UNIVERSITA' DEGLI STUDI DI PADOVA

DIPARTIMENTO DI SCIENZE ECONOMICHE ED AZIENDALI "M.FANNO"

DIPARTIMENTO DI MATEMATICA "T. LEVI-CIVITA"

CORSO DI LAUREA IN ECONOMIA E MANAGEMENT

PROVA FINALE

"TRASFORMATA DI LAPLACE E APPLICAZIONI A MODELLI DI ADVERTISING DINAMICO"

RELATORE:

CH.MO PROF. LUCA GROSSET

LAUREANDO: ANTONIO BILOTTI

MATRICOLA N. 1135925

ANNO ACCADEMICO 2018 – 2019

Il candidato, sottoponendo il presente lavoro, dichiara, sotto la propria personale responsabilità, che il lavoro è originale e che non è stato già sottoposto, in tutto in parte, dal candidato o da altri soggetti, in altre Università italiane o straniere ai fini del conseguimento di un titolo accademico. Il candidato dichiara altresì che tutti i materiali utilizzati ai fini della predisposizione dell'elaborato sono stati opportunamente citati nel testo e riportati nella sezione finale "Riferimenti bibliografici" e che le eventuali citazioni testuali sono individuabili attraverso l'esplicito richiamo al documento originale.

Contents

Trasformata di Laplace e applicazioni a modelli di advertising dinamico

Antonio Bilotti

Università degli Studi di Padova
Dipartimento di Scienze Economiche ed Aziendali "M.Fanno"
Corso di Laurea in Economia e Management

Abstract

Studio della Trasformata di Laplace e del suo utilizzo nella risoluzione delle equazioni differenziali lineari. In questa tesi vengono illustrate due possibili applicazioni della trasformata di Laplace a modelli di advertising dinamico, come il modello di Nerlove-Arrow e il modello di Vidale-Wolfe. Questi ultimi vengono poi analizzati in chiave marketing, facendo riferimento a metodi di allocazione del budget e ad indicatori sintetici di risultato.

1 Introduzione

In questa tesi verrà studiata la Trasformata di Laplace, con particolare attenzione alle sue applicazioni a modelli di advertising dinamico. Tale operatore fa parte delle trasformate integrali e ci consente di passare da una funzione a variabile reale ad una funzione a variabile complessa [11]. I vantaggi più significativi sono legati al fatto che converte equazioni differenziali lineari in equazioni algebriche, quindi decisamente molto più semplici da risolvere. Il primo capitolo è dedicato allo studio della Trasformata di Laplace, con riguardo alla comprensione dei suoi teoremi e all'analisi dell'antitrasformata e al suo utilizzo nella soluzione di equazioni differenziali lineari [1]. Nel secondo capitolo verranno analizzati i due modelli principali che sono alla base della letteratura sulle applicazioni di controllo ottimo per l'avertising. Il primo modello analizzato, datato 1962, è dovuto a Nerlove e Arrow [10]. Gli autori ritengono che la domanda di un prodotto, e quindi la sua intensità di vendita, dipenda da una variabile di stato, chiamata "goodwill", che rappresenta gli effetti di un investimento nella pubblicità [4]. Il secondo modello invece, datato 1957, è dovuto a Vidale e Wolfe [10]. Essi mirano a modellare la risposta delle vendite alla pubblicità [4]. Alla fine del presente elaborato, verrà poi effettuata un'analisi in chiave marketing dei due modelli sopra citati. In particolare, ci si soffermerà dapprima sull'investimento totale speso dalle diverse imprese in pubblicità, con un focus specifico sui differenti metodi di allocazione del budget. Si analizzerà infine la comunicazione facendo uso di indicatori sintetici di risultato, come il CRI (Customer Response Index) e l'elasticità delle vendite alla pubblicità [13].

2 La Trasformata di Laplace

2.1 Definizione

Attraverso l'utilizzo della trasformata di Laplace siamo in grado di trasformare funzioni a variabile reale in funzioni a variabile complessa. Data una funzione $f : [0, \infty) \to R, t \to f(t)$, se la moltiplichiamo per e^{-st} e la integriamo rispetto a t nell'intervallo $[0, \infty)$, otterremo una nuova funzione nella variabile s. Pensiamo ora la variabile s come se fosse reale. Otteniamo così una nuova funzione, $s \to F(s)$, che possiamo chiamare Trasformata di Laplace della funzione $f(t)$ [1]. Possiamo indicare la trasformata di Laplace di una funzione$f : [0, \infty) \to R, t \to f(t)$ con il simbolo $\mathcal{L}\{f(t)\} : [a, \infty) \to R$, $s \to \mathcal{L}\{f(t)\}(s)$. Essa è una funzione della variabile s, definita dall'integrale [1]:

$$\mathcal{L}\{f(t)\} = \int_0^{+\infty} f(t)e^{-st}dt$$

a condizione che l'integrale abbia senso, cioè che:

$$lim_{r\to+\infty} \int_0^{r} e^{-st} f(t)\, dt$$

esista e sia finito.
Nel caso della funzione a gradino unitario definita da $f(t) = 1$ per $t > 0$ ed $f(t) = 0$ per $t \le 0$, si ha:

$$\mathcal{L}[f(t)] = \int_0^{+\infty} e^{-st} \cdot 1dt = \left[-\frac{1}{s}e^{-st}\right]_0^{+\infty} = \frac{1}{s}$$

Con $f(t) = e^{-kt}$, la trasformata di $f(t)$ sarà uguale a

$$\mathcal{L}\left[e^{-kt}\right] = \int_0^{+\infty} e^{-kt}e^{-st}dt = \int_0^{+\infty} e^{-(s+k)t}dt = \left[-\frac{1}{s+k}e^{-(s+k)t}\right]_0^{+\infty} = \frac{1}{s+k}$$

Ipotizziamo ora di voler risolvere l'equazione differenziale

$$\frac{dy}{dt} - y = e^{at}, t \ge 0$$

per valori non negativi della variabile t, nel rispetto della condizione iniziale

$$y(0) = -1$$

Al posto di risolvere l'equazione differenziale con i metodi "classici", proseguiamo nel seguente modo.
Calcoliamo dapprima la trasformata di entrambi i membri dell'equazione differenziale, moltiplicandoli per e^{-st} ed integrando il prodotto rispetto a t compreso tra 0 e $+\infty$. Otteniamo così l'equazione

$$\int_0^{+\infty} \frac{dy}{dt}(t)e^{-st}dt - \int_0^{+\infty} y(t)e^{-st}dt = \int_0^{+\infty} e^{at}e^{-st}dt$$

Assumiamo che tutti questi integrali esistano per un qualche intervallo della variabile s.
L'integrale a secondo membro si calcola facilmente nel modo:

$$\int_0^{\infty} e^{-st}e^{at}dt = \int_0^{\infty} e^{(a-s)t}dt = \left.\frac{e^{(a-s)t}}{a-s}\right|_0^{+\infty} = \frac{1}{s-a}$$

ed esso esiste se $s > a$ e quindi l'esponenziale sarà decrescente.
Integrando per parti l'integrale al primo membro si ottiene:

$$\int_0^{+\infty} \frac{dy}{dt}(t)e^{-st}dt = y(t)e^{-st}\big|_0^{+\infty} + s\int_0^{+\infty} y(t)e^{-st}dt =$$

$$= -y(0) + s\int_0^{+\infty} y(t)e^{-st}dt = 1 + s\int_0^{+\infty} y(t)e^{-st}dt$$

Si è affermato che $y(t)e^{-st}$ tenda a zero, per qualche valore di s, quando $t \to +\infty$. Ne deriva che la trasformata di $\frac{dy}{dt}$ viene espressa in termini della trasformata di y e del valore della condizione iniziale.
Se si sostituiscono i risultati otteniamo:

$$(s-1)\int_0^{+\infty} y(t)e^{-st}dt = \frac{1}{s-a} - 1$$

ed in forma equivalente:

$$\int_0^{+\infty} y(t)e^{-st}dt = \frac{a+1-s}{(s-1)(s-a)}$$

Come si può notare, il problema originario è stato riportato a quello della determinazione della funzione $y(t)$ la cui trasformata di Laplace equivale alla funzione al secondo membro dell'ultima equazione. Per determinare questa funzione, utilizziamo il metodo della scomposizione di una funzione razionale in frazioni parziali, ottenendo così:

$$\int_0^{+\infty} y(t)e^{-st}dt = \frac{1}{a-1}\frac{1}{s-a} - \frac{a}{a-1}\frac{1}{s-1}$$

Si vede in tal modo che $^1/_{s-a}$ consiste nella trasformata di e^{at}, dal che possiamo desumere che il primo termine della equazione sopra non è altro che la trasformata di $^{e^{at}}/_{(a-1)}$, mentre il secondo termine corrisponderebbe alla trasformata di $^{-ae^t}/_{(a-1)}$. Quindi, l'equazione di cui sopra sarà soddisfatta per

$$y = \frac{1}{a-1}(e^{at} - ae^t)$$

quando $a \neq 1$.

2.2 Proprietà della trasformata

TEOREMA DELLA LINEARITA': La trasformata di una somma di funzioni è uguale alla somma delle trasformate delle singole funzioni [1]

$$\mathcal{L}[af(t) + bg(t)](s) = a\mathcal{L}[f(t)](s) + b\mathcal{L}[g(t)](s)$$

per ogni $a, b \in R$, e per ogni s tale che il secondo membro dell'equazione abbia un senso.
Dimostrazione [1]. Dalla linearità degli integrali segue che:

$$\mathcal{L}[af(t) + bg(t)] = \int_0^{+\infty} e^{-st}[af(t) + bg(t)]dt =$$

$$= a\int_0^{+\infty} e^{-st}f(t)dt + b\int_0^{+\infty} e^{-st}g(t)dt =$$
$$= a\mathcal{L}f(t) + b\mathcal{L}g(t)$$

Per esempio:

$$\mathcal{L}\left[k\right] = \mathcal{L}\left[k \cdot 1\right] = k\mathcal{L}\left[1\right] = k \cdot \frac{1}{s} = \frac{k}{s}$$

TEOREMA DI DERIVAZIONE: Supponiamo che f sia differenziabile per $t \geq 0$. Se $\mathcal{L}\left[f'\left(t\right)\right]$ esiste, allora la trasformata di $f'(t)$ è uguale ad s volte la trasformata di $f(t)$, meno il valore che assume la $f(t)$ nell'istante $t = 0$, ovvero [1]:

$$\mathcal{L}[f'(t)] = s\mathcal{L}[f(t)] - f(0)$$

Per calcolare la trasformata della derivata seconda di una funzione possiamo utilizzare lo stesso metodo:

$$\mathcal{L}[f''(t)](s) = s\mathcal{L}\left[f'\left(t\right)\right] - f'\left(0\right) =$$

$$= s\left\{s\mathcal{L}\left[f\left(t\right)\right] - f\left(0\right)\right\} - f'\left(0\right) =$$

$$= s^2\mathcal{L}[f(t)] - sf(0) - f'(0)$$

Dimostrazione [1]. Dalla definizione:

$$\mathcal{L}[f'(t)] = \int_0^{+\infty} e^{-st} f'(t)\, dt$$

Integrando per parti otteniamo:

$$\int_0^r e^{-st} f'(t)\, dt = e^{-sr} f(r) - f(0) + s\int_0^r e^{-st} f(t)\, dt$$

Di seguito raccogliamo alcune proprietà della trasformata di Laplace. I domini di convergenza possono essere determinati in ciascun caso [1]:

- $(P1)$ $\mathcal{L}\left[e^{\alpha t} f(t)\right] = \mathcal{L}f(t)(s-\alpha)$ (teorema della traslazione)
- $(P2)$ $\mathcal{L}\left[e^{-\beta t} - e^{-\alpha t}\right] = \frac{\alpha-\beta}{(s+\alpha)(s+\beta)}$
- $(P3)$ $\mathcal{L}[\int_0^t f(u)du](s) = \frac{1}{s}\mathcal{L}[f(t)](s)$: la trasformata dell'integrale di una funzione è uguale alla trasformata della funzione stessa divisa per s (teorema dell'integrale)
- $(P4)$ $\mathcal{L}[f^{(n)}(t)](s) = s^n\mathcal{L}[f(t)](s) - s^{n-1}f(0) - s^{n-2}f'(0) - ... - f^{n-1}(0)$
- $(P5)$ $\mathcal{L}\left[t^n f(t)\right] = (-1)^n \frac{d^n}{ds^n}\mathcal{L}\left[f(t)\right]$

Le proprietà (P1-P5) posso essere utilizzate per trovare altre trasformate di Laplace. Per esempio se $f(t) = 1$, $(P5)$ produce

$$\mathcal{L}\left[t^n\right] = (-1)^n \frac{d^n}{ds^n}\mathcal{L}\left[1\right] = (-1)^n \frac{d^n}{ds^n}\left(\frac{1}{s}\right) = \frac{n!}{s^{n+1}}$$

2.3 Antitrasformata di Laplace

2.3.1 Definizione

L'operazione di antitrasformazione ci consente di ricavare, a partire da una funzione a variabile complessa, una funzione a variabile reale, la cui trasformata coinciderà con la funzione iniziale. Perciò, l'antitrasformata non è altro che l'operazione inversa della trasformata e per essa varranno tutte le proprietà ed i teoremi visti precedentemente per la trasformata di Laplace (ovviamente invertiti) [1].
Supponiamo che $F(s)$ sia data. Se esiste un funzione $f(t)$ che ammette l'esistenza di $\mathcal{L}[f(t)](s)$ e $\mathcal{L}[f(t)](s) = F(s)$, possiamo affermare che esiste una funzione "Antitrasformata di Laplace" data da $f(t)$. In questo caso si scrive

$$f(t) = \mathcal{L}^{-1}\left\{F(s)\right\}(t)$$

In altre parole, l'idea di antitrasformata non è niente di nuovo [1]; $\mathcal{L}\left[f(t)\right](s) = F(s)$ se e solo se $f(t) = \mathcal{L}^{-1}\left\{F\right\}(s)$. Per esempio, per $f(t) = t$, $\mathcal{L}\left\{t\right\} = \frac{1}{s^2}$, implica che $t = \mathcal{L}^{-1}\left\{\frac{1}{s^2}\right\}$.

2.3.2 Proprietà dell'antitrasformata

Ricordiamo innanzitutto alcune trasformate fondamentali, tenendo presente che, visto che la trasformata di Laplace considera solo i valori di $f(t)$ per t positivo, tutte le funzioni sotto riportate sono da considerarsi nulle per $t \leq 0$.

$f(t)$	$F(s) = \mathcal{L}\{f\}$
1	$\frac{1}{s}$
t	$\frac{1}{s^2}$
t^n	$\frac{n!}{s^{n+1}}$
e^{at}	$\frac{1}{s-a}$

Leggendo la precedente tabella al contrario, si ottengono le regole per le antitrosfarmate, che sono riportate nella tabella sottostante.

$F(s)$	$\mathcal{L}^{-1}\{F\}$
$\frac{1}{s}$	1
$\frac{1}{s^2}$	t
$\frac{n!}{s^{n+1}}$	t^n
$\frac{1}{s-a}$	e^{at}

Ipotizziamo di voler calcolare ora l'antitrasformata di

$$f(s) = \frac{3s+7}{s^2-2s+2}$$

Si ha:

$$\frac{3s+7}{s^2-2s+2} = \frac{3s+7}{(s-3)(s+1)} = \frac{A}{s-3} + \frac{B}{s+1}$$

da cui, eliminando i denominatori:

$$3s+7 = A(s+1) + B(s-3)$$

Dalla precedente, per $s = -1$ e $s = 3$, otteniamo $A = 4$ e $B = -1$, da cui:

$$\mathcal{L}^{-1}\left[\frac{3s+7}{s^2-2s-3}\right](t) = 4\mathcal{L}^{-1}\left[\frac{1}{s-3}\right](t) - \mathcal{L}^{-1}\left[\frac{1}{s+1}\right](t) = 4e^{3t} - e^{-t}$$

2.4 Risoluzione di un'equazione differenziale linare con la trasformata di Laplace

Data l'equazione differenziale

$$\frac{d^2x}{dt^2} + 5\frac{dx}{dt} + 4x = e^{-2t}$$

con le condizioni iniziali:

$$\left(\frac{dx}{dt}\right)_{t=0} = 0$$

$$(x)_{t=0} = x(0) = 1$$

ricavare la $x(t)$ che soddisfi l'equazione data.
Indichiamo $\mathcal{L}[x(t)] = X(s)$. Trasformando otteniamo:

$$\mathcal{L}[\frac{d^2x}{dt^2}] + 5\mathcal{L}[\frac{dx}{dt}] + 4\mathcal{L}[x] = \mathcal{L}[e^{-2t}]$$

Applicando il teorema di derivazione si ha:

$$s^2X(s) - sx(0) - x'(0) + 5\left[sX(s) - x(0)\right] + 4X(s) = \frac{1}{s+2}$$

da cui, raccogliendo a fattor comune i termini in $X(s)$:

$$X(s)\left[s^2 + 5s + 4\right] = \frac{1}{s+2} + s + 5$$

ed in definitiva:

$$X(s) = \frac{\frac{1}{s+2} + s + 5}{(s^2 + 5s + 4)} = \frac{s^2 + 7s + 11}{(s+2)(s^2 + 5s + 4)}$$

La $x(t)$ si trova antitrasformando la $X(s)$:

$$x(t) = \mathcal{L}^{-1}[\frac{s^2 + 7s + 11}{(s+2)(s^2 + 5s + 4)}]$$

Pertanto la scomposizione porta a scrivere:

$$\frac{s^2 + 7s + 11}{(s+2)(s^2 + 5s + 4)} = \frac{s^2 + 7s + 11}{(s+2)(s+1)(s+4)} = \frac{A}{(s+1)} + \frac{B}{(s+2)} + \frac{C}{(s+4)}$$

da cui si ricava:

$$A = \frac{5}{3}; B = -\frac{1}{2}; C = -\frac{1}{6}$$

$$x(t) = \mathcal{L}^{-1}[\frac{5}{3(s+1)}] - \mathcal{L}^{-1}\left[\frac{1}{2(s+2)}\right] - \mathcal{L}^{-1}\left[\frac{1}{6(s+4)}\right] = \frac{5}{3}e^{-t} - \frac{1}{2}e^{-2t} - \frac{1}{6}e^{-4t}$$

In definitiva, la trasformata di Laplace fornisce la soluzione in maniera diretta attraverso l'imposizione delle condizioni iniziali. Con il metodo classico, invece, occorre trovare prima la soluzione generale e poi imporre le condizioni iniziali.

3 Applicazioni a modelli di advertising dinamico

Come accennato nell'introduzione, in questo capitolo parleremo di come la Trasformata di Laplace possa essere applicata alla realtà mediante modelli di advertisting dinamico.
La pubblicità è una forma di comunicazione comune che viene utilizzata per indurre i consumatori ad intraprendere azioni in relazione a prodotti o servizi [13]. Per guidare il comportamento dei consumatori, un'azienda può avvalersi di diversi metodi, quali, ad esempio: distribuire messaggi pubblicitari attraverso i mezzi di comunicazione più tradizionali (giornali, riviste, televisione), oppure optare per i canali di marketing digitali, quali i media [13]. Come strumento principale per influenzare i consumatori ad acquistare il prodotto, la pubblicità possiede due funzioni principali:

- la prima riguarda il ruolo del cosiddetto "Canale della pubblicità", con il quale la pubblicità fornisce preziose informazioni ai consumatori e consente loro di compiere scelte razionali riducendo le asimmetrie informative sul prodotto;
- la seconda riguarda il ruolo di "Differenziazione della pubblicità", attraverso il quale essa persuade i consumatori per mezzo di differenziatori intangibili e/o psichici e crea differenziazione tra i prodotti.

Abbiamo dunque evidenziato come la pubblicità svolga un ruolo chiave nell'influenzare i consumatori e dunque indurli a comprare il prodotto brandizzato. Ogni azienda potrebbe godere dal vantaggio che scaturisce dal fare pubblicità, perciò sorge spontaneo chiedersi perchè non tutte si avvalgano di essa. La risposta, facilmente intuibile, riguarda le risorsse finanziare disponibili. Un'azienda, infatti, non avrà mai budget illimitati, motivo per cui dovrà fare delle valutazioni e, solo dopo un'attenta analisi di mercato e studio di indici quali il ROI, potrà stimare il budget per la pubblicità ed accantonarne la relativa somma. Questo attento studio, se effettuato correttamente e nel giusto ordine, permetterà all'impresa di incrementare le vendite e massimizzare i propri profitti. A tal fine, potrebbe essere utile costruire un appropriato modello di advertising dinamico.

3.1 Modello Nerlove-Arrow

Il modello di Nerlove-Arrow è un punto di partenza per alcuni studi pratici e teorici nel marketing. Nerlove ed Arrow hanno sviluppato il classico modello, di cui appunto il nome Nerlove-Arrow (N-A), per descrivere la domanda dipendente dal tempo in una forma di funzione generale [10]. Nello specifico, usando il predetto modello, possiamo calcolare la domanda per il prodotto di un'azienda al tempo t come [10]:

$$S(t) = f(G(t), p(t), Z(t))$$

dove $G(t)$ indica lo stock di avviamento pubblicitario che riassume gli impatti delle uscite pubblicitarie correnti e passate dell'azienda sulla domanda. Esso evolve nel tempo secondo la seguente equazione dinamica [12]:

$$G'(t) = -\delta G(t) + a(t), G(0) = G_0 > 0$$

in cui $a(t)$ è l'esborso pubblicitario dell'azienda al tempo t e δ è un tasso proporzionale costante al quale si verifica il deprezzamento. Il deprezzamento può essere causato da sforzi di marketing di aziende concorrenti, ma tali effetti non sono modellati in modo endogeno. Si noti che ogni unità di sforzo pubblicitario (spesa) aumenta l'avviamento di una unità. Inoltre, nel modello N-A $S(t)$, $p(t)$ è il prezzo praticato per il prodotto al tempo t e $Z(t)$ è una variabile che rappresenta altri fattori che influenzano la domanda, che non sono sotto il controllo dell'azienda (esempio: redditi dei consumatori, popolazione e prezzi dei prodotti sostitutivi e complementari) [12]. Il modello ha la stessa struttura dei modelli fisici di accumulazione del capitale (modelli di espansione della capacità produttiva). Il lato sinistro dell'equazione rappresenta l'investimento netto e i due termini sul lato destro sono, rispettivamente, gli investimenti lordi e il deprezzamento.
Il modello di Nerlove-Arrow è espresso sotto forma di equazione differenziale. Questo perciò ci permette di risolverlo utilizzando la trasformata di Laplace e il metodo "classico". Di seguito andremo ad analizzare due casi: cosa succede se $a(t) = costante = k$ e come evolve se invece $a(t) = esponenziale = \alpha e^t$.

1. Nel primo caso, con $a(t) = costante = k$, avremo $G'(t) + \delta G(t) = k$. Procediamo ora risolvendo, rispettivamente, col metodo classico e con la trasformata di Laplace:

- metodo "classico":

$$G'(t) + \delta G(t) = k$$

$$G(t) = e^{-\int_0^t \delta dt} \left\{ c_1 + \int_0^t k e^{\int_0^t \delta dt} dt \right\}$$

$$G(t) = e^{-\delta t} \left\{ c_1 + k \int_0^t e^{\delta t} dt \right\}$$

$$G(t) = e^{-\delta t} \left[c_1 + \frac{k}{\delta} \left(e^{\delta t} - 1 \right) \right]$$

$$G(t) = c_1 e^{-\delta t} + \frac{k}{\delta} e^{\delta t} e^{-\delta t} - \frac{k}{\delta} e^{-\delta t}$$

A questo punto raccogliendo a fattor comune i termini in $\frac{k}{\delta}$ si ottiene

$$G(t) = c_1 e^{-\delta t} + \frac{k}{\delta} \left(1 - e^{-\delta t} \right)$$

Oppure, se al posto di $\frac{k}{\delta}$ raccogliessimo $e^{-\delta t}$

$$G(t) = e^{-\delta t}\left(c_1 - \frac{k}{\delta}\right) + \frac{k}{\delta}$$

- Laplace:

$$G'(t) + \delta G(t) = k$$

Trasformando otteniamo:

$$\mathcal{L}\left[G'(t)\right] + \delta\mathcal{L}\left[G(t)\right] = \mathcal{L}(k)$$

Applicando il teorema di derivazione si ha:

$$sX(s) - G(0) + \delta X(s) = \frac{k}{s}$$

A questo punto raccolgiamo a fattor comune i termini in $X(s)$, ottenendo:

$$X(s)(s+\delta) = \frac{k}{s} + G(0)$$

$$X(s) = \frac{k + sG(0)}{s(s+\delta)}$$

Ora, antitrasformando $X(s)$, trovo $G(t)$ nel modo:

$$G(t) = \mathcal{L}^{-1}\left[\frac{k + sG(0)}{s(s+\delta)}\right]$$

da cui:

$$\frac{k + sG(0)}{s(s+\delta)} = \frac{A}{s} + \frac{B}{s+\delta}$$

ed in definitiva:

$$k + sG(0) = A(s+\delta) + B(s)$$

Se $s = -\delta$:

$$k - \delta G(0) = 0 - \delta B \Longrightarrow B = G(0) - \frac{k}{\delta}$$

Se $s = 0$:

$$k = \delta A \Longrightarrow A = \frac{k}{\delta}$$

Trovati A e B, possiamo ora risolvere l'equazione:

$$G(t) = \mathcal{L}^{-1}\left[\frac{k + sG(0)}{s(s+\delta)}\right] = \frac{k}{\delta}\mathcal{L}^{-1}\left[\frac{1}{s}\right] + (G(0) - \frac{k}{\delta})\mathcal{L}^{-1}\left[\frac{1}{s+\delta}\right]$$

$$G(t) = \frac{k}{\delta} + \left(G(0) - \frac{k}{\delta}\right)e^{-\delta t}$$

$$G(t) = G(0)e^{-\delta t} + \frac{k}{\delta}\left(1 - e^{-\delta t}\right)$$

$$G(t) = e^{-\delta t}\left(G_0 - \frac{k}{\delta}\right) + \frac{k}{\delta}$$

Come si può notare, con $a(t) = k$, le soluzioni combaciano e sono pari a $G(t) = e^{-\delta t}\left(c_1 - \frac{k}{\delta}\right) + \frac{k}{\delta}$. L'unica differenza sta nel fatto che nel primo risultato è presente c_1, mentre lo stesso viene sostituito, nella seconda soluzione, da G_0. Perciò più grande sarà k (cioè l'esborso pubblicitario al tempo t) maggiore sarà lo stock di avviamento pubblicitario ($G(t)$). Di conseguenza, un aumento dell'esborso pubblicitario ha un effetto positivo sulla domanda di un prodotto al tempo t ($S(t)$).

2. Nel secondo caso, con $a(t) = \alpha e^t$, avremo $G'(t) + \delta G(t) = \alpha e^t$. Procediamo ora risolvendo, rispettivamente, col metodo classico e con la trasformata di Laplace:

- metodo "classico":

$$G'(t) + \delta G(t) = \alpha e^t$$

$$G(t) = e^{\int_0^t -\delta dt}\left\{c_1 + \int_0^t \alpha e^t \cdot e^{\int_0^t \delta dt} dt\right\}$$

$$G(t) = e^{-\delta t}\left\{c_1 + \frac{\alpha}{\delta+1}\int_0^t (\delta+1)\, t^{e(\delta+1)} dt\right\}$$

$$G(t) = e^{-\delta t}\left\{c_1 + \frac{\alpha}{\delta+1}\left[e^{t(\delta+1)}\right]_0^t\right\}$$

$$G(t) = e^{-\delta t}c_1 + \left(\frac{\alpha}{\delta+1}\right)e^{-\delta t + t(\delta+1)} - e^{-\delta t}\frac{\alpha}{\delta+1}$$

Raccogliendo a fattor comune i termini in $e^{-\delta t}$ si ottiene:

$$G(t) = e^{-\delta t}\left(c_1 - \frac{\alpha}{\delta+1}\right) + e^t\left(\frac{\alpha}{\delta+1}\right)$$

- Laplace:

$$G'(t) + \delta G(t) = \alpha e^t$$

Trasformando otteniamo:

$$\mathcal{L}\left[G'(t)\right] + \delta\mathcal{L}\left[G(t)\right] = \alpha\mathcal{L}\left[e^t\right]$$

Applicando il teorema di derivazione si ha:

$$sX(s) - G(0) + \delta X(s) = \frac{\alpha}{s-1}$$

A questo punto raccogliamo a fattor comune i termini in $X(s)$, ottenendo:

$$X(s)(s+\delta) = \frac{\alpha}{s-1} + G(0)$$

$$X(s) = \frac{\alpha + sG(0) - G(0)}{(s-1)(s+\delta)}$$

Troviamo ora $G(t)$ antitrasformando $X(s)$:

$$G(t) = \mathcal{L}^{-1}[\frac{\alpha + sG(0) - G(0)}{(s-1)(s+\delta)}]$$

$$\frac{\alpha + sG(0) - G(0)}{(s-1)(s+\delta)} = \frac{A}{s-1} + \frac{B}{s+\delta}$$

$$\alpha + sG(0) - G(0) = A(s+\delta) + B(s-1)$$

Se $s = 1$:

$$\alpha + G(0) - G(0) = A(1+\delta) + 0 \Longrightarrow A = \frac{\alpha}{1+\delta}$$

Se $s = -\delta$:

$$\alpha - \delta G(0) - G(0) = 0 + B(-\delta - 1)$$

$$\frac{\alpha + G(0)(-\delta-1)}{(-\delta-1)} = B \Longrightarrow B = -\frac{\alpha}{\delta+1} + G(0)$$

Dopo aver calcolato A e B possiamo quindi risolvere l'equazione:

$$G(t) = \mathcal{L}^{-1}[\frac{\alpha + \delta G(0) - G(0)}{(s-1)(s+\delta)}]$$

$$G(t) = \frac{\alpha}{1+\delta}\mathcal{L}^{-1}\left[\frac{1}{s-1}\right] + (G(0) - \frac{\alpha}{\delta+1})\mathcal{L}^{-1}\left[\frac{1}{s+\delta}\right]$$

$$G(t) = \frac{\alpha}{1+\delta}e^{t} - \frac{\alpha}{1+\delta}e^{-\delta t} + G(0)e^{-\delta t}$$

Raccogliendo a fattor comune i termini in $e^{-\delta t}$ si ottiene:

$$G(t) = (\frac{\alpha}{1+\delta})e^{t} + e^{-\delta t}(G_0 - \frac{\alpha}{\delta+1})$$

Come si può notare, con $a(t) = \alpha e^{t}$, le soluzioni combaciano e sono pari a $G(t) = e^{-\delta t}\left(c_1 - \frac{\alpha}{\delta+1}\right) + e^{t}\left(\frac{\alpha}{\delta+1}\right)$. L'unica differenza è che nel primo risultato è presente c_1, mentre lo stesso viene sostituito, nella seconda soluzione, da G_0. Come nel caso precedente, più grande sarà l'esborso pubblicitario al tempo t maggiore sarà lo stock di avviamento pubblicitario ($G(t)$).

3.2 Modello Vidale-Wolfe

Un modello di risposta alle vendite specifica il tasso di variazione del tasso di vendita di un'impresa $s_i(t)$ in funzione del tasso di vendita stesso e dei valori correnti degli strumenti di marketing dei giocatori. Molti dei modelli di risposta alle vendite suggeriti nella letteratura provengono dalle dinamiche a giocatore singolo studiate da Vidale e Wolfe [4]. Il modello dinamico di Vidale-Wolfe riguarda l'impatto della pubblicità sulle vendite che generalmente persiste oltre il periodo attuale con un effetto decrescente. Ponendo λ come la costante esponenziale delle vendite, M il livello di saturazione ed r la costante di risposta, Vidale e Wolfe hanno definito il tasso di vendita $S(t)$ al tempo t come [12]:

$$S'(t) = ru(t)[M - S(t)]/M - \lambda S(t)$$

dove $u(t)$ indica il tasso di spesa pubblicitaria, $[M - S(t)]/M$ è la frazione di potenziali clienti, e $\lambda S(t)$ è il numero di clienti persi. Come indica la precedente equazione differenziale, la variazione del tasso delle vendite, $S'(t)$, è correlata positivamente all'impegno pubblicitario $u(t)$ [10].

Vidale e Wolfe osservano due fatti principali relativi alla relazione tra vendite e pubblicità. L'intensità delle vendite diminuisce nel tempo se non viene effettuata alcuna pubblicità e, se viene eseguito uno sforzo pubblicitario adeguato in un periodo di tempo, l'intensità delle vendite aumenta, ma può emergere un effetto di saturazione [12].

Il modello di Vidale-Wolfe è espresso sotto forma di equazione differenziale. Questo perciò ci permette di risolverlo utilizzando la trasformata di Laplace e il metodo "classico". Di seguito andremo ad analizzare cosa succede se $u(t) = costante = k$.

Prima di iniziare a risolvere l'equazione differenziale, conviene semplificarla raccogliendo a fattor comune i termini in $S(t)$:

$$S'(t) = ru(t)\left[\frac{M - S(t)}{M}\right] - \lambda S(t)$$

$$S'(t) = ru(t)\left[1 - \frac{S(t)}{M}\right] - \lambda S(t)$$

$$S'(t) = ru(t) - ru(t)\frac{S(t)}{M} - \lambda S(t)$$

$$S'(t) = ru(t) - S(t)\left[\frac{ru(t)}{M} + \lambda\right]$$

1. Con $a(t) = costante = k$, avremo $S'(t) + S(t)\left[\frac{rk}{M} + \lambda\right] = rk$

- Procediamo ora con la risoluzione utilizzando la trasformata di Laplace:

$$S'(t) + S(t)\left[\frac{rk}{M} + \lambda\right] = rk$$

Trasformando otteniamo:

$$\mathcal{L}[S'(t)] + \left[\frac{rk}{M} + \lambda\right]\mathcal{L}[S(t)] = \mathcal{L}[rk]$$

Applicando ora il teorema di derivazione si ha:

$$sX(s) - S(0) + \left(\frac{rk}{M} + \lambda\right)X(s) = \frac{rk}{s}$$

A questo punto raccolgiamo a fattor comune i termini in $X(s)$, ottenendo:

$$X(s)\left[s + \frac{rk}{M} + \lambda\right] = \frac{rk + s\,[S(0)]}{s}$$

$$X(s) = \frac{rk + sS(0)}{s\left(s + \frac{rk}{m} + \lambda\right)}$$

Troviamo ora $S(t)$ antitrasformando $X(s)$:

$$S(t) = \mathcal{L}^{-1}[\frac{rk + sS(0)}{s\left(s + \frac{rk}{m} + \lambda\right)}]$$

$$\frac{rk + sS(0)}{s\left(s + \frac{rk}{m} + \lambda\right)} = \frac{A}{s} + \frac{B}{s + \frac{rk}{M} + \lambda}$$

$$rk + sS(0) = \left(s + \frac{rk}{M} + \lambda\right)A + (s)B$$

Per $s = 0$:

$$rk = \left(\frac{rk}{M} + \lambda\right)A \Longrightarrow A = \frac{rk}{\frac{rk}{M} + \lambda}$$

Per $s = -\frac{rk}{M} - \lambda$:

$$rk - \frac{rk}{M}S(0) - \lambda S(0) = -\left(\frac{rk}{m} + \lambda\right)B \Longrightarrow B = -\frac{rk}{\frac{rk}{M} + \lambda} + S(0)$$

Trovati A e B, possiamo ora risolvere l'equazione:

$$S(t) = (\frac{rk}{\frac{rk}{m} + \lambda})\mathcal{L}^{-1}\left[\frac{1}{s}\right] + \left(-\frac{rk}{\frac{rk}{M} + \lambda} + S(0)\right)\mathcal{L}^{-1}\left[\frac{1}{s + \frac{rk}{M} + \lambda}\right]$$

$$S(t) = \frac{rk}{\frac{rk}{M} + \lambda} + \left[-\frac{rk}{\frac{rk}{M} + \lambda} + S(0)\right]e^{-\left(\frac{rk}{M} + \lambda\right)t}$$

$$S(t)=\frac{rk}{\frac{rk}{M}+\lambda}\left[-e^{-\left(\frac{rk}{M}+\lambda\right)t}+1\right]+S(0)\cdot e^{-\left(\frac{rk}{M}+\lambda\right)t}$$

Posto per semplicità $\frac{rk}{M}+\lambda=q$, si ottiene:

$$S(t)=\frac{rk}{q}\left[-e^{-qt}+1\right]+S(0)\cdot e^{-qt}$$

$$S(t)=-\frac{rk\cdot e^{-qt}}{q}+\frac{rk}{q}+S(0)$$

$$S(t)=e^{-qt}\left[S(0)-\frac{rk}{q}\right]+\frac{rk}{q}$$

- Proseguiamo con la risoluzione utilizzando il metodo "classico":

$$S'(t)+S(t)\left[\frac{rk}{M}+\lambda\right]=rk$$

e per semplicità poniamo subito $\frac{rk}{M}+\lambda=q$. Si ottiene:

$$S(t)=e^{-\int_0^t q dt}\left[c_1+\int_0^t rke^{\int_0^t q dt}dt\right]$$

$$S(t)=e^{-qt}\left[c_1+rk\int_0^t e^{qt}dt\right]$$

$$S(t)=e^{-qt}\left[c_1+\frac{rk}{q}\int_0^t qe^{qt}dt\right]$$

$$S(t)=e^{-qt}\left\{c_1+\frac{rk}{q}\left[e^{qt}\right]_0^t\right\}$$

$$S(t)=e^{-qt}[c_1+\frac{rk}{q}e^{qt}-\frac{rk}{q}]$$

$$S(t)=c_1e^{-qt}+\frac{rk}{q}-\frac{rk}{q}e^{-qt}$$

A questo punto raccolgiamo a fattor comune i termini in e^{-qt}. Si ha quindi:

$$S(t)=e^{-qt}\left[c_1-\frac{rk}{q}\right]+\frac{rk}{q}$$

Come si può notare, i due risultati (ottenuti con Laplace e con il metodo classico) combaciano e sono pari a $S(t)=e^{-qt}\left[c_1-\frac{rk}{q}\right]+\frac{rk}{q}$. L'unica differenza è che nel primo risultato è presente $S(0)$, che viene sostituito da c_1 nella seconda soluzione. Perciò, maggiore sarà il tasso di spesa pubblicitario, $(u(t))$, più grande sarà il tasso di vendita $S(t)$ al tempo t.

3.3 Analisi dei due modelli in chiave marketing

I due modelli sopra analizzati sono alla base della letteratura sulle applicazioni di controllo ottimo per l'advertising. La valutazione degli effetti che la comunicazione di marketing ha sui consumatori è quasi certamente l'area più approfondita nel campo delle misurazioni di marketing. Si possono individuare tre profili nei quali racchiudere i criteri di direzione di un sistema di misurazione di marketing [13]:

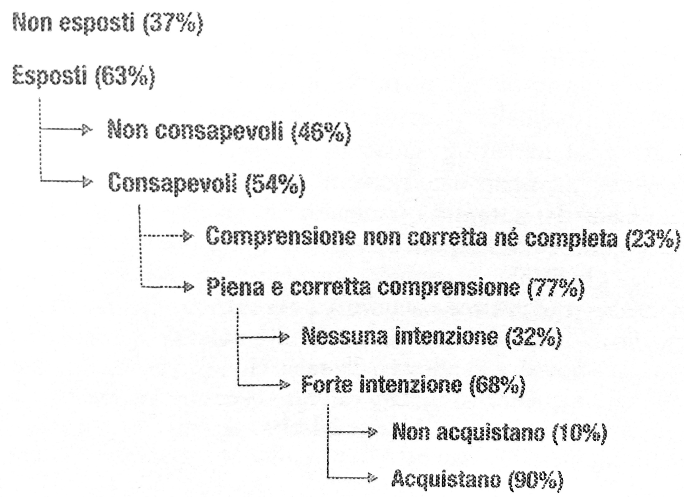
- profilo cronologico (misure ritardate e misure anticipate);
- profilo metodologico (misure osservabili e misure rilevabili);
- profilo epistemologico (misure causa e misure effetto);

Tramite la comunicazione di marketing, le aziende sono in grado di informare ed indirizzare i consumatori, oltre che rammentare loro il proprio brand ed i propri prodotti [13]. Se tale comunicazione risulta efficace, essa trasformerà i consumatori da semplici acquirenti a fidelizzati (in gergo chiamati appunto evangelisti). Il legame tra marca e cliente indurrà quest'ultimo ad attribuire al prodotto non solo un valore oggettivo, legato dunque alla sua performance, ma anche e soprattutto un valore affettivo. Questa relazione che si crea di conseguenza, viene definita, in ambito marketing, Customer equity. La medesima relazione ha come conseguenza una fidelizzazione anche verso la casa produttrice di tale prodotto, chiamata per l'appunto Company equity.
Possiamo distinguere le otto più importanti modalità di comunicazione [13]: pubblicità; eventi ed esperienze; promozione delle vendite; marketing diretto; pubbliche relazioni; passaparola; marketing interattivo; vendita personale. Esistono inoltre diversi modi in cui le attività di comunicazione possono sostenere le vendite: espandendo la consapevolezza della marca, segnando l'immagine nella mente dei consumatori, facilitando opinioni positive nei confronti della stessa e consolidando la lealtà dei consumatori.
La comunicazione di marketing, se utilizzata in maniera adeguata, può generare elevati profitti per le aziende. Ne è un chiaro esempio P&G che, grazie alla sponsorizzazione della squadra degli U.S.A. alle Olimpiadi di Vancouver, ha stimato un aumento dei ricavi pari a 100 milioni di euro. Questo aumento le ha consentito di essere sponsor ufficiale anche delle successive Olimpiadi (ovvero quelle delle edizioni dal 2012 al 2020). Proprio nell'edizione del 2012 (Olimpiadi di Londra) P&G ha ideato la campagna "grazie Mamma". Questa pubblicità, che mirava principalmente alla componente emotiva delle persone, ha generato fin da subito fidelizzazione tra i cosumatori, i quali si sono rispecchiati nei protagonisti della pubblicità stessa. Questa corretta campagna di marketing ha portato, secondo le stime, ad un aumento pari a 200 milioni di pezzi vendita [13].
L'ammontare degli investimenti in comunicazione si differenzia in base ai settori e alle singole imprese. Nell'industria della cosmetica, per esempio, l'investimento in comunicazione può arrivare fino al 45% del fatturato dell'azienda, mentre nel settore delle macchine industriali esso raggiunge solo il 10% del fatturato [13]. Nel definire il budget pubblicitario bisogna tenere conto di cinque fattori

specifici: stadio del ciclo di vita del prodotto; quota di mercato; concorrenza; frequenza dell'attività pubblicitaria; sostituibilità del prodotto. Possiamo identificare quattro diversi metodi usati dalle aziende per scegliere il budget da investire in comunicazione [13]:

- metodo del budget disponibile: in questo caso le imprese lo definiscono in base alla loro situazione finanziaria. La comunicazione non viene considerata come un investimento e produce incertezza per quanto riguarda lo stanziamento annuale, rendendo complicata una pianificazione di lungo periodo;
- metodo della percentuale sulle vendite: in questo caso le imprese fissano il budget su una percentuale del fatturato. Questo metodo indica che la comunicazione sia effetto e non causa delle vendite e comporta che il budget non sia determinato dalle opportunità di mercato, bensì dalle risorse finanziarie;
- metodo della parità competitiva: in questo caso il budget in comunicazione è definito in funzione dell'intento di mantenersi al medesimo livello della concorrenza. Questo metodo si basa sul fatto che le spese dei concorrenti costituiscono il "buon senso collettivo" del settore e che il pericolo di creare guerre di comunicazione va a diminuire;
- metodo dell'obiettivo da conseguire: in questo caso il budget viene definito in base a specifici obiettivi, determinando le azioni da effettuare per realizzare tali obiettivi e calcolandone i costi. Il budget corrisponde all'ammontare di questi costi;

Il modello ad albero riportato nella figura seguente, presa da [13, p. 310], fornisce una misura dei risultati della comunicazione in base alla risposta dei consumatori, e costituisce l'indicatore sintetico di risultato detto customer response index (CRI). Il CRI non è altro che il risultato delle moltiplicazioni delle singole percentuali nei diversi stadi del processo [13].



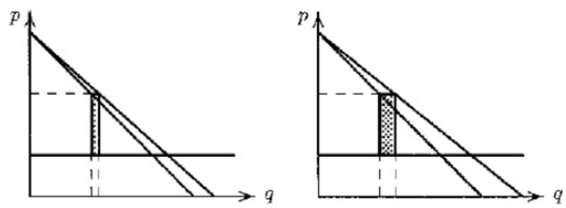
$$CRI = 0,63 \cdot 0,54 \cdot 0,77 \cdot 0,68 \cdot 0,90 = 16\%$$

Un altro indicatore sintetico che misura gli effetti della pubblicità è l'elasticità delle vendite alla pubblicità [13]. Questa è misurabile su base temporale (settimanale, mensile o annuale, cioè per una sola campagna) e si calcola come:

$$\frac{\Delta\% vendite}{\Delta\% advertising}$$

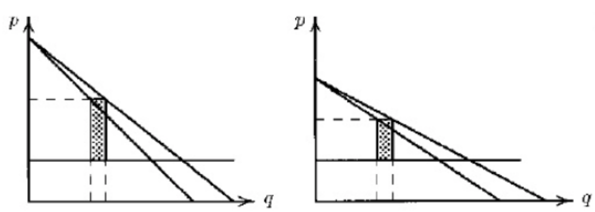
Nell'interpretare questo indicatore è obbligatorio fare attenzione agli orizzonti temporali. Infatti, per misurare l'elasticità delle vendite alla pubblicità bisogna sempre tenere conto del cosiddetto "carry over effect" e dell'effetto ritardato, generati dalle disparità temporali fra l'investimento e le vendite [13]. Il "carry over effect" (detto anche effetto traino) consiste in un aumento delle vendite che potrebbe essere determinato dalla immutabilità del ricordo della marca, cioè dagli effetti di campagne pubblicitarie effettuate nel passato [13]. L'effetto ritardato consiste, invece, nell'aumento delle vendite che vengono riportate con un ritardo in confronto a quando si verifica l'aumento dell'investimento in pubblicità [13]. Va inoltre rilevato che esistono molti fattori esogeni che contribuiscono a modificare il trend delle vendite, in aggiunta alla pubblicità. A causa di questi fattori, che anche modelli econometrici spesso non sono in grado di isolare, l'indicatore "vendita" risulta perciò molto ambiguo. L'effetto della pubblicità sulle vendite risulterà tanto più difficile da controllare quanto più i fattori esterni aumentano o sono incontrollabili.
Nella realtà l'entità degli investimenti in pubblicità tra le aziende risultano essere diversi. Quanto appena esposto può essere rilevato misurando l'intensità della pubblicità attraverso l'indice "advertising-to-revenue" (a/R) (il rapporto

tra le spese in pubblicità e le vendite totali) [6]. Per esempio, nell'industria del sale, l'indice oscilla tra lo 0% e il 5%, mentre, in quello dei cereali da colazione tra l'8% e il 13%. A questo punto è importante capire che cosa crei questo differenzale di spesa in pubblicità. Una prima spiegazione ci è fornita dai grafici seguenti [6]:



(a) Ad-inelastic demand curve (b) Ad-elastic demand curve

Entrambi i grafici a e b considerano un ammontare fisso speso in pubblicità. Il caso a è il caso in cui la spesa pubblicitaria ha un lieve impatto sulla domanda. Un esempio potrebbe essere il cemento: le compagnie di costruzione non sono molto sensibili alla pubblicità sul cemento. Le loro decisioni di acquisto si basano principalmente sul prezzo e sulle relative condizioni di vendita. Il caso b corrisponde al caso in cui la curva di domanda è sensibile alle spese in pubblicità. Le bevande analcoliche potrebbero essere uno dei molti esempi. Il punto principale dei grafici è che il guadagno marginale derivante dalle spese in pubblicità è maggiore quanto più è sensibile la curva di domanda alle spese in pubblicità [6]. In termini generali possiamo dedurre che gli investimenti in pubblicità saranno maggiori quanto più la curva di domanda risulta sensibile alle spese pubblicitarie.
La figura seguente ci fornisce un ulteriore spunto [6]:



(a) Inelastic demand curve (b) Elastic demand curve

In entrambi i casi, a e b, la pubblicità ha lo stesso impatto sulla quantità domandata. Perciò, come spiegato precedentemente, i ricavi derivanti dalla pubblicità dovrebbero essere gli stessi. La differenza tra i due casi è che la curva di domanda è più elastica nel caso b che nel caso a. Visto che all'aumentare dell'elasticità della domanda diminuisce il prezzo ottimale, lo scarto prezzo-costo sarà minore quando l'elasticità è elevata. Dato che lo scarto prezzo-costo è inferiore nel caso b, il profitto correlato alla pubblicità sarà minore anche se l'incremento della quantità domandata è lo stesso [6]. In altre parole, il profitto marginale dalla pubblicità è maggiore quanto più grande è lo scarto prezzo-costo. Tutto ciò può essere riassunto nella formula di Dorfman-Steiner [6]:

$$\frac{a}{R} = \frac{p - MC}{p}\eta = \frac{\eta}{\epsilon}$$

dove η è l'elasticità della domanda rispetto alle spese pubblicitarie ed ϵ è l'elasticità della domanda rispetto al prezzo. In altri termini, η misura di quanto aumenta la quantità domandata (in percentuale) quando le spese pubblicitarie aumentano dell'1%. Allo stesso modo, ϵ misura di quanto diminuisce la quantità domandata quando il prezzo aumenta dell'1% [6].

4 Conclusioni

Attraverso lo studio della trasformata di Laplace siamo stati in grado di calcolare in maniera diretta la soluzione delle equazioni differenziali ordinarie. Questo "nuovo" metodo prevede l'applicazione di diversi teoremi, ma esso risulta decisamente più semplice ed immediato rispetto metodo "classico", il quale prevede la risoluzione delle equazioni differenziali tramite l'utilizzo degli integrali e porta con se nozioni complesse di matematica generale. Inoltre, come è stato possibile constatare nel secondo capitolo, la trasformata di Laplace è facilmente applicabile a diversi modelli di advertising dinamico. Esempi di questi modelli analizzati all'interno del presente elaborato sono il modello di Nerlove-Arrow e il modello di Vidale-Wolfe; entrambi infatti si presentano sotto forma di equazioni differenziali lineari. Tramite lo studio di questi due modelli siamo giunti a concludere che l'intensità delle vendite diminuisce nel tempo se non viene effettuata alcuna pubblicità e che, se viene eseguito uno sforzo pubblicitario adeguato in un periodo di tempo, l'intensità delle vendite aumenta [4]. Analizzando poi i due modelli sopra citati in chiave marketing, ci ha anche permesso di comprendere come vengano determinati i budget per la comunicazione dalle imprese. Non bisogna però dimenticarsi che i budget non sono altro che delle stime e che servono diversi tentativi per riuscire a detreminare il mix adeguato per ciascuna azienda. Perciò, l'applicazione di una "semplice" formula, come quella di Dorfman-Steiner, non sarà sufficiente per decidere quanto investire in pubblicità. Ad esempio, nel settore del beauty, a differenza di altri settori, la comunicazione sta acquisendo un ruolo sempre più importante. Per capire come questo argomento sia vario e mutevole, basta prendere in considerazione L'Oréal: brand di largo successo all'interno del settore Beauty, nel primo semestre del 2018 ha deciso di destinare il 30% del suo fatturato in advertising, percentuale che ha superato addirittura quella del costo del venduto, che si è fermata a quota 27% [8]. In conclusione, possiamo affermare che, nella realtà, non esista una "regola aurea" per la determinazione del budget da investire in advertising, ma che le aziende lo ridefiniscano sistematicamente, in base alle mosse dei concorrenti e ai movimenti perpetui del mercato.

5 Riferimenti Bibliografici

References

[1] AHMAD, S., AMBROSETTI, A., 2015. A Textbook on Ordinary Differential Equations. 2° ed. Milano: Springer.

[2] BETOUNES, D., 2013. Differential Equations: Theory and Application: With Maple®. 1° ed. (S.l.): Springer Science & Business Media.

[3] BURATTO, A., et al., 2013. Matematica Generale. 2° ed. Padova: Libreria Progetto.

[4] BURATTO, A., GROSSET, L., VISCOLANI, B., 2005. Linear models and advertising. Rendiconti per gli Studi Economici Quantitativi, 2005, 107-120.

[5] ID., 2019. Ottimizzazione dinamica: modelli economici e gestionali. 5° ed. Padova: Libreria Progetto.

[6] CABRAL, L., 2017. Introduction to Industrial Organization. 2° ed. (S.l.): The MIT Press.

[7] CAPPELLARI, R., 2016. Marketing della moda e dei prodotti lifestyle. 2° ed. Roma: Carocci editore.

[8] ID., 2018. Beauty: quattro numeri per capire il settore oggi. Disponibile su <https://romanocappellari.com/2018/08/10/beauty-quattro-numeri-per-capire-il-settore-oggi/> [Data di accesso: 01/06/2019].

[9] HEADING, J., 1978. Equazioni differenziali ordinarie. 1° ed. (S.l.): Liguori Editore.

[10] HUANG, J., LENG, M., LIANG, L., 2012. Recent developments in dynamic advertising research. European Journal of Operational Research, 220 (3), 591-609.

[11] JERRI, A. J., 1992. Integral and Discrete Transforms with Applications an Error Analysis. 1° ed. New York: Marcel Dekker.

[12] JØRGENSEN, S., ZACCOUR, G., 2004. Differential Games in Marketing. 1° ed. (S.l.): Springer Science & Business Media.

[13] KOTLER, P., et al., 2018. Marketing per Manager: modelli, applicazioni e casi sul marketing fatto in Italia. 2° ed. (S.l.): Pearson.

[14] KRESS, R., 2014. Linear Integral Equations. 3° ed. (S.l.): Springer.

[15] SETHI, S. P., 1973. Optimal control of the Vidale-Wolfe advertising model. Operations Research, 21(4), 998-1013.

[16] ID., 1977. Optimal advertising for the Nerlove-Arrow model under a budget constraint. Journal of the Operational Research Society, 28(3), 683-693.

[17] SPIEGEL, M. R., 1965. Theory and Problems of Laplace Transforms. 1°ed. New York: McGraw-Hill.

[1]

[1] numero di parole ad esclusione della bibliografia: 7388