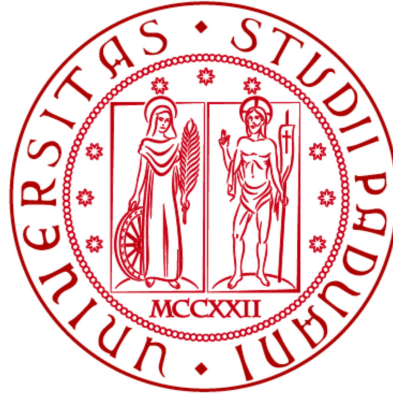


UNIVERSITÀ DI PADOVA

---

FACOLTÀ DI INGEGNERIA

Corso di Laurea Magistrale in Ingegneria Aerospaziale



## TESI DI LAUREA MAGISTRALE

Validazione di modelli semplificati a parametri concentrati e  
dell'approccio adottato per la simulazione numerica dello  
sloshing in serbatoi cilindrici verticali

*Validation of the simplified lumped models and of the CFD  
approach adopted for sloshing description in upright cylindrical  
tanks*

*Laureando:*  
Secchieri Marco  
*Matricola:*  
1036456

*Relatore:*  
Pavarin Daniele  
*Correlatore:*  
Lazzarin Marta

15 ottobre 2013



## Sommario

Nel seguente documento saranno validati il modello meccanico equivalente massa-molla-smorzatore e quelli analitici che permettono di calcolare le forze ed i momenti idrodinamici che sono causati dal movimento del liquido. I modelli sono applicati al caso di un serbatoio cilindrico verticale con l'ipotesi di piccole sollecitazioni in modo da poterli considerare come lineari e la calibrazione degli stessi viene effettuata sia nel caso di ingresso traslazionale che rotazionale. La validazione è ottenuta confrontando i risultati ottenuti tramite simulazioni CFD con quelli ricavati attraverso i suddetti modelli in caso di disturbo puramente traslazionale. Nel processo di calibrazione vengono, inoltre, validate le procedure da seguire nell'analisi numerica tramite CFD in modo che questa possa essere ripetibile nello studio di uno stesso tipo di serbatoio con diverse dimensioni o livelli di riempimento di liquido.

## Abstract

In the following document the equivalent mechanical mass-spring-dashpot model and the analytical ones calculating hydrodynamics forces and momenta caused by liquid motion is validated. Models are applied on an upright cylindrical tank in the case of small perturbations so they can be assumed as linear and their calibration is done both in case of translational and pitching inputs. The validation is carried out taking into account the differences between model's and CFD's results in case of pure translational input on system. Moreover, during the calibration, the processes to be followed for CFD simulations are verified. This allows the application of the CFD methodology defined to the study of *sloshing* inside containers of different shape, size and liquid fill level.



# Indice

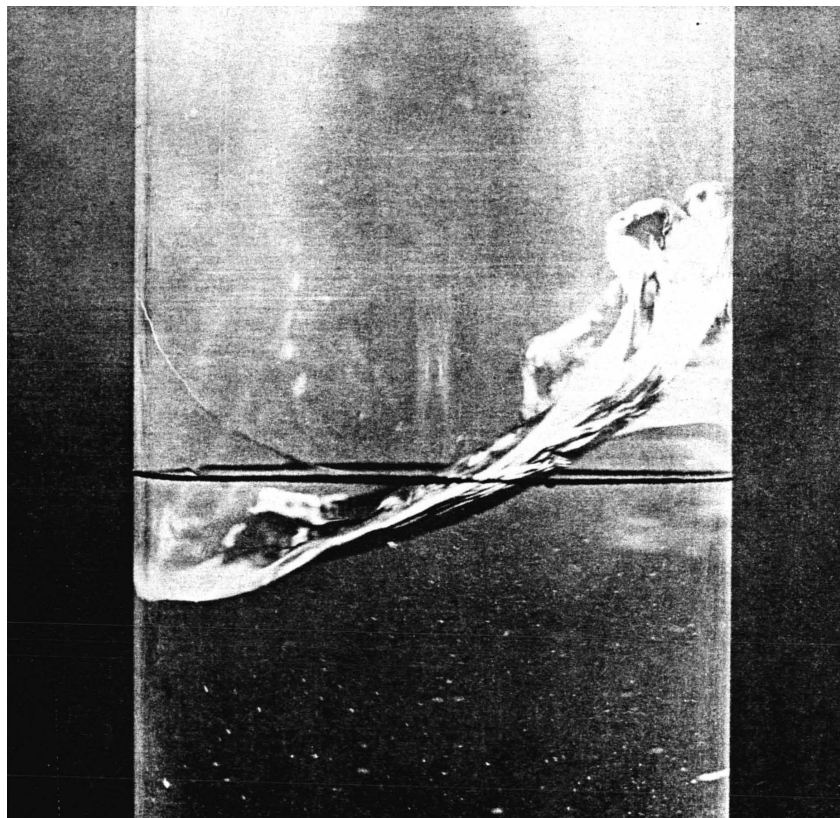
<b>1</b>	<b>Introduzione</b>	<b>3</b>
1.1	Il fenomeno dello <i>sloshing</i> . . . . .	3
1.2	Obiettivo . . . . .	4
1.3	Stato dell'arte . . . . .	4
<b>2</b>	<b>Studio del modello analitico</b>	<b>7</b>
2.1	Equazioni del campo fluido . . . . .	7
2.2	Formulazione variazionale . . . . .	10
2.3	Modi normali in un serbatoio cilindrico verticale . . . . .	13
2.4	Sloshing forzato lineare . . . . .	16
2.4.1	Eccitazione laterale . . . . .	17
2.4.2	Eccitazione di <i>pitching</i> . . . . .	23
<b>3</b>	<b>Modelli meccanici equivalenti</b>	<b>29</b>
3.1	Modello massa-molla-smorzatore . . . . .	30
3.1.1	Parametri del modello per un serbatoio cilindrico verticale . . . . .	32
<b>4</b>	<b>Simulazioni CFD</b>	<b>35</b>
4.1	Impostazioni della simulazione . . . . .	35
4.2	Attivazione dei modelli fisici . . . . .	36
4.3	Geometria e <i>mesh</i> . . . . .	36
4.4	Impostazioni numeriche . . . . .	38
4.5	Comandi per Flow3D . . . . .	38
4.6	Modelli matematici applicati . . . . .	40
4.7	Esempi di simulazioni effettuate . . . . .	46
<b>5</b>	<b>Calibrazione del modello meccanico equivalente</b>	<b>48</b>
5.1	Frequenza naturale del sistema . . . . .	49
5.2	Massa fluida e massa di <i>sloshing</i> . . . . .	52
5.3	Coefficiente di smorzamento . . . . .	54
5.4	Forza e momento di <i>sloshing</i> . . . . .	56
5.5	Altri parametri utili . . . . .	58
<b>6</b>	<b>Validazione del modello</b>	<b>59</b>
<b>7</b>	<b>Confronto dei risultati</b>	<b>61</b>
7.1	Altri risultati utili . . . . .	63
7.2	Sviluppi futuri . . . . .	63
	<b>Riferimenti bibliografici</b>	<b>65</b>



# 1 Introduzione

## 1.1 Il fenomeno dello *sloshing*

Lo *sloshing* e' un fenomeno dovuto al movimento di un fluido in un contenitore chiuso non completamente riempito che causa una variazione della distribuzione delle pressioni sulle pareti del serbatoio e, conseguentemente, una risultante ed un momento idrodinamici non nulli sulle pareti del serbatoio e, quindi, sull'intera struttura a cui e' vincolato.



**Figura 1:** Sloshing di liquido all'interno di un serbatoio cilindrico.

Questo e' un aspetto critico per molte applicazioni che hanno a che fare con lo stoccaggio di liquido in serbatoi: si pensi al trasporto di carburanti o liquidi pericolosi su strade tramite autocisterne, piuttosto che alle navi petroliere che solcano i mari cariche di greggio e, non ultimo per importanza, il settore aerospaziale. Il movimento del propellente nei serbatoi di un satellite e' uno dei principali fattori che disturba il controllo del satellite stesso e le vibrazioni strutturali causate dallo *sloshing* interferiscono continuamente con il sottosistema in questione.

L'analisi del fenomeno dello *sloshing* dal punto di vista vibrazionale e' fondamentale per adattare ad ogni configurazione satellite-serbatoio un giusto sottosistema di controllo d'assetto tale da evitare eventi catastrofici causati dal raggiungimento della condizione di risonanza tra un possibile disturbo che affligge il satellite ed il modo di vibrare del liquido nel serbatoio. Inoltre, conoscere l'entita' delle risultanti idrodinamiche prodotte dal fluido nel contenitore e' pure un aspetto importante in fase di *design* perche' permettere di stimare l'autorita' del sistema di controllo d'assetto, ovvero le coppie di controllo massime che questo deve essere in grado di erogare per controllare il satellite nel peggior caso possibile (ovvero quando agiscono sulla struttura le piu' elevate risultanti idrodinamiche).

## 1.2 Obiettivo

Lo scopo del presente documento e' quello di validare i modelli meccanici equivalenti a parametri concentrati e di dimostrare la correlazione tra il modello meccanico equivalente, le simulazioni CFD ed i modelli analitici per lo *sloshing laterale* di una massa fluida in moto relativo rispetto ad un serbatoio cilindrico verticale. Le prove saranno effettuate per un dato livello di riempimento del contenitore e per sollecitazioni sia trasversali (lungo un asse contenente uno dei diametri del serbatoio) che rotazionali (attorno ad un asse ortogonale all'asse di simmetria del serbatoio). Per fare cio' verranno eseguite delle simulazioni numeriche utilizzando il programma Flow3D in modo da ricavare i parametri che descrivono il modello equivalente per via numerica e tali risultati saranno, poi, confrontati con quelli ricavati attraverso l'applicazione dei modelli analitici che, nel caso di serbatoio cilindrico verticale, sono stati ottenuti in forma chiusa e autoconsistente.

Come verra' spiegato meglio nei paragrafi seguenti, il modello analizzato e' un modello lineare e, quindi, applicabile solo entro certi limiti legati all'entita' delle perturbazioni a cui sottoporremo il liquido contenuto nel serbatoio. Di conseguenza, diventa fondamentale individuare anche il *range* in cui tale approssimazione puo' considerarsi verificata. Nel caso in cui si voglia verificare il legame tra il modello e le simulazioni numeriche per un diverso livello di riempimento, la procedura da seguire e' la stessa che viene illustrata in questo documento avendo cura di considerare, tuttavia, una massa di liquido diversa in base alla percentuale di riempimento imposta ad un serbatoio di uguale geometria.

## 1.3 Stato dell'arte

Il fenomeno dello *sloshing*, come gia' detto, e' presente in varie applicazioni che vanno dal trasporto di liquidi su strada, per via mare o aerea, allo studio della stabilita' di un satellite in orbita. Proprio nel settore aerospaziale la ricerca per lo studio di questo fenomeno e' stata molto intensa ed ha avuto inizio negli anni '60 con gli esperimenti effettuati dalla *National Aeronautics and Space Administration* (NASA) sul movimento del liquido nei serbatoi dei satelliti. Negli anni '90 e' stato condotto il *Middeck 0-Gravity Dynamics Experiment* sullo *Space Shuttle*. La *European Space Agency* (ESA) ha dato il via ad una serie di studi lanciando lo SLOSHSAT.

Inoltre, dato che l'accoppiamento tra il fenomeno dello *sloshing* e lo *spin* di un satellite e' molto problematico a causa della possibilita' della risonanza tra i due fenomeni, la maggior parte dei satelliti spinnanti dal 1980 e' stata testata dalla torre di lancio degli *Applied Dynamics Laboratories* sfruttando modelli in scala. Un altro importante contributo e' stato dato dallo *Southwest Research Institute*, ma la ricerca e' ancora aperta sia in campo accademico che industriale.

A livello teorico, invece, sono stati sviluppati diversi modelli analitici per descrivere il fenomeno dello *sloshing* in maniera corretta, in modo tale da avere un metodo che possa predire il comportamento del liquido in movimento senza dover ricorrere ad esperimenti.

La teoria della dinamica dello *sloshing* di un liquido in contenitori parzialmente riempiti e' basata sullo sviluppo delle equazioni del campo di moto fluido, sulla stima del moto della superficie libera e delle forze e dei momenti idrodinamici risultanti. Le soluzioni esplicite sono possibili solo per pochi casi particolari come serbatoi cilindrici e rettangolari verticali. Il problema delle condizioni al contorno e' risolto tipicamente per l'analisi modale e per le caratteristiche della risposta del sistema a sollecitazioni esterne. L'analisi modale del moto della superficie libera del liquido in serbatoi parzialmente riempiti permette di stimare le frequenze naturali e le forme dei rispettivi modi di vibrare e proprio la conoscenza delle frequenze naturali e' fondamentale per il processo di *design* dei serbatoi di liquido e del sistema di controllo d'assetto per i veicoli spaziali. Le frequenze naturali del liquido della superficie libera compaiono in combinazione



con le condizioni al contorno (condizione *cinematica* e *dinamica*) piuttosto che nell'equazione di continuita' del fluido (equazione di Laplace).

Le condizioni al contorno per una superficie libera che non racchiude completamente il fluido solitamente specificano il valore del campo in ogni punto sulla superficie di confine o in termini del gradiente normale alla superficie del contenitore o una combinazione delle due. Le condizioni al contorno possono essere classificate in tre tipologie diverse (come e' stato fatto per la prima volta da Morse e Feshbach nel 1953:

- condizioni al contorno di *Dirichlet*, che fissano il valore del campo sulla superficie;
- condizioni al contorno di *Neumann*, che specificano il valore del gradiente normale alla superficie;
- condizioni al contorno di *Cauchy*, che fissano sia il valore del campo che del gradiente normale alla superficie.

Ogni classe e' appropriata per differenti tipi di equazioni e diverse condizioni al contorno. Per esempio, le condizioni al contorno di Dirichlet per una superficie chiusa specificano unicamente una soluzione per l'equazione di Laplace all'interno della superficie chiusa.

La formulazione variazionale basata sul principio di Hamilton sembra essere la formulazione piu' potente per sviluppare le equazioni del campo fluido. Questo approccio e' stato utilizzato e usato da Lawrence, Troesch, Bogoryad, Borisova, Petrov, Moiseev, Luke, Whitnam, Lukovskii, Rumyantsev, Limarchenko, Timokha e Rocca a partire dal 1958, arrivando al 1997. Il metodo delle equazioni integrali e' stato adottato per contenitori in cui le pareti verticali bagnate non sono perfettamente verticali, ma curve, come per i serbatoi sferici o cilindrici orizzontali (Budiansky nel 1960 e McIver nel 1989). Qualche approccio analitico e approssimato per la stima delle frequenze naturali e' stato sviluppato da Housner (1963), Evans (1990) e Linton (1993).

Il comportamento dinamico della superficie libera del propellente liquido e' stata indirizzata da Ehrlich, Abramson, Eulitz e Glaser, Bonneau, Martin, Dodge e Garza tra il 1959 ed il 1971. L'analisi modale in contenitori cilindrici e' stata trattata originariamente da Poisson (1828), ma i risultati non si sono stati interpretati poiche' la teoria delle funzioni di Bessel non era sufficientemente matura all'epoca. Le equazioni del moto di un liquido in serbatoi rettangolari e cilindrici rigidi di profondita' costante e con condizioni al contorno linearizzate furono ottenute anche da Rayleigh (1887), Steklov (1902) e Lamb (1945). La soluzione dell'equazione di Laplace utilizzando il metodo della separazione delle variabili e' un metodo di meno potente per i casi i cui la profondita' del liquido e' variabile ed e' conveniente utilizzare altre teorie, per esempio quella di Rayleigh-Ritz.

Le forme dei modi di vibrare del pelo libero per contenitori con simmetria assiale sono state determinate da Borisova (1962), Bonneau (1964), Moiseev e Petrov (1965, 1966), Pfeiffer (1967), Einfeldt (1969), McNeil e Lamb (1970), Henrici (1970), Pshenichnov (1972) e Boyarshina e Koval'chuk (1986) determinarono i modi normali e le frequenze naturali della superficie libera in un cilindro inclinato. Trotsenko nel 1967 studio' le oscillazioni del liquido in un serbatoio cilindrico con un *baffle* ad anello.

Bauer e Mooney, nel 1964, analizzarono le oscillazioni della superficie libera del liquido in un quarto di serbatoio cilindrico e in un serbatoio con sezione trasversale ad anello; in entrambe i casi, si e' riscontrato che le frequenze naturali del pelo libero hanno la stessa espressione del caso di serbatoio cilindrico, ma con diverse radici delle funzioni di Bessel. Le frequenze di *sloshing* per contenitori di geometrie diverse sono state valutate da Miles, Kuttler e Sigillito, Fox e Kuttler, Meserole e Fortini e McIver tra il 1964 ed il 1993.

Dopo la determinazione delle frequenze naturali del liquido sono stati sviluppati anche modelli per studiare e prevedere la risposta forzata del liquido contenuto in un serbatoio sotto diversi tipi

di sollecitazione (impulsiva, sinusoidale, periodica o *random*). L'orientazione delle sollecitazioni in ingresso al serbatoio puo' essere laterale, di *pitching*, *yaw* o *roll* o una combinazione delle precedenti. In regime di moto forzato e' importante conoscere i carichi idrodinamici che agiscono sul contenitore e la loro fase rispetto alla forzante. In generale, le risultanti idrodinamiche si calcolano come integrali delle pressioni sulle pareti bagnate del serbatoio. In questo caso si potrebbe anche determinare l'altezza dell'onda della superficie libera che causa lo spostamento del centro di massa. Piu' ci si avvicina alla condizione di risonanza e piu' il liquido e' afflitto da fenomeni nonlineari che devono essere considerati in modelli appostamente studiati.

La dinamica dello *sloshing* di liquido sottoposto a sollecitazioni impulsive e' stata studiata da Moris, Werner e Sundquist, Jacobsen e Ayre e Hoskins e Jacobsen negli anni tra il 1938 ed il 1957. Nel 1974, Sogabe e Shibata hanno studiato la risposta transitoria e a regime della superficie del liquido con eccitazione sinusoidale.

La dinamica di serbatoi cilindrici con sezioni trasversali arbitrarie sottoposti a disturbi traslazionali e di *pitching* e' stata studiata da Case e Parkinson nel 1956 e da Abramson e Ransleben nel 1961. Bauer ed Eidel (1999) hanno studiato lo *sloshing* liquido in diverse configurazioni per serbatoi cilindrici. La dinamica del movimento di liquido in un serbatoio cilindrico che descrive le oscillazioni di Lissajous e' stato affrontato da Bauer (1958).

Le soluzioni delle equazioni del moto liquido in serbatoi di forma qualsiasi sotto l'azione di piccole oscillazioni orizzontali e di *pitching* sono state ottenute da Trembath (1957) e W. H. Chu (1971). La soluzione e' stata data in funzione di appositi integrali che possono essere valutati sia algebricamente che numericamente in base al problema in questione. Una trattazione generale per una geometria del serbatoio arbitraria in moto forzato e' stata data in termini del potenziale delle velocita' da Brooks (1959).

In genere, la pressione idrodinamica del liquido in un contenitore rigido ha due componenti distinte: una componente che e' direttamente proporzionale all'accelerazione del serbatoio ed e' causata dalla parte del fluido che si muove solidalmente al contenitore ed una seconda componente, conosciuta come 'pressione convettiva', che e' soggetta allo *sloshing* sulla superficie libera. Una rappresentazione realistica della dinamica del liquido all'interno di contenitori chiusi puo' essere approssimata con un sistema meccanico equivalente. L'equivalenza si deve intendere in termini di uguali risultanti e momenti idrodinamici che il fluido provoca sulle pareti del serbatoio. Nel caso di moto del liquido planare e lineare si possono sviluppare i modelli meccanici equivalenti come una serie di sistemi masse-molle-smorzatori o di un set di pendoli. Per i fenomeni di *sloshing* non lineari, invece, si ricorre ad un pendolo sferico per simulare lo *sloshing* rotazionale e caotico.

Graham, nel 1951, ha sviluppato un pendolo equivalente per rappresentare le oscillazioni della superficie libera in un serbatoio a regime. Graham e Rodriguez, successivamente, hanno introdotto un altro modello costituito da una massa di *sloshing* puntiforme attaccata con delle molle alle pareti del serbatoio ad una opportuna profondita' e da una massa rigida fissa. Pinson (1964) ha determinato le costanti elastiche delle molle per un propellente liquido in un serbatoio ellissoidico. Modelli nella forma di sistemi massa-molla-smorzatore sono stati presi in considerazione da Ewart, Bauer, Armstrong e Kachigan, Ransleben e Mooney. Bauer e Villeneuve, nel 1967, hanno sviluppato un modello meccanico che simuli la dinamica del liquido in serbatoi rettangolari. Dodge ha introdotto un modello meccanico equivalente per i satelliti spinnanti (1994).

I momenti d'inerzia equivalenti del liquido in un contenitore cilindrico sono stati stimati numericamente da Patrom nel 1985 e sperimentalmente da Werner e Coldwell nel 1961. Nei sistemi *multibody*, gli effetti dello *sloshing* di liquido sono stati modellati utilizzando modelli meccanici da Ebert, Enright e Wog e Rumold.

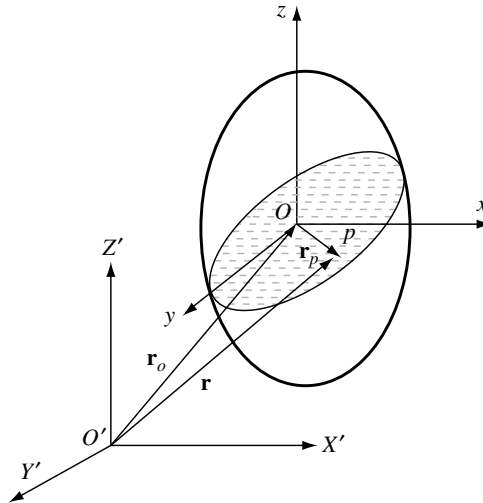
## 2 Studio del modello analitico

In questa sezione vengono riportate le principali equazioni utilizzate per definire il problema dello *sloshing* di una certa quantita' di liquido in un serbatoio dal punto di vista fluidodinamico, con particolare attenzione al caso di serbatoio cilindrico verticale. Verranno trattati l'analisi modale del movimento della superficie libera del liquido contenuto nel serbatoio e, successivamente, l'analisi modale dello stesso fenomeno nel caso di *sloshing* forzato lineare (relazioni ricavate da [1], capitoli 1, 2 e 5).

### 2.1 Equazioni del campo fluido

Le equazioni del moto generiche per un fluido racchiuso in un recipiente possono essere semplificate se si assume il serbatoio come *rigido ed impermeabile*. Inoltre, il fluido in questione viene considerato *aviscoso, incomprimibile* e inizialmente *irrotazionale*. Gli effetti della *capillarita'* e della *tensione superficiale* sono trascurati in tutto il campo fluido, anche se, in alcuni casi particolari e piu' semplici, la tensione superficiale puo' essere introdotta senza troppi problemi. Tenendo ben presenti queste ipotesi e' possibile generare le oscillazioni della superficie libera di liquido applicandovi un certo impulso o un certo disturbo iniziali.

Per poter considerare un modello da cui ricavare delle equazioni del moto valide sia nel caso di moto libero che forzato e' conveniente fare riferimento ad un serbatoio che si muove lungo una generica traiettoria nello spazio senza rotazioni e considerare un sistema di riferimento (s.d.r.) mobile centrato nel baricentro del serbatoio. Le equazioni saranno scritte, quindi, rispetto alle coordinate mobili e a quelle inerziali come mostrato nella figura 2.



**Figura 2:** Serbatoio di liquido in moto con evidenziati il sistema di riferimento inerziale e mobile.

Il sistema di assi  $O'X'Y'Z'$  e' il s.d.r. inerziale fisso nello spazio, mentre quello mobile e' il sistema  $Oxyz$  centrato nel centro di massa del serbatoio e con il piano  $Oxy$  che coincide con la superficie indisturbata del liquido.

Se scriviamo l'equazione di Eulero in forma vettoriale abbiamo che:

$$\frac{\partial \vec{q}}{\partial t} + (\vec{q} \cdot \nabla) \vec{q} = -\frac{1}{\rho} \nabla P - \nabla(gZ') \quad ,$$

in cui  $\vec{q}$  e' la velocita' del fluido,  $\partial\vec{q}/\partial t$  e' l'*accelerazione locale* del flusso nel punto in cui le coordinate non possono variare (fatta, cioe', rispetto ad un osservatore fisso),  $(\vec{q}\cdot\nabla)\vec{q}$  e' l'*accelerazione convettiva* di una particella fluida che segue la corrente con velocita'  $\vec{q}$  nella direzione del flusso (ovvero l'accelerazione misurata da un osservatore che si muove con la particella fluida),  $P$  e' la pressione del fluido,  $\rho$  la densita' e  $gZ'$  e' il potenziale gravitazionale.

Per un flusso *irrotazionale* ( $\nabla\times\vec{q}=0$ ), l'accelerazione convettiva puo' essere scritta anche come:

$$(\vec{q}\cdot\nabla)\vec{q} = \frac{1}{2}\nabla q^2 - \vec{q}\times(\nabla\times\vec{q}) = \frac{1}{2}\nabla q^2 \quad .$$

Per un flusso irrotazionale e' possibile identificare un potenziale della velocita'  $\Phi$  definito come:

$$\vec{q} = -\nabla\Phi$$

che, sostituito nell'equazione di Eulero scritta in precedenza, conduce alla forma seguente:

$$\nabla\left(\frac{P}{\rho} + \frac{1}{2}q^2 + gZ' - \frac{\partial\Phi}{\partial t}\right) = 0 \quad .$$

Integrando la precedente equazione si ottiene:

$$\frac{P}{\rho} + \frac{1}{2}q^2 + gZ' - \frac{\partial\Phi}{\partial t} = C(t) \quad ,$$

nota anche come equazione di Kelvin per un flusso fluido non stazionario. Avendo intergato rispetto ad  $x$ ,  $y$  e  $z$  la costante  $C(t)$  e' variabile nel tempo. Se considero l'equazione di continuita' di un flusso incomprimibile risulta che:

$$\nabla\cdot\vec{q} = 0$$

che, sostituita nell'equazione dell'accelerazione convettiva fornisce la ben nota equazione di Laplace:

$$\nabla^2\Phi = 0 \quad .$$

Alla luce di questi risultati e' possibile scrivere l'equazione di Eulero nei due s.d.r. inerziale e mobile. Se considero per prima il s.d.r.  $Oxyz$  in moto rispetto al riferimento inerziale con velocita'  $\vec{v}_0$  dell'origine  $O$  rispetto ad  $O'$ , allora la variazione temporale del potenziale  $\Phi$  in un punto fisso nel s.d.r.  $O'x'y'z'$  misurata da un osservatore nel riferimento mobile  $Oxyz$  e' data da:

$$\left(\frac{\partial}{\partial t} - \vec{v}_0\cdot\nabla\right)\Phi$$

poiche' il punto considerato sembra avere una velocita'  $-\vec{v}_0$  rispetto all'osservatore. Tenendo presenti queste considerazioni l'equazioni di Eulero scritta in funzione della velocita' totale  $\vec{q}$  diventa la seguente:

$$\frac{P}{\rho} + \frac{1}{2}q^2 + gZ' - \frac{\partial\Phi}{\partial t} + \vec{v}_0\cdot\nabla\Phi = C(t) \quad .$$

D'altra parte, invece, definendo la velocita' relativa della particella misurata nel riferimento mobile come:

$$\vec{q}_{\text{rel}} = \vec{q} - \vec{v}_0 = \nabla\Phi - \vec{v}_0$$

Ne consegue che si puo' scrivere  $\vec{q}$  come  $\vec{q}_{\text{rel}} + \vec{v}_0$  e, quindi, l'equazione di Eulero in termini della

velocita' relativa diventa:

$$\frac{P}{\rho} + \frac{1}{2}q_{\text{rel}}^2 + gZ' - \frac{\partial\Phi}{\partial t} - \frac{1}{2}v_0^2 = C(t) .$$

Considerando il pelo libero del fluido ( $z = \eta$ ), qui la pressione esterna e pari a quella ambiente e si puo' porre uguale a zero nell'equazione scritta per la velocita' totale ottenendo:

$$\frac{1}{2}(\nabla\Phi \cdot \nabla\Phi) + g\eta - \frac{\partial\Phi}{\partial t} + \vec{v}_0 \cdot \nabla\Phi = 0 ,$$

in cui la costante  $C(t)$  e' stata assorbita nella funzione potenziale  $\Phi$ . Questa ultima equazione e' la *condizione al contorno dinamica*.

Ora, la velocita' verticale di una particella situata sul pelo libero del liquido  $z = \eta(r, \theta, t) = \eta(x, y, t)$  deve essere posta uguale alla velocita' verticale della superficie libera stessa; tale condizione e' nota anche come *condizione cinematica del pelo libero* ed e' esprimibile come segue:

$$-\frac{\partial\Phi}{\partial t} = \frac{\partial\eta}{\partial t} + \vec{q}_{\text{rel}} \cdot \nabla\eta .$$

Nelle pareti bagante dal fluido e sul fondo del serbatoio le componenti normali della velocita' del fluido devono essere le stesse velocita' del serbatoio nei punti considerati. Per esempio, se il serbatoio e' mobile nel solo piano  $xz$  allora le condizioni appena espresse sono date da:

$$\vec{v}_0 = \dot{x}_0 \vec{i} + \dot{z}_0 \vec{k}$$

$$\vec{v}_0 = (\dot{x}_0 \cos \theta) \vec{i}_r - (\dot{x}_0 \sin \theta) \vec{i}_\theta + \dot{z}_0 \vec{i}_z .$$

Le condizioni al contorno sulle pareti e sul fondo di un serbatoio in coordinate cartesiane e cilindriche sono, rispettivamente:

$$-\frac{\partial\Phi}{\partial z} \Big|_{z=-h} = \dot{z}_0 , \quad \frac{\partial\Phi}{\partial x} \Big|_{x=a} = \dot{x}_0$$

$$-\frac{\partial\Phi}{\partial z} \Big|_{z=-h} = \dot{z}_0 , \quad \frac{\partial\Phi}{\partial r} \Big|_{r=R} = \dot{x}_0 \cos \theta .$$

A questo punto e' possibile dividere il potenziale in due contributi, un potenziale di disturbo  $\tilde{\Phi}$  e un potenziale  $\Phi_0$  che definisce il moto del serbatoio, ottenendo:

$$\Phi = \tilde{\Phi} + \Phi_0 .$$

Il potenziale  $\Phi_0$  lo si puo' ricavare integrando l'equazione della velocita'  $\vec{v}_0$  scritta in coordinate cilindriche e, sfruttando le relazioni appena scritte per il potenziale, si possono esprimere le condizioni al contorno per il pelo libero scritte in termini di  $\tilde{\Phi}$ :

$$\frac{1}{2}(\nabla\tilde{\Phi} \cdot \nabla\tilde{\Phi}) + (g + \dot{z}_0)\eta - \frac{\partial\tilde{\Phi}}{\partial t} + \dot{x}_0 r \cos \theta = 0$$

$$-\frac{\partial\tilde{\Phi}}{\partial z} = \frac{\partial\eta}{\partial t} - \frac{\partial\eta}{\partial r} \frac{\partial\tilde{\Phi}}{\partial r} - \frac{1}{r^2} \frac{\partial\eta}{\partial\theta} \frac{\partial\tilde{\Phi}}{\partial\theta} .$$

Se si volesse introdurre l'effetto della tensione superficiale  $\sigma$  si dovrebbe considerare la

variazione di pressione che si verifica a cavallo della superficie libera del liquido come descritto dall'equazione di Laplace-Young:

$$p_s = \sigma \left( \frac{1}{R_1} + \frac{1}{R_2} \right) ,$$

in cui  $R_1$  ed  $R_2$  sono i raggi principali di curvatura.

E' possibile riassumere le intere condizioni al contorno in funzione del potenziale di disturbo per un serbatoio cilindrico come segue:

$$\begin{aligned} \nabla^2 \tilde{\Phi} &= 0 \\ \frac{\partial \tilde{\Phi}}{\partial r} \Big|_{r=R} &= 0 \quad , \quad \frac{\partial \tilde{\Phi}}{\partial z} \Big|_{z=-h} = 0 \\ \frac{1}{2}(\nabla \tilde{\Phi} \cdot \nabla \tilde{\Phi}) + (g + \ddot{z}_0)\eta - \frac{\partial \tilde{\Phi}}{\partial t} + \frac{\sigma}{\rho} \left( \frac{1}{R_1} + \frac{1}{R_2} \right) + \ddot{x}_0 r \cos \theta &= 0 \quad , \quad z = \eta(r, \theta, t) \\ -\frac{\partial \tilde{\Phi}}{\partial z} &= \frac{\partial \eta}{\partial t} - \frac{\partial \eta}{\partial r} \frac{\partial \tilde{\Phi}}{\partial r} - \frac{1}{r^2} \frac{\partial \eta}{\partial \theta} \frac{\partial \tilde{\Phi}}{\partial \theta} \quad , \quad z = \eta(r, \theta, t) \end{aligned}$$

La curvatura  $\kappa$  in coordinate cilindriche e' data da:

$$\kappa = - \left( \frac{1}{R_1} + \frac{1}{R_2} \right)$$

che, linearizzata, diventa:

$$\kappa = - \left[ \eta_{rr} + \frac{\eta_r}{r} + \frac{\eta_{\theta\theta}}{r^2} \right] .$$

Si noti che l'effetto non lineare e non conservativo dell'equazione  $\nabla^2 \tilde{\Phi} = 0$  e' presente solo nella regione del pelo libero ( $z = \eta$ ) del liquido la quale, nel caso si voglia effettuare la sola analisi modale del sistema, puo' essere comodamente trascurata. Inoltre, se la funzione potenziale e' ottenuta analiticamente in forma chiusa, allora e' possibile ottenere le frequenze proprie dei modi di vibrare  $\omega_{mn}$  tramite l'applicazione delle condizioni dinamiche del pelo libero sfruttando il fatto che  $\tilde{\Phi}$  e' armonica nel tempo. Un altro approccio potente e quello variazionale congiunto al metodo di Rayleigh-Ritz.

## 2.2 Formulazione variazionale

L'approccio variazionale e' basato sulla stima degli estremi di una certa funzione che esprima il comportamento del sistema. A questo proposito si considera il lagrangiano  $L = T - V$  del sistema che, in questo caso, deve essere minimizzato (o massimizzato) ed in cui le variabili  $T$  e  $V$  rappresentano l'energia cinetica e potenziale rispettivamente. Il principio variazionale o di Hamilton e' espresso come segue:

$$\delta I = \delta \int_{t_1}^{t_2} (T - V) dt = 0$$

e, in sostanza, afferma che, per un sistema conservativo con vincoli perfetti, il moto del sistema fisico fra due istanti nello spazio delle configurazioni e' tale che l'azione sia stazionaria in corrispondenza della traiettoria del moto per piccole perturbazioni dello stesso. Quindi, ogni

moto attuale del sistema sara' tale per cui la media nel tempo della differenza tra energia cinetica e potenziale, in altre parole il lagrangiano  $L$ , risulti minima.

La formulazione del principio e' molto potente poiche' racchiude in un'unica definizione sia il potenziale del sistema fluido, sia le condizioni al contorno che vi sono applicate. Se si sostituiscono l'espressione dell'energia cinetica e potenziale per un fluido nell'equazione del principio di Hamilton, si ottiene che:

$$T = \int_v \frac{\rho}{2} |\nabla \Phi|^2 dv$$

$$V = \int_S \frac{\eta}{2} (\rho g \eta) dS$$

$$\delta I = \delta \int_{t_1}^{t_2} \left\{ \int_v \frac{\rho}{2} |\nabla \Phi|^2 dv - \int_S \frac{\eta}{2} (\rho g \eta) dS \right\} dt .$$

Considerando la costanza della densita' del fluido  $\rho$  e la linearita' degli operatori  $\nabla$  e  $\delta$  si ha che:

$$\delta I = \rho \int_{t_1}^{t_2} \left\{ \int_v \nabla \Phi \nabla \delta \Phi dv - g \int_S \eta \delta \eta dS \right\} dt .$$

Sfruttando il teorema di Green si possono trasformare gli integrali di volume in integrali di superficie:

$$\int_v \nabla \Phi \nabla \delta \Phi dv = \int_S \Phi \frac{\partial \delta \Phi}{\partial n} dS$$

ed, inoltre, considerando la relazione:

$$\nabla \Phi = \vec{n} \frac{\partial \Phi}{\partial n} = -\vec{n} \frac{\partial \eta}{\partial t}$$

in cui  $\vec{n}$  e' un versore normale alla superficie equipotenziale di  $\Phi$  nel punto considerato, si arriva al seguente risultato per il principio variazionale:

$$\rho \int_{t_1}^{t_2} \left\{ \int_S \left\{ \Phi \frac{\partial \delta \Phi}{\partial n} - g \eta \delta \eta \right\} dS \right\} dt \implies$$

$$\implies -\rho \int_{t_1}^{t_2} \left\{ \int_S \left\{ \Phi \delta \frac{\partial \eta}{\partial t} + g \eta \delta \eta \right\} dS \right\} dt = 0 .$$

Integrando per parti il tutto assume la forma seguente:

$$\rho \int_{t_1}^{t_2} \int_S \left\{ -\frac{\partial \Phi}{\partial t} + g \eta \right\} \delta \eta dS dt = 0$$

che fornisce la *condizione dinamica della superficie libera linearizzata*:

$$-\frac{\partial \Phi}{\partial t} + g \eta = 0 .$$

Ora, introducendo l'operatore di Neumann  $H$ , e' possibile rendere armonica la funzione del potenziale delle velocita'  $\Phi$  all'interno del volume fluido  $v$ . Il fatto che  $\Phi$  sia armonico e' basato sul fatto che l'integrale della velocita' della superficie libera  $\dot{\eta}(s)$  si annulla sulla superficie libera

stessa, ovvero:

$$\int_S \dot{\eta}(s) ds = 0$$

La funzione  $\Phi$  soddisfa le seguenti condizioni alle pareti del serbatoio e sulla superficie libera rispettivamente:

$$\frac{\partial \Phi}{\partial n} = 0 \quad \frac{\partial \Phi}{\partial n} = -\dot{\eta}$$

In questo caso si puo' esprimere  $\Phi$  come  $\Phi = H\dot{\eta}$ , in cui  $H$  e' l'operatore:

$$H = \int_S H(s, v) \dot{\eta}(s) ds = \Phi(v)$$

Si nota che il nucleo e' la funzione di Green del problema di Neumann per la regione fluida  $v$  e risulta logaritmico nel caso in cui il problema sia piano, ovvero il volume fluido si riduca ad una superficie. Il kernel, invece, e' una funzione polare nel caso di problemi tridimensionali. Di conseguenza,  $H$  e' un operatore continuo e autoaggiunto ed e' possibile scrivere la seguente rappresentazione:

$$\Phi(v) = H \frac{\partial \Phi}{\partial z} = -H \frac{\partial \eta}{\partial t}$$

Ora, derivando rispetto al tempo entrambe i membri dell'equazione ed utilizzando la precedente relazione della condizione dinamica linearizzata per la superficie libera si ottiene:

$$g\eta + H \frac{\partial^2 \eta}{\partial t^2} = 0$$

E' possibile scrivere la media dell'energia in funzione dell'operatore di Neumann come segue:

$$I_1 = \frac{\rho}{2} \int_{t_1}^{t_2} \int_S \left\{ H \left( \frac{\partial \eta}{\partial t} \right)^2 - g\eta^2 \right\} ds dt$$

In alternativa, si puo' sfruttare la condizione dinamica linearizzata del pelo libero per esprimere  $I$ :

$$I = \int_{t_1}^{t_2} \left\{ \int_v \frac{\rho}{2} |\nabla \Phi|^2 dv - \frac{1}{g} \int_S \Phi^2 dS \right\} dt$$

Le due relazioni appena scritte possono essere sfruttate per stimare le frequenze naturali della superficie libera del liquido. Sulla superficie libera del liquido  $S$  sia il potenziale delle velocita' che l'altezza dell'onda della superficie libera possono essere espresse in termini del tempo e dello spazio come segue:

$$\Phi(s, t) = F(s) \cos \omega t \quad \eta(s, t) = G(s) \sin \omega t$$

in cui  $\omega$  e la frequenza naturale del pelo libero del liquido. Sostituendo le equazioni appena scritte nell'espressione dell'energia media ed integrando nel tempo tra  $t_1 = 0$  e  $t_2 = 2\pi/\omega$  si ottiene:

$$I_1 = \lambda \int_S H G \cdot G ds - \int_S G^2 ds$$

$$I_2 = \int_v \frac{\rho}{2} |\lambda F|^2 dv - \lambda \int_S F^2 ds$$

con  $\lambda = \omega^2/g$ .



Le frequenze naturali del pelo libero sono determinate sfruttando il metodo di Rayleigh-Ritz basato sull'introduzione di una combinazione lineare di un set completo di funzioni i cui coefficienti formano una serie di parametri variazionali lineari. Per esempio, e' possibile esprimere la funzione  $F$  come sommatoria delle funzioni di prova  $f_n$ :

$$F = \sum_{n=1}^N a_n f_n$$

Sostituendo l'espressione di  $F$  appena introdotta nell'espressione di  $I_2$  e considerando che i coefficienti  $a_n$  devono soddisfare un sistema di equazioni algebriche omogeneo ricavato imponendo  $\partial I / \partial a_n = 0$  per  $n = 1, 2, \dots, N$ , alla fine si ottiene il seguente insieme di equazioni:

$$\sum_{m=1}^N a_{mn} (A_{mn} - \lambda B_{mn}) = 0$$

in cui si ha che:

$$A_{mn} = \int_v \nabla f_n \cdot \nabla f_m \, dv \quad , \quad B_{mn} = \int_S f_n f_m \, dS \quad , \quad A_{mn} = A_{nm} \quad , \quad B_{mn} = B_{nm} \quad .$$

Una soluzione non banale per il sistema di equazioni esiste solo se il determinante dei coefficienti  $a_n$  si annulla:

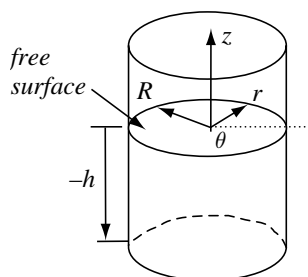
$$|A_{mn} - \lambda B_{mn}| = 0$$

L'equazione appena scritta e' detta equazione delle frequenze ed il primo termine puo' essere determinato attraverso il metodo variazionale. La procedura prevede di considerare i primi termini della serie di  $F$  e di risolvere l'equazione secolare in maniera esatta, aumentando, poi, il numero di termini di  $F$  considerati e risolvendo ancora il tutto. L'operazione prosegue finche' il valore della frequenza naturale del sistema non varia piu' all'aumentare delle funzioni considerate.

### 2.3 Modi normali in un serbatoio cilindrico verticale

Nel caso dei serbatoi cilindrici verticali si possono considerare casi di geometrie vuote all'interno o con setti o diaframmi. In base a che tipo di frequenze naturali si vogliono ottenere e' possibile suddividere il serbatoio in piu' parti verticali con pareti cilindriche concentriche a quella esterna o con pareti radiali.

Nella seguente analisi ci si concentra su una geometria come quella riportata nella figura 3.



**Figura 3:** Geometria di un serbatoio cilindrico.

Per una geometria di questo tipo una possibile soluzione dell'equazione di Laplace che soddisfi anche le condizioni al contorno sul fondo e sulle pareti riportate alla fine della sezione 'Equazioni del campo fluido' e' la seguente:

$$\tilde{\Phi}(r, \theta, z, t) = \sum_{m=0}^{\infty} \sum_{n=1}^{\infty} [\alpha_{mn}(t) \cos m\theta + \beta_{mn}(t) \sin m\theta] J_m(\lambda_{mn}r) \frac{\cosh[\lambda_{mn}(z+h)]}{\cosh \lambda_{mn}h}$$

in cui  $\alpha_{mn}$  e  $\beta_{mn}$  sono dipendenti dal tempo e devono essere determinati dalle condizioni iniziali della superficie libera,  $J_m(\cdot)$  e' la funzione di Bessel del primo tipo di ordine  $m$ ,  $\lambda_{mn} = \xi_{mn}/R$  sono le radici delle equazioni:

$$\left. \frac{\partial J_m(\lambda_{mn}r)}{\partial r} \right|_{r=R} = 0$$

L'analisi delle frequenze naturali del sistema puo' essere notevolmente semplificata se si considerano le equazioni del campo di moto fluido linearizzate in caso di piccoli spostamenti. Le frequenze dei modi normali sono determinate dalle condizioni al contorno linearizzate della superficie libera del liquido:

$$\frac{\partial \tilde{\Phi}}{\partial t} - g\eta = 0$$

Differenziando una volta rispetto al tempo e ricordando che  $\vec{q} = -\nabla\Phi$  si ha che:

$$\frac{\partial^2 \tilde{\Phi}}{\partial t^2} + g \frac{\partial \tilde{\Phi}}{\partial z} = 0$$

Se, ora, si esprimono le funzioni  $\alpha_{mn}$  e  $\beta_{mn}$  come armoniche in  $\sin \omega_{mn}t$ , si possono ottenere le frequenze naturali sostituendo l'espressione di  $\tilde{\Phi}$  nell'equazione appena scritta, ricavando:

$$\omega_{mn}^2 = \frac{g\xi_{mn}}{R} \tanh\left(\frac{\xi_{mn}h}{R}\right)$$

espressione che raggiunge un valore circa costante per  $h/R > 2$  e dato dalla seguente relazione:

$$\omega_{mn}^2 = \frac{g\xi_{mn}}{R} \quad , \quad \xi_{mn}/R \geq 2.65$$

Se si considera la tensione superficiale, allora la condizione dinamica linearizzata per la superficie libera in combinazione con quella cinematica e dopo aver utilizzato l'equazione di Laplace fornisce:

$$\frac{\partial^2 \tilde{\Phi}}{\partial t^2} + g \frac{\partial \tilde{\Phi}}{\partial z} + \frac{\sigma}{\rho} \frac{\partial^3 \tilde{\Phi}}{\partial z^3} = 0$$

In questo caso la frequenza naturale e' data da:

$$\omega_{mn}^2 = \left[ \frac{g\xi_{mn}}{R} + \frac{\sigma\xi_{mn}^3}{\rho R^3} \right] \tanh(\xi_{mn}h/R)$$

Questo risultato rivela che la tensione superficiale causa un aumento del valore delle frequenze nei modi normali del sistema.

L'altezza della superficie libera misurata rispetto alla superficie libera indisturbata e' espressa

tramite:

$$\eta = \frac{1}{g} \sum_{m=0}^{\infty} \sum_{n=1}^{\infty} [\bar{\alpha}_{mn} \cos m\theta + \bar{\beta}_{mn} \sin m\theta] J_m(\lambda_{mn}r) \cosh(\lambda_{mn}h) (\omega_{mn} \cos \omega_{mn}t)$$

in cui  $\bar{\alpha}_{mn}$  e  $\bar{\beta}_{mn}$  sono dei coefficienti da determinare dalle condizioni iniziali. Il modo di forma simmetrica, ovvero senza i termini in  $\sin(m\theta)$ , diventa:

$$\eta(r, \theta, t) = \frac{1}{g} \sum_{m=0}^{\infty} \sum_{n=1}^{\infty} \bar{\alpha}_{mn} \cos(m\theta) J_m(\lambda_{mn}r) \cosh(\lambda_{mn}h) (\omega_{mn} \cos \omega_{mn}t)$$

Per il primo modo,  $m = 0$ , il moto e' simmetrico rispetto all'origine rispetto alle creste e agli avvallamenti angolari. In questo caso le radici dell'equazione:

$$\left. \frac{dJ_0(\xi_{0n}r/R)}{dr} \right|_{r=R} = 0 \implies \xi_{0n} = 3.832, 7.0156, 10.173, \dots, \pi(n + 0.25)$$

I corrispondenti nodi circolari sono determinati imponendo  $\eta = 0$  o, in alternativa,  $J_0(\xi_{0n}r/R) = 0$ , condizioni che permettono di scrivere:

$$\xi_{0n}r/R = 2.404, 5.517, 8.648, \dots \implies r = 0.628R, 0.786R, 0.85R, \dots$$

Per i modi di *sloshing* asimmetrici, invece, l'altezza d'onda assume la forma:

$$\eta(r, \theta, t) = \frac{1}{g} \sum_{m=0}^{\infty} \sum_{n=1}^{\infty} [\bar{\beta}_{mn} \sin m\theta] J_m(\lambda_{mn}h) \cosh(\lambda_{mn}h) (\omega_{mn} \cos \omega_{mn}t)$$

Per il primo modo  $m = 1$ , le radici dell'equazione:

$$\left. \frac{dJ_1(\xi_{1n}r/R)}{dr} \right|_{r=R} = 0 \rightarrow \xi_{1n} = 1.841, 5.335, 8.535, 11.205, 14.850, \dots$$

e, in particolare, si ha che:

$$\xi_{1n} = \xi_{1(n-1)} + \pi \quad , \quad n > 5$$

In questo caso si ha un diametro nodale ortogonale alla direzione di dondolio del container.

E' stato studiato anche il caso in cui il liquido presenti una forte tensione superficiale, tale da mantenere fissa nella sua posizione la linea di contatto tra pelo libero e pareti laterali del serbatoio, ovvero, tale da annullare  $\eta(R, \theta, t) = 0$ . Questa condizione porta al seguente risultato per lo spostamento della superficie libera:

$$\eta(r, \theta, t) = e^{i\omega t} \bar{\eta}(r, \theta) = \sum_{m=0}^{\infty} \sum_{n=1}^{\infty} \frac{\alpha_{mn}}{i\omega} \lambda_{mn} \cos m\theta \sinh(\lambda_{mn}h) J_m(\lambda_{mn}r) e^{i\omega t}$$

in cui la grandezza  $\bar{\eta}$  rappresenta la media nel tempo dell'altezza dell'onda della superficie libera.

La condizione dinamica assume la forma:

$$\frac{\partial^2 \bar{\eta}}{\partial r^2} + \frac{1}{r} \frac{\partial \bar{\eta}}{\partial r} + \frac{1}{r^2} \frac{\partial^2 \bar{\eta}}{\partial \theta^2} - \frac{\rho g}{\sigma} \bar{\eta} = i \frac{\omega \rho}{\sigma} \sum_{m=0}^{\infty} \sum_{n=1}^{\infty} \alpha_{mn} \cos m\theta \cosh(\lambda_{mn}h) J_m(\lambda_{mn}r)$$

La soluzione di questa equazione alle derivate parziali deve preservare il volume fluido, perciò:

$$\int_0^{2\pi} \int_0^R \bar{\eta}(r, \theta) r \, dr \, d\theta = 0$$

E' stato possibile ottenere una soluzione per la condizione dinamica nella forma seguente (Bauer, 1992):

$$\bar{\eta}(r, \theta) = \sum_{m=0}^{\infty} C_m I_m(\beta r/R) \cos m\theta - i \frac{\omega}{g} \alpha_{00} - i \frac{\omega}{\sigma} R^2 \rho \sum_{m=0}^{\infty} \sum_{n=1}^{\infty} \alpha_{mn} \frac{\cosh(\lambda_{mn} h)}{(\xi_{mn}^2 + \beta^2)} J_m(\lambda_{mn} r) \cos m\theta$$

in cui  $I_m$  e' la funzione di Bessel modificata,  $\beta^2 = \rho g R^2 / \sigma$  e  $C_m$  sono costanti di integrazione.

Per oscillazioni assialsimmetriche si ha che  $\partial/\partial\theta = 0$ ,  $m = 0$  e l'equazione precedente assume la forma seguente:

$$\bar{\eta}(r, \theta) = C_0 I_0(\beta r/R) - i \frac{\omega}{g} \alpha_{00} - i \frac{\omega}{\sigma} R^2 \rho \sum_{n=1}^{\infty} \alpha_{0n} \frac{\cosh(\lambda_{0n} h)}{(\xi_{0n}^2 + \beta^2)} J_0(\lambda_{0n} r)$$

La condizione alla parete comporta che:

$$C_0 I_0(\beta) - \frac{\bar{\omega}}{\beta^2} \bar{\alpha}_{00} - \bar{\omega} \sum_{n=1}^{\infty} \bar{\alpha}_{0n} \frac{\cosh(\lambda_{0n} h)}{(\xi_{0n}^2 + \beta^2)} J_0(\xi_{0n}) = 0$$

in cui  $\bar{\omega} = \omega / \sqrt{\sigma / (\rho R^3)}$  e  $\bar{\alpha}_{0n} = i \alpha_{0n} / (R \sqrt{\sigma / (\rho R^3)})$ ,  $n = 0, 1, 2, \dots$

Espandendo la funzione di Bessel  $I_0$  in serie di Dini:

$$I_0(\beta r/R) = \frac{2}{\beta} I_1(\beta) + \sum_{n=1}^{\infty} \frac{2\beta I_1(\beta) J_0(\lambda_{0n} r)}{(\xi_{0n}^2 + \beta^2) J_0(\lambda_{0n})}$$

Dopo alcune sostituzioni e dopo il confronto tra i coefficienti della serie di Bessel-Fourier con quelli dell'espressione di  $\eta(r, \theta, t)$  in caso di forte tensione superficiale, si ottiene che:

$$2I_1(\beta)\beta C_0 - \bar{\omega} \bar{\alpha}_{00} = 0$$

$$2\beta C_0 \frac{I_1(\beta)}{J_0(\xi_{0n})} \bar{\omega} - \bar{\alpha}_{0n} [\bar{\omega}^2 \cosh(\lambda_{0n} h) - \xi_{0n} (\xi_{0n}^2 + \beta^2) \sinh(\lambda_{0n} h)] = 0$$

Le equazioni appena scritte costituiscono un sistema omogeneo di  $(n+2)$  equazioni algebriche per le costanti  $C_0$ ,  $\bar{\alpha}_{00}$  e  $\bar{\alpha}_{0n}$ ,  $n = 1, 2, \dots$ . Imponendo il determinante troncato dei coefficienti a zero si ricava la frequenza naturale delle oscillazioni naturali assialsimmetriche. Per le oscillazioni assimmetriche si segue la stessa procedura.

## 2.4 Sloshing forzato lineare

Nel processo di design e' di massima importanza fare in modo che le frequenze naturali del liquido siano il piu' lontano possibile dai fenomeni non lineari di risonanza. Per questo e' di fondamentale interesse capire come il liquido contenuto nel serbatoio reagisce a diverse forzanti esterne in modo da evitare situazioni critiche. Le sollecitazioni a cui puo' essere soggetto il liquido possono essere impulsive, sinusoidali, periodiche o random e la loro orientazione in riferimento al serbatoio puo' essere laterale, assiale, parametrica o una combinaizone lineare delle

varie tipologie di disturbo. Nel caso di eccitazione forzata e' fondamentale conoscere i carichi idrodinamici che agiscono sul contenitore e la loro fase rispetto alla forzante esterna. Tali carichi sono ottenuti come integrale delle pressioni del liquido sulle superfici del serbatoio. Inoltre, puo' essere necessario calcolare anche il movimento della superficie libera del liquido per stimare il movimento del baricentro del fluido. Vicino alle condizioni di risonanza il pelo libero sperimenta effetti non lineari che, tuttavia, nella presente analisi non sono considerati.

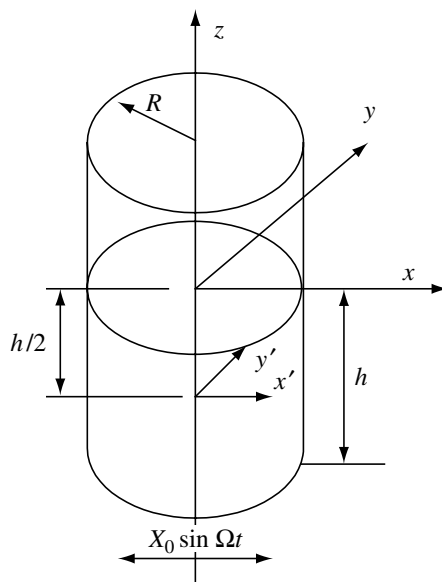
Nel corso del documento, piuttosto, verranno considerati dei generici serbatoi cilindrici verticali soggetti ad eccitazioni laterali e di *pitching* con lo scopo di valutarne i momenti e le forze idrodinamiche in condizioni di linearita', ovvero con un'ampiezza del disturbo e della risposta del fluido contenute.

### 2.4.1 Eccitazione laterale

Consideriamo un serbatoio cilindrico verticale sottoposto ad un'eccitazione applicata lungo l'asse  $x$  come in figura 4 del tipo:

$$X(t) = X_0 \sin \Omega t$$

in cui  $X_0$  ed  $\Omega$  sono rispettivamente l'ampiezza e la frequenza del disturbo.



**Figura 4:** Eccitazione laterale in un serbatoio cilindrico verticale.

Sotto l'applicazione delle ipotesi di linearita' (ampiezza del disturbo e della risposta contenute) le equazioni del campo fluido linearizzate assumono la forma seguente:

$$\begin{aligned} \nabla^2 \tilde{\Phi} &= 0 \\ \frac{\partial \tilde{\Phi}}{\partial r} \Big|_{r=R} &= 0 \quad , \quad \frac{\partial \tilde{\Phi}}{\partial z} \Big|_{z=-h} = 0 \\ g\eta - \frac{\partial \tilde{\Phi}}{\partial t} + \ddot{X}r \cos \theta &= 0 \quad , \quad z = \eta(r, \theta, t) \\ -\frac{\partial \tilde{\Phi}}{\partial z} &= \frac{\partial \eta}{\partial t} \quad , \quad z = \eta(r, \theta, t) \end{aligned}$$

Le condizioni dinamiche e cinematiche della superficie libera possono essere combinate in un'unica equazione:

$$g \frac{\partial \tilde{\Phi}}{\partial z} + \frac{\partial^2 \tilde{\Phi}}{\partial t^2} = \ddot{X} r \cos \theta$$

Una soluzione tipica dell'equazione di Laplace per  $\tilde{\Phi}$  soggetto alle condizioni sulle pareti del serbatoio e sul fondo dello stesso e' la seguente:

$$\tilde{\Phi} = \sum_{n=1}^{\infty} [A_{1n}(t) \cos \theta + B_{1n}(t) \sin \theta] J_1(k_{1n} r) \frac{\cosh[k_{1n}(z+h)]}{\cosh(k_{1n} h)}$$

Le coordinate generalizzate  $A_{1n}$  e  $B_{1n}$  sono dipendenti dal tempo e sono determinate imponendo il rispetto delle condizioni della superficie libera ed esprimendo  $r$  tramite una funzione di Fourier-Bessel:

$$r = \sum_{n=1}^{\infty} F_n J_1(k_{1n} r) \quad , \quad F_n = \frac{2R}{(k_{1n}^2 R^2 - 1) J_1(k_{1n} R)}$$

Introducendo le espressioni di  $\tilde{\Phi}$  e di  $r$  nella condizione della superficie libera si ottiene:

$$\sum_{n=1}^{\infty} \left[ \ddot{A}_{1n}(t) + \omega_{1n}^2 A_{1n}(t) - \frac{\ddot{x} F_n}{\cosh k_{1n} h} \right] J_1(k_{1n} r) \cos \theta + [B_{1n}(t) + \omega_{1n}^2 B_{1n}(t)] J_1(k_{1n} r) \sin \theta = 0$$

in cui:

$$\omega_{1n}^2 = \frac{g \xi_{1n}}{R} \tanh(\xi_{1n} h / R)$$

L'equazione appena scritta e' soddisfatta se le coordinate generalizzate rispettano il set lineare di equazioni differenziali:

$$\ddot{A}_{1n}(t) + \omega_{1n}^2 A_{1n}(t) = \frac{\ddot{x} F_n}{\cosh k_{1n} h}$$

$$\ddot{B}_{1n}(t) + \omega_{1n}^2 B_{1n}(t) = 0$$

La soluzione a regime per questo sistema e':

$$A_{1n}(t) = -\frac{X_0 \Omega^3 F_n}{(\omega_{1n}^2 - \Omega^2) \cosh k_{1n} h} \cos \Omega t \quad , \quad B_{1n}(t) = 0$$

Sostituendo nell'equazione per  $\tilde{\Phi}$  si ottiene:

$$\tilde{\Phi} = -X_0 \Omega \cos \theta \cos \Omega t \sum_{n=1}^{\infty} \left[ \frac{2R}{(\xi_{1n}^2 - 1)} \frac{\Omega^2}{(\omega_{1n}^2 - \Omega^2)} \frac{J_1(\xi_{1n} r / R)}{J_1(\xi_{1n})} \frac{\cosh[\xi_{1n}(z+h)/R]}{\cosh(\xi_{1n} h / R)} \right]$$

Ora, si ricordi che la funzione potenziale totale e' data dalla somma del potenziale di disturbo  $\tilde{\Phi}$  e dal potenziale del serbatoio  $\Phi_0 = -X_0 \Omega \cos \theta \cos \Omega t$ , quindi:

$$\Phi = -X_0 \Omega \cos \theta \cos \Omega t \times \left\{ r + \sum_{n=1}^{\infty} \left[ \frac{2R}{(\xi_{1n}^2 - 1)} \frac{\Omega^2}{(\omega_{1n}^2 - \Omega^2)} \frac{J_1(\xi_{1n} r / R)}{j_1(\xi_{1n})} \frac{\cosh[\xi_{1n}(z+h)/R]}{\cosh(\xi_{1n} h / R)} \right] \right\}$$

Sostituendo questa espressione nella condizione del pelo libero, si ottiene l'altezza d'onda:

$$\eta = \frac{X_0 \Omega^2}{g} \cos \theta \cos \Omega t \left[ r + \sum_{n=1}^{\infty} \frac{2R}{(\xi_{1n}^2 - 1)} \frac{\Omega^3}{(\omega_{1n}^2 - \Omega^2)} \frac{J_1(\xi_{1n} r/R)}{j_1(\xi_{1n})} \right]$$

Il massimo valore di  $\eta$  si verifica per  $r = R$ ,  $\theta = 0$  e  $\Omega t = \pi/2$  ed e' pari a:

$$\eta_{max} = \frac{X_0 \Omega^2}{g} \left[ R + \sum_{n=1}^{\infty} \frac{2R}{(\xi_{1n}^2 - 1)} \frac{\Omega^3}{(\omega_{1n}^2 - \Omega^2)} \right]$$

Si noti, inoltre, che i nodi per l'altezza dell'onda, ovvero i punti in cui si annulla, si verificano per  $r = 0$  e  $\theta = \pi/2, 3\pi/2, \dots$ . In piu', man mano che la frequenza del disturbo  $\Omega$  si avvicina alla frequenza propria del sistema  $\omega_{1n}$ , sia  $\tilde{\Phi}$  che  $\eta$  diventano arbitrariamente grandi (condizione di risonanza). In questo caso le soluzioni appena elaborate non sono piu' valide poiche' viene meno l'ipotesi di linearizzazione.

La pressione del fluido in un punto qualsiasi dovuta al movimento del fluido e trascurando la pressione idrostatica  $\rho g z$  puo' essere ricavata dall'equazione della pressione:

$$\begin{aligned} p &= \rho \frac{\partial \tilde{\Phi}}{\partial t} \\ &= \rho X_0 \Omega^2 \cos \theta \cos \Omega t \times \left\{ r + \sum_{n=1}^{\infty} \frac{2R}{(\xi_{1n}^2 - 1)} \frac{\Omega^2}{(\omega_{1n}^2 - \Omega^2)} \frac{J_1(\xi_{1n} r/R)}{J_1(\xi_{1n})} \frac{\cosh[\xi_{1n}(z+h)/R]}{\cosh \xi_{1n} h/R} \right\} \end{aligned}$$

La massima pressione si verifica alla parete per  $r = R$ ,  $\theta = 0$  e  $\Omega t = \pi/2$  ed e' data dall'espressione:

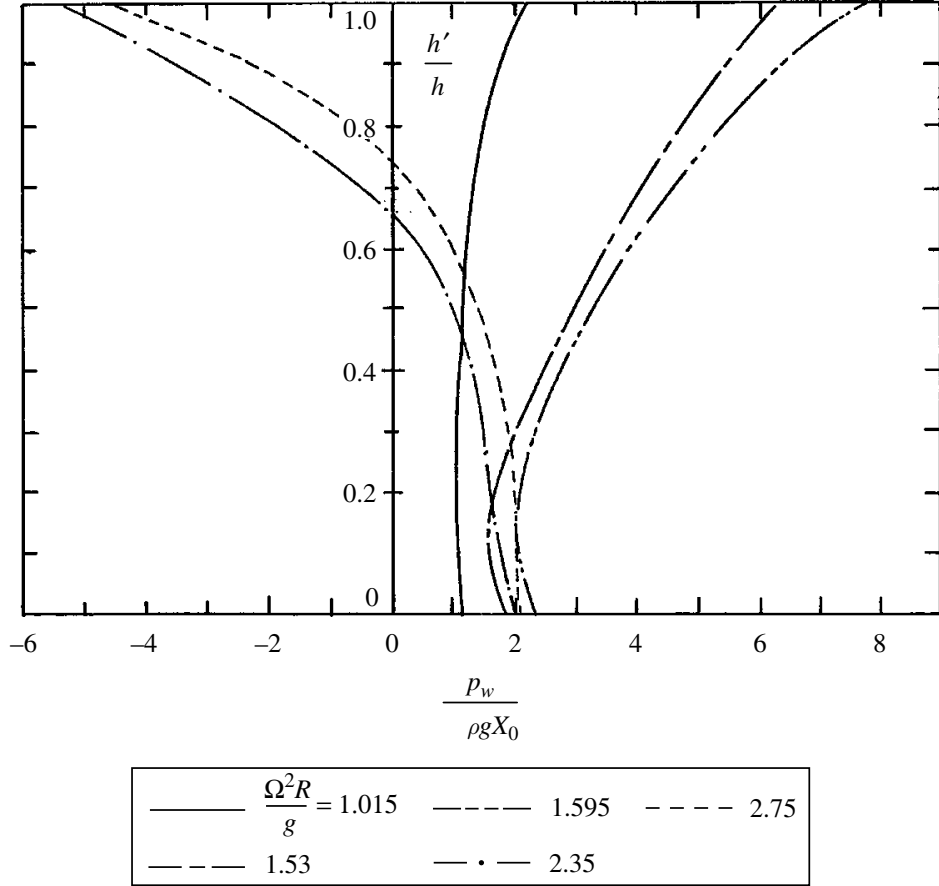
$$\frac{p_w}{\rho g R (X_0/R)} = \frac{\Omega^2 R}{g} \times \left\{ 1 + \sum_{n=1}^{\infty} \frac{2}{\xi_{1n}^2 - 1} \frac{[\Omega^2 R / \xi_{1n} g \tanh(\xi_{1n} h/R)]}{(1 - (\Omega^2 R / \xi_{1n} g \tanh(\xi_{1n} h/R)))} \left[ \frac{\cosh[\xi_{1n}(z+h)/R]}{\cosh \xi_{1n} h/R} \right] \right\}$$

Analogamente, la distribuzione delle pressioni sul fondo del contenitore per  $z = -h$ ,  $\theta = 0$  e  $\Omega t = \pi/2$  risulta:

$$\frac{p_b}{\rho g R (X_0/R)} = \frac{\Omega^2 R}{g} \times \left\{ \frac{r}{R} + \sum_{n=1}^{\infty} \frac{2}{(\xi_{1n}^2 - 1) \cosh(\xi_{1n} h/R)} \frac{[\Omega^2 R / \xi_{1n} g \tanh(\xi_{1n} h/R)]}{(1 - (\Omega^2 R / \xi_{1n} g \tanh(\xi_{1n} h/R)))} \frac{J_1(\xi_{1n} r/R)}{J_1(\xi_{1n})} \right\}$$

La figura 5 mostra la distribuzione della pressione per rapporti della profondita' del fluido  $h/R = 2$  e per differenti valori del parametro do Froude della frequenza di eccitazione  $\Omega^2 R/g$ . Approssimativamente sembra che il terzo inferiore del liquido si comporti essenzialmente come una massa rigida, mentre la maggior parte degli effetti dello *sloshing* avviene nella parte superiore del liquido vicino alla superficie. Questa osservazione e' la base per lo sviluppo del modello meccanico equivalente successivo. Abramson e Ransleben, nel 1961, hanno condotto una serie di test sperimentali per confrontare i risultati analitici dati dalle ultime relazioni scritte poco sopra con quelle misurate sperimentalmente (si veda la figura 6). Si noti che i risultati analitici non comprendono l'effetto dello smorzamento che sono presenti, invece, nei risultati sperimentali. Si possono osservare alcuni interessanti fenomeni che avvengono nel range di frequenze  $1.85 \leq \Omega^2 R/g \leq 2.35$ . Le distribuzioni di pressione attorno al primo e al secondo modo indicano che le pressioni attorno alla superficie sono sfasate di  $180^\circ$  rispetto a quelle vicine al fondo (che sono, invece, in fase con lo spostamento). Per questo, la distribuzione per  $\Omega^2 R/g = 2.35$  e' caratterizzata da un bilanciamento tra le componenti in fase e fuori fase e la risultante totale della forza e' pressoché

nulla, sebbene i moduli della pressione attuale vicino alla superficie siano relativamente elevati. Uno scenario simile si verifica anche per i modi di vibrare superiori. Questo puo' essere attribuito al fatto che le azioni di taglio tra gli strati di fluido, che si muovono in direzioni opposte, introducono le distorsioni osservate nell'intervallo in cui la parte fuori fase e' maggiore, in modulo, rispetto alla parte in fase.



**Figura 5:** Distribuzione delle pressioni alla parete per un serbatoio cilindrico sotto eccitazione laterale per  $h/R = 2.0$ .

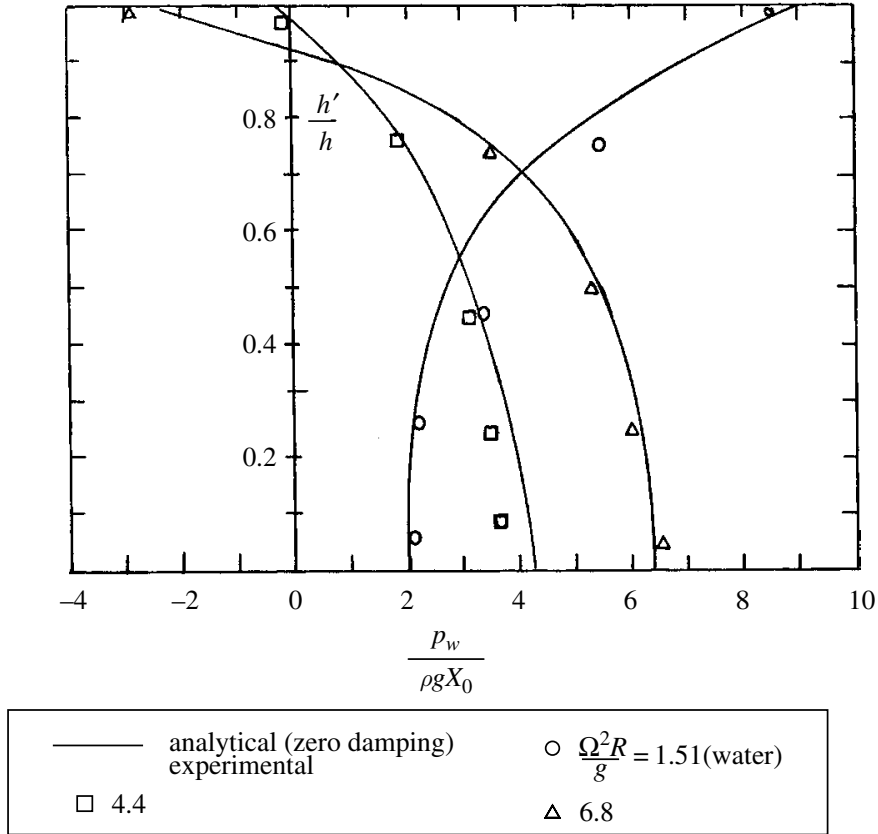
La componente della forza netta agente sulla parete del serbatoio e sul fondo e' ottenuta integrando la pressione sulle corrispondenti aree delle pareti del serbatoio. Risolvendo l'integrale per  $\theta = 0$  si ottiene la forza agente lungo l'asse  $x$ :

$$\begin{aligned}
 F_x &= \int_{\theta=0}^{2\pi} \int_{z=-h}^0 p \cos \theta R d\theta dz \\
 &= m_f X_0 \Omega^2 \sin \Omega t \left[ 1 + \sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{\xi_{1n} h} \frac{2R}{(\xi_{1n}^2 - 1)} \frac{\Omega^2}{(\omega_{1n}^2 - \Omega^2)} \tanh(\xi_{1n} h/R) \right]
 \end{aligned}$$

in cui  $m_f = \rho \pi h R^2$  e' la massa totale di fluido. La forza agente lungo l'asse  $y$  e' data da:

$$F_y = \int_{\theta=0}^{2\pi} \int_{z=-h}^0 p \sin \theta R d\theta dz = 0$$





**Figura 6:** Confronto tra distribuzione di pressione analitica e sperimentale per  $h/R = 2.0$ .

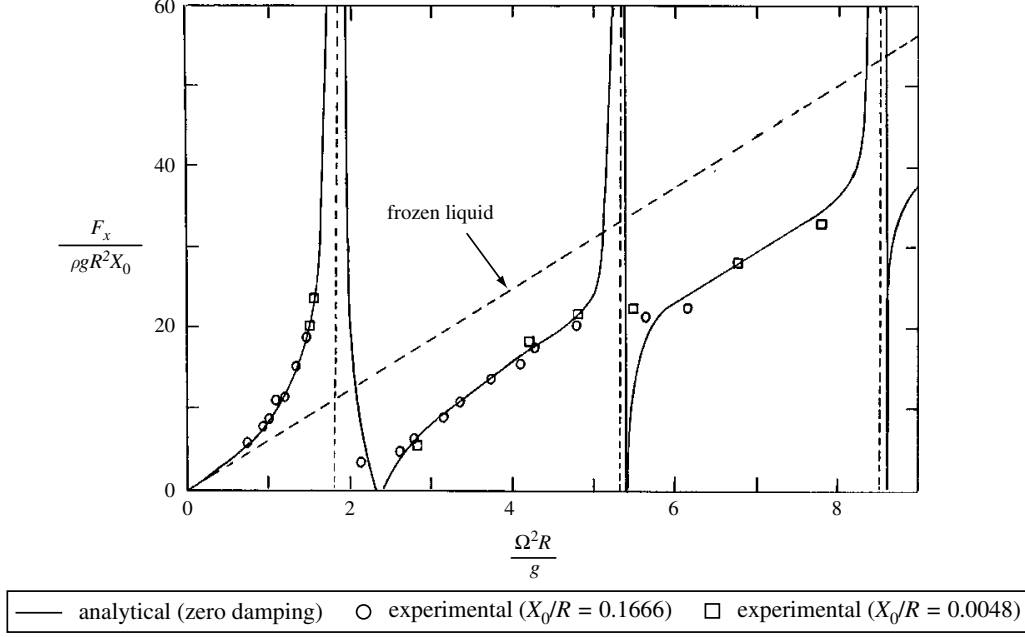
mentre, la forza agente sul fondo del serbatoio risulta:

$$F_b = \int_{\theta=0}^{2\pi} \int_{z=-h}^0 pr \, dr \, dz = 0$$

Le relazioni appena scritte affermano che c'è una componente netta della forza lungo la direzione in cui avviene l'eccitazione. In direzione perpendicolare a quella sollecitata, invece, la distribuzione delle pressioni è simmetrica e, durante l'integrazione, i contributi si elidono. Anche la pressione sul fondo del serbatoio non produce alcun contributo alla forza in  $x$ , ma, come si vedrà in seguito, produrrà un certo momento lungo l'asse ortogonale al piano  $xz$ .

La figura 7 mostra la dipendenza tra il rapporto della forza idrodinamica orizzontale  $F_x / \rho g R^2 X_0$  rispetto al parametro delle frequenze  $\Omega^2 R / g$  per una valore del rapporto  $h/R = 2$ . La figura 7 racchiude anche la forza d'inerzia del liquido congelato che è proporzionale linearmente con il rapporto delle frequenze  $\Omega^2 R / g$ . I punti indicati da cerchietti e quadratini sono i valori ottenuti sperimentalmente da Abranson e Ransleben nel 1961 per rapporti dell'ampiezza dell'eccitazione  $X_0/R = 0.1667$  e  $0.0048$  rispettivamente. La concordanza tra i risultati predetti e misurati è buona fino al 10% solo per rapporti delle frequenze lontani dalla condizione di risonanza, zona in cui la teoria lineare sviluppata non vale più, ma devono essere considerati anche fenomeni non lineari.

Il momento idrodinamico dovuto alle forze liquide agenti sulle pareti del serbatoio lungo l'asse  $y$  con



**Figura 7:** Dipendenza dello *sloshing* del liquido dall'eccitazione laterale in un serbatoio cilindrico per  $h/R = 2.0$ .

origine sulla superficie libera indisturbata e':

$$\begin{aligned}
 M_{yw} &= \int_{\theta=0}^{2\pi} \int_{z=-h}^0 p_w R \cos \theta \, dz \, d\theta \\
 &= m_f X_0 \Omega^2 \sin \Omega t \left[ \frac{h}{2} + \sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{h} \left( \frac{R}{\xi_{1n}} \right)^2 \frac{2}{(\xi_{1n}^2 - 1)} \frac{\Omega^2}{(\omega_{1n}^2 - \Omega^2)} \frac{1 - \cosh(\xi_{1n}h/R)}{\cosh(\xi_{1n}h/R)} \right]
 \end{aligned}$$

Parallelamente, il momento della forza agente sul fondo del contenitore lungo l'asse  $Y$  e' dato da:

$$\begin{aligned}
 M_{yb} &= \int_{\theta=0}^{2\pi} \int_{z=-h}^0 p_b R \cos \theta \, dz \, d\theta \\
 &= m_f X_0 \Omega^2 \sin \Omega t \left[ \frac{R^2}{4h} + \sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{h \xi_{1n}^2} \frac{2R^2}{(\xi_{1n}^2 - 1)} \frac{\Omega^2}{(\omega_{1n}^2 - \Omega^2)} \frac{1}{\cosh(\xi_{1n}h/R)} \right]
 \end{aligned}$$

Il momento totale lungo l'asse  $y$  risulta, infine:

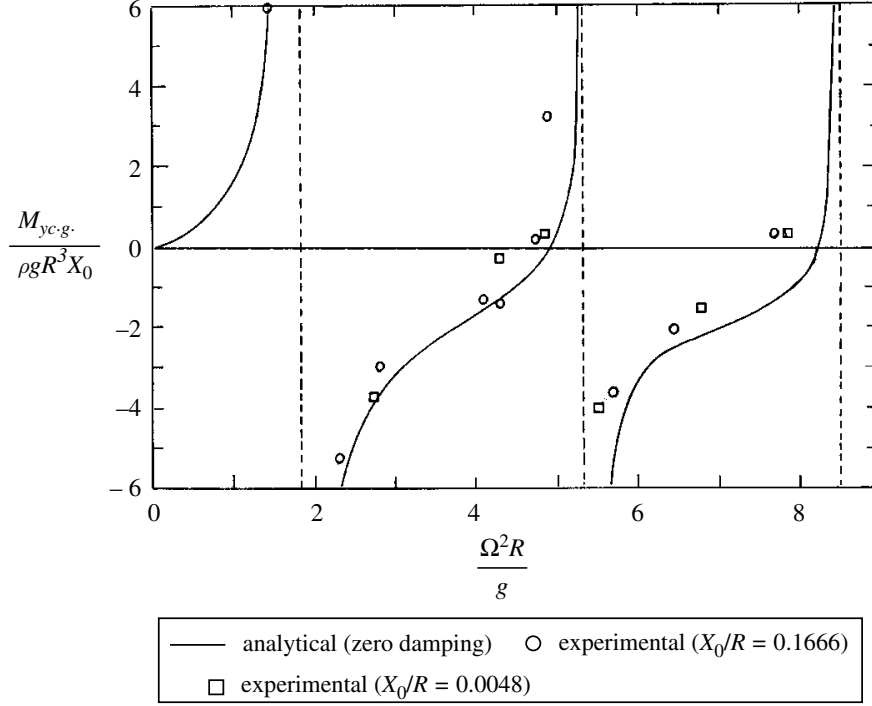
$$M_y = m_f X_0 \Omega^2 \sin \Omega t \left[ \frac{h}{2} + \frac{R^2}{4h} + \sum_{n=1}^{\infty} \left( \frac{R}{\xi_{1n}} \right)^2 \frac{2\Omega^2}{(\xi_{1n}^2 - 1)(\omega_{1n}^2 - \Omega^2)} \frac{[2 - \cosh(\xi_{1n}h/R)]}{h \cosh(\xi_{1n}h/R)} \right]$$

Si ricava, inoltre, che il momento delle forze idrodinamiche rispetto ad un asse passante per il baricentro della massa fluida solidificata risulta:

$$M_{ycg} = m_f X_0 \Omega^2 h \sin \Omega t \left[ \frac{R^2}{4h^2} + \Omega^2 \sum_{n=1}^{\infty} \frac{\left\{ \xi_{1n} \tanh(\xi_{1n}h/R) - (2R/h) + \frac{4R/h}{\cosh(\xi_{1n}h/R)} \right\}}{\xi_{1n}^2 (\xi_{1n}^2 - 1) (2R/h) (\omega_{1n}^2 - \Omega^2)} \right]$$

La figura 8 mostra un confronto tra i momenti idrodinamici attorno all'asse  $y$  e calcolati rispetto al

centro di massa indisturbato predetti e misurati.



**Figura 8:** Momento idrodinamico attorno all'asse  $y$  e misurato rispetto al centro di massa del liquido indisturbato dovuto all'eccitazione laterale di un serbatoio circolare con  $h/R = 2.0$ .

La posizione del centro di pressione dei modi oscillanti puo' essere determinata dividendo il momento dovuto alla distribuzione delle pressioni sulla parete per la forza del fluido lungo l'asse  $x$ :

$$z_{cp} = \frac{M_{yw}}{F_x} = \frac{R}{\xi_{1n}} \left( \frac{1 - \cosh(\xi_{1n}h/R)}{\sinh(\xi_{1n}h/R)} \right) = -\frac{R}{\xi_{1n}} \tanh\left(\frac{\xi_{1n}h}{2R}\right)$$

Per un serbatoio profondo ( $\xi_{1n}h/R > 2$ ) il centro di pressione del primo modo di *sloshing* e' vicino al valore  $-0.545R$ . La figura 9 mostra la dipendenza della posizione del centro di pressione  $z_{cp}/R$  in funzione del parametro  $\Omega^2 R/g$ .

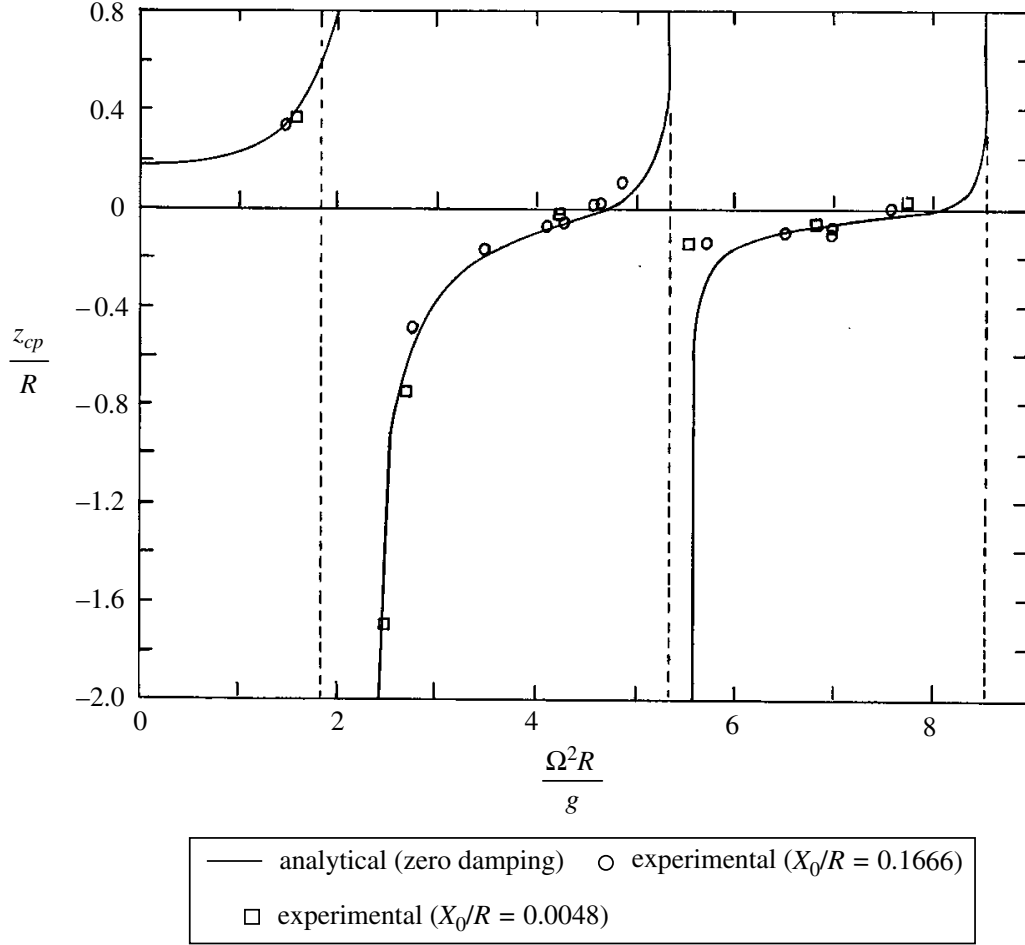
#### 2.4.2 Eccitazione di *pitching*

In questa sezione si considera un'eccitazione di *pitching* lungo l'asse  $y$  passante per il centro di massa del fluido solidificato come mostrato nella figura 4 del tipo:

$$\Psi(t) = \Psi_0 \sin \Omega t$$

in cui  $\Psi_0$  ed  $\Omega$  sono l'ampiezza e la frequenza del moto del serbatoio. Le condizioni al contorno in termini del potenziale della velocita' totale sono espresse da:

$$\begin{aligned} \frac{\partial \Phi}{\partial r} &= -\Psi_0 z \Omega \cos \Omega t \cos \theta \quad , \quad r = R \\ -\frac{\partial \Phi}{\partial z} &= -\Psi_0 r \Omega \cos \Omega t \cos \theta \quad , \quad z = -h/2 \end{aligned}$$



**Figura 9:** Dipendenza del centro di pressione in funzione della frequenza del disturbo in un serbatoio circolare sottoposto ad eccitazione laterale per  $h/R = 2.0$ .

$$\frac{\partial^2 \Phi}{\partial t^2} + g \frac{\partial \Phi}{\partial z} = 0 \quad , \quad z = h/2$$

La soluzione dell'equazione di Laplace puo' essere decomposta, in questo caso, in tre componenti (a differenza delle due dell'eccitazione laterale vista nelle sezioni precedenti):

$$\Phi = \Phi_1 + \tilde{\Phi}_2 + \tilde{\Phi}_3$$

di cui  $\Phi_1$  soddisfa la prima delle tre condizioni precedenti e questo porta a

$$\frac{\partial}{\partial r}(\tilde{\Phi}_2 + \tilde{\Phi}_3) = 0 \quad , \quad r = R$$

mentre  $(\Phi_1 + \tilde{\Phi}_2)$ , soddisfacendo le seconde condizioni scritte in precedenza, fanno si che sulla superficie libera la velocita' sia nulla. D'altra parte, il potenziale  $\tilde{\Phi}_3$  porta ad avere velocita' nulla per  $z = -h/2$ , cioe':

$$\frac{\partial \tilde{\Phi}_3}{\partial z} = 0 \quad , \quad z = -h/2$$

$$\frac{\partial(\Phi_1 + \tilde{\Phi}_2)}{\partial z} = 0 \quad , \quad z = -h/2$$

Le seguenti soluzioni per i tre potenziali che sono riportate qui di seguito verificano tutte le condizioni precedenti:

$$\begin{aligned}\Phi_1 &= -\Omega\Psi_0 r z \cos \Omega t \cos \theta \\ \tilde{\Phi}_2 &= \Omega\Psi_0 \cos \Omega t \cos \theta \sum_{n=1}^{\infty} \frac{J_1(k_n r)}{J_1(k_n R)} \{A_n \cosh k_n z + B_n \sinh k_n z\} \\ \tilde{\Phi}_3 &= \Omega\Psi_0 \cos \Omega t \cos \theta \sum_{n=1}^{\infty} C_n \frac{J_1(k_n r)}{J_1(k_n R)} \cosh k_n \left( z + \frac{h}{2} \right)\end{aligned}$$

in cui  $k_n$  sono le radici dell'equazione

$$\left. \frac{dJ_1(k_n r)}{dr} \right|_{r=R} = 0$$

Introducendo le espressioni dei potenziali nella seconda condizione e sfruttando l'espressione di  $r$  in serie di Fourier-Bessel si ricava che

$$A_n \sinh \xi_{1n} \frac{h}{2R} - B_n \cosh \xi_{1n} \frac{h}{2R} = -\frac{4R^2}{\xi_{1n}(\xi_{1n}^2 - 1)}$$

Introducendo, ora, i potenziali nella condizione sul fondo  $z = -h/2$  si ottiene:

$$A_n \sinh \xi_{1n} \frac{h}{2R} + B_n \cosh \xi_{1n} \frac{h}{2R} = \frac{2R^2}{\xi_{1n}(\xi_{1n} - 1)}$$

Risolvendo le ultime due equazioni riportate otteniamo i coefficienti  $A_n$  e  $B_n$ :

$$A_n = -\frac{R^2}{\xi_{1n}(\xi_{1n} - 1)} \frac{1}{\sinh \xi_{1n} h / (2R)}, \quad B_n = \frac{3R^2}{\xi_{1n}(\xi_{1n} - 1)} \frac{1}{\cosh \xi_{1n} h / (2R)}$$

Sostituendo nell'espressione di  $\tilde{\Phi}_2$  si ricava

$$\tilde{\Phi}_2 = -\Omega\Psi_0 \cos \Omega t \cos \theta \sum_{n=1}^{\infty} \frac{R^2}{\xi_{1n}(\xi_{1n} - 1)} \frac{J_1(k_n r)}{J_1(k_n R)} \left\{ \frac{\cosh \xi_{1n} z / R}{\sinh \xi_{1n} h / (2R)} - \frac{3 \sinh \xi_{1n} z / R}{\cosh \xi_{1n} h / (2R)} \right\}$$

La costante  $C_n$  nell'espressione di  $\tilde{\Phi}_3$  e' ottenuta sfruttando la condizione della superficie libera insieme alla condizione per  $z = -h/2$  e fornisce il seguente risultato:

$$C_n = -\frac{\Omega^2}{(\omega_n^2 - \Omega^2)} \frac{R^2}{(\xi_n^2 - 1)} \left\{ \frac{(\xi_n h / R) + \coth(\xi_n h / R) - 3 \tanh(\xi_n h / 2R)}{\xi_n \cosh(\xi_n h / 2R)} \right\}$$

Sommando i vari contributi che compongono il potenziale totale si ricava:

$$\begin{aligned}\Phi &= -\Omega\Psi_0 \cos \Omega t \cos \theta \left\{ r z + \sum_{n=1}^{\infty} \frac{R^2}{(\xi_n^2 - 1)} \frac{J_1(\xi_n r / R)}{J_1(\xi_n)} \left\{ \frac{\cosh \xi_n z / R}{\sinh \xi_n (h / 2R)} - 3 \frac{\sinh \xi_n z / R}{\cosh \xi_n (h / 2R)} \right\} \right. \\ &\quad + \sum_{n=1}^{\infty} \frac{\Omega^2}{(\omega_n^2 - \Omega^2)} \frac{R^2}{(\xi_n^2 - 1)} \left\{ \frac{(\xi_n h / R) + \coth(\xi_n h / 2R) - 3 \tanh(\xi_n h / 2R)}{\xi_n \cosh(\xi_n h / 2R)} \right\} \\ &\quad \left. \times \frac{J_1(\xi_n r / R)}{J_1(\xi_n)} \cosh \frac{\xi_n}{R} \left( z + \frac{h}{2} \right) \right\}\end{aligned}$$

L'altezza  $\eta = \frac{1}{g} \frac{\partial \Phi}{\partial t}$  della superficie libera rispetto al livello medio  $z = h/2$  e' data da

$$\eta = \frac{\Omega^2 \Psi_0}{g} R^2 \sin \Omega t \cos \theta \left\{ \frac{h}{2R} \frac{r}{R} + \sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{(\xi_n^2 - 1)} \frac{J_1(\xi_n(r/R))}{J_1(\xi_n)} \right. \\ \times \left\{ \coth \xi_n \frac{h}{2R} - 3 \tanh \xi_n \frac{h}{2R} \right\} + \sum_{n=1}^{\infty} \frac{\Omega^2}{(\omega_n^2 - \Omega^2)} \frac{1}{(\xi_n^2 - 1)} \\ \left. \times \frac{J_1(\xi_n r/R)}{J_1(\xi_n)} \cosh \frac{\xi_n h}{R} \right\}$$

La parte oscillante della pressione idrodinamica  $p = \rho \partial \Phi / \partial t$  si esprime come

$$p = \rho \Omega^2 \Psi_0 R^2 \sin \Omega t \cos \theta \left\{ \frac{rz}{R^2} + \sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{(\xi_n^2 - 1)} \frac{J_1(\xi_n(r/R))}{J_1(\xi_n)} \right. \\ \times \left\{ \frac{\cosh \xi_n(z/R)}{\sinh \xi_n(h/2R)} - 3 \frac{\sinh \xi_n(z/R)}{\cosh \xi_n(h/2R)} \right\} \\ + \sum_{n=1}^{\infty} \frac{\Omega^2}{(\omega_n^2 - \Omega^2)} \frac{1}{(\xi_n^2 - 1)} \left\{ \frac{(\xi_n h/R) + \coth(\xi_n h/R) - e \tanh(\xi_n h/2R)}{\xi_n \cosh(\xi_n h/2R)} \right\} \\ \left. \times \frac{J_1(\xi_n r/R)}{J_1(\xi_n)} \cosh \frac{\xi_n}{R} \left( z + \frac{h}{2} \right) \right\}$$

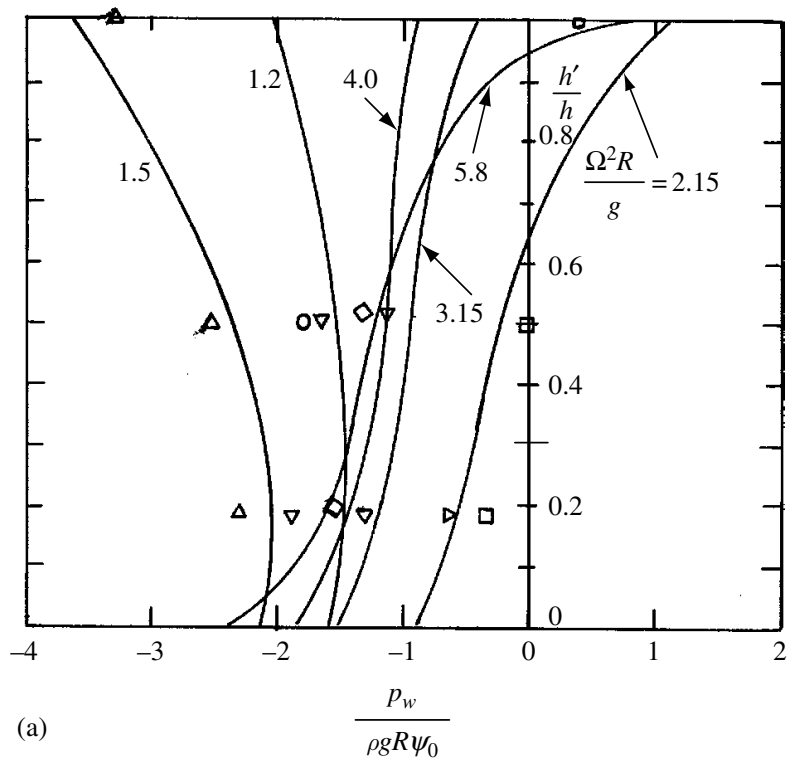
La pressione alla parete si ha per  $r = R$  e risulta:

$$p_w = \rho \Omega^2 \Psi_0 R^2 \sin \Omega t \cos \theta \left\{ \frac{z}{R} + \sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{(\xi_n^2 - 1)} \left( \frac{\frac{\cosh(\xi_n z/R)}{\sinh(\xi_n h/2R)} - 3 \sinh(\xi_n z/R)}{\cosh(\xi_n h/2R)} \right) \right. \\ + \sum_{n=1}^{\infty} \left( \frac{(\xi_n h/R) + (\xi_n h/2R) - e \tanh(\xi_n h/2R)}{\xi_n \cosh(\xi_n h/R)} \right) \\ \left. \times \frac{1}{(\xi_n^2 - 1)} \frac{\Omega^2}{(\omega_n^2 - \Omega^2)} \cosh \frac{\xi_n}{R} \left( z + \frac{z}{h} \right) \right\}$$

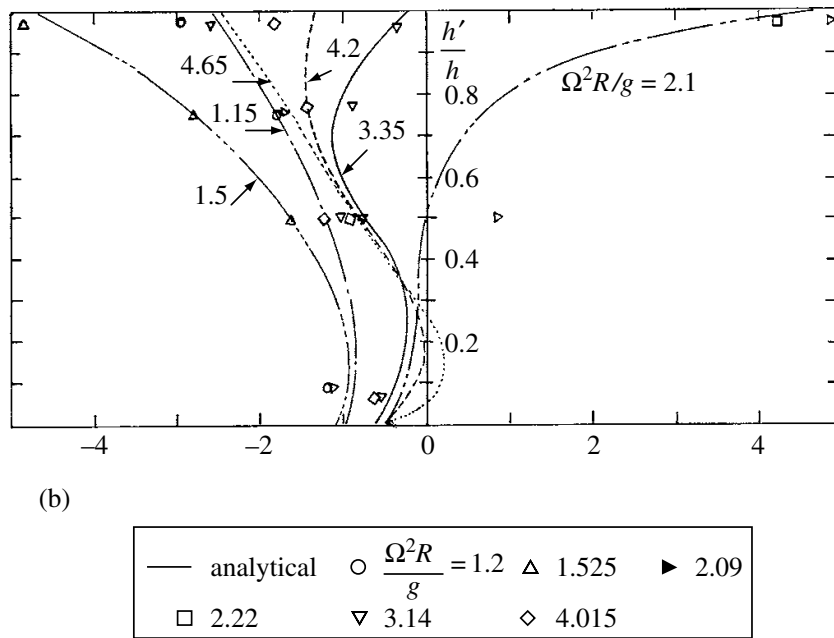
La pressione sul fondo, a  $z = -h/2$ , risulta

$$p_b = \rho \Omega^2 \Psi_0 R^2 \sin \Omega t \cos \theta \left\{ -\frac{rh}{2R^2} + \sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{(\xi_n^2 - 1)} [\coth(\xi_n h/2R) + 3 \tanh(\xi_n h/2R)] \right. \\ + \sum_{n=1}^{\infty} \left( \frac{(\xi_n h/R) + \coth(\xi_n h/R) - 3 \tanh(\xi_n h/R)}{\xi_n \cosh(\xi_n h/R)} \right) \\ \left. \times \frac{1}{(\xi_n^2 - 1)} \frac{\Omega^2}{(\omega_n^2 - \Omega^2)} \frac{J_1(\xi_n r/R)}{J_1(\xi_n)} \right\}$$

Le figure 10a e 10b mostrano la distribuzione della pressione in un contenitore cilindrico sottoposto ad oscillazioni di *pitching* per  $h/R = 1$  ed  $h/R = 2$  rispettivamente e per diverse frequenze della sollecitazione.



(a) Distribuzione della pressione in un serbatoio circolare sotto sollecitazioni di pitching per  $h/R = 1.0$ .



(b) Distribuzione della pressione in un serbatoio circolare sotto sollecitazioni di pitching per  $h/R = 1.0$ .

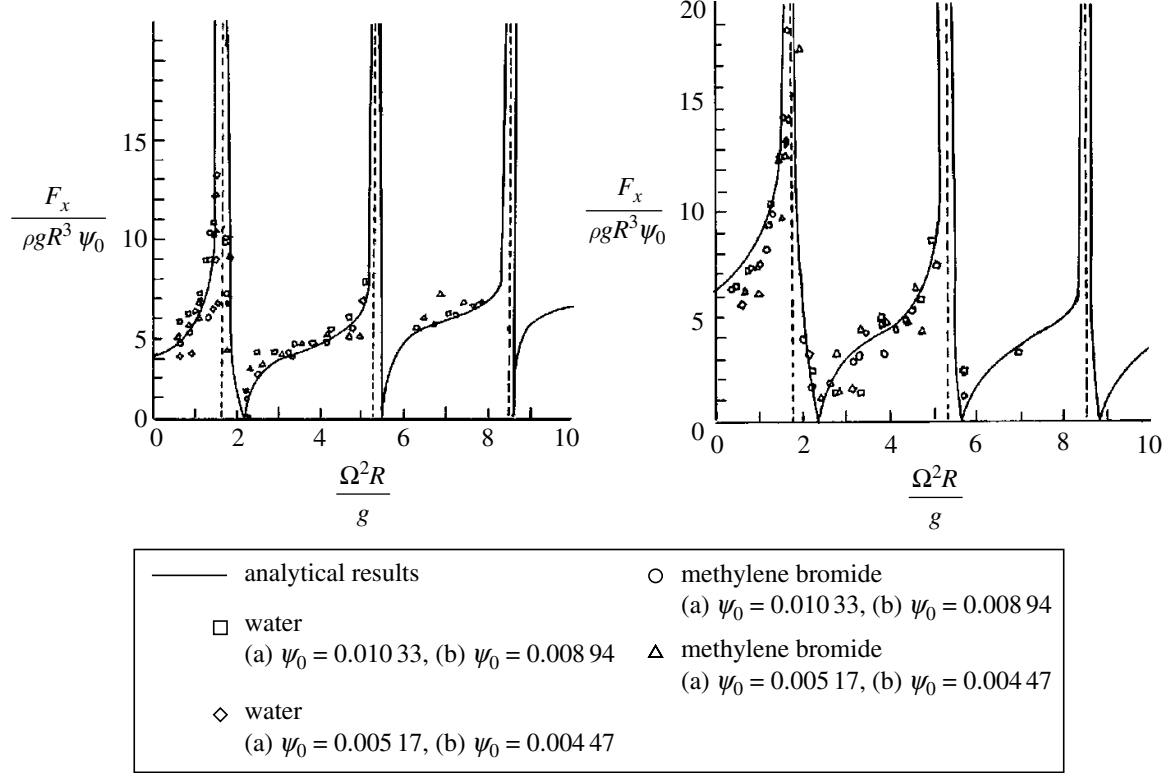
**Figura 10:** Distribuzione delle pressioni per serbatoio cilindrico sottoposto ad eccitazioni di pitching al variare della frequenza del disturbo.

La forza idrodinamica di *sloshing* lungo la direzione  $\theta = 0$  e'

$$F_x = \int_{\theta=0}^{2\pi} \int_{-h/2}^{h/2} p_w R \cos \theta \, d\theta \, dz$$

$$= -\pi \Psi_0 \Omega^2 \rho R^2 \sin \Omega t \sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{\xi_n} (2A_n + C_n) \sinh \left( \frac{\xi_n h}{2R} \right)$$

in cui  $A_n$  e  $C_n$  sono dati dalle relazioni scritte in precedenza. La dipendenza della forza in funzione della frequenza del disturbo e' mostrata in figura 11 per profondita' del liquido  $h/R = 1$  ed  $h/R = 2$ . L'intervallo delle frequenze mostrato copre i primi tre modi di *sloshing* come indicato dalle linee tratteggiate verticali.



**Figura 11:** Forza totale di risposta esercitata su un serbatoio cilindrico sottoposto ad eccitazione di *pitching*.

Non e' difficile dimostrare che la componente della forza lungo l'asse  $y$  ( $\theta = \pi/2$ ) sul fondo del serbatoio risulta nulla. Il momento della forza idrodinamica agente sulle pareti del contenitore rispetto all'asse  $y$  risulta:

$$M_{yw} = \int_{\theta=0}^{2\pi} \int_{-h/2}^{h/2} p_w R z \cos \theta \, dz \, d\theta$$

ovvero:

$$M_{yw} = \pi \rho \Omega^2 \Psi_0 R^3 h^2 \sin \Omega t \left\{ \frac{h}{12R} - \sum_{n=1}^{\infty} \frac{2B_n}{\xi_n h^2} \left[ \frac{h}{2R} \cosh \left( \xi_n \frac{h}{2R} \right) - \frac{1}{\xi_n} \sinh \left( \xi_n \frac{h}{2R} \right) \right] \right.$$

$$\left. - \frac{C_n}{\xi_n h^2} \left[ \frac{h}{2R} \sinh \left( \xi_n \frac{h}{R} \right) - \frac{1}{\xi_n} \left\{ \cosh \left( \xi_n \frac{h}{R} \right) - 1 \right\} \right] \right\}$$



Il momento delle forze del liquido che agisce sul fondo del serbatoio rispetto all'asse  $y$  invece, e' esprimibile come:

$$M_{yb} = \int_{\theta=0}^{2\pi} \int_{-h/2}^{h/2} p_b r^2 \cos \theta \, d\theta \, dr$$

il che risulta:

$$M_{yb} = -\pi \rho \Omega^2 \Psi_0 R^3 h^2 \sin \Omega t \left\{ \frac{R}{8h} + \sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{\xi_n h^2} \left[ A_n \cosh \left( \xi_n \frac{h}{2R} \right) - B_n \sinh \left( \xi_n \frac{h}{2R} \right) + C_n \right] \right\}$$

Sommando le varie componenti, il momento totale lungo l'asse  $y$  puo' essere espresso in forma adimensionale come segue:

$$\begin{aligned} \frac{M_{y,total}}{m_f \Omega^2 \Psi_0 R h \sinh \Omega t} &= \frac{h}{12R} - \frac{R}{8h} + \sum_{n=1}^{\infty} \left( \frac{R}{h} \right)^2 \frac{1}{(\xi_n^2 (\xi_n^2 - 1))} \\ &\quad \times \left[ \coth \left( \xi_n \frac{h}{2R} \right) + 9 \tanh \left( \xi_n \frac{h}{2R} \right) \right] \\ &+ \frac{R}{h} \sum_{n=1}^{\infty} \frac{\Omega^2}{(\omega_n^2 - \Omega^2)(1/\xi_n^2 (\xi_n^2 - 1))} \left[ \xi_n \frac{h}{R} + \coth \left( \xi_n \frac{h}{2R} \right) - e \tanh \left( \xi_n \frac{h}{2R} \right) \right] \\ &\quad \times \left[ \tanh \left( \xi_n \frac{h}{2R} \right) - \frac{2R}{h \xi_n} + \frac{4R/h}{\xi_n \cosh(\xi_n h/R)} \right] \end{aligned}$$

La sollecitazione di un serbatoio cilindrico verticale studiata in queste sezioni comporta un'oscillazione del baricentro piuttosto ampia, il che inficia la stabilita' del satellite su cui viene montato il contenitore. A livello pratico, per ridurre questi effetti o per spostare le frequenze proprie del sistema, ci sono diverse strategie, tra cui dividere il serbatoio in parti concentriche o in compartimenti radiali come accennato in precedenza.

### 3 Modelli meccanici equivalenti

In genere la pressione idrodinamica del liquido in contenitori rigidi e' formata da due componenti distinte. La prima componente e' direttamente proporzionale all'accelerazione del serbatoio ed e' causata dalla parte del fluido che si muove solidalmente con il recipiente. La seconda parte, invece, conosciuta come pressione 'convettiva', e dovuta allo *sloshing* sulla superficie libera. Una rappresentazione della dinamica del liquido all'interno di contenitori chiusi e valida sotto determinate ipotesi puo' essere ottenuta tramite modelli meccanici equivalenti. L'equivalenza e' rispettata nel senso di uguali forze e momenti risultanti agenti sulle pareti. Nel caso di moto del liquido in un contenitore chiuso si puo' sviluppare il modello meccanico equivalente come una serie di sistemi massa-molla-smorzatore.

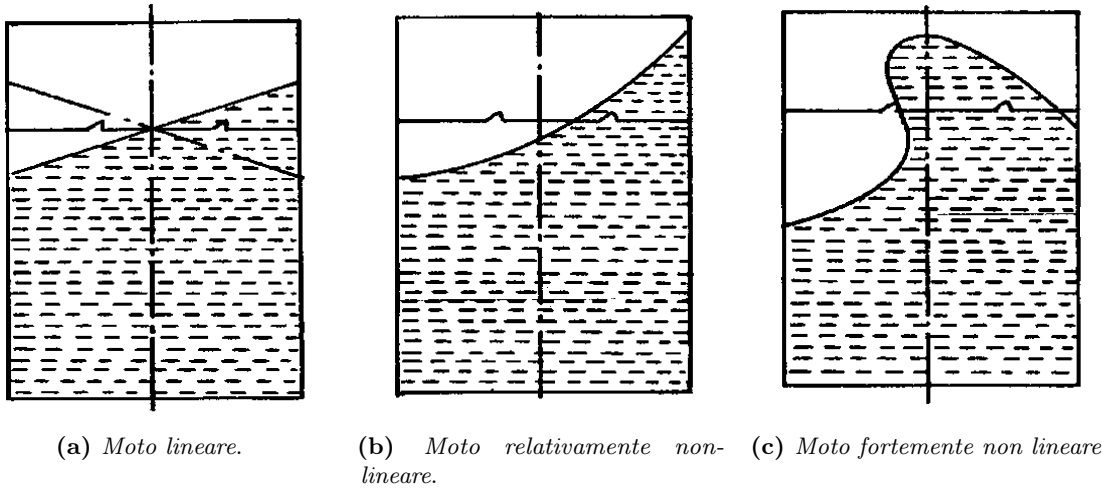
La costruzione dei modelli meccanici si basa sulle seguenti condizioni:

- le masse ed i momenti d'inerzia equivalenti devono conservarsi;
- il centro di massa deve rimanere lo stesso per piccole oscillazioni;
- il sistema deve possedere gli stessi modi di vibrare e deve produrre le stesse forze di smorzamento;
- le componenti delle forze e dei momenti sotto una certa sollecitazione devono essere equivalenti a quelle prodotte dal sistema attuale.

I modelli meccanici equivalenti forniscono una rappresentazione della dinamica della superficie libera del liquido tanto piu' buona quanto piu' si e' lontani dalle condizioni di risonanza. Vicini a questa configurazione le ipotesi di linearita' non sono piu' valide e si deve considerare una rappresentazione attraverso modelli non lineari.

Sono possibili tre regimi dinamici diversi come mostrato nella figura 12:

- piccole oscillazioni in cui la superficie del fluido rimane planare senza rotazioni dei suoi diametri nodali;
- oscillazioni con ampiezza relativamente elevata in cui la superficie del liquido è soggetta a moto non planare;
- moto fortemente non lineare in cui la non linearità è dovuta alla variazione repentina della velocità associata agli impatti di pressione idrodinamica del moto del liquido vicino alla superficie libera; i cambiamenti della velocità sono solitamente trattati come se fossero istantanei (salti di velocità) il che conferisce al comportamento del sistema varie caratteristiche non lineari.



**Figura 12:** Regimi di moto possibili per la superficie libera del fluido.

Nella seguente sezione saranno trattati i soli casi di linearità del modello massa-molla-smorzatore.

### 3.1 Modello massa-molla-smorzatore

Un modello equivalente generico è riportato in figura 13 ed è costituito da una massa rigida  $m_0$  che si muove con il serbatoio e da una serie di masse  $m_n$  che rappresentano le masse di ogni modo di *sloshing*.

Ogni massa modale  $m_n$  è collegata al serbatoio tramite una molla  $K_n$  ed uno smorzatore  $C_n$ . Il modello equivalente deve soddisfare le seguenti condizioni:

- *Massa totale di fluido:*

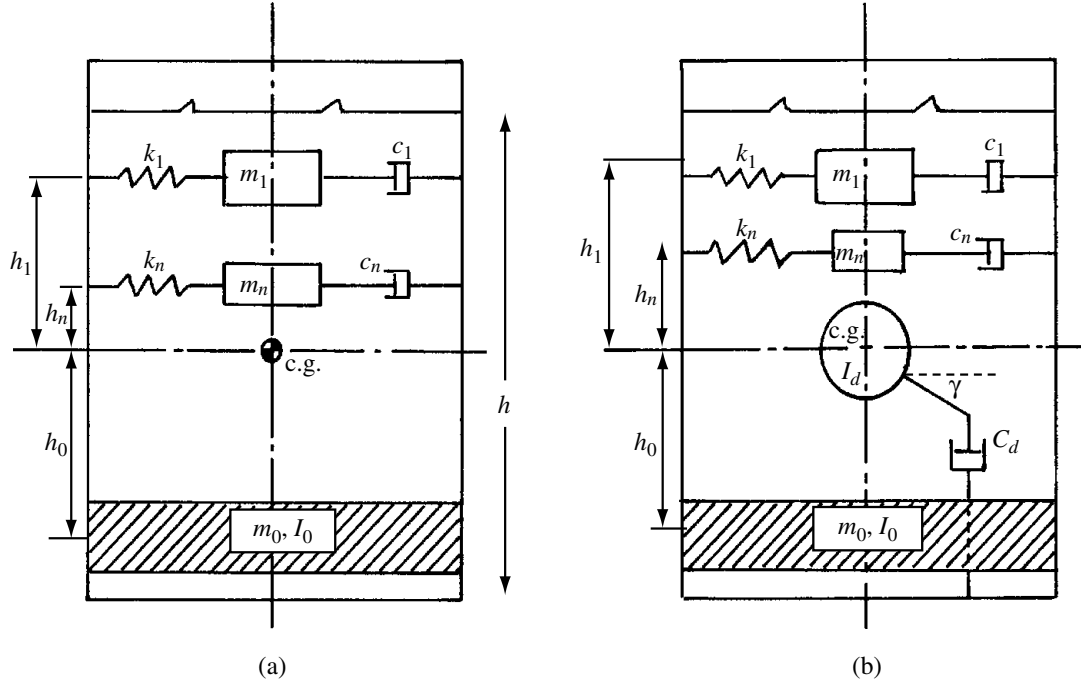
$$m_f = m_0 + \sum_{n=1}^{\infty} m_n$$

- *Momento d'inerzia delle masse* rispetto all'asse  $y$  che passa per il centro di massa della massa liquida solidificata:

$$I_f = I_0 + m_0 h_0^2 + \sum_{n=1}^{\infty} m_n h_n^2$$

- Il *centro di massa* deve essere lo stesso:

$$m_0 h_0 - \sum_{n=1}^{\infty} m_n h_n = 0$$



**Figura 13:** Modelli meccanici equivalenti: (a) massa-molla-smorzatore, (b) lo stesso modello ma con un momento d'inerzia smorzato.

- La *costante elastica* puo' essere determinata dalla definizione delle frequenze naturali. Nel caso di serbatoio cilindrico verticale si ha, infatti:

$$\omega_n^2 = \frac{K_n}{m_n} = \frac{g\xi_{1n}}{R} \tanh\left(\frac{\xi_{1n}h}{R}\right)$$

Si denoti con  $x_n$  lo spostamento di una massa  $m_n$  relativo alla parete del serbatoio, sia  $x$  lo spostamento del contenitore,  $\Psi$  il moto rotazionale dello stesso attorno all'asse  $y$  per il centro di massa (vedi figura 13b). E' possibile introdurre un disco privo di massa e con un certo momento d'inerzia sul centro di gravita' del sistema insieme ad uno smorzatore con coefficiente di smorzamento  $C_d$ . Sia  $\gamma$  l'angolo di rotazione del disco rigido relativo al fondo del serbatoio; in questo modo l'equazione del moto del modello meccanico equivalente puo' essere ricavata sfruttando l'equazione di Lagrange:

$$\frac{d}{dt} \left( \frac{\partial}{\partial \dot{q}_i} L \right) - \frac{\partial}{\partial q_i} L = - \frac{\partial}{\partial \dot{q}_i} \mathfrak{S} + Q_i$$

in cui il lagrangiano e' quello definito in precedenza,  $L = T - V$ ,  $q_i$  sono le coordinate generalizzate,  $Q_i$  sono le forze generalizzate e  $\mathfrak{S}$  e' la funzione di dissipazione di energia di Rayleigh.

L'energia cinetica e':

$$T = \frac{1}{2} m_0 (\dot{x} - h_0 \dot{\Psi})^2 + \frac{1}{2} I_0 \dot{\Psi}^2 + \frac{1}{2} \sum_{n=1}^{\infty} m_n (\dot{x}_n + \dot{x} + h_n \dot{\Psi})^2 + \frac{1}{2} I_d (\dot{\Psi} + \dot{\gamma})^2$$

L'energia potenziale, invece, risulta:

$$V = \frac{1}{2} g \Psi^2 m_0 h_0 - \frac{1}{2} g \Psi^2 \sum_{n=1}^{\infty} m_n h_n - g \Psi \sum_{n=1}^{\infty} m_n x_n + \frac{1}{2} \sum_{n=1}^{\infty} k_n x_n^2$$

L'energia di dissipazione e' esprimibile come:

$$\mathfrak{D} = \frac{1}{2} \sum_{n=1}^{\infty} C_n \dot{x}_n^2 + \frac{1}{2} C_d \dot{\gamma}^2 = \sum_{n=1}^{\infty} m_n \omega_n \zeta_n \dot{x}_n^2 + \frac{1}{2} C_d \dot{\gamma}^2$$

L'assorbitore e' definito come  $C_n = 2m_n \omega_n \zeta_n$ , mentre  $\zeta_n$  e' il coefficiente di smorzamento dell'assorbitore equivalente. Le coordinate e le forze generalizzate sono date dai seguenti vettori:

$$\{q_i\} = \{x \ x_n \ \Psi \ \gamma\}^T \quad , \quad \{Q_i\} = \{-F_x \ 0 \ m_y \ 0\}^T$$

Applicando l'equazione di Lagrange al sistema e sostituendovi le espressioni dei vari termini appena introdotte otteniamo le seguenti equazioni del moto:

- *Equazione della forza*

$$m_0(\ddot{x} - h_0 \ddot{\Psi}) + \sum_{n=1}^{\infty} m_n(\ddot{x}_n + \ddot{x} + h_n \ddot{\Psi}) = -F_x$$

- *Equazione dello sloshing del modo n-esimo*

$$m_n(\ddot{x} + \ddot{x}_n h_n \ddot{\Psi}) + K_n x_n + 2m_n \omega_n \zeta_n \dot{x}_n - m_n g \Psi = 0$$

- *Equazione del momento*

$$I_0 \ddot{\Psi} + m_0 h_0 (\ddot{x} - h_0 \ddot{\Psi}) - g \sum_{n=1}^{\infty} m_n x_n + \sum_{n=1}^{\infty} m_n h_n (\ddot{x}_n + \ddot{x} + h_n \ddot{\Psi}) + I_d (\ddot{\Psi} + \ddot{\gamma}) = M_y$$

- *Equazione del disco*

$$I_d (\ddot{\Psi} + \ddot{\gamma}) + C_d \dot{\gamma} = 0$$

Le equazioni appena scritte descrivono completamente il comportamento del modello meccanico equivalente per traslazione e *pitching*. Dall'equazione del momento si puo' anche scrivere il momento d'inerzia di un corpo rigido di fluido di uguale massa come:

$$I_{rigid} = I_0 + m_0 h_0^2 + \sum_{n=1}^{\infty} m_n h_n^2 + I_d$$

Ora analizziamo dei casi particolari delle equazioni del moto appena scritte.

### 3.1.1 Parametri del modello per un serbatoio cilindrico verticale

La forza idrodinamica dovuta alla combinazione di sollecitazioni traslazionali e di *pitching* e' la seguente:

$$F_x = m_f X_0 \Omega^2 \sin \Omega t \left\{ 1 + \sum_{n=1}^{\infty} \frac{2R \Omega^2 \tanh(\xi_{1n} h/R)}{\xi_{1n} h (\xi_{1n}^2 - 1) (\omega_n^2 - \Omega^2)} \right\} + m_f \Psi_0 \Omega^2 \sin \Omega t \\ \times \sum_{n=1}^{\infty} \frac{2R \tanh(\xi_{1n} h/R) \Omega^2 [(h/2) \Omega^2 (1 - (4R/\xi_{1n} h) \tanh(\xi_{1n} h/R)) + g]}{\xi_{1n} h (\xi_{1n}^2 - 1) (\omega_n^2 - \Omega^2)}$$

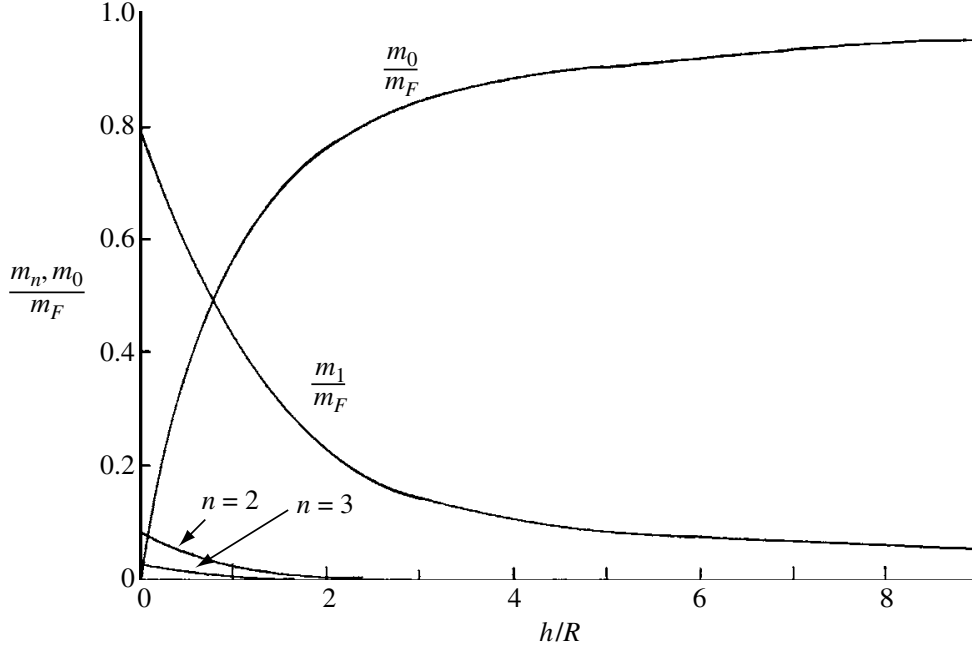
Confrontando l'espressione della forza  $F_x$  nel caso di sollecitazione laterale e quella nel caso di eccitazione di *pitching* otteniamo la seguente espressione dei parametri equivalenti:

$$\frac{m_n}{m_f} = \frac{2R}{\xi_{1n} h (\xi_{1n}^2 - 1)} \tanh(\xi_{1n} h/R)$$

$$\frac{m_0}{m_f} = 1 - \sum_{n=1}^{\infty} \frac{m_n}{m_f} = 1 - \sum_{n=1}^{\infty} \frac{2R}{\xi_{1n} h (\xi_{1n}^2 - 1)} \tanh(\xi_{1n} h/R)$$

$$\frac{h_n}{h} = \frac{1}{2} \left[ 1 - \frac{4R \tanh(\xi_{1n} h/2R)}{\xi_{1n} h} \right]$$

La figura 14 mostra la dipendenza del rapporto della massa non *sloshante* ( $m_0/m_f$ ) e del rapporto della massa modale di *sloshing* ( $m_n/m_f$ ) rispetto al rapporto tra la profondita' del liquido ed il raggio del serbatoio  $h/R$  per i primi tre modi. Si nota che la massa di *sloshing* decresce rapidamente per tutti i modi oltre al primo.



**Figura 14:** Rapporti delle masse modali e della massa fissa rispetto alla massa totale di fluido per un serbatoio cilindrico.

Dalla definizione del centro di massa vista in precedenza e dalle espressioni dei rapporti dei parametri appena ricavate e' possibile dedurre:

$$\frac{h_0}{h} = \frac{1}{1 - \sum_{n=1}^{\infty} (2R/\xi_{1n} h (\xi_{1n}^2 - 1)) \tanh(\xi_{1n} h/R)}$$

$$\times \left[ \frac{1}{2(h/R)} - \sum_{n=1}^{\infty} \frac{\xi_{1n} \tanh(\xi_{1n} h/R) + 4(R/(h \cosh(\xi_{1n} h/R)))}{\xi_{1n}^2 (\xi_{1n}^2 - 1) h/R} \right]$$

Il momento di *pitching* causato dalle forze idrodinamiche e' il seguente:

$$\begin{aligned}
M_y &= \Psi_0 \Omega^2 \sin \Omega t \\
&\times \left\{ I_f + m_f \sum_{n=1}^{\infty} \frac{2Rh^2 \Omega^2 \tanh(\xi_{1n} h/R)}{\xi_{1n} h (\xi_{1n}^2 - 1)} \frac{[1 - (4R/\xi_{1n} h) \tanh(\xi_{1n} h/R)]^2}{4(\omega_n^2 - \Omega^2)} \right. \\
&+ m_f \sum_{n=1}^{\infty} \frac{2R \tanh(\xi_{1n} h/R)}{\xi_{1n} h (\xi_{1n}^2 - 1)} \left. \left\{ \frac{(g/\Omega^2) + gh[1 - (4R/\xi_{1n} h) \tanh(\xi_{1n} h/R)]}{(\omega_n^2 - \Omega^2)} \right\} \right\} \\
&\quad + m_f X_0 \Omega^2 \sin \Omega t \\
&\times \sum_{n=1}^{\infty} \frac{2R \tanh(\xi_{1n} h/R)}{\xi_{1n} h (\xi_{1n}^2 - 1)} \left\{ \frac{g + (h\Omega^2/2)[1 - (4R/\xi_{1n} h) \tanh(\xi_{1n} h/R)]}{(\omega_n^2 - \Omega^2)} \right\}
\end{aligned}$$

Il momento ricavato e' la somma del contributo dovuto alla sollecitazione traslazionale e di *pitching*. Confrontando questo risultato con la somma dei due momenti si ottiene:

$$\begin{aligned}
I_f &= I_0 + m_0 h_0^2 + \sum_{n=1}^{\infty} m_n h_n^2 \\
&= m_f \left\{ \frac{h^2}{12} + \frac{R^2}{4} - 8R^2 \sum_{n=1}^{\infty} \frac{1 - (2R/\xi_{1n} h) \tanh(\xi_{1n} h/2R)}{\xi_{1n} (\xi_{1n}^2 - 1)} \right\}
\end{aligned}$$

in cui

$$m_f \left( \frac{h^2}{12} + \frac{R^2}{4} \right) = I_{solid}$$

e' il momento d'inerzia del liquido solidificato.

Il momento  $I_f$  e' il momento d'inerzia attuale del liquido rispetto all'asse  $y$  passante per il centro di massa. Il momento d'inerzia attuale puo' essere ottenuto determinando il rapporto  $I_f/I_{solid}$  del liquido attuale rispetto a quello rigido del liquido di un serbatoio cilindrico avente uguale altezza del fluido e massa fluida. La figura 15 mostra la dipendenza del rapporto  $I_f/I_{solid}$  in funzione del rapporto  $h/R$ . Per un valore di  $h/R$  vicino a 2 l'effettivo momento d'inerzia e' all'incirca il 18% del valore di  $I_{solid}$ . La ragione principale di questa differenza e' attribuita al fatto che non tutto il liquido partecipa al moto di *pitching* del sistema.

Per il primo modo di *sloshing* vengono utilizzati i seguenti parametri equivalenti:

$$k_1 = m_f \left( \frac{g}{1.19h} \right) \tanh^2 \left( 1.84 \frac{h}{R} \right)$$

$$m_1 = m_f \left( \frac{R}{2.2h} \right) \tanh \left( 1.84 \frac{h}{R} \right)$$

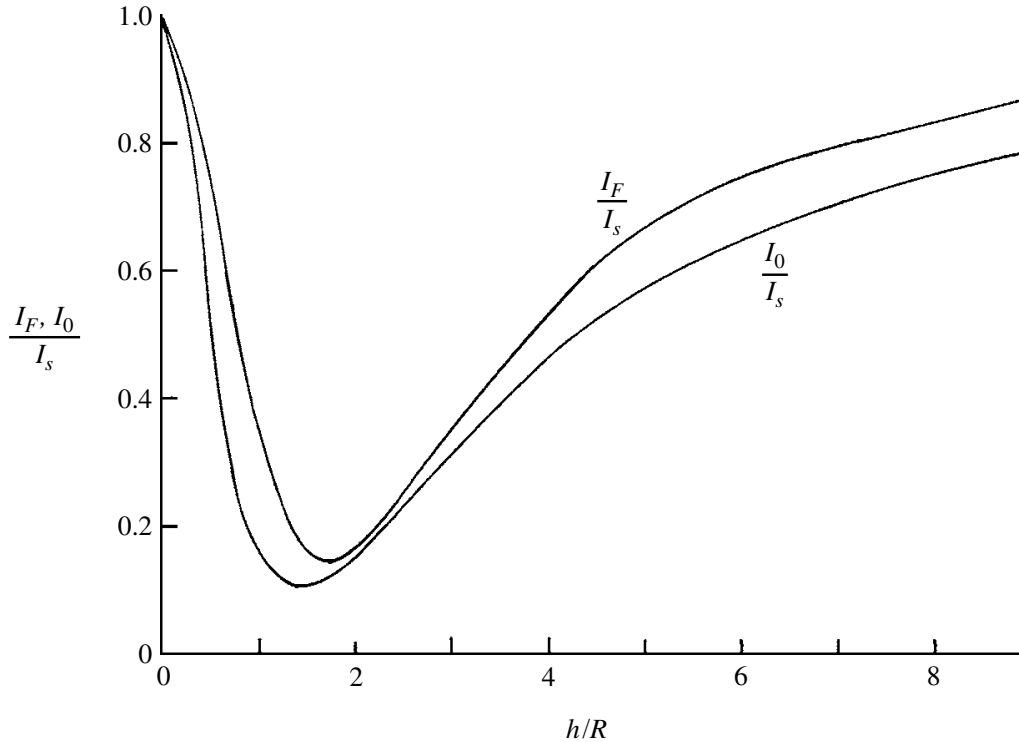
$$m_0 = m_f - m_1$$

$$h_1 = \frac{h}{2} - \left( \frac{R}{1.84} \right) \tanh \left( 1.84 \frac{h}{R} \right)$$

$$h_0 = \frac{m_f}{m_0} \left[ \frac{h}{2} - \frac{R^2}{2h} \right] - h_1 \frac{m_1}{m_0}$$

In molte applicazioni e' possibile ottenere un risultato soddisfacente considerando solo il primo modo di *sloshing* (si veda [1]).

Nel caso studiato in questo documento, come si vedra' nella sezione 'Calibrazione del modello', e' stato necessario valutare i parametri del modello massa-molla-smorzatore in modo tale da poter arrivare



**Figura 15:** Rapporti del momento d'inerzia della massa fluida e della massa fissa rispetto al momento d'inerzia del fluido solidificato in un serbatoio cilindrico.

a definire la funzione di trasferimento del sistema e da poter avere una stima della forza e del momento di *sloshing* una volta noti i disturbi in ingresso al serbatoio. Si rimanda la discussione del metodo seguito per ricavare i vari parametri alle sezioni successive.

## 4 Simulazioni CFD

Nella presente sezione saranno discusse le impostazioni utilizzate per effettuare le simulazioni numeriche e le varie prove per stabilire il giusto valore delle forze, dei momenti e dei parametri del modello meccanico per poter validare la teoria studiata.

Il programma utilizzato per le simulazioni e' Flow3D, programma particolarmente adatto per le simulazioni a pelo libero ed in grado di riconoscere automaticamente quali celle considerare nella simulazione in base alla presenza o meno di liquido al loro interno.

### 4.1 Impostazioni della simulazione

Il primo passo da effettuare e' impostare il tempo di simulazione che puo' variare a seconda del tipo di disturbo applicato al serbatoio. Infatti e' stato necessario effettuare diverse prove per poter determinare vari parametri del modello: per misurare la frequenza naturale del primo modo di vibrare e' necessaria un'accelerazione impulsiva nella direzione prescelta, per la misura della forza e del momento di *sloshing*, invece, una forzante sinusoidale che svanisca dopo un certo periodo di tempo. A seconda delle simulazioni il tempo di integrazione varia da 8 s nel caso di disturbo sinusoidale (in modo da analizzare piu' periodi del disturbo) a 10 s per disturbo impulsivo.

Successivamente si passa all'impostare il numero di fluidi presenti nella simulazione. Impostando un solo fluido il programma riconosce in automatico quali celle attivare in base alla presenza o meno di

fluido al loro interno. Fatto cio' occorre selezionare le unita' di misura che, nel caso in questione, sono quelle del Sistema Internazionale con la temperatura espressa in Kelvin. E' importante attivare le giuste unita' di misura per preservare la corrispondenza tra le quote dei file .stl della geometria del serbatoio creati separatamente e quelle delle quote nella sezione in cui viene effettuata la *mesh* in Flow3D. A questo punto si procede con la scelta dei modelli fisici da considerare

## 4.2 Attivazione dei modelli fisici

I modelli fisici che si attivano sono quelli che andranno a costituire le equazioni del campo di moto fluido discretizzate per ogni volume finito e che permettono di considerare diversi fenomeni fisici ed escluderne altri. In questo caso occorre attivare in tutto i cinque modelli fisici che sono descritti di seguito:

- *Density evaluation.* Questo pacchetto permette di valutare la variazione della densita' del fluido considerato e di approssimarla in diverse maniere. Nel caso esaminato, in particolare, l'approssimazione che viene eseguita e' del tipo lineare del prim'ordine (*first order approximation to density transport equation*).
- *Gravity.* Con questo comando si inserisce il valore dell'accelerazione di gravita' che viene considerata nel fenomeno e si sceglie l'asse del sistema di riferimento inerziale lungo cui agisce tale accelerazione. Per come e' stata creata la geometria del serbatoio, la direzione del vettore dell'accelerazione di gravita' e' l'asse  $z$  ed il modulo e' pari a  $9.81 \text{ m s}^{-2}$ .
- *Non-inertial reference frame.* Tramite questa opzione si possono inserire i disturbi esterni che agiscono sul sistema in questione, disturbi che causano lo spostamento del baricentro della massa fluida e rendono non inerziale il sistema di riferimento centrato nello stesso baricentro. I tipi di disturbi che possono essere inseriti sono i piu' vari: oscillazioni armoniche, impulsi, accelerazioni lineari.
- *Surface tension.* Attivando questa opzione si considera la tensione superficiale nelle equazioni del moto del campo fluido analizzato. Una volta scelto il tipo di fluido utilizzato, il valore del coefficiente  $\sigma$  necessario per l'attivazione di questo pacchetto si imposta in automatico.
- *Viscosity and turbulence.* In questa sezione e' possibile attivare il modello che tiene conto degli sforzi viscosi nel liquido e specificare il regime del campo di moto. Nel caso di un liquido stivato in un serbatoio il moto puo' essere considerato laminare senza commettere errori significativi.

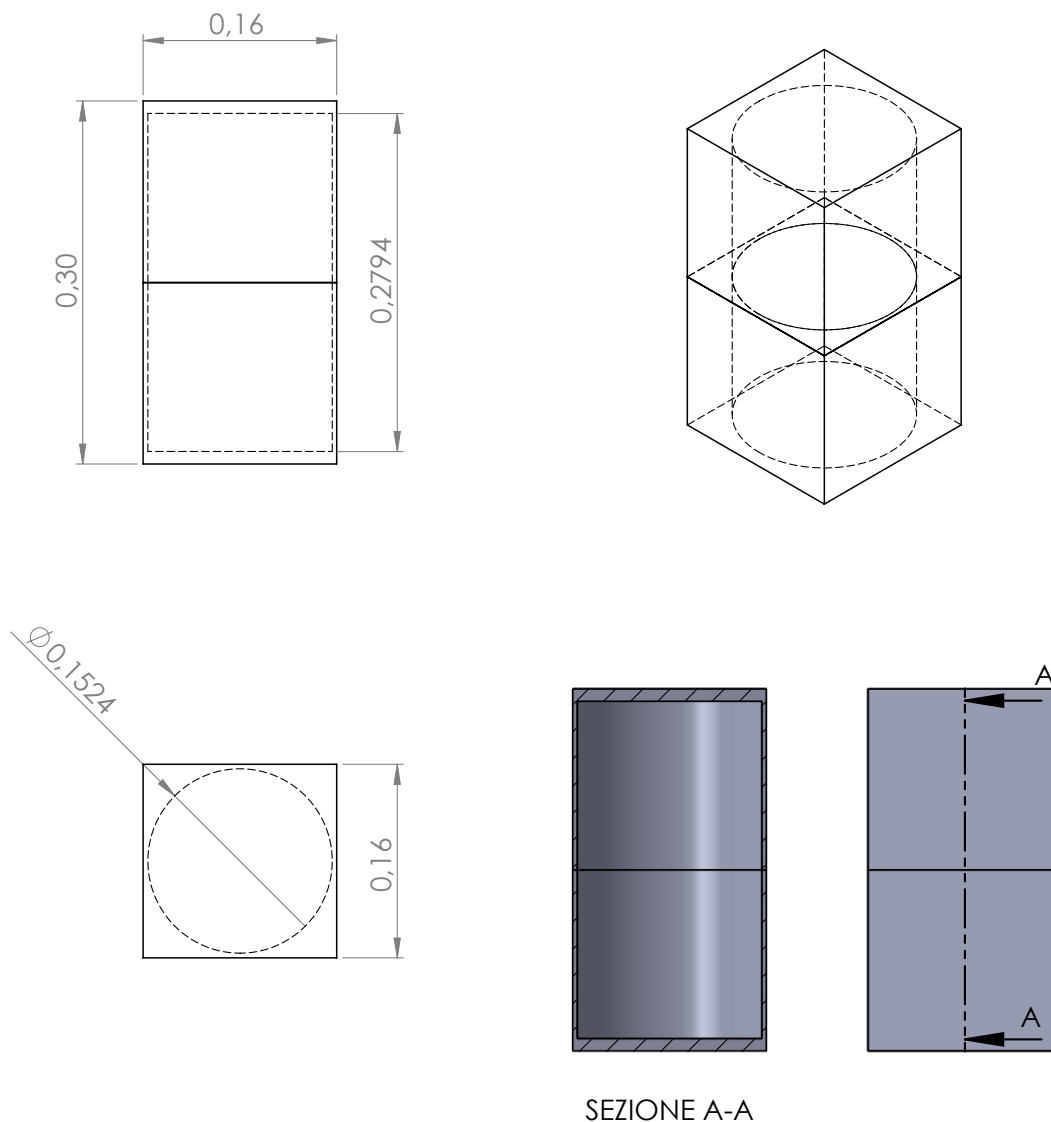
Una volta attivati i modelli fisici si passa alla discretizzazione del campo di moto in modo da poter discretizzare, in seguito, le equazioni del moto appena generate.

## 4.3 Geometria e *mesh*

La geometria analizzata e' quella di un serbatoio cilindrico verticale con diametro di 15.24 cm e altezza di 27.94 cm (la stessa utilizzata per gli esperimenti condotti e riportati in [2]), il tutto inserito in un parallelepipedo piu' grande per permettere di ottenere la *mesh* in maniera piu' agevole. Il parallelepipedo esterno ha base quadrata di lato 16 cm ed altezza di 30 cm. La geometria completa con i vari componenti evidenziati e' riportata in figura 16. Sono state create due componenti in modo tale da poterle considerare indipendentemente nelle impostazioni per la simulazione e poter definire meglio le condizioni di bagnabilita' sulle superfici interne del serbatoio come verra' descritto in seguito.

Dato un certo livello di riempimento da analizzare e, quindi, l'altezza del liquido iniziale nel contenitore, si puo' dividere il serbatoio in due parti in corrispondenza del pelo libero indisturbato del liquido ed imporre maggiore bagnabilita' sulle pareti della parte inferiore rispetto a quella superiore in modo da evitare fenomeni non lineari nella simulazione quali la formazione di goccioline sulle pareti del serbatoio non bagnate. Se il serbatoio fosse considerato come un unico volume cavo, questa condizione non si potrebbe imporre in nessun modo.



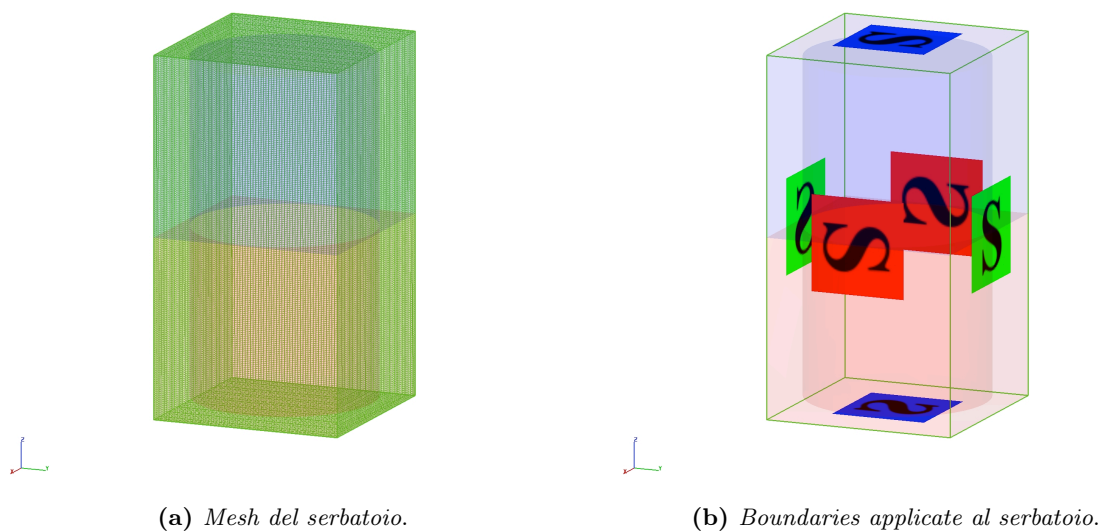


**Figura 16:** Geometria del serbatoio.

Una volta caricata la geometria del serbatoio si passa alla sua discretizzazione. In tutte le simulazioni effettuate la *mesh* utilizzata e' sempre la stessa ed e' stata ottimizzata in modo da avere un numero non troppo elevato di celle in cui suddividere il dominio fluido e, d'altra parte, una risoluzione buona per poter considerare i dati in output attendibili.

La *mesh* creata e' costituita in tutto da 995 331 celle, 75 celle lungo gli assi  $x$  ed  $y$  (si ricorda che il parallelepipedo esterno ha base quadrata) e 190 celle lungo l'asse  $z$  verticale ed e' riportata in figura 17a. Considerando un livello di riempimento del 50% le celle attive (ovvero contenenti liquido) sono 643 331 rispetto al totale.

Dopo aver creato la *mesh* e' necessario verificare che le impostazioni delle condizioni al contorno siano corrette. Il programma FLOW3D imposta delle *boundaries* automaticamente e, nel nostro caso, sono proprio quelle che ci servono per risolvere il problema in questione. Le condizioni al contorno sono da applicare sulle superfici esterne del parallelepipedo che racchiude il serbatoio e occorre impostare delle condizioni di *Symmetry* su ognuna delle sei facce del parallelepipedo. Il risultato e' riportato nella figura



**Figura 17:** Mesh della geometria del serbatoio con relative *boundaries*.

17b.

La condizione di *Symmetry* e' la condizione prescelta per ogni superficie per cui, nella definizione delle condizioni al contorno, non viene specificata nessuna condizione in particolare. Questa permette di considerare il contorno come una parete in cui la velocita' non e' forzata ad essere nulla.

#### 4.4 Impostazioni numeriche

Per l'analisi che deve essere effettuata sui dati in uscita dalle simulazioni CFD e' fondamentale che tali risultati abbiano una risoluzione temporale sufficiente per poter essere considerati attendibili e ben rappresentativi del fenomeno considerato.

Per questo motivo e' stato impostato un intervallo temporale per i dati raccolti dal simulatore pari a  $1 \times 10^{-2}$  s visto che il tempo di simulazione e' di circa 10 s. Per il setup dei dati di *restart* e' stato scelto un valore piu' elevato dell'intervallo temporale poiche' verranno analizzati i dati CFD che sono raccolti nella sezione *History data*.

Successivamente si devono specificare l'intervallo di tempo iniziale per l'integrazione, posto a  $1 \times 10^{-3}$  s, quello massimo che puo' essere assunto nel ciclo iterativo ( $1 \times 10^{-2}$  s) e quello minimo ( $1 \times 10^{-6}$  s). Fatto cio' si deve scegliere il criterio sulla base del quale viene scelta l'ampiezza dello stesso intervallo temporale appena specificato e, nel nostro caso, nonostante la simulazione possa risultare piu' lenta e pesante, e' stato scelto il piu' accurato metodo di controllo del *time-step*, ovvero, *Stability and convergence*.

Poi si imposta il risolutore della pressione come implicito perche' piu' stabile e con metodo *SOR*. Allo stesso modo si sceglie il risolutore dello stress viscoso e lo si imposta come *Successive under-relaxation*.

Le restanti impostazioni sono state lasciate inalterate e settate sui valori predefiniti del programma.

#### 4.5 Comandi per Flow3D

Nel programma Flow3D i principali comandi utilizzati per impostare la simulazione sono riportati qui di seguito in modo sintetico e avendo ben presenti le spiegazioni fornite nelle sezioni precedenti.

1. **General:**

- *Finish time*: tempo di simulazione di 10 s, ma variabile a seconda del tipo di simulazione (per analizzare la risposta del sistema ad un impulso il tempo di simulazione e' maggiore, mentre per lo studio del moto forzato del liquido e' sufficiente integrare le equazioni per circa 5 periodi del disturbo).
- *Unita' di misura*: unita' del Sistema Internazionale con temperatura espressa in Kelvin.

## 2. Physics:

- *Density evaluation*: attivata la valutazione della densita' la si imposta come approssimata al prim'ordine.
- *Gravity*: accelerazione di gravita' pari a  $-9.81 \text{ m s}^{-2}$  lungo l'asse  $z$ .
- *Non inertial reference frame*: si inserisce il tipo di accelerazione che si deve impartire al serbatoio e si sceglie l'asse della sollecitazione; a seconda dei casi sono state inserite accelerazione impulsive create manualmente nella sezione *tabular input* o accelerazioni sinusoidali nella sezione *armonic oscillation* specificandone ampiezza, frequenza e fase.
- *Surface tension*: e' stata attivata la tensione superficiale con un valore del coefficiente  $\sigma$  pari a quello dell'acqua di 0.073 con un metodo di risoluzione implicito.
- *Viscosity and turbulence*: vengono attivate viscosita' e comportamento laminare del fluido (visto il basso numero di Reynolds del moto).

## 3. Fluids

- *Fluid 1*: acqua a 273 K.

## 4. Meshing and geometry

- *Geometry*: sono stati importati i file in formato .stl che rappresentano le meta' inferiore e superiore del serbatoio e sono stati salvati come due diversi componenti in Flow3D (vedi figura 17). E stata applicata una riduzione delle dimensioni di entrambe i componenti in ogni direzione di un fattore  $10^{-3}$  cosi' da poter considerare le quote come espresse in metri anziche' in millimetri. Alla componente inferiore del serbatoio e' stata impostato un valore dell'angolo di contatto nella sezione *Surface Properties* di  $90^\circ$ , mentre al componente superiore un angolo di contatto di  $0^\circ$  per avere minore bagnabilita' rispetto al primo.
- *Mesh*: la *mesh* e' stata creata suddividendo il parallelepipedo che contiene il serbatoio in 75 celle in direzione  $x$  ed  $y$  e in 190 celle in direzione  $z$  come mostrato in figura 17. Il numero di celle totali e' di 995 331, di cui solo 643 331 sono celle attive.
- *Initialization*: le condizioni iniziali sono state impostate assegnando un altezza del fluido pari a 0.15 m nel caso di livello di riempimento del 50%.

## 5. Outputs:

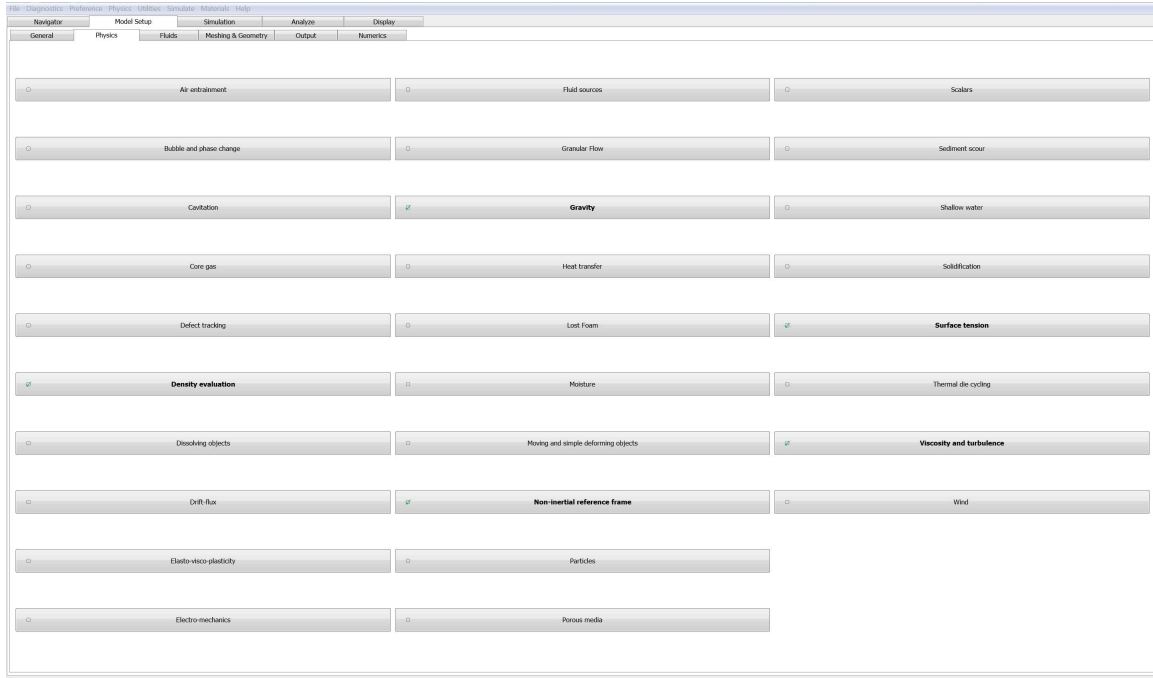
- *Selected data*: step temporale di 0.1 s
- *History data*: step temporale di 0.01 s
- *Selected data*: step temporale di 0.1 s

## 6. Numerics:

- *Initial timestep*:  $1 \times 10^{-3} \text{ s}$
- *Minimum timestep*:  $1 \times 10^{-6} \text{ s}$
- *Maximum timestep*:  $1 \times 10^{-2} \text{ s}$
- *Time-step size controlled by*: Stability and convergence

- *Pressure solver options*: SOR Implicit
- *Viscous stress solver options*: Successive under-relaxation

Nelle figure 18 e 19 sono rappresentati gli *screenshot* relativi alle impostazioni dei modelli fisici e numerici da impostare in Flow3D per procedere con le simulazioni come descritto in precedenza.



**Figura 18:** Selezione dei modelli fisici da attivare per la corretta impostazione delle simulazioni per lo *sloshing laterale*.

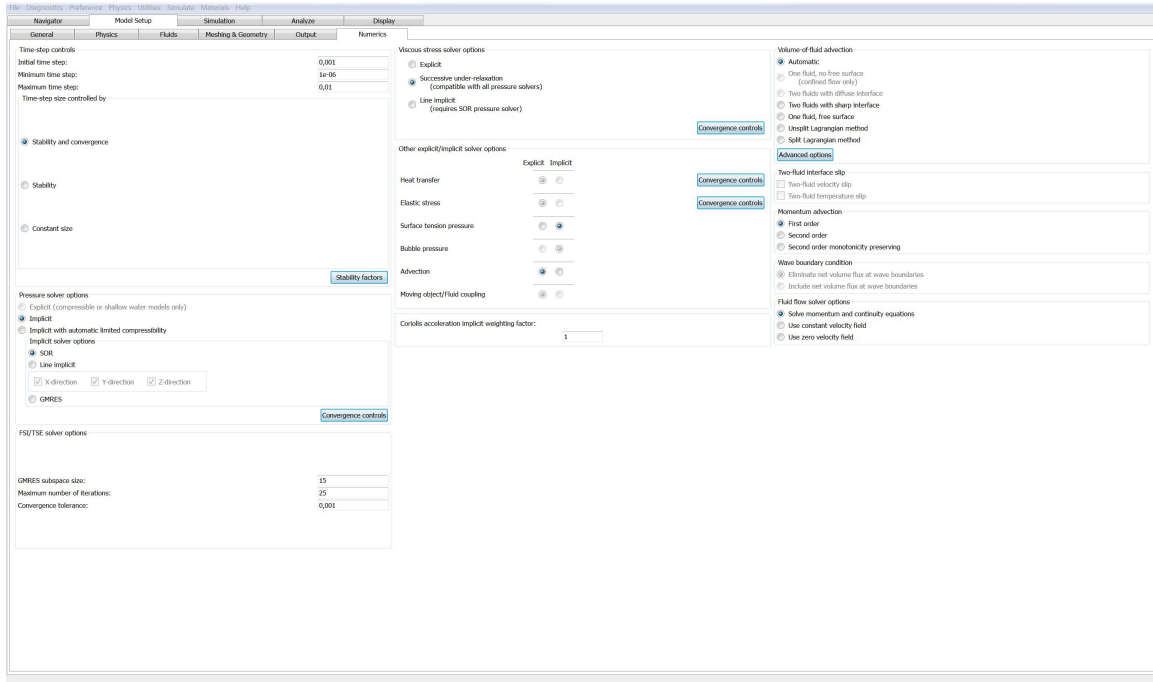
## 4.6 Modelli matematici applicati

Come e' possibile vedere nelle sezioni precedenti, durante l'impostazione delle simulazioni CFD sono stati attivati diversi modelli fisici e tipi di risolutori che nel programma Flow3D agiscono in maniera automatica. In questa sezione verra' discusso a grandi linee come questi pacchetti preimpostati agiscono e funzionano all'interno del software in questione.

Nella sezione *Physics* i principali modelli da studiare sono i seguenti:

- *Density evaluation*:

Le densita'  $\rho_{i,j,k}^n$  sono valutate basandosi sul tipo di problema considerato. Per un flusso con un solo fluido o nel caso di flusso incomprimibile, tutti i valori delle densita' sono impostati come la densita' del *Fluid1* considerato. I fluidi sulla superficie libera nei problemi ad un solo fluido possono sia evaporare che condensare quando e' utilizzato un modello di cambio di fase. Questo rimane vero sia nel caso in cui la parte gassosa dell'interfaccia sia a pressione costante sia nel caso in cui questo sia una bolla omogenea. Sia nei casi di evaporazione che condensazione, qualsiasi concentrazione scalare che e' associata con il fluido sara' modificata in base al cambiamento di fase. Se un elemento di superficie e' riempito per meno di meta' di liquido, allora la variazione di concentrazione e' affidata al principale vicino dell'elemento superficiale. Quindi, la scelta di considerare la variazione di densita', seppur analizzando un fluido incomprimibile a densita' costante (acqua a 273 K), e' giustificata dal fatto che potrebbero avvenire dei fenomeni di evaporazione o di condensazione sulla superficie libera del liquido anche se non voluti o contemplati nel fenomeno analizzato.



**Figure 19:** Riassunto delle impostazioni numeriche da selezionare per avere una corretta risoluzione delle equazioni del moto per il fluido.

- *Non-inertial reference frame:*

Nel caso in cui si voglia studiare lo *sloshing* di un fluido all'interno di un contenitore e' utile modificare le equazioni del moto in modo da ottenere una formulazione per una generica accelerazione non inerziale. La forma di un'accelerazione di questo tipo per un elemento fluido che si trova ad una distanza  $\vec{r}$  dall'origine del s.d.r. inerziale e che ha velocita'  $\vec{u}$  e' la seguente:

$$\vec{G} = \vec{g} - \left\{ \dot{\vec{U}} + \dot{\vec{\Omega}} \times (\vec{r} - \vec{R}) + 2\vec{\Omega} \times \vec{u} + \vec{\Omega} \times [\vec{\Omega} \times (\vec{r} - \vec{R})] \right\}$$

In questa espressione  $\vec{g}$  e' la costante dell'accelerazione gravitazionale e  $\dot{\vec{U}}$  e' l'accelerazione traslazionale del punto  $\vec{R}$  nel sistema di riferimento della *mesh* rispetto ad un sistema di riferimento inerziale.  $\vec{\Omega}$  e  $\dot{\vec{\Omega}}$  sono la velocita' e l'accelerazione rotazionale del sistema di riferimento della *mesh* rispetto ad un punto  $\vec{R}$  in riferimento ad un s.d.r. inerziale (G. K. Batchelor, 1983).

L'inserimento del vettore  $\vec{R}$  e' molto utile per l'applicazione dell'equazione ai corpi rigidi in cui  $\vec{R}$  e' solitamente il centro di massa del corpo. Se si sceglie questa configurazione e non viene applicata alcuna forza esterna sul corpo allora si ha che:

$$\dot{\vec{U}} = \vec{0}$$

Spesso l'origine del s.d.r. solidale al corpo (ovvero il s.d.r. della *mesh*) e' nel baricentro del corpo: in questo caso si ha che:

$$\vec{R} = \vec{0}$$

Se si vogliono specificare l'accelerazione di gravita' o l'accelerazione esterna che agisce sul corpo allora lo si puo' fare modificando i vettori  $\vec{g}$  ed  $\dot{\vec{U}}$  rispettivamente.

Per utilizzare quest'ultima opzione, o per accelerazioni piu' generiche, si devono specificare le quantita'  $\vec{U}$ ,  $\vec{\Omega}$  ed  $\dot{\vec{\Omega}}$  nella sezione apposita dell'interfaccia del software (*non-inertial reference frame*). In piu', queste quantita' devono essere espresse nel s.d.r. della *mesh* (ovvero solidale al corpo rigido). Possono essere espresse in un s.d.r. cartesiano o in coordinate cilindriche, ma in entrambi i casi, le accelerazioni subite dal fluido sono automaticamente calcolate dal programma dalle nove componenti in cui si possono scomporre tramite l'equazione precedente scritta per  $\vec{G}$ . Questo e' un algoritmo completamente generale e non richiede alcun intervento da parte dell'operatore.

In generale il pacchetto *non-inertial reference frame* e' utilizzato per lo studio di un flusso in un contenitore mobile. La *mesh* computazionale e' fissa con il contenitore in un s.d.r. non inerziale, mentre delle forze apparenti sono applicate al fluido per considerare gli effetti non-inerziali. Se il moto del contenitore non e' prefissato, ma e' dinamicamente accoppiato a quello del flusso al suo interno, viene impiegato un algoritmo di dinamica del corpo rigido per risolvere il moto del serbatoio per ottenere le forze fittizie. L'accoppiamento tra il moto del corpo e la dinamica del fluido puo' essere sia esplicito che implicito.

Il modello descritto nella dinamica del corpo rigido include un alto livello di mutuo accoppiamento. Per questo, una soluzione generica dovrebbe considerare le equazioni per tutte le parti del problema simultaneamente. Una soluzione di questo tipo, tuttavia, e' difficile da implementare, in particolare senza la definizione di dettaglio dei momenti e delle forze ambientali e di controllo. Nella risoluzione del problema presente, si considera una procedura che non e' universalmente applicabile, ma che risulta efficiente nonostante il suo range di validita'. L'algoritmo esplicito e' stato generalizzato per permettere un accoppiamento iterativo implicito che allarga le soluzioni ad alcune situazioni in piu'.

Nel programma la soluzione e' stata decomposta nei seguenti sei step:

1. valutazione delle forze e dei momenti ambientali
2. valutazione delle forze e dei momenti di controllo
3. soluzione delle equazioni della dinamica del fluido per ogni componente
4. soluzioni delle equazioni della dinamica per il centro di massa del corpo rigido
5. soluzione delle equazioni della dinamica rotazionale del corpo rigido
6. integrazione delle equazioni della cinematica per l'assetto del corpo rigido

Questi sei step sono combinati in un algoritmo ciclico che fa avanzare la soluzione totale nel tempo. Ogni step utilizza i risultati precedenti dagli altri formando un algoritmo esplicito. La soluzione iterativa implicita aggiunge un settimo step, un test di convergenza, e ripete i sei step base finche' la convergenza non e' raggiunta. Nel nostro caso, la soluzione e' ricavata proprio in questo ultimo modo, implicitamente.

- *Surface tension:*

La tensione superficiale puo' essere modellata in flusso con uno o due fluidi con una superficie affilata. E' possibile definire l'angolo di contatto delle pareti dei componenti e della *mesh* e, inoltre, puo' essere specificato un angolo di contatto diverso per componenti diverse della geometria discretizzata. I valori degli angoli di contatto vanno da 0° (bagnabilita' massima) a 180° (bagnabilita' minima). L'angolo di contatto di default e' di 90°. Se si considera la tensione superficiale allora viene attivata automaticamente anche l'adesione superficiale e non e' possibile disattivarla per nessun componente. Inoltre, tutti i fluidi presenti mostrano comportamenti di adesione vicino alle superfici ed e' necessario specificare l'angolo di contatto che rappresenta il comportamento di bagnabilita' o meno della superficie.

Il coefficiente della tensione superficiale puo' anche essere espresso come una funzione lineare della temperatura come:

$$\sigma = \sigma - c_\sigma(T - T^*)$$

in cui  $c_\sigma$  e' il coefficiente di linearita' della tensione superficiale e  $T^*$  e' la temperatura di riferimento. Per utilizzare questa opzione, tuttavia, deve essere attivato il modello di scambio termico nel fluido. In fluidi con una superficie libera sostanzialmente distorta o interrotta, possono generarsi delle piccole goccioline di liquido separate dal resto del fluido a causa del rumore numerico occasionale nelle pressioni della tensione superficiale. Le goccioline possono causare variazioni della distribuzione della pressione superficiale non desiderate a causa della piccola curvatura della loro superficie. Puo' essere ridotto il numero delle goccioline per ridurre tali inaccuratezze numeriche e questa procedura e' controllata dalla variabile di pulitura della frazione di fluido. Un valore positivo per questo parametro attiva l'opzione di pulitura della frazione di liquido. Se in una cella o in quelle adiacenti si verifica la presenza di un valore della frazione di liquido inferiore a questo, allora il fluido viene rimosso completamente dalla cella in questione. Il volume rimosso viene catalogato come l'errore cumulativo di volume e plottato alla fine della simulazione in funzione del tempo.

E' importante sottolineare che il modello della tensione superficiale e' piu' sensibile alle irregolarita' della *mesh* rispetto ad altri perche' dipende dalle curvature, ovvero da derivate del second'ordine. E' consigliabile utilizzare volumi di controllo che siano il piu' possibile simili a cubi o quadrati nel caso 2D. Nella *mesh* che e' stata considerata in ogni simulazione, infatti, la suddivisione in celle e' stata effettuata in modo tale che i lati di ogni cella nelle tre dimensioni fossero confrontabili.

- *Viscosity and turbulence:*

In Flow3D sono disponibili 5 possibilita' per la valutazione della viscosita' per la chiusura del problema della turbolenza. Tutti i modelli necessitano dell'attivazione del pacchetto *viscosity and turbulence* ed anche di un valore positivo della viscosita' dinamica. La viscosita' del fluido viene impostata automaticamente quando carichiamo il fluido *Fluid1*.

Se non e' specificata alcuna condizione iniziale o al contorno per la turbolenza, allora i valori iniziali e al contorno dell'energia cinetica turbolenta sono impostati automaticamente dal programma in modo da essere contenuti, il che corrisponde fisicamente a considerare il flusso come laminare. Se il flusso sviluppato e' chiaramente turbolento, allora, come regola pratica, il livello di turbolenza del flusso a monte si imposta considerando le fluttuazioni della velocita' turbolenta nel flusso indisturbato pari al 10% della velocita' del flusso medio. Per esempio, per una velocita' indisturbata media di  $20 \text{ m s}^{-1}$  il modulo delle fluttuazioni turbolente della velocita' ( $u'$ ) e' di  $2 \text{ m s}^{-1}$  ed il valore dell'energia cinetica turbolenta e' pari a:

$$\frac{1}{2}u'u' = \frac{1}{2}2 \times 2 = 2 \text{ m s}^{-1}$$

Le impostazioni di default del programma sono solitamente utilizzate per fissare i coefficienti che compaiono nei modelli di turbolenza. Il valore di questi coefficienti puo' essere cambiato se necessario, anche se non e' generalmente consigliato.

Si noti che la formulazione utilizzata per la valutazione della turbolenza puo' essere cambiata quando il programma riparte. Non e' consigliato utilizzare un algoritmo della viscosita' implicito con i modelli di turbolenza che coinvolgono una soluzione dell'equazione di trasporto turbolento ( $k - \varepsilon$ , *RNG* o altre espressioni dell'energia turbolenta ad un'equazione) poiche' i termini di diffusione viscosi in queste equazioni sono sempre approssimati esplicitamente.

Nel caso analizzato in questo documento, il flusso e' considerato laminare visto il basso numero di Reynolds che caratterizza il moto. Infatti, considerando lo *sloshing* del liquido nel serbatoio in caso di linearita' della deformata della superficie libera del liquido, necessariamente le sollecitazioni ed i gradienti di velocita' nel campo di moto fluido risultano essere contenuti. Pertanto il problema della selezione del modello per modellare gli sforzi viscosi non si pone.

Nell'attivazione del modello *Viscosity and turbulence* occorre selezionare anche il tipo di superficie che contiene il liquido. Per farlo occorre scegliere nell'apposito menu della sezione *Wall slip*. Con

queste opzioni si puo' descrivere la presenza di velocita' su di una superficie di contenimento del flusso. In generale, le condizioni sulla superficie sono descritte come *no-slip*, *partial-slip* e *free-slip*. Le superfici *free-slip* sono tali per cui non c'e' cambiamento del profilo delle velocita' e sono spesso usate per descrivere le interfacce tra due fluidi che differiscono di piu' di un ordine di grandezza in densita', come aria ed acqua per esempio. I contorni *partial-slip* descrivono una riduzione parziale della velocita' del fluido al contorno e possono essere utilizzati per descrivere, ad esempio, flussi di olio in tubazioni con rivestimenti emulsionati all'interno del tubo. D'altro canto la piu' comune condizione al contorno e' la superficie *no-slip*, che descrive bene qualsiasi interfaccia solido/fluido. Le condizioni al contorno della viscosita' sulla geometria dei componenti e sulle pareti della *mesh* includono una velocita' *slip* che e' linearmente proporzionale allo stress di taglio a parete. Il coefficiente di proporzionalita' e' il coefficiente di attrito, che applica globalmente a tutte le superfici solide che non hanno specificato alcun coefficiente d'attrito una condizione al contorno come se fossero pareti. Puo' essere specificato un certo valore del coefficiente d'attrito che viene, poi, applicato a tutte le superfici del componente della geometria considerata.

Mano a mano che il coefficiente d'attrito tende ad infinito, tanto piu' la velocita' *slip* a parete tende a zero (condizione *no-slip*). Per evitare di dover specificare un valore del coefficiente di attrito arbitrariamente elevato, quando si attiva la condizione *no-slip* il coefficiente e' impostato su un valore negativo (-1). Un valore positivo e finito corrisponde ad una condizione *partial-slip*. Un valore nullo corrisponde ad una condizione *free-slip*. In ogni simulazione che e' stata effettuata le pareti sono considerate come pareti *no-slip* per avere la migliore condizioni nelle interfacce solido/liquido.

Per quanto riguarda la sezione *Numerics* i principali concetti da tenere a mente sono i seguenti:

- *Time-step control*:

Ci sono diverse restrizioni per l'ampiezza del *time-step* in Flow3D che devono essere osservate per evitare instabilita' numeriche. Se si sceglie il *time-step* automatico nei dati di input il codice aggiusta lo step temporale in modo che sia il piu' ampio possibile senza violare le condizioni di stabilita' o superare il massimo intervallo temporale eventualmente specificato. Il *time-step* potra' essere ridotto anche quando le iterazioni di pressione o temperatura sono superiori ai valori nominali che dipendono dalle opzioni di iterazione. Generalmente il *time-step* oscilla con cambiamenti del 5% ad ogni ciclo finche' la condizione di stabilita' non venga violata; in questo caso potrebbe verificarsi una riduzione maggiore. E' consigliabile utilizzare l'opzione di controllo automatico del *time-step* per ottenere il miglior risultato.

L'ampiezza dello step temporale puo' essere modificata anche qualora sia richiesto un valore costante nel caso in cui l'aumento della frazione di liquido aumenti piu' del doppio del volume della cella. In questo caso la soluzione e' riportata al valore iniziale prima dell'inizio dell'iterazione e, prima di procedere, il valore dell'intervallo temporale e' dimezzato.

Se viene disattivato il controllo automatico allora si deve scegliere il *time-step* in modo che soddisfi il seguente criterio. In primo luogo si deve fare in modo che il fluido non possa fluire in piu' di una cella per un singolo time-step. Questo trasporto di corrente dipende non solo dalla velocita', ma anche dalle frazioni di volume o area aperte al flusso. La condizione di stabilita' di base e' la seguente:

$$\delta t < CON \min \left( \frac{V_f \delta x_1}{A_x u}, \frac{V_f \delta y_j}{R_i A_y v}, \frac{V_f \delta z_k}{A_z w} \right)$$

in cui  $(u, v, w)$  sono i moduli delle velocita' ed il coefficiente *CON* di solito e' fissato ad un valore pari a 0.45 per considerare la peggiore situazione possibile suggerita da un'analisi della stabilita' semplificata. Per applicazioni con flussi comprimibili il fattore *CON* e' abbassato a 0.25.

Una cella con un area della faccia aperta ampia ed un volume piccolo potrebbe ridurre il *time-step* a piccoli valori se il flusso nella stessa cella fosse significativo. Questo potrebbe accadere e si puo'



stabilire monitorando il punto della *mesh* e controllando il *time-step* rappresentato nei file di output di Flow3D e potrebbe essere necessario cambiare la discretizzazione che si effettua nella *mesh*.

Lavorare con superfici libere introduce un altro tipo di condizione di stabilita' associata alla propagazione delle onde di superficie. Se viene applicata un'accelerazione  $a$  al fluido in una direzione normale alla superficie libera si possono verificare delle onde di superficie con velocita' dell'ordine di  $\sqrt{ah}$ , in cui  $h$  e' l'altezza del liquido o la lunghezza dell'onda. In pratica, si utilizza la dimensione della cella nella direzione normale per  $h$  e la si moltiplica per un fattore pari a 0.5 nel test di stabilita'. La condizione attuale e' che lo onde di superficie non si dovrebbero propagare in piu' di una cella per *time-step*. Per esempio, se  $z$  e' la direzione normale alla superficie libera del liquido e  $a_z$  e' l'accelerazione normale, allora si ha che per  $\delta t$  vale la relazione:

$$\delta t < 0.5 \frac{\min\left(\delta x_i, \frac{\delta y_j}{R_1}\right)}{\sqrt{\delta z_k a_z}}$$

Limiti simili vengono imposti anche nelle direzioni  $x$  ed  $y$  per ogni cella che contiene una superficie libera.

Nel caso in esame, quindi, il criterio sulla base del quale viene controllata l'ampiezza dell'intervallo temporale e' basata sul mantenimento della stabilita' della soluzione e sul raggiungimento della convergenza della soluzione nel minor numero di iterazioni. Oltre a queste condizioni, vengono imposti anche i limiti superiori ed inferiori entro cui deve cadere il  $\delta t$  anche se fosse possibile ampliarlo maggiormente.

- *Pressure solver:*

Le forze di pressione nell'equazione dei momenti sono sempre approssimate implicitamente per fluidi incomprimibili in modo da mantenere l'incomprimibilita' del fluido e la stabilita' della soluzione.

Per flussi con fluidi comprimibili l'opzione di default e' il metodo implicito SOR, ma l'utente puo' scegliere di utilizzare un metodo esplicito per le pressioni. In questo caso non e' richiesta nessuna iterazione delle pressioni per ottenere la soluzione numerica. Tuttavia, la larghezza dell'intervallo temporale (*time-step size*) viene limitata da criterio di stabilita' di Courant in cui la velocita' del fluido include la velocita' del suono. Le approssimazioni esplicite sono, di solito, piu' accurate delle implicite, specialmente quando la soluzione comprende forti variazioni di pressione (onde d'urto per esempio). D'altro canto, la limitazione della *time-step size* potrebbe essere molto pesante per ottenere un calcolo efficiente. Per questo, un buon compromesso si raggiunge se si considera un risolutore implicito, ma limitando la larghezza dell'intervallo di tempo attraverso il tempo che le onde di pressione impiegano per percorrere una certa distanza del dominio fluido.

Il metodo di iterazione di default e' il metodo SOR *point-by-point* che raggiunge una rapida convergenza in un'ampia gamma di condizioni del flusso. Tuttavia, nel metodo SOR, la convergenza potrebbe essere lenta quando le celle della *mesh* hanno un rapporto d'aspetto elevato. In questo caso si impiega spesso l'algoritmo ADI per accelerare la convergenza.

Il metodo ADI puo' essere nella direzione di una sola coordinata o in una combinazione di direzioni. L'uso di un metodo ADI puo' essere preferito anche nei casi in cui deve essere preservata la simmetria della soluzione del flusso. Il metodo SOR non e' simmetrico rispetto ad una direzione degli assi delle coordinate. Per esempio, se le condizioni del flusso fisico considerato sono simmetriche rispetto al piano normale all'asse  $x$ , allora scegliendo in risolutore implicito *Line* in questa direzione la simmetria sara' conservata.

Esistono anche altri tipi di solutori per le pressioni, ma, avendo scelto di considerare acqua nel caso analizzato, ovvero un flusso incomprimibile, allora il metodo che si deve applicare e' proprio il metodo SOR.

## 4.7 Esempi di simulazioni effettuate

Come già accennato nelle sezioni precedenti, per la calibrazione del modello sono necessarie diverse simulazioni con diversi tipi di disturbo in ingresso al sistema. Ad ogni simulazione corrispondono risultati ovviamente diversi, ma in ognuna deve essere sempre verificata l'ipotesi in cui vale il modello meccanico equivalente: la *linearità* della deformata della superficie libera del liquido.

Detto ciò, verranno analizzati qui di seguito due tipi di simulazioni che rappresentano i due casi generali con cui si avrà a che fare per l'analisi del modello: le simulazioni con ingresso impulsivo e le simulazioni con ingresso sinusoidale. Parlando di ingresso o input al sistema si intende sempre un'accelerazione nel caso traslazionale o un'accelerazione angolare nel caso rotazionale di *pitching*.

Nel caso di accelerazione impulsiva quello che si deve fare è creare un disturbo manualmente nella sezione *Tabular input* (per maggiori informazioni ci si riconduca alla sezione 'Comandi per Flow3D'); un esempio del disturbo inserito nel caso traslazionale che si esaminerà è riportato in tabella 1.

**Tabella 1:** Costruzione dell'ingresso traslazionale impulsivo nella simulazione di calibrazione.

$t[s]$	0	0.4	0.41	0.415	0.42	0.43	0.44
$\ddot{x}[ms^{-2}]$	0	0	6	9	6	0	0

È chiaro come l'impulso non sia ideale, ma sia stato creato simulando una rampa lineare che raggiunge un massimo e poi torna a zero con la stessa pendenza. Questo lo si fa perché il programma interpola i dati in input nella sezione *Tabular input* per generare un disturbo che sia più adatto alle simulazioni numeriche, senza discontinuità o variazioni brusche che possono portare ad instabilità a livello numerico.

Una volta creato l'input ideale è stata effettuata la simulazione e i risultati ottenuti sono raccolti in figura 20. È importante notare l'evoluzione temporale della deformata della superficie libera del liquido che negli istanti iniziali appare perfettamente piatta ed inizia ad incresparsi vicino alle pareti del serbatoio. Questo accade perché è proprio in queste zone che il liquido inizia a risentire delle accelerazioni impartite al serbatoio.

Mano a mano che il tempo di simulazione e di applicazione della forzante procede, anche la parte di liquido ancora in quiete si mette in movimento fino a raggiungere negli istanti finali la ben nota configurazione lineare asimmetrica del primo modo di *sloshing*.

Nel caso considerato l'impulso si annulla dopo circa mezzo secondo ed è chiaro dai risultati (dalle figure 20c e 20d in particolare) che nel momento in cui la forzante cessa la sua azione allora la superficie libera del liquido torna ad essere quasi piatta come negli istanti iniziali della simulazione. Ovviamente, il tempo impiegato dal sistema per raggiungere di nuovo una situazione di quiete, in cui, cioè, né il baricentro del sistema né la superficie libera del liquido presentano più variazioni in altezza ( $\eta(t) = 0$ ), dipende dal rapporto di smorzamento del sistema stesso e, in ultima analisi, dalla viscosità del fluido stivato nel contenitore.

Un'altra simulazione matematicamente diversa da quella appena analizzata, ma concettualmente identica, è quella che deve essere effettuata per poter stimare la forza ed il momento di *sloshing* ed il movimento lungo  $x$  del baricentro per il successivo calcolo del rapporto di smorzamento  $\gamma$  del sistema.

In questo caso il disturbo in ingresso al sistema viene creato in MATLAB ed è, sostanzialmente, una funzione definita a tratti come la seguente:

$$\begin{cases} a_t(t) = -\omega_f^2 d \sin(\omega_f t) & , \quad 0 \leq t \leq 5 \\ a_t(t) = 0 & , \quad t > 5 \end{cases}$$

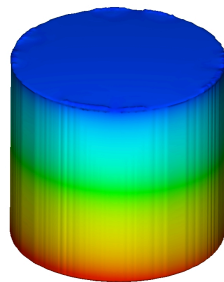
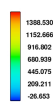
Il disturbo considerato nel caso in analisi è il seguente:

$$a_t(t) = -4.5^2 0.05 \sin(4.5t)$$

Impulso\_Traslazione\_50%

Time Frame: 0.40103

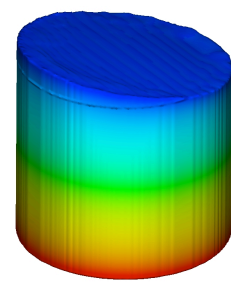
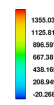
pressure



Impulso\_Traslazione\_50%

Time Frame: 0.80041

pressure

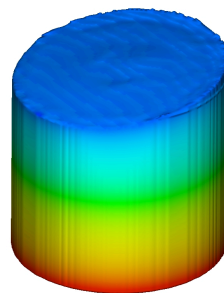
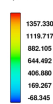


- (a) *La superficie libera del fluido sta iniziando a deformarsi ai bordi del serbatoio.* (b) *Il pelo libero del fluido sta iniziando ad assumere la forma lineare inclinata tipica del primo di vibrare.*

Impulso\_Traslazione\_50%

Time Frame: 1.09977

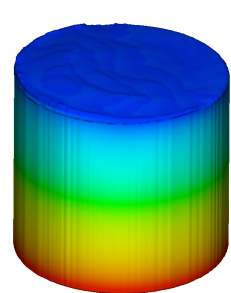
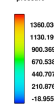
pressure



Impulso\_Traslazione\_50%

Time Frame: 3.49985

pressure



- (c) *La deformata del pelo libero e' del tutto formata.* (d) *Dopo la cessazione del disturbo il liquido torna lentamente nella condizioni 'di riposo'.*

**Figura 20:** Screenshot dei risultati della simulazione con ingresso traslazionale impulsivo in diversi istanti di tempo. Si presti attenzione alle variazioni della deformata della superficie libera nel tempo in base alla progressione del disturbo.

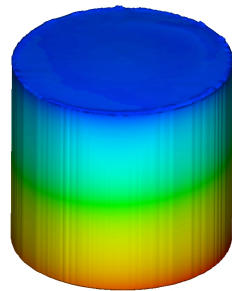
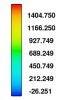
I risultati delle simulazioni sono riportati in figura 21 e l'evoluzione temporale della deformata della superficie libera del liquido e' la stessa del caso dell'impulso. Ci sono, tuttavia, due precisazioni da fare: in primo luogo la tipologia del disturbo e' diversa dal caso dell'impulso e, di conseguenza, anche l'evoluzione temporale dello *sloshing* del liquido. E' possibile vedere dai fotogrammi presentati nella figura 21b e 21c che la deformata del pelo libero del liquido e' si lineare, ma molto piu' sollecitata che nel caso precedente. Questo e' dovuto all'accoppiamento particolare che si genera tra il disturbo e la risposta del liquido il che da origine ad interferenze tra i due fenomeni che possono amplificare l'entita' dello *sloshing*, cosi' come attenuarla a seconda dei casi. In secondo luogo, data la maggiore durata ed entita' del disturbo, il raggiungimento della condizione di quiete dopo la cessazione della sollecitazione avviene in un periodo di tempo piu' lungo e, probabilmente, meno apprezzabile che nel caso precedente dai risultati della simulazione.

Non viene analizzato il caso delle simulazioni per la validazione del modello meccanico equivalente

Impulso\_Traslazione\_50%

Time Frame: 0.70103

pressure

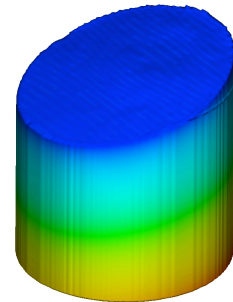
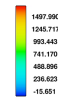


(a) La superficie libera del liquido inizia a deformarsi vicino alle pareti del serbatoio.

Impulso\_Traslazione\_50%

Time Frame: 2.20057

pressure

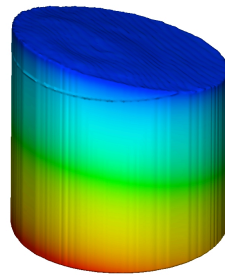


(b) L'intera superficie libera risente della sollecitazione impartita al serbatoio.

Impulso\_Traslazione\_50%

Time Frame: 4.10221

pressure

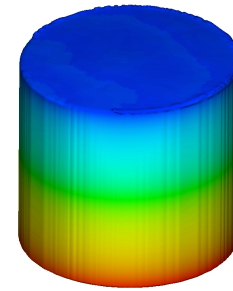
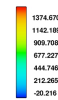


(c) Il disturbo e' quasi al termine della sua attivita'.

Impulso\_Traslazione\_50%

Time Frame: 8.99953

pressure



(d) Il liquido si sta riavvicinando ad una condizione di quiete.

**Figura 21:** Screenshot dei risultati della simulazione con ingresso traslazionale sinusoidale creato in MATLAB e che si annulla dopo 5 s. Si puo' vedere che l'evoluzione temporale della deformata della superficie libera del liquido e' piu' ampia che nel caso di ingresso impulsivo.

perche' consistono sempre in analisi numeriche con ingresso sinusoidale che, a differenza del caso appena descritto, ha la stessa durata della simulazione (10 s). Le osservazioni sarebbero, quindi, le stesse appena sottolineate.

## 5 Calibrazione del modello meccanico equivalente

In questa sezione viene descritto come sia possibile ricavare i valori dei parametri concentrati del modello discussi in precedenza sfruttando i dati ottenuti da opportune simulazioni numeriche. In ognuna delle sezioni successive verranno discusse le varie metodologie di indagine seguite nel corso dello studio del modello e verranno confrontati i risultati analitici e numerici tra di loro.

Occorre precisare che, nella fase di calibrazione ed in quella di validazione, sono stati seguiti due metodi concettualmente diversi: nella fase di calibrazione non viene considerato lo smorzamento dovuto

alla viscosita' del liquido contenuto nel serbatoio, mentre nella fase di validazione, all'interno della funzione di trasferimento che descrive il modello meccanico equivalente il termine dissipativo e' presente.

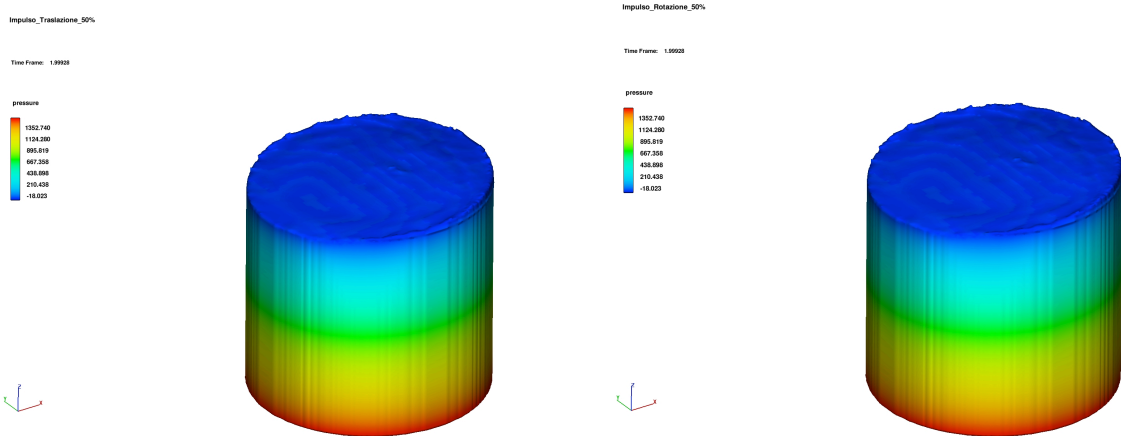
Questi due modi diversi di procedere sono giustificati dal fatto che, avendo a che fare con un liquido poco viscoso (acqua a temperatura ambiente nel caso in esame) gli effetti dissipativi sono altresì contenuti e trascurare il termine contenente lo smorzamento non genera errori troppo elevati (si veda [3]). Piuttosto, questa approssimazione ci permette di disaccoppiare il sistema e di pervenire alla determinazione dei parametri del modello meccanico equivalente in maniera più agevole ed ugualmente corretta. Durante la fase di validazione, invece, il coefficiente di smorzamento viene considerato per non perdere generalità nello studio del modello meccanico equivalente.

## 5.1 Frequenza naturale del sistema

Il primo passo per iniziare la calibrazione del modello meccanico equivalente coincide con la determinazione della frequenza propria del sistema  $\omega_{mn}$ . In primis occorre verificare quale sia il modo di vibrare che occorre considerare a seguito dell'applicazione di una determinata forzante al serbatoio, trasversale o rotazionale che sia.

Come prima cosa occorre notare che, in riferimento alla figura 14, per i modi di vibrare del sistema superiori al primo e per valori del rapporto  $h/R$  prossimi a 2 (nel caso in esame si ha che  $h/R = 1.83$ ) il rapporto tra la massa modale  $m_n/m_f$  e' molto piccolo e, essendo così contenuto, non avrebbe senso considerarlo nello studio del fenomeno. Infatti, tenendo presente l'errore numerico che compie il software durante una simulazione, non sarebbe mai apprezzabile in modo significativo una massa modale troppo ridotta rispetto alla massa  $m_f$  totale del liquido. Per questo motivo nell'analisi seguente si e' deciso di considerare solo il primo modo di *sloshing*.

Detto ciò, in entrambe i casi, traslazionale e rotazionale, per capire come reagisce il liquido ad un input esterno sono state effettuate due simulazioni con ingresso impulsivo e si e' valutata qualitativamente la deformata della superficie libera del liquido. I risultati grafici sono riportati nella figura 22a e 22b.



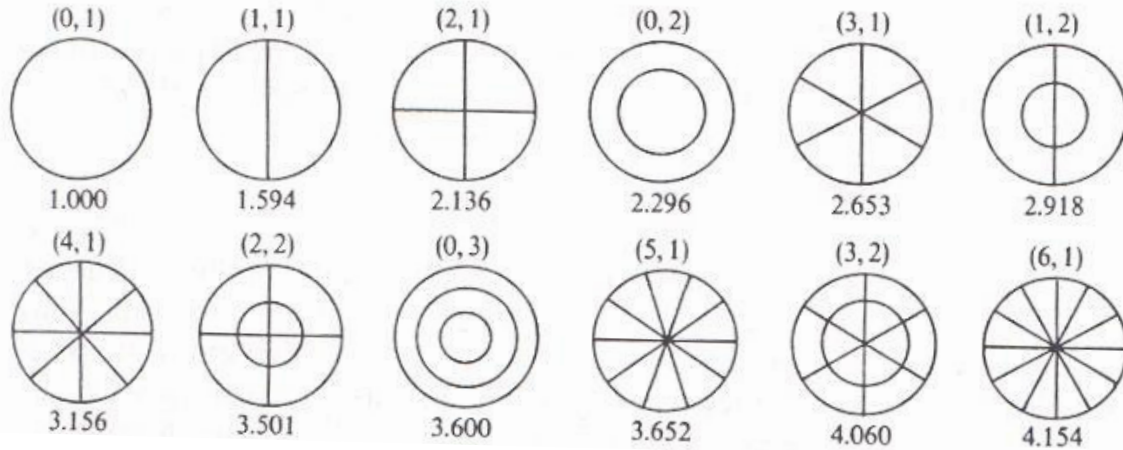
(a) Ingresso traslazionale impulsivo lungo l'asse  $x$  con ampiezza massima di  $8 \text{ m s}^{-2}$ . (b) Ingresso rotazionale impulsivo di pitching con ampiezza massima di  $10 \text{ m s}^{-2}$ .

**Figura 22:** Simulazioni del movimento del fluido nel serbatoio sottoposto a diversi disturbi impulsivi. E' possibile notare come in entrambi i casi il modo di vibrare da considerarsi sia il primo, per cui  $m = 1$  ed  $n = 1$ .

Per la valutazione qualitativa della deformata del pelo libero del liquido ci si e' serviti dell'analogia tra il fenomeno dello *sloshing laterale* e della deformata di membrane circolari tese vibranti e vincolate alle estremita'. L'idea di analizzare la deformata del liquido in questo modo deriva dal fatto che, in base alle osservazioni sui risultati delle simulazioni numeriche effettuate, si e' visto che solo una piccola parte

del liquido stivato nel serbatoio prende parte al fenomeno dello *sloshing*, per cui e' come se ci fosse una sorta di membrana liquida che da sola genera la deformata che e' visibile proprio nelle figure 22a e 22b.

Dunque, alla luce di queste considerazioni, tenendo presenti le deformate delle membrane circolari tese e vincolate alle estremita' riportate in figura 23 e che il significato dei coefficienti  $m$  ed  $n$  e' rispettivamente quello di identificare il numero dei diametri nodali e dei nodi circolari (a cui si aggiunge il diametro esterno di contatto tra il liquido e le pareti del serbatoio), e' possibile procedere all'identificazione del giusto modo di vibrare da considerare. Naturalmente, essendo una valutazione qualitativa, quella che segue e' una discussione basata sull'abilita' dell'osservatore nel valutare la deformata del pelo libero; a questa considerazione si aggiunge anche il fatto che nel caso dello *sloshing* laterale il liquido non e' vincolato alle estremita' e, per questo, l'analogia con le membrane vibranti non e' esente da imperfezioni, ma ugualmente utile per comprendere il fenomeno in questione.



**Figura 23:** Modi di vibrare di membrane tese e vincolate alle estremita' con i valori dei coefficienti  $m$  ed  $n$  nei vari casi di deformata della superficie libera.

In entrambi i casi di figura 22a e 22b, si puo' notare la presenza di una deformata asimmetrica rispetto al piano  $y - z$ , ortogonale all'asse su cui sara' valutata la forza di *sloshing*. In questo modo e' possibile assegnare al parametro  $m$  un valore unitario, poiche' e' presente un solo diametro nodale. E' altrettanto evidente che non esistono componenti simmetriche nelle deformate del pelo libero, per cui non esistono nodi circolari in nessun caso. Questo permette di affermare che il coefficiente  $n$  risulta anch'esso unitario poiche' si considera come nodo circolare il diametro piu' esterno del liquido a contatto con la parete verticale del serbatoio.

Alla luce di queste considerazioni e' possibile affermare che il solo modo di vibrare da considerare e' il primo, per cui occorre considerare i seguenti parametri:

$$\omega_{mn} = \omega_{11} = \omega_1 \quad , \quad \xi_{mn} = \xi_{11} = 1.841$$

E' possibile, quindi, iniziare con la valutazione della frequenza propria del sistema. E' importante partire da questo punto poiche', in base ai modelli analitici visti in precedenza, e' necessario scegliere un disturbo da applicare al sistema con una frequenza  $\Omega = \omega_f$  tale che il rapporto:

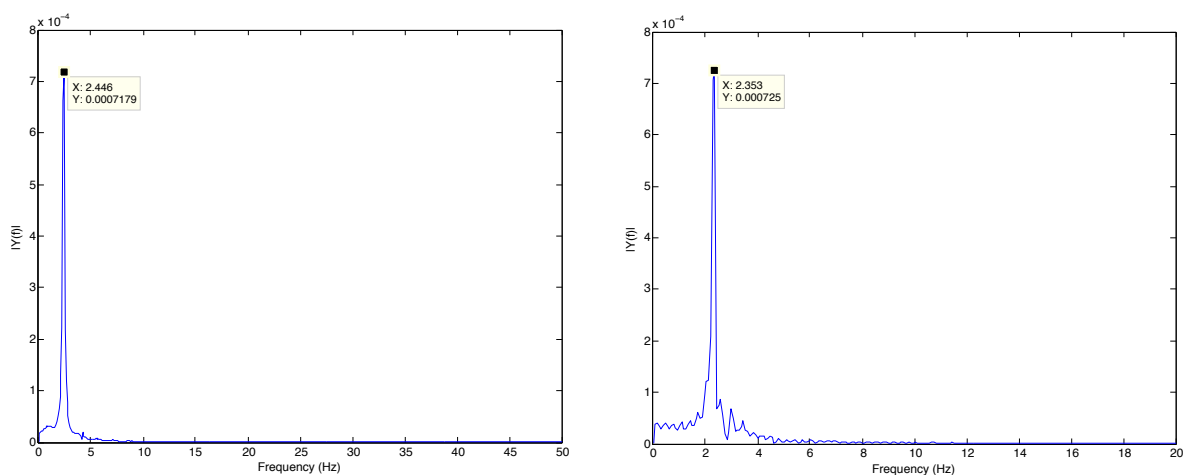
$$\frac{m_n}{m_f} = \frac{2R}{\xi_{1n}h(\xi_{1n}^2 - 1)} \tanh(\xi_{1n}h/R) = \frac{x_{t0}}{\alpha g} (\omega_n^2 - \omega_f^2) > 0$$

Infatti un rapporto tra due masse negativo non potrebbe essere accettato dal punto di vista fisico.

A livello pratico, per la determinazione di  $m_n$ , nota la  $\omega_n$  del primo modo di vibrare del fluido, si impone al serbatoio un disturbo con frequenza  $\omega_f < \omega_n$  in modo da determinare la massa sloshante del fluido (sempre relativa al primo modo di vibrare) noto lo spostamento massimo del baricentro  $x_{t0}$ .

Per ottenere la  $\omega_n$  del serbatoio vi si deve imporre, invece, un impulso il piu' vicino possibile ad uno ideale e non troppo elevato da causare fenomeni non lineari sulla deformata della superficie libera del liquido. Successivamente, andando ad analizzare lo spostamento del baricentro del liquido nel tempo nella direzione di applicazione del disturbo (l'asse  $x$  del sistema di riferimento inerziale nel caso traslazionale) tramite analisi di Fourier, si ottiene lo spettro in frequenza della risposta del sistema. Il primo picco visibile dal grafico che si ottiene coincide con la frequenza  $\omega_n$  cercata.

Nel caso di serbatoio con livello di riempimento al 50% ed eccitazione traslazionale lungo l'asse  $x$  e rotazionale di *pitching* attorno all'asse  $y$  del s.d.r. centrato nel baricentro del sistema i risultati dall'analisi dello spostamento del baricentro sono quelli riportati in figura 24a e 24b.



(a) Frequenza naturale del sistema con accelerazione traslazionale lungo l'asse  $x$ . (b) Frequenza naturale del sistema con accelerazione di *pitching* attorno all'asse  $y$ .

**Figura 24:** Risultati dell'analisi ricavati da simulazioni con ingresso impulsivo traslazionale e di *pitching*.

Il valore di  $\omega_1$  cercato corrisponde alla coordinata lungo  $x$  del punto evidenziato e nel caso in esame l'analisi fornisce il seguente risultato nel caso traslazionale:

$$f_n = 2.446 \text{ Hz} \implies \omega_n = 15.369 \text{ rad s}^{-1}$$

mentre, nel caso rotazionale risulta:

$$f_n = 2.353 \text{ Hz} \implies \omega_n = 14.784 \text{ rad s}^{-1}$$

Questi valori possono essere confrontati con il corrispondente determinato per via analitica. Infatti, per  $\omega_1$  sussiste la seguente relazione:

$$\omega_1^2 = \frac{g\xi_{11}}{R} \tanh\left(\frac{\xi_{11}h}{R}\right)$$

Sostituendo il valore dei vari termini e calcolando la pulsazione naturale si ottiene:

$$\omega_1 = \sqrt{\frac{g1.841}{R} \tanh\left(\frac{1.841h}{R}\right)} \implies \omega_n = 15.377 \text{ rad s}^{-1}$$

Evidentemente la differenza tra il valore numerico e quello analitico e' contenuta e risulta inferiore a:

$$\frac{\omega_{n,analitico} - \omega_{n,numerico}}{\omega_{n,analitico}} \times 100 < 4\%$$

Una volta individuata la frequenza naturale del primo modo di vibrare del sistema si passa all'identificazione del *range* di linearita' in cui valgono le ipotesi della teoria matematica e del modello meccanico equivalente riportati nelle sezioni precedenti. E' ovvio che piu' la frequenza del disturbo  $\omega_f$  si avvicina al valore di quella naturale del sistema, maggiore e' il rischio di fenomeni non lineari dovuti al raggiungimento della condizione di risonanza. Per poter effettuare un'analisi corretta occorre provare diversi valori per le accelerazioni laterali e rotazionali in input al serbatoio. Per trovare il valore piu' consono a questo scopo sono state effettuate diverse simulazioni di prova con lo scopo di identificare la migliore combinazione tra la frequenza di disturbo  $\omega_f$  e l'ampiezza dell'accelerazione in input. Infatti, in Flow3D, l'accelerazione in input viene data attraverso il comando preimpostato *Harmonic oscillation* nel setup dei modelli fisici; in particolare, l'accelerazione viene espressa nel seguente modo:

$$a_t(t) = -\omega_f^2 d \sin(\omega_f t + \phi)$$

in cui  $d$  e' l'ampiezza del disturbo traslazionale e  $\phi$  e' la fase.

Nel caso rotazionale la situazione e' leggermente diversa: il programma Flow3D prevede che vengano inserite la frequenza  $\omega_f$  e l'ampiezza dell'accelerazione angolare  $\alpha_0$  attorno all'asse desiderato ed applicata all'origine della geometria considerata come segue:

$$\alpha(t) = -\omega_f^2 \alpha_0 \sin(\omega_f t + \phi)$$

Si nota, quindi, che occorre prima fissare una certa  $\omega_f$  per il disturbo, tale da verificare  $\omega_f < \omega_n$  e tale da essere sufficientemente lontana dalle condizioni di risonanza, e poi una certa ampiezza  $d$  dell'oscillazione. Durante le prove che sono state effettuate (vedi tabella 2) veniva fissato il valore del prodotto  $\omega_f^2 d$  e venivano fatte variare una alla volta la frequenza e l'ampiezza fino a che non si e' trovato il valore ideale del prodotto analizzato.

Nelle diverse combinazioni i risultati migliori mostravano una superficie libera del liquido quasi planare, senza gocce di liquido sulle pareti superiori, mentre, quelli piu' critici mostravano increspature della superficie e gocce di liquido quasi staccate dal resto del volume fluido, condizioni del tutto non lineari (vedi figura 25).

## 5.2 Massa fluida e massa di *sloshing*

Per calibrare il modello occorre conoscere i valori delle masse di liquido totale, di *sloshing* ed inerziale, denotate rispettivamente  $m_f$ ,  $m_s$  ed  $m_0$ .

Per il calcolo della massa totale di fluido si sfrutta la conoscenza della densita' del liquido e del volume occupato dallo stesso, per cui risulta:

$$m_f = V\rho = \pi R^2 h \rho = 2.548 \text{ kg}$$

Fatto cio' si passa al calcolo della massa di *sloshing* tramite la formula analitica seguente (valida per il primo modo di *sloshing* e, quindi, in entrambi i casi di sollecitazione trasversale lungo l'asse  $x$  e rotazionale di *pitching*):

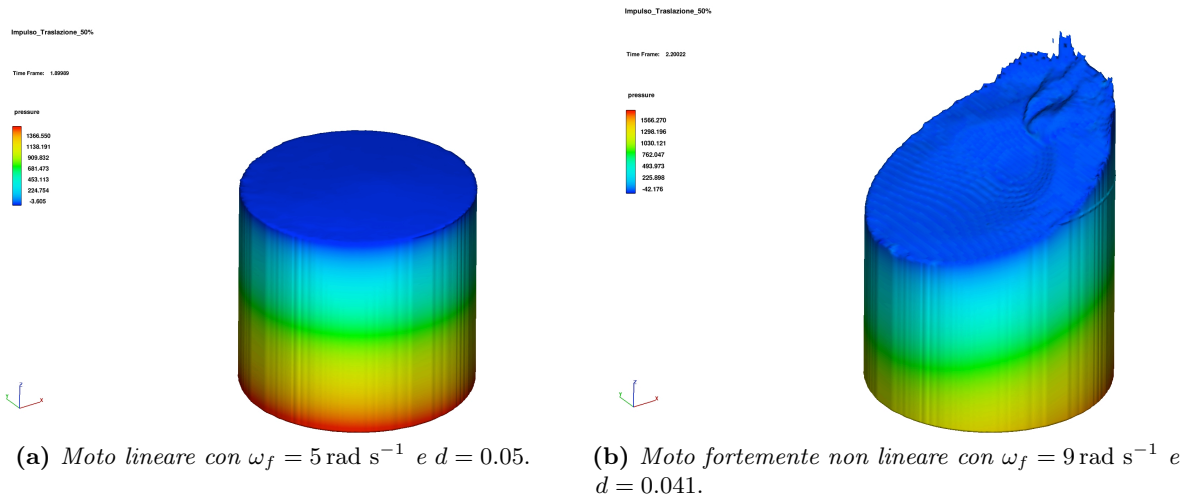
$$m_1 = m_f \left( \frac{R}{2.2h} \right) \tanh \left( 1.84 \frac{h}{R} \right) = 0.631 \text{ kg}$$

E' possibile calcolare la massa  $m_1$  anche sfruttando i dati in uscita dalle simulazioni CFD. Per farlo e' necessario conoscere lo spostamento massimo  $x_{t0}$  subito dal baricentro quando vi e' applicato un disturbo



**Tabella 2:** Raccolta delle simulazioni di prova effettuate per identificare il *range* di linearita' del modello nel caso traslazionale.

$\omega_f$	$\omega_f^2 d$	$d$
5 rad s <sup>-1</sup>	10 m s <sup>-2</sup>	0.4 m
	8 m s <sup>-2</sup>	0.32 m
	5 m s <sup>-2</sup>	0.2 m
	2 m s <sup>-2</sup>	0.08 m
7 rad s <sup>-1</sup>	10 m s <sup>-2</sup>	0.204 m
	8 m s <sup>-2</sup>	0.163 m
	5 m s <sup>-2</sup>	0.102 m
	2 m s <sup>-2</sup>	0.041 m
9 rad s <sup>-1</sup>	10 m s <sup>-2</sup>	0.123 m
	8 m s <sup>-2</sup>	0.099 m
	5 m s <sup>-2</sup>	0.098 m
	2 m s <sup>-2</sup>	0.025 m
13 rad s <sup>-1</sup>	10 m s <sup>-2</sup>	0.059 m
	8 m s <sup>-2</sup>	0.047 m
	5 m s <sup>-2</sup>	0.03 m
	2 m s <sup>-2</sup>	0.012 m



**Figura 25:** Simulazioni del movimento del fluido nel serbatoio sottoposto a diversi disturbi lungo l'asse  $x$ . Le viste sono relative ad assi di riferimento diversi per permettere di visualizzare in maniera migliore lo spostamento della superficie libera.

sinusoidale che dopo un certo intervallo di tempo si annulla e le pulsazioni  $\omega_f$  ed  $\omega_n$  rispettivamente del disturbo e propria del sistema. Questi valori devono essere inseriti nella seguente espressione ricavata dalla letteratura (vedi [2]):

$$m_s = \frac{x_{t0}}{\omega_f^2 d} (\omega_n^2 - \omega_f^2) m_f$$

Nella simulazione di calibrazione del modello nel caso traslazionale, noto lo spostamento massimo  $x_{t0}$  del baricentro pari a  $2.96 \times 10^{-3} \text{ m}$  con un'accelerazione trasversale in input di pulsazione pari a  $5 \text{ rad s}^{-1}$

ed ampiezza  $d$  pari a 0.08 m, si ottiene un valore della massa di *sloshing* pari a:

$$m_1 = m_s = 0.785 \text{ kg}$$

Nel caso rotazionale, invece, la formula utilizzata in precedenza deve essere modificata come segue per poter soddisfare l'eguaglianza dal punto di vista dimensionale:

$$m_s = \frac{x_{t0}}{\omega_f^2 d (h_1 + z_{CM})} (\omega_n^2 - \omega_f^2) m_f$$

in cui  $h_1 + z_{CM}$  rappresenta l'altezza della massa modale  $m_1$  rispetto all'origine della geometria del serbatoio. E' necessario dividere per questo termine poiche' l'accelerazione angolare e' applicata proprio nell'origine della geometria discretizzata nella simulazione e, quindi, per ottenere un'accelerazione occorre moltiplicare l'ampiezza massima per la distanza lungo  $z$  della massa di *sloshing*. In questo caso il risultato e' leggermente diverso, ma sempre vicino al valore stimato analiticamente:

$$m_1 = m_s = 0.54 \text{ kg}$$

A questo punto l'ultimo valore da determinare e' quello della massa di fluido che non partecipa allo *sloshing*, ma che rappresenta la parte 'ferma' del liquido nel serbatoio. La massa  $m_0$  la si determina semplicemente come differenza tra i due valori di  $m_1$  precedentemente calcolati e la massa totale di fluido nel caso analitico e numerico; nel caso di sollecitazione traslazionale si ottiene:

$$m_{0,analitico} = m_f - m_{s,analitico} = 1.918 \text{ kg}$$

$$m_{0,numerico} = m_f - m_{s,numerico} = 1.763 \text{ kg}$$

mentre, con sollecitazione rotazionale si ricava:

$$m_{0,numerico} = m_f - m_{s,numerico} = 2.008 \text{ kg}$$

Chiaramente il valore della massa  $m_0$  calcolata analiticamente e' lo stesso nei due casi poiche' la massa  $m_1$  calcolata analiticamente e' pure la stessa.

Dalla letteratura e' possibile ricavare una seconda espressione per ricavare la massa di *sloshing* nota la frequenza  $\omega_n$  del sistema ed  $\omega_f$  del disturbo e nota la forza di *sloshing*  $F_s$  data da:

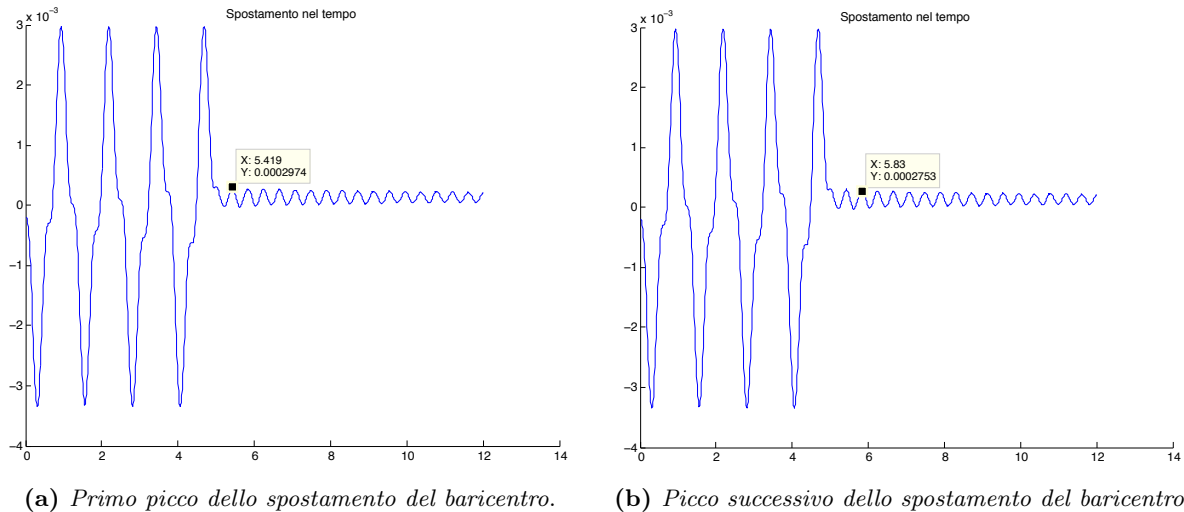
$$m_s = \frac{F_s}{\omega_f^2 d} \left( \frac{1}{\omega_f^2} - \frac{1}{\omega_n^2} \right)$$

Da un punto di vista sperimentale e' piu' conveniente sfruttare la seconda relazione poiche' e' piu' semplice determinare sperimentalmente la forza  $F_s$ , ma, dal punto di vista numerico e delle simulazioni CFD, risulta piu' accurata la relazione che sfrutta la conoscenza dello spostamento massimo del baricentro  $x_{t0}$ . Infatti, mentre l'evoluzione temporale dello spostamento del baricentro lungo l'asse di applicazione della forza e' un dato in output dal programma di simulazione ed e' ricavato direttamente dalle equazioni del moto, il valore della forza e' il risultato del calcolo dell'integrale delle pressioni sulle pareti del serbatoio, operazione che introduce un'ulteriore approssimazione che nel caso dello spostamento  $x_{t0}$  non e' presente. E' consigliabile, dunque, sfruttare la relazione per  $m_s$  che considera lo spostamento massimo del baricentro  $x_{t0}$  come si legge in [2].

### 5.3 Coefficiente di smorzamento

E' possibile determinare il coefficiente di smorzamento tramite il metodo del decremento logaritmico. Per farlo occorre effettuare una simulazione in cui venga applicato un disturbo sinusoidale che verifichi le

condizioni di linearita' per il sistema e che dopo un certo intervallo di tempo si annulli, permettendo di valutare la risposta forzata del sistema. Per questo scopo (e anche per la determinazione della forza e del momento di *sloshing*) e' stata applicata un'accelerazione laterale sinusoidale creata in MATLAB con ampiezza massima pari a  $2 \text{ m s}^{-2}$  e della durata di 5 s e rotazionale di ampiezza massima pari a  $6 \text{ rad s}^{-2}$  e della stessa durata. Il tempo di analisi della simulazione, invece, e' di 12 s. Quello che interessa valutare per determinare lo smorzamento e' lo spostamento del baricentro nella direzione  $x$  di applicazione della forza. Il risultato della simulazione nel caso di un serbatoio riempito al 50% e' riportato in figura 26.



**Figura 26:** Risposta del sistema in termini di spostamento del baricentro in direzione  $x$  dopo l'applicazione di una forzante traslazionale sinusoidale della durata di 5 s e con ampiezza massima di  $2 \text{ m s}^{-2}$  lungo l'asse  $x$ .

Per sfruttare il metodo del decremento logaritmico serve conoscere lo spostamento del baricentro in due picchi successivi della risposta forzata del sistema nella sua fase a regime e, come evidenziato in figura 26, sfruttando questi due valori si puo' calcolare il rapporto di smorzamento  $\gamma$ .

La formula da sfruttare e' la seguente:

$$\gamma = \frac{1}{2\pi n} \ln \left( \frac{x_{CM,1}}{x_{CM,n+1}} \right)$$

ed il risultato che si ottiene e' il seguente:

$$\gamma = \frac{1}{2\pi} \ln \left( \frac{2.974 \times 10^{-4} \text{ m}}{2.753 \times 10^{-4} \text{ m}} \right) = 0.0123$$

Un modo alternativo per calcolare il rapporto di smorzamento note le caratteristiche del moto del fluido considerato e' dato dalla seguente espressione ricavata dalla letteratura (si veda [5]):

$$\gamma = 0.79\sqrt{Re} \left[ 1 + \frac{0.318}{\sinh(1.84h/R)} \left( 1 + \frac{1-h/R}{\cosh(1.84h/R)} \right) \right]$$

in cui il parametro  $Re$  e' il numero di Reynolds caratteristico del moto e calcolato come:

$$Re = \frac{\nu}{\sqrt{gR^3}}$$

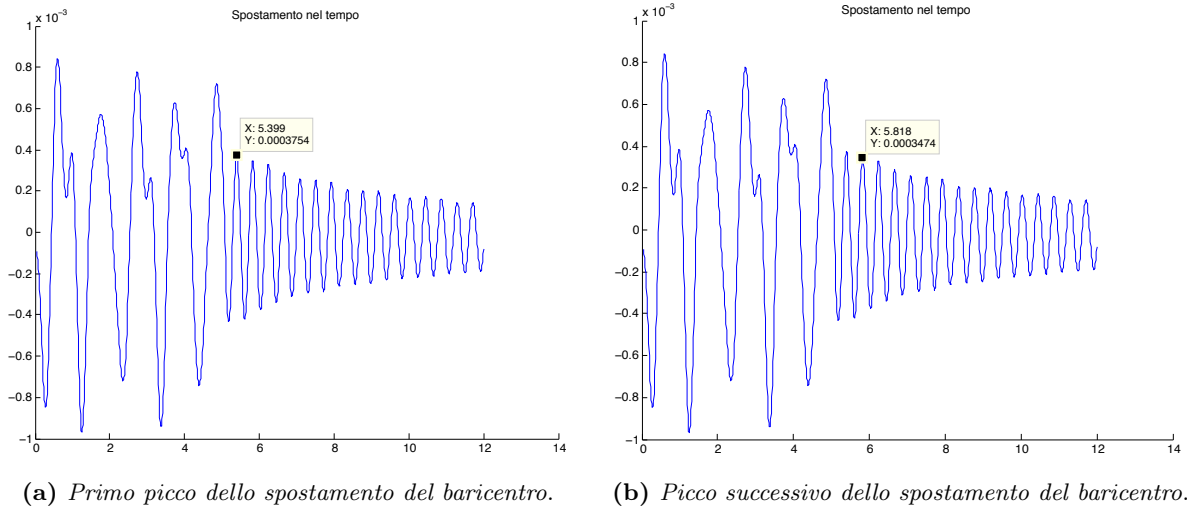
Il parametro  $\nu$  e' la viscosita' cinematica del liquido, pari al rapporto tra la viscosita' dinamica  $\mu$  e la

densità  $\rho$ . Con questa relazione il rapporto di smorzamento risulta:

$$\gamma = 0.0031$$

valore che è circa un quarto di quello calcolato tramite il metodo del decremento logaritmico, ma sufficientemente ridotto in valore assoluto da poterlo trascurare nella stima degli altri parametri del modello meccanico equivalente come accennato in precedenza.

La differenza così elevata tra i due valori potrebbe essere causata dal fatto che la *mesh* nel programma di simulazione non è stata sufficientemente infittita nelle zone dello strato limite vicino alla parete dove gli effetti viscosi e dissipativi sono più accentuati. Per poter ottenere una stima più veritiera del rapporto di smorzamento si dovrebbe effettuare un set di simulazioni ad hoc con una *mesh* opportuna e più accurata. Inoltre, lo smorzamento del sistema è uno dei parametri più critici da stimare tramite simulazioni numeriche tanto che nella maggior parte della letteratura si ricorre ad una serie estensiva di studi sperimentali per la stima del rapporto di smorzamento  $\gamma$  in modo più attendibile (si vedano [3] e [6]).



**Figura 27:** Risposta del sistema in termini di spostamento del baricentro in direzione  $x$  dopo l'applicazione di una accelerazione rotazionale sinusoidale della durata di 5 s e con ampiezza massima di  $6 \text{ rad s}^{-2}$  attorno all'asse  $y$ .

Nel caso rotazionale il risultato della stima del coefficiente di smorzamento è il seguente:

$$\gamma = \frac{1}{2\pi n} \ln \left( \frac{x_{CM,1}}{x_{CM,n+1}} \right) = 0.0126$$

avendo considerato come dati dello spostamento del baricentro  $x_{CM,1}$  ed  $x_{CM,2}$  quelli riportati in figura 27a e 27b.

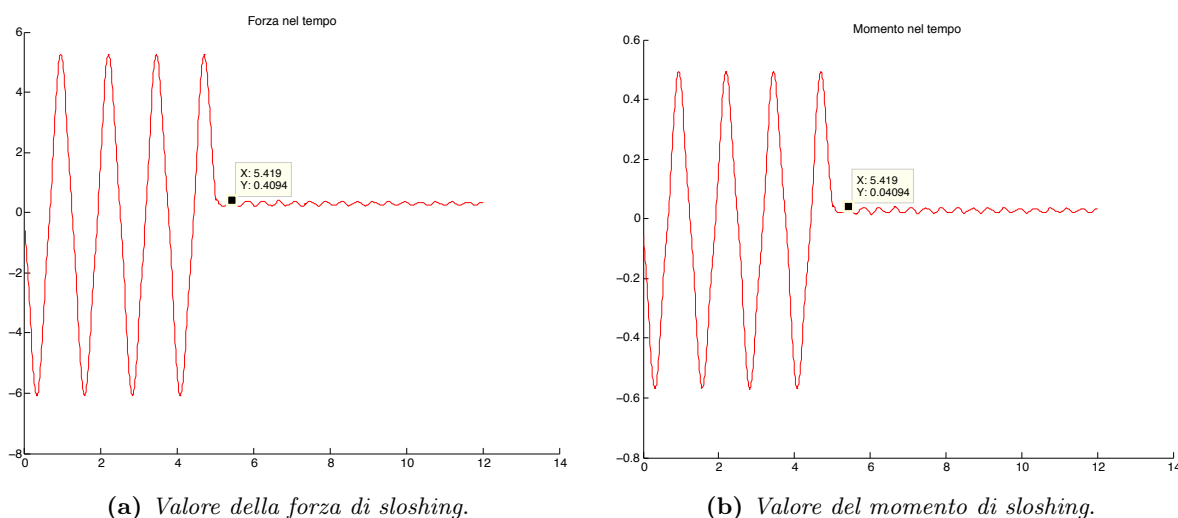
#### 5.4 Forza e momento di *sloshing*

Determinare la forza ed il momento di *sloshing* è un passo fondamentale per l'analisi del fenomeno in questione poiché sono proprio questi due fattori ad influenzare la stabilità del satellite in cui sia presente un serbatoio non completamente pieno di liquido.

Per ricavare la forza di *sloshing* in un serbatoio cilindrico verticale con livello di riempimento del 50% è necessario effettuare una simulazione numerica applicando al sistema un'accelerazione nota (traslazionale

o rotazionale lungo l'asse  $y$  a seconda dei casi) e che dopo un certo intervallo di tempo si annulli lasciando la possibilita' di valutare la risposta libera del sistema, ovvero senza alcuna sollecitazione in ingresso al sistema stesso. La forzante in questione e' una forzante sinusoidale ricavata tramite il programma MATLAB con ampiezza massima data da  $\omega_f^2 d = 2 \text{ m s}^{-2}$  e della durata di 5 s nel caso traslazionale e con ampiezza massima di  $\omega_f^2 \alpha_0 = 6 \text{ rad s}^{-2}$  e della stessa durata nel caso rotazionale.

Dopo aver imposto il disturbo cosi' generato al sistema si ottengono i risultati della simulazione che devono essere analizzati come segue. I dati devono essere elaborati all'interno del programma MATLAB in modo tale da poterli rappresentare in un grafico e valutare il valore degli stessi in corrispondenza del primo picco dopo la fine dell'applicazione dell'accelerazione trasversale o rotazionale create in precedenza. Nei due casi analizzati i risultati sono riportati in figura 28 e 29. La forza di *sloshing* viene letta nelle figure 28a e 29a.



**Figura 28:** Risposta del sistema in termini di forza e momento di *sloshing* dopo l'applicazione di una forzante sinusoidale lungo l'asse  $x$  della durata di 5 s e con ampiezza massima di  $2 \text{ m s}^{-2}$ .

Il momento di *sloshing*, invece, corrisponde al momento della forza di *sloshing* ottenuta in precedenza e calcolato rispetto all'origine della geometria discretizzata in Flow3D; di conseguenza il momento di *sloshing* risultante sara' composto da un contributo lungo l'asse  $z$  e da un altro lungo l'asse  $y$  ottenuti calcolando le seguenti quantita':

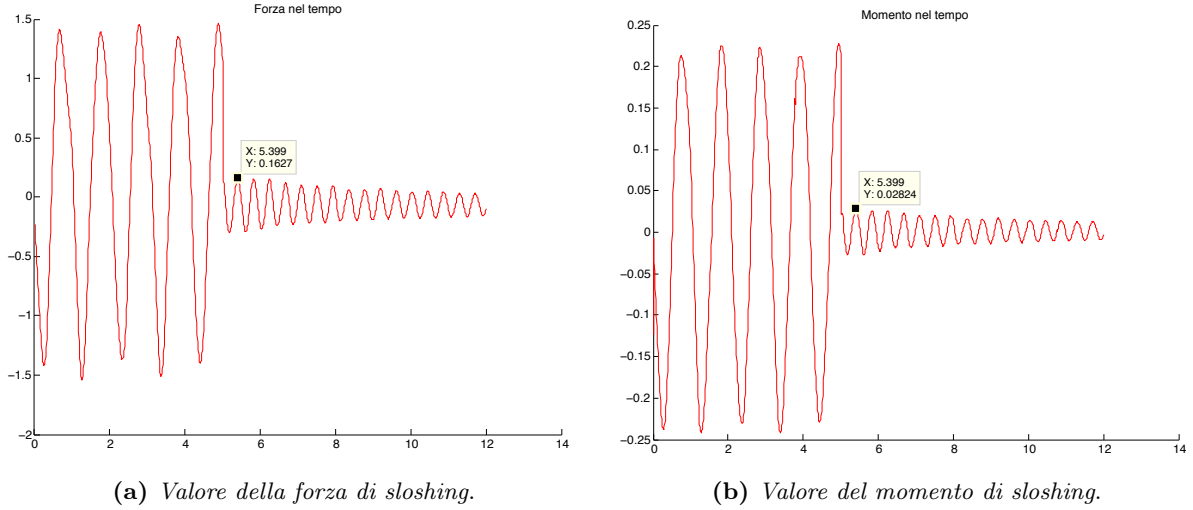
$$M_{sy,0} = -b_y F_{s,x} \quad , \quad M_{sz,0} = b_x F_{s,x}$$

Tuttavia, il modello studiato ipotizza che il comportamento del sistema sia indipendente su ognuno dei 3 assi del s.d.r., per cui e' possibile supporre che il momento lungo l'asse  $y$  non influenzi il moto del sistema lungo l'asse  $z$  e viceversa. Inoltre, essendo che la presenza di un eventuale momento lungo l'asse di simmetria  $z$  potrebbe causare la presenza di un tipo di *sloshing* rotazionale e non laterale come quello che e' stato considerato finora, il momento  $M_{s,z}$  non viene considerato ne' confrontato con il risultato di alcun modello. D'ora in poi si parlera' di momento di *sloshing* e si supporra' che sia presente solo il contributo  $M_{s,y}$  ed il confronto tra i risultati numerici e del modello sara' fatto solo su questa componente.

Nel caso in cui il serbatoio sia sollecitato lateralmente da un'accelerazione trasversale lungo l'asse  $x$  la forza ed i momento di *sloshing* risultanti sono rispettivamente:

$$F_s = 0.4094 \text{ N} \quad , \quad M_{y,0} = 0.0409 \text{ Nm}$$

Considerando, invece, un disturbo rotazionale lungo l'asse  $y$ , il risultato dei due parametri e' il



**Figura 29:** Risposta del sistema in termini di forza e momento di *sloshing* dopo l'applicazione di un'accelerazione angolare sinusoidale attorno all'asse  $y$  della durata di 5 s e con ampiezza massima di  $6 \text{ m s}^{-2}$ .

seguinte:

$$F_s = 0.1627 \text{ N} \quad , \quad M_{y,0} = 0.0283 \text{ Nm}$$

Come verra' spiegato in seguito durante la validazione del modello, per poter confrontare i risultati numerici con quelli relativi al modello equivalente sara' necessario calcolare il momento di *sloshing* nel caso analitico rispetto all'origine della geometria del serbatoio come avviene per i momenti in uscita dalle simulazioni numeriche. Per farlo si dovra' calcolare il prodotto del braccio per la forza di *sloshing* in uscita dal modello analitico.

I valori della forza e del momento di *sloshing*, come gia' accennato in precedenza, servono per avere una stima del controllo d'assetto da applicare al satellite durante la missione. In piu', grazie ai valori di questi due parametri e' possibile andare ad effettuare la validazione del modello, ovvero il confronto tra i risultati predetti dal modello meccanico equivalente appena calibrato e quelli che derivano dall'analisi CFD.

## 5.5 Altri parametri utili

Gli altri parametri necessari alla calibrazione del modello sono le altezze della massa inerziale  $m_0$  e della massa di *sloshing*  $m_s$  rispetto al baricentro del serbatoio.

E' opportuno premettere che la posizione del baricentro del serbatoio a cui facciamo riferimento e' quella calcolata quando il liquido si trova in quiete. E' un'approssimazione ben verificata poiche' l'entita' dello spostamento del baricentro e' trascurabile. In primo luogo si deve determinare l'altezza della massa sloshante del primo modo di vibrare  $m_s = m_1$ .

In letteratura si e' riscontrata la presenza di varie relazioni che permettono di stimare il rapporto  $h_n/h$  in funzione del livello di riempimento del serbatoio  $h$ , del raggio  $R$  e del parametro  $\xi_{mn}$ , ma non tutte forniscono risultati attendibili da un punto di vista fisico per il primo modo di vibrare (si vedano [1], [5] e [4]). La sola relazione che ha fornito dati concettualmente corretti per il rapporto  $h_1/h$  e' la seguente (ricavata da [7]):

$$\frac{h_1}{h} = 1.08 \frac{R}{h} \tanh \left( 0.920 \frac{h}{R} \right) \implies h_1 = 0.55h = 0.077 \text{ m}$$

Tale relazione e' valida solo per il primo modo di *sloshing* adatto al tipo di deformata della superficie libera che si ottiene dalla simulazione CFD per valutare la risposta forzata del sistema con accelerazione sinusoidale applicata per 5 s e poi annullata. Quindi, anche in questo caso, i dati analitici per  $h_1$  sono gli stessi sia per il caso rotazionale che traslazionale.

Per determinare l'altezza della massa di liquido che non partecipa al fenomeno dello *sloshing*, invece, si utilizza la seguente relazione valida in generale:

$$h_0 = \frac{m_f}{m_0} \left[ \frac{h}{2} - \frac{R^2}{2h} \right] - h_1 \frac{m_1}{m_0} = 0.040 \text{ m}$$

E', inoltre, possibile calcolare l'altezza  $h_0$  alla luce dei risultati numerici per le masse di *sloshing*  $m_1$  nel caso traslazionale e rotazionale; i risultati sono i seguenti:

$$h_{0,tras} = 0.037 \text{ kg}$$

$$h_{0,rot} = 0.042 \text{ kg}$$

Si osservi che tutti i risultati ottenuti sono fisicamente corretti in quanto, rispetto al baricentro del sistema in quiete, risulta che la massa di *sloshing* sta sopra la massa  $m_0$  che non partecipa al movimento della superficie libera del liquido, il che si avvicina molto a cio' che accade realmente quando si fa esperienza del movimento del fluido in un serbatoio. E' proprio la parte piu' vicina al pelo libero del liquido che si increspa e si deforma a seguito dell'applicazione di una forzante esterna. In tutto lo studio del fenomeno, infatti, si e' utilizzato come criterio di valutazione dei risultati dei parametri  $h_n$  ed  $h_0$  la verifica della seguente disequaglianza:

$$h_n > h_0$$

Se questa e' verificata allora il risultato e' da considerarsi fisicamente corretto.

Con questi ultimi due parametri si e' calibrato l'intero modello meccanico equivalente del tipo massa-molla-smorzatore. A questo punto e' possibile inserire i vari parametri nella funzione di trasferimento del sistema per validare il tutto.

## 6 Validazione del modello

La validazione del modello consiste nel confrontare i risultati ottenuti tramite CFD e quelli derivanti dall'applicazione del modello meccanico equivalente al sistema per la determinazione della forza e del momento di *sloshing* in diversi casi. Per ricavare i risultati derivanti dal modello meccanico equivalente si procede all'applicazione di un disturbo al serbatoio simile a quello usato per la calibrazione del modello e modificato dalla funzione di trasferimento del sistema stesso e alla valutazione delle differenze rispetto ai risultati del metodo numerico. A livello teorico la validazione puo' essere applicata nel caso generale di un disturbo in ingresso al sistema che sia composto di una parte traslazionale e di una rotazionale di *pitching*; per analizzare il modello che si crea in questo modo occorre sommare le due funzioni di trasferimento nel caso trasversale e rotazionale e verificare come il fenomeno viene descritto. Dunque, occorre calcolare le funzioni di trasferimento che servono per validare il modello. Tuttavia, per motivi legati alle tempistiche di consegna e di scrittura del presente documento, questa verifica viene fatta nel caso in cui al sistema venga applicato un disturbo sinusoidale solo traslazionale lungo l'asse  $x$  del sistema di riferimento centrato nel baricentro del serbatoio.

La funzione di trasferimento completa della risposta del sistema in termini di forza di *sloshing* e' data

dalla seguente espressione:

$$F_s(s) = \left[ \frac{m_0 s^2 + \frac{2m_f \gamma s}{\omega_n} + m_f}{\frac{s^2}{\omega_n^2} + \frac{2\gamma s}{\omega_n} + 1} \right] \{a_t(s)\} + \left[ \frac{m_s h_n s^2}{\frac{s^2}{\omega_n^2} + \frac{2\gamma s}{\omega_n} + 1} \right] \{a_r(s)\}$$

in cui  $a_t(s)$  ed  $a_r(s)$  sono le trasformate di Lapalce delle accelerazioni traslazionali e rotazionali in ingresso al sistema.

La funzione di trasferimento completa della risposta del sistema in termini di momento di *sloshing*, invece, e' data dalla relazione:

$$M_{s,CM}(s) = \left[ \frac{\left( \frac{m_s h_n^2}{\omega_n^2} \right) s^2}{\frac{s^2}{\omega_n^2} + \frac{2\gamma s}{\omega_n} + 1} \right] \{a_t(s)\} + \left[ \frac{\left( \frac{m_s h_n^2}{\omega_n^2} - \frac{A}{\omega_n^2} \right) s^2 - \frac{2\gamma A s}{\omega_n^2} - A}{\frac{s^2}{\omega_n^2} + \frac{2\gamma s}{\omega_n} + 1} \right] \{a_r(s)\}$$

in cui il coefficiente  $A$  e' pari alla seguente quantita':

$$A = I_0 + m_0 h_0^2 + m_n h_n^2$$

con  $I_0$  che corrisponde al momento d'inerzia del liquido solidificato rispetto al suo centro di massa:

$$I_0 = \frac{1}{12} m_f (3R^2 + h^2)$$

A seconda che si decida di analizzare un caso di puro ingresso traslazionale o rotazionale o una combinazione dei due, le funzioni di trasferimento da usare sono quelle appena riportate.

A questo punto si tratta di calcolare i coefficienti delle espressioni scritte in funzione della calibrazione del modello effettuata precedentemente. Nelle sezioni precedenti si e' calibrato il modello con un ingresso traslazionale e di *pitching* e nella tabella 3 sono raccolti i valori dei parametri concentrati del modello nel caso di ingresso traslazionale e rotazionale.

**Tabella 3:** Calibrazione del modello a parametri concentrati nel caso di sollecitazione traslazionale e di *pitching*.

Parametri	Input traslazione	Input rotazione
$\omega_n$	15.369 rad s <sup>-1</sup>	14.784 rad s <sup>-1</sup>
$m_s$	0.785 kg	0.54 kg
$m_0$	1.763 kg	2.008 kg
$m_f$	2.548 kg	2.548 kg
$\gamma$	0.0123	0.0126
$\omega_f$	4.5 rad s <sup>-2</sup>	5.5 rad s <sup>-2</sup>
$d$	0.05 m	0.15 rad
$h_n$	0.077 m	0.077 m
$h_0$	0.037 m	0.042 m

In questo modo sono noti tutti i coefficienti della funzione di trasferimento ed e' possibile validare il modello studiato finora. A questo punto, essendo che la validazione viene effettuata considerando solo un ingresso puramente traslazionale lungo l'asse  $x$ , allora anche nelle due funzioni di trasferimento per  $F_s(s)$  ed  $M_{s,CM}(s)$  si considera solo la parte che modifica il disturbo traslazionale in ingresso al sistema.

Per questo scopo consideriamo, quindi, un disturbo traslazionale come il seguente:

$$a(t) = a_t(t) = -4.5^2(0.05) \sin(4.5t)$$



In primo luogo andiamo a considerare la trasformata di Laplace del disturbo in questione. Essendo una semplice funzione sinusoidale e' possibile calcolare la sua trasformata di Laplace analiticamente e verificare il tutto anche tramite il calcolo in MATLAB:

$$L[a(t)] = a_t(s) = -\frac{729}{160(s^2 + 81/4)}$$

Sostituendo i coefficienti ottenuti con la calibrazione nelle espressioni delle funzioni di trasferimento per la forza ed il momento di *sloshing* otteniamo le seguenti relazioni:

$$F_s(s) = \left[ \frac{3.323 \times 10^{-3}s^2 + 4.079 \times 10^{-3}s + 2.548}{4.234 \times 10^{-3}s^2 + 1.601 \times 10^{-3}s + 1} \right] a_t(s)$$

$$M_{s,CM}(s) = \left[ \frac{1.971 \times 10^{-5}s^2}{4.234 \times 10^{-3}s^2 + 1.601 \times 10^{-3}s + 1} \right] a_t(s)$$

Andando ad inserire questi dati nel programma MATLAB creato per l'analisi degli ingressi al sistema in funzione della variabile  $s$  del dominio di Laplace, possiamo ottenere l'evoluzione al variare di  $s$  del disturbo. Questi risultati devono essere confrontati con quelli in output da Flow3D e, per questo, devono essere antitrasformati e riportati nel dominio del tempo (operazione effettuata sempre all'interno di MATLAB):

$$F_s(t) = L^{-1}[F_s(s)] \quad , \quad M_{s,CM}(t) = L^{-1}[M_{s,CM}(s)]$$

Per il confronto del momento di *sloshing* calcolato rispetto all'origine della geometria del sistema occorre manipolare i dati in uscita da Flow3D in modo tale da riuscire a moltiplicare la forza di *sloshing* ottenuta tramite l'applicazione della funzione di trasferimento del modello per in braccio lungo  $z$  della stessa, ovvero per l'altezza  $z_{CM}$  del baricentro del liquido in quiete (o solidificato):

$$\vec{M}_{s,0} = \vec{M}_{y,0} = \vec{z}_{CM} \times \vec{F}_s$$

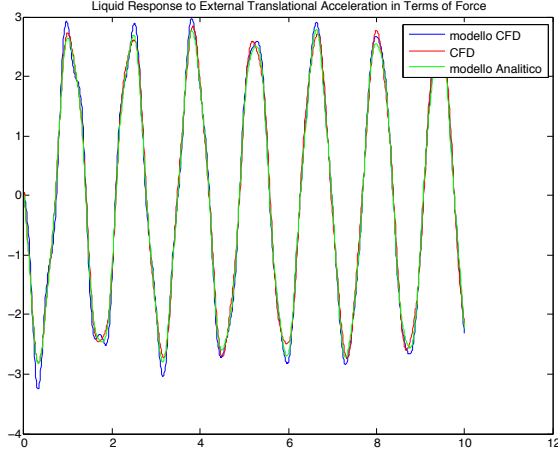
Per il confronto delle forze e dei momenti ricavati dalle simulazioni e dall'applicazione della funzione di trasferimento del sistema e' utile rappresentarli nello stesso grafico in funzione del tempo  $t$  (vedi figure 30a e 30b). Nelle figure 30a e 30b oltre ad essere riportato l'andamento della forza e del momento di *sloshing* ricavato con il modello calibrato con i dati ottenuti numericamente dalle simulazione CFD, sono riportate anche le stesse grandezze nel tempo, ma ricavate tramite il modello calibrato con i parametri calcolati analiticamente (grafici in verde). Questo per poter mostrare qualitativamente la concordanza tra i due metodi di calibrazione e ottenere un'effettiva validazione del modello meccanico equivalente e del processo di estrapolazione dei dati dalle simulazioni fluidodinamiche eseguite.

La validazione del modello nel caso rotazionale di *pitching* non e' stata effettuata a causa dei termini temporali da rispettare per la consegna del documento ed e' necessario proseguire il lavoro per completare lo studio del fenomeno in questione.

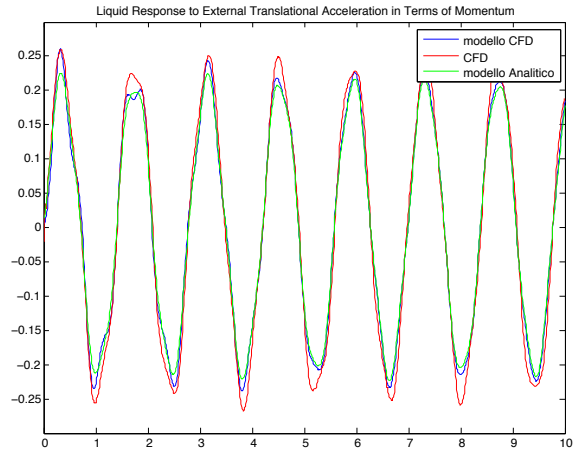
## 7 Confronto dei risultati

Dalle analisi che sono state effettuate nel corso della calibrazione e validazione del modello meccanico equivalente massa-molla-smorzatore per lo *sloshing laterale* di un serbatoio cilindrico verticale sono emersi diversi risultati che e' utile evidenziare.

In primo luogo bisogna sottolineare la ottima coincidenza tra risultati analitici e numerici da CFD nel caso di ingresso sinusoidale traslazionale al sistema come e' possibile vedere dalle figure 30a e 30b. E' opportuno mettere in evidenza il fatto che a livello numerico l'errore che si commette andando a considerare la forza di *sloshing* e' minore rispetto a quello che affligge il momento di *sloshing*. Infatti la prima e' un output diretto del programma che viene confrontata con la corrispondente grandezza  $F_s(t)$



(a) Validazione della forza di sloshing.



(b) Validazione del momento di sloshing calcolato rispetto all'origine della geometria del sistema.

**Figura 30:** Validazione del modello meccanico equivalente in caso di ingresso puramente traslazionale lungo l'asse  $x$ .

data dal modello meccanico equivalente, mentre il momento  $M_{s,0}$  e' dato dal prodotto della forza di sloshing per l'altezza del baricentro  $z_{CM}$ . Quest'ultima grandezza e' approssimata in quanto e' stata ricavata come la media dell'altezza del centro di massa del liquido nel tempo in MATLAB. In questo modo, l'errore che si commette considerando il momento di sloshing e' dato dai due contributi contenuti nella forza  $F_s$  e nella coordinata  $z_{CM}$  del baricentro e, per questo, maggiore rispetto al caso della forza di sloshing.

Come secondo risultato deve essere evidenziato il fatto che le espressioni analitiche che abbiamo utilizzato per ricavare i parametri del modello sono in perfetto accordo con i risultati numerici da CFD. Nella tabella 4 sono raccolti gli errori in percentuale tra i risultati analitici e in uscita da CFD.

**Tabella 4:** Errori percentuali tra parametri stimati analiticamente e numericamente tramite CFD. Si ricordi che i parametri analitici stimati nel caso traslazionale e rotazionale sono gli stessi poiche' il modo di vibrare e' lo stesso. Quindi il confronto viene fatto tra gli errori dei parametri ricavati analiticamente e numericamente nel caso di sollecitazione traslazionale e rotazionale rispettivamente.

Parametri	Errore traslazione	Errore rotazione
$\omega_n$	0.05%	3.86%
$m_s$	24.5%	14.35%
$m_0$	8.09%	4.69%
$\gamma$	296.77%	306.45%

Si e' riscontrata una notevole difficolta' nel ricavare dei valori fisicamente attendibili per l'altezza della massa di sloshing del primo modo di vibrare attraverso la relazione presentata in [1]:

$$h_n = \frac{h}{2} - \frac{2R \tanh(\xi_{1n} h / 2R)}{\xi_{1n}}$$

I valori ottenuti in questo caso, se sostituiti nell'espressione valida in generale per  $h_0$  (ricavata sempre da [1]):

$$h_0 = \frac{m_f}{m_0} \left[ \frac{h}{2} - \frac{R^2}{2h} \right] - h_1 \frac{m_1}{m_0}$$

fornivano dei risultati per cui si aveva che:

$$h_0 > h_n$$

il che e' fisicamente errato per quanto detto anche nelle sezioni precedenti. Infatti, essendo che lo *sloshing* del liquido e' influenzato dal movimento della massa di liquido piu' alta, e' logico aspettarsi che la massa di *sloshing* che rappresenta quella del liquido in movimento sia ad un'altezza superiore rispetto al baricentro di quella inerziale  $m_0$  che non partecipa al movimento. Per questo motivo si sono cercate in letteratura altre espressioni per l'altezza della massa di *sloshing* dal baricentro del liquido in quiete in modo da completare la calibrazione del modello. Quella utilizzata, come descritto in precedenza, e' quella riportata in [7]:

$$\frac{h_1}{h} = 1.08 \frac{R}{h} \tanh \left( 0.920 \frac{h}{R} \right)$$

Un altro risultato che era prevedibile gia' da una valutazione qualitativa delle simulazioni che sono state effettuate, e' la discrepanza elevata tra il valore del coefficiente di smorzamento  $\gamma$  analitico e numerico. Come si vede in tabella 4 l'errore e' pari a circa il 300%; un errore cosi' elevato lo si spiega considerando la *mesh* della simulazione. Quella utilizzata non e' sufficientemente fitta nelle vicinanze delle pareti, ovvero nella zona in cui gli effetti viscosi sono piu' importanti, e, per questo, la stima del coefficiente  $\gamma$  risulta cosi' lontana dal valore analitico. Per la stima accurata del rapporto di smorzamento occorre effettuare una simulazione ad hoc in cui si valutino in maniera piu' precisa gli sforzi viscosi a parete. Occorre precisare, inoltre, che la relazione utilizzata per la stima di  $\gamma$  e' ricavata da [5] ed e' una relazione semi-empirica:

$$\gamma = 0.79\sqrt{Re} \left[ 1 + \frac{0.318}{\sinh(1.84h/R)} \left( 1 + \frac{1-h/R}{\cosh(1.84h/R)} \right) \right]$$

quindi, pur sempre un'approssimazione.

## 7.1 Altri risultati utili

Durante l'analisi del fenomeno dello *sloshing* laterale, inoltre, e' stato possibile capire in che modo il programma Flow3D nella versione utilizzata esprime le componenti della forza e del momento di *sloshing*. Infatti, e' utile sapere che la forza e' calcolata automaticamente considerando il contributo della massa di *sloshing* e con l'aggiunta della massa inerziale  $m_0$ , senza dover considerare a posteriori alcun contributo per l'analisi dei dati ed il confronto con il modello.

Per quanto riguarda il momento di *sloshing*, questo viene calcolato rispetto all'origine della geometria di Flow3D e lo si vede perche' la componente lungo  $y$  del momento calcolato tramite CFD e' numericamente simile al momento calcolato come prodotto della forza  $F_s(t)$  per il braccio  $z_{CM}$  lungo  $x$ , ovvero per l'altezza del baricentro rispetto all'origine della geometria importata nel programma della simulazione (vedi figura 30b).

## 7.2 Sviluppi futuri

Le analisi eseguite per affrontare la validazione del fenomeno descritto in questo documento hanno lasciato aperte diverse questioni che potrebbero essere approfondite in futuro.

In primis la validazione del modello nel caso di ingresso rotazionale al sistema, argomento che non e' stato affrontato per mancanza di tempo, ma che andrebbe a completare l'analisi gia' effettuata. Come seconda questione si inserisce il problema della stima del coefficiente di smorzamento del sistema attraverso simulazioni numeriche appositamente strutturate, in modo da improntare l'analisi numerica sulla stima degli effetti viscosi del liquido vicino alle pareti del serbatoio. Per confermare a livello pratico la validita' del metodo di validazione tramite CFD seguito nel documento, sarebbe interessante verificare se lo stesso tipo di metodologia utilizzata per lo studio dello *sloshing laterale* di un serbatoio cilindrico verticale dia

risultati con errori ugualmente contenuti anche in casi di livelli di riempimento diversi dal 50% come analizzato nel presente documento.

Non meno importante potrebbe essere la verifica sperimentale dei parametri ottenuti, facendo riferimento alle valutazioni riportate in [2]; infatti, le dimensioni adottate per il serbatoio analizzato sono le stesse di quelle usate negli esperimenti contenuti nel documento appena citato, in modo da lasciare aperta la possibilità di un confronto sperimentale che si basasse su dati già presenti in letteratura.

Un possibile sviluppo dello studio effettuato potrebbe essere l'inserimento di un *bladder* all'interno del serbatoio per smorzare il movimento del liquido con maggiore efficacia e ridurre, in questo modo, le risultanti idrodinamiche che compromettono l'assetto del satellite. Oltre allo studio dello smorzamento con *bladder* è possibile esaminare altri modi di contenere il fenomeno dello *sloshing*, come la suddivisione del serbatoio circolare in settori con setti radiali o cilindrici coassiali con il serbatoio, piuttosto che inserendovi delle pareti orizzontali per ridurre l'altezza di ogni scompartimento cilindrico che si viene così a formare. La valutazione di quale tra questi metodi abbia maggior efficienza in termini di smorzamento rispetto al costo, alla difficoltà di realizzazione o alla massa inerte può essere un'analisi utile per futuri progetti in campo spaziale.

La grande varietà dei settori in cui può verificarsi il fenomeno dello *sloshing* lo rende un argomento di ricerca privilegiato e lo studio di metodi di indagine per prevederne e limitarne gli effetti è sempre di estrema attualità.

## Riferimenti bibliografici

- [1] Raouf A. Ibrahim, *Liquid Sloshing Dynamics*, Cambridge University Press, 2005. pages
- [2] H. Q. Yang, John Peupeot, *Propellant Sloshing Parameter Extraction from CFD Analysis*, Nashville TN, 2010. pages
- [3] H. Norman Abramson, *The Dynamic Behavior of Liquid in Moving Containers*, NASA, Scientific and Technical Information Division, Washington D.C., 1966. pages
- [4] James R. Roberts, Eduardo R. Basurto, Pei-Ying Chen, *Sloshind Design Handbook I*, NASA, George C. Marshall Space Flight Center, Huntsville, Alabama, 1964. pages
- [5] Franklin T. Dodge, *The New Dynamic Behavior of Liquids in Moving Container*, Southwest Research Institute, San Antonio, Texas, 2000. pages
- [6] T. Arndt, M. Dreyer, *Damping Behavior of Sloshing Liquid in Laterally Excited Cylindrical Propellant Vessels*, Center of Applied Space Technology and Microgravity (ZARM), University of Bremen, Bremen Germany, 2007. pages
- [7] A. L. Braslow, *Propellant Slosh Loads*, NASA, Office of Advance Research and Technology, Washington D. C., 1968. pages
- [8] E. J. Hopfinger, V. Baumbach, *Liquid Sloshing in Cylindrical Fuel Tanks*, EDP Sciences, 2009. pages
- [9] B. Godderidge, M. Tan, C. Earl, S. Turnock, *Grid Resolution for the Simulation of Sloshing Using CFD*, School of Engineering Sciences, University of Southampton, Southampton, UK. pages
- [10] H. F. Bauer, *Fluid Oscillations in the Containers of a Space Vehicle and Their Influence on Stability*, NASA, 1964. pages
- [11] D. D. Kana, *An Experimental Study of Liquid Surface Oscillations in Longitudinally Excited Compartmented Cylindrical and Spherical Tanks*, NASA, 1966. pages
- [12] J. L. McCarty, D. G. Stephens, *Investigation of the Natural Frequencies of Fluids in Spherical and Cylindrical Tanks*, NASA, 1960. pages
- [13] H. N. Abramson, L. R. Garza, *Some Measurement of Liquid Frequencies and Damping in Compartmented Cylindrical Tanks*, AIAA J. Spacecraft and Rockets, 1965. pages
- [14] D. G. Stephens, H. W. Leonard, M. A. Silveira, *Investigation of Damping of Liquids in Right-Circular Cylindrical Tanks*, NASA, 1962 pages
- [15] H. N. Abramson, W. H. Chu, G. E. Ransleben Jr., *Representation of Fuel Sloshing in Cylindrical Tanks by an Equivalent Mechanical Model*, ARS J., 1961. pages
- [16] D. O. Lomen, *Liquid Propellant Sloshing in Mobile Tanks of Arbitrary Shape*, NASA, 1965. pages
- [17] J. F. Unruh, D. D. Kana, F. T. Dodge, T. A. Fey, *Digital Data Analysis Technique for Extraction of Slosh Model Parameters*, AIAA J. Spacecraft and Rockets, 1986. pages