

Università degli Studi di Padova – Dipartimento di Ingegneria Industriale

Corso di Laurea in Ingegneria Aerospaziale

***Relazione per la prova finale***  
***«Analisi delle orbite attorno ai punti Lagrangiani e  
di alcune missioni ad essi correlati»***

Tutor universitario: Prof. Carlo Bettanini

Laureando: *Gianni Coppe*

Padova, 16/7/2024

## IL PROBLEMA DEI TRE CORPI

Nella fisica classica il problema dei tre corpi consiste nel calcolare come evolverà nel tempo un sistema costituito da tre corpi che interagiscono l'uno con l'altro attraverso la forza di attrazione gravitazionale.

Trovarne una soluzione nel campo dell'astrodinamica è fondamentale per la riuscita delle missioni spaziali. Tuttavia tale problema non ha soluzioni esprimibili in forma esplicita ed evolve in modo caotico.

Andremo ora a considerare delle approssimazioni per rendere risolvibile tale sistema in forma esplicita, analizzare le soluzioni che ne derivano e alcune missioni spaziali che fanno uso di tali risultati.

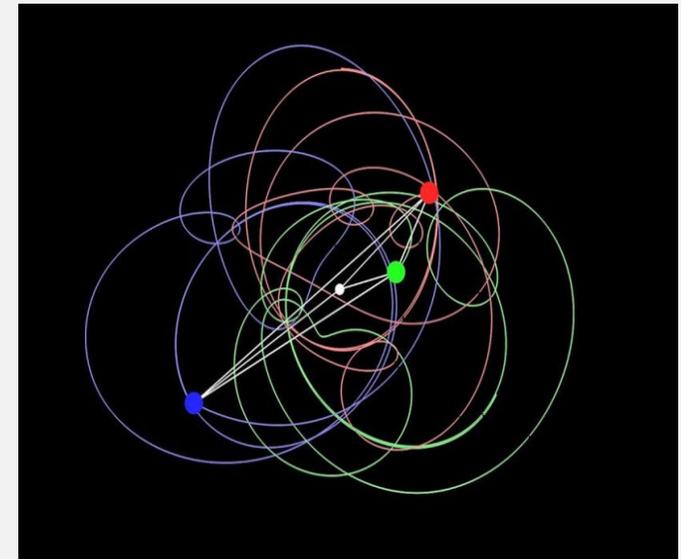


Fig. 1-Moto caotico nel problema dei tre corpi

## Approssimazioni, dati ed equazioni di partenza:

- $m_3$  troppo piccola per influenzare gli altri corpi
- Orbite di  $m_1$  ed  $m_2$  circolari intorno al COG
- Origine del sistema di riferimento nel centro di massa (COG)
- Posizione dei tre corpi:  $(x_1, 0, 0)$ ,  $(x_2, 0, 0)$  ed  $r = (x, y, z)$
- Velocità angolare:  $\bar{\Omega} = \hat{k} \cdot \omega$ ,  $\omega = \frac{2\pi}{T}$
- Periodo:  $T = \frac{2\pi}{\sqrt{\mu}} r_{12}^{\frac{3}{2}} \rightarrow T = \sqrt{\frac{\mu}{r_{12}^3}}$ , dove  $\mu = G(m_1 + m_2)$

- Legge del centro di massa:  $m_1 x_1 + m_2 x_2 = 0$
- Termini introdotti per comodità:  $\pi_1 = \frac{m_1}{m_1 + m_2}$  e  $\pi_2 = \frac{m_2}{m_1 + m_2}$
- Seconda legge della dinamica:  $m\ddot{r} = F_1 + F_2$
- Forze di attrazione gravitazionale tra i due corpi:  $F_1 = -\frac{Gmm_1}{r_1^2} \hat{u}_{r_1} = -\frac{Gmm_1}{r_1^3} \bar{r}_1$ ,  $F_2 = -\frac{Gmm_2}{r_2^2} \hat{u}_{r_2} = -\frac{Gmm_2}{r_2^3} \bar{r}_2$
- Equazione dei moti relativi:  $\ddot{r} = \bar{a}_G + \dot{\bar{\Omega}} \times \bar{r}_{rel} + \bar{\Omega} \times (\bar{\Omega} \times \bar{r}) + 2\bar{\Omega} \times \bar{v}_{rel} + \bar{a}_{rel}$

Che combinate tra di loro e divise per ciascuna coordinata forniscono le equazioni del moto:

$$\ddot{x} - w^2 x - 2w\dot{y} = -\frac{Gm_1}{r_1^3} (x + \pi_2 r_{12}) - \frac{Gm_2}{r_2^3} (x - \pi_1 r_{12})$$

$$\ddot{y} - w^2 y + 2w\dot{x} = -\frac{Gm_1}{r_1^3} y - \frac{Gm_2}{r_2^3} y$$

$$\ddot{z} = -\frac{Gm_1}{r_1^3} z - \frac{Gm_2}{r_2^3} z$$

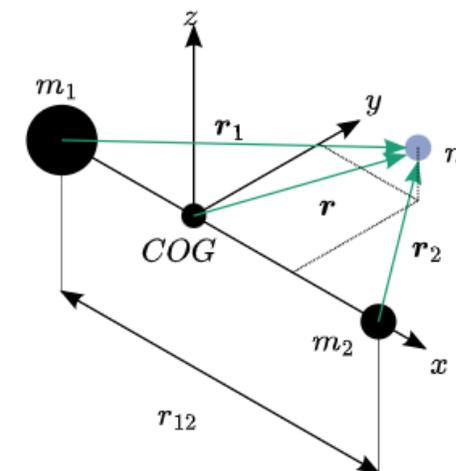


Fig. 2-Problema dei tre corpi ristretto circolare

E' inoltre di estrema utilità cercare dei punti di equilibrio per i quali è necessario che:

$$\dot{x} = \dot{y} = \dot{z} = 0 \text{ e } \ddot{x} = \ddot{y} = \ddot{z} = 0$$

Sostituendo queste condizioni nelle equazioni del moto otterremo due diversi risultati, considerando  $y = 0$  e  $y \neq 0$ , a ciascuno dei quali sono associati dei punti di equilibrio. Questi vengono chiamati punti Lagrangiani.

### Punti di Lagrange equilateri

Si ottengono ponendo  $y \neq 0$ , risolvendo le equazioni si ottengono due soluzioni:

$$\left( \frac{r_{12}}{2} - \pi_2 r_{12}, \frac{\sqrt{3}}{2} r_{12}, 0 \right) \text{ e } \left( \frac{r_{12}}{2} - \pi_2 r_{12}, -\frac{\sqrt{3}}{2} r_{12}, 0 \right)$$

Questi due punti giaceranno quindi sui vertici di un triangolo equilatero in quanto formano un angolo di  $60^\circ$  con l'asse delle  $x$ , questi vengono chiamati  $L_4$  ed  $L_5$ .

### Punti di Lagrange collineari

Si ottengono ponendo  $y = 0$ , in questo modo si ottiene un'equazione che non ha soluzione analitica e va quindi risolta con metodi numerici. Da essi risulta che dato un certo valore di  $\pi_2$  avremo 3 soluzioni, a ciascuna delle quali sarà associato un punto di Lagrange.

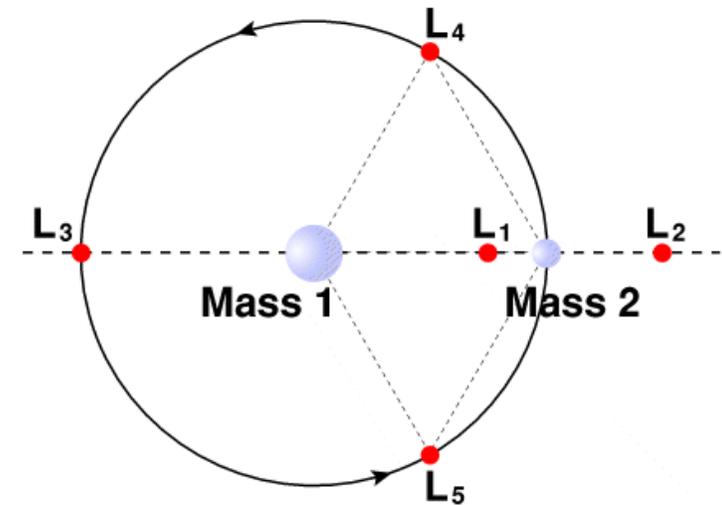


Fig. 3-Punti di Lagrange

Nel sistema Sole-Terra i punti lagrangiani si trovano a questa distanza dal nostro pianeta:

$L_1 = 1,5 \cdot 10^6 km$	$L_2 = 1,5 \cdot 10^6 km$	$L_3 = 300 \cdot 10^6 km$	$L_4 = 150 \cdot 10^6 km$	$L_5 = 150 \cdot 10^6 km$
---------------------------	---------------------------	---------------------------	---------------------------	---------------------------

Un aspetto importante da considerare è la stabilità dei punti di Lagrange.

In termini matematici i tre punti equilateri sono punti di sella del potenziale, pertanto basta applicare piccole perturbazioni ad un corpo posto in essi per farlo allontanare dall'equilibrio.

I due punti equilateri sono invece punti di massimo del potenziale, questo implicherebbe la loro instabilità, tuttavia se è verificata la condizione:  $\frac{m_1}{m_2} + \frac{m_2}{m_1} \geq 25$  allora entra in gioco la forza di Coriolis e orbite vicino a  $L_4$  ed  $L_5$  risulteranno stabili (come nel caso Sole-Terra).

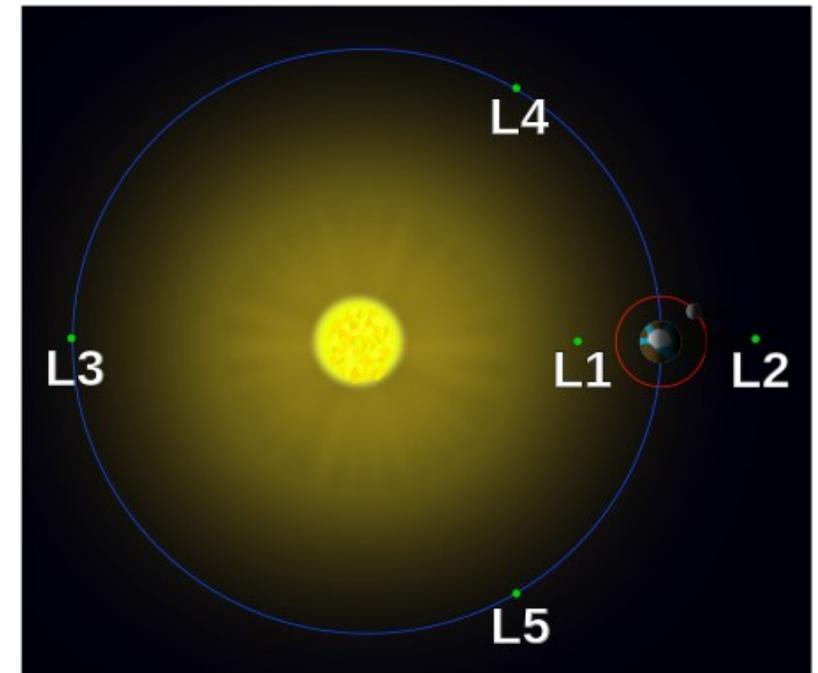


Fig. 4-Punti di Lagrange nel sistema Sole-Terra

Cambiando il sistema di riferimento e ponendo l'origine degli assi in un punto Lagrangiano collineare generico  $L_i$ , le equazioni della posizione di un satellite, rispetto alle coordinate con origine nel COG, possono essere così espresse:

$$\begin{aligned}x' &= x - (1 - \mu + \gamma) \\y' &= y \\z' &= z\end{aligned}$$

Dove  $\gamma$  è un parametro con lo stesso valore della distanza del punto considerato dal corpo di massa minore.

Prendendo le equazioni del moto del CR3BP, inserendovi tali cambi di coordinate e linearizzando il risultato si ottengono le seguenti equazioni:

$$\begin{aligned}\ddot{x}' - 2\dot{y}' - (1 + 2c)x' &= 0 \\ \ddot{y}' + 2\dot{x}' + (c - 1)y' &= 0 \\ \ddot{z}' + cz' &= 0\end{aligned}$$

Dove  $c$  è una costante. Tra le varie soluzioni ve ne è una limitata scrivibile come:

$$\begin{aligned}x' &= -kA_y \cos(\lambda t + \phi) \\y' &= A_y \sin(\lambda t + \phi) \\z' &= A_z \sin(\nu t + \psi)\end{aligned}$$

Dove  $A_y$  e  $A_z$  sono rispettivamente le ampiezze del moto nel piano e fuori da esso,  $\lambda$  e  $\nu$  le frequenze di oscillazione mentre  $\phi$  e  $\psi$  sono le fasi.

Le soluzioni delle equazioni del moto:

$$x' = -kA_y \cos(\lambda t + \phi)$$

$$y' = A_y \sin(\lambda t + \phi)$$

$$z' = A_z \sin(\nu t + \psi)$$

Descrivono una particolare traiettoria, quasi periodica, chiamata orbita di Lissajous. Non si tratta di una vera e propria orbita, ma di una traiettoria dovuta alla combinazione delle forze di attrazione gravitazionale di  $m_1$  ed  $m_2$  e della forza centrifuga a cui è sottoposto il terzo corpo.

Le caratteristiche di un'orbita di Lissajous dipendono dalla sua distanza dal punto Lagrangiano e dal rapporto delle frequenze:  $\frac{\lambda}{\nu}$ , in particolare se tale rapporto è un numero razionale l'orbita risulta chiusa.

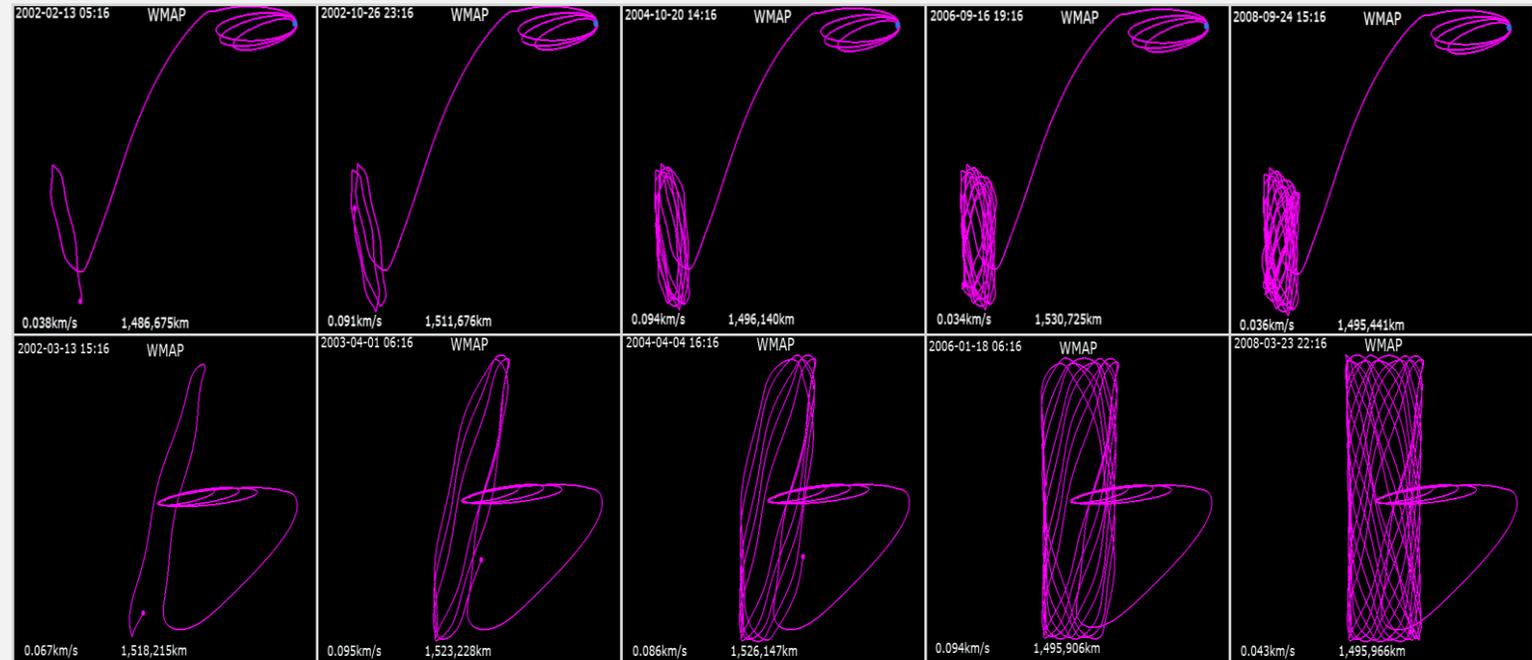


Fig. 5-Evoluzione orbita di Lissajous. Vista obliqua in alto, vista dalla Terra in basso

Un caso particolare di orbite di Lissajous è quello dove  $\lambda = \nu$ , in questo caso si otterrà sempre una traiettoria con componenti giacenti e perpendicolari al piano dei due corpi di massa maggiore, tuttavia essa risulterà periodica. Un tale tipo di traiettoria viene chiamata orbita halo. Può essere fatta un'ulteriore distinzione in orbite Halo nord e sud, a seconda che il terzo corpo passi rispettivamente più tempo al di sopra del piano  $y = 0$  o sotto di esso.

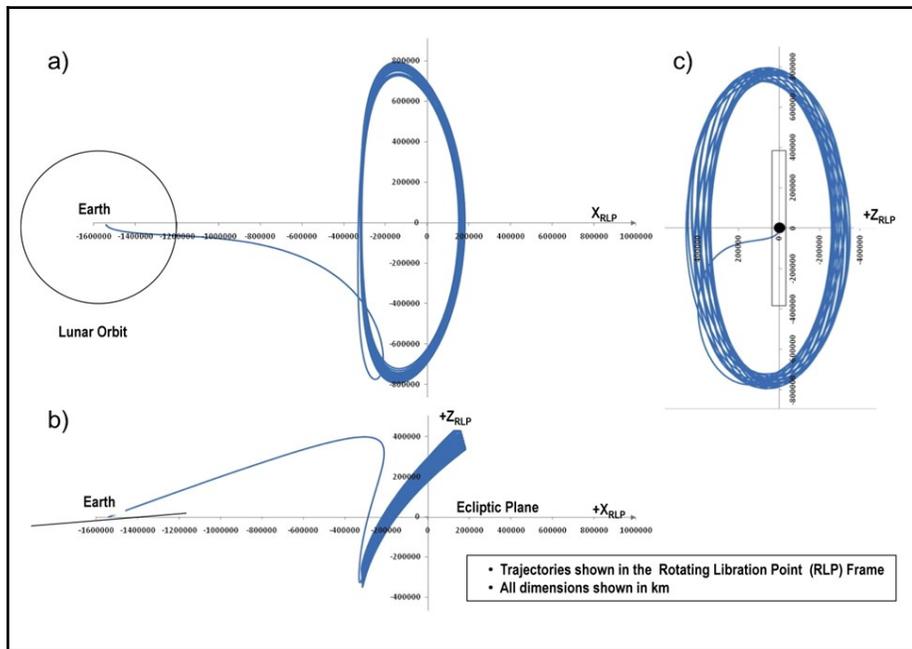


Fig. 6-Orbita Halo: a) Vista polare. b) Vista equatoriale sul piano x-z. c) Vista equatoriale sul piano y-z

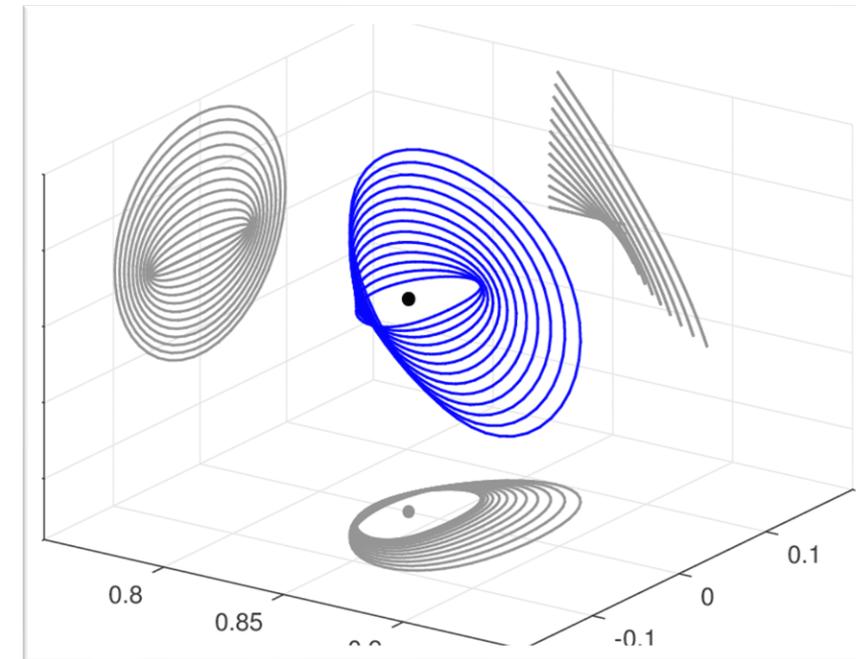


Fig. 7-Famiglia di orbite Halo con proiezioni nel piano

L'ultimo caso di orbite associate a punti Lagrangiani collineari è quello in cui  $A_z = 0$ . In questo caso si otterranno delle traiettorie chiuse, periodiche, giacenti completamente nel piano  $x - y$ , quest'ultime vengono chiamate orbite di Lyapunov. Nel caso in cui, invece, l'orbita oscilli completamente fuori dal piano  $x - y$ , essa viene chiamata orbita di Lyapunov verticale, essa sarà simmetrica rispetto al piano, attraversandolo nel punto Lagrangiano.

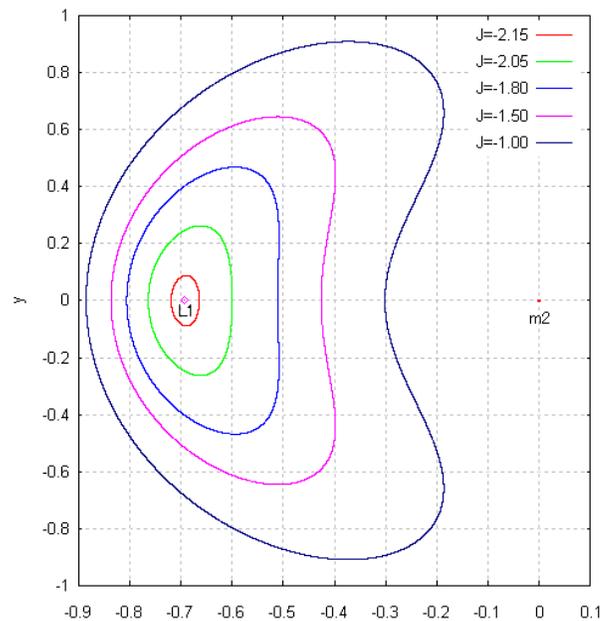


Fig. 8-Orbite di Lyapunov orizzontali a diversa energia

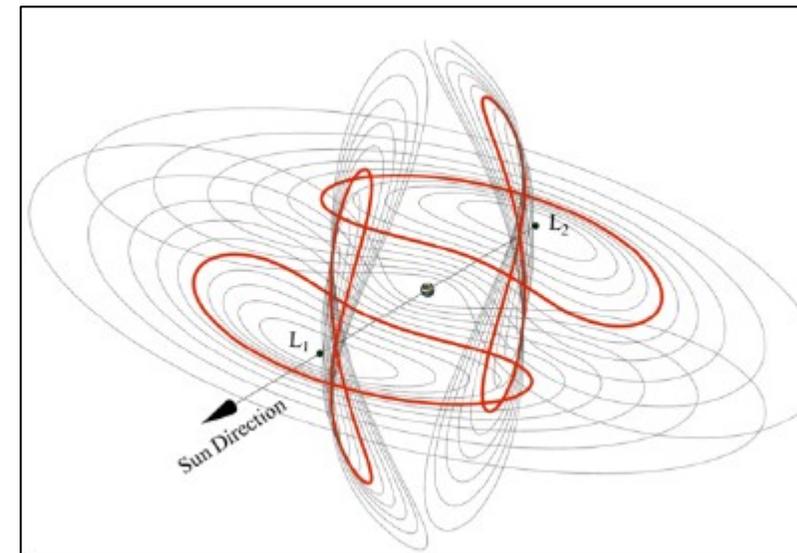


Fig. 9-Orbite di Lyapunov orizzontali e verticali

- Associate ai punti Lagrangiani  $L_4$  ed  $L_5$
- Sistema di riferimento solidale con  $m_2$ , infatti ponendosi nel COG il terzo corpo compie una normale orbita ellittica attorno ad  $m_1$ , mantenendosi però vicino al punto di Lagrange
- Se è verificata la condizione di stabilità la forza di Coriolis manterrà il terzo corpo nei pressi del punto Lagrangiano
- Traiettoria composta da due moti ellittici epiciclici, chiamata orbita tadpole

Quando il terzo corpo (trovandosi in un'orbita più interna e veloce) si avvicina ad  $m_2$  viene accelerato da quest'ultimo e portato in un'orbita più esterna e più lenta, successivamente una volta raggiunto da  $m_2$  verrà rallentato e riportato in un'orbita interna più veloce, in maniera ciclica. In questo modo resterà nei pressi del punto di Lagrange.

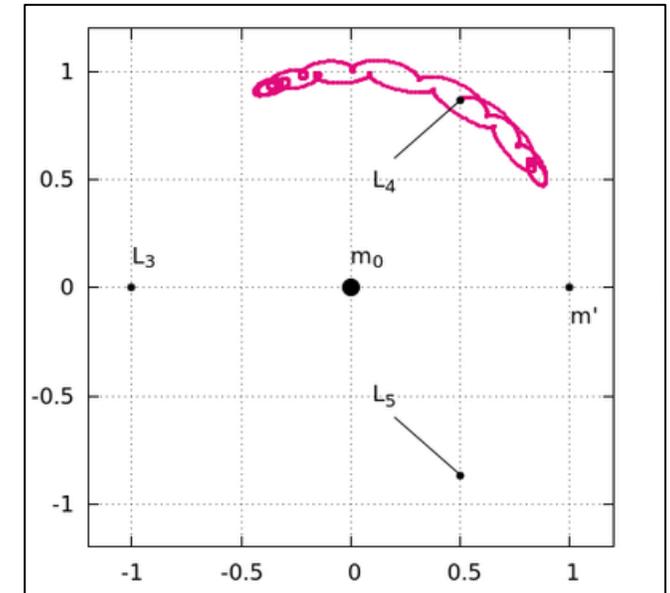


Fig. 10-Orbita tadpole, vista polare

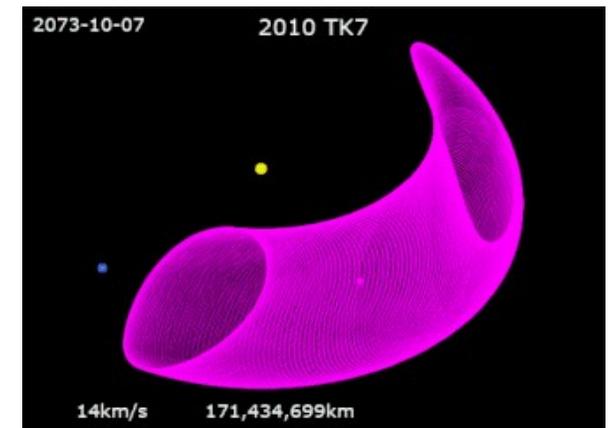


Fig. 11-Orbita tadpole, vista obliqua

Modificando le condizioni iniziali le orbite tadpole assumono forme diverse, è quindi possibile estenderle oltre  $L_3$ , arrivando fino al punto Lagrangiano equilatero opposto. Un tale tipo di traiettoria viene chiamata orbita Horseshoe.

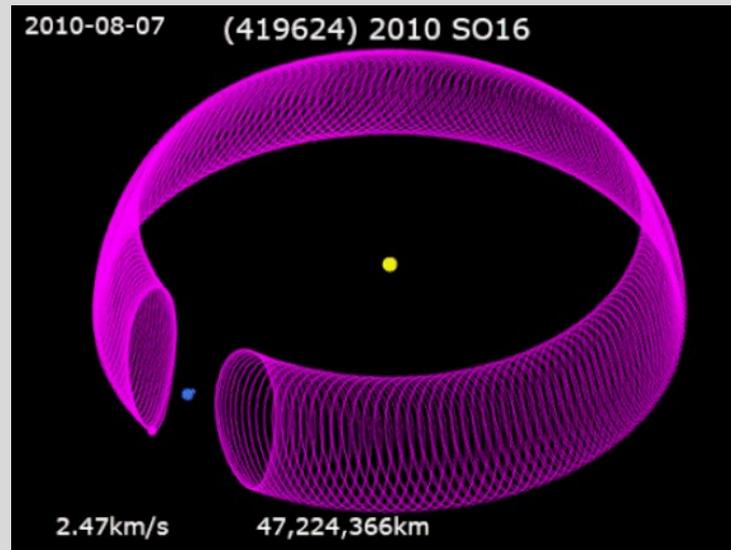


Fig. 12-Orbita Horseshoe, vista obliqua

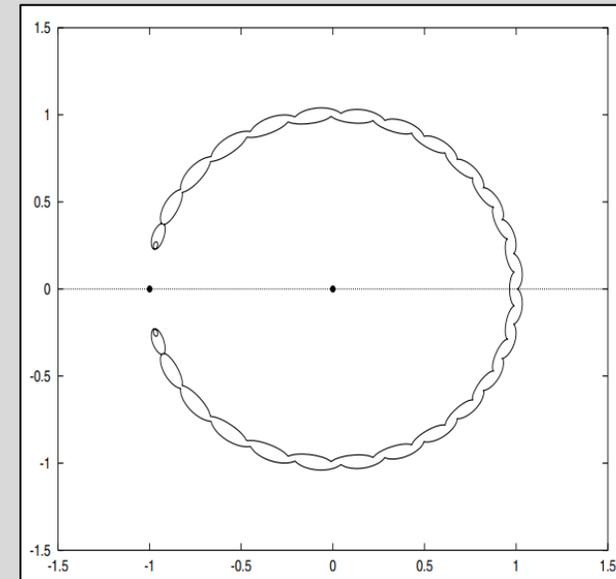


Fig. 13-Orbita Horseshoe, vista polare

SOHO è un telescopio spaziale del 1995, ancora operativo, lanciato congiuntamente da ESA e NASA. Il suo obiettivo è studiare il Sole nella sua interezza: l'interno, la superficie, l'atmosfera ed il vento solare. Il punto Lagrangiano  $L_1$  si presta perfettamente per questa missione in quanto:

- Permette di mantenere il satellite in posizione in un'orbita Halo, con periodo di circa sei mesi (con l'aggiunta di piccole manovre di station keeping ogni due o tre mesi)
- L'orbita Halo permette di comunicare con il satellite in quanto lo mantiene a qualche grado di distanza dal Sole, che se puntato direttamente produce troppo rumore nelle comunicazioni radio
- Permette di osservare il Sole senza interruzioni
- Permette di comunicare costantemente con la Terra

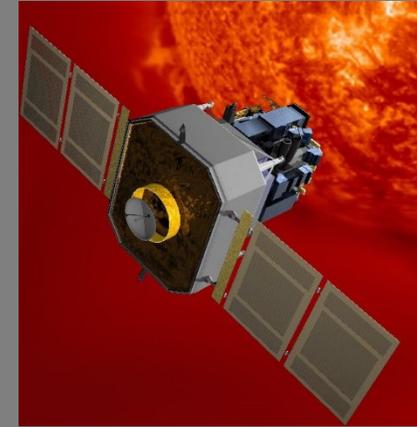


Fig. 14-Telescopio SOHO

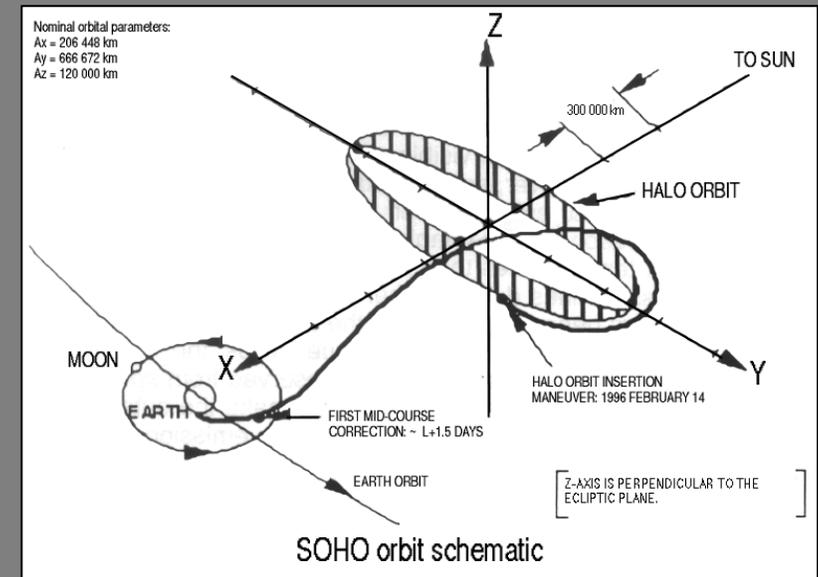


Fig. 15-Inserimento in orbita Halo di SOHO

Il James Webb Space Telescope è un telescopio spaziale lanciato il 25 dicembre 2021. Il suo obiettivo è principalmente di osservare la flebile emissione elettromagnetica delle prime stelle e galassie formatesi dopo il Big Bang, nel campo dell'infrarosso. Data la sensibilità degli strumenti è necessario che essi si trovino sempre all'ombra, il punto  $L_2$  risulta un'ottima scelta poiché:

- Mantiene in posizione il satellite in un'orbita halo
- Mantiene Sole, Luna e Terra da un lato del telescopio bloccandone le radiazioni con un uno scudo solare, per non interferire con le osservazioni dall'altro lato
- L'orbita halo permette di non trovarsi mai oscurato da Terra e Luna mantenendo una distanza da  $L_2$  tra i 250.000 e gli 830.000 km, quindi:
  - Garantisce una temperatura costante del satellite
  - Permette un'illuminazione ininterrotta della luce solare, producendo costantemente energia
  - Permette di comunicare in qualsiasi momento con la Terra

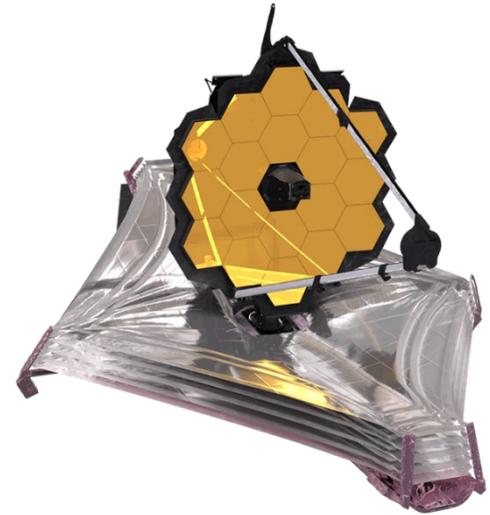


Fig. 16-James Webb Space Telescope

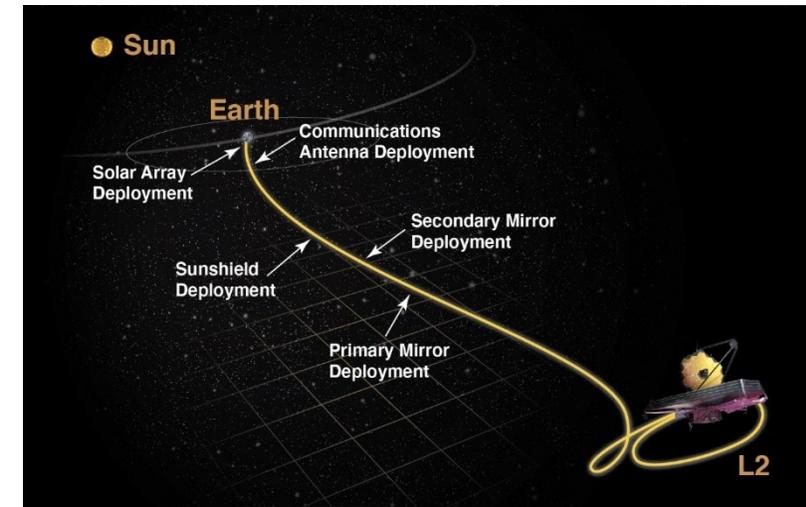


Fig. 17-Lancio ed orbita del JWST

VIGIL è una missione programmata per il 2031 e sviluppata dall'ESA, che si pone come obiettivo quello di monitorare gli eventi meteorologici spaziali dovuti al Sole, per poter proteggere le infrastrutture terrestri, spaziali e missioni umane nello spazio. Questi eventi infatti possono: disturbare le telecomunicazioni, rovinare le reti elettriche ed i satelliti in orbita. Per tale missione un'orbita stabile intorno al punto Lagrangiano  $L_5$  risulta ideale poiché:

Manterrà il satellite nei pressi di  $L_5$ , dal quale potrà misurare velocità, densità e temperatura del vento solare prima che rotoli verso la Terra

Da  $L_5$  permetterà di vedere una parte del Sole non visibile dalla Terra, prevedendo la formazione di brillamenti solari e di espulsioni di massa coronale, diversi giorni prima che siano visibili dal nostro pianeta

Da una posizione obliqua è più semplice calcolare l'evolversi di tali eventi solari rispetto alla prospettiva che si ha dalla Terra o dai punti  $L_1$  ed  $L_2$

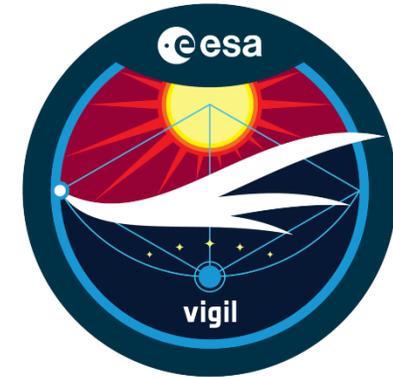


Fig. 18-Logo della missione VIGIL



Fig. 19-Rappresentazione di VIGIL

Risulta chiaro che il problema dei tre corpi ristretto circolare approssima molto bene la realtà, almeno finché si prendono in considerazione le masse irrisorie dei satelliti artificiali.

Le orbite descritte dalle soluzioni delle equazioni del moto sono di estrema utilità, poiché permettono di operare con delle traiettorie ed in delle condizioni estremamente favorevoli, non possibili altrimenti.

È quindi evidente che i punti Lagrangiani sono e saranno fondamentali per la riuscita di moltissime missioni, e come dimostra Vigil, non solo per interesse scientifico ma anche per la nostra sicurezza.

- *Orbital Mechanics for Engineering Students*, Fourth Edition. Howard D. Curtis. Cap 2.12
- *Low-energy lunar trajectory design*, Jeffrey S. Parker and Rodney L. Anderson, Jet Propulsion Laboratory Pasadena, California July 2013. Cap 2:  
<https://descanso.jpl.nasa.gov/monograph/series12/LunarTraj--Overall.pdf>
- <https://science.nasa.gov/resource/what-is-a-lagrange-point/>
- *Lecture 8 Motion near L4, L5 - Tadpole and Horseshoe Orbits*, Dr. Shane Ross:  
[https://drive.google.com/drive/folders/1DQKqOIMn19Xhz5Z0id\\_fvQMU2JqChKt8](https://drive.google.com/drive/folders/1DQKqOIMn19Xhz5Z0id_fvQMU2JqChKt8)
- [https://www.esa.int/Science\\_Exploration/Space\\_Science/SOHO/SOHO\\_overview#:~:text=SOHO%20moves%20around%20the%20Sun,line%20with%20the%20two%20bodies.](https://www.esa.int/Science_Exploration/Space_Science/SOHO/SOHO_overview#:~:text=SOHO%20moves%20around%20the%20Sun,line%20with%20the%20two%20bodies.)
- <https://soho.nascom.nasa.gov/home.html>
- <https://science.nasa.gov/mission/soho/>
- <https://science.nasa.gov/mission/webb/>
- <https://jwst.nasa.gov/content/about/faqs/faq.html>
- [https://www.esa.int/Space\\_Safety/Vigil](https://www.esa.int/Space_Safety/Vigil)
- [https://lws.larc.nasa.gov/vfmo/pdf\\_files/ESA-S2P-LGR-MO-0002\\_i2r0\\_Vigil\\_mission\\_objectives\\_and\\_payload\\_description.pdf](https://lws.larc.nasa.gov/vfmo/pdf_files/ESA-S2P-LGR-MO-0002_i2r0_Vigil_mission_objectives_and_payload_description.pdf)

- Fig. 1- <https://www.justnerd.it/wp-content/uploads/2024/04/simulazioni-orbite-il-problema-dei-tre-corpi.jpg>
- Fig. 2- [https://orbital-mechanics.space/\\_images/circular-restricted-three-body-problem.svg](https://orbital-mechanics.space/_images/circular-restricted-three-body-problem.svg)
- Fig. 3- [https://upload.wikimedia.org/wikipedia/commons/d/da/Lagrange\\_2\\_mass.gif](https://upload.wikimedia.org/wikipedia/commons/d/da/Lagrange_2_mass.gif)
- Fig. 4- [https://upload.wikimedia.org/wikipedia/commons/thumb/a/a5/Lagrange\\_points\\_simple.svg/1200px-Lagrange\\_points\\_simple.svg.png](https://upload.wikimedia.org/wikipedia/commons/thumb/a/a5/Lagrange_points_simple.svg/1200px-Lagrange_points_simple.svg.png)
- Fig. 5-In alto: [https://upload.wikimedia.org/wikipedia/commons/thumb/f/fl/Animation\\_of\\_Wilkinson\\_Microwave\\_Anisotropy\\_Probe\\_trajectory.gif/450px-Animation\\_of\\_Wilkinson\\_Microwave\\_Anisotropy\\_Probe\\_trajectory.gif](https://upload.wikimedia.org/wikipedia/commons/thumb/f/fl/Animation_of_Wilkinson_Microwave_Anisotropy_Probe_trajectory.gif/450px-Animation_of_Wilkinson_Microwave_Anisotropy_Probe_trajectory.gif)
- Fig. 5-In basso: [https://upload.wikimedia.org/wikipedia/commons/thumb/5/55/Animation\\_of\\_Wilkinson\\_Microwave\\_Anisotropy\\_Probe\\_trajectory\\_-\\_Viewd\\_from\\_Earth.gif/450px-Animation\\_of\\_Wilkinson\\_Microwave\\_Anisotropy\\_Probe\\_trajectory\\_-\\_Viewd\\_from\\_Earth.gif](https://upload.wikimedia.org/wikipedia/commons/thumb/5/55/Animation_of_Wilkinson_Microwave_Anisotropy_Probe_trajectory_-_Viewd_from_Earth.gif/450px-Animation_of_Wilkinson_Microwave_Anisotropy_Probe_trajectory_-_Viewd_from_Earth.gif)
- Fig. 6- <https://i.sstatic.net/sBH2i.png>
- Fig. 7- [https://www.researchgate.net/figure/Family-of-Earth-Moon-L1-northern-halo-orbits-with-projections-on-the-coordinate-planes\\_fig5\\_312686502](https://www.researchgate.net/figure/Family-of-Earth-Moon-L1-northern-halo-orbits-with-projections-on-the-coordinate-planes_fig5_312686502)
- Fig. 8- [https://encrypted-tbn0.gstatic.com/images?q=tbn:ANd9GcQxVDritUInbwikxWvv\\_s0WoTZnyoNUgIvIMQ&s](https://encrypted-tbn0.gstatic.com/images?q=tbn:ANd9GcQxVDritUInbwikxWvv_s0WoTZnyoNUgIvIMQ&s)
- Fig. 9- <https://encrypted-tbn0.gstatic.com/images?q=tbn:ANd9GcQpISxrKlSPfkL6g1d9WA97hZYa4ge7vTxg32Z9SsNfcv9qQMyOZfmtBE7qopIedi20cs&usqp=CAU>
- Fig. 10- <https://www.researchgate.net/profile/Rocio-Paez-2/publication/315667172/figure/fig4/AS:476766184710148@1490681324649/Two-different-examples-of-tadpole-orbits-for-0001-The-positions-of-the-two.png>
- Fig. 11- [https://upload.wikimedia.org/wikipedia/commons/thumb/e/e6/Animation\\_of\\_2010\\_TK7.gif/330px-Animation\\_of\\_2010\\_TK7.gif](https://upload.wikimedia.org/wikipedia/commons/thumb/e/e6/Animation_of_2010_TK7.gif/330px-Animation_of_2010_TK7.gif)
- Fig. 12- [https://upload.wikimedia.org/wikipedia/commons/thumb/5/53/Animation\\_of\\_%28419624%29\\_2010\\_SO16\\_orbit.gif/525px-Animation\\_of\\_%28419624%29\\_2010\\_SO16\\_orbit.gif](https://upload.wikimedia.org/wikipedia/commons/thumb/5/53/Animation_of_%28419624%29_2010_SO16_orbit.gif/525px-Animation_of_%28419624%29_2010_SO16_orbit.gif)
- Fig. 13- *Families of periodic horseshoe orbits in the restricted three-body problem*. E. Barrabés<sup>1</sup> and S. Mikkola. Pag. 1117
- Fig. 14- [https://www.mdsc.nasa.gov/wp-content/uploads/2019/08/502636main\\_soho-sun.jpg](https://www.mdsc.nasa.gov/wp-content/uploads/2019/08/502636main_soho-sun.jpg)
- Fig. 15- [https://soho.nascom.nasa.gov/about/images/halo\\_orbit.gif](https://soho.nascom.nasa.gov/about/images/halo_orbit.gif)
- Fig. 16- [https://upload.wikimedia.org/wikipedia/commons/thumb/2/2a/JWST\\_spacecraft\\_model\\_3.png/330px-JWST\\_spacecraft\\_model\\_3.png](https://upload.wikimedia.org/wikipedia/commons/thumb/2/2a/JWST_spacecraft_model_3.png/330px-JWST_spacecraft_model_3.png)
- Fig. 17- <https://jwst.nasa.gov/ImagesContent/about/WebbFlightPathAndDeployments.jpg>
- Fig. 18- [https://upload.wikimedia.org/wikipedia/commons/thumb/6/6d/ESA\\_Vigil\\_mission\\_patch.png/390px-ESA\\_Vigil\\_mission\\_patch.png](https://upload.wikimedia.org/wikipedia/commons/thumb/6/6d/ESA_Vigil_mission_patch.png/390px-ESA_Vigil_mission_patch.png)
- Fig. 19- [https://www.esa.int/ESA\\_Multimedia/Images/2019/01/ESA\\_s\\_space\\_weather\\_mission\\_-\\_ESA\\_Vigil](https://www.esa.int/ESA_Multimedia/Images/2019/01/ESA_s_space_weather_mission_-_ESA_Vigil)