UNIVERSITA' DEGLI STUDI DI PADOVA

DIPARTIMENTO DI MATEMATICA TULLIO LEVI-CIVITA

Corso di Laurea Magistrale in Matematica

Un gioco differenziale per contrastare l'azione degli antivaccinisti

Relatore:
Prof. Alessandra Buratto

Laureando:
Gemma Dalla Costa
matr. 1106547

Anno Accademico 2017-2018
23 Febbraio 2018

Indice

Introduzione

Le vaccinazioni sono tra le più grandi conquiste della medicina moderna e un presidio medico preventivo irrinunciabile. Grazie ad esse, malattie quali la poliomielite, tetano, vaiolo, difterite e rosolia sono quasi sparite [10].
Nella gestione del programma vaccinale il sistema sanitario nazionale deve considerare molteplici aspetti oltre alla pianificazione delle somministrazioni, negli ultimi anni si è trovato a dover affrontare anche un problema di corretta informazione. Infatti, è stato rilevato che in un regime liberale, dove alcuni importanti vaccini non sono stati resi obbligatori per legge, le persone vaccinate si sono ridotte drasticamente.
Il paradosso sta nel fatto che, grazie al successo dei vaccini, le persone non percepiscono la loro importanza proprio perché le patologie debellate o ridotte non risultano più visibili. L'efficacia dei vaccini viene messa in discussione dalla presenza degli antivaccinisti: essi cercano di diffondere l'idea che i vaccini siano inefficaci e pericolosi [20, 21], sostenendo addirittura la correlazione tra vaccini e l'insorgere di alcune gravi malattie. Per di più vogliono far credere che le aziende farmaceutiche li promuovano per il solo interesse economico e che siano completamente disinteressate all'utilità pubblica degli stessi.
Spesso notizie riguardanti le vaccinazioni sono date in pasto ai più potenti mezzi di comunicazione, quali riviste, televisione, internet e social network, senza però sottoporle ad alcuna verifica da parte di autorità mediche o scientifiche riconosciute. Altre volte vi è la diffusione di notizie allarmanti e preoccupanti prive di fondamenti scientifici. Basti pensare al caos suscitato nel 1998 dall'uscita dell'articolo di Andrew Wakefield in cui sosteneva la relazione tra vaccini e autismo [9]. Anche se risultò una frode scientifica, ciò provocò un calo drastico delle coperture vaccinali portando anche a un mancato raggiungimento di adeguati livelli di immunizzazione in alcuni Paesi. Talvolta le campagne di vaccinazione sono state accolte con sospetto e avversità, come accaduto in alcune parti dell'India, dove una campagna di vaccinazione contro malattie quali morbillo e rosolia è fallita dopo la comparsa nei social network di alcuni post secondo cui i vaccini erano pericolosi e il fine del loro utilizzo era addirittura sterilizzare i bambini delle minoranze

religiose [8].
Un'altra idea sostenuta nella propaganda antivaccinista è l'inesistenza della cosiddetta "immunità di gregge": con essa si intende che se si raggiunge una percentuale significativa di immunizzazione all'interno di una popolazione, circa il 95%, una malattia può sparire quasi del tutto ancora prima che l'intera popolazione sia stata completamente vaccinata [22].
Capiamo che negli ultimi anni, sia per la scarsa informazione, sia per l'assenza di controlli delle notizie che circolano, la copertura vaccinale della popolazione ha cominciato a calare, attirando l'attenzione dell'Organizzazione Mondiale della Sanità che ha notato questa flessione anche in Italia [7].
Nasce così l'esigenza, da parte dei sistemi sanitari, di svolgere mirate campagne di comunicazione pro-vaccini per convincere i genitori scettici a vaccinare i propri figli. Senza tali operazioni, il rischio è che il numero delle vaccinazioni cali drasticamente, portando ad una ricomparsa di alcune malattie ad oggi debellate.
In questo problema di salute pubblica, consideriamo nella presente tesi le azioni del sistema sanitario e di un'azienda farmaceutica che produce e vende vaccini. Anche se operano per fini diversi, il loro obiettivo è gestire una campagna pro-vaccini per minimizzare i non vaccinati. Tale trattazione presuppone che i vaccini siano efficaci e dunque l'azione svolta da tali attori mira ad informare e sensibilizzare le persone sull'importanza di tale mezzo di prevenzione.
In questa tesi si cerca di studiare, mediante un modello matematico descritto dalla teoria dei giochi, le interazioni dei due giocatori i quali ambiscono a contrastare la propaganda antivaccinista.

L'elaborato è strutturato nel seguente modo: il primo capitolo presenta alcuni concetti teorici riguardante la teoria dei giochi che risultano utili per la comprensione dell'analisi svolta. Il secondo capitolo descrive il modello matematico per questo particolare problema di salute pubblica: si definiscono gli obiettivi dei due giocatori e si presenta una generale legge di evoluzione del numero di non vaccinati che assume valori specifici nei successivi capitoli. Nel terzo capitolo è svolta l'analisi del primo modello proposto: esso costituisce un'estensione in orizzonte temporale infinito di un attuale lavoro di ricerca svolto dai professori A. Buratto, B. Viscolani e L.Grosset [1]. Durante la sua analisi, emergono alcuni problemi legati all'instabilità delle soluzioni steady state e alla possibile applicazione del modello al problema considerato. Perciò nel quarto capitolo si presenta una nuova proposta nella legge di evoluzione

[1]Docenti del dipartimento di Matematica Tullio Levi-Civita presso l'Università degli Studi di Padova

del numero di non vaccinati, la quale porta il modello a risultati significativi e stabili. Si studieranno in aggiunta le relazioni tra alcuni parametri, in modo da svolgere un'analisi di sensibilità. Infine l'ultimo capitolo raccoglie delle osservazioni cercando di sintetizzare i risultati dello studio svolto.

Capitolo 1

Introduzione ai giochi differenziali

Nella realtà economica dobbiamo considerare simultaneamente le azioni di più decisori, ciascuno dei quali vuole ottimizzare un proprio obiettivo, tenendo in considerazione le interazioni e le conseguenze che scaturiscono dalle scelte degli altri giocatori. La teoria dei giochi differenziali[1] formalizza lo studio di questi problemi di ottimizzazione dinamica in cui sono coinvolte due o più parti che devono prendere delle decisioni strategiche.
Gli interessi di tali soggetti possono essere concordi o contrastanti, poiché essi hanno la facoltà di agire collettivamente o individualmente: da qui nasce la distinzione, rispettivamente, in gioco cooperativo e non cooperativo. Se una partita è giocata in quest'ultimo modo, significa che non vi è un accordo tra i giocatori per seguire una linea d'azione comune, pertanto prevarrà l'antagonismo e tutti i giocatori agiranno per il loro esclusivo interesse, senza prestare alcuna attenzione al destino degli altri giocatori. In un gioco cooperativo, invece, si suppone che i giocatori accettino di organizzare le loro azioni per il beneficio reciproco agendo come se fossero all'interno di un gruppo: questo metodo risulta vantaggioso soprattutto se i giocatori hanno uno scopo comune.
Nel gioco, le sorti dei giocatori sono concatenate: le azioni intraprese da un particolare giocatore influenzano la propria sorte e anche quella degli altri decisori, quindi, in ogni istante, i soggetti devono considerare tutte le azioni che sono già state prese fino a quel momento da ciascuno di loro.
Chiarito questo aspetto, dobbiamo ricordare come la teoria dei giochi si basi su un assioma fondamentale: i giocatori sono razionali e intelligenti. Per razionali si intende che i giocatori prendono decisioni strategiche per massimizzare la loro funzione obiettivo, mentre sono intelligenti dato che ragionano in modo logico e corretto e riescono a capire in quale situazione si trovano.

[1] Le seguenti note teoriche sono una rielaborazione dei concetti trovati principalmente nei testi [4], [5], [11], [13] e [14] riportati in bibliografia

Resta sottinteso che ogni giocatore è consapevole di affrontare avversari razionali e che ognuno di loro è a conoscenza delle regole del gioco, consistenti nel numero di avversari e nell'insieme di possibili strategie che questi possono adottare.
Venendo ai giochi in senso stretto, è necessaria una distinzione basata sulla sequenza secondo cui i giocatori operano le proprie scelte. Parliamo di giochi simultanei se queste sono effettuate nel medesimo istante, in una situazione in cui nessuno conosce le decisioni prese dagli altri. I giochi sono invece sequenziali se vi è un ordine di azione tra i giocatori, cioè le scelte non sono realizzate simultaneamente. Se esiste, inoltre, una gerarchia che regola l'ordine di azione dei giocatori, allora il gioco è detto gerarchico. In particolare, se vi sono solo due giocatori che interagiscono, il gioco è detto alla Stackelberg. In tal caso un giocatore, detto leader, prende la sua decisione dopo aver osservato la miglior risposta dell'altro, detto follower, disponendo così di maggiori informazioni.

Andiamo ora a formalizzare un gioco differenziale definito in un intervallo di tempo $[0, T\rangle$ dove $T > 0$ è l'istante finale che può assumere anche valore infinito. Nel gioco supponiamo vi siano N giocatori ($N \geq 2$) e per distinguere le loro variabili, funzioni e parametri indicheremo essi con un relativo indice. Ciascun giocatore $i = 1, ..., N$ sceglierà, ad ogni istante $t \in [0, T\rangle$, un controllo $u^i(t)$ da un insieme di possibili controlli $U^i(x(t), u^{-i}(t), t) \subseteq \mathbb{R}^{m^i}$. In generale, questo insieme dipende dal tempo t, dallo stato corrente $x(t)$ e dal vettore dei controlli dei giocatori rivali

$$u^{-i}(t) = (u^1(t), u^2(t), ..., u^{i-1}(t), u^{i+1}(t), ..., u^N(t)).$$

Indicheremo con il vettore $x(t) \in X \subseteq \mathbb{R}^k$ lo stato del gioco associato ad ogni istante $t \in [0, T\rangle$, dove X è l'insieme degli stati ammissibili. Esso evolve nel tempo in accordo con equazioni differenziali

$$\dot{x}(t) = f(x(t), u^1(t), ..., u^N(t), t),$$

dove $f : \Omega \to \mathbb{R}^n$ e $\Omega = \{(x, u^1, u^2, ..., u^N, t) | x \in X, t \in [0, T\rangle, u^i \in U^i(x, u^{-i}, t),$ $i = 1, .., N\}$. Queste sono dette equazioni del moto e saranno associate allo stato iniziale del gioco $x(0) = x_0$. Notiamo che, per come è definita l'equazione del moto, ogni giocatore influenza il sistema del gioco scegliendo il proprio controllo u^i.
L'obiettivo di ogni giocatore è massimizzare la propria funzione obiettivo, o payoff, $J^i : U^i \to \mathbb{R}$ scegliendo in maniera ottimale una strategia ammissibile considerando l'evoluzione dello stato e la condizione iniziale. Dunque il

problema del giocatore i-esimo può essere scritto come

$$\max_{u^i \in U^i} \quad J^i(u^i(\cdot)) = \int_0^T e^{-r^i t} F^i(x(t), u^1(t), u^2(t), .., u^N(t), t) dt + e^{-r^i T} S^i(x(T)) \tag{1.1}$$

soggetto a

$$\begin{cases} \dot{x}(t) = f(x(t), u^1(t), ..., u^N(t), t), \\ x(0) = x_0, \\ u^i \in U^i(x, u^{-i}, t). \end{cases}$$

dove $F^i : \Omega \to \mathbb{R}$ è la funzione utilità del giocatore i, $r^i > 0$ è il tasso di attualizzazione e $S^i : X \to \mathbb{R}$ è la funzione scrap value.
Considerare le azioni di tutti i giocatori che hanno lo scopo di massimizzare il loro payoff corrisponde a studiare N problemi dinamici. Possiamo dunque pensare un gioco differenziale come ad un N-upla di problemi di controllo ottimo. Tuttavia ciascun problema presenta le strategie degli altri giocatori e questo rende inapplicabile la definizione usata finora di controllo ottimo. Sorge così necessario introdurre il concetto di equilibrio, che sarà la soluzione del gioco differenziale che non sono altro che le strategie utilizzate dai giocatori per massimizzare il proprio payoff. Prima di sviluppare questo concetto, introduciamo i due tipi di controllo un giocatore può adottare[2].

- Un controllo si dice open-loop se la scelta di un'azione per il giocatore $i = 1, ..., N$ è condizionata, oltre allo stato iniziale fissato x_0, solo nel tempo. Sarà della forma $u^i(t)$ con $u^i : [0, T] \to \mathbb{R}^{m^i}$.

- Un controllo viene detto Markoviano quando la scelta di un'azione è condizionata dal tempo e dallo stato osservato in quell'istante corrente, quindi $u^i(x(t), t)$ con $u^i : \mathbb{R}^k \times [0, T] \to \mathbb{R}^{m^i}$, con $i = 1, ..., N$.

1.1 Equilibri di Nash

Introduciamo l'equilibrio di Nash, concetto che riesce a sottolineare come ogni giocatore pensi in maniera razionale. Infatti tale equilibrio viene raggiunto quando i singoli decisori pensano a massimizzare il proprio payoff senza considerare gli interessi degli altri.

Definizione 1. *Un equilibrio di Nash è una combinazione di strategie* $(\phi^1, \phi^2, ..., \phi^N) \in \mathcal{U}^1 \times \mathcal{U}^2 \times ... \times \mathcal{U}^N$ *tali che per ogni giocatore* $i = 1, ..., N$ *si ha*

$$J^i(\phi^1, ..., \phi^{i-1}, \phi^i, \phi^{i+1}, ..., \phi^N) \geq J^i(\phi^1, ..., \phi^{i-1}, u^i, \phi^{i+1}, ..., \phi^N) \tag{1.2}$$

[2]Definizione tratta dal testo [12]

per ogni $u^i \in \mathcal{U}^i$*, ovvero, fissate le strategie d'equilibrio degli avversari, nessun giocatore è interessato a cambiare la sua strategia, perché rischia di aver lo stesso risultato o di peggiorarlo.*

Una strategia $\phi^i(\cdot)$ dell' i-esimo giocatore appartiene ad un equilibrio di Nash se risulta essere un controllo ottimo per il problema del giocatore stesso, dove le strategie $\phi^{-i} = (\phi^1, ..., \phi^{i-1}, \phi^{i+1}, ..., \phi^N)$ degli altri giocatori sono considerate fissate. Possiamo così riscrivere il problema decisionale del giocatore i-esimo come

$$\max_{u^i \in U^i_{\phi^{-i}}} \quad J^i_{\phi^{-i}}(u^i(\cdot)) = \int_0^T e^{-r^i t} F^i_{\phi^{-i}}(x(t), u^i(t), t)dt + e^{-r^i T} S^i(x(T)) \qquad (1.3)$$

soggetto a

$$\begin{cases} \dot{x}(t) = f^i_{\phi^{-i}}(x(t), u^i(t), t), \\ x(0) = x_0, \\ u^i \in U^i_{\phi^{-i}}(x, t), \end{cases}$$

dove

$$F^i_{\phi^{-i}}(x, u^i, t) = F^i(x, \phi^1(\cdot), ..., \phi^{i-1}(\cdot), u^i, \phi^{i+1}(\cdot), ..., \phi^N(\cdot), t),$$

$$f^i_{\phi^{-i}}(x, u^i, t) = f(x, \phi^1(\cdot), ..., \phi^{i-1}(\cdot), u^i, \phi^{i+1}(\cdot), ..., \phi^N(\cdot), t),$$

$$U^i_{\phi^{-i}}(x, t) = U^i(x, \phi^1(\cdot), ..., \phi^{i-1}(\cdot), \phi^{i+1}(\cdot), ..., \phi^N(\cdot), t).$$

Avendo introdotto due tipologie diverse di strategie, distinguiamo gli equilibri di Nash nel seguente modo:

- **equilibrio di Nash open-loop**: l'N-upla di strategie $(\phi^1, ..., \phi^N)$ con $\phi^i : [0, T\rangle \to \mathbb{R}^{m_i}$ si dice equilibrio di Nash open-loop se per ogni $i = 1, ..., N$ esiste un controllo ottimo u^i per il problema di ottimizzazione, condizionato dalle scelte strategiche degli altri giocatori, e questo controllo ottimo è dato dalla strategia open-loop $u^i(t) = \phi^i(t)$.

- **equilibrio di Nash Markoviano**: l'N-upla di strategie $(\phi^1, ..., \phi^N)$ con $\phi^i : X \times [0, T\rangle \to \mathbb{R}^{m_i}$ si dice equilibrio di Nash Markoviano se per ogni i=1,..., N esiste un controllo ottimo u^i per il problema di ottimizzazione, condizionato dalle scelte strategiche degli altri giocatori, e questo controllo ottimo è dato dalla strategia Markoviana $u^i(t) = \phi^i(x(t), t)$

Le rappresentazioni differenti degli stessi possibili controlli $u^{-i}(\cdot)$ in un gioco differenziale, comportano a problemi di ottimizzazioni differenti per il giocatore i. Pertanto l'insieme degli equilibri Nash open-loop relativo ad un particolare gioco differenziale è tipicamente differente da quello Nash Markoviano; generalmente gli equilibri open-loop sono sottoinsiemi di quelli Markoviani.

Vogliamo ora capire come cercare gli equilibri di Nash in un gioco differenziale con N giocatori. Sappiamo, come già detto, che equivale a trovare le soluzioni di N problemi di controllo ottimo. Per farlo, possiamo utilizzare il Principio del Massimo di Pontryagin, che restituisce equilibri di Nash con strategie open-loop, o l'equazione di Hamilton-Jacobi-Bellman, che porta a equilibri di Nash con strategie Markoviane.
In questa trattazione, ci limiteremo a presentare solo l'equazione di Hamilton-Jacobi-Bellman, in quanto gode della consistenza temporale e perciò sarà utilizzata nell'analisi del modello contro l'azione degli antivaccinisti.

Teorema 1.1. *Sia $(\phi^1, \phi^2, ..., \phi^N)$ una data N-upla di funzioni $\phi^i : X \times [0, T\rangle \to \mathbb{R}^{m^i}$ e assumiamo che:*

- *esista un'unica funzione assolutamente continua $x : [0, T\rangle \to X$ del problema*

$$\begin{cases} \dot{x}(t) = f(x(t), \phi^1(x(t), t), \phi^2(x(t), t), .., \phi^N(x(t), t), t), \\ x(0) = x_0, \end{cases}$$

- *esista una funzione differenziabile con continuità $V^i : X \times [0, T\rangle \to \mathbb{R}$ con $i = 1, ...N$ tale che $\forall (x, t) \in X \times [0, T\rangle$ siano soddisfatte le equazioni di Hamilton-Jacobi-Bellman (HJB)*

$$r^i V^i(x, t) - V^i_t(x, t) = max\{F^i_{\phi^{-i}}(x, u^i, t) + V^i_x(x, t) f^i_{\phi^{-i}}(x, u^i, t) | u^i \in U^i_{\phi^{-i}}(x, t)\}, \tag{1.4}$$

- *le condizioni finali*

$$V^i(x, T) = S^i(x) \tag{1.5}$$

siano soddisfatte $\forall x \in X$ e $\forall i = 1, ..., N$.

Denotiamo con $\Phi^i(x, t)$, l'insieme di tutti i controlli $u^i \in U^i_{\phi^{-i}}(x, t)$ che massimizzano la parte destra di (1.4). Se $\phi^i(x(t), t) \in \Phi^i(x(t), t)$ per ogni $i \in \{1, ..., N\}$ e per quasi tutti $t \in [0, T\rangle$ allora $(\phi^1, \phi^2, ..., \phi^N)$ è un equilibrio di Nash Markoviano.

1.2 Consistenza temporale e perfezione nei sottogiochi

Nella presente sezione, discutiamo di due importanti proprietà: la consistenza temporale e la perfezione nei sottogiochi.
Quando analizziamo situazioni in cui il percorso non è fissato, è fondamentale che il tempo sia consistente. Siamo sicuri di averlo se l'equilibrio è Markoviano, laddove in quello open-loop l'assunto, in generale, non vale.
Indichiamo con $\Gamma(x_0, 0)$ il gioco differenziale già introdotto dove ogni giocatore $i = 1, ..., N$ vuole

$$\max_{u^i \in U^i} J^i(u^i(\cdot)) = \int_0^T e^{-r^i t} F^i(x(t), u^1(t), u^2(t), .., u^N(t), t)dt + e^{-r^i T} S^i(x(T)),$$

soggetto a

$$\begin{cases} \dot{x}(t) = f(x(t), u^1(t), u^2(t), ..., u^N(t), t), \\ x(0) = x_0 \in X, \\ u^i(t) \in U^i(x(t), u^{-i}(t), t). \end{cases}$$

Per ogni possibile coppia $(x, t) \in X \times [0, T\rangle$, definiamo un sottogioco $\Gamma(x, t)$ definito nell'intervallo di tempo $[t, T\rangle$: esso si ottiene sostituendo al problema precedente la funzione obiettivo, il sistema dinamico e la condizione iniziale con

$$J^i(u^i(\cdot)) = \int_t^T e^{-r^i(s-t)} F^i(x(s), u^1(s), u^2(s), .., u^N(s), s)ds + e^{-r^i(T-t)} S^i(x(T)),$$

$$\dot{x}(s) = f(x(s), u^1(s), u^2(s), ..., u^N(s), s),$$

e

$$x(t) = x \in X.$$

Capiamo ora cosa intendiamo per tempo consistente.

Definizione 2. *Sia $(\phi^1(\cdot), \phi^2(\cdot), ..., \phi^N(\cdot))$ un equilibrio di Nash Markoviano per il gioco $\Gamma(x_0, 0)$ e $x(\cdot)$ l'unica traiettoria generata in questo equilibrio. Diremo che una strategia è consistente nel tempo se il sottogioco $\Gamma(x(t), t)$ ammette un equilibrio di Nash Markoviano $(\psi^1(\cdot), \psi^2(\cdot), ..., \psi^N(\cdot))$ $\forall t \in [0, T\rangle$, tale che*

$$\psi^i(y, s) = \phi^i(y, s) \quad \forall i = 1, ..., N \quad \forall (y, s) \in X \times [t, T\rangle.$$

In altre parole un equilibrio di Nash Markoviano è consistente nel tempo solo se è anche un equilibrio di Nash Markoviano per ogni sottogioco che si sviluppa lungo l'originale traiettoria d'equilibrio $x(\cdot)$.

Analizziamo ora il concetto di perfezione nei sottogiochi.

Definizione 3. *Sia* $(\phi^1, \phi^2, ..., \phi^N)$ *un equilibrio Nash Markoviano per il gioco* $\Gamma(x_0, 0)$. *Chiamiamo l'equilibrio perfetto nei sottogiochi se,* $\forall (x,t) \in X \times [0,T\rangle$, *il sottogioco* $\Gamma(x,t)$ *ammette un equilibrio di Nash Markoviano* $(\psi^1, \psi^2, ..., \psi^N)$ *tale che*

$$\psi^i(y,s) = \phi^i(y,s) \quad \forall i \in 1,...,N \quad \forall (y,s) \in X \times [t,T\rangle.$$

Un equilibrio Nash Markoviano che è perfetto nel sottogioco è anche chiamato un perfetto equilibrio di Nash Markoviano.

Ovviamente, un perfetto equilibrio Nash Markoviano implica la consistenza temporale. Questo perché esso richiede in aggiunta che la restrizione di ϕ in $X \times [t,T\rangle$ sia un equilibrio di Nash Markoviano per tutti i sottogiochi $\Gamma(x,t)$ con $(x,t) \in X \times [0,T\rangle$.
Il seguente risultato mostra che un leggero rafforzamento delle condizioni del teorema (1.1) garantisce non solo la proprietà di equilibrio di Nash, ma anche la perfezione nei sottogiochi dell'equilibrio.

Teorema 1.2. *Sia*$(\phi^1, \phi^2, ..., \phi^N)$ *sia una data N-upla di funzioni* $\phi^i : X \times [0,T\rangle \to \mathbb{R}^{m^i}$ *e prese le seguenti assunzioni:*

- *per ogni coppia* $(y,s) \in X \times [0,T\rangle$ *esiste un'unica soluzione assolutamente continua* $x_{y,s} : [s,T\rangle \to X$ *del problema del valore iniziale*

$$\dot{x}(t) = f(x(t), \phi^1(x(t),t), \phi^2(x(t),t), ..., \phi^N(x(t),t), t),$$
$$x(s) = y,$$

- *le altre due condizioni del teorema* 1.1 *sono soddisfatte aggiungendo, quando* V^i *non è limitato superiormente,* $\limsup_{t\to\infty} e^{-r^i t} V^i(x_{y,s}(t), t)$.

Denotiamo con $\Phi^i(x,t)$ *l'insieme di tutti* $u^i \in U^i_{\phi^{-i}}(x,t)$ *che massimizza il lato destro di* (1.4). *Se* $\phi^i(x(t),t) \in \Phi^i(x(t),t)$ *per ogni* $i \in \{1,...,N\}$ *e per tutti* $(x,t) \in X \times [0,T\rangle$ *allora* $(\phi^1, \phi^2, ..., \phi^N)$ *è un perfetto equilibrio di Nash Markoviano.*

La principale differenza tra le ipotesi del teorema 1.1 e del teorema 1.2 è che in quest'ultimo la condizione $\phi^i(x,t) \in \Phi^i(x,t)$ deve essere soddisfatta per tutti $(x,t) \in X \times [0,T\rangle$ mentre nel primo era necessario solo per tutti (x,t) che soddisfano $x = x(t)$.

1.3 Giochi differenziali trattabili

Sappiamo che generalmente identificare un equilibrio di Nash per un gioco differenziale comporta numerose difficoltà connesse alla risoluzione delle equazioni di HJB. Fortunatamente, i modelli che andremo ad analizzare fanno parte dei giochi differenziali definiti trattabili [3], in cui il lavoro richiesto è notevolmente semplificato.
La prima classe che esamineremo per la derivazione degli equilibri Nash Markoviani sono i giochi differenziali lineari quadratici, seguiti dall'analisi di quelli lineari nello stato. Per semplificare la trattazione, assumiamo che ogni giocatore ha una sola variabile di controllo e che lo stato sia 1-dimensionale. Pertanto il problema del giocatore $i = 1, ..., N$ sarà

$$max_{u^i \in U^i} \quad J^i(u^i(\cdot)) = \int_0^T e^{-r^i t} F^i(x(t), u(t), t)dt + e^{-r^i T} S^i(x(T))$$

soggetto a

$$\begin{cases} \dot{x} = f(x(t), u(t), t), \\ x(0) = x_0, \\ u^i \in U^i(x, u^{-i}, t), \end{cases}$$

dove $u(t) = (u^1(t), ..., u^N(t))$ è il vettore dei controlli e ricordiamo che l'orizzonte finale può assumere anche valore infinito.

1.3.1 Giochi differenziali lineari quadratici

I giochi differenziali lineari quadrati sono contraddistinti dalla proprietà per cui:

- la funzione utilità $F^i(\cdot)$ e la funzione scrap value $S^i(\cdot)$ sono quadratiche rispetto allo stato e alle variabili di controllo,
- nell'equazione del moto, $f(\cdot)$ è un polinomio di primo ordine nella variabile di stato e di controllo.

Per tali giochi, otteniamo che la strategia d'equilibrio di Nash Markoviano del giocatore i-esimo sarà lineare rispetto alla variabile di stato, cioè

$$u^i(t) = \phi^i(x(t), t) = a_i(t)x(t) + b_i(t);$$

mentre la funzione valore sarà quadratica rispetto a $x(t)$, cioè della forma

$$V^i(x(t), t) = \frac{1}{2}A_i(t)x^2(t) + B_i(t)x(t) + C_i(t),$$

[3] La seguente sezione è tratta dal testo [5], pp. 170-194

dove i coefficienti $a_i(t), b_i(t), A_i(t), B_i(t)$ e $C_i(t)$ dipendono dal tempo.
In questo modo avremo che la soluzione dell'equazioni di HJB implicherà un insieme di equazioni differenziali di Riccati.
In aggiunta, se il gioco differenziale lineare quadratico ha orizzonte temporale infinito, cioè $T = \infty$, allora le funzioni valori e le strategie sono stazionarie, ovvero indipendenti dal tempo. Questo significa che i loro coefficienti sono costanti e quindi otteniamo che

$$\phi^i(x(t)) = a_i x(t) + b_i$$

e

$$V^i(x(t)) = \frac{1}{2} A_i x^2(t) + B_i x(t) + C_i.$$

1.3.2 Giochi lineari nello stato

In questa sezione consideriamo i giochi differenziali a stato lineare, cioè problemi che presentano:

- l'equazione di stato, la funzione di utilità $F^i(\cdot)$ e la funzione scrap value $S^i(\cdot)$ come polinomi di primo grado rispetto alla variabile di stato;
- nessuna interazione moltiplicativa tra lo stato e la variabile controllo.

Per questa classe di giochi, la strategia d'equilibrio del giocatore i-esimo è costante. Essa sarà della forma

$$u^i(t) = \phi^i(x(t), t) = c_i(t)$$

con $c_i(t)$ coefficiente in funzione dal tempo ed, essendo $\phi^i(t)$ indipendente dallo stato, diremo pertanto che la strategia è feedback [4] degenere.
La funzione valore sarà lineare rispetto alla variabile di stato, cioè

$$V^i(x(t), t) = D_i(t) x(t) + E_i(t),$$

dove $D_i(t)$ e $E_i(t)$ sono coefficienti in funzione del tempo.
In aggiunta, se il gioco è lineare nello stato con orizzonte temporale infinito,

[4] Controllo feedback: la funzione $\phi^i(\cdot) : [0, T\rangle \times X \to \mathbb{R}^{m^i}$ che indica il controllo scelto ad ogni istante t e ad ogni $x(t)$ dal giocatore i-esimo. Tale funzione deve essere continua in t e uniformemente Lipschitziana [5] in x(t) $\forall t \in [0, T\rangle$;
[2] *S*ia $0 \leq \alpha \leq 1$, una funzione f si dice uniformemente Lipschitziana su un intervallo (a, b) se esiste una costante K positiva tale che

$$\mid f(x_1) - f(x_2) \mid \leq \mid x_1 - x_2 \mid^\alpha \ \forall x_1, x_2 \in (a, b).$$

La costante α è detta esponente di Lipschitz.

cioè $T = \infty$, allora i coefficienti della funzione valore e delle strategie sono indipendenti dal tempo. Questo significa che sono costanti e otteniamo così che

$$\phi^i(x(t), t) = c_i$$

e

$$V^i(x(t), t) = D_i x(t) + E_i.$$

Precisiamo che la particolarità di questi giochi consiste nel fatto che gli equilibri di Nash open-loop coincidono con quelli di Nash Markoviani e ricordiamo che, in un generico problema di ottimizzazione, questo non succede.

1.4 Orizzonte temporale infinito

In molte situazioni, l'istante finale T è in un futuro sconosciuto e, per ottenere un modello più simile alla realtà, conviene supporre $T = +\infty$[6]. Notiamo come in questo caso non ha senso considerare una funzione S scrap value che esprima il valore finale del payoff, dato che non si conosce l'istante preciso di terminazione del gioco. Perciò per ricavare la nuova funzione obiettivo, riprendendo quella esposta precedentemente, basterà porre $T = +\infty$ e $S(x) = 0 \ \forall x \in X$. Nasce ora l'esigenza di portare opportune modifiche anche alle condizioni finali (1.5) presentate nel teorema 1.1 e, sfortunatamente, questa variazione non è diretta.

Per quanto appena detto, otteniamo che in un problema di ottimizzazione dinamica a tempo infinito il payoff del giocatore i-esimo sarà della forma

$$J^i(u^i(\cdot)) = \int_0^{+\infty} e^{-r^i t} F^i(x(t), u(t), t) dt. \tag{1.6}$$

L'integrale, tuttavia, non necessariamente converge ad un numero reale per tutti i possibili controlli e traiettorie $(x(\cdot), u(\cdot))$ dove $u(t) = (u^1(t), ..., u^n(t))$. Infatti, se riprendiamo la definizione utilizzata finora di controllo ottimo, la divergenza dell'integrale per qualche controllo ottimo $u^*(\cdot)$, comporta una difficoltà nel verificare la condizione di ottimalità $J^i(u^*(\cdot)) \geq J^i(u(\cdot))$. Per evitare questo problema, possiamo procedere in due modi: il primo è quello di adottare un payoff differente, mentre nell'altro si modificherà la definizione di controllo ottimale.

Partiamo analizzando il primo approccio: in questo caso il problema del giocatore $i = 1, ..., N$ sarà

$$\max_{u^i \in U^i} \ J^i(u^i(\cdot)) = \int_0^{+\infty} e^{-r^i t} F^i(x(t), u(t)) dt$$

[6] La seguente sezione è tratta dal testo [1], pp. 254-259

soggetto a

$$\begin{cases} \dot{x} = f(x(t), u(t)), \\ x(0) = x_0, \\ u^i \in U^i(x, u^{-i}). \end{cases}$$

Notiamo come le funzioni F^i, f e U^i non dipendano esplicitamente dalla variabile temporale t, pertanto non cambieranno nel tempo. Risulterà quindi ragionevole considerare le strategie stazionarie feedback indipendenti dal tempo, cioè $u^i(t) = \phi^i(x(t))$. In aggiunta, anche le funzioni valori V^i risultano indipendenti dal tempo e quindi il termine $-V^i_t(x,t)$ sarà nullo, riducendo l'equazione di Hamilton-Jacobi-Bellman a

$$r^i V^i(x) = \max_{u^i \in U^i} \{F^i_{\phi^{-i}}(x, u^i) + V^i_x(x) f^i_{\phi^{-i}}(x, u^i)\} \quad i = 1, ..., N.$$

In questo caso, le condizioni finali sufficienti (1.5) diventano

$$\lim_{t \to \infty} e^{-r^i t} V^i(x(t)) = 0.$$

L'altro modo per risolvere l'eventuale non convergenza dell'integrale, è ridefinire il significato di controllo ottimo per i giochi differenziali definiti in un intervallo di tempo infinito.

Definizione 4. *Consideriamo un problema di controllo ottimo in cui la funzione obiettivo è data da*

$$J(u(\cdot)) = \int_0^{+\infty} e^{-rt} F(x(t), u(t), t) dt. \tag{1.7}$$

Il T-troncamento della funzione obiettivo è definito da

$$J_T(u(\cdot)) = \int_0^{T} e^{-rt} F(x(t), u(t), t) dt,$$

ove $T < +\infty$, cioè supponiamo che l'intervallo di tempo $[0,T]$ sia finito. Ora, un controllo ammissibile $u(\cdot)$ si dice:

- *ottimo overtaking se per ogni controllo ammissibile $\widetilde{u}(\cdot)$ esiste un numero finito τ tale che $J_T(u(\cdot)) - J_T(\widetilde{u}(\cdot)) \geq 0 \ \forall \ T \in [\tau, +\infty)$;*
- *ottimo catching up se il*

$$\liminf_{T \to \infty} {}^{7} \left[J_T(u(\cdot)) - J_T(\widetilde{u}(\cdot))\right] \geq 0;$$

[7] Per richiami ai concetti di liminf si veda il testo riportato in bibliografia [6]

- *ottimo sporadically catching up se*

$$\limsup_{T\to\infty}{}^{8}\,[J_T(u(\cdot)) - J_T(\widetilde{u}(\cdot))] \geq 0;$$

La restrizione al caso finito approssima il gioco infinito se la sua analisi porta a risultati vicini a quelli ottenuti dalla versione originale infinita: questa approssimazione facilita lo studio del gioco anche se esso sarà meno preciso. Interpretiamo i giochi ad orizzonte infinito come limite di giochi finiti e andremo a studiare il comportamento asintotico delle loro proprietà.

Vediamo ora come si modificano le condizioni sufficienti finali nel caso in cui l'istante finale sia infinito.

Proposizione 1. *Consideriamo la funzione obiettivo del giocatore i-esima* (1.3)*. I risultati del teorema 1.1 rimangono validi, purché le condizioni finali* (1.5) *vengano modificate come segue:*

- *se l'ottimo è overtaking, allora le condizioni finali diventano che per ogni controllo ammissibile* $\widetilde{u}(\cdot)$ *esiste un numero finito* τ *tale che*

$$V^i(\widetilde{x}(T), T) - V^i(x(T), T) \geq 0 \tag{1.8}$$

$\forall T \in [\tau, \infty)$ *e* $\forall i \in \{1, ..., N\}$;

- *se l'ottimo è catching up, allora le condizioni finali diventano*

$$\liminf_{T\to\infty} e^{-rT}[V^i(\widetilde{x}(T), T) - V^i(x(T), T)] \geq 0 \tag{1.9}$$

$\forall i \in \{1, ..., N\}$;

- *se l'ottimo è sporadically catching up, allora le condizioni finali diventano*

$$\limsup_{T\to\infty} e^{-rT}[V^i(\widetilde{x}(T), T) - V^i(x(T), T)] \geq 0 \tag{1.10}$$

$\forall i \in \{1, ..., N\}$.

La condizione (1.8)-(1.10) non sono facili da verificare perché devono essere vere per tutti i possibili controlli $\widetilde{u}(\cdot)$. Molte volte queste sono ovviamente soddisfatte, ad esempio se V^i è una funzione limitata e $r > 0$, allora le condizioni (1.9) e (1.10) sono verificate .
Esponiamo quindi un lemma in cui le condizioni da verificare sono molto più semplici di quelle del teorema appena enunciato. Qui basterà provarle solo per le soluzioni candidate, $u(\cdot)$ e $x(\cdot)$, invece che per tutte le possibili soluzioni $\widetilde{u}(\cdot)$ e $\widetilde{x}(\cdot)$.

[8] Per richiami ai concetti di limsup si veda il testo riportato in bibliografia [6]

Lemma 1. *Supponiamo che la funzione V^i sia limitata inferiormente e che r>0 per i=1,...,N. Allora la condizione(1.9) è implicata da*

$$\limsup_{T\to\infty} e^{-rT} V^i(x(T), T) \leq 0$$

e la condizione (1.10) da

$$\liminf_{T\to\infty} e^{-rT} V^i(x(T), T) \leq 0.$$

1.5 Soluzioni steady state

Assumiamo di avere un sistema di equazioni differenziali autonome[9]

$$\dot{x}(t) = f(x(t)), \tag{1.11}$$

dove $x(t) = (x_1(t), ..., x_n(t))$ e $f : \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}^n$. Sia $x(0) = x_0$ la condizione iniziale associata a (1.11).

Definizione 5. [10] *Una soluzione steady state (o stazionaria) del sistema* (1.11) *è un vettore costante x^{SS} che soddisfa $f(x^{SS}) = 0$, cioè rimarrà invariante nel tempo. Diremo che una soluzione stazionaria è*

- *stabile se per ogni $\epsilon > 0$ esiste un $\delta > 0$ tale che per ogni $x(t)$ soluzione del sistema* (1.11) *con condizione iniziale x_0 soddisfa*

$$\|x_0 - x^{SS}\| < \delta \Rightarrow \|x(t) - x^{SS}\| < \epsilon, \forall t > 0;$$

- *attrattiva se esiste $\rho > 0$ tale che*

$$\|x_0 - x^{SS}\| < \rho \Rightarrow \lim_{t\to\infty} x(t) = x^{SS}.$$

  L'insieme dei vettori x_0 tali che $\lim_{t\to\infty} x(t) = x^{SS}$ si chiama bacino di attrazione di x^{SS};

- *asintoticamente stabile se è sia stabile che attrattivo.*

Con le definizioni appena introdotte, per stabilità intendiamo che se una soluzione di (1.11) inizia vicino alla soluzione stazionaria, allora rimarrà vicino alla soluzione stazionaria con il passare del tempo, mentre la stabilità asintotica comporta che se una traiettoria inizia abbastanza vicino a x^{SS},

[9] Le definizioni si posso adattare anche ai sistemi non autonomi.
[10] Definizione tratta dal testo [3]

allora alla fine convergerà a x^{SS}.
Vogliamo ora fornire un criterio generale per poter stabilire se le soluzioni stazionarie di un'equazione differenziale siano asintoticamente stabili.

Criterio di stabilità lineare

Supponiamo di avere un'equazione differenziale lineare autonoma della forma
$$\dot{x}(t) = c_1 x(t) + c_2.$$
Se la derivata rispetto alla variabile dipendente x(t), cioè c_1, è negativa, allora la soluzione di equilibrio $x^{SS} = -\frac{c_2}{c_1}$ è asintoticamente stabile.

Criterio di stabilità non lineare

Prendiamo una generica equazione differenziale del tipo
$$\dot{x}(t) = f(x(t), t).$$
Se la derivata rispetto alla variabile $x(t)$, calcolata per $x = x^{SS}$, risulta essere negativa, allora la soluzione stazionaria x^{SS} è asintoticamente stabile. Se invece tale derivata è positiva, la soluzione è instabile. Nel caso in cui la suddetta derivata sia uguale a zero, allora non si può dire nulla in merito alla stabilità asintotica della soluzione x^{SS}.

1.6 Giochi alla Stackelberg

Finora abbiamo considerato giochi differenziali nei quali tutti i giocatori agiscono contemporaneamente. É giunto il momento di passare al caso in cui alcuni giocatori hanno priorità d'azione rispetto ad altri.
Un gioco differenziale viene definito alla Stackelberg se vi è una gerarchia per regolare le azioni di due giocatori che agiscono secondo una priorità d'azione: il giocatore che ha il diritto di agire per primo verrà detto leader, mentre l'altro sarà il follower. La differenza sostanziale di questa fattispecie rispetto ad un gioco non gerarchico consiste nel vantaggio del leader di disporre di maggiori informazioni per la sua scelta strategica, dato che può osservare le mosse del suo avversario.
Per formalizzare questo gioco, supponiamo che agiscano solo due giocatori: utilizzeremo la lettera L per indicare le variabili e funzioni riferite al leader, mentre con F quelle riguardanti il follower. Per semplicità, il gioco sarà ad orizzonte infinito, in modo tale che le strategie d'equilibrio trovate siano indipendenti dal tempo. In aggiunta, prendendo le funzioni utilità e le equazioni

del moto non contenenti esplicitamente il tempo t, esso comparirà solo in $e^{-r^i t}$.
L'evoluzione temporale dello stato è data da

$$\begin{cases} \dot{x}^i(t) = f_i(x(t), u^F(t), u^L(t)), \\ x_i(0) = x_{i0}, \qquad\qquad\qquad con \quad i = F, L \end{cases}$$

dove $x_i(0)$ indica lo stato iniziale e u^F, u^L sono i controlli del follower e del leader, rispettivamente.
Supponiamo che all'inizio del gioco il leader annunci al follower la strategia che utilizzerà durante il gioco ed indichiamo questa politica con $u^L(t) = \phi^L(x(t))$. Il follower, presa questa regola come nota, cercherà di massimizzare il suo payoff

$$J^F = \int_0^{+\infty} e^{-r^F t} F^F(x(t), u^F(t), u^L(t)) dt,$$

dove $r^F > 0$ è il tasso istantaneo di attualizzazione del follower e F^F è la sua funzione utilità. Il controllo ottimo scelto da questo giocatore deve soddisfare l'equazione di Halmiton-Jacobi-Bellman

$$r^F V^F(x) = \max_{u^F \in U^F} \left\{ F^F(x, u^F, \phi^L(x)) + \sum_{i=1}^{n} \frac{\partial V^F(x)}{\partial x_i} f_i(x, u^F, \phi^L(x)) \right\}, \tag{1.12}$$

dove $V^F(x)$ è la funzione valore per il follower. Grazie all'equazione (1.12), il follower otterrà una funzione reazione della forma

$$u^F(t) = \phi^F(x(t), \phi^L(\cdot)).$$

Il leader, conoscendo questa funzione reazione, sceglierà tra tutte le possibili strategie $\phi^L(\cdot)$ quella che massimizza la sua funzione obiettivo

$$J^L = \int_0^{+\infty} e^{-r^L t} F^L(x(t), u^F(t), u^L(t), t) dt,$$

dove $u^F(t) = \phi^F(x(t), \phi^L(\cdot))$. Notiamo che il problema del leader non è un problema di controllo ottimo standard, pertanto il modo più semplice per risolvere questa difficoltà è limitare lo spazio delle possibili strategie $\phi^L(\cdot)$, dato che esse possono essere una funzione qualsiasi. Una possibile restrizione è prendere $\phi^L(\cdot)$ come una funzione affine lineare rispetto alla variabile di stato, cioè del tipo

$$\phi^L(x) = a + bx,$$

dove a e b sono numeri reali, indipendenti dal tempo, dato che consideriamo strategie stazionarie. In questo caso, la funzione reazione del follower sarà della forma

$$u^F(t) = \phi^F(x(t), a, b)$$

e quindi il problema di ottimizzazione del leader consisterà nel trovare gli opportuni valori di a e b, risultando essere un problema risolvibile e ben definito. Dunque, per quanto appena detto, possiamo definire formalmente l'equilibrio di Stackelberg nel seguente modo:

Definizione 6. *Un equilibrio di Stackelberg è una coppia di controlli* $(u^L(\cdot), u^F(\cdot))$ *dove* $u^F(\cdot)$ *è la miglior risposta del follower ad ogni controllo scelto dal leader, mentre* $u^L(\cdot)$ *è l'argomento che massimizza il payoff del leader, una volta conosciuta la miglior risposta del follower.*

Capitolo 2

Il contrasto degli antivaccinisti come gioco differenziale

Ci soffermiamo ora ad analizzare il problema di salute pubblica riguardante i vaccini, in modo da costruire passo per passo un modello di teoria dei giochi. Come spiegato nella parte introduttiva, verranno formulati e studiati due modelli. Presentiamo dapprima una formulazione generale, e specificheremo poi nei prossimi capitoli due diverse formulazioni.
Lo studio svolto per analizzare il problema ha rilevato che negli ultimi anni la copertura vaccinale è calata drasticamente. Si può pensare che la crescita della sottopopolazione non vaccinata sia strettamente condizionata dalla campagna degli antivaccinisti e, per tale motivo, introduciamo il coefficiente $\gamma > 0$ per indicare il tasso netto di persuasione a non vaccinarsi.
Chiamata $x(t) > 0$ la variabile che rappresenta il numero di persone non vaccinate all'istante t, definiamo la funzione $\mathcal{C}(x(t))$ che descrive la crescita dei non vaccinati. Supponiamo quest'ultima differenziabile, la sua definizione sarà precista quando verranno specificate le diverse ipotesi di evoluzione. Infatti proprio $\mathcal{C}(x(t))$ è l'elemento diversificatore che contraddistingue i due modelli presentati in questa tesi.
In questo scenario, due giocatori, che agiscono per obiettivi diversi, decidono di impegnarsi nel contrasto della propaganda no-vax con il fine ultimo di placare la diffusione dei non vaccinati [17]. Da una parte vi è un sistema sanitario interessato a conservare l'immunità della popolazione, dall'altra un'azienda farmaceutica che vuole guadagnare dalla vendita di vaccini di cui è produttrice. Entrambi programmeranno una propria campagna di comunicazione o informazione pro-vaccini in modo da contrastare la propaganda degli antivaccinisti. Lo scopo di tale campagna è sensibilizzare le persone sull'importanza di questo mezzo di prevenzione, mediante la diffusione di informazioni basate su dati scientifici [23]. Tale trattazione presuppone che i

vaccini siano efficaci e vuole determinare, in qualche modo, come una corretta campagna di sensibilizzazione può aiutare a diminuire il numero di non vaccinati.
Indichiamo con $u_s(t)$ e $u_f(t)$ le intensità di comunicazione del sistema sanitario e dell'azienda farmaceutica. Segue dunque che l'equazione differenziale che descrive l'evoluzione dei non vaccinati è

$$\dot{x}(t) = \mathcal{C}(x(t)) - \delta_s u_s(t) - \delta_f u_f(t), \tag{2.1}$$

dove i coefficienti $\delta_s, \delta_f > 0$ indicano l'efficacia della campagna di comunicazione del sistema sanitario e dell'azienda farmaceutica[1].
L'equazione (2.1) costituisce l'equazione del moto del sistema e avrà senso fintantoché $x(t) \geq 0$, dato che rappresenta un numero di persone. Se associamo all'equazione del moto la condizione iniziale dei non vaccinati, otteniamo il problema di Cauchy

$$\begin{cases} \dot{x}(t) = \mathcal{C}(x(t)) - \delta_s u_s(t) - \delta_f u_f(t), \\ x(0) = x_0, \end{cases} \tag{2.2}$$

dove $x_0 > 0$ indica il livello iniziale delle persone non vaccinate.

Spostiamo ora la nostra attenzione sui due giocatori, i quali ambiscono a minimizzare il numero di persone non vaccinate, sebbene con finalità completamente diverse.
Il sistema sanitario vuole minimizzare sia la spesa derivante dallo svolgimento della campagna pro-vaccini sia i costi introdotti dai non vaccinati. Infatti queste persone, non essendosi sottoposti al vaccino, possono contrarre malattie prevenibili provocando, in tal caso, spese di assistenza medica sostenute dal sistema sanitario e nettamente superiori al costo della vaccinazione stessa [18]. Siccome l'interesse è molto forte, assumiamo che entrambi i costi siano quadratici rispetto alle variabili. Pertanto lo scopo finale del sistema sanitario può essere descritto dalla funzione obiettivo

$$J_s = \int_0^{+\infty} e^{-\rho t} \left(\frac{\beta}{2} x^2(t) + \frac{k_s}{2} u_s^2(t) \right) dt, \tag{2.3}$$

dove $k_s > 0$ è il tasso di costo marginale per lo sforzo di comunicazione compiuto del sistema sanitario e $\beta > 0$ il tasso di penalizzazione marginale dovuto dal livello di sottopopolazione non vaccinata, cioè il prezzo unitario

[1] Il modello rappresentato dall'equazione (2.1) è simmetrico a quello presentato in [16], pag 110

che paga il governo per il fatto che vi sia un non vaccinato.
Pertanto possiamo formulare il problema dinamico del sistema sanitario come

$$\min_{u_s \geq 0} \quad J_s = \int_0^{+\infty} e^{-\rho t} \left(\frac{\beta}{2} x^2(t) + \frac{k_s}{2} u_s^2(t) \right) dt \tag{2.4}$$

soggetto a

$$\begin{cases} \dot{x}(t) = \mathcal{C}(x(t)) - \delta_s u_s(t) - \delta_f u_f(t), \\ x(0) = x_0. \end{cases}$$

Passiamo ora ad analizzare il problema dell'azienda farmaceutica. Il suo obiettivo è incrementare il proprio profitto minimizzando sia la perdita di entrate derivante dalle persone che non vogliono vaccinarsi sia i costi dovuti alla campagna di comunicazione. A differenza del problema del sistema sanitario, supponiamo che nel caso delle perdite di entrate, il tasso di costo sia lineare rispetto alla variabile. Questo deriva dal fatto che l'azienda farmaceutica ha solo una perdita di reddito mentre, nel problema del sistema sanitario, lo stato quadratico sottolinea come quest'ultimo abbia maggior interesse a ridurre i costi derivanti dai non vaccinati.
Lo scopo finale dell'azienda farmaceutica può essere dunque rappresentato dalla funzione obiettivo

$$J_f = \int_0^{+\infty} e^{-\rho t} \left(\theta x(t) + \frac{k_f}{2} u_f^2(t) \right) dt, \tag{2.5}$$

dove $\theta > 0$ è l'intensità di perdita marginale di entrate dovuto dalla sottopopolazione contro i vaccini e $k_f > 0$ è il tasso marginale per lo sforzo di comunicazione dell'azienda farmaceutica.
Dunque il problema dinamico dell'azienda farmaceutica è

$$\min_{u_f \geq 0} \quad J_f = \int_0^{+\infty} e^{-\rho t} \left(\theta x(t) + \frac{k_f}{2} u_f^2(t) \right) dt \tag{2.6}$$

soggetto a

$$\begin{cases} \dot{x}(t) = \mathcal{C}(x(t)) - \delta_s u_s(t) - \delta_f u_f(t), \\ x(0) = x_0. \end{cases}$$

Notiamo che, nell'introduzione delle varie funzioni obiettivo, è stato considerato l'orizzonte temporale infinito. Il motivo è che i due giocatori hanno l'obiettivo di analizzare la situazione nel lungo periodo e dunque ipotizziamo che il gioco differenziale sia definito in un intervallo di tempo $[0, +\infty)$.
In aggiunta, anche se i due giocatori agiscono con lo stesso obiettivo finale di ridurre le persone non vaccinate, supponiamo che essi agiscono in maniera competitiva e individuale. Questo significa che il sistema sanitario non

è a conoscenza della strategia di comunicazione dell'azienda farmaceutica e viceversa. Entrambi riescono però ad osservare il livello corrente della sotto-popolazione non vaccinata e questo ci permette di supporre che la struttura di informazioni feedback Markoviano sia a disposizione per entrambi i giocatori. Sotto queste ipotesi, possiamo dire che il gioco differenziale a lungo periodo sarà competitivo non gerarchico giocato alla Nash.

2.1 Osservazioni generali per l'azienda farmaceutica

Il problema dinamico dell'azienda farmaceutica può essere generalizzato mediante la seguente formulazione:

$$\min_{u_f \geq 0} \quad J_f = \int_0^{+\infty} F_f\left(x, u_f\right) dt \tag{2.7}$$

soggetto a

$$\begin{cases} \dot{x}(t) = \mathcal{C}(x(t)) - \delta_s u_s(t) - \delta_f u_f(t), \\ x(0) = x_0, \end{cases}$$

dove la funzione di utilità $F_f\left(\cdot\right)$ non ammette alcuna interazione moltiplicativa tra lo stato $x(t)$ e il controllo $u_f(t)$. In aggiunta supponiamo che sia lineare nella variabile $x(t)$ e quadratica rispetto a $u_f(t)$.
Per semplificare la trattazione, ipotizziamo che $-\frac{k_f}{2}$ sia il coefficiente di $F_f\left(\cdot\right)$ che moltiplica il controllo, implicando che

$$\frac{\partial F_f\left(\cdot\right)}{\partial u_f} = -k_f u_f(t). \tag{2.8}$$

Formalizziamo ora la ricerca dell'equilibrio Markoviano di tale problema, considerando la funzione $u_s(t)$ come un equilibrio fissato del problema.
Come enunciato dal teorema 1.1, scriviamo l'equazione di Hamilton-Jacobi-Bellman del problema

$$\max_{u_f \geq 0} \left\{F_f\left(x, u_f\right) + V_{f_x}(x)(\mathcal{C}(x(t)) - \delta_s u_s(t) - \delta_f u_f)\right\} = \rho V_f(x), \tag{2.9}$$

dove $V_f(x)$ rappresenta la funzione valore associata al problema.
Supponiamo che la funzione (2.9) sia differenziabile con continuità e sappiamo, grazie all'osservazione (2.8), che è strettamente concava rispetto a $u_f(t)$. Pertanto esiste un unico punto di massimo

$$u_f(t) = max\left\{0, -\frac{\delta_f}{k_f} V_{f_x}(x)\right\}. \tag{2.10}$$

Affinché sia $u_f \geq 0$ dovrà essere $V_{f_x}(x) \leq 0 \ \forall x \in [0, +\infty]$, dato che i coefficienti δ_f, k_f sono positivi per definizione.
Per determinare u_f dobbiamo definire la funzione valore, dato che la sua derivata compare in (2.10). Il grado della funzione cercata $V_f(x)$ è strettamente collegato al grado della variabile di stato presente nell'equazione di Hamilton-Jacobi-Bellman. Esso, per come è stata definita l'equazione HJB, sarà il massimo tra il grado di $x(t)$ presente nella funzione utilità e quello che compare nella funzione di crescita dei non vaccinati, cioè

$$grad_x \ \ HJB = \max\left\{grad_x \ F_f\left(\cdot\right), \ grad_x \ \mathcal{C}(x(t))\right\}.$$

Pertanto, una volta fissate le ipotesi per la funzione di crescita, sarà possibile formalizzare la funzione valore e trovare dunque il valore del controllo.
Se supponiamo che la funzione di crescita sia lineare rispetto alla variabile di stato, allora la funzione valore è lineare rispetto a $x(t)$, cioè della forma

$$V_f(x) = Ax(t) + B,$$

con $A, B \in \mathbb{R}$. Questa comporta così il controllo ad essere invariante rispetto a $u_s(t)$ e allo stato dato che sostituendo la funzione valore in u_f otteniamo

$$u_f(t) = max\left\{0, -\frac{\delta_f}{k_f}A\right\}.$$

Osservazioni

Consideriamo ora, sotto l'ipotesi della funzione di crescita lineare rispetto alla variabile di stato, che il gioco sia giocato alla Stackelberg dove il sistema sanitario è il leader, mentre l'azienda farmaceutica è il follower.
In questi giochi il leader, giocatore che ha il diritto di agire per primo, dispone di maggiori informazioni per la sua scelta strategica, dato che può osservare le mosse del suo avversario, detto follower. Pertanto all'inizio del gioco il leader annuncerà la strategia $u_s(t) = \phi_L(x(t))$ che adopererà durante il gioco.
Il follower, consapevole che ad ogni istante del gioco il leader agirà usando il controllo annunciato, cercherà la sua miglior risposta per massimizzare il suo payoff, dove la funzione reazione è del tipo

$$u_f(t) = \phi_F(x(t), \phi_L(\cdot)),$$

cioè dipenderà sia dallo stato che dalla strategia del leader.
Il leader, una volta nota la miglior risposta del follower ad ogni sua politica $\phi_L(\cdot)$, cercherà la strategia ottimale che minimizzi la sua funzione obiettivo.

Per le osservazioni fatte in precedenza, capiamo che la miglior risposta del follower sarà indipendente sia dalla strategia del leader che dallo stato, cioè

$$\frac{\partial \phi_F(x(t), \phi_L(\cdot))}{\partial x} = \frac{\partial \phi_F(x(t), \phi_L(\cdot))}{\partial \phi_L(\cdot)} = 0. \tag{2.11}$$

Perciò in questo caso la miglior risposta del follower coincide effettivamente con il suo controllo ottimo, che risulterà coincidente a quello dello stesso problema giocato in maniera non gerarchica alla Nash. Ciò comporta che anche la miglior risposta del leader sarà il controllo ottimo coincidente con quello del caso in cui agiscono contemporaneamente.
Pertanto, se il controllo del follower risulta invariante rispetto allo stato e al controllo dell'altro giocatore, l'equilibrio alla Stackelberg coincide con quello di Nash. Questo significa che l'indipendenza della strategia del follower dalle due variabili, elimina il vantaggio che dovrebbe avere il leader nei giochi gerarchici, portando le strategie ottimali dei due giocatori ad essere sempre le stesse a prescindere che il gioco sia gerarchico o un semplice problema dove i giocatori agiscono contemporaneamente.

Capitolo 3

Prima proposta dell'evoluzione dei non vaccinati

3.1 Il modello

Il primo modello che presentiamo trae spunto da un attuale lavoro di ricerca svolto dai docenti A.Buratto, L.Grosset e B.Viscolani [1], i quali, una volta rilevato l'attuale problema di sanità pubblica riguardante le vaccinazioni, hanno proposto un modello matematico definito in un intervallo di tempo finito.
Nel capitolo precedente abbiamo esposto una formulazione generale del modello in cui le funzioni obiettivo dei due giocatori coincidono esattamente con quelle proposte nel work paper. La modifica apportata in questo capitolo, rispetto alla loro proposta è stata quella di considerare l'orizzonte temporale infinito. Ripercorriamo, quindi, i loro presupposti riguardanti la crescita dei non vaccinati in modo tale da definire la funzione $\mathcal{C}(x(t))$ e proseguire poi con l'analisi del modello.
Sappiamo che i non vaccinati, contraddistinti dalla variabile $x(t)$, sono fortemente influenzati dalle idee antivacciniste che sostengono l'inefficacia e pericolosità dei vaccini. Supponiamo in questo caso che la crescita dei non vaccinati sia unicamente legata all'intensità della campagna no-vax ottenendo quindi che

$$\mathcal{C}(x(t)) := \gamma x(t),$$

dove $\gamma x(t)$ indica l'intensità della propaganda degli antivaccinisti (ricordiamo che $\gamma > 0$ è il tasso netto di persuasione a non vaccinarsi). Va chiaramente

[1] Docenti del dipartimento di Matematica Tullio Levi-Civita presso l'Università degli Studi di Padova

detto che, se non vi fosse un contrasto da parte dei due giocatori, la sottopopolazione non vaccinata crescerebbe in maniera esponenziale.
Grazie alla definizione della funzione di crescita $\mathcal{C}(x(t))$, otteniamo che il gioco differenziale presentato nel capitolo 2 diventa

$$\min_{u_s \geq 0} \quad J_s = \int_0^{+\infty} e^{-\rho t} \left(\frac{\beta}{2} x^2(t) + \frac{k_s}{2} u_s^2(t) \right) dt \tag{3.1}$$

$$\min_{u_f \geq 0} \quad J_f = \int_0^{+\infty} e^{-\rho t} \left(\theta x(t) + \frac{k_f}{2} u_f^2(t) \right) dt \tag{3.2}$$

soggetto a

$$\begin{cases} \dot{x}(t) = \gamma x(t) - \delta_s u_s(t) - \delta_f u_f(t), \\ x(0) = x_0. \end{cases}$$

Ci soffermiamo ora a cercare le migliori risposte di comunicazione dei due giocatori, in modo tale da calcolare gli equilibri di Nash a tempo infinito.

3.2 Campagna dell'azienda farmaceutica

Se consideriamo l'intensità di comunicazione del sistema sanitario $u_s(t) \geq 0$ come un equilibrio fissato del problema, allora l'azienda farmaceutica risolve un problema di controllo ottimo che consiste in

$$\min_{u_f \geq 0} \int_0^{+\infty} e^{-\rho t} \left(\theta x(t) + \frac{k_f}{2} u_f^2(t) \right) dt \tag{3.3}$$

soggetto a

$$\begin{cases} \dot{x}(t) = \gamma x(t) - \delta_s u_s(t) - \delta_f u_f(t), \\ x(0) = x_0. \end{cases}$$

Il nostro obiettivo è trovare l'equilibrio Markoviano dell'azienda farmaceutica e, per farlo, utilizzeremo il teorema 1.1 considerando la variazione esposta nella sezione dei giochi ad orizzonte temporale infinito. Per prima cosa, ci scriviamo quindi l'equazione di Hamilton-Jacobi-Bellman che nel nostro caso è

$$\max_{w \geq 0} \left\{ -\theta x - \frac{k_f}{2} w^2 + W_x(x)(\gamma x - \delta_s u_s(t) - \delta_f w) \right\} = \rho W(x), \tag{3.4}$$

dove $W(x)$ rappresenta la funzione valore dell'azienda farmaceutica.
Dato che la funzione (3.4) è differenziabile con continuità e strettamente

concava rispetto a w [2], pertanto esiste un unico punto di massimo

$$w^* = max\left\{0, -\frac{\delta_f}{k_f}W_x(x)\right\}, \tag{3.5}$$

ottenuto annullando la derivata parziale rispetto a questa variabile [3].
Vogliamo che $w^* \geq 0$ dal quale segue direttamente che $-\frac{\delta_f}{k_f}W_x(x) \geq 0$. Sapendo che i coefficienti δ_f, k_f sono positivi per definizione, ricaviamo immediatamente che cerchiamo $W_x(x) \leq 0 \ \forall x \in [0, +\infty]$.
Sostituiamo ora la funzione feedback (3.5) nell'equazione di Hamilton-Jacobi-Bellman (3.4) e ricaviamo

$$-\theta x + \frac{\delta_f^2}{2k_f}W_x^2(x) + \gamma x W_x(x) - \delta_s u_s(t) W_x(x) = \rho W(x). \tag{3.6}$$

Dato che lo stato $x(t)$ è presente linearmente nel problema, assumiamo che la funzione valore dell'azienda farmaceutica sia della forma

$$W(x) = Ax + B \tag{3.7}$$

con $A, B \in \mathbb{R}$. Così la funzione feedback (3.5) diventa

$$w^* = max\left\{0, -\frac{\delta_f}{k_f}A\right\}, \tag{3.8}$$

dove $A \leq 0$, derivante dalla condizione $W_x(x) \leq 0 \ \forall x \in [0, +\infty]$.
Per ottenere il valore della strategia dell'azienda farmaceutica, è necessario calcolare il valore dei parametri della funzione valore $W(x)$, anche se in questo caso la conoscenza del fattore B non è fondamentale, dato che non compare in w^*. Come prima cosa sostituiamo in (3.6) la funzione valore (3.7), ottenendo

$$-\theta x + \frac{\delta_f^2}{2k_f}A^2 + \gamma x A - \delta_s u_s(t) A = \rho(Ax + B).$$

Grazie al principio d'identità dei polinomi, ricaviamo immediatamente

$$A = \frac{\theta}{\gamma - \rho}, \tag{3.9}$$

$$B = \frac{\frac{\delta_f^2}{2k_f}A^2 - \delta_s u_s(t) A}{\rho}, \tag{3.10}$$

[2] Si ottiene facilmente che è concava: infatti la derivata seconda di (3.4) rispetto a w è negativa, dato che coincide con $-k_f$ (ricordiamo che $k_f > 0$ per definizione)
[3] La derivata prima di (3.4) è $w \mapsto -k_f w - \delta_f W_x(x)$

dove $\gamma < \rho$, derivante dalla condizione trovata per il fattore A. Così, sostituendo il fattore ricavato, l'intensità di comunicazione ottimale dell'azienda farmaceutica è

$$u_f^* = max\left\{0, -\frac{\delta_f}{k_f}\frac{\theta}{\gamma - \rho}\right\} \tag{3.11}$$

e più precisamente abbiamo che

$$u_f^* = \begin{cases} 0, & se \quad \gamma \geq \rho, \\ -\frac{\delta_f}{k_f}\frac{\theta}{\gamma-\rho}, & se \quad \gamma < \rho. \end{cases}$$

Questo significa che, nel caso in cui il tasso di crescita dei non vaccinati γ sia maggiore rispetto al tasso di attualizzazione rappresentato da ρ, per l'azienda farmaceutica risulta ottimale non agire, dal momento che, in tale situazione, la propaganda antivaccinista sarebbe così virulenta e convicente da indurre una crescita troppo veloce dei non vaccinati per essere contrastata.

É altresì importante osservare che la strategia di comunicazione (3.11) non sia influenzata dalla strategia del sistema sanitario $u_s(t)$, poiché essa, presente nel fattore B, non incide sulla strategia ottima della casa farmaceutica. In aggiunta u_f^* è anche invariante rispetto alla variabile dello stato $x(t)$, pertanto risulta essere un controllo feedback degenere. Grazie a queste considerazioni, possiamo notare che in questo caso la strategia ottimale dell'azienda farmaceutica u_f^*, a prescindere da quale valore assumerà, sarà costante durante tutto il gioco, dato che risulta invariante rispetto dal tempo.

3.3 Campagna del sistema sanitario

Se consideriamo l'intensità di comunicazione dell'azienda farmaceutica $u_f(t) \geq 0$ come un equilibrio fissato del problema, allora il sistema sanitario vuole risolvere un problema di controllo ottimo lineare quadratico [2] che consiste in

$$\min_{u_s \geq 0} \int_0^{+\infty} e^{-\rho t}\left(\frac{\beta}{2}x^2(t) + \frac{k_s}{2}u_s^2(t)\right) dt \tag{3.12}$$

soggetto a

$$\begin{cases} \dot{x}(t) = \gamma x(t) - \delta_s u_s(t) - \delta_f u_f(t), \\ x(0) = x_0. \end{cases}$$

Per trovare la miglior strategia di comunicazione del sistema sanitario, procediamo come prima: utilizziamo l'equazione di Hamilton-Jacobi-Bellman che in questo caso risulta essere

$$\max_{v\geq 0}\left\{-\frac{\beta}{2}x^2-\frac{k_s}{2}v^2+V_x(x)(\gamma x-\delta_s v-\delta_f u_f(t))\right\}=\rho V(x), \qquad (3.13)$$

dove $V(x)$ è la funzione valore del sistema sanitario.
Anche qui la funzione (3.13) è differenziabile con continuità e strettamente concava in v [4]; perciò, annullando la derivata parziale di (3.13) rispetto a questa variabile [5], esiste un unico punto di massimo

$$v^*=max\left\{0,-\frac{\delta_s}{k_s}V_x(x)\right\}. \qquad (3.14)$$

Vogliamo che $v^*\geq 0$, di conseguenza $-\frac{\delta_s}{k_s}V_x(x)\geq 0$. Essendo i coefficienti $\delta_s, k_s>0$ per definizione, allora cerchiamo $V_x(x)\leq 0\ \forall x\in[0,+\infty]$.
Ora sostituiamo la funzione feedback (3.14) nell'equazione di Hamilton-Jacobi-Bellman (3.13) e ricaviamo

$$-\frac{\beta}{2}x^2+\frac{\delta_s^2}{2k_s}V_x^2(x)+\gamma xV_x(x)-\delta_f u_f(t)V_x(x)=\rho V(x). \qquad (3.15)$$

Per il sistema sanitario, la funzione valore è della forma

$$V(x)=\frac{L_2}{2}x^2+L_1x+L_0 \qquad (3.16)$$

con $L_0, L_1, L_2\in\mathbb{R}$, dato che il gioco è lineare quadratico rispetto allo stato $x(t)$. Così segue che la funzione feedback (3.14) diventa

$$v^*=max\left\{0,-\frac{\delta_s}{k_s}\left(L_2x+L_1\right)\right\} \qquad (3.17)$$

con $L_2x(t)+L_1\leq 0\ \forall x\in[0,+\infty]$, derivante dalla condizione $V_x(x)\leq 0$.
Anche qui per ottenere la strategia ottimale del sistema sanitario, è necessario conoscere il valore dei parametri della funzione valore $V(x)$. In questo caso notiamo che la conoscenza del fattore L_0 è irrilevante, dato che non compare in v^*. Pertanto, per conoscere questi fattori, innanzitutto sostituiamo la funzione valore (3.16) in (3.15), ottenendo

$$-\frac{\beta}{2}x^2+\frac{\delta_s^2}{2k_s}(L_2^2x^2+L_1^2+2L_1L_2x)+\gamma x(L_2x+L_1)-\delta_f u_f(t)(L_2x+L_1)=\rho(\frac{L_2}{2}x^2+L_1x+L_0)$$

[4]Si ottiene facilmente che è concava: infatti la derivata seconda di (3.13) rispetto a v è negativa, dato che coincide con $-k_s$ (ricordiamo che $k_s>0$ per definizione)

[5]La derivata prima di (3.13) è $v\mapsto -k_sv-\delta_sV_x(x)$

e, grazie al principio di identità dei polinomi, troviamo

$$L_0 = \frac{\frac{\delta_s^2}{2k_s}L_1^2 - \delta_f u_f(t) L_1}{\rho}, \tag{3.18}$$

$$L_1 = \frac{\delta_f L_2^{\pm}}{\frac{\delta_s^2}{k_s}L_2^{\pm} + \gamma - \rho} u_f(t), \tag{3.19}$$

$$L_2^{\pm} = \frac{-(\gamma - \frac{\rho}{2}) \pm \sqrt{\left(\gamma - \frac{\rho}{2}\right)^2 + \frac{\delta_s^2 \beta}{k_s}}}{\frac{\delta_s^2}{k_s}}, \tag{3.20}$$

dove $L_2^- < 0 < L_2^+$.
Prima di proseguire con la trattazione, dovremo verificare se il denominatore del fattore L_1 è diverso da zero ma, non essendo ancora noto il segno di $L_2^{\pm}$, tratteremo più avanti quest'analisi.
Grazie ai coefficienti appena ottenuti, possiamo dunque dire che l'intensità di comunicazione ottimale del sistema sanitario è

$$u_s^*(x) = \left\{0, -\frac{\delta_s}{k_s}\left(L_2^{\pm}x + L_1\right)\right\} \tag{3.21}$$

più precisamente

$$u_s^*(x) = \begin{cases} 0, & se \quad L_2^{\pm}x > -L_1, \\ -\frac{\delta_s}{k_s}\left(L_2^{\pm}x + L_1\right), & se \quad L_2^{\pm}x \leq -L_1. \end{cases}$$

ed attenderemo lo studio della stabilità per capire con esattezza il valore di $L_2^{\pm}$ e di conseguenza della strategia ottima del sistema sanitario.

Osserviamo come la strategia $u_s^*(x)$, oltre ad essere dipendente dalla variabile di stato $x(t)$, è influenzato dalla decisione assunta dall'azienda farmaceutica, dato che il fattore L_1 dipende da $u_f(t)$. In aggiunta sottolineiamo che, come nel caso dell'azienda farmaceutica, in alcune particolari situazioni anche per il sistema sanitario potrebbe risultare ottimale non svolgere alcuna campagna a favore dei vaccini.

3.4 Analisi dello stato

Riprendiamo il problema di Cauchy

$$\begin{cases} \dot{x}(t) = \gamma x(t) - \delta_s u_s(t) - \delta_f u_f(t), \\ x(0) = x_0. \end{cases}$$

In questa sezione calcoliamo lo stato considerando i vari valori assunti dalle strategie dei due giocatori. Studieremo, dopo aver calcolato il valore steady state, se la soluzione stazionaria è stabile.

Caso $\gamma \geq \rho$

Nel caso in cui $\gamma \geq \rho$, la campagna degli antivaccinisti sarebbe talmente persuasiva ed efficace da convincere molto persone a non vaccinarsi. Questo significa che γ assume valori molto grandi e addirittura superiori rispetto al tasso di attualizzazione indicato con ρ. In questo scenario, l'azienda farmaceutica capisce che le risulterà ottimale non compiere alcuna campagna pro-vaccini, cioè

$$u_f^* = 0. \tag{3.22}$$

Infatti, per quanto possa investire in essa, non riuscirà mai a contrastare la propaganda molto persuasiva dei no-vax e sprecherebbe denaro inutilmente. L'inattività da parte dell'azienda farmaceutica provoca peraltro delle ripercussioni anche sulla strategia del sistema sanitario. Infatti i coefficienti della funzione valore $V(x)$, dipendenti da u_f, diventeranno nulli, ottenendo pertanto che $L_0 = 0$ e $L_1 = 0$. Ne consegue che in questo caso la strategia di comunicazione del sistema sanitario sarà

$$u_s^*(x) = \begin{cases} 0, & se \quad L_2^{\pm} x(t) > 0, \\ -\frac{\delta_s}{k_s} L_2^{\pm} x(t), & se \quad L_2^{\pm} x(t) \leq 0. \end{cases}$$

con $L_2^- < 0 < L_2^+$, unico fattore indipendente da u_f.
Ci fermiamo ora ad analizzare, in base al segno del coefficiente $L_2^{\pm}$, come varia la strategia del sistema sanitario.

- Se $L_2^+ > 0$

$$u_s^*(x) = \begin{cases} 0, & se \quad x(t) > 0, \\ -\frac{\delta_s}{k_s} L_2^+ x(t), & se \quad x(t) \leq 0. \end{cases}$$

  Ricordiamo che lo stato $x(t)$ indica il numero di persone non vaccinate e, per tale ragione, non potrà mai essere negativo. Questo implica che l'intensità di comunicazione da parte del sistema sanitario, per tutta la durata del gioco, è nulla, cioè

$$u_s^*(x) = 0.$$

- Se $L_2^- < 0$

$$u_s^*(x) = \begin{cases} 0, & se \quad x(t) < 0, \\ -\frac{\delta_s}{k_s} L_2^- x(t), & se \quad x(t) \geq 0. \end{cases}$$

Dato che, come sottolineato nel caso precedente, lo stato non può essere negativo, avremo che per l'intera durata del gioco l'intensità ottimale per il sistema sanitario è

$$u_s^*(x) = -\frac{\delta_s}{k_s} L_2^- x(t).$$

Ci preme sottolineare che, d'ora in poi, consideriamo $L_2 = L_2^-$ in modo tale che lo sforzo di comunicazione del sistema sanitario sia non nullo. La ragione di tale assunto è che la tesi ha l'obiettivo finale di studiare il contrasto della sottopopolazione che non vuole vaccinarsi. Perciò, dato che già l'azienda farmaceutica non è incentivata ad agire, è inutile soffermarsi a studiare il caso L_2^+ in cui le strategie ottimali di entrambi i giocatori sono nulle. In tale situazione i non vaccinati, influenzati da una campagna molto persuasiva dei no-vax, cresceranno esponenzialmente e i due giocatori non riusciranno a contrastare tale evoluzione.

Con le osservazioni appena fatte, otteniamo che l'intensità del sistema sanitario deve essere non banale e ne deriva che il problema di Cauchy diventa

$$\begin{cases} \dot{x}(t) = \gamma x(t) + \frac{\delta_s^2}{k_s} L_2^- x(t), \\ x(0) = x_0 \end{cases}$$

e, risolvendo il sistema mediante semplici conti, otteniamo che lo stato vale

$$x(t) = x_0 e^{C_1 t} \qquad \textit{con} \quad C_1 = \frac{\rho}{2} - \sqrt{\left(\gamma - \frac{\rho}{2}\right)^2 + \frac{\delta_s^2 \beta}{k_s}}. \tag{3.23}$$

Essendo un gioco differenziale definito in un intervallo di tempo infinito, studiamo ora le condizioni finali del problema che sono

$$\lim_{t\to\infty} e^{-\rho t} V(x) = 0 \quad e \quad \lim_{t\to\infty} e^{-\rho t} W(x) = 0.$$

Per prima cosa, analizziamo il primo limite: ricordiamo che la funzione valore del sistema sanitario, in questo specifico caso, è $V(x) = \frac{L_2^-}{2} x(t)^2$ e sostituendo lo stato trovato in (3.23), abbiamo che

$$\lim_{t\to\infty} \frac{L_2^-}{2} x_0^2 e^{(2C_1 - \rho)t} = 0 \iff 2C_1 - \rho < 0.$$

Segue immediatamente, sostituendo il valore di C_1, che

$$2C_1 - \rho = -\sqrt{\left(\gamma - \frac{\rho}{2}\right)^2 + \frac{\delta_s^2 \beta}{k_s}}$$

e pertanto $2C_1 - \rho < 0$. Allora le condizioni finali sono sempre soddisfatte per il coefficiente scelto L_2^-.
Passiamo ora ad analizzare il secondo limite: ricordando che funzione valore dell'azienda farmaceutica è $W(x) = Ax(t) + B$ e sostituendo lo stato (3.23), ricaviamo che

$$\lim_{t\to\infty} Ax_0 e^{(C_1-\rho)t} + Be^{-\rho t}.$$

Per verificare se questo limite è nullo, basta studiare solo se $C_1 - \rho < 0$. Infatti, dato che $\rho > 0$ per definizione, il secondo esponenziale tende sempre a 0. Ricaviamo che $C_1 - \rho < 0$ dato che

$$C_1 - \rho = -\frac{\rho}{2} - \sqrt{\left(\gamma - \frac{\rho}{2}\right)^2 + \frac{\delta_s^2\beta}{k_s}}.$$

Pertanto possiamo affermare che anche in questo caso le condizioni finali sono sempre soddisfatte.

Stabilità e soluzione steady state nel caso $\gamma \geq \rho$

Siamo interessati a calcolarci la soluzione steady state, valore importante nell'analisi dato che, una volta raggiunto, da quell'istante in poi questa quantità rimarrà invariata nel tempo. Per trovarlo, basterà annullare l'equazione del moto

$$\dot{x}(t) = \gamma x(t) + \frac{\delta_s^2}{k_s} L_2^- x(t)$$

e ricavare la variabile $x(t)$. Sotto queste ipotesi, si ottiene facilmente che lo stato stazionario sarà

$$x^{SS} = 0.$$

Ora, come visto nella sezione teorica riguardante le soluzioni steady state, risulta fondamentale capire se x^{SS} è asintoticamente stabile. Per prima cosa riscriviamo l'equazione del moto come

$$\dot{x}(t) = C_1 x(t) + D_1 \qquad \textit{con} \quad C_1 = \gamma + \frac{\delta_s^2}{k_s} L_2^- \quad \textit{e} \quad D_1 = 0.$$

Il criterio di stabilità lineare, presentato nel primo capitolo, ci dice che se la derivata rispetto a $x(t)$ è negativa, cioè se $C_1 < 0$, allora la soluzione steady state x^{SS} è asintoticamente stabile. In questo caso abbiamo che

$$C_1 = \frac{\rho}{2} - \sqrt{\left(\gamma - \frac{\rho}{2}\right)^2 + \frac{\delta_s^2\beta}{k_s}}$$

e, svolgendo semplici conti, otteniamo che

$$C_1 < 0 \iff \frac{\delta_s^2 \beta}{k_s} > \gamma(\rho - \gamma).$$

Questa condizione sarà sempre soddisfatta dato che un numero positivo, $\frac{\delta_s^2 \beta}{k_s}$,è sempre maggiore di uno negativo, ottenuto dal prodotto di $\gamma > 0$ e $\gamma \geq \rho$. Pertanto possiamo affermare che:

lo stato stazionario $x^{SS} = 0$ è asintoticamente stabile.

Questo significa che lo stato convergerà a x^{SS} per il tendere del tempo all'infinito. Infatti, essendo $C_1 < 0$, abbiamo che

$$\lim_{t \to +\infty} x_0 e^{C_1 t} = 0 = x^{SS}.$$

Dato che la strategia d'equilibrio del sistema sanitario dipende dallo stato, una volta raggiunto x^{SS}, il controllo stazionario del sistema sanitario sarà

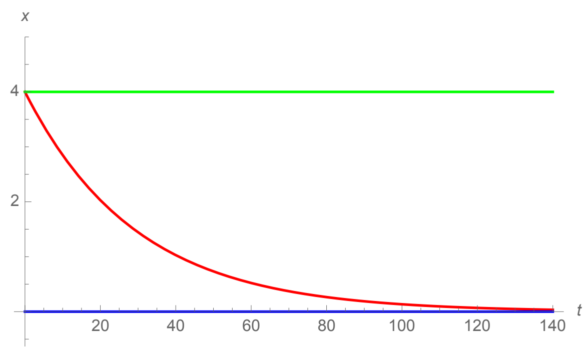
$$u_s^{SS*} = 0.$$

Analisi con Mathematica

Per capire con maggior chiarezza l'analisi appena svolta, riportiamo qui il grafico dello stato $x(t)$. I valori dei parametri assunti sono

x_0	ρ	γ	θ	β	k_s	k_f	δ_s	δ_f
4	0.05	0.08	0.1	0.03	0.06	0.04	0.03	0.02

L'evoluzione dei non vaccinati, che sono stati rappresentanti mediante la variabile $x(t)$, è rappresentata dal grafico seguente. Ricordiamo che in questo caso la loro crescita sarà contrastata solo dalla campagna pro-vaccini del sistema sanitario, dato che all'azienda farmaceutica non conviene agire ($u_f^* = 0$).



dove

- la curva rossa rappresenta l'evoluzione dello stato $x(t)$;
- il valore verde rappresenta il valore iniziale x_0;
- il valore blu rappresenta lo stato stazionario x^{SS}.

Caso $\gamma < \rho$

Nel caso in cui $\gamma < \rho$, la campagna degli antivaccinisti risulta abbastanza debole e inferiore rispetto al tasso di attualizzazione ρ. In questo contesto, l'azienda farmaceutica capisce che compiendo una campagna pro-vaccini potrebbe riuscire a contrastare le idee antivacciniste. Pertanto decide, per tutta la durata del gioco, di svolgere una campagna pro-vaccini con intensità costante pari a

$$u_f^* = -\frac{\delta_f}{k_f}\frac{\theta}{\gamma - \rho}.$$

In questo scenario, l'azienda farmaceutica potrebbe essere aiutata nella "battaglia" contro i no-vax dal sistema sanitario, dato che in alcune situazioni, per tale giocatore potrebbe risultare ottimale non agire. Questo comporta che il problema di Cauchy diventa

$$\begin{cases} \dot{x}(t) = \gamma x(t) - \delta_s u_s(t) + \frac{\delta_f^2}{k_f}\frac{\theta}{\gamma-\rho}, \\ x(0) = x_0, \end{cases} \tag{3.24}$$

dove

$$u_s^*(x) = \begin{cases} 0, & se \quad L_2^{\pm} x(t) > -L_1, \\ -\frac{\delta_s}{k_s}\left(L_2^{\pm} x(t) + L_1\right), & se \quad L_2^{\pm} x(t) \leq -L_1. \end{cases}$$

Per calcolarci lo stato, risolviamo il sistema (3.24) analizzando il comportamento del sistema sanitario.

- **Caso $L_2^{\pm} x(t) > -L_1$.**
  Per il sistema sanitario risulterà ottimale non agire, portando così la strategia di comunicazione ad assumere valore $u_s^*(x) = 0$. Sotto queste ipotesi, il problema di Cauchy (3.24) diventa

$$\begin{cases} \dot{x}(t) = \gamma x(t) + \frac{\delta_f^2}{k_f}\frac{\theta}{\gamma-\rho}, \\ x(0) = x_0 \end{cases}$$

e, risolvendo il sistema, otteniamo che lo stato vale

$$x(t) = \left(x_0 + \frac{\delta_f^2}{k_f} \frac{\theta}{\gamma\,(\gamma - \rho)} \right) e^{\gamma t} - \frac{\delta_f^2}{k_f} \frac{\theta}{\gamma\,(\gamma - \rho)}. \tag{3.25}$$

Essendo un gioco differenziale definito in un intervallo di tempo infinito, studiamo ora le condizioni finali del problema che sono

$$\lim_{t \to \infty} e^{-\rho t} V(x) = 0 \quad e \quad \lim_{t \to \infty} e^{-\rho t} W(x) = 0.$$

Analizziamo il secondo limite: ricordando che la funzione valore dell'azienda farmaceutica è $W(x) = Ax(t) + B$, sostituiamo lo stato (3.25), ottenendo che effettivamente la condizione è soddisfatta:

$$\lim_{t \to \infty} A \left(x_0 + \frac{\delta_f^2}{k_f} \frac{\theta}{\gamma\,(\gamma - \rho)} \right) e^{(\gamma - \rho)t} + \left[B - A \frac{\delta_f^2}{k_f} \frac{\theta}{\gamma\,(\gamma - \rho)} \right] e^{-\rho t} = 0.$$

Infatti, dato che $\rho > 0$ per definizione e in questo caso $\gamma < \rho$, questo porta il limite degli esponenti a 0.
Pertanto la condizione finale sarà sempre soddisfatta e, in questo specifico caso, non ci restituisce nessuna condizione sul coefficiente $L_2^{\pm}$.
Per semplicità ci soffermiamo a studiare solo questo limite, consapevoli che andrebbe verificato anche quello con la funzione valore $V(x)$ ma preferiamo lasciarlo in sospeso in modo da proseguire con la trattazione.

- **Caso $L_2^{\pm} x(t) \leq -L_1$.**
  Per il sistema sanitario risulterà ottimale compiere una campagna pro-vaccini con intensità $u_s^*(t) = -\frac{\delta_s}{k_s}(L_2^{\pm} x(t) + L_1)$. Sotto queste ipotesi, il problema di Cauchy (3.24) diventa

$$\begin{cases} \dot{x}(t) = \gamma x(t) + \frac{\delta_s^2}{k_s}(L_2^{\pm} x(t) + L_1) + \frac{\delta_f^2}{k_f} \frac{\theta}{\gamma - \rho}, \\ x(0) = x_0 \end{cases}$$

e, risolvendo il sistema con semplici passaggi, otteniamo che lo stato vale

$$x(t) = \left(x_0 + \frac{D_2}{C_2} \right) e^{C_2 t} - \frac{D_2}{C_2} \tag{3.26}$$

con

$$C_2 = \gamma + \frac{\delta_s^2}{k_s} L_2^{\pm} \quad e \quad D_2 = \frac{\delta_f^2}{k_f} \frac{\theta}{\gamma - \rho} + \frac{\delta_s^2}{k_s} L_1.$$

Essendo un gioco differenziale definito in un intervallo di tempo infinito dobbiamo verificare le condizioni finali del problema che sono

$$\lim_{t\to\infty} e^{-\rho t}V(x) = 0 \quad e \quad \lim_{t\to\infty} e^{-\rho t}W(x) = 0.$$

Innanzitutto analizziamo il primo limite: ricordiamo che la funzione valore del sistema sanitario è $V(x) = \frac{L_2^{\pm}}{2}x(t)^2 + L_1x(t) + L_0$. Sostituendo lo stato (3.26), dobbiamo verificare se il limite

$$\lim_{t\to\infty}\left(\frac{L_2^{\pm}}{2}\left(x_0+\frac{D_2}{C_2}\right)^2 e^{t(2C_2-\rho)} + \left[L_1\left(x_0+\frac{D_2}{C_2}\right) - L_2^{\pm}\left(x_0+\frac{D_2}{C_2}\right)\frac{D_2}{C_2}\right]e^{t(C_2-\rho)} + \right.$$
$$\left. + \left[\frac{L_2^{\pm}}{2}\frac{D_2^2}{C_2^2} - L_1\frac{D_2}{C_2} + L_0\right]e^{-\rho t}\right)$$

è uguale a zero.
Ricaviamo immediatamente che

$$\lim_{t\to\infty} e^{-\rho t} = 0 \quad \textit{dato che} \quad \rho > 0$$

perciò dobbiamo verificare se $2C_2 - \rho < 0$ e $C_2 - \rho < 0$ in modo tale che

$$\lim_{t\to\infty} e^{(2C_2-\rho)t} = 0 \quad e \quad \lim_{t\to\infty} e^{(C_2-\rho)t} = 0$$

dove $C_2 = \gamma + \frac{\delta_s^2}{k_s}L_2^{\pm}$ e $L_2^{\pm} = \frac{-(\gamma-\frac{\rho}{2})\pm\sqrt{\left(\gamma-\frac{\rho}{2}\right)^2+\frac{\delta_s^2\beta}{k_s}}}{\frac{\delta_s^2}{k_s}}$.
In primo luogo analizziamo

$$2C_2 - \rho = \pm 2\sqrt{\left(\gamma-\frac{\rho}{2}\right)^2 + \frac{\delta_s^2\beta}{k_s}}$$

e ricaviamo che essa è negativa solo per L_2^-. Usando questo parametro, la condizione $C_2 - \rho < 0$ è soddisfatta dato che

$$C_2 - \rho = -\frac{\rho}{2} - \sqrt{\left(\gamma-\frac{\rho}{2}\right)^2 + \frac{\delta_s^2\beta}{k_s}}$$

risulta sempre negativa.
Dall'analisi appena svolta, possiamo quindi concludere che la condizione finale

$$\lim_{t\to\infty} e^{-\rho t}V(x) = 0 \ \textit{è soddisfatta solo se} \ \ L_2 = L_2^-.$$

Per completezza verifichiamo se, con il coefficiente appena trovato, è soddisfatto anche

$$\lim_{t\to\infty} e^{-\rho t} W(x) = 0.$$

Sostituendo la funzione valore $W(x) = Ax(t) + B$ e lo stato (3.26), ricaviamo subito che

$$\lim_{t\to\infty} \left[A\left(x_0 + \frac{D_2}{C_2}\right) e^{(C_2-\rho)t} + \left(B - \frac{AD_2}{C_2}\right) e^{-\rho t} \right] = 0.$$

Il suo risultato deriva immediatamente dato che lo studio da svolgere per questo limite coincide esattamente con quello precedente.

Lo studio delle condizioni finale ha fatto emergere che esse saranno soddisfatte solo se il segno del coefficiente L_2 è negativo. Pertanto, d'ora in avanti, considereremo

$$L_2 = L_2^-.$$

Grazie a questo valore, possiamo ora verificare se il denominatore di L_1 è diverso da zero. Esso corrisponde a

$$\frac{\delta_s^2}{k_s} L_2^- + \gamma - \rho \neq 0 \Rightarrow \sqrt{\left(\gamma - \frac{\rho}{2}\right)^2 + \frac{\delta_s^2 \beta}{k_s}} \neq -\frac{\rho}{2}$$

ma questa condizione è sempre soddisfatta dato che il primo membro è sempre positivo e $\rho > 0$.

Instabilità e soluzione steady state nel caso $\gamma < \rho$

Siamo interessati a calcolare la soluzione steady state, valore importante nell'analisi dato che, una volta raggiunto, da quell'istante in poi questa quantità rimarrà invariato nel tempo. Per trovarlo, basterà annullare l'equazione del moto

$$\dot{x}(t) = \gamma x(t) - \delta_s u_s(t) + \frac{\delta_f^2}{k_f} \frac{\theta}{\gamma - \rho},$$

dove

$$u_s^*(x) = \begin{cases} 0, & se \quad x(t) < \underline{x}, \\ -\frac{\delta_s}{k_s}\left(L_2^- x(t) + L_1\right), & se \quad x(t) \geq \underline{x} \end{cases}$$

con

$$\underline{x} = -\frac{L_1}{L_2^-} = \frac{\frac{\delta_f^2}{k_f}\frac{\theta}{\rho-\gamma}}{\frac{\rho}{2} + \sqrt{\left(\gamma - \frac{\rho}{2}\right)^2 + \frac{\delta_s^2 \beta}{k_s}}} > 0.$$

Suddividiamo pertanto la trattazione analizzando i vari valori che può assumere la strategia di comunicazione del sistema sanitario.

- **Caso** $x(t) < \underline{x}$.
Dato che per il sistema sanitario risulta ottimo non agire, cioè $u_s^*(x) = 0$, il solo sforzo dell'azienda farmaceutica cercherà di contrastare l'evoluzione dei non vaccinati. Pertanto l'equazione del moto sarà

$$\dot{x}(t) = \gamma x(t) + \frac{\delta_f^2}{k_f} \frac{\theta}{\gamma - \rho}. \tag{3.27}$$

Come già anticipato, per trovare lo stato stazionario basta annullare l'equazione (3.27) e isolare la variabile $x(t)$. Con semplici conti, otteniamo che la soluzione steady state è

$$x^{SS_0} = -\frac{\delta_f^2}{k_f} \frac{\theta}{\gamma\left(\gamma - \rho\right)},$$

dove $x^{SS_0} > 0$, data la sua dipendenza da coefficienti positivi e da $\gamma < \rho$.
Come visto nella sezione teorica riguardante le soluzioni steady state, risulta fondamentale capire se x^{SS_0} è asintoticamente stabile. Grazie al criterio di stabilità lineare presentato nel primo capitolo, sappiamo che in questo caso la soluzione steady state x^{SS_0} è instabile, dato che la derivata di (3.27) rispetto a $x(t)$ è positiva, cioè $\gamma > 0$. Pertanto possiamo affermare che:

Teorema 3.1. *Lo stato stazionario x^{SS_0} è positivo e instabile.*

Più precisamente, se $x_0 < \underline{x}$, si osserva che

$$\lim_{t \to +\infty} x(t) = \lim_{t \to +\infty} \left(x_0 - x^{SS_0}\right) e^{\gamma t} + x^{SS_0} = -\infty.$$

Tale risultato segue dal fatto che $\gamma > 0$ per definizione e $x^{SS_0} > \underline{x} > x_0$ dato che

$$x^{SS_0} - \underline{x} = \frac{\frac{\delta_f^2}{k_f} \frac{\theta}{\rho - \gamma} L_2^+}{\gamma \left(\frac{\rho}{2} + \sqrt{\left(\gamma - \frac{\rho}{2}\right)^2 + \frac{\delta_s^2 \beta}{k_s}} \right)} > 0 \tag{3.28}$$

essendo composto da fattori positivi.

- **Caso** $x(t) \geq \underline{x}$.
In questo scenario entrambi i giocatori sono incentivati a contrastare l'evoluzione della sottopopolazione non vaccinata, dove il sistema sanitario agisce con intensità $u_s^*(t) = -\frac{\delta_s}{k_s}(L_2^- x(t) + L_1)$. Ricaviamo così

che l'equazione del moto è

$$\dot{x}(t) = C_2 x(t) + D_2 \qquad \textit{con} \;\; C_2 = \gamma + \frac{\delta_s^2}{k_s} L_2^- \;\; \textit{e} \;\; D_2 = \frac{\delta_s^2}{k_s} L_1 + \frac{\delta_f^2}{k_f} \frac{\theta}{\gamma - \rho}. \tag{3.29}$$

Per calcolarci il valore steady state, procediamo al solito modo e con semplici conti, otteniamo che

$$x^{SS_1} = \frac{\frac{\delta_f^2}{k_f}\theta}{-\gamma^2 + \rho\gamma - \frac{\delta_s^2 \beta}{k_s}}. \tag{3.30}$$

Il segno di questo valore dipenderà unicamente dal denominatore, essendo il numeratore sempre positivo. La formulazione del modello prevede la non negatività dello stato dato che esso rappresenta il numero di persone non vaccinate. Imponendo allo stato stazionario questa condizione sufficiente di ammissibilità, otteniamo che

$$x^{SS_1} > 0 \iff \frac{\delta_s^2 \beta}{k_s} < \gamma(\rho - \gamma).$$

Fissando questa ipotesi e utilizzando il criterio di stabilità lineare presentato nel primo capitolo, otteniamo immediatamente che la derivata di (3.29) rispetto a $x(t)$ è positiva, cioè $C_2 > 0$, comportando la soluzione steady state x^{SS_1} ad essere instabile. Pertanto

Teorema 3.2. ***(Condizione sufficiente di ammissibilità)***

Se $\rho > \gamma$ e $u_s^* \neq 0$

$$0 < \frac{\delta_s^2}{k_s} < \frac{\gamma(\rho - \gamma)}{\beta} \tag{3.31}$$

allora lo stato stazionario x^{SS_1} è positivo.

Lo studio svolto ha rilevato che, a prescindere dal comportamento del sistema sanitario, gli stati stazionari risultano sempre instabili.

3.5 Conclusioni sul modello

Questa prima proposta sull'evoluzione dei non vaccinati ipotizza che la funzione di crescita dei non vaccinati sia

$$\mathcal{C}(x(t)) := \gamma x(t).$$

L'analisi effettuata evidenzia due grosse problematiche legate al modello presentato: esso risulta instabile e pertanto porta il sistema a divergere diventando così incontrollabile. In secondo luogo, il modello non descrive la realtà in quanto può comportare che il livello dei non vaccinati sia negativo, situazione inapplicabile nella realtà. Pertanto è opportuno ricercare un nuovo modello per descrivere il problema riguardante le vaccinazioni; una formulazione alternativa può riguardare una diversa funzione di crescita dei non vaccinati. Essa verrà presentata e sviluppata nel capitolo successivo.

Capitolo 4

Nuova proposta dell'evoluzione dei non vaccinati

4.1 Il modello

L'analisi svolta nel capitolo precedente ha rilevato che il modello presentato porta a risultati instabili. Cerchiamo ora di definire una nuova funzione di crescita $\mathcal{C}(x(t))$ cercando di capire se, sotto altre ipotesi, il modello risulta stabile. Ricordiamo, prima di immergerci nella trattazione, che la variabile $x(t)$ contraddistingue il numero di persone non vaccinate.
Supponiamo che al momento t nascano mediamente $b > 0$ persone. Ovviamente, essendo appena nate, queste risultano essere non vaccinate e potranno essere sottoposti al vaccino oppure no. Indicheremo con $(1-\gamma)x(t)$ i nuovi vaccinati, mentre con $\gamma x(t)$ i bambini che non si sottoporranno ad alcuna vaccinazione, a causa delle campagne antivaccinazioni. Chiaramente i parametri introdotti $1-\gamma$ e γ devono essere positivi e ne deriva immediatamente la condizione che $0 < \gamma < 1$. Ricordiamo che γ è il tasso netto di persuasione a non vaccinarsi e pertanto $\gamma x(t)$ rappresenta ancora l'intensità di comunicazione da parte degli antivaccinisti per sostenere la pericolosità e l'inefficacia dei vaccini.
Supponiamo che, all'istante successivo t+1, nasceranno nuovamente b persone. Se andiamo a considerare il numero di non vaccinati all'istante $t+1$, a differenza di prima, vi saranno la presenza dei b neonati e in aggiunta i nati del tempo t che non si sono vaccinati, rappresentati da $\gamma x(t)$. Ricaviamo così che le persone non vaccinate all'istante t+1 saranno

$$x(t+1) = b + \gamma x(t).$$

Utilizzando l'approssimazione $x(t+1) - x(t) \sim \dot{x}(t)$ la funzione di crescita dei non vaccinati diventa

$$\mathcal{C}(x(t)) := b - (1-\gamma)x(t).$$

É lecito soffermarsi a confrontare le due funzioni di crescita introdotte, dato che esse rappresentano l'elemento diversificatore dei due modelli proposti. Consideriamo, solo per un attimo, che l'evoluzione dei non vaccinati dipenda solo da $\mathcal{C}(x(t))$ e non vi sia il contrasto del sistema sanitario e dell'azienda farmaceutica.
In tal modo, sotto le ipotesi in cui la funzione di crescita è $\mathcal{C}(x(t)) = \gamma x(t)$, lo stato $x(t)$ è crescente ovvero non si considera il fatto che alcuni non vaccinati possano in qualche istante vaccinarsi. Nel caso in cui $\mathcal{C}(x(t)) = b-(1-\gamma)x(t)$ lo stato risulta crescente se $x_0 < \frac{b}{1-\gamma}$, mentre è decrescente per $x_0 > \frac{b}{1-\gamma}$. A differenza della precedente funzione di crescita, sotto tali ipotesi si contempla il caso in cui qualche non vaccinato possa decidere di vaccinarsi.
Per completezza, riportiamo un esempio numerico focalizzando la nostra attenzione sulle due funzioni di crescita definite, ricordando che trascuriamo l'azione dei due attori. Fissando $\gamma = 0.8$ e considerando due valori specifici di b, otteniamo che:

Caso $b = 0.6$ **Caso** $b = 10$

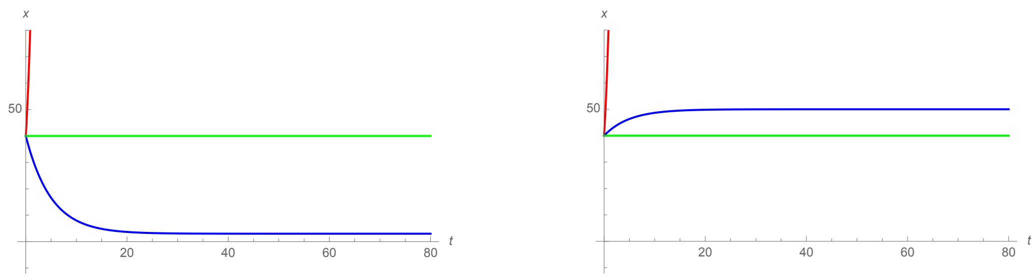


Figura 4.1: Le due funzioni di crescita presentate a confronto

dove

- la curva rossa rappresenta l'evoluzione dei non vaccinati sotto l'ipotesi di crescita del capitolo 3 $\mathcal{C}(x(t)) = \gamma x(t)$;
- la curva blu rappresenta l'evoluzione dei non vaccinati sotto l'ipotesi di crescita presentata in questo capitolo $\mathcal{C}(x(t)) = b - (1-\gamma)x(t)$;
- il valore verde rappresenta il valore iniziale della popolazione non vaccinata $x_0 = 40$.

Notiamo in aggiunta che nel caso in cui la funzione di crescita sia $\mathcal{C}(x(t)) = b - (1-\gamma)x(t)$ i non vaccinati senza nessun costrasto tenderanno a stabilizzarsi nel valore $\frac{b}{1-\gamma}$, mentre nel caso di $\mathcal{C}(x(t)) = \gamma x(t)$ la popolazione tenderà ad esplodere diventando incontrabile. La funzione di crescita presentata in questo capitolo, può portare la popolazione non vaccinata, anche se non contrastata, a decrescere. Tale fatto può essere interpretato come una saturazione della popolazione non vaccinata: l'efficacia della propaganda antivaccinista è strettamente legata al numero di nascite. Pertanto se l'intensità delle idee no-vax è molto alta rispetto al numero di nascite, potrebbe in qualche modo risultare sfavorevole la loro azione e portare in qualche modo ad un aumento dei vaccinati, ottenendo un risultato contrario rispetto a quello desiderato. Anche in tale situazione il sistema sanitario e l'azienda farmaceutica sono incentivate ad agire per ridurre, ancora di più, il livello di non vaccinati.

Ritorniamo ora ad analizzare il modello e, grazie alla definizione della funzione di crescita $\mathcal{C}(x(t))$, il gioco differenziale presentato nel capitolo 2 diventa

$$\min_{u_s \geq 0} \quad J_s = \int_0^{+\infty} e^{-\rho t} \left(\frac{\beta}{2} x^2(t) + \frac{k_s}{2} u_s^2(t) \right) dt \tag{4.1}$$

$$\min_{u_f \geq 0} \quad J_f = \int_0^{+\infty} e^{-\rho t} \left(\theta x(t) + \frac{k_f}{2} u_f^2(t) \right) dt \tag{4.2}$$

soggetto a

$$\begin{cases} \dot{x}(t) = b - (1-\gamma)x(t) - \delta_s u_s(t) - \delta_f u_f(t), \\ x(0) = x_0. \end{cases}$$

Ci soffermiamo ora a cercare le migliori risposte dei due giocatori, in modo tale da calcolare gli equilibri di Nash a tempo infinito.

4.2 Campagna dell'azienda farmaceutica

Se consideriamo l'intensità di comunicazione del sistema sanitario $u_s(t) \geq 0$ come un equilibrio fissato del problema, allora l'azienda farmaceutica risolve un problema di controllo ottimo che consiste in

$$\min_{u_f \geq 0} \quad J_f = \int_0^{+\infty} e^{-\rho t} \left(\theta x(t) + \frac{k_f}{2} u_f^2(t) \right) dt \tag{4.3}$$

soggetto a

$$\begin{cases} \dot{x}(t) = b - (1-\gamma)x(t) - \delta_s u_s(t) - \delta_f u_f(t), \\ x(0) = x_0. \end{cases}$$

Il nostro obiettivo è trovare l'equilibrio Markoviano dell'azienda farmaceutica e, per farlo, utilizzeremo il teorema 1.1 considerando la variazione esposta nella sezione dei giochi ad orizzonte temporale infinito. Per prima cosa, ci scriviamo quindi l'equazione di Hamilton-Jacobi-Bellman che nel nostro caso è

$$\max_{w\geq 0}\left\{-\theta x-\frac{k_f}{2}w^2+W_x(x)(b-(1-\gamma)x-\delta_s u_s(t)-\delta_f w)\right\}=\rho W(x), \tag{4.4}$$

dove $W(x)$ rappresenta la funzione valore dell'azienda farmaceutica.
Dato che la funzione (4.4) è differenziabile con continuità e strettamente concava rispetto a w[1], pertanto esiste un unico punto di massimo

$$w^*=max\left\{0,-\frac{\delta_f}{k_f}W_x(x)\right\} \tag{4.5}$$

ottenuto annullando la derivata parziale rispetto a questa variabile[2]. Vogliamo che $w^*\geq 0$ dal quale segue direttamente che $-\frac{\delta_f}{k_f}W_x(x)\geq 0$. Sapendo che i coefficienti δ_f, k_f sono positivi per definizione, ricaviamo immediatamente che cerchiamo $W_x(x)\leq 0\ \forall x\in[0,+\infty]$.
Sostituiamo ora la funzione feedback (4.5) nell'equazione di Hamilton-Jacobi-Bellman (4.4) e ricaviamo

$$-\theta x+\frac{\delta_f^2}{2k_f}W_x^2(x)+bW_x(x)-(1-\gamma)xW_x(x)-\delta_s u_s(t)W_x(x)=\rho W(x). \tag{4.6}$$

Dato che lo stato $x(t)$ è presente linearmente nel problema, assumiamo che la funzione valore dell'azienda farmaceutica sia della forma

$$W(x)=Ax+B \tag{4.7}$$

con $A,B\in\mathbb{R}$. Così la funzione feedback (4.5) diventa

$$w^*=max\left\{0,-\frac{\delta_f}{k_f}A\right\}, \tag{4.8}$$

dove $A\leq 0$, derivante dalla condizione $W_x(x)\leq 0\ \forall x\in[0,+\infty]$.
Per ottenere la strategia ottima dell'azienda farmaceutica, è necessario calcolare il valore dei parametri della funzione valore $W(x)$, anche se in questo

[1] Si ottiene facilmente che è concava: infatti a derivata seconda di (4.4) rispetto a w è negativa, dato che coincide con $-k_f$ (ricordiamo che $k_f>0$ per definizione)

[2] La derivata prima (4.4) è $w\mapsto -k_f w-\delta_f W_x(x)$

caso la conoscenza del fattore B non è fondamentale, dato che non compare in w^*. Come prima cosa sostituiamo in (4.6) la funzione valore (4.7), ottenendo

$$-\theta x + \frac{\delta_f^2}{2k_f}A^2 + bA - (1-\gamma)Ax - A\delta_s u_s(t) = \rho(Ax + B).$$

Grazie al principio d'identità dei polinomi, ricaviamo immediatamente

$$A = \frac{\theta}{\gamma - 1 - \rho}, \tag{4.9}$$

$$B = \frac{\frac{\delta_f^2}{2k_f}A^2 + bA - A\delta_s u_s(t)}{\rho}. \tag{4.10}$$

Analizziamo con attenzione il segno di A, dato che deve essere negativo per le condizioni trovate su $W_x(x)$. Il suo numeratore è sempre positivo, essendo $\theta > 0$ per definizione, mentre il denominatore è somma di due numeri negativi, dato che $\gamma < 1$ e $\rho > 0$. Pertanto otteniamo che $A \leq 0$ sempre e ciò implica che la strategia di comunicazione ottimale dell'azienda farmaceutica, per tutta la durata del gioco, sarà

$$u_f^* = \frac{\delta_f}{k_f}\frac{\theta}{\rho + 1 - \gamma}. \tag{4.11}$$

Dobbiamo verificare che il denominatore sia sempre diverso da zero, cioè $\gamma - 1 \neq \rho$, ma è sempre soddisfatta dato che $\gamma - 1 < 0 < \rho$.

È altresì importante osservare che la strategia (4.11) non sia influenzata dalla strategia del sistema sanitario $u_s(t)$, poiché essa, presente nel fattore B, non incide sulla strategia ottima della casa farmaceutica. In aggiunta u_f^* è anche invariante rispetto alla variabile dello stato $x(t)$, pertanto risulta essere un controllo feedback degenere. Grazie a queste considerazioni, possiamo notare che in questo caso la strategia ottimale dell'azienda farmaceutica u_f^* sarà costante durante tutto il gioco, dato che risulta invariante rispetto al tempo.

4.3 Campagna del sistema sanitario

Se consideriamo l'intensità di comunicazione dell'azienda farmaceutica $u_f(t) \geq 0$ come un equilibrio fissato del problema, allora il sistema sanitario vuole risolvere un problema di controllo ottimo lineare quadratico [2] che consiste in

$$\min_{u_s \geq 0} \quad \int_0^{+\infty} e^{-\rho t}\left(\frac{\beta}{2}x^2(t) + \frac{k_s}{2}u_s^2(t)\right)dt \tag{4.12}$$

soggetto a

$$\begin{cases} \dot{x}(t) = b - (1-\gamma)x(t) - \delta_s u_s(t) - \delta_f u_f(t), \\ x(0) = x_0. \end{cases}$$

Per trovare la miglior strategia di comunicazione del sistema sanitario, procediamo come prima: utilizziamo l'equazione di Hamilton-Jacobi-Bellman che in questo caso risulta essere

$$\max_{v\geq 0} \left\{ -\frac{\beta}{2}x^2 - \frac{k_s}{2}v^2 + V_x(x)(b-(1-\gamma)x - \delta_s v - \delta_f u_f(t)) \right\} = \rho V(x), \tag{4.13}$$

dove $V(x)$ è la funzione valore del sistema sanitario.
Anche qui la funzione (4.13) è differenziabile con continuità e strettamente concava in v [3]; perciò, annullando la derivata parziale di (4.13) rispetto a questa varabile [4], esiste un unico punto di massimo

$$v^* = max\left\{0, -\frac{\delta_s}{k_s}V_x(x)\right\}. \tag{4.14}$$

Vogliamo che $v^* \geq 0$ e di conseguenza $-\frac{\delta_s}{k_s}V_x(x) \geq 0$. Essendo i coefficienti $\delta_s, k_s > 0$ per definizione, allora cerchiamo $V_x(x) \leq 0$ $\forall x \in [0, +\infty]$.
Ora sostituiamo la funzione feedback (4.14) nell'equazione di Hamilton-Jacobi-Bellman (4.13) e ricaviamo

$$-\frac{\beta}{2}x^2 + \frac{\delta_s^2}{2k_s}V_x^2(x) + bV_x(x) - (1-\gamma)xV_x(x) - \delta_f u_f(t)V_x(x) = \rho V(x). \tag{4.15}$$

Per il sistema sanitario, assumiamo che la funzione valore sia della forma

$$V(x) = \frac{L_2}{2}x^2 + L_1 x + L_0 \tag{4.16}$$

con $L_0, L_1, L_2 \in \mathbb{R}$, dato che il gioco è lineare quadratico rispetto allo stato $x(t)$. Così segue che la funzione feedback (4.14) diventa

$$v^*(x) = \left\{0, -\frac{\delta_s}{k_s}\left(L_2 x + L_1\right)\right\} \tag{4.17}$$

con $L_2 x + L_1 \leq 0$ $\forall x \in [0, +\infty]$, derivante dalla condizione $V_x(x) \leq 0$.
Per ottenere la strategia ottimale del sistema sanitario, è necessario conoscere il valore dei parametri della funzione valore $V(x)$. In questo caso notiamo

[3]Si ottiene facilmente che è concava: infatti a derivata seconda di (4.13) rispetto a v è negativa, dato che coincide con $-k_s$ (ricordiamo che $k_s > 0$ per definizione)

[4]La derivata prima di (4.13) è $v \mapsto -k_s v - \delta_s V_x(x)$

che la conoscenza del fattore L_0 è irrilevante, dato che non compare in $v^*(x)$. Pertanto, per conoscere questi fattori, innanzitutto sostituiamo la funzione valore (4.16) in (4.15), ottenendo

$$-\frac{\beta}{2}x^2 + \frac{\delta_s^2}{2k_s}(L_2^2 x^2 + L_1^2 + 2L_1L_2x) + b(L_2x + L_1) +$$

$$+(\gamma - 1)x(L_2x + L_1) - \delta_f u_f(t)(L_2x + L_1) = \rho\left(\frac{L_2}{2}x^2 + L_1x + L_0\right)$$

e, grazie al principio di identità dei polinomi, troviamo

$$L_0 = \frac{(\frac{\delta_s^2}{2k_s}L_1 + b - \delta_f u_f)L_1}{\rho}, \tag{4.18}$$

$$L_1 = \frac{(\delta_f u_f(t) - b)L_2^\pm}{\frac{\delta_s^2}{k_s}L_2^\pm + \gamma - 1 - \rho}, \tag{4.19}$$

$$L_2^\pm = \frac{-(\gamma - 1 - \frac{\rho}{2}) \pm \sqrt{\left(\gamma - 1 - \frac{\rho}{2}\right)^2 + \frac{\delta_s^2\beta}{k_s}}}{\frac{\delta_s^2}{k_s}} \tag{4.20}$$

con $L_2^- < 0 < L_2^+$.
Prima di proseguire con la trattazione, dovremo verificare se il denominatore del fattore L_1 è diverso da zero ma, non essendo ancora noto il segno di L_2, tratteremo più avanti quest'analisi.
Grazie ai coefficienti appena ottenuti, possiamo dunque dire che l'intensità di comunicazione ottimale del sistema sanitario è

$$u_s^*(x) = \left\{0, -\frac{\delta_s}{k_s}\left(L_2^\pm x + L_1\right)\right\}, \tag{4.21}$$

più precisamente

$$u_s^*(x) = \begin{cases} 0, & se \quad L_2^\pm x(t) > -L_1, \\ -\frac{\delta_s}{k_s}\left(L_2^\pm x(t) + L_1\right), & se \quad L_2^\pm x(t) \leq -L_1. \end{cases}$$

ed attenderemo lo studio della stabilità per capire con esattezza il valore di L_2 e di conseguenza della strategia ottima del sistema sanitario.

Osserviamo come la strategia $u_s^*(x)$, oltre ad essere dipendente dalla variabile di stato $x(t)$, è influenzato dalla decisione assunta dall'azienda farmaceutica, dato che il fattore L_1 dipende da $u_f(t)$. In aggiunta sottolineiamo che, come nel caso dell'azienda farmaceutica, in alcune particolari situazioni anche per il sistema sanitario potrebbe risultare ottimale non svolgere alcuna campagna a favore dei vaccini.

4.4 Analisi dello stato

L'analisi fin qui svolta ha evidenziato che l'azienda farmaceutica è incentivata a svolgere, per tutta la durata del gioco, una campagna pro-vaccini per contrastare la propaganda antivaccinista. Per essere più precisi, agirà con intensità costante

$$u_f^* = \frac{\delta_f}{k_f}\frac{\theta}{\rho+1-\gamma}.$$

Questo giocatore potrebbe essere aiutato nella battaglia contro i no-vax dal sistema sanitario, dato che in certe situazioni per tale giocatore potrebbe risultare ottimale non agire.
In questa sezione, supponiamo che la strategia del sistema sanitario sia non banale, cioè $u_s^*(x) \neq 0$ e andremo in un secondo momento a verificare che è effettivamente l'unica soluzione possibile per il problema descritto.
Sotto queste ipotesi, l'intensità ottimale del sistema sanitario è

$$u_s^*(x) = -\frac{\delta_s}{k_s}\left(L_2^{\pm}x(t) + L_1\right)$$

e, sostituendo le strategie dei due giocatori non banali, otteniamo che il problema di Cauchy è

$$\begin{cases} \dot{x}(t) = b - (1-\gamma)x(t) + \frac{\delta_s^2}{k_s}(L_2^{\pm}x(t) + L_1) + \frac{\delta_f^2}{k_f}\frac{\theta}{\gamma-1-\rho}, \\ x(0) = x_0. \end{cases} \tag{4.22}$$

Risolvendo il sistema, otteniamo con semplici conti che lo stato vale

$$x(t) = \left(x_0 + \frac{D}{C}\right)e^{Ct} - \frac{D}{C} \tag{4.23}$$

con

$$C = \frac{\delta_s^2}{k_s}L_2^{\pm} - (1-\gamma) \qquad D = b + \frac{\delta_f^2}{k_f}\frac{\theta}{\gamma-1-\rho} + \frac{\delta_s^2}{k_s}L_1.$$

Essendo un gioco differenziale definito in un intervallo di tempo infinito, studiamo ora le condizioni finali del problema che sono

$$\lim_{t\to\infty} e^{-\rho t}V(x) = 0 \quad e \quad \lim_{t\to\infty} e^{-\rho t}W(x) = 0.$$

Innanzitutto analizziamo il primo limite: ricordiamo che la funzione valore del sistema sanitario è $V(x) = \frac{L_2^{\pm}}{2}x(t)^2 + L_1x(t) + L_0$. Sostituendo lo stato (4.23), dobbiamo verificare se il limite

$$\lim_{t\to\infty}\left(\frac{L_2^{\pm}}{2}\left(x_0+\frac{D}{C}\right)^2 e^{(2C-\rho)t} + \left[L_1\left(x_0+\frac{D}{C}\right) - L_2^{\pm}\left(x_0+\frac{D}{C}\right)\frac{D}{C}\right]e^{(C-\rho)t} + \right.$$

$$+\left[\frac{L_2^{\pm}}{2}\frac{D^2}{C^2} - L_1\frac{D}{C} + L_0\right]e^{-\rho t}\Bigg) = 0.$$

Ricaviamo immediatamente che

$$\lim_{t\to\infty} e^{-\rho t} = 0 \quad \textit{dato che} \quad \rho > 0$$

perciò dobbiamo verificare se $2C - \rho < 0$ e $C - \rho < 0$ in modo tale che

$$\lim_{t\to\infty} e^{t(2C-\rho)} = 0 \quad e \quad \lim_{t\to\infty} e^{t(C-\rho)} = 0,$$

dove $C = \gamma - 1 + \frac{\delta_s^2}{k_s}L_2^{\pm}$ e $L_2^{\pm} = \frac{-(\gamma-1-\frac{\rho}{2})\pm\sqrt{\left(\gamma-1-\frac{\rho}{2}\right)^2+\frac{\delta_s^2\beta}{k_s}}}{\frac{\delta_s^2}{k_s}}$.
Pertanto analizzando

$$2C - \rho = \pm 2\sqrt{\left(\gamma - 1 - \frac{\rho}{2}\right)^2 + \frac{\delta_s^2\beta}{k_s}},$$

ricaviamo che esso è negativo solo per $L_2 = L_2^-$. Usando questo parametro, la condizione $C - \rho < 0$ è soddisfatta dato che

$$C - \rho = -\frac{\rho}{2} - \sqrt{\left(\gamma - 1 - \frac{\rho}{2}\right)^2 + \frac{\delta_s^2\beta}{k_s}}$$

risulta sempre negativo.
Dall'analisi appena svolta, possiamo quindi concludere che la condizione finale

$$\lim_{t\to\infty} e^{-\rho t}V(x) = 0 \text{ è } soddisfatta\ solo\ se\ \ L_2 = L_2^-.$$

Per completezza verifichiamo se, con il coefficiente appena trovato, è soddisfatto anche

$$\lim_{t\to\infty} e^{-\rho t}W(x) = 0.$$

Sostituendo la funzione valore $W(x) = Ax(t) + B$ e lo stato (4.23), ricaviamo subito che

$$\lim_{t\to\infty}\left[A\left(x_0 + \frac{D}{C}\right)e^{(C-\rho)t} + \left(B - A\cdot\frac{D}{C}\right)e^{-\rho t}\right] = 0.$$

Si può osservare infatti che lo studio da svolgere per questo limite coincide esattamente con quello precedente e pertanto possiamo dedurre immediatamente che esso tenderà al valore nullo.

Lo studio delle condizioni finali ha fatto emergere che esse saranno soddisfatte solo se il segno del coefficiente L_2 sarà negativo. Pertanto, d'ora in avanti, considereremo

$$L_2 = L_2^-.$$

Grazie a questo valore, possiamo ora verificare se il denominatore di L_1 è diverso da zero. Esso corrisponde a

$$\frac{\delta_s^2}{k_s} L_2^- + \gamma - 1 - \rho \neq 0 \Rightarrow \sqrt{\left(\gamma - 1 - \frac{\rho}{2}\right)^2 + \frac{\delta_s^2 \beta}{k_s}} \neq -\frac{\rho}{2}$$

ma questa condizione è sempre soddisfatta dato che il primo membro è sempre positivo e $\rho > 0$.

4.5 Soluzione steady state e stabilità

Prima di procedere con l'analisi, ricordiamo che la strategia ottimale dell'azienda farmaceutica, per tutta la durata del gioco, è il valore costante

$$u_f^* = \frac{\delta_f}{k_f} \frac{\theta}{\rho + 1 - \gamma}. \tag{4.24}$$

In questo caso, dato che andremo a verificare effettivamente che la strategia del sistema sanitario è diverso dal valore nullo, consideriamo tutte le possibili possibilità di tale giocatore. Pertanto

$$u_s^*(x) = \begin{cases} 0, & se \quad x(t) < -\frac{L_1}{L_2^-}, \\ -\frac{\delta_s}{k_s}\left(L_2^- x(t) + L_1\right), & se \quad x(t) \geq -\frac{L_1}{L_2^-}. \end{cases}$$

dove

$$-\frac{L_1}{L_2^-} = \frac{\frac{\delta_f^2}{k_f}\frac{\theta}{1+\rho-\gamma} - b}{\frac{\rho}{2} + \sqrt{\left(\gamma - 1 - \frac{\rho}{2}\right)^2 + \frac{\delta_s^2 \beta}{k_s}}}.$$

Notiamo che il segno di questa quantità, che chiamiamo valore di soglia, dipende solamente dal segno del numeratore, dato che il denominatore è sempre positivo.

Per procedere con l'analisi riguardante la stabilità e la soluzione steady state, iniziamo ad analizzare il caso in cui

$$x(t) \geq -\frac{L_1}{L_2^-} \Rightarrow u_s^*(t) = -\frac{\delta_s}{k_s}(L_2^- x(t) + L_1).$$

In questa circostanza entrambi i giocatori compiono la propria campagna pro-vaccini e, considerando la strategia ottimale costante dell'azienda farmaceutica (4.24), l'equazione del moto sarà

$$\dot{x}(t) = b - (1-\gamma)x(t) + \frac{\delta_s^2}{k_s}(L_2^- x(t) + L_1) + \frac{\delta_f^2}{k_f}\frac{\theta}{\gamma - \rho - 1}. \tag{4.25}$$

Siamo interessati a calcolare la soluzione steady state, valore importante nell'analisi dato che, una volta raggiunto, da quell'istante in poi questa quantità rimarrà invariata nel tempo. Per trovarlo, basterà annullare l'equazione (4.25) e isolare lo stato. Con semplici conti, otteniamo che lo stato stazionario è

$$x^{SS} = \left[b\,(\rho + 1 - \gamma) - \frac{\delta_f^2}{k_f}\theta\right]\left[\frac{1}{(1-\gamma)(\rho+1-\gamma) + \frac{\delta_s^2 \beta}{k_s}}\right] \tag{4.26}$$

e notiamo che non è simmetrico nei parametri relativi ai due giocatori, nello specifico $\frac{\delta_s^2 \beta}{k_s}$ (coefficienti del sistema sanitario) e $\frac{\delta_f^2 \theta}{k_f}$ (coefficienti dell'azienda farmaceutica).
Grazie al valori di x^{SS}, possiamo riscrivere lo stato trovato in (4.23) come

$$x(t) = \left(x_0 - x^{SS}\right)e^{Ct} + x^{SS}.$$

Prima di studiare la stabilità, analizziamo il segno dello stato stazionario. Ricordiamo che la formulazione del modello prevede la non negatività dello stato dato che esso rappresenta il numero di persone non vaccinate. Imponendo allo stato stazionario questa condizione sufficiente di ammissibilità e notando la positività della seconda parentesi, ricaviamo immediatamente che $x^{SS} \geq 0$ solo se vale il seguente teorema

Teorema 4.1. ***(Condizione sufficiente di ammissibilità)***

Se

$$(\rho + 1 - \gamma)\,b \geq \frac{\delta_f^2}{k_f}\theta \tag{4.27}$$

allora lo stato stazionario è positivo, ovvero $x^{SS} \geq 0$.

É importante osservare come tale condizione vincola solo i parametri di un giocatore, nello specifico quelli dell'azienda farmaceutica.
Il modello presentato ha validità solo sotto la condizione (4.27) dato che esso richiede la non negatività dello stato.

La condizione fissata causa anche un'altra importante conseguenza: il segno del valore di soglia dipende proprio dai parametri presenti in (4.27), ottenendo così che

$$-\frac{L_1}{L_2^-} < 0.$$

Dato che lo stato $x(t)$ indica il numero di persone non vaccinate, sappiamo che questo valore non potrà mai assumere valori negativi. Questo implica che sarà sempre soddisfatta la condizione $x(t) \geq -\frac{L_1}{L_2^-}$ comportando che l'intensità di comunicazione ottimale per il sistema sanitario, per tutta la durata del gioco, è

$$u_s^*(x) = -\frac{\delta_s}{k_s}(L_2^- x(t) + L_1). \tag{4.28}$$

Questo conferma quanto supposto in precedenza, cioè che la strategia di comunicazione del sistema sanitario è non banale e assume valore diverso dalla quantità nulla.

Ora continuiamo lo studio riguardante la soluzione steady state, soffermandoci a studiare se x^{SS} è asintoticamente stabile. Per prima cosa riscriviamo l'equazione del moto (4.25) in maniera compatta

$$\dot{x}(t) = Cx(t) + D \qquad con \;\; C = \gamma - 1 + \frac{\delta_s^2}{k_s} L_2^- \quad e \quad D = b + \frac{\delta_f^2}{k_f} \frac{\theta}{\gamma - 1 - \rho} + \frac{\delta_s^2}{k_s} L_1.$$

Grazie al criterio di stabilità lineare presentato nel primo capitolo, sappiamo che se la derivata rispetto a $x(t)$ è negativa, cioè $C < 0$, allora la soluzione steady state x^{SS} è asintoticamente stabile. In questo caso abbiamo che

$$C = \frac{\rho}{2} - \sqrt{\left(\gamma - 1 - \frac{\rho}{2}\right)^2 + \frac{\delta_s^2 \beta}{k_s}}$$

e, mediante semplici conti, otteniamo che $C < 0$ a prescindere dalla condizione di sufficienza, implicando la stabilità dello stato stazionario.
Infatti, studiando il limite dello stato per il tendere del tempo all'infinito, emerge che lo stato convergerà a x^{SS}, cioè

$$\lim_{t \to +\infty} x(t) = \lim_{t \to +\infty} \left(x_0 - x^{SS}\right) e^{Ct} + x^{SS} = x^{SS}.$$

Una volta raggiunto tale quantità, il controllo del sistema sanitario, dato che dipende dallo stato, diventa stazionario assumendo valore

$$u_s^{SS^*} = -\frac{\delta_s}{k_s}\left(L_2^- x^{SS} + L_1\right).$$

Analizzando questo modello, abbiamo osservato che entrambi i giocatori, a prescindere dal livello iniziale di non vaccinati, sono incentivati a svolgere le loro campagne pro-vaccini. Queste riusciranno a contrastare la propaganda no-vax portando ad una decrescita della sottopopolazione vaccinata fino ad un valore stazionario che risulta stabile.

Nelle osservazioni generali riguardanti l'azienda farmaceutica, abbiamo prestato attenzione al caso in cui la funzione di crescita è lineare rispetto alla variabile di stato, che coincide con le nostre ipotesi. Abbiamo dedotto che nel caso in cui la miglior risposta dell'azienda farmaceutica è indipendente rispetto allo stato e al controllo dell'altro giocatore, allora l'equilibrio di Nash coincide con quello alla Stackelberg, determinando la sparizione del vantaggio che dovrebbe avere il leader nei giochi gerarchici, portando le strategie ottimali dei due giocatori ad essere sempre le stesse a prescindere che il gioco sia gerarchico o un semplice problema dove i giocatori agiscono contemporaneamente.

Analisi con Mathematica

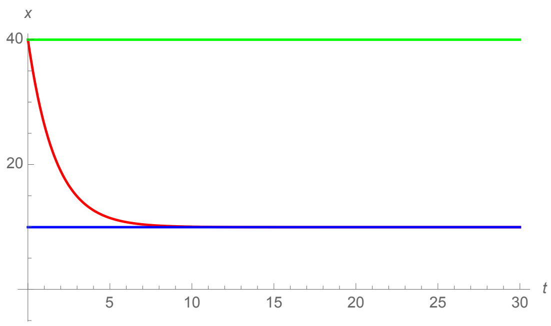
Per capire con maggior chiarezza l'analisi appena svolta, riportiamo qui il grafico dello stato $x(t)$. I valori dei parametri assunti sono

x_0	b	ρ	γ	θ	β	k_s	k_f	δ_s	δ_f
40	10	0.05	0.6	0.1	0.2	0.15	0.11	0.4	0.8

L'evoluzione dei non vaccinati, che sono stati rappresentanti mediante la variabile di stato $x(t)$, è contrastata dalle campagne pro-vaccini di entrambi i giocatori per tutta la durata del gioco. Più precisamente, per l'istanza considerata, abbiamo che

$$u_f^* = 1.62 \quad e \quad u_s^{SS^*} = 11.81$$

Il grafico dell'evoluzione della sottopopolazione non vaccinata è



dove

- la curva rossa rappresenta l'evoluzione dello stato $x(t)$;
- il valore verde rappresenta lo stato iniziale x_0;
- il valore blu rappresenta lo stato stazionario x^{SS}.

4.6 Riassunto delle politiche di comunicazione d'equilibrio

Questa nuova proposta sull'evoluzione dei non vaccinati ipotizza che la funzione di crescita dei non vaccinati sia

$$\mathcal{C}(x(t)) := b - (1-\gamma)x(t).$$

dove $b > 0$ rappresenta il numero medio di nascite.
Sottolineiamo, prima di analizzare i vari risultati, che le condizioni di ammissibilità dello stato impongono la validità del modello per

$$b \geq \frac{\delta_f^2}{k_f}\frac{\theta}{1+\rho-\gamma}.$$

In questo scenario, per entrambi i giocatori risulta ottimale agire per tutta la durata del gioco: l'azienda farmaceutica svolge una campagna pro-vaccini con intensità

$$u_f^* = -\frac{\delta_f}{k_f}\frac{\theta}{\gamma-1-\rho};$$

mentre il sistema sanitario con intensità

$$u_s^*(x) = -\frac{\delta_s}{k_s}\left(L_2 x(t) + L_1\right),$$

dove

$$L_1 = \frac{(\delta_f u_f - b)L_2}{\frac{\delta_s^2}{k_s}L_2 + \gamma - 1 - \rho} \quad e \quad L_2 = \frac{-(\gamma - 1 - \frac{\rho}{2}) - \sqrt{\left(\gamma - 1 - \frac{\rho}{2}\right)^2 + \frac{\delta_s^2\beta}{k_s}}}{\frac{\delta_s^2}{k_s}}.$$

In tal modo, la sottopopolazione non vaccinata, rappresentata dalla variabile $x(t)$, vale

$$x(t) = \left(x_0 - x^{SS}\right)e^{Ct} + x^{SS} \quad con \quad C = \frac{\rho}{2} - \sqrt{\left(\gamma - 1 - \frac{\rho}{2}\right)^2 + \frac{\delta_s^2\beta}{k_s}},$$

dove

$$x^{SS} = \left[b\,(\rho + 1 - \gamma) - \frac{\delta_f^2}{k_f}\theta \right] \left[\frac{1}{(1-\gamma)(\rho+1-\gamma) + \frac{\delta_s^2 \beta}{k_s}} \right]$$

rappresenta lo stato stazionario e x_0 il valore iniziale delle persone non vaccinate. Svolgendo l'analisi nel lungo periodo, è emerso che le campagne di informazione dei due giocatori riusciranno a contrastare la campagna antivaccinista portando il numero dei non vaccinati fino allo stato stazionario stabile del problema $x^{SS} \geq 0$.

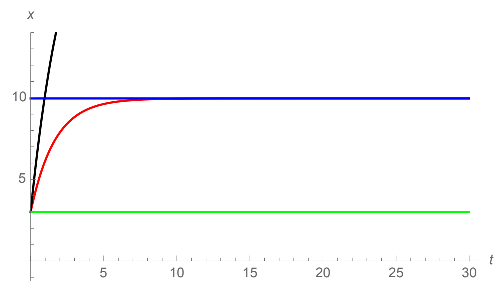
L'analisi ha anche rilevato che l'indipendenza della miglior risposta del follower dallo stato e dalla strategia del leader, porta gli equilibri alla Stackelberg a coincidere con gli Nash. Quindi, a prescindere che il gioco sia gerarchico o giocato simultaneamente, le scelte ottimali dei due giocatori non variano.

4.7 Analisi sul valore iniziale

Il grafico analizzato precedentemente, si limita a mostrare il caso in cui $x_0 \geq x^{SS}$. Vogliamo ora studiare anche l'occasione in cui il livello iniziale della sottopopolazione non vaccinata sia minore del valore dello stato stazionario, cioè $x_0 < x^{SS}$. Il modello prevede che entrambi i giocatori investano denaro nella propria campagna pro-vaccini, comportando, nel caso che vogliamo analizzare, che gli sforzi dei due giocatori portino ad aumentare il numero iniziale dei non vaccinati fino al valore stazionario stabile. Dato che l'obiettivo finale dei due giocatori è ridurre il numero dei non vaccinati, saremo spinti a supporre che se $x_0 < x^{SS}$ i due giocatori non sono incentivati ad agire, cioè $u_f^* = 0$ e $u_s^* = 0$ dato che sembra assurdo considerare l'eventualità che i due giocatori investano una qualsiasi somma di denaro per aumentare il numero iniziale dei non vaccinati, contro il loro stesso interesse.
Per verificare se tale limitazione è corretta, analizziamo tale situazione mediante Mathematica fissando i parametri del problema come segue

x_0	b	ρ	γ	θ	β	k_s	k_f	δ_s	δ_f
3	10	0.05	0.6	0.1	0.2	0.15	0.11	0.4	0.8

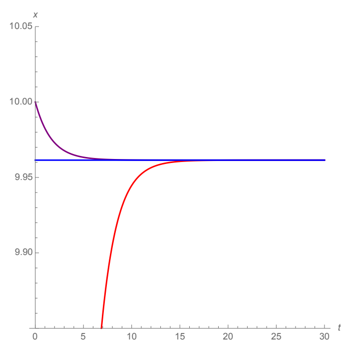
Il grafico dell'evoluzione della sottopopolazione non vaccinata è



dove

- la curva rossa rappresenta l'evoluzione dello stato $x(t)$ con l'azione dei due giocatori;
- la curva nera rappresenta l'evoluzione dei non vaccinati senza nessun contrasto da parte dei due giocatori;
- il valore verde rappresenta lo stato iniziale x_0;
- il valore blu rappresenta lo stato stazionario x^{SS}.

Sotto queste ipotesi, lo stato stazionario vale $x^{SS} = 9.96$.
Notiamo che la sottopopolazione non vaccinata, senza l'azione dei due giocatori, tenderebbe a crescere a dismisura. Anche se le campagne pro-vaccini fanno crescere i non vaccinati rispetto al valore iniziale, li porterà a raggiungere lo stato stazionario stabile, limitando la loro crescita smisurata.
Suppponiamo ora che i due giocatori, invece di agire subito, attendano l'istante in cui il livello di non vaccinati superi il valore dello stato stazionario, ipotizziamo quando il livello di no-vax è 10.
Presentiamo qui di seguito uno zoom da $x \in [9.85, 10.05]$ in modo da vedere attentamente l'andamento del nuovo problema con $x_0 = 10$ e quello precedente con $x_0 = 3$



dove

- la curva rossa rappresenta l'evoluzione dello stato $x(t)$ con $x_0 = 3$;
- la curva viola rappresenta l'evoluzione dello stato $x(t)$ con $x_0 = 10$;
- il valore blu rappresenta lo stato stazionario x^{SS}.

Analizziamo ora le funzioni obiettivo dei due giocatori in base al livello iniziale di non vaccinati:

Funzioni obiettivo	Caso $x_0 = 3$	Caso $x_0 = 10$
J_s	381.33	407.71
J_f	21.73	22.80

I costi sostenuti dai giocatori nel caso in cui $x_0 \geq x^{SS}$ (caso in cui $x_0 = 10$) sono superiori a quelli di $x_0 < x^{SS}$ (caso in cui $x_0 = 3$) anche se il tempo di azione è notevolmente inferiore e nel caso $x_0 = 10$ i non vaccinati da convincere sono molto pochi.
Questo significa che il giocatore che osservi un numero di non vaccinati inferiore rispetto al valore dello stato stazionario, sarà incentivato comunque ad investire subito in una campagna di comunicazione, in modo tale da portare i non vaccinati subito al valore dello stato stazionario. In questo modo ci guadagna perché, se attendesse il momento il cui $x_0 \geq x^{SS}$, i costi da sostenere sarebbero superiori.
Capiamo pertanto che non ha senso imporre al modello le condizioni pensate nel caso in cui $x_0 < x^{SS}$.

4.8 Analisi di sensibilità

Il nostro obiettivo è analizzare la variazione della soluzione ottima al variare di ogni singolo parametro fermi restanti i valori degli altri parametri.
Dallo studio dello stato stazionario si deduce direttamente il suo andamento rispetto alla variazione dei parametri del problema. Così pure l'analisi della strategia dell'azienda farmaceutica può essere dedotta analiticamente vista la sua forma, mentre per quella del sistema sanitario sarà necessaria un'analisi numerica.
Fissiamo come punto di partenza i valori dei parametri

x_0	b	ρ	γ	θ	β	k_s	k_f	δ_s	δ_f
40	10	0.05	0.6	0.1	0.2	0.15	0.11	0.4	0.8

dove $J_s = 626.25$, $J_f = 27.4$ e $x^{SS} = 9.96$ e ritroveremo tali valori sempre nella prima colonna.

4.8.1 Variazione del coefficiente δ_i

Il coefficiente δ_i con $i = s, f$ rappresenta l'efficacia dell'effetto della comunicazione in termini di diminuzione dei non vaccinati. Tale parametro risulta molto difficile da controllare, dal momento che la riuscita di una campagna comunicativa è imprevedibile, poichè non è legata al solo investimento economico, ma anche ad alcuni fattori "incontrollabili": essa, per divulgare il proprio obiettivo e attirare l'attenzione del pubblico, può essere realizzata in vari modi e non è semplice capire quale sia il migliore. Si potrebbe decidere di investire in una costosa pubblicità dove i testimonial sono personaggi famosi o addirittura programmare una campagna istituzionale che punta la sua divulgazione nelle migliori testate e nei più efficaci mezzi di comunicazione; questo però non basta ad assicurare la sua riuscita e che attiri, in qualche modo, l'attenzione dell' utente a cui è rivolto il messaggio. Alcune volte la campagna di comunicazione potrà essere un flop, a prescindere dall'entità dell'investimento iniziale, dato che entrano in gioco anche le componenti psicologiche del pubblico, fattori che risultano incontrollabili da parte dell'azienda che commissiona la campagna.

Variazione del coefficiente δ_f

Ricordiamo che la condizione sufficiente di ammissibilità (4.27) vincola i parametri relativi all'azienda farmaceutica e di conseguenza $\delta_f \in \left(0, \sqrt{\frac{k_f b(\rho+1-\gamma)}{\theta}}\right]$.
Pertanto valutiamo, per l'istanza considerata di riferimento, $\delta_f \in (0, 2.23]$.
Richiamando la strategia ottima dell'azienda farmaceutica, notiamo che

$$\frac{\partial u_f^*}{\partial \delta_f} = \frac{\theta}{k_f(\rho + 1 - \gamma)} > 0$$

dunque al crescere del parametro δ_f l'azienda farmaceutica è incentivata ad aumentare la sua intensità con una crescita lineare in δ_f.
Riportiamo ora i grafici relativi allo stato stazionario e alle strategie di comunicazione dei due giocatori al variare di δ_f al quale segue una tabella riportante i valori dei payoff, dello stato stazionario e dei controlli per alcuni δ_f.

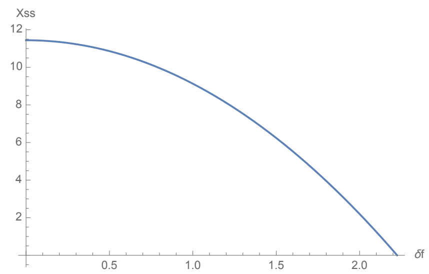


Figura 4.2: Variazione di x^{SS} al variare di δ_f

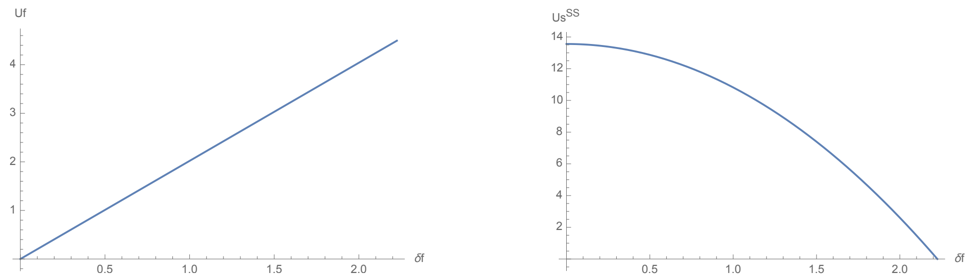


Figura 4.3: Variazione di u_f^* e u_s^{SS*} al variare di δ_f

dove

Valore di	$\delta_f = 0.8$	$\delta_f = 0.88$	$\delta_f = 0.96$
J_s	626.25	600.2	572.49
J_f	27.4	27.43	27.46
x^{SS}	9.96	9.65	9.31
u_f^*	1.62	1.78	1.94
u_S^{SS*}	11.81	11.44	11.03

Se l'efficacia della campagna pro-vaccini dell'azienda farmaceutica aumenta, allora essa è incentivata ad investire di più sulla propria campagna di comunicazione, in modo tale da convincere nello stesso arco temporale un maggior numero di non vaccinati. Il sistema sanitario è incentivato ad agire con meno intensità e il valore dello stato stazionario diminuisce. Ne consegue che i costi sostenuti dall'azienda farmaceutica aumentano, mentre la spesa del sistema sanitario diminuisce.

Variazione del coefficiente δ_s

Ricordiamo che la condizione sufficiente di ammissibilità (4.27) non vincola i parametri relativi al sistema sanitario.

Richiamando la stategia ottimale dell'azienda farmaceutica, notiamo che

$$\frac{\partial u_f^*}{\partial \delta_s} = 0$$

dunque al crescere del parametro δ_s l'intensità della campagna comunicativa dell'azienda farmaceutica rimane invariata.
Riportiamo ora i grafici relativi allo stato stazionario e alle strategie di comunicazione dei due giocatori al variare di δ_s al quale segue una tabella riportante i valori dei payoff, dello stato stazionario e dei controlli per alcuni δ_s.

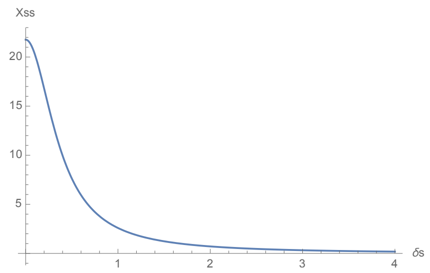


Figura 4.4: Variazione di x^{SS} al variare di δ_s

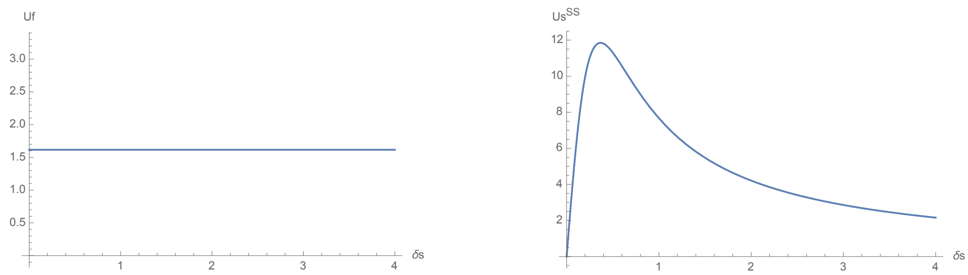


Figura 4.5: Variazione di u_f^* e u_s^{SS*} al variare di δ_s

dove

Valore di	$\delta_s = 0.4$	$\delta_s = 0.44$	$\delta_s = 0.48$
J_s	626.25	575.99	530.73
J_f	27.4	25.28	23.38
x^{SS}	9.96	8.94	8.04
u_f^*	1.62	1.62	1.62
u_s^{SS*}	11.81	11.66	11.44

Il comportamento del sistema sanitario risulta non omogeneo al variare di δ_s. Se la campagna pro-vaccini del sistema sanitario è poco incisiva, allora quest'ultimo è incentivato ad investire maggiormente in essa per diminuire il numero di non vaccinati. D'altra parte, se l'efficacia della campagna pro-vaccini del sistema sanitario è molto efficace, allora esso è portato ad agire con minor intensità. Dunque all'aumentare di δ_s il valore dello stato stazionario diminuisce e l'intensità della campagna comunicativa dell'azienda farmaceutica rimane invariata, data la sua indipendenza dal fattore δ_s. Ne consegue che i costi sostenuti da entrambi i giocatori diminuiscono.

4.8.2 Variazione del coefficiente k_i

Il coefficiente k_i con $i = s, f$ rappresenta il costo marginale dello sforzo di comunicazione fatto dal giocatore i-esimo.

Variazione del coefficiente k_f

Ricordiamo che la condizione sufficiente di ammissibilità (4.27) vincola i parametri relativi all'azienda farmaceutica e di conseguenza $k_f \in \left[\frac{\delta_f^2\theta}{b(\rho+1-\gamma)}, +\infty\right)$. Pertanto valutiamo, per l'istanza considerata di riferimento, $k_f \in [0.014, +\infty)$. Richiamando la stategia ottimale dell'azienda farmaceutica, notiamo che

$$\frac{\partial u_f^*}{\partial k_f} = -\frac{\delta_f\theta}{k_f^2(\rho+1-\gamma)} < 0$$

dunque al crescere del parametro k_f l'azienda farmaceutica è incentivata a diminuire la sua intensità.
Riportiamo ora i grafici relativi allo stato stazionario e alle strategie di comunicazione dei due giocatori al variare di k_f al quale segue una tabella riportante i valori dei payoff, dello stato stazionario e dei controlli per alcuni k_f.

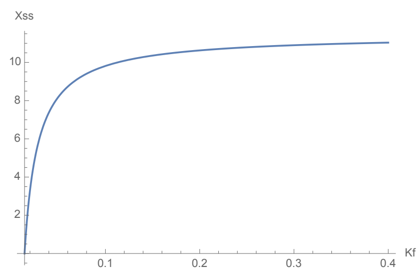


Figura 4.6: Variazione di x^{SS} al variare di k_f

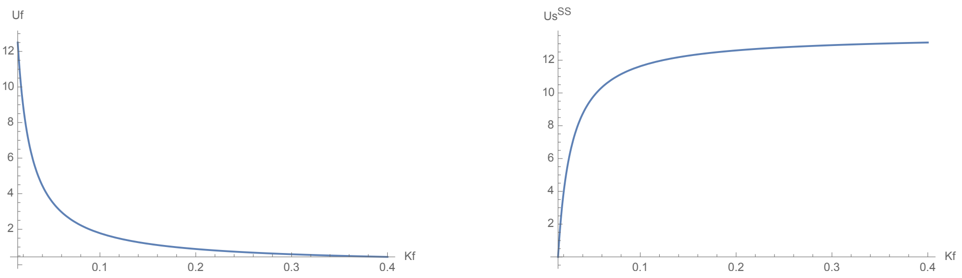


Figura 4.7: Variazione di u_f^* e u_s^{SS*} al variare di k_f

dove

Valore di	$k_f = 0.11$	$k_f = 0.121$	$k_f = 0.132$
J_s	626.25	637.75	647.44
J_f	27.4	27.39	27.38
x^{SS}	9.96	10.096	10.21
u_f^*	1.62	1.47	1.35
u_s^{SS*}	11.81	11.97	12.098

Se aumenta il costo della campagna di comunicazione dell'azienda farmaceutica, questa non è incentivata ad investire nella campagna pro-vaccini. Il sistema sanitario cercherà invece di aumentare la propria azione per ridurre i non vaccinati ma, se k_f assume valori alti, tale giocatore non può riuscire nel suo obiettivo dato che lo sforzo dell'azienda farmaceutica è quasi assente. Ne consegue che il valore dello stato stazionario aumenta e i costi sostenuti dall'azienda farmaceutica diminuiscono, mentre la spesa del sistema sanitario aumenta.

Variazione del coefficiente k_s

Ricordiamo che la condizione sufficiente di ammissibilità (4.27) non vincola i parametri relativi al sistema sanitario.
Richiamando la stategia ottimale dell'azienda farmaceutica, notiamo che

$$\frac{\partial u_f^*}{\partial k_s} = 0$$

dunque al crescere del parametro k_s l'intensità della campagna comunicativa dell'azienda farmaceutica rimane invariata.
Riportiamo ora i grafici relativi allo stato stazionario e alle strategie di comunicazione dei due giocatori al variare di k_s al quale segue una tabella

riportante i valori dei payoff, dello stato stazionario e dei controlli per alcuni k_s.

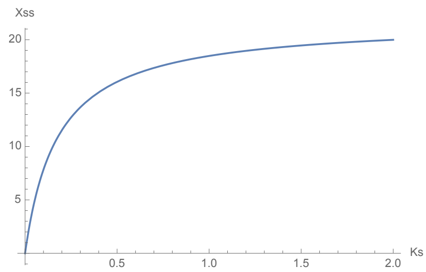


Figura 4.8: Variazione di x^{SS} al variare di k_s

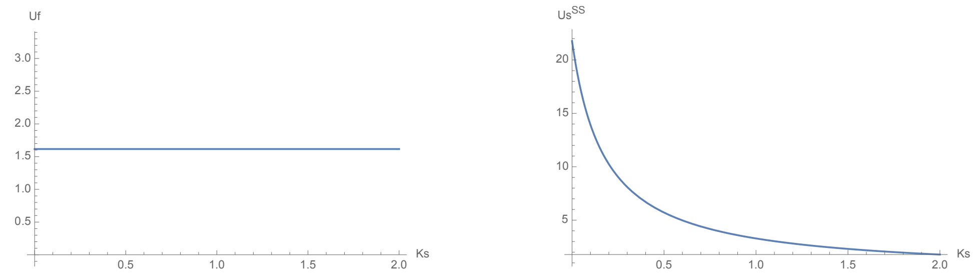


Figura 4.9: Variazione di u_f^* e u_s^{SS*} al variare di k_s

dove

Valore di	$k_s = 0.15$	$k_s = 0.165$	$k_s = 0.18$
J_s	626.25	651.41	674.27
J_f	27.4	28.46	29.43
x^{SS}	9.96	10.48	10.95
u_f^*	1.62	1.62	1.62
u_s^{SS*}	11.81	11.29	10.82

Se aumenta il costo della campagna di comunicazione del sistema sanitario, questo non è incentivata ad investire nella campagna pro-vaccini. L'intensità della campagna comunicativa dell'azienda farmaceutica rimane invariata, data la sua indipendenza dal fattore k_s. Ne consegue che lo stato stazionario e i costi sostenuti da entrambi i giocatori aumentano.

4.8.3 Variazione del coefficiente θ

Il coefficiente θ rappresenta l'intensità di perdita marginale di entrate dell'azienda farmaceutica dovuto dalla sottopopolazione contro i vaccini.

Ricordiamo che la condizione sufficiente di ammissibilità (4.27) vincola i parametri relativi all'azienda farmaceutica e di conseguenza $\theta \in \left(0, \frac{k_f b(\rho+1-\gamma)}{\delta_f^2}\right]$.
Pertanto valutiamo, per l'istanza considerata di riferimento, $\theta \in (0, 0.77]$.
Richiamando la stategia ottimale dell'azienda farmaceutica, notiamo che

$$\frac{\partial u_f^*}{\partial \theta} = \frac{\delta_f}{k_f} \frac{1}{(\rho+1-\gamma)} > 0$$

dunque al crescere del parametro θ l'azienda farmaceutica è incentivata ad aumentare la sua intensità con una crescita lineare in θ.
Riportiamo ora i grafici relativi allo stato stazionario e alle strategie di comunicazione dei due giocatori al variare di θ al quale segue una tabella riportante i valori dei payoff, dello stato stazionario e dei controlli per alcuni θ.

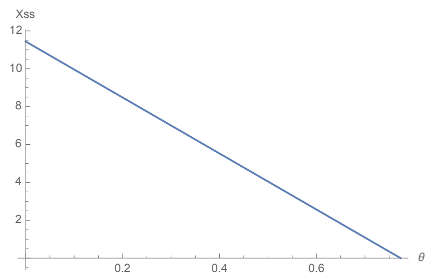


Figura 4.10: Variazione di x^{SS} al variare di θ

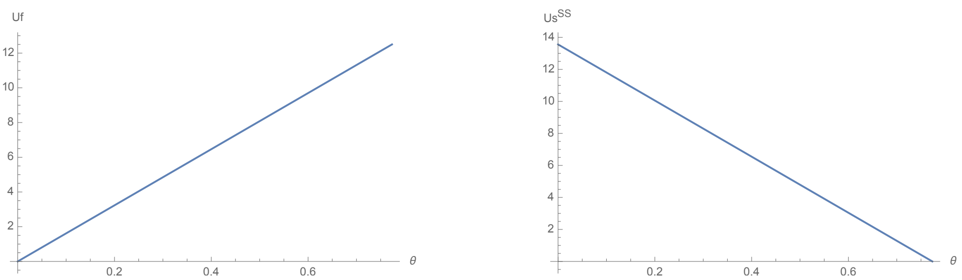


Figura 4.11: Variazione di u_f^* e u_s^{SS*} al variare di θ

dove

Valori di	$\theta = 0.1$	$\theta = 0.12$	$\theta = 0.14$
J_s	626.25	601.42	577.25
J_f	27.4	32.91	38.44
x^{SS}	9.96	9.67	9.37
u_f^*	1.62	1.94	2.26
u_s^{SS*}	11.81	11.46	11.11

Se l'intensità di perdita marginale di entrate aumenta, significa che l'azienda farmaceutica subisce un maggior danno economico dovuto alla mancata vendita di vaccini causata dalle persone che non vogliono ricorrere a tale strumento profilattico. Per attenuare la perdita l'azienda farmaceutica è incentivata a investire maggiormente nella sua campagna pro-vaccini, in modo tale da convincere più persone a vaccinarsi. Il sistema sanitario è incentivato ad agire con meno intensità e lo stato stazionario diminuisce. Ne consegue che i costi sostenuti dall'azienda farmaceutica aumentano, mentre la spesa del sistema sanitario diminuisce.

4.8.4 Variazione del coefficiente β

Il coefficiente β rappresenta il tasso di penalizzazione marginale del sistema sanitario dovuto dal livello di sottopopolazione non vaccinata.
Ricordiamo che la condizione sufficiente di ammissibilità (4.27) non vincola i parametri relativi al sistema sanitario.
Richiamando la stategia ottimale dell'azienda farmaceutica, notiamo che

$$\frac{\partial u_f^*}{\partial \beta} = 0$$

dunque al crescere del parametro β l'intensità della campagna comunicativa dell'azienda farmaceutica rimane invariata.
Riportiamo ora i grafici relativi allo stato stazionario e alle strategie di comunicazione dei due giocatori al variare di β al quale segue una tabella riportante i valori dei payoff, dello stato stazionario e dei controlli per alcuni β.

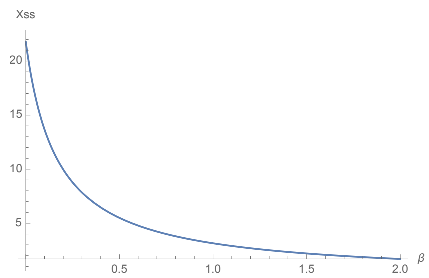
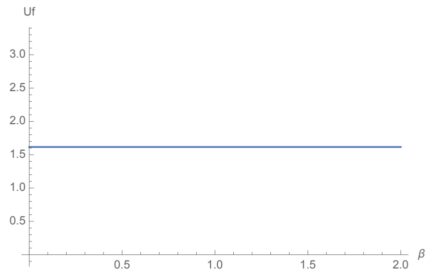


Figura 4.12: Variazione di x^{SS} al variare di β



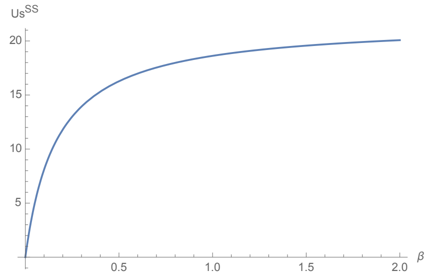


Figura 4.13: Variazione di u_f^* e u_s^{SS*} al variare di β

dove

Valori di	$\beta = 0.2$	$\beta = 0.24$	$\beta = 0.28$
J_s	626.25	693.8	753.18
J_f	27.4	25.37	23.68
x^{SS}	9.96	8.99	8.19
u_f^*	1.62	1.62	1.62
u_s^{SS*}	11.81	12.78	13.58

Se il tasso di penalizzazione marginale assume valori maggiori, significa che le spese mediche che il sistema sanitario deve sostenere, nel caso in cui non vaccinato contragga una malattia prevenibile, sono molto alte. In tale situazione, il sistema sanitario è incentivato a investire maggiormente nella sua campagna di prevenzione in modo tale da convincere più persone a vaccinarsi. Il valore dello stato stazionario diminuisce e l'intensità dell'azienda farmaceutica rimane invariata, data la sua indipendenza dal fattore β. Ne consegue che i costi sostenuti dal sistema sanitario aumentano, mentre la spesa dell'azienda farmaceutica diminuisce.

4.8.5 Variazione del coefficiente b

Ricordiamo che b rappresenta il numero medio di nascite e dunque tale coefficiente non può essere controllato dai giocatori.
La condizione sufficiente di ammissibilità (4.27) vincola $b \in \left[\frac{\delta_f^2}{k_f}\frac{\theta}{\rho+1-\gamma}, +\infty\right)$.
Pertanto valutiamo, per l'istanza considerata di riferimento, $b \in [1.29, +\infty)$.
Richiamando la startegia ottimale dell'azienda farmaceutica, notiamo che

$$\frac{\partial u_f^*}{\partial b} = 0$$

dunque al crescere del parametro b l'intensità della campagna comunicativa dell'azienda farmaceutica rimane invariata.

Riportiamo ora i grafici relativi allo stato stazionario e alle strategie di comunicazione dei due giocatori al variare di b al quale segue una tabella riportante i valori dei payoff, dello stato stazionario e dei controlli per alcuni b.

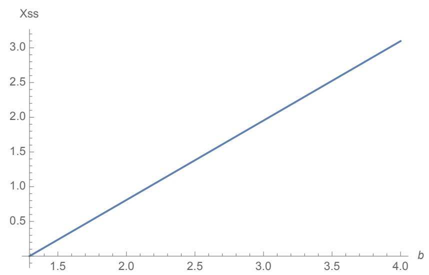


Figura 4.14: Variazione di x^{SS} al variare di b

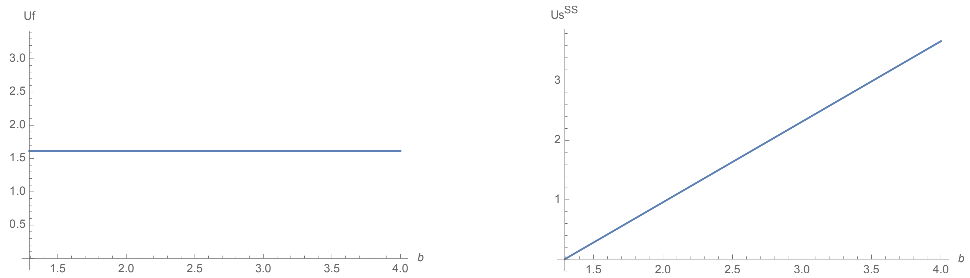


Figura 4.15: Variazione di u_f^* e u_s^{SS*} al variare di b

dove

Valore di	$b = 10$	$b = 12$	$b = 14$
J_s	626.25	840.50	1094.1
J_f	27.4	31.62	35.85
x^{SS}	9.96	12.25	14.53
u_f^*	1.62	1.62	1.62
u_s^{SS*}	11.81	14.52	17.23

L'aumento del numero medio di nascite provoca un maggior numero di possibili non vaccinati e dunque il sistema sanitario è incentivato a investire maggiormente nella sua campagna pro-vaccini, poiché le persone da convincere sono maggiori. L'intensità della campagna comunicativa dell'azienda farmaceutica rimane invariata, data la sua indipendenza dal numero di nascite, e il valore dello stato stazionario aumenta. Ne consegue che i costi sostenuti da entrambi i giocatori aumentano.

4.8.6 Variazione del coefficiente γ

L'analisi di tale parametro è più delicata e meno intuitiva.
Il coefficiente γ rappresenta il tasso netto di persuasione a non vaccinarsi e, per la condizione sufficiente di ammissibilità (4.27), deve valere
$\gamma \in \left(0, max\left\{0, 1+\rho-\frac{\delta_f^2}{k_f}\frac{\theta}{\beta}\right\}\right]$.
Ricordiamo che

$$x^{SS} = \left[b\left(\rho+1-\gamma\right) - \frac{\delta_f^2}{k_f}\theta\right]\left[\frac{1}{(1-\gamma)(\rho+1-\gamma)+\frac{\delta_s^2\beta}{k_s}}\right]$$

perciò lo stato stazionario assume valore massimo per

$$\hat{\gamma} = (1+\rho) - \frac{\delta_f^2\theta}{bk_f} - \frac{\sqrt{k_s\left(b^2\beta\delta_s^2k_f^2 - b\delta_f^2k_fk_s\rho\theta + \delta_f^4k_s\theta^2\right)}}{bk_fk_s}.$$

Il grafico di x^{SS} al variare di γ positivo può assumere due diverse forme:

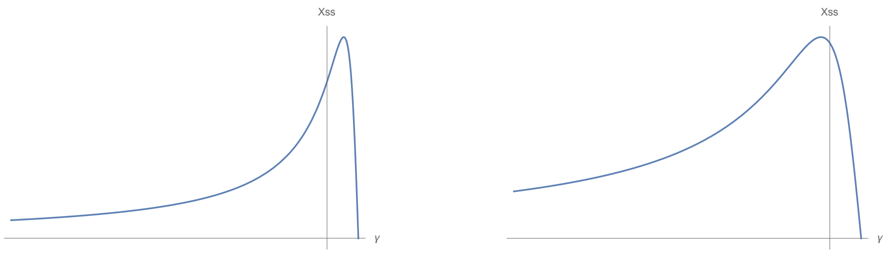


Figura 4.16: Variazione di x^{SS} al variare di γ: a sinistra $\hat{\gamma} > 0$ e destra $\hat{\gamma} \leq 0$

Se $\hat{\gamma} > 0$ allora il valore dello stato stazionario risulta inizialmente crescente in γ e poi decrescente nell'intervallo $\gamma \in \left(0, max\left\{0, 1+\rho-\frac{\delta_f^2}{k_f}\frac{\theta}{\beta}\right\}\right]$, altrimenti se $\hat{\gamma} \leq 0$ il valore dello stato stazionario risulta monotono decrescente in γ nell'intervallo di esistenza di γ. Prima di procedere con l'analisi, richiamiamo la stategia ottima dell'azienda farmaceutica, notando che

$$\frac{\partial u_f^*}{\partial \gamma} = \frac{\delta_f\theta}{k_f(\rho+1-\gamma)^2} > 0$$

dunque al crescere del parametro γ l'azienda farmaceutica è incentivata ad aumentare la sua intensità.
Ora prendendo i valori dei parametri di partenza fissati

x_0	b	ρ	γ	θ	β	k_s	k_f	δ_s	δ_f
40	10	0.05	0.6	0.1	0.2	0.15	0.11	0.4	0.8

otteniamo che $\gamma \in (0, 0.99]$.
Riportiamo i grafici relativi allo stato stazionario e alle strategie di comunicazione dei due giocatori al variare di γ al quale segue una tabella riportante i valori dei payoff, dello stato stazionario e dei controlli per alcuni γ.

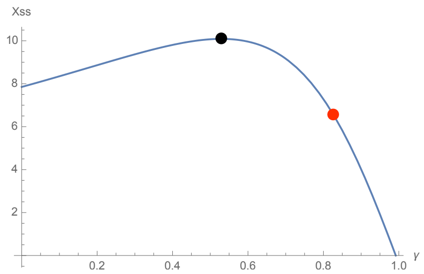
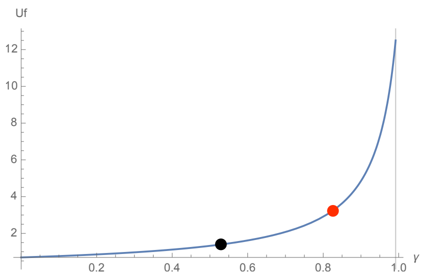


Figura 4.17: Variazione di x^{SS} al variare di γ



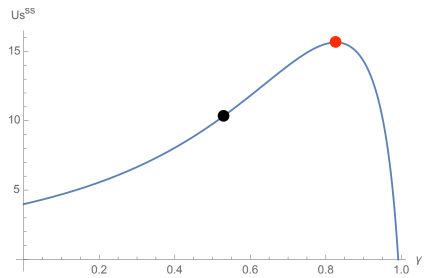


Figura 4.18: Variazione di u_f^* e $u_s^{SS^*}$ al variare di γ

Lo stato stazionario assume valore massimo in $\hat{\gamma} = 0.53$ e x^{SS} risulta inizialmente crescente in γ e poi decrescente dato che $\hat{\gamma} \in (0, 0.99]$. Per semplificare la trattattazione, abbiamo indicato con un punto nero quando ogni funzione è in $\hat{\gamma} = 0.53$. Invece il controllo stazionario del sistema sanitario arriva al suo massimo in $\gamma = 0.83$. Per semplificare la trattattazione, abbiamo indicato con un punto rosso quando ogni funzione è in $\gamma = 0.83$.
Ricordiamo, in aggiunta, che per le condizioni sufficienti (4.27) di ammissibilità γ può assumere valori tra $(0, 0.99]$.
Inizialmente, se la propaganda antivaccinista aumenta, il valore dello stato stazionario tende ad aumentare. Successivamente, però, dopo aver raggiunto $\hat{\gamma} = 0.53$ (punto di massimo nel grafico 4.17) il valore dello stato stazionario decresce. Questo perché l'azienda farmaceutica aumenta mano a mano la sua campagna pro-vaccini: quando la propaganda antivaccinista è tenue agisce in maniera moderata. Non appena i no-vax aumentano la loro azione, l'azienda farmaceutica decide di imporsi con forza. Infatti, dopo aver raggiunto il valore $\hat{\gamma} = 0.53$, investe notevolmente nella sua campagna pro-vaccini provocando

così una drastica scesa del valore dello stato stazionario. Anche il sistema sanitario agisce maggiormente se γ sale, ma, una volta raggiunto $\gamma = 0.83$ (punto di massimo nel grafico 4.18 riguardante il sistema sanitario) diminuisce notevolmente la sua azione dato che l'azione dell'azienda farmaceutica è talmente forte da far decrescere notevolmente il valore dello stato stazionario.

Grazie all'osservazione iniziale, sappiamo che il caso appena presentato non è l'unico scenario possibile. Per semplicità e per svolgere meglio il confronto del caso appena esposto, supponiamo di aumentare il valore del coefficiente δ_s rispetto al caso precedente. Questo fa aumentare il termine $\frac{\delta_s^2 \beta}{k_s}$ presente nel denominatore di x^{SS}. Prendiamo ora come valori dei parametri

x_0	b	ρ	θ	β	k_s	k_f	δ_s	δ_f
40	10	0.05	0.1	0.2	0.15	0.11	0.9	0.8

Riportiamo i grafici relativi allo stato stazionario e alle strategie di comunicazione dei due giocatori al variare di γ.

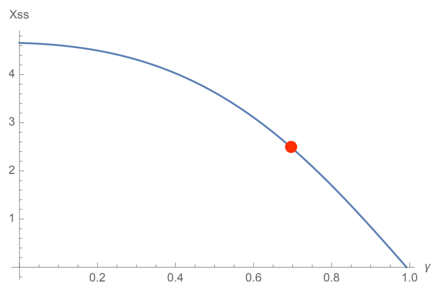


Figura 4.19: Variazione di x^{SS} al variare di γ

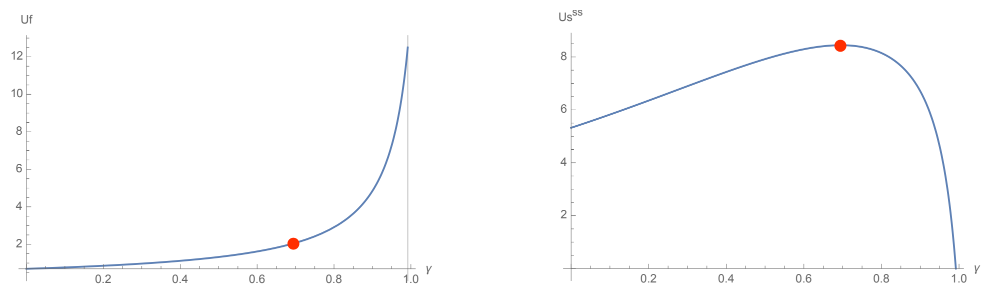


Figura 4.20: Variazione di u_f^* e $u_s^{SS^*}$ al variare di γ

Il valore dello stato stazionario risulta monotono decrescente in γ dato che

$\hat{\gamma} = -0.048$ e quindi $\hat{\gamma} \notin (0, 0.99]$.
Il controllo stazionario del sistema sanitario arriva al suo massimo in $\gamma = 0.69$. Per semplificare la trattattazione, abbiamo indicato con un punto rosso quando ogni funzione è in $\gamma = 0.69$.
Ricordiamo, in aggiunta, che per le condizioni sufficienti (4.27) di ammissibilità γ può assumere valori tra $(0, 0.99]$.
In questo caso la situazione che si determina è completamente diversa rispetto al caso analizzato prima: anche se la propaganda antivaccinista diventa più persuasiva, l'azione di entrambi i giocatori è talmente forte da riuscire a contrastare le idee non-vax portando il valore dello stato stazionario a diminuire.
L'azienda farmaceutica, quando la propaganda antivaccinista è tenue, agisce in maniera moderata, ma si imporebbe con forza non appena i no-vax dovessero aumentare la loro azione. Il sistema sanitario agisce inizialmente molto all'aumentare della propaganda ma, una volta raggiunto $\gamma = 0.69$ (punto di massimo nel grafico 4.20 riguardante il sistema sanitario) diminuisce notevolmente la sua azione. Questo perché l'azione dell'azienda farmaceutica è già molto forte da far decrescere notevolmente il valore dello stato stazionario e in aggiunta la soluzione steady state non assume più valori tali da farla allarmare e spingerla ad imporsi con forza.

L'analisi del parametro γ risulta articolata: ad una prima lettura, si potrebbe dire che la monotonia del valore stazionario è legata al fatto che $\delta_s > \delta_f$. Questo però non è vero: se consideriamo i valori fissati come qui riportato e svolgiamo il medesimo studio per $\delta_s = 0.85$, l'andamento di x^{SS} segue il grafico 4.17, anche se $\delta_s > \delta_f$ ($\hat{\gamma} = 0,01$). D'altro canto, non è nemmeno possibile concludere che la differenza rilevata sull'andamento dello stato stazionario sia legata solo alla variazione dell'efficacia di comunicazione del sistema sanitario, dato che la nostra analisi è stata svolta in tal modo. Anche se le relazioni dei vari parametri è complessa, capiamo però che solo le azioni dei due giocatori potranno evitare una qualsiasi crescita dello stato stazionario all'aumentare di γ. A tal fine, il sistema sanitario cercherà di aumentare $\frac{\delta_s^2 \beta}{k_s}$, mentre l'azienda farmaceutica di far crescere $\frac{\delta_f^2 \theta}{k_f}$, dato che lo stato stazionario vale

$$x^{SS} = \left[b\,(\rho + 1 - \gamma) - \frac{\delta_f^2}{k_f}\theta \right] \left[\frac{1}{(1-\gamma)(\rho + 1 - \gamma) + \frac{\delta_s^2 \beta}{k_s}} \right].$$

Capitolo 5

Conclusioni

L'attuale problema delle vaccinazioni ci ha spinto a realizzare un modello matematico di teoria dei giochi per contrastare la propaganda antivaccinista. In questo scenario, due giocatori decidono di programmare una propria campagna di informazione pro-vaccini in modo da ridurre il numero delle persone non vaccinate. Il sistema sanitario è interessato a conservare l'immunità di una parte della popolazione, mentre l'azienda farmaceutica vuole guadagnare dalla vendita dei vaccini di cui è produttrice.
Fissati gli obiettivi dei due giocatori abbiamo analizzato, proponendo due possibili funzioni di crescita, le interazioni tra le strategie di comunicazioni dei due giocatori cercando di capire quale modello fosse più adatto a descrivere tale situazione e quali fossero le politiche ottime di informazione da parte dei due attori.
Si è dapprima supposto che la crescita della sottopopolazione non vaccinata sia legata esclusivamente all'intensità della propaganda antivaccinista, ipotizzando così che la loro crescita sia esponenziale. L'analisi del modello ha evidenziato che il possibile equilibrio è instabile poiché porta il sistema a divergere diventando così incontrollabile. Ne deriva che il primo modello proposto risulta inutilizzabile e pertanto nasce la necessità di trovarne uno nuovo con ipotesi diverse.
Per risolvere questo problema, è stata riformulata la funzione di crescita dei non vaccinati: oltre all'intensità della propaganda antivaccinista, si è considerato il numero medio di nascite. Questa modifica ha portato ad un modello stabile in cui per entrambi i giocatori risulta ottimale svolgere la propria campagna pro-vaccini, col fine di contrastare la propaganda antivaccinista. Inoltre, i giocatori sono incentivati ad agire subito a prescindere dal livello iniziale dei non vaccinati. Infatti, se attendessero il superamento di un livello prefissato (detto livello di guardia) da parte dei non vaccinati, i costi sostenuti per contrastare gli antivaccinisti risulterebbero nettamente superiori.

Dal punto di vista teorico, il modello proposto presenta una particolare caratteristica: a prescindere dal fatto che i giocatori agiscano alla Nash oppure secondo una gerarchia, supponendo che il leader sia il sistema sanitario mentre l'azienda farmaceutica svolge il ruolo di follower, le stategie d'equilibrio dei due giocatori sono sempre le stesse. Generalmente questo non accade, dato che nei giochi alla Stackelberg il leader dispone di un maggior vantaggio rispetto al follower, poiché trova la sua strategia ottimale dopo aver conosciuto la miglior risposta di quest'ultimo.
Dallo studio delle strategie d'equilibrio e dai relativi stati stazionari si è potuto analizzare come la soluzione ottima cambia al variare dei parametri che caratterizzano il problema.
La variazione che l'intensità di comunicazione dell'azienda farmaceutica può subire, è legata solo ai parametri di cui è dipendente, perciò la variazione dei coefficienti del sistema sanitario non le provoca nessuna modifica. Per quanto riguarda il controllo del sistema sanitario, esso dipende da tutti i parametri che caratterizzano il problema.
Qualora la campagna di comunicazione pro-vaccini di uno dei giocatori sia molto efficace (δ_i) o il costo di essa diminuisca (k_i), tale soggetto è spinto maggiormente ad agire in modo da contrastare in maniera veemente la propaganda antivaccinista, portando a sua volta il valore dello stato stazionario a diminuire. In questo contesto l'altro soggetto può diminuire il proprio sforzo (nel caso del sistema sanitario) o mantenerlo inalterato (nel caso dell'azienda farmaceutica).
Se aumentano le perdite dell'azienda farmaceutica derivanti dalla mancata vendita dei vaccini (θ) oppure crescono le spese mediche da sostenere se un non vaccinato contrae una malattia prevenibile (β), allora il giocatore che subisce tale danno aumenta il proprio sforzo comunicativo sostenendo una maggior spesa a suo carico, inducendo una diminuzione del valore dello stato stazionario, ovvero la riduzione dei non vaccinati. Per quanto concerne l'altro soggetto, il suo sforzo diminuisce (nel caso del sistema sanitario) o rimane inalterato (nel caso dell'azienda farmaceutica).
Nel caso in cui il numero delle nascite (b) tenda a crescere, il valore dello stato stazionario aumenta, dato che il numero dei possibili non vaccinati cresce. L'azienda farmaceutica mantiene la sua azione inalterata, ma il sistema sanitario cerca, in qualche modo, di investire maggiormente nella sua campagna comunicativa in modo da attenuare il numero di non vaccinati.
Trattiamo a parte il caso in cui la propaganda antivaccinista diventa più virulenta e convincente (γ) in quanto l'analisi risulta più delicata.
É emerso che l'azienda farmaceutica agisce in maniera moderata quando la propaganda antivaccinista è tenue ma, non appena i no-vax aumentano la loro azione, tale giocatore decide di imporsi con forza. Il sistema sanitario

invece agisce in maniera più consistente inizialmente, ma una volta che l'azione dell'azienda farmaceutica aumenta in maniera significativa, esso riduce il proprio sforzo.
In questo scenario, l'andamento dello stato stazionario non è regolare. In alcuni casi, se la propaganda no-vax diventa più virulenta, essa potrebbe inizialmente portare ad un aumento del numero dei non vaccinati, ma, una volta raggiunto un livello di soglia, scatenerebbe un'azione così prepotente dell'azienda farmaceutica da determinare una decrescita dei non vaccinati. In altri casi, anche se la propaganda antivaccinista diventa più convincente, il numero dei non vaccinati decresce sempre, grazie all'azione dei due giocatori.
Tale elaborato ha analizzato l'attuale problema di sanità pubblica riguardante le vaccinazioni, riflettendo su quanto incida una campagna di sensibilizzazione pro-vaccini nel contrasto degli antivaccinisti. É emerso che quanto più la propaganda no-vax è virulenta e convincente, i due soggetti agiscono in maniera decisa, riuscendo così a ridurre il numero di non vaccinati. In tale battaglia è pertanto essenziale che una campagna di comunicazione sia il più efficace possibile e altrettanto ben pianificata. Il suo scopo sarà quello di riuscire a sensibilizzare in maniera efficace le persone che, per mancanza di fiducia, hanno seguito le idee no-vax senza badare alle prove scientifiche relative ai vaccini.
In conclusione, questo lavoro vuole essere un tentativo per trovare degli spunti per una corretta strategia d'informazione a favore dei vaccini. Ovviamente si possono considerare degli sviluppi del medesimo che tengano conto anche di aspetti diversi di un problema di per sé complesso e in continua evoluzione.
Come messaggio finale, frutto delle analisi svolte, potremmo dire che, per quanto riguarda i due giocatori sistema sanitario e azienda farmaceutica, essi devono cercare di aumentare l'efficacia della propria campagna di comunicazione pro-vaccini (δ_i) o eventualmente diminuire il costo di essa (k_i). In tal modo potrebbero riuscire ad evitare la circostanza in cui l'azione degli antivaccinisti possa portare ad un innalzamento del numero dei non vaccinati.
Per completezza, il consiglio da rivolgere agli antivaccinisti è quello di svolgere una propaganda moderata e contenuta, facendo sì che la loro azione non sia troppo prepotente da provocare, contro il loro interesse, una diminuzione dei non vaccinati.

Bibliografia

[1] R. Haurie, J. B Krawczyk, G. Zaccour. *Games and dynamic games*. World Scientific, Singapore, 2012.

[2] J. Engwerda. *LQ Dynamic Optimization and Differential Games*. John Wiley & Sons, Chichester, 2005.

[3] E.N. Barron. *Game Theory An Introduction*. Wiley, Hoboken, 2013.

[4] A. Buratto, L. Grosset, B. Viscolani. *Ottimizzazione dinamica. Modelli economici e gestionali*. Libreria Progetto, Padova, 2013.

[5] E.J. Dockner, S. Jørgensen, N. Van Long, G. Sorger. *Differential Games in Economics and Management Science*. Cambridge University Press, Cambridge, 2000.

[6] G. De Marco. *Analisi due*. Decibel-Zanichelli, Bologna, 1999.

[7] R. Guerra, W. Ricciardi, R. Siliquini, Vaccinazioni: Stato dell'arte, falsi miti e prospettive. *Quaderni del Ministero della Salute*, 27, 2017.

[8] Cynthia Gorney *Vaccini, perché servono davvero*, in Vaccini perché sono importanti, National Geographic. Novembre 2017, volume 40 no. 5, pag 2-23.

[9] Marco Cattaneo *Diritti, obblighi e proteste*, in Vaccini perché sono importanti, National Geographic. Novembre 2017, volume 40 no. 5, pag 24-25.

[10] VaccinarSì. *http://www.vaccinarsi.org/malattie-prevenibili/*, sito Internet curato dal Ministero della Salute. 3 Gennaio 2018

[11] J. von Neumann, O. Morgenstern. *Theory of games and economic behaviour*. Princeton University Press, 1953.

[12] A. Bressan. *Noncooperative differential games*. Milan J. Math. 79, 2011, pag 357–427.

[13] M. Bardi, I. Capuzzo Dolcetta. *Optimal control and Viscosity solutions of Hamilton- Jacobi-Bellman equations*. Birkhäuser, Boston, 1997; 2nd printing, Modern Birkhäuser Classics, 2008.

[14] Osborne, J. Martin. *An introduction to game theory*. Oxford University Press, 2004.

[15] H. Scott Bierman and Luis Fernandez. *Game Theory with Economic Applications*. 2nd ed. Addison-Wesley Publishing Co, 1998.

[16] S. Jørgensen and G. Zaccour. *Differential Games in Marketing*. Kluwer Academic Publishers, Boston, 2004.

[17] World Health Organization. Addressing vaccine hesitancy. http://www.who.int/immunization/programmes systems/vaccine hesitancy/en/. 7 Luglio 2017.

[18] S. Ozawa, A. Portnoy, H. Getaneh, S. Clark, M. Knoll, D. Bishai, H. K. Yang, and P. D. Patwardhan. Modeling the economic burden of adult vaccine-preventable diseases in the United States. *Health Affairs*, 2016. Published online October 12.

[19] T. C. Reluga and A. P. Galvani *A general approach for population games with application to vaccination*, Mathematical Biosciences, 230:67–78, 2011.

[20] P. Carrillo-Santisteve and P. L. Lopalco. Measles still spreads in Europe: who is responsible for the failure to vaccinate? *Clinical Microbiology and Infection*, 18:50–56, 2012. Supplement 5.

[21] P. J. Hotez. How the Anti-Vaxxers are winning. *The New York Times*, 2017. The Opinion Pages, February 8, page A25.

[22] Fondazione Veronesi. https://www.fondazioneveronesi.it /magazine/articoli/lesperto-risponde/vaccini-che-cose-limmunita-di-gregge. 31 Gennaio 2018.

[23] Urp, Comunicazione pubblica in rete a cura del Governo Italiano. http://www.qualitapa.gov.it/www.urp.it/sito-storico/potawatomi.netribe.it/urpdegliurp/Sezione.jsp-titolo=Campagna+di+comunicazione+e+informazione&idSezione=46.html. 9 Febbraio 2018.