| \leq 1.$$

Per ogni $q \geq q_0$ vale allora la stima

$$\begin{aligned} \left| \frac{A(q)}{q} - (b - a) \right| &\leq \left| \frac{A(q)}{q} - \frac{p_2 - p_1}{q} \right| + \left| \frac{p_2 - p_1}{q} - (b - a) \right| \\ &\leq \left| \frac{A(q)}{q} - \frac{p_2 - p_1}{q} \right| + \left| \frac{p_1}{q} - a \right| + \left| \frac{p_2}{q} - b \right| \\ &\leq \frac{1}{q} + \frac{\varepsilon}{2} + \frac{\varepsilon}{2} \leq 2\varepsilon, \end{aligned}$$

ovvero

$$|A(q) - q(b - a)| \leq 2q\varepsilon. \quad (4.2)$$

Scegliamo $N_0 := q_0(q_0 - 1)/2$. Si noti che i termini successivi ad a_{N_0} sono della forma p/q con $q \geq q_0$. La (4.1), se N è della forma $q(q + 1)/2$ (ovvero $\sum_{r=1}^q r$), può essere riscritta come

$$\lim_{q \rightarrow \infty} \left| \frac{\sum_{r=q_0}^q A(r)}{\sum_{r=1}^q r} - (b - a) \right| = 0. \quad (4.3)$$

Vale la stima

$$\begin{aligned} \left| \sum_{r=q_0}^q A(r) - \sum_{r=1}^q r(b - a) \right| &\leq \left| \sum_{r=q_0}^q A(r) - \sum_{r=q_0}^q r(b - a) \right| + \left| \sum_{r=1}^{q_0} r(b - a) \right| \\ &\leq \sum_{r=q_0}^q |A(r) - r(b - a)| + \frac{q_0(q_0 + 1)}{2} \\ &\stackrel{(1)}{\leq} \sum_{r=1}^q (2r\varepsilon) + \frac{q_0(q_0 + 1)}{2}. \end{aligned}$$

Nella disuguaglianza (1) si fa utilizzo della (4.2). Otteniamo

$$\limsup_{q \rightarrow \infty} \left| \frac{\sum_{r=q_0}^q A(r)}{\sum_{r=1}^q r} - (b - a) \right| \leq \limsup_{q \rightarrow \infty} \frac{1}{\sum_{r=1}^q r} \cdot \left| 2\varepsilon \left(\sum_{r=1}^q r \right) + \frac{q_0(q_0 + 1)}{2} \right| = 2\varepsilon.$$

Per arbitrarietà di ε la (4.3) è dimostrata. Quindi vale la (4.1) quando $N = q(q + 1)/2$ per qualche q .

Sia $M > N_0$ un numero naturale. Esiste un $\bar{q}$ tale che

$$\underbrace{\frac{\bar{q}^2 - \bar{q}}{2}}_K < M \leq \frac{\bar{q}^2 + \bar{q}}{2}.$$

Definiamo il numero K come nell'equazione precedente.

Usiamo la notazione $F(X, Y) := \#\{X < n \leq Y : a_n \in (a, b)\}$. Vale

$$\begin{aligned} \left| \frac{F(N_0, M)}{M} - (b - a) \right| &\leq \left| \frac{F(N_0, K) + F(K, M)}{M} - (b - a) \right| \\ &\leq \left| \frac{F(N_0, K)}{M} - (b - a) \right| + \left| \frac{F(K, \frac{\bar{q}^2 + \bar{q}}{2})}{M} \right| \\ &\leq \underbrace{\left| \frac{F(N_0, K)}{K} - (b - a) \right|}_{(*)} + \underbrace{\left| F(N_0, K) \left(\frac{1}{M} - \frac{1}{K} \right) \right|}_{(**)} + \underbrace{\left| \frac{\bar{q}}{M} \right|}_{(***)}. \end{aligned}$$

Il termine $(*)$ tende a zero per la (4.3). Il termine $(**)$ si stima nel seguente modo:

$$F(N_0, K) \left| \frac{K - M}{KM} \right| \leq K \frac{\bar{q}}{K^2} = \frac{2\bar{q}}{\bar{q}^2 - \bar{q}} \xrightarrow{\bar{q} \rightarrow \infty} 0.$$

Per il termine $(***)$ ricaviamo

$$\frac{\bar{q}}{M} \leq \frac{2\bar{q}}{\bar{q}^2 - \bar{q}} \xrightarrow{\bar{q} \rightarrow \infty} 0.$$

Abbiamo dimostrato che vale

$$\lim_{M \rightarrow \infty} \left| \frac{\#\{N_0 < n \leq M : a_n \in (a, b)\}}{M} - (b - a) \right| = 0,$$

quindi la successione a_n è equidistribuita. $\square$

Problema 4.2. Dimostrare che la successione $\{\xi_n\}_n$, dove ξ_n è definito come la parte frazionaria di

$$\left(\frac{1 + \sqrt{5}}{2} \right)^n,$$

Non è equidistribuita su $[0, 1)$.

Soluzione. Dimostriamo, per prima cosa, che la successione U_n , definita come

$$\left(\frac{1 + \sqrt{5}}{2} \right)^n + \left(\frac{1 - \sqrt{5}}{2} \right)^n,$$

soddisfa l'equazione $U_{n+1} = U_{n-1} + U_n$ per ogni $n \geq 1$.

Vale $U_2 = U_0 + U_1$. Mostriamo il passo induttivo, ovvero che se vale $U_{n+1} = U_{n-1} + U_n$, allora vale

$$U_{n+2} = U_{n+1} + U_n. \quad (4.4)$$

Definendo la successione

$$W_n := \left(\frac{1 + \sqrt{5}}{2} \right)^n - \left(\frac{1 - \sqrt{5}}{2} \right)^n,$$

si mostra che la (4.4) è equivalente alla condizione

$$\frac{1}{2}[U_{n-1} + U_n - U_{n+1}] = -\frac{\sqrt{5}}{2}[W_n + W_{n-1} - W_{n+1}].$$

Usando l'ipotesi induttiva arriviamo alla condizione

$$W_n + W_{n-1} - W_{n+1} = 0. \quad (4.5)$$

Dalle formule di Binet sappiamo che, posto F_n l' n -esimo termine della successione di Fibonacci, vale $W_n = \sqrt{5}F_n$. Per i numeri di Fibonacci vale $F_{n+1} = F_n + F_{n-1}$, quindi la (4.5) è vera e di conseguenza la (4.4) è dimostrata.

Dal fatto che $U_0 = 2$ e $U_1 = 1$ deduciamo che $U_n \in \mathbb{Z}$ per ogni n . Definiamo la successione

$$\delta_n := \left(\frac{1 - \sqrt{5}}{2} \right)^n, \quad n \in \mathbb{N}.$$

Allora vale

$$0 = \langle U_n \rangle = \langle \xi_n + \delta_n \rangle.$$

Questa condizione implica

$$\langle -\delta_n \rangle = \langle \xi_n \rangle. \quad (4.6)$$

La successione δ_n converge a 0 in quanto successione di potenze di un numero di modulo minore di 1. Quindi, per la (4.6), la successione ξ_n tende a 0. Questo vuol dire che definitivamente non è contenuta nell'intervallo $(1/4, 3/4)$. La condizione (2.1) non è rispettata quando $a = 1/4$ e $b = 3/4$ e quindi la successione non è equidistribuita. $\square$

4.2 Esempi di applicazione del Criterio di Weyl

Problema 4.3. Sia $f : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$ una funzione periodica di periodo 1 e $\{\xi_n\}_n$ una successione equidistribuita su $[0, 1)$. Mostrare che:

(a) Se f è continua e vale $\int_0^1 f(x) dx = 0$, allora

$$\lim_{N \rightarrow \infty} \frac{1}{N} \sum_{n=1}^N f(x + \xi_n) = 0 \quad \text{uniformemente nelle } x. \quad (4.7)$$

(b) Se f è Riemann integrabile su $[0, 1]$ e soddisfa $\int_0^1 f(x) dx = 0$, allora

$$\lim_{N \rightarrow \infty} \int_0^1 \left| \frac{1}{N} \sum_{n=1}^N f(x + \xi_n) \right|^2 dx = 0.$$

Soluzione. Mostriamo che la (4.7) è verificata se f è un polinomio trigonometrico tale che $\int_0^1 f(x) dx = 0$. Sia $k \neq 0$ un intero, vale

$$\left| \frac{1}{N} \sum_{n=1}^N e^{2\pi i k(x+\xi_n)} \right| = \left| \frac{1}{N} \sum_{n=1}^N e^{2\pi i kx} \cdot e^{2\pi i k\xi_n} \right| = \left| \frac{1}{N} \sum_{n=1}^N e^{2\pi i k\xi_n} \right|.$$

Il Criterio di Weyl garantisce la convergenza a zero per N che tende a ∞ . La convergenza non dipende da x e quindi è uniforme.

Se due funzioni g e h soddisfano la (4.7) allora lo stesso vale per $Ag + Bh$ con $A, B \in \mathbb{C}$. In questo modo, abbiamo mostrato che la tesi vale per tutti i polinomi trigonometrici senza “termine noto”, ovvero quelli il cui integrale su $[0, 1]$ è nullo.

Sia f una funzione continua e periodica tale che $\int_0^1 f(x) dx = 0$. Fissiamo $\varepsilon > 0$. Il Teorema 1.3 garantisce l'esistenza di un polinomio trigonometrico $Q(x)$ tale che $\sup_{x \in \mathbb{R}} |f(x) - Q(x)| \leq \varepsilon$. Questo implica che $\left| \int_0^1 Q(x) dx \right| \leq \varepsilon$. Definiamo il polinomio trigonometrico $P(x) := Q(x) - \int_0^1 Q(y) dy$. Vale $\int_0^1 P(x) dx = 0$ e $\sup_{x \in \mathbb{R}} |f(x) - P(x)| \leq \sup_{x \in \mathbb{R}} |f(x) - Q(x)| + \varepsilon \leq 2\varepsilon$.

Otteniamo la seguente stima

$$\begin{aligned} \left| \frac{1}{N} \sum_{n=1}^N f(x + \xi_n) \right| &\leq \left| \frac{1}{N} \sum_{n=1}^N f(x + \xi_n) - P(x + \xi_n) \right| + \left| \frac{1}{N} \sum_{n=1}^N P(x + \xi_n) \right| \\ &\leq \frac{1}{N} \left| \sum_{n=1}^N 2\varepsilon \right| + \left| \frac{1}{N} \sum_{n=1}^N P(x + \xi_n) \right|. \end{aligned}$$

Poiché la (4.7) vale per $P(x)$ abbiamo la tesi.

L'integrabilità di f garantisce la limitatezza della funzione, ovvero esiste un L tale che $|f(x)| \leq L < \infty$. Quindi, vale

$$\left| \frac{1}{N} \sum_{n=1}^N f(x + \xi_n) \right|^2 \leq \left| \frac{1}{N} \sum_{n=1}^N L \right|^2 = L^2 \in L^1([0, 1]).$$

L'esistenza di una funzione dominante integrabile permette di usare il Lemma di Fatou inverso, risulta

$$\limsup_{N \rightarrow \infty} \int_0^1 \left| \frac{1}{N} \sum_{n=1}^N f(x + \xi_n) \right|^2 dx \leq \int_0^1 \limsup_{N \rightarrow \infty} \left| \frac{1}{N} \sum_{n=1}^N f(x + \xi_n) \right|^2 dx.$$

Definiamo le funzioni “delle somme superiori e inferiori”, $f_U(x)$ e $f_L(x)$, come in (2.8). Vale la stima

$$\left| \sum_{n=1}^N f(x + \xi_n) \right|^2 \leq \left| \sum_{n=1}^N f_U(x + \xi_n) \right|^2 + \left| \sum_{n=1}^N f_L(x + \xi_n) \right|^2.$$

Inoltre, definendo $a_j := \left(\sup_{y \in [x_{j-1}, x_j]} f(y) \right)$, abbiamo

$$\begin{aligned} \limsup_{N \rightarrow \infty} \left| \frac{1}{N} \sum_{n=1}^N f_U(x + \xi_n) \right|^2 &= \left| \limsup_{N \rightarrow \infty} \frac{1}{N} \sum_{n=1}^N \sum_{j=1}^M a_j \chi_{[x_{j-1}, x_j]}(x + \xi_n) \right|^2 \\ &= \left| \sum_{j=1}^M a_j \lim_{N \rightarrow \infty} \frac{1}{N} \sum_{n=1}^N \chi_{[x_{j-1}-x, x_j-x]}(\xi_n) \right|^2 \\ &\stackrel{(1)}{=} \left| \sum_{j=1}^M a_j (x_j - x_{j-1}) \right|^2 = \left| \int_0^1 f_U(y) dy \right|^2 \leq \varepsilon^2, \end{aligned}$$

dove la stima in funzione di ε vale per M abbastanza grande. In (1) abbiamo usato la proprietà (2.13). Una stima equivalente si può ottenere per $\limsup_{N \rightarrow \infty} \left| \frac{1}{N} \sum_{n=1}^N f_L(x + \xi_n) \right|^2$.

Otteniamo così

$$\limsup_{N \rightarrow \infty} \int_0^1 \left| \frac{1}{N} \sum_{n=1}^N f(x + \xi_n) \right|^2 dx \leq \int_0^1 \left| \int_0^1 f_U(y) dy \right|^2 + \int_0^1 \left| \int_0^1 f_L(y) dy \right|^2 \leq 2\varepsilon^2.$$

Per arbitrarietà di ε abbiamo

$$\limsup_{N \rightarrow \infty} \int_0^1 \left| \frac{1}{N} \sum_{n=1}^N f(x + \xi_n) \right|^2 dx = \lim_{N \rightarrow \infty} \int_0^1 \left| \frac{1}{N} \sum_{n=1}^N f(x + \xi_n) \right|^2 dx = 0.$$

□

Problema 4.4. Mostrare che per ogni $a \neq 0$ e $\sigma \in (0, 1)$ la successione $\langle an^\sigma \rangle$ è equidistribuita su $[0, 1)$.

(a) *Soluzione.* Mostriamo che, se $b \neq 0$, vale

$$\sum_{n=1}^N e^{2\pi i b n^\sigma} = O(N^\sigma) + O(N^{1-\sigma}). \quad (4.8)$$

Facendo la sostituzione $b = ka$ otteniamo la (2.12) e quindi il criterio di Weyl garantisce l'equidistribuzione della successione.

In particolare dimostreremo le seguenti affermazioni, che implicano la (4.8):

$$\sum_{n=1}^N e^{2\pi i b n^\sigma} - \int_1^N e^{2\pi i b x^\sigma} dx = O(N^\sigma) \quad (4.9)$$

e

$$\int_1^N e^{2\pi i b x^\sigma} dx = O(N^{1-\sigma}). \quad (4.10)$$

Mostriamo la (4.9). Vale

$$\sum_{n=1}^N e^{2\pi i b n^\sigma} - \int_1^N e^{2\pi i b x^\sigma} dx = e^{2\pi i b} + \sum_{n=2}^N \left(e^{2\pi i b n^\sigma} - \int_{n-1}^n e^{2\pi i b x^\sigma} dx \right).$$

Studiamo $e^{2\pi i b n^\sigma} - \int_{n-1}^n e^{2\pi i b x^\sigma} dx$. Abbiamo

$$\begin{aligned} \left| e^{2\pi i b n^\sigma} - \int_{n-1}^n e^{2\pi i b x^\sigma} dx \right| &= \left| \int_{n-1}^n e^{2\pi i b n^\sigma} - e^{2\pi i b x^\sigma} dx \right| \leq \int_{n-1}^n \left| e^{2\pi i b n^\sigma} - e^{2\pi i b x^\sigma} \right| dx \\ &\stackrel{(1)}{\leq} \int_{n-1}^n 2\pi |b| |n^\sigma - x^\sigma| dx \leq 2\pi |b| \int_{n-1}^n n^\sigma - x^\sigma dx \\ &\stackrel{(2)}{\leq} 2\pi |b| \int_{n-1}^n (n-x) \sigma (n-1)^{\sigma-1} dx \\ &\leq 2\pi |b| \sigma \int_{n-1}^n (n-1)^{\sigma-1} dx = c \cdot (n-1)^{\sigma-1}. \end{aligned}$$

Nel passaggio (1) è stata usata la disuguaglianza arco-corda (Lemma 3.7). La disuguaglianza (2) è giustificata dal Teorema di Lagrange.

Concludiamo mostrando

$$e^{2\pi i b} + \sum_{n=2}^N (n-1)^{\sigma-1} = O(N^\sigma).$$

Infatti vale

$$\begin{aligned} \left| e^{2\pi i b} + \sum_{n=2}^N (n-1)^{\sigma-1} \right| &\leq 1 + \sum_{n=1}^{N-1} n^{\sigma-1} \\ &\leq 2 + \int_1^{N-2} x^{\sigma-1} dx \\ &= O(N^\sigma). \end{aligned}$$

Mostriamo la (4.10). Integriamo per parti e ricaviamo

$$\begin{aligned} \int_1^N e^{2\pi i b x^\sigma} dx &= \int_1^N \frac{x^{1-\sigma}}{2\pi i b \sigma} \left(2\pi i b \sigma x^{\sigma-1} e^{2\pi i b x^\sigma} \right) dx \\ &= \frac{x^{1-\sigma}}{2\pi i b \sigma} e^{2\pi i b x^\sigma} \Big|_1^N - \int_1^N e^{2\pi i b x^\sigma} \left(\frac{1-\sigma}{2\pi i b \sigma} x^{-\sigma} \right) dx. \end{aligned}$$

Dato che valgono

$$\left| \frac{N^{1-\sigma}}{2\pi i b \sigma} e^{2\pi i b N^\sigma} - \frac{1}{2\pi i b \sigma} e^{2\pi i b} \right| \leq c_1 \cdot N^{1-\sigma} + c_2$$

e

$$\left| \int_1^N e^{2\pi i b x^\sigma} \left(\frac{1-\sigma}{2\pi i b \sigma} x^{-\sigma} \right) dx \right| \leq \frac{1}{2\pi |b|} \cdot \int_1^N x^{-\sigma} dx = c_3 \cdot N^{1-\sigma} + c_4,$$

la (4.10) è dimostrata e abbiamo ottenuto la tesi. $\square$

Problema 4.5. Mostrare che la successione $\langle a \ln(n) \rangle$ non è equidistribuita su $[0, 1)$.

Soluzione. Se $a = 0$, otteniamo la successione nulla che non è equidistribuita. Mostriamo che, se $a \neq 0$, vale

$$\limsup_{N \rightarrow \infty} \frac{1}{N} \left| \sum_{n=1}^N e^{2\pi i a \ln(n)} \right| \neq 0.$$

Ciò vuol dire che la (2.12) non è verificata per $k = 1$ e quindi il criterio di Weyl garantisce che la successione non è equidistribuita.

In particolare mostreremo

$$\lim_{N \rightarrow \infty} \frac{1}{N} \left| \sum_{n=1}^N e^{2\pi i a \ln n} - \int_1^N e^{2\pi i a \ln(x)} dx \right| = 0 \quad (4.11)$$

e

$$\limsup_{N \rightarrow \infty} \frac{1}{N} \left| \int_1^N e^{2\pi i a \ln(x)} dx \right| \neq 0. \quad (4.12)$$

Per disuguaglianza triangolare, vale

$$\left| \sum_{n=1}^N e^{2\pi i a \ln(n)} \right| \geq \left| \int_1^N e^{2\pi i a \ln(x)} dx \right| - \left| \sum_{n=1}^N e^{2\pi i a \ln n} - \int_1^N e^{2\pi i a \ln(x)} dx \right|.$$

Quindi mostrando la (4.11) e la (4.12) otteniamo la tesi.

Dimostriamo la (4.11). Abbiamo

$$\sum_{n=1}^N e^{2\pi i a \ln n} - \int_1^N e^{2\pi i a \ln x} dx = e^{2\pi i a \ln 1} + \sum_{n=2}^N \left(e^{2\pi i a \ln n} - \int_{n-1}^n e^{2\pi i a \ln x} dx \right).$$

Inoltre vale

$$\begin{aligned} \left| \int_{n-1}^n e^{2\pi i a \ln n} - e^{2\pi i a \ln(x)} dx \right| &\stackrel{(1)}{\leq} \int_{n-1}^n 2\pi |a| |\ln n - \ln x| dx \\ &\stackrel{(2)}{\leq} 2\pi |a| \int_{n-1}^n (n-x) \frac{1}{n-1} dx \\ &\leq 2\pi |a| \int_{n-1}^n \frac{1}{n-1} dx = 2\pi |a| \frac{1}{n-1}. \end{aligned}$$

Nel passaggio (1) è stata usata la disuguaglianza arco-corda (Lemma 3.7). La disuguaglianza (2) è giustificata dal Teorema di Lagrange. Ora, sappiamo

$$\sum_{n=2}^N \frac{1}{n-1} \leq c_1 + \ln(N-1) = O(\ln(N)).$$

Quindi otteniamo

$$\left| \sum_{n=1}^N e^{2\pi i a \ln n} - \int_1^N e^{2\pi i a \ln x} dx \right| \leq O(\ln(N)),$$

e la (4.11) è dimostrata.

Proviamo la (4.12). Vale

$$\int_1^N e^{2\pi i a \ln(x)} dx = \int_1^N x^{2\pi i a} dx = \frac{1}{1 + 2\pi i a} x^{2\pi i a + 1} \Big|_1^N = \frac{N^{2\pi i a + 1} - 1}{1 + 2\pi i a}.$$

Mostriamo che $|N^{2\pi i a + 1} - 1|/N$ non tende a 0. Infatti abbiamo

$$\limsup_{N \rightarrow \infty} \left| \frac{N^{2\pi i a + 1} - 1}{N} \right| = \limsup_{N \rightarrow \infty} \left| N^{2\pi i a} - \frac{1}{N} \right| = \limsup_{N \rightarrow \infty} \left| e^{2\pi i a \ln(N)} \right| = 1 \neq 0.$$

Quindi la successione delle medie non converge a 0 e la tesi è dimostrata. $\square$

Bibliografia

- [Fol99] Gerald B. Folland. *Real Analysis: Modern Techniques and Their Applications*. 2^a ed. John Wiley & Sons, 1999.
- [KN74] L. Kuipers e Harald Niederreiter. *Uniform Distribution of Sequences*. John Wiley & Sons, 1974.
- [Mon23] Roberto Monti. «Appunti di Analisi 2A». Corso di Analisi 2A, Università degli Studi di Padova. 2023.
- [Rud76] Walter Rudin. *Principles of Mathematical Analysis*. 3^a ed. McGraw–Hill, 1976.
- [Rud87] Walter Rudin. *Real and Complex Analysis*. 3^a ed. McGraw–Hill, 1987.
- [SS03] Elias M. Stein e Rami Shakarchi. *Fourier Analysis: An Introduction*. Princeton University Press, 2003.
- [Wey16] Hermann Weyl. «Über die Gleichverteilung von Zahlen mod. Eins». In: *Mathematische Annalen* 77.3 (1916), pp. 313–352.